Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Tópicos de la Teoría del Punto Fijo en Espacios Normados Ordenados

Tesis presentada al

Posgrado en Ciencias Matemáticas

como requisito para obtener el título de

Maestro en Ciencias Matemáticas

por

Roque Vidal Luciano Gerardo

Director de tesis

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna

Puebla, Pue. Febrero de 2021

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

ROQUE VIDAL LUCIANO GERARDO

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 6 de enero de 2021, con la tesis titulada:

Tópicos de la Teoría del punto fijo en espacios normados ordenados

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 3 de febrero de 2021

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578 · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS · SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
COORDINADORA DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Dedicado a mi familia.

Agradecimientos

A mis hermanas, a Dulce por abrir el camino para seguir estudiando la universidad, a Yasmin por ser mi guía durante la carrera, y a Karen por ser quien da esquina cuando se requiere dar un respiro.

A mamá Rafa y a mis tías Chayo, Lupe, Corazón y Rosa, por todo el apoyo hacia mi persona, sin ellas creo que mi vida habría sido más difícil y con menos color. A mi primo Jhon por los momentos que hemos pasado juntos, y a mi novia Brendita por las horas que pasamos trabajando juntos.

A mis amigos, por ayudarme a mi crecimiento académico en más de una forma. A todos mis amigos que hicieron de esta carrera algo más grato.

A mi asesor, el Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna por toda la ayuda brindada para creecer como matemático, y esa gran paciencia para explicar temas complicados de manera sencilla.

A m jurado, el Dr. Jacobo Oliveros, la Dra. Patrica Dominguez Soto, Carlos Guillen Galvan y Dr. Gabriel Kantún, por leer mi trabajo de tesis y ayudarme a entender mejor el tema y el idioma español mediante sus observaciones.

Introducción

Desde el punto de vista histórico, los primeros teoremas del punto fijo surgieron en el contexto de demostrar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales e integrales. Poincaré fue el primero en trabajar en este campo, en 1886. Luego, Brouwer en 1912, probó un teorema del punto fijo para un cuadrado, una esfera y sus contrapartes en dimensión n.

Uno de los primeros resultados trascendentales en el campo de la Teoría del Punto Fijo en espacios métricos fue presentado en 1922 por Stefan Banach; con su célebre teorema conocido como el Principio de Contracción de Banach, es considerado como uno de los principios fundamentales en el campo del Análisis Funcional. Una de las restricciones principales del Teorema del Punto Fijo de Banach es que las funciones contractivas en el sentido de Banach son uniformemente continuas.

Este trabajo se presentan algunos teoremas del punto fijo sobre espacios métricos no tan conocidos. También se presentan teoremas de punto fijo sobre álgebras normadas ordenadas, donde las pruebas se basan principalmente en sus propiedades de orden.
Esta tesis se encuentra organizada de la siguiente manera:

Primer capítulo

Contiene una introducción sobre la Teoría del Punto Fijo en los espacios métricos, donde se destaca el Teorema de Punto Fijo de Banach ya que sirvió de inspiración en otros investigadores para el desarrollo de esta Teoría. Creando su propia noción de función contractiva, como lo hicieron los matemáticos Hardy y Rogers.

Segundo capítulo

Se dan conceptos sobre espacios vectoriales ordenados, necesarios para el resto del trabajo. Se revisa el concepto de cono y se analiza cuando una sucesión es $x-$uniformemente convergente. Se presenta el concepto de funcional de Minkowski, la forma de inducir una norma mediante este y la relación que guarda la convergencia dada por el funcional de Minkowski de $[-x, x]$ y la $x-$uniformemente convergencia.

Tercer capítulo

Se define el concepto de $w-$convergencia para espacios normados ordenados y se comparan la convergencia en términos de la norma de este espacio con la $x-$uniformemente convergencia y la $w-$convergencia. Se aplica esta teoría para obtener Teoremas de Punto fijo en funciones Lipschitz en orden.

Cuarto capítulo

Se revisan algunos conceptos de álgebras normadas. En particular, el álgebra de operadores. Se presentan algunos Teoremas de Punto Fijo para álgebras normadas que posean un orden inducido por un cono.

Índice general

Capítulo 1

Teoremas de Punto Fijo en Espacios Métricos

En este capitulo se desarrollan algunos teoremas de punto fijo del tipo Banach en la teoría que se obtuvo para espacios métricos.

1.1. Teorema del Punto Fijo de Banach

Se comienza respondiendo a la pregunta, ¿Qué es un punto fijo? Luego se dan algunos ejemplos simples de este concepto.

Definición 1.1.1. *Sea X un conjunto no vacío y $f : X \longrightarrow X$ una función. Un elemento x en X es un punto fijo de f si $f(x) = x$.*

Ejemplo 1.1.1. *Mediante inspección se puede verificar que:*

(1) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - x - 3$. Los puntos fijos de f son -1 y 3.

(2) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Los puntos fijos de f son 0 y 1.

(3) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 3$. f no tiene puntos fijos.

(4) $X \neq \emptyset$ *y sea* $f : X \longrightarrow X$ *definida por* $f(x) = x$. *El conjunto de sus puntos fijos de* f *es* X.

Definición 1.1.2. *Para cada* $x_0 \in X$ *y* $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *se define inductivamente* $f^n(x)$ *como*

$$f^n(x_0) = \begin{cases} x_0 & si \quad n = 0, \\ \\ f(f^{n-1}(x_0)) & si \quad n \geq 1. \end{cases}$$

A la sucesión $\{f^n(x_0)\}$ *se le llama* ***sucesión de iterados de Picard****. También se le conoce como sucesión de iterados, sucesión de aproximaciones sucesivas u orbita de* f *en* x_0.

En adelante se usará $\{x_n\}$ para referirse a la sucesión de iterados de Picard $\{f^n(x_0)\}$ de un elemento x_0 cuando no se provoque confusión.

Teorema 1.1.1. *Sean* X *un espacio métrico,* x *en* X *y* $f : X \longrightarrow X$ *una función continua en* x. *Si existe* $x_0 \in X$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} f^n(x_o) = x$, *entonces* x *es un punto fijo.*

Demostración

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) \\ &= \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_o) \\ &= x. \end{aligned}$$

■

Teorema 1.1.2. *Sean* X *un espacio métrico y* $f : X \longrightarrow X$ *una función. Si existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *y un único* x^* *en* X *tal que* $f^{n_0}(x^*) = x^*$, *entonces* x^* *es el único punto fijo de* f.

Demostración

$f^{n_0}(f(x^*)) = f^{n_0+1}(x^*) = f(f^{n_0}(x)) = f(x^*)$, i.e., $f(x^*)$ es un punto fijo de f^{n_0}. Por la unicidad del punto fijo de f^{n_0} se tiene $x^* = f(x^*)$.

Sea $x \in X$ otro punto fijo de f entonces x es también un punto fijo de f^{n_0}, y entonces $x = x^*$ por la existencia única de punto fijo de f^{n_0}. Por lo tanto x^* es el único punto fijo de f. ∎

El siguiente teorema servirá para simplificar en este capítulo las pruebas para el Teorema de Banach y el de Hardy-Rogers.

Teorema 1.1.3. *Sean (X, d) un espacio métrico completo, $f : X \to X$ una función. Si existe $a \in (0, 1)$ tal que para todo $x_0 \in X$ se cumple $d(f^2(x_0), f(x_0)) \leq ad(f(x_0), x_0)$, entonces existe $x^* \in X$ un punto fijo de f tal que*

1. *$\{f^n(x_0)\}$ converge a x^*,*

2. *$d(f^n(x_0), x^*) \leq \dfrac{a^n}{1-a} d(f(x_0), x_0)$, para todo n en $\mathbb{N}$.*

Demostración

Se afirma que para todo $n \in \mathbb{N}$, $d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \leq a^n d(f(x_0), x_0)$.

Para $n = 1$ se tiene que

$$d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) = d(f(x_0), f^2(x_0)) \leq ad(f(x_0), x_0) = a^n d(f(x_0), x_0).$$

Suponiendo que se cumple la proposición para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(f^{n+1}(x_0), f^{n+2}(x_0)) &= d(f(f^n(x_0)), f(f^{n+1}(x_0))) \\ &\leq ad(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \leq a^{n+1} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Se cumple:

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^{n+m}(x_0)) &\leq d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + \cdots + d(f^{n+m-1}(x_0), f^{n+m}(x_0)) \\ &\leq a^n d(f(x_0), x_0) + \cdots + a^{n+m-1} d(f(x_0), x_0) \\ &\leq a^n d(f(x_0), x_0)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1}) \\ &= a^n d(f(x_0), x_0) \frac{1 - a^m}{1 - a} \leq \frac{a^n}{1 - a} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Así,

$$d(f^n(x_0), f^m(x_0)) \leq \frac{a^n}{1 - a} d(f(x_0), x_0). \tag{1.1}$$

De (1.1) y $a \in (0, 1)$ se concluye que $\{f^n(x_0)\}$ es una sucesión de Cauchy y como X es completo, existe $x^* \in X$ tal que la sucesión $\{f^n(x_0)\}$ converge a x^*.

Haciendo tender m a infinito en (1.1) se obtiene

$$d(f^n(x_0), x^*) \leq \frac{a^n}{1 - a} d(f(x_0), x_0). \tag{1.2}$$

Ahora se prueba que x^* es punto fijo de f.

Se observa que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\begin{aligned} d(f(x^*), x^*) &= d(f(x^*), f^{n+1}(x_0)) + d(f^{n+1}(x_0), x^*) \\ &\leq a d(x^*, f^n(x_0)) + d(f^{n+1}(x_0), x^*) \\ &\leq d(x^*, f^n(x_0)) + d(f^{n+1}(x_0), x^*). \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$ implica $d(f^k(x_0), x^*) < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Se sigue que $d(f(x^*), x^*) \leq d(x^*, f^{n_0}(x_0)) + d(f^{n_0+1}(x_0), x^*) < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Por lo tanto, $d(f(x^*), x^*) = 0$, es decir, $f(x^*) = x^*$. ■

En esta parte se presenta un Teorema que tiene los resultados ideales a obtener en un Teorema del Punto Fijo.

Definición 1.1.3. *Sean X un espacio métrico, $\alpha \in (0, 1)$ y $f : X \longrightarrow X$ una función. Se dice que f es α-contractiva en X, si*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \text{ para toda } x, y \in X.$$

A f también se le llama α-contratante o simplemente contracción.

A continuación se presentan algunas de las propiedades de las contracciones.

Teorema 1.1.4. *Sean (X, d) un espacio métrico, $\alpha \in (0, 1)$ y $f : X \longrightarrow X$ una función α-contractiva en X. Entonces f es uniformemente continua en X.*

Demostración

Sean $x,\ y$ en X y $\epsilon > 0$. Se elige a $\delta = \dfrac{\epsilon}{\alpha} > 0$. Luego,

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) < \alpha\delta = \epsilon.$$

Por tanto, f es uniformemente continua. ■

Teorema 1.1.5. *Sean X un espacio métrico completo, $\alpha \in (0, 1)$ y $f : X \longrightarrow X$ una función α-contractiva, entonces f tiene a lo más un punto fijo $x \in X$.*

Demostración

Sean $x,\ y$ puntos fijos de f, entonces $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$.
Como $0 < \alpha < 1$, entonces $d(x, y) = 0$, es decir, $x = y$. ■

Teorema 1.1.6 (Teorema del punto fijo de Banach)**.** *Sean X un espacio métrico completo, $\alpha \in (0, 1)$ y $f : X \longrightarrow X$ una función α-contractiva. Entonces, f tiene un único punto fijo x en X y para todo x_0 en X, se tiene:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (f^n(x_0)) = x$.

(b) Estimación del error:
$d(f^n(x_0), x) \leq \left(\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\right) d(x_0, f(x_0))$.

Demostración

Por el Teorema 1.1.5, f tiene a lo más un punto fijo.

Sea $x_0 \in X$. Como f es $\alpha-$contractiva se tiene que

$$d(f^2(x_0), f(x_0)) \leq \alpha d(f(x_0), x_0).$$

Por el Teorema 1.1.3 se cumple el resultado. ■

1.2. La contracción de Hardy-Rogers

En el Teorema 1.1.4 se demostró que toda función α-contractiva es uniformemente continua. Una de las preguntas que surgen es ¿Hay una definición de función contractiva que no implique que la función sea continua? Una respuesta afirmativa fue dada en [6] por los matemáticos Hardy y Rogers.

Definición 1.2.1. *Sean X un espacio métrico y $T : X \longrightarrow X$ una función. Si existen $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \geq 0$ escalares tales que $\sum_{i=1}^{5} a_i < 1$ y*

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq a_1 d(x, y) + a_2 d(x, T(x)) + a_3 d(y, T(y)) + a_4 d(x, T(y)) + a_5 d(y, T(x)),$$

entonces T se dice que es una contracción en el sentido de Hardy-Rogers.

Los siguientes resultados fueron dados al igual que la definición en 1973.

Teorema 1.2.1. *Sean X un espacio métrico y $T : X \longrightarrow X$ una función contractiva en el sentido de Hardy-Rogers, entonces T tiene a lo más un punto fijo.*

Demostración

Supongamos que existen $x,\ y \in X$ puntos fijos de T, entonces

$$\begin{aligned}
d\left(T(x), T(y)\right) &\leq a_1 d(x, y) + a_2 d(x, T(x)) + a_3 d(y, T(y)) + a_4 d(x, T(y)) + a_5 d(y, T(x)) \\
&= a_1 d(x, y) + a_2 d(x, x) + a_3 d(y, y) + a_4 d(x, y) + a_5 d(y, x) \\
&= (a_1 + a_4 + a_5) d(x, y) \\
&\leq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) d(x, y)
\end{aligned}$$

Como $x,\ y$ son puntos fijos se tiene que $d(x, y) \leq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) d(x, y)$. Además, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \geq 0$ escalares tales que $\sum_{i=1}^{5} a_i < 1$ implica $x = y$. ■

Teorema 1.2.2 (Teorema del punto fijo de Hardy-Rogers)**.** *Sean X un espacio métrico completo, $f : X \longrightarrow X$ una función contractiva en el sentido de Hardy-Rogers, entonces T tiene un punto fijo x^*. Además, dado $x_0 \in X$, se tiene que* *(a)* $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = x$,

(b) Estimación del error:
$d(f^n(x_0), x) \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, f(x_0))$, *donde* $\alpha = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

Demostración

Sea $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
d\left(T^2(x), T(x)\right) &\leq a_1 d(T(x), x) + a_2 d(T(x), T^2(x)) + a_3 d(x, T(x)) \\
&+ a_4 d(T(x), T(x)) + a_5 d(x, T^2(x)) \\
&= (a_1 + a_3) d(x, T(x)) + a_2 d(T(x), T^2(x)) \\
&+ a_5 d(x, T^2(x)) \\
&\leq (a_1 + a_3) d(x, T(x)) + a_2 d(T(x), T^2(x)) \\
&+ a_5 (d(x, T(x)) + d(T(x), T^2(x))) \\
&\leq (a_1 + a_3 + a_5) d(x, T(x)) + (a_2 + a_5) d(T(x), T^2(x)).
\end{aligned}$$

En consecuencia, $d\left(T^2(x), T(x)\right) \leq \dfrac{a_1 + a_3 + a_4}{1 - a_2 - a_5} d(x, T(x))$.
Observamos que
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq \alpha < 1$, entonces $a_1 + a_3 + a_4 < 1 - a_2$. Así, $\dfrac{a_1 + a_3 + a_4}{1 - a_2} < 1$.
Por otro lado, se tiene que
$0 < 1 - a_2 < 1 - a_2 - a_5$ o bien $\dfrac{1}{1 - a_2 - a_5} < \dfrac{1}{1 - a_2}$.
Por lo cual, $\dfrac{a_1 + a_3 + a_4}{1 - a_2 - a_5} < 1$.

Por lo cual, usando el Teorema (1.1.3) se sigue que T tiene un punto fijo y por el Teorema (1.2.1) se tiene la unicidad. ■

A continuación se dan ejemplos.

Definición 1.2.2. *Sean X un espacio métrico, $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ y $f : X \longrightarrow X$ una función. Decimos que f es α-contractiva en el sentido de Kannan, si*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha[d(x, f(x)) + d(y, f(y))], \text{ para todo } x, \ y \text{ en } X.$$

α se llama constante de contracción de Kannan.

Definición 1.2.3. *Sean X un espacio métrico y $f : X \longrightarrow X$ una función. Se dice que f es contractiva en el sentido de Chatterjea, si existe $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \alpha(d(x, f(y)) + d(y, f(x))$, para todo $x, y \in X$.*
A α se le llamará constante de contracción de Chatterjea.

Se observa que una $\alpha-$contracción en el sentido de Banach es un caso particular de la contracción de Hardy-Rogers, donde $\alpha = a_1$ y $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$. En esta sección se presentan definiciones de algunas contracciones que cumplen con ser un caso particular de la contracción de Hardy-Rogers. Análogamente se tiene que el Kannan es un caso particular con $\frac{\alpha}{2} = a_2 = a_3$ y el de Chatterjea también pero con $\frac{\alpha}{2} = a_4 = a_5$. Por lo cual se obtiene.

Teorema 1.2.3 (Teorema del Punto Fijo de Chatterjea)**.** *Sean X un espacio métrico completo, $f : X \longrightarrow X$ una función contractiva en el sentido de Chatterjea con constante de contracción α. Entonces, f tiene un único punto fijo $x \in X$. Además, dado $x_0 \in X$, se tiene que*
a) $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = x$.
b) Estimación de error:
$d(f^n(x_0), f(x)) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \left(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right) d(x_0, f(x_0))$.

Se obtiene un resultado análogo para la contradicción de Chatterjea.

Ahora se verá la independencia entre las definiciones de que una función f sea contracción en el sentido Banach, contracción en el sentido de Kannan y contracción en el sentido de Chatterjea.

Este primer ejemplo muestra una función α-contractiva en el sentido de Banach, pero no es contractiva en el sentido de Kannan.

Ejemplo 1.2.1. *Sean $D = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \| (x_1, x_2) \| \leq 1\right\}$ con la métrica usual en $\mathbb{R}^2$. Se define $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por $f(x_1, x_2) = \frac{3}{4}(-x_1, x_2)$. Se afirma que f es contractiva en* *el sentido de Banach, pero no es contractiva en el sentido de Kannan ni Chatterjea.*

Demostración

Primero se probará que es una contracción en el sentido de Banach.

Sean $x, y \in D$, con $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \| \frac{3}{4}(-x_1, x_2) - \frac{3}{4}(-y_1, y_2) \| = \frac{3}{4} \| (-x_1, x_2) - (-y_1, y_2) \| \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{(-x_1 + y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \frac{3}{4} \| (x_1, x_2) - (y_1, y_2) \| = \frac{3}{4} d(x, y). \end{aligned}$$

Lo cual prueba que f es $\frac{3}{4}$-contractiva.

Veamos que f no es β-contractiva en el sentido de Kannan para ningún $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Sea $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Para $x = (0, 1),\ y = (0, 0)$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \frac{3}{4} > 2\beta\frac{3}{4} = \beta[\frac{3}{4} + \frac{3}{4}] \\ &= \beta[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]. \end{aligned}$$

Así, f no es contractiva en el sentido de Kannan.

Por último se verá que f no es contractiva en el sentido de Chatterjea.

Sea $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Para $x = (0, 1),\ y = (0, 0)$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \frac{3}{4} > 2\beta\frac{3}{4} = \beta[\frac{3}{4} + \frac{3}{4}] \\ &= \beta[d(x, f(y)) + d(y, f(x))]. \end{aligned}$$

Así, f no es contractiva en el sentido de Chatterjea. ■

Ejemplo 1.2.2. *Sea* $X = [0, 1]$ *con la métrica usual y definamos* $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ *por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & si \quad x \in [0, 1), \\ \\ 0 & si \quad x = 1. \end{cases}$$

Se afirma que f *es contractiva en el sentido de Kannan pero no en el sentido de Chatterjea ni es contracción.*

Demostración

Se ve que f es $\beta-$contractiva en el sentido de Kannan para toda β en $\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Se hará por casos. Caso (1) $x,\ y \in [0,1)$ ó $x = y = 1$.

$$d(f(x), f(y)) = 0 \leq \beta[d(x, f(x)) + d(y, f(y))].$$

Caso (2) $x \in [0,1)$ e $y = 1$.

$$d(f(x), f(y)) = \frac{1}{3} \leq \beta d(y, f(y)) \leq \beta[d(x, f(x)) + d(y, f(y))].$$

Ahora se ve que f no es una contracción en el sentido de Chatterjea.

Sea β en $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Para $x = 0$, $y = 1$ se cumple que

$$\beta[d(x, d(y)) + d(y, f(x))] = \beta\frac{2}{3} < \frac{1}{3} = d(f(x), f(y)).$$

Por lo cual f no es contractiva en el sentido de Chatterjea.

Por último, como f no es continua, entonces f no es una contracción. ■

Ejemplo 1.2.3. *Sea $X = [0,1]$ con la métrica usual y definamos $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in (0,1], \\ \\ \dfrac{2}{3} & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Entonces f es contractiva en el sentido de Chatterjea pero no el sentido de Kannan ni es contracción.

Demostración

Se ve que f es $\beta-$contractiva en el sentido de Chatterjea para toda β en $\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Se hará por casos. Caso (1) $x,\ y \in (0,1]$ ó $x = y = 0$.

$$d(f(x), f(y)) = 0 \leq \beta[d(x, f(y)) + d(y, f(x))].$$

Caso (2) $x \in (0,1]$ e $y = 0$.

$$d(f(x), f(y)) = \frac{1}{3} \leq \beta d(y, f(x)) \leq \beta[d(x, f(y)) + d(y, f(x))].$$

Ahora se verá que f no es una contracción en el sentido de Kannan.
Sea β en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Para $x = 0$, $y = 1$ se cumple que

$$\beta[d(x, f(y)) + d(y, f(x))] = \beta\frac{2}{3} < \frac{1}{3} = d(f(x), f(y)).$$

Por lo cual f no es contractiva en el sentido de Chatterjea.
Por último, como f no es continua, entonces f no es una contracción. $\blacksquare$

Como se hizo mención anteriormente, hay varios tipos de contracciones en espacios métricos y al lector que este interesado en conocer más puede revisar [13].

Capítulo 2

Teoremas del Punto Fijo para espacios vectoriales ordenados

2.1. Espacio Vectorial Ordenado

En esta sección se introduce el concepto de cono en un espacio vectorial, el cual permite inducir una estructura de orden parcial a un espacio vectorial. Comenzamos con las definiciones correspondientes a espacios vectoriales y relación de orden que se ocupan en la tesis.

Definición 2.1.1. *Sean X un conjunto diferente del vacío y " $\leq$ " una relación binaria sobre X. Se dice que " $\leq$ " es una relación de orden o una relación de orden parcial sobre X, si para todo $a,\ b,\ c \in X$ se cumple que:*

(R1) $a \leq a$. (reflexiva)

(R2) Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a = b$. (antisimétrica)

(R3) Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$. (transitiva)

Al par ordenado $(X, \leq)$ se le llama **conjunto parcialmente ordenado** o **conjunto ordenado**.

Definición 2.1.2. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Se dice que $(X, \leq)$ es una* ***cadena*** *si para toda $x, y \in X$, se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$.*

A la cadena también se le conoce como **conjunto totalmente ordenado** o **conjunto linealmente ordenado**.

Observación 1. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $a,\ b \in X$. Se tiene la siguiente notación:*

1. *$a < b$ representa que $a \leq b$ y $a \neq b$;*
2. *$[a, b]$ denota al conjunto $\{x \in X : a \leq x \leq b\}$ y se llama* ***intervalo ordenado cerrado*** *de $(X, \leq)$;*
3. *Análogamente se define el* ***intervalo ordenado abierto****.*

En espacios con un orden parcial, se puede definir cuando están acotados en orden.

Definición 2.1.3. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Un subconjunto A de X no vacío es:*

1. ***Acotado superiormente en orden****, si existe $x \in X$ tal que para todo $y \in A$ se cumple que $y \leq x$;*
2. ***Acotado inferiormente en orden*** *si existe $x \in X$ tal que para todo $y \in A$ se cumple que $x \leq y$;*
3. ***Acotado en orden****, si es acotado superiormente e inferiormente en orden.*

Teorema 2.1.1. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A, B \subset X$.*

(i) Si A es acotado superiormente en orden y $B \subset A$, entonces B es acotado superiormente en orden.

(ii) Si A es acotado inferiormente en orden y $B \subset A$, entonces B es acotado inferiormente en orden.

(iii) Si A es acotado en orden y $B \subset A$, entonces B es acotado en orden.

Demostración

(i) Si A es acotado superiormente en orden implica que existe $x \in X$ tal que para todo $y \in A$ se cumple que $y \leq x$. Como $B \subset A$ equivale a que si $b \in B$ entonces $b \in A$, es decir, $b \leq x$. Por tanto, B es acotado superiormente en orden.

(ii) Análogo al caso (i).

(iii) Se deduce de (i) y (ii). ■

Corolario 2.1.1. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A, B \subset X$.*

(i) Si A es acotado superiormente en orden, entonces $A \cap B$ es acotado superiormente en orden.

(ii) Si A es acotado inferiormente en orden, entonces $A \cap B$ es acotado inferiormente en orden.

(iii) Si A es acotado en orden, entonces $A \cap B$ es acotado en orden.

Demostración

Obsérvese que $A \cap B \subset A$, aplicando el teorema anterior se tiene el resultado. ■

Se continua con la definición de cono dada en [3], que proporciona una caracterización para cierto tipo de conjuntos con un orden parcial. Los cuales son espacios vectoriales y se prueba que este conjunto induce un orden parcial que tiene relación con su estructura algebraica.

Definición 2.1.4. *Sea X un espacio vectorial. Un* ***cono*** *en X es un subconjunto no vacío P tal que cumple las siguientes propiedades:*

(C1) Si $x, y \in P$, entonces $x + y \in P$.

(C2) Si $\lambda \geq 0$ y $x \in P$, entonces $\lambda x \in P$.

(C3) Si $x,\ -x \in P$*, entonces* $x = \bar{0}$*.*

A la pareja (X, P) se le llama **espacio vectorial ordenado**. En general diremos simplemente espacio vectorial ordenado X.

Observación 2. *Sea* (X, P) *un espacio vectorial ordenado con cono* P*, entonces* $\bar{0} \in P$*. En efecto, como* $P \neq \emptyset$*, existe* $x \in P$ *y* $\bar{0} = 0x \in P$*.*

El siguiente teorema prueba que un espacio vectorial ordenado X es un conjunto parcialmente ordenado donde la relación de orden " $\leq$ " en X está definida como $x \leq y$ si $y - x \in P$. En el siguiente teorema se prueba que " $\leq$ " es una relación de orden parcial que preserva el orden bajo la suma y el producto bajo el producto por un escalar no negativo.

Teorema 2.1.2. *Sean* (X, P) *un espacio vectorial ordenado,* $a, b, c \in X$ *y* $\lambda \geq 0$*, entonces la relación " $\leq$ " en* X *definida como* $x \leq y$ *si* $y - x \in P$ *cumple:*

(1) $a \leq a$*,*

(2) Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces* $a = b$*,*

(3) Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, entonces* $a \leq c$*,*

(4) Si $a \leq b$*, entonces* $a + c \leq b + c$*,*

(5) $a \leq b$*, entonces* $\lambda a \leq \lambda b$*.*

Demostración

Sean $a, b, c \in X$ y $\lambda \geq 0$, se cumple que:

(1) Como $a - a = \bar{0}$ y por la observación 2 se tiene que $\bar{0} \in P$, entonces $a \leq a$.

(2) Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $(b - a), -(b - a) \in P$ lo que implica que $b - a = \bar{0}$. Así, $a = b$.

(3) Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $(b-a),\ (c-b) \in P$. Por tanto, $c-a = (c-b)+(b-a) \in P$, es decir, $a \leq c$.

(4) Si $a \leq b$ implica que $(b+c)-(c+a) = b-a \in P$, entonces $a+c \leq b+c$.

(5) $a \leq b$ implica $(b-a) \in P$, entonces $\lambda(b-a) \in P$, es decir, $\lambda a \leq \lambda b$.

■

Definición 2.1.5. *Sea (X, P) un espacio vectorial ordenado. Cualquier vector $x \in X$ que satisface $x \geq \bar{0}$ es llamado* ***vector positivo*** *y el conjunto de todos los vectores positivos $X_+ = \{x \in X : x \geq 0\}$ se llama* ***cono positivo*** *de X. El cono positivo también es denotado por X^+.*

El nombre de cono positivo es bien merecido pues en efecto es un cono, ya que X^+ coincide con el cono P. Lo cual queda expresado en el siguiente lema.

Lema 2.1.1. *Sea X un espacio vectorial con una relación de orden parcial que preserva sumas y producto, entonces X^+ es un cono para X.*
Si (X, P) es un espacio vectorial ordenado y con la relación de orden definida en Teorema 2.1.2, entonces $X^+ = P$.

Demostración
Sean $x, y \in X^+$, se tiene que:

(C1) Como $x \geq \bar{0}$, $y \geq \bar{0}$. Lo que implica $x+y \geq x \geq \bar{0}$, es decir, $x+y \geq \bar{0}$.
Así, $x+y \in X^+$.

(C2) Si $x \in X^+$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda x \geq \bar{0}$.
Así, $\lambda x \in X^+$.

(C3) Si $x \in X^+$ y $-x \in X^+$, entonces $x \geq \bar{0}$ y $-x \geq \bar{0}$, es decir, $x - \bar{0} = x \in P$ y $-x - \bar{0} = -x \in P$.
Así, $x = \bar{0}$.

Por lo tanto, X^+ es un cono de X.

Si (X, P) es un espacio vectorial ordenado y con la relación de orden definida en Teorema 2.1.2 se tiene que $x \in P$, si y sólo si $x - \bar{0} \in P$, equivalentemente $x \geq \bar{0}$. Por lo cual $X^+ = P$. ■

A continuación se presentan ejemplos de conos.

Ejemplo 2.1.1. *Sean (X, P) un espacio vectorial ordenado y Y subespacio vectorial de X, entonces $P_Y = P \cap Y$ es un cono en Y.*
En efecto, sean $x, y \in P_Y$, entonces $x, y \in P$ y $x, y \in Y$. Así, Si $\lambda \geq 0$ implica $x + \lambda y \in P$ y $x + \lambda y \in Y$ o bien $x + \lambda y \in P_Y$.
Si $x, -x \in P_Y \subset P$ implica que $x = \bar{0}$.
*El cono P_Y se le llama **cono generado por el cono** P.*

Ejemplo 2.1.2. *Sea X un espacio vectorial, entonces $\{\bar{0}\}$ es el único subespacio vectorial de X que es cono.*
*En efecto, $\{\bar{0}\}$ es no vacío y las propiedades de cono se derivan de que su único elemento es $\bar{0}$. A $\{\bar{0}\}$ se le conoce como **cono trivial**.*

En la siguiente definición se da un conjunto de ejemplos de conos.

Definición 2.1.6. *Sea (X, P) un espacio vectorial ordenado. P es **Arquimediano** si para cada $y \in X$, $x \in P$ tales que $ny \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implica $y \leq \bar{0}$.*

Un caso particular de cono arquimediano es el siguiente.

Ejemplo 2.1.3. *Sean $X = C[a, b]$ y $P_1 = \{f \in C[a, b] |\, f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]\}$.*
Veamos que P_1 es un cono arquimediano en X.
En efecto, sean $f, g \in P_1$ y $\lambda \geq 0$, se tiene que

(C1) $f + g$ es continua ya que suma de continuas es continua y para todo $x \in [a, b]$ se cumple $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \geq 0$. Así, $f + g \in P_1$.

(C2) *Para todo* $x \in [a,b]$ *se cumple que* $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \geq 0$ *y* λf *es continua ya que* f *es una función continua. Así,* $\lambda f \in P_1$.

(C3) *Si* $-f \in P_1$ *entonces para todo* $x \in [a,b]$ *se cumple que* $f(x), -f(x) \geq 0$, *se sigue que* $f(x) = 0$.

Por lo cual es un cono.
Luego, si $h \in X$ *y existe* $f \in P_1$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$, $nh \leq f$ *entonces para todo* $x \in [a,b]$ *se cumple que* $nh(x) \leq f(x) \leq f_0$, *donde* $f_0 = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ *el cual existe ya que* f *es continua sobre* $[a,b]$. *Así,* $h(x) \leq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$.
Por lo tanto, P_1 *es un cono arquimediano.*

Ejemplo 2.1.4. *Sean* $X = \mathbb{R}^2$ *y* $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \geq 0\}$. *Veamos que* P *es un cono no arquimediano de* X.

Es fácil ver que P *es un cono. Para ver que no es arquimediano basta con observar que* $(0,1), (1,0) \in P$ *y para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple que* $n(0,1) \leq (1,0)$, *pero es falso* $(0,1) \leq (0,0)$ *ya que esto implicaría que* $-(0,1) \in P$ *y como* $(0,1) \in P$ *se tendría que* $(0,1) = (0,0)$ *lo cual es una contradicción.*

X *con* P *es conocido como* ***plano lexicográfico*** *y* P *induce un orden conocido como* ***orden lexicográfico*** *para* $\mathbb{R}^2$ *que está definido también como*
$(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2)$ *si y sólo si* $x_1 > y_1$ *ó bien* $x_2 \geq y_2$ *cuando* $x_1 = y_1$. *Observemos que este orden es total.*

La definición de cono arquimediano es similar a una propiedad que se tiene en los números reales que se llama propiedad arquimediana. Usando una analogía que surge del cono de los números reales mayores o iguales que cero por otro cono en un espacio vectorial real. El siguiente lema muestra parte del comportamiento que resulta útil de un cono arquimediano.

Lema 2.1.2. *Sea* (X,P) *espacio vectorial ordenado con* P *arquimediano.*
Sean $x,\ y \in X$ *y* $\{t_n\}$ *una sucesión convergente* 0 *con* $t_n > 0$.

(a) Si $x \in P$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $y \leq t_n x$, entonces $y \leq \bar{0}$.

(b) Si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $-t_n x \leq y \leq t_n x$, entonces $y = \bar{0}$.

Demostración

Inciso (a).

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $y \leq t_n x$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, existe t_{n_k} tal que $t_{n_k} \leq \dfrac{1}{k}$, entonces $y \leq t_{n_k} x \leq \dfrac{1}{k} x$ o bien $y \leq \dfrac{1}{k} x$. Como P es arquimediano se sigue que $y \leq \bar{0}$.

Inciso (b).

Si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $-t_n x \leq y \leq t_n x$, entonces $0 \leq y + t_n x \leq 2t_n x$. Así, $x \in P$ y además $-y,\ y \leq t_{n_k} x$. Por el inciso (a), se sigue que $y = \bar{0}$. ■

Una versión común de este Lema es dada en el siguiente corolario.

Corolario 2.1.2. *Sea (X, P) espacio vectorial ordenado con P arquimediano. Sean $x,\ y \in X$, si $-\dfrac{1}{n} x \leq y \leq \dfrac{1}{n} x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $y = \bar{0}$.*

2.2. El ideal generado por un vector

Observamos que en el caso real, la sucesión $\{x_n\}$ converge a x^*, esto significa que

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - x^*| < \epsilon,$$

y equivale a

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ n \geq n_0 \Longrightarrow -\epsilon < x_n - x^* < \epsilon. \tag{2.1}$$

En [3] se estudia una convergencia similar a la que se tiene en (2.1) para espacios vectoriales parcialmente ordenados. Esta convergencia es la siguiente:

Definición 2.2.1. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio vectorial ordenado X y $x \in X$ con $x > \bar{0}$. Se dice que $\{x_n\}$ es:*

*(i) $x-$**uniformemente convergente** a un vector $x^* \in X$ y se denota por $x_n \xrightarrow{x} x^*$ si*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; : \; n \geq n_0 \Longrightarrow -\epsilon x \leq x_n - x^* \leq \epsilon x.$$

(ii) $x-$***uniformemente Cauchy*** *si*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; : \; n, \; m \geq n_0 \Longrightarrow -\epsilon x \leq x_n - x_m \leq \epsilon x.$$

Se dice que X *es:*

(iii) $x-$***uniformemente completo*** *si*

cada sucesión $\{x_n\}$ $x-$*uniformemente Cauchy en* X *es* $x-$*uniformemente convergente.*

(iv) *es* ***uniformemente completo*** *si*

X *es* $u-$*uniformemente completo para cada* $u > \bar{0}$.

Definición 2.2.2. *Sean* (X, P) *con* P *un espacio vectorial ordenado y* $x > \bar{0}$. $D \subset X$ *es* $x-$***cerrado por sucesiones*** *si para cada* $\{x_n\} \subset D, x_n$ *es* $x-$*uniformemente convergente a* y *implica que* $y \in D$.

En adelante nos referiremos a los conjuntos $x-$cerrados por sucesiones como $x-$cerrados y las sucesiones $x-$uniformemente convergentes por sucesiones $x-$convergentes.

A continuación se da un ejemplo de una sucesión e_1-convergente a un vector x^* y otra que no es e_1-convergente para un cono P.

Ejemplo 2.2.1. *Sea* $X = \mathbb{R}^2$ *y* $P = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x \geq 0, y = 0\}$.
Se tiene que (X, P) *es un espacio vectorial ordenado y* $e_1 = (1, 0) \in P$.

Se afirma que la sucesión $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}, 1\right)\right\}$ *es* e_1-*uniformemente convergente a* $(1, 1)$.

Sea $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq N$ *implica* $\epsilon - \dfrac{1}{n} > 0$.
Así,

$$\left(\epsilon - \frac{1}{n}, 0\right), \left(\epsilon + \frac{1}{n}, 0\right) \in P$$

o bien $(-\epsilon, 0) \leq \left(\dfrac{1}{n}, 0\right) \leq (\epsilon, 0)$ *o equivalentemente* $-\epsilon e_1 \leq \left(1 + \dfrac{1}{n}, 1\right) - (1,1) \leq \epsilon e_1$.
Lo cual termina la prueba.
Ahora veamos $\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ *no es* e_1-*convergente para el cono* P.
Supongamos que existe $(x, y) \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $\epsilon > 0$ *se cumple*

$$-\epsilon e_1 \leq \left(0, \frac{1}{n}\right) - (x, y) \leq \epsilon e_1$$

o bien

$$(-\epsilon, 0) \leq \left(-x, -y + \frac{1}{n}\right) \leq (\epsilon, 0)$$

o equivalentemente $\left(\epsilon - x, \dfrac{1}{n} - y\right), \left(\epsilon + x, y - \dfrac{1}{n}\right) \in P$, *entonces* $y = \dfrac{1}{n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *lo cual es una contradicción.*
Lo cual termina la prueba.

El siguiente resultado nos dice que dos sucesiones se acercan mucho en la línea de un vector y una de estas es $x-$convergente, entonces para algún $y > \bar{0}$ también la otra es $y-$convergente al mismo elemento.

Teorema 2.2.1. *Sea* (X, P) *un espacio vectorial ordenado y sean* $\{y_n\}, \{z_n\}$ *sucesiones en* X. *Si existen* $x_1, x_2 > \bar{0}$, $y^* \in X$ *tales que* $\{y_n\}$ *es* x_1-*convergente a* y^* *y* $\{z_n - y_n\}$ *es* x_2*-convergente a* $\bar{0}$, *entonces* $\{z_n\}$ *es* $(x_1 + x_2)-$*convergente a* y^*.

Demostración

Sea $\epsilon > 0$, entonces existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq N_1$ implica $-\epsilon x_1 \leq y^* - y_n \leq \epsilon x_1$ y $n \geq N_2$ implica $-\epsilon x_2 \leq \bar{0} - (z_n - y_n) \leq \epsilon x_2$.
Si se define $N_0 = max\{N_1, N_2\}$, se sigue que $n \geq N_0$ implica

$$-\epsilon x_1 \leq y^* - y_n \leq \epsilon x_1, -\epsilon x_2 \leq y_n - z_n \leq \epsilon x_2.$$

Sumando se obtiene $-\epsilon(x_1 + x_2) \leq y^* - z_n \leq \epsilon(x_1 + x_2)$.

Por tanto, $\{z_n\}$ es $(x_1 + x_2)-$convergente a y^*. ■

Aunque una sucesión tenga límite no significa que este sea único. A continuación se da un ejemplo de esto.

Observación 3. *Para esto véase el ejemplo 2.1.4 de un cono que no es arquimediano y se probará que existe una sucesión que no tiene límite es único. El cual es:*

Sean $X = \mathbb{R}^2$ *y* $P = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R} : x = 0, y \geq 0\}$.

Para esto se define $\left\{\left(0, \dfrac{1}{n}\right)\right\}$ *sucesión en* X. *Sea* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq N$ *implica que* $\dfrac{1}{n} \leq \epsilon$ *o bien* $\epsilon - \dfrac{1}{n} \geq 0$. *Así,* $\left(0, \epsilon - \dfrac{1}{n}\right) \in P$.

Por otro lado, también $\left(0, \epsilon + \dfrac{1}{n}\right), \left(\epsilon, 1 + \epsilon - \dfrac{1}{n}\right), \left(\epsilon, -1 + \epsilon + \dfrac{1}{n}\right) \in P$. *Así,*

$$-\epsilon(0, 1) \leq \left(0, \frac{1}{n}\right) - (0, 0) \leq \epsilon(0, 1),$$

y

$$-\epsilon(1, 1) \leq \left(0, \frac{1}{n}\right) - (0, 1) \leq \epsilon(1, 1).$$

El siguiente teorema en el inciso (ii) se prueba que basta que el cono P sea arquimediano para que el límite de la $x-$convergencia se único.

Teorema 2.2.2. *Sean* (X, P) *un espacio vectorial ordenado donde* P *es arquimediano,* $x \in P$ *y* $\{x_n\}$ *es una sucesión* $x-$*convergente a* x^*. *Se cumple:*

(i) *Para todo* $c > 0$, $\{x_n\}$ *es una sucesión* $cx-$*convergente a* x^*.

(ii) *Si* $y \in P$ *cumple que* $\{x_n\}$ *es* $y-$*convergente a algún* y^*, *entonces* $x^* = y^*$.

(iii) *Sean* $y^* \in X$ *y* $\{y_n\}$ *es una sucesión* $x-$*convergente a* y^* *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene* $x_n \leq y_n$, *entonces* $x^* \leq y^*$.

Demostración

Prueba (i).

Sea $\epsilon > 0$, como $\{x_n\}$ es una sucesión $cx-$convergente a x^*, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $-(\epsilon c)x \leq x_n - x^* \leq (\epsilon c)x$ o equivalentemente $-\epsilon(cx) \leq x_n - x^* \leq \epsilon(cx)$.

Prueba (ii).

Sea $\epsilon > 0$, como $\{x_n\}$ es $y-$convergente a y^* y $x-$convergente a x^*, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $-\epsilon x \leq x_n - x^* \leq \epsilon x$, $-\epsilon y \leq y^* - x_n \leq \epsilon y$. Así, $-\epsilon(x+y) \leq y^* - x^* \leq \epsilon(x+y)$ y como P es arquimediano, entonces $x^* - y^* = 0$ o bien $x^* = y^*$.

Prueba (iii)

Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_k$ implica

$$-\frac{1}{2k}x \leq y_n - y^* \leq \frac{1}{2k}x \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2k}x \leq x^* - x_n \leq \frac{1}{2k}x.$$

Así,

$$(y_n - y^*) + (x^* - x_n) \leq \frac{1}{2k}(x + x) = \frac{1}{k}x.$$

Por otro lado, $\bar{0} \leq y_n - x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implica $x^* - y^* \leq (y_n - x_n) + (x^* - y^*)$.

Como $(y_n - x_n) + (x^* - y^*) = (y_n - y^*) + (x^* - x_n)$, entonces $x^* - y^* \leq \dfrac{1}{k}x$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y como P es arquimediano se sigue que $x^* - y^* \leq \bar{0}$ o bien $x^* \leq y^*$. ■

Ahora se dará una colección de conjuntos x-cerrados.

Teorema 2.2.3. *Sean (X, P) un espacio vectorial ordenado y $a, b \in X$ con $a \leq b$. Si P es arquimediano, entonces $[a, b]$ es x-cerrado, para todo $x > \bar{0}$.*

Demostración

Sean $\{y_n\}$ una sucesión en $[a, b]$ y $x > \bar{0}$. Si $y^* \in X$ es tal que $\{y_n\}$ es x-convergente a y^*, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$, tal que

$$-\frac{1}{k}x \leq y^* - y_{n_k} \leq \frac{1}{k}x \quad \text{o bien} \quad -\frac{1}{k}x \leq y_n - y^* \leq \frac{1}{k}x.$$

Por otro lado,

$$y_{n_k} \leq b \text{ implica } -\frac{1}{k}x \leq y_{n_k} - y^* \leq b - y^*,$$

$$a \leq y_{n_k} \text{ implica } a - y^* \leq y_{n_k} - y^* \leq \frac{1}{k}x.$$

Por lo cual, $y^* - b, a - y^* \leq \frac{1}{k}x$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como P es arquimediano se sigue que $y^* - b, a - y^* \leq \bar{0}$, es decir, $a \leq y^* \leq b$. Por tanto, $[a, b]$ es x- cerrado. ■

A continuación se presentan la definición de otro tipo de conjuntos que son $x-$convergentes para todo $x > \bar{0}$.

Definición 2.2.3. *$[a, \infty)$ denota al conjunto $\{x \in X : a \leq x\}$ y se llama **intervalo ordenado infinito semicerrado por la izquierda** de $(X, \leq)$.*
Análogamente se define $(-\infty, a]$.

Teorema 2.2.4. *Sean (X, P) un espacio vectorial ordenado y $a \in X$. Si P es arquimediano, entonces $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$ son $x-$cerrados, para todo $x > \bar{0}$.*

Demostración

Sean $\{y_n\}$ una sucesión en $[a, \infty)$ y $x > \bar{0}$. Si $y^* \in X$ es tal que $\{y_n\}$ es x-convergente a y^*, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$, tal que

$$-\frac{1}{k}x \leq y^* - y_{n_k} \leq \frac{1}{k}x \quad \text{o bien} -\frac{1}{k}x \leq y_n - y^* \leq \frac{1}{k}x.$$

Por otro lado,

$$a \leq y_{n_k} \text{ implica } a - y^* \leq y_{n_k} - y^* \leq \frac{1}{k}x.$$

Por lo cual, $a - y^* \leq \frac{1}{k}x$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como P es arquimediano se sigue que $a - y^* \leq \bar{0}$, es decir, $a \leq y^*$. Por tanto, $[a, \infty)$ es $x-$cerrado. De forma análoga se prueba que $(-\infty, a]$ es $x-$cerrado. ■

Una pregunta natural es ¿Cuándo esta convergencia en orden es equivalente a alguna convergencia con norma? Para esto necesitaremos la siguiente definición.

Definición 2.2.4. *Sean X un espacio vectorial ordenado y $x \in P$. El **ideal generado por el vector** x es*

$$V_x = \{y \in X : \exists\lambda > 0 : -\lambda x \leq y \leq \lambda x\}.$$

Teorema 2.2.5. *Sean X un espacio vectorial ordenado y $x \in P$, entonces* $V_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-nx, nx] = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\,[-x, x]$ *es un espacio vectorial.*

Demostración

Como $x \in P$, entonces $-x \leq \bar{0} \leq x$, es decir, $\bar{0} \in V_x$. Además, para $z_1, z_2 \in V_x$ existen $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tales que $-\lambda_1 x \leq z_1 \leq \lambda_1 x$, $-\lambda_2 x \leq z_2 \leq \lambda_2 x$ y por el Teorema 2.1.2 se sigue que $-(\lambda_1 + \lambda_2)x \leq z_1 + z_2 \leq (\lambda_1 + \lambda_2)x$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ se tienen lo siguientes casos:

Caso 1 $\alpha \geq 0$

Como $-\lambda_1 x \leq z_1 \leq \lambda_1 x$, por el Teorema 2.1.2 se tiene que $-\alpha\lambda_1 x \leq \alpha z_1 \leq \alpha\lambda_1 x$.

Caso 2 $\alpha < 0$

Como $-\lambda_1 x \leq z_1 \leq \lambda_1 x$, entonces Como $-\lambda_1 x \leq z_1$ y $z_1 \leq \lambda_1 x$, o bien $-z_1 \leq \lambda_1 x$ y $-\lambda_1 x \leq -z_1$. Por otro lado, al multiplicar por $-\alpha > 0$ y por el Teorema 2.1.2 se sigue que $(-\alpha) - z_1 \leq (-\alpha)\lambda_1 x$ y $(-\alpha) - \lambda_1 x \leq (-\alpha) - z_1$.

Por lo cual, $-\alpha\lambda_1 x \leq \alpha z_1 \leq \alpha\lambda_1 x$.

Por lo tanto, V_x es subespacio de X.

Ahora veamos que $V_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-nx, nx] = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\,[-x, x]$.

Observe que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $[-nx, nx] = n\,[-x, x]$ ya que $x \in n\,[-x, x]$ si y sólo si existe $y \in [-x, x]$ tal que $x = n * y$, pero $y \in [-x, x]$ si y sólo si por el Teorema 2.1.2 $x = ny \in [-nx, nx]$. Por lo cual,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [-nx, nx] = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\,[-x, x]\,.$$

Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que si $y \in [-nx, nx]$ por definición V_x. $y \in V_x$ si existe $\lambda > 0$ tal que $y \in [-\lambda x, \lambda x]$, pero existe $n_0 \in \mathbb{N}$ que cumple $0 < \lambda \leq n_0$ y $[-\lambda x, \lambda x] \subset [-n_0 x, n_0 x] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [-nx, nx]$. Lo cual termina la prueba. ■

Usando los Teoremas del apéndice B se define el siguiente funcional de Minkowski para $[-x, x]$ en V_x.

Teorema 2.2.6. *Sean X un espacio vectorial ordenado y $x \in P$, entonces $[-x, x]$ es absorbente, balanceado y convexo V_x.*

Demostración

Por el Teorema 2.2.5 se tiene que $[-x, x]$ es absorbente en V_x.

Sean $|\lambda| \leq 1$, $y \in [-x, x]$.

Caso 1) $0 \leq \lambda \leq 1$.

$y \in [-x, x]$ implica $-x \leq y \leq x$ y así $-x \leq -\lambda x \leq \lambda y \leq \lambda x \leq x$.

Por lo cual, $\lambda y \in [-x, x]$.

Caso 2) $-1 \leq \lambda < 0$.

Como $0 < -\lambda \leq 1$, entonces $-x \leq -\lambda y \leq x$ o equivalentemente $-x \leq \lambda y \leq x$.

Por lo cual, $[-x, x]$ es balanceado en V_x.

Por último, para $y,\ z \in [-x, x]$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ se tiene que

$$-\lambda x \leq \lambda y \leq \lambda x \quad \text{y} \quad -(1-\lambda)x \leq (1-\lambda)z \leq (1-\lambda)x.$$

Así,

$$x = -[(1-\lambda)x + \lambda x] \leq \lambda y \leq [(1-\lambda)x + \lambda x] = x.$$

Por lo cual, $[-x, x]$ es convexo. ■

2.3. Funcional de Minkowski de $[-x, x]$

Como $[-x, x]$ es absorbente, balanceado y convexo en V_x se puede definir una norma para V_x mediante el funcional de Minkowski de $[-x, x]$.

Definición 2.3.1. *Sea X un espacio vectorial ordenado y sea $x \in P$. Se define*

$|| \cdot ||_x : V_x \longrightarrow \mathbb{R}$

$||y||_x = \text{ínf}\, \{t > 0\ :\ y \in t\, [-x,\ x]\}$.

Teorema 2.3.1. *Sea X un espacio vectorial ordenado y $x \in P$ se sigue que:*

(1) $||\cdot||_x$ *es una seminorma monótona en* V_x.

(2) Si $\{x_n\}$ *es una sucesión* $x-$*uniformemente convergente a un vector* $x^* \in X$ *equivale a* $||x_n - x^*||_x \to 0$.

(3) Si X *también es Arquimediano, entonces*

(a) $||\cdot||_x$ *es una norma sobre* V_x,

(b) $\{y \in V_x : ||y||_x \leq 1\} = [-x, x]$,

(c) el cono $P_x = V_x \cap P$ *de* V_x *es* $||\cdot||_x$*-cerrado.*

Demostración

Prueba (1).

Por el Teorema 2.2.6 $[-x, x]$ es absorbente, balanceado y convexo V_x. Por el Teorema B.1.2 $||\cdot||_x$ el funcional de Minkowski de $[-x, x]$ es una seminorma.

Sean $y, z \in V_x$ tales que $\bar{0} \leq y \leq z$. Si $\lambda > 0$ cumple que $-\lambda x \leq z \leq \lambda x$, entonces

$$-\lambda x \leq \bar{0} \leq y \leq z \leq \lambda x.$$

Por lo cual, $-\lambda x \leq y \leq \lambda x$. Así,

$$\{\lambda > 0 : -\lambda x \leq z \leq \lambda x\} \subset \{\lambda > 0 : -\lambda x \leq y \leq \lambda x\}$$

lo cual implica

$$||z||_x = \text{ínf}\{\lambda > 0 : -\lambda x \leq z \leq \lambda x\} \leq \text{ínf}\{\lambda > 0 : -\lambda x \leq y \leq \lambda x\} = ||y||_x$$

es decir, $||\cdot||_x$ es monótona para V_x.

Prueba (2).

Sea $\epsilon > 0$ se tiene que $\{x_n\}$ es una sucesión $x-$uniformemente convergente a un vector $x^* \in X$ si y sólo si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ si $n \geq N$ implica que $-\epsilon x \leq x_n - x^* \leq \epsilon x$ que es equivalente a $||x_n - x^*|| \leq \epsilon$.

Prueba (3a).

Por el inciso (1) tenemos que $||\cdot||_x$ es una seminorma, sólo falta probar que $||y||_x = 0$ implica que $y = \bar{0}$.

Como $||y||_x = 0$ entonces existe $\{t_n\}$ sucesión de números positivos que converge a 0 y $-t_n x \leq y \leq t_n x$, por el Lema 2.1.2 $y = \bar{0}$. Por lo cual, $||y||_x$ es una norma.

Prueba (3b).

Sea $y \in [-x, x]$ se tiene que $-x \leq y \leq x$, por lo cual $1 \in \{\lambda > 0 : -\lambda x \leq y \leq \lambda x\}$, es decir, $||y||_x \leq 1$.

Sea $y \in V_x$ existe $\{\lambda_n\}$ sucesión de números positivos convergente a $||y||_x$ tal que $-\lambda_n x \leq y \leq \lambda_n x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $y \leq \lambda_n x$, $-y \leq \lambda_n x$ o bien
$y - ||y||_x x \leq \lambda_n x - ||y||_x x$, $-y - ||y||_x x \leq \lambda_n x - ||y||_x x$.

Así,

$$y - ||y||_x x, -y - ||y||_x x \leq (\lambda_n - ||y||_x)x$$

y como $\{\lambda_n - ||y||_x\}$ converge a 0, por Lema 2.1.2 se sigue

$$y - ||y||_x x, -y - ||y||_x x \leq \bar{0}$$

y así $-||y||_x x \leq y \leq ||y||_x x$.

Por lo cual, $||y||_x \leq 1$ implica que $-x \leq -||y||_x x \leq y \leq ||y||_x x \leq x$ o bien $y \in [-x, x]$.

Prueba (3c).

Por el Ejemplo 2.1.1 se sabe que $P_x = V_x \cap P$ es un cono para V_x.

Sea $y \in X$ y $\{y_n\}$ sucesión en P_x tal que $||y_n - y||_x \to 0$, entonces existe $\{\lambda_n\}$ con $\lambda_n > 0$ tal que converge a

$$||y_n - y||_x = ||y - y_n||_n = 0 \quad \text{y} \quad -\lambda_n x \leq y - y_n \leq \lambda_n x$$

Como $y_n \geq \bar{0}$ se sigue que

$$-\lambda_n x \leq y - y_n \leq (y - y_n) + y_n = y \quad \text{o bien} \quad y \leq \lambda_n x.$$

Como P es arquimediano y por Lema 2.1.2 implica $-y \leq \bar{0}$, es decir, $y \in P$. Por otro lado, $-\lambda_n x \leq y - y_n \leq \lambda_n x$ equivale a $-\lambda_n x + y_n \leq y \leq \lambda_n x + y_n$. Particularmente para $n = 1$ se tiene que

$$-\lambda_1 x + y_1 \leq y \leq \lambda_1 x + y_1$$

y como $y_1 \in V_x$ existe un $\lambda > 0$ tal que $-\lambda x \leq y_1 \leq \lambda$, lo cual implica que

$$-(\lambda_1 + \lambda)x \leq y \leq (\lambda_1 + \lambda)x$$

es decir, $y \in V_x$. Por lo cual, $y \in P_x$, es decir, P_x es $||\cdot||_x$-cerrado en V_x. ■

Por el Teorema 2.2.5 sabemos V_x es un subespacio de X, una pregunta natural es ¿Cuándo V_x es igual a X? Para responder a esta pregunta se usan la siguientes definiciones.

Definición 2.3.2. *Sea (X, P) un espacio vectorial ordenado y $e \in P$. Se dice que e es una* ***unidad de orden*** *(o de P-orden) si para cada $x \in X$ existe $\lambda = \lambda(x) > 0$ tal que $x \leq \lambda e$.*

Teorema 2.3.2. *Sea (X, P) un espacio vectorial ordenado y $e \in P$.*
Si e es una unidad en orden, entonces $V_e = X$.

Demostración

Sea $x \in X$, como e es una unidad en orden existen $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tales que $x \leq \lambda_1 e$, $-x \leq \lambda_2 e$. Así, $-(\lambda_1 + \lambda_2)e \leq -\lambda_2 e \leq x \leq \lambda_1 e \leq (\lambda_1 + \lambda_2)e$, es decir, $e \in V_e$.
Así, $X \subset V_e$ y es claro que por ser subespacio $V_e \subset X$, por lo cual $X = V_e$. ■

Lema 2.3.1. *Sea (X, P) es un espacio vectorial ordenado, $e \in P$ unidad en orden y $x \in X$. Si $\lambda_0 > 0$ es tal que $x \leq \lambda_0 e$, entonces $x \leq \lambda e$ para $\lambda \geq \lambda_0$.*

Demostración

Sea $\lambda \geq \lambda_0$ implica que $\lambda - \lambda_0 \geq 0$ y $e \in P$. Así, $(\lambda - \lambda_0)e \in P$, que a su vez esto implica $(\lambda - \lambda_0)e \geq 0$, entonces $\lambda e \geq \lambda_0 e$ y como $\lambda_0 e \geq x$, lo cual implica $\lambda e \geq x$. ■

La definición de unidad de orden se da sólo en términos de orden y la multiplicación por un escalar. La siguiente definición es equivalente pero en términos de la estructura algebraica que tiene un espacio vectorial.

Definición 2.3.3. *Sea (X, P) un espacio vectorial ordenado y $e \in P$. Se dice que e es un* ***punto interno*** *si para cada $x \in X$ existe $\lambda(x) > 0$ tal que $e + \lambda x \in P$ para $0 \leq \lambda \leq \lambda(x)$.*

Lema 2.3.2. *Sea (X, P) espacio vectorial ordenado.*
Un vector $e \in P$ es una unidad de orden si y sólo si e es un punto interno.

Demostración

$\Rightarrow]$

Supongamos que $e \in P$ es una unidad en orden y $x \in X$, entonces existe $\lambda_1 > 0$ tal que $-x \leq \lambda_1 e$, si $\lambda^{'} \geq \lambda_1$ entonces $-x \leq \lambda^{'} e$. Así, $\lambda^{'} e + x \geq \bar{0}$ o bien $e + \dfrac{x}{\lambda^{'}} \geq \bar{0}$, es decir, $e + \dfrac{x}{\lambda^{'}} \in P$, entonces $e + \lambda x \in P$ para $0 \leq \lambda = \dfrac{1}{\lambda^{'}} \leq \dfrac{1}{\lambda_1} = \lambda_0$.

$\therefore$ e es un punto interno.

$\Leftarrow]$

Sea $e \in P$ un punto interno y $x \in X$, entonces existe $\lambda_1 > 0$ tal que $e + \lambda^{'}(-x) \in P$ para $0 \leq \lambda^{'} \leq \lambda_1$, es decir, $e + \lambda^{'}(-x) \geq \bar{0}$ o bien $e \geq \lambda^{'} x$ o equivalentemente $x \leq \dfrac{1}{\lambda^{'}} e$. Si $\lambda^{'} > 0$, entonces $x \leq \lambda e$ donde $\lambda = \dfrac{1}{\lambda^{'}} \geq \dfrac{1}{\lambda_1} = \lambda_0 > 0$.

$\therefore$ e es unidad de orden. ■

Ejemplo 2.3.1. *Sean $X = C[a, b]$ y $P_1 = \{f \in C[a, b] | \, f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]\}$.*
Toda función $f \in X$ tal que $f(x) > 0$ para toda $x \in [a, b]$.
por el Ejemplo 2.1.3 sabemos que (X, P) es un espacio vectorial ordenado.

Sean $f, g \in X$ $f(x) > 0$ para toda $x \in [a, b]$. Como g es continua $[a, b]$ entonces $|g|$ es continua en $[a, b]$. Así, g alcanza su máximo en $[a, b]$ y lo definimos por $G_0 = max\{|g(x)| : x \in [a, b]\}$. Por otro lado, f es continua en $[a, b]$ y positiva, entonces existe $0 < f_0 = min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y así existe $n_0 \in\in \mathbb{N}$ tal que $G_0 \leq n_0 f_0$, pero

$g(x) \leq |g(x)| \leq G_0$ y $0 < f_0 \leq f(x)$ para $x \in [a, b]$, lo cual implica $g(x) \leq n_0 f(x)$ o bien $g \leq n_0 f$. Por lo cual f es una unidad de orden.

No todo espacio vectorial ordenado tiene unidades de orden. A continuación se da un ejemplo.

Ejemplo 2.3.2. *Sea $X = \{\{x_n\} : x_n \in \mathbb{R}\}$ y $P = \{\{x_n\} \in X : x_n \geq 0\}$.*
Se afirma que (X, P) es un espacio vectorial ordenado que tiene un cono P es arquimediano que no tiene unidades de $P-$orden.

Efecto, como X lo podemos ver como $\{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones $\}$ el cual sabemos que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ ya que es un caso particular del Ejemplo A.3.1.

Luego, P es no vacío ya que la sucesión constante $\{1\}$ pertenece a P. La prueba de las condiciones de que P es un cono son similares al del ejemplo 2.1.3.

También es arquimediano, para esto sean

$$\bar{y} = \{y_n\} \in X \bar{x} = \{x_n\} \in P \quad \text{tal que para todo } k \in \mathbb{N}$$

se cumple $\bar{y} \leq \bar{x}$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $y_n \leq kx_n$.
Por lo cual, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $y_n \leq 0$ y así $\bar{y} \leq \bar{0}$.
Ahora se verá que no tiene unidades de orden.

Si se hace la suposición de que existe $\bar{e} = \{e_n\} \in P$, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $\bar{1} = \{1\} \leq \lambda\bar{e}$, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $1 \leq \lambda e_n$. Se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$, $e_n > 0$. Observemos que $\{ne_n\} \in X$ y como $\bar{e}$ es unidad de orden existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\{ne_n\} \leq \bar{e}$ lo cual implica que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $ne_n \leq \lambda_0 e_n$ y como $e_n > 0$, entonces $n \leq \lambda_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ lo cual es una contradicción.
Por lo cual X no tiene unidades de orden.

2.4. Funciones Lipschitz en orden

Comenzamos recordando el significado de una función Lipschitz con la definición dada en [1] para espacios métricos.

Definición 2.4.1. *Sean* (X, d_X), (Y, d_Y) *espacios métricos y* $T : X \longrightarrow Y$ *una función.* T *se llama* ***función Lipschitz*** *con constante de Lipschitz* k, *si existe* $k \in \mathbb{R}$ *con* $0 \leq k$ *tal que*

$$d_Y (T (x) , T (y)) \leq k d_X (x.y) \text{ para todo } x,\ y \in X.$$

Para este trabajo en particular se opera con espacios normados y con $X = Y$. Esto para seguir el manejo que se tiene en [1] y [12].

Siguiendo el esquema dado para la definición de $x-$uniformemente convergente, se observa que:
Si $X = Y = \mathbb{R}$, entonces para $x,\ y \in \mathbb{R}$ con $y \leq x$,

$$|T (x) - T (y) | \leq k|x - y|$$

que es equivalente a

$$-k (x - y) \leq T (x) - T (y) \leq k (x - y) .$$

Es decir que la condición de Lipschitz, que está escrita en términos del valor absoluto se puede reescribir en forma equivalente mediante su relación de orden.

Comenzamos con algunas de las definiciones dadas en [1], [8] y [9].

Definición 2.4.2. *Sean* (X, P) *un espacio vectorial ordenado,* $D \subset X$ *subespacio vectorial y* $T : D \longrightarrow X$ *una función.* T *se llama* ***Lipschitz en Orden****, si existen constantes* $l,\ k \in \mathbb{R}$ *con* $l,\ k > 0$ *tales que*

$$-l (x - y) \leq T (x) - T (y) \leq k (x - y)$$

para todo $x,\ y \in D$ *con* $y \leq x$.

Se van a definir otros conceptos relacionados con las funciones Lipschitz en orden.

Definición 2.4.3. *Sean* (X, P) *un espacio vectorial ordenado,* $D \subset X$ *un subespacio vectorial y* $T : D \longrightarrow X$ *una función.* T *se llama* ***Lipschitz por la derecha en***

orden, *si existe una constante* $k \in \mathbb{R}$ *con* $k > 0$ *tal que*

$$T(x) - T(y) \leq k(x - y)$$

para todo $x,\ y \in D$ *con* $y \leq x$.

Lema 2.4.1. *Sea* (X, P) *un espacio vectorial ordenado,* $M \subset X$ *no vacío y* $\mu_0, x_0, \nu_0 \in M$ *con* $\mu_0 \leq x_0 \leq \nu_0$.
Si $T : M \to X$ *es una función creciente, entonces para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple que:*

(i) $\bar{0} \leq x_n - \mu_n \leq \nu_n - \mu_n$,

(ii) $\bar{0} \leq \nu_n - x_n \leq \nu_n - \mu_n$

donde $\{x_n\}, \{\mu_n\}$ *y* $\{\nu_n\}$ *son las sucesiones de iterados de Picard de* x_0, μ_0 *y* ν_0 *para el operador* T *respectivamente.*

Demostración

Sea $x_0 \in X$ tal que $\mu_0 \leq x_0 \leq \nu_0$. Se probará que $\mu_n \leq x_n \leq \nu_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\{x_n\}, \{\mu_n\}$ y ν_n son las sucesiones de iterados de Picard de x_0, μ_0 y ν_0 respectivamente.

Para $n = 1$ se cumple que $\mu_1 = T(\mu_0) \leq T(x_0) \leq T(\nu_0) = \nu_1$, por ser T creciente. Así, $\mu_1 \leq x_1 \leq \nu_1$.

Supóngase que para algún $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \leq x_n \leq \nu_n$, como T es creciente se tiene que: $\mu_{n+1} = T(\mu_n) \leq T(x_n) \leq T(\nu_n) = \nu_{n+1}$. Así, $\mu_{n+1} \leq x_{n+1} \leq \nu_{n+1}$.

Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \leq x_n \leq \nu_n$. Se sigue que

$$\bar{0} \leq x_n - \mu_n \leq \nu_n - \mu_n \quad \text{y} \quad \bar{0} \leq \nu_n - x_n \leq \nu_n - \mu_n$$

. ■

Corolario 2.4.1. *Sea* (X, P) *un espacio vectorial ordenado,* $M \subset X$ *no vacío y* $\mu_0, \nu_0 \in M$ *con* $\mu_0 \leq \nu_0$. *Sea* $T : M \to X$ *es una función creciente, se cumple que:*

(i) Si $\mu_0 \leq T(\mu_0)$, *entonces para todo* $n, k \in \mathbb{N}$ *se tiene* $\mu_n \leq \mu_{n+k}$.

(ii) *Si* $T(\nu_0) \leq \nu_0$*, entonces para todo* $n, k \in \mathbb{N}$ *se tiene* $\nu_{n+k} \leq \nu_k$*.*

(iii) *Si* $\mu_0 \leq T(\mu_0)$ *y* $T(\nu_0) \leq \nu_0$*, entonces para todo* $n, k \in \mathbb{N}$ *se tiene* $\mu_n \leq \nu_k$*.*

Donde $\{\mu_m\}$*,* $\{\nu_m\}$ *son las sucesiones de iterados de Picard de* μ_0 *y* ν_0 *respectivamente.*

Demostración

Prueba (i).

Sean $k, n \in \mathbb{N}$, se probará que $\mu_0 \leq T^k(\mu_0) = \mu_k$.

Para $k = 1$ se cumple por hipótesis. Supóngase que para algún $k \in \mathbb{N}$ $\mu_0 \leq T(\mu_k)$.

Como $\mu_0 \leq \mu_k$, aplicando el Lema 2.4.1 se tiene $\bar{0} \leq T^n(\mu_k) - \mu_n = \mu_{n+k} - \mu_k$.

Así, $\mu_n \leq \mu_{n+k}$.

Prueba (ii).

Es análoga al inciso (i).

Prueba (iii).

Sean $n, k \in \mathbb{N}$, por incisos (i) y (ii) se tiene $\mu_n \leq \mu_{n+k}$ y $\nu_{n+k} \leq \nu_k$.

Por otro lado, por el Lema 2.4.1, $\mu_{n+k} \leq \nu_{n+k}$. Se sigue que $\mu_n \leq \nu_k$. ■

Por el Teorema 2.2.2 y el corolario anterior se tiene la siguiente resultado.

Corolario 2.4.2. *Sea* (X, P) *un espacio vectorial ordenado,* $M \subset X$ *no vacío y* $\mu_0, \nu_0 \in M$ *con* $\mu_0 \leq \nu_0$*. Sea* $T : M \to X$ *es una función creciente,* $x > \bar{0}$ *y* $\{\mu_m\}$*,* $\{\nu_m\}$ *las sucesiones de iterados de Picard de* μ_0 *y* ν_0 *respectivamente.*
Para todo $n \in \mathbb{N}$ *se cumple que:*

(i) *Si* $\{\mu_m\}$ *es* $x-$*converge a* x^* *y* $\mu_0 \leq T(\mu_0)$*, entonces* $\mu_n \leq x^*$*.*

(ii) *Si* $\{\nu_m\}$ *es* $x-$*converge a* x^{**} *y* $T(\nu_0) \leq \nu_0$*, entonces para todo* $k \in \mathbb{N}$ *se cumple que* $x^{**} \leq \nu_k$*.*

(iii) *Si* $\{\mu_m\}$*,* $\{\nu_m\}$ *son* $x-$*converge a* x^**,* x^{**} *respectivamente y* $\mu_0 \leq T(\mu_0)$*,* $T(\nu_0) \leq \nu_0$*, entonces* $x^* \leq x^{**}$*.*

(iv) Si M es $x-$cerrado, T es Lipschitz por la derecha y se cumple (i) o (ii), entonces T tiene un punto fijo en M. A saber x^* o x^{**}, según se cumpla (i) o (ii).

Demostración

Prueba (i), (ii) y (iii).

Sean $n, k \in \mathbb{N}$, por el Corolario 2.4.1 se cumple que:
$(i)\mu_n \leq \mu_{n+k}$, $(ii)\nu_{n+k} \leq \nu_n$ y $(iii)\mu_k \leq \nu_k$.

Aplicando el Teorema 2.2.2 inciso (iii) al dejar n fijo y al hacer tender k al infinito se tiene que: $(i)\mu_n \leq x^*$, $(ii)x^{**} \leq \nu_n$ y $(iii)x^* \leq x^{**}$.

Prueba (iv).

Se hará primero el caso cuando se cumple el inciso (i). Se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\mu_n \leq x^*$ lo que implica $T(\mu_n) \leq T(x^*)$. Como T es $r > 0$ Lipschitz por la derecha se tiene

$$\bar{0} \leq T(x^*) - \mu_{n+1} = T(x^*) - T(\mu_n) \leq r(x^* - \mu_n).$$

Por otro lado, para todo $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N_\epsilon$ implica

$$-\frac{\epsilon}{r}x \leq x^* - \mu_n \leq \frac{\epsilon}{r}x \quad \text{y así} \quad r(x^* - \mu_n) \leq \epsilon x.$$

Como $\bar{0} \leq T(x^*) - \mu_{n+1} \leq r(x^* - \mu_n)$, entonces $-\epsilon x \leq T(x^*) - \mu_{n+1} \leq \epsilon x$, es decir, $\{\mu_{n+1}\}$ es $x-$convergente a $T(x^*)$.

Pero $\{\mu_{n+1}\}$ también es $x-$convergente a x^*. Como P es arquimediano el $x-$límite es único y así $T(x^*) = x^*$.

$x^* \in M$ ya que la sucesión $\{\mu_n\}$ en M es $x-$convergente a x^* y M es $x-$cerrado.

Prueba inciso (ii). Es análoga a la prueba del inciso (i). ■

Las pruebas para los incisos (i) y (ii) del Corolario 2.4.2 se pueden adaptar sin el operador T para funciones crecientes.

El siguiente teorema nos dota de un criterio para saber cuando las funciones Lipschitz por la derecha tienen un único punto fijo.

Teorema 2.4.1. *Sea (X, P) un espacio vectorial ordenado con P un cono arquimediano y $u_0, v_0 \in X$, con $u_0 \leq v_0$. Sea $T : [u_0, v_0] \to [u_0, v_0]$ una función creciente y Lipschitz por la derecha con $0 < r < 1$. Si existen $x > \bar{0}, x_0 \in [u_0, v_0]$ tales que $\{x_n\}$ es x-convergente a algún $x^* \in X, \{x_n\}$ la sucesión de iterados de Picard de x_0, entonces*

(a) x^* es el único punto fijo de T,

(b) para todo $y \in [u_0, v_0], \{y_n\}$ la sucesión de iterados de Picard de y es z- convergente a x^*, donde $z = x + (v_0 - u_0)$.

Demostración

Como $T : [u_0, v_0] \to [u_0, v_0]$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n = T^n(x_0) \in [u_0, v_0]$ y como $\{x_n\}$ es x- convergente a x^* y como $[\mu_0, \nu_0]$ es $x-$cerrado, entonces $x^* \in [u_0, v_0]$.

Por otro lado, por Lema 2.4.1 $\{v_n - x_n\}, \{u_n - x_n\}$ son $(v_0 - u_0)-$convergentes a $\bar{0}$. Por Teorema 2.2.1, $\{v_n\}, \{u_n\}$ son $[x + (v_0 - u_0)]$- convergentes a x^*. Por Corolario 2.4.2 inciso (iv) se tiene que x^* es un punto fijo de T.

Por otra parte, $\{v_n - x_n\}, \{u_n - x_n\}$ son $(v_0 - u_0)-$convergentes a $\bar{0}$ implica por Teorema 2.2.2 inciso (i) que $\{v_n - x_n\}, \{u_n - x_n\}$ son $\frac{1}{2}(v_0 - u_0)-$convergentes a $\bar{0}$ y por Teorema 2.2.1, $\{v_n\}, \{u_n\}$ son $[x + \frac{1}{2}(v_0 - u_0)]$- convergentes a x^* y para cada $y \in [\mu_0, \nu_0]$ su sucesión de iterados de Picard cumple por el Lema 2.4.1 que $\{\nu_n - y_n\}$ es $(v_0 - u_0)-$convergentes a $\bar{0}$ y por Teorema 2.2.2 $\{\nu_n - y_n\}$ es $\frac{1}{2}(v_0 - u_0)-$convergentes a $\bar{0}$. Por el Teorema 2.2.1 $\{y_n\}$ es $[x + (\nu_0 - \mu_0)]-$convergente a x^*. $\blacksquare$

Capítulo 3

w y x convergencia sobre Espacios Normados Ordenados

3.1. Espacios Normados Ordenados

En este capítulo se revisa, como su nombre sugiere, parte de la Teoría que hay sobre la $x-$uniforme convergencia y la $w-$convergencia, así como su relación que se tiene con la norma de un espacio normado.

En el capítulo anterior se vio la importancia de un cono Arquimediano para el funcional de Minkowski. En este capítulo se analizan los beneficios que tiene el trabajar teniendo una norma y se quiere mantener ciertos los resultados antes estudiados. El siguiente teorema proporciona una condición suficiente para que un cono sea arquimediano en un espacio normado.

Teorema 3.1.1. *Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado con un cono P. Si P es cerrado con respecto a la topología inducida por la norma $||\cdot||$ en X, entonces P es arquimediano.*

Demostración

Sean $y \in X$, $x \in P$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $ny \leq x$, entonces $\frac{1}{n}x - y \in P$ y como P es cerrado se tiene que $-y \in P$ o bien $\bar{0} \leq -y$. Así, $y \leq \bar{0}$. ■

En este trabajo cuando se tenga un espacio normado se trabajará particularmente con conos que sean cerrados en norma.

Definición 3.1.1. *Sea X un espacio normado, un* ***cono ordenador*** *en X es un subconjunto P no vacío tal que P es un cono en X como espacio vectorial y P es cerrado con respecto a la topología inducida por la norma en X.*
Al espacio normado $(X, ||\cdot||, P)$ donde P es un cono ordenador se le conoce como ***espacio normado ordenado****.*

Observación 4. *Si $(X, ||\cdot||, P)$ es espacio normado ordenado, entonces P es arquimediano por el Teorema 3.1.1. Pero no todo cono arquimediano es necesariamente cerrado en norma. Para esto ver el siguiente ejemplo.*

Sea $X = \mathbb{R}^2$ y $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$.
Se observa que X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y P un cono arquimediano para X.

Como un cono ordenador P es un cono viendo a X como espacio vectorial, en lo que sigue sólo se le llamará cono a P sino se permite confusión.

A continuación, se da un ejemplo de cono ordenador.

Ejemplo 3.1.1. *Sea $X = C[a, b]$ con la norma es $||\cdot||_\infty$, definida en el ejemplo A.3.3. Se tiene que $P = \{g \in C[a, b] : g(x) \geq 0\}$ es un cono ordenador en X.*

Se sabe por el Teorema 2.2.2 inciso (iii) que si $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son $x-$uniformemente a x, y respectivamente y $x_n \leq y_n$, entonces se preserva el límite cuando P es arquimediano. El siguiente resultado es análogo pero usando la convergencia en norma y la propiedad de que P es un cono cerrado.

Teorema 3.1.2. *Sean $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio normado ordenado, $x, y \in X$ y dos sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ en X que convergen a x e y respectivamente. Si $x_n \leq y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \leq y$.*

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $y_n - x_n \in P$ y la sucesión $\{y_n - x_n\}$ converge a $y - x$, entonces $y - x \in \bar{P}$, como P es cerrado, esto implica $y - x \in P$. Así, $x \leq y$. ■

En adelante se dirá que $\{x_n\}$ converge a x^* para hacer referirse a que $\{x_n\}$ converge en norma a x^*.

Observación 5. *Del Teorema 3.1.2 se sigue que para todo $(X, ||\cdot||, P)$ espacio de normado ordenado y $a,\ b \in X$ con $a \leq b$, el intervalo cerrado $[a, b]$ es realmente un conjunto cerrado.*

Análogamente como se definió conjuntos acotados en orden se puede definir el caso particular para sucesiones sobre espacios con un orden parcial, se puede definir cuando la sucesión está acotada en orden.

Definición 3.1.2. *Sea $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio normado ordenado. La sucesión $\{x_n\}$ es:*

1. ***Acotada superiormente (inferiormente) en orden**, si existe $x \in X$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_n \leq x$ ($x \leq x_n$);*

2. ***Acotada en orden**, si es acotada superiormente e inferiormente en orden.*

Teorema 3.1.3. *Sean $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio normado ordenado y $A \subset X$.*

Si A es acotado superiormente (inferiormente) en orden, entonces $\bar{A}$ es acotado superiormente en orden.

Demostración

Supongamos que A es acotado superiormente y sea $x_0 > 0$ tal que $x \leq x_0$ para cada $x \in A$. Sea $z \in \bar{A}$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que converge a z. Esto implica que, $x_0 - x_n \in P$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_0 - x_n\}$ converge a $x_0 - z$. Entonces, por el Teorema 3.1.2 $x_0 - z \in P$, es decir, x_0 es cota superior de $\bar{A}$.

La prueba es análoga cuando A es acotado inferiormente. ■

La siguiente definición nos proporciona una caracterización para que los conjuntos acotados en orden sean acotados en norma que posteriormente se probará.

Definición 3.1.3. *Sea $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio normado ordenado. El cono es* ***Normal****, si existe $M > 0$ tal que si para todo $x, y \in P,\ 0 \leq x \leq y,$ entonces $\| x \| \leq M \| y \|$.*
A la constante M se le llama ***constante normal****.*

A continuación, se presenta un ejemplo de un cono normal y el segundo ejemplo muestra que se puede definir la propiedad de normalidad del cono sin la cerradura de este.

Ejemplo 3.1.2. *Sean $X = C[a,b]$ y $P = \{g \in C[a,b] : g(x) \geq 0\}$, donde la norma es $||\cdot||_\infty$, definida en el ejemplo A.3.3. Se tiene que P es un cono normal.*

Ejemplo 3.1.3. *Sea $X = \mathbb{R}^2$ es un espacio normado con la norma usual y un cono $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\} \cup \{(0,0)\}$ un cono. Se verá que P cumple la propiedad de un cono normal excepción de la cerradura del cono.*
En efecto, sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X$ tales que $(0,0) \leq (x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$.
Así para $i \in \{1, 2\}$,

$$x_i^2 \leq x_i^2 + 2(y_i - x_i)x_i + (y_i - x_i)^2 = y_i^2.$$

Por lo cual, $||(x_1, x_2)|| \leq ||(y_1, y_2)||$.

De la misma manera no todos los conos que son arquimedianos son normales. A continuación se da un ejemplo.

Ejemplo 3.1.4. *Sea $X = C^1[0, 2\pi]$ espacio vectorial de las funciones real valuadas con deriva continua. X con $P = \{x \in X : x(t) \geq 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi\}$ es un espacio vectorial ordenado con P un cono arquimediano. La prueba de esto es análoga a la del Ejemplo 2.1.3.*
Por otro lado, con la norma $||x|| = ||x||_\infty + ||x'||_\infty$ no es normal.

Para esto observe que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $x_n(t) = 1 - \cos(nt), y_n(t) = 2 \in X$ y $0 \leq 1 - \cos(nt) \leq 2$. Así, $\bar{0} \leq x_n \leq y_n$ donde $\bar{0}$ es la función $\bar{0}(t) = 0$.
Por otro lado, $||x_n|| = 2 + n$ y $||y_n|| = 2$. Por lo cual, P no es normal en $(X, ||\cdot||)$.

EL siguiente teorema nos presenta una condición suficiente para relacionar la convergencia en norma con la $x-$uniforme convergencia.

Teorema 3.1.4. *Sea $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio normado ordenado, $x^* \in X$ y $\{x_n\}$ una sucesión que es convergente a x^*. Si existe $x > \bar{0}$ es tal que $\{x_n\}$ es $x-$Cauchy, entonces $\{x_n\}$ es $x-$convergente a x^*.*

Demostración
Sea $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ implica

$$-\epsilon \cdot x \leq x_m - x_n \leq \epsilon \cdot x$$

o bien

$$x_n - \epsilon \cdot x \leq x_m \leq \epsilon \cdot x + x_n$$

dejando a n fija y haciendo tender m a infinito. Por el Teorema 3.1.2, es decir,

$$-\epsilon \cdot x \leq x^* - x_n \leq \epsilon \cdot x$$

■

Para la siguiente definición se necesita una definición de espacio de Banach en los espacios métricos. Como particularmente un espacio normado es espacio métrico (ver apéndice A), por lo cual se puede usar esta definición en espacios normados.

Definición 3.1.4. *Un **espacio de Banach ordenado** es un par $(X, ||\cdot||, P)$, donde X es un espacio de Banach y P es un cono ordenador en X.*

Teorema 3.1.5. *Sea $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio normado ordenado y P normal.*

(a) Si $\{x_n\}$ es una sucesión $x-$convergente a algún $x^* \in X$ y $x > \bar{0}$, entonces

(i) $\{x_n\}$ *es converge a* x^*,

(ii) $||x^* - x_n|| \leq [2M+1]\epsilon_0||x||$ *cuando* $-\epsilon_0 x \leq x^* - x_n \leq \epsilon_0 x$

donde $M > 0$ *es la constante de normalidad de* P.

(b) Si X *es Banach, entonces* X *es uniformemente completo.*

Demostración

Prueba (a).

Sea $\epsilon > 0$. Se define $\epsilon_0 = \dfrac{\epsilon}{[2M+1](1+||x||)} > 0$.
Luego, existe $N_{\epsilon_0} \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_{\epsilon_0}$ implica $-\epsilon_0 x \leq x^* - x_n \leq \epsilon_0 x$.
Así,

$$\bar{0} \leq x^* - x_n + \epsilon_0 x \leq 2\epsilon_0 x \quad \text{o bien} \quad ||x^* - x_n + \epsilon_0 x|| \leq M||2\epsilon_0 x||.$$

Se sigue,

$$\begin{aligned} ||x^* - x_n|| &\leq ||x^* - x_n + \epsilon_0 x|| + ||\epsilon_0 x|| \\ &\leq M||2\epsilon_0 x|| + ||\epsilon_0 x|| \\ &= [2M+1]\epsilon_0||x|| < \epsilon. \end{aligned}$$

Prueba (b).

Sea $\{x_n\}$ es una sucesión $x-$Cauchy a algún $x > \bar{0}$, entonces para todo $\epsilon_0 > 0$ se cumple existe $N_{\epsilon_0} \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq N_{\epsilon_0}$ implica $-\epsilon_0 x \leq x_m - x_n \leq \epsilon_0 x$.
Haciendo un análisis similar se obtiene

$$||x_m - x_n|| \leq [2M+1]\epsilon_0||x||,$$

es decir, $\{x_n\}$ es Cauchy en norma. Como X es un espacio de Banach, entonces existe $x^* \in X$ tal que $\{x_n\}$ es converge a x^*. Aplicando el Teorema 3.1.4 se tiene que $\{x_n\}$ es $x-$uniformemente convergente a x^*. ■

El siguiente teorema nos sirve para probar que si una sucesión en un espacio de Banach ordenado es acotada en orden por otras dos sucesiones tales que convergen en norma a un mismo límite x^*, entonces esta también converge a x^* mientras el cono sea normal.

Teorema 3.1.6. *(Teorema del emparedado) Sean $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio normado ordenado. P es normal si y sólo si para todas $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ sucesiones en X tales que existe x^* en X con la propiedad de que $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ convergen a x^* y para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple que $x_n \leq y_n \leq z_n$, entonces $\{y_n\}$ converge a x^*.*

Demostración

$\Rightarrow$]

$x_n \leq y_n \leq z_n$ implica $\bar{0} \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n$. Como P normal existe $M > 0$ tal que

$$||y_n - x_n|| \leq M||z_n - x_n|| \leq M\left[||x^* - x_n|| + ||x^* - z_n||\right].$$

Se sigue,

$$\begin{aligned} ||x^* - y_n|| &\leq ||x^* - x_n|| + ||y_n - x_n|| \\ &\leq (1 + M)||x^* - x_n|| + M||x^* - z_n||. \end{aligned}$$

Aplicando límite cuando n tiende a ∞, se obtiene que $\{y_n\}$ converge a x^*.

$\Leftarrow$]

Se hará por contra reciproca. Supóngase que P no es normal, entonces existen $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones en X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\bar{0} \leq x_n \leq y_n \text{ y } n||y_n|| < ||x_n||.$$

Como $||x_n|| > n||y_n||$ y $||y_n|| \geq 0$, entonces $||x_n|| > 0$.

Así,

$$\frac{||y_n||}{||x_n||} \leq \frac{1}{n},$$

es decir, $\dfrac{y_n}{||x_n||}$ converge a $\bar{0}$.

Por otro lado, $\bar{0} \leq \dfrac{x_n}{||x_n||} \leq \dfrac{y_n}{||x_n||}$, pero $\dfrac{x_n}{||x_n||}$ no converge a $\bar{0}$

ya que $\left\|\dfrac{x_n}{||x_n||} - \bar{0}\right\| = \dfrac{||x_n||}{||x_n||} = 1$. Lo cual termina la prueba. ∎

Teorema 3.1.7. *Sea $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio normado ordenado. Si P es un cono normal en X, entonces todo intervalo cerrado es un conjunto acotado en norma.*

Demostración

Sean $a,\ b \in X$, con $a \leq b$ y $x \in [a, b]$, entonces $0 \leq x - a \leq b - a$.
Como P es normal, existe $M \geq 0$ tal que $||\ x - a\ || \leq M||\ b - a\ ||$.
De esta manera, $||\ x\ || \leq ||\ a\ ||\ +\ M||\ b - a\ ||$.
Por lo tanto $[a, b]$ es acotado en norma. ■

El reciproco también es verdadero, la prueba la prueba se puede encontrar en el Teorema 2.1.1. de [5].

3.2. $w-$convergencia

Otro tipo de convergencia es descrita en [8] y [9]. Está convergencia guarda una relación más directa con la convergencia en norma. Para analizar dicha convergencia se necesita conocer la siguiente definición.

Definición 3.2.1. *Sea $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio normado ordenado. El cono es* ***sólido****, si $int(P) \neq \emptyset$.*

A continuación, se da un ejemplo de una familia espacios normados ordenados con cono sólido.

Ejemplo 3.2.1. *Sea $X = C^1[a, b]$ espacio vectorial de las funciones real valuadas con deriva continua. X con $P = \{x \in X : x(t) \geq 0,\ a \leq t \leq b\}$ es un espacio vectorial ordenado . Por otro lado P es sólido, con la norma $||x|| = ||x||_\infty + ||x'||_\infty$.*

En efecto, como $1_{[a,b]} \in X$ donde $1_{[a,b]}(t) = 1$ para todo $t \in [a, b]$. Sea $f \in X$, si $||f - 1_{[a,b]}|| < \dfrac{1}{2}$, entonces para todo $t \in [a, b]$ se cumple $|f(t) - 1| < \dfrac{1}{2}$.
Así, $f(t) > \dfrac{1}{2} > 0$, es decir, $f \in P$. Por tanto, P es sólido.

Ahora se presenta una relación necesaria para definir la $w-$convergencia.

Notación:

Sea $(X, ||\cdot||, P)$ con P un cono sólido. Para cada $x,\ y \in X$ se escribe $x << y$ si y sólo si $y - x \in int(P)$.

Ahora se analiza la relación que hay entre las relaciones $<<$ y $\leq$. Así como algunas de las propiedades que tiene la relación $<<$.

Lema 3.2.1. *Sea (X, P) espacio de Banach ordenado.*

(a) Si $x,\ y \in X$ tal que $x << y$ implica que $x \leq y$.

(b) Si $x \in P$, $y \in X$ tal que $x << y$, entonces $y \in intP$.

Demostración

Prueba (a).

Sean $x, y \in X$ con $x << y$, entonces $x - y \in intP \subset P$. Así, $x - y \in P$ o bien $x \leq y$.

Prueba (b).

Como $x << y$ se tiene que $y - x \in intP$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(y-x, r) \subset P$.
Luego, si $z \in B(y, r)$ implica $||z - x - (y - x)|| = ||z - y|| < r$.
Así, $z - x \in B(y - x, r) \subset P$ lo cual implica $x \leq z$. Como $x \geq \bar{0}$, se sigue que $\bar{0} \leq z$ o bien $z \in P$. Por lo cual, $B(y, r) \subset P$, entonces $y \in intP$. ■

Lema 3.2.2. *Sea (X, P) espacio de Banach ordenado. Sean $x, y, z \in X$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones $x \leq y << z$, $\ x << y \leq z$, $\ x << y << z$, entonces $x << z$.*

Demostración

Caso 1) $x \leq y << z$.

Ya que $x \leq y$, entonces $y - x \in P$. Además $y << z$, es decir, $z - y \in intP$, por lo tanto existe $r > 0$ tal que $B(z - y, r) \subseteq P$.

Sea $w \in B(z - x, r)$, entonces $||[w - (y - x)] - (z - y)|| = ||w - (z - x)|| < r$.

Así, $[w-(y-x)] \in B(z-y,r) \subset P$. Luego, usando el hecho de que P es un cono y que también $y-x \in P$, resulta que $w = [w-(y-x)] + (y-x) \in P$ o bien $B(z-x,r) \subset P$, entonces $z-x \in intP$, esto es, $x << z$.

Caso 2) $x << y \leq z$.

Es análogo al caso 1).

Caso 3) $x << y << z$.

Es un caso particular del caso 1) y del caso 2). ■

El siguiente resultado, nos da una caracterización para crear nuevos puntos interiores a partir de otros ya existentes.

Lema 3.2.3. *Sea $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio de Banach ordenado con P un cono sólido. Sean $x \in P$, $y \in int(P)$ y $\lambda > 0$, entonces $x+y$, $\lambda y \in int(P)$.*

Demostración

Como $\bar{0} \leq x, \bar{0} << y$, entonces $\bar{0} << y = \bar{0} + y \leq x + y$.

Por Lema 3.2.2 resulta que

$$\bar{0} << x+y, \text{ es decir, } x+y \in int(P).$$

Como $y \in int(P)$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(y,r) \subset P$.

Para cada $w \in B(\lambda x, \lambda r)$ se tiene que $||w - \lambda x|| < \lambda r$ o bien $\left|\left|\frac{1}{\lambda}w - x\right|\right| < r$.

Así,

$$\frac{1}{\lambda}w \in B(x,r) \subset P \text{ y } \lambda > 0 \text{ implica } w \in P.$$

Por lo cual, $B(\lambda x, \lambda r) \subset P$ o bien $\lambda x \in intP$. ■

Observación 6. *Sea $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio normado ordenado con P sólido y $\lambda > 0$, entonces $int(P) = int(P) + int(P) = P + int(P) = \lambda int(P)$.*

Por Lema 3.2.3 se tiene que $int(P) + int(P) \subset P + int(P) \subset int(P)$.

Sean $x \in intP$, entonces $\frac{1}{2}x \in P$ y por el Lema(3.2.3), se sigue que $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x \in int(P) + int(P)$. Así, $int(P) \subset int(P) + int(P) \subset int(P) + P$. Por lo cual, $int(P) = int(P) + int(P) = int(P) + P$.

Por Lema 3.2.3 se tiene que $\lambda intP \subseteq intP$. Ahora mostramos que $intP \subseteq \lambda intP$. Para esto sea $x \in intP$. Como $\frac{1}{\lambda} > 0$, entonces $\frac{1}{\lambda}x \in intP$ y así $x = \lambda\frac{1}{\lambda}x \in \lambda intP$. Por tanto, $\lambda intP = intP$.

El siguiente Teorema muestra la consistencia con entre la relación de orden del campo y $<<$.

Lema 3.2.4. *Sea $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio de Banach ordenado con P un cono sólido. Si $0 < \alpha \leq \beta, \quad \bar{0} \leq x << y$, entonces $\alpha x << \beta y$. En particular $\alpha x << \alpha y$*

Demostración

$\bar{0} \leq x << y$ implica que $x \in P$, $y - x \in intP$. Como $0 < \alpha \leq \beta$ y usando el Lema 3.2.3 se tiene que $\beta(y - x) \in intP$, $(\beta - \alpha)x \in P$.

Así, $\beta y - \alpha x = \beta(y - x) + (\beta - \alpha)x \in intP$, lo cual implica $\alpha x << \beta y$. ■

A continuación, se presentan los conceptos básicos para poder trabajar con la $w-$convergencia.

Definición 3.2.2. *Sean $(X, ||\cdot||, P)$ con P un cono sólido y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Se dice que $\{x_n\}$ es:*

*(i) $w-$**convergente** a x. Si por cada $\epsilon \in int(P)$, existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ tal que $-\epsilon << x_n - x << \epsilon$ para cada $n \geq n_0$(denotar $x_n \xrightarrow{w} x$ y x se llama $w-$**límite** de $\{x_n\}$).*

*(ii) $w-$**Cauchy**. Si por cada $\epsilon \in int(P)$, existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $-\epsilon << x_n - x_m << \epsilon$ para cada $m, n \geq n_0$.*

Definición 3.2.3. *Sean (X, P) con P un cono sólido y $D \subset X$ es $w-$**cerrado** si para cada $\{x_n\} \subset D, x_n \xrightarrow{w} x$ implica que $x \in D$.*

A continuación, se analizará la relación entre la convergencia en norma con respecto a la $w-$convergencia.

Teorema 3.2.1. *Sea P un cono sólido de un espacio $(X, ||\cdot||, P)$ normado ordenado, $\{\mu_n\}$ una sucesión en X y $\mu^* \in X$. Si $\{\mu_n\}$ es convergente en norma a μ^*, entonces $\{\mu_n\}$ es $w-$convergente a μ^*.*

Demostración

Sea $\epsilon \in int(P)$, entonces existe $r_\epsilon > 0$ tal que $B(\epsilon, r_\epsilon) \subset P$.
Se afirma que si $x \in B\left(\epsilon, \frac{r_\epsilon}{2}\right)$, entonces $x \in int(P)$. En efecto,

$$||z - x|| < \frac{r_\epsilon}{2} \text{ implica } ||z - \epsilon|| \leq ||z - x|| + ||x - \epsilon|| < \frac{r_\epsilon}{2} + \frac{r_\epsilon}{2} = r_\epsilon.$$

Como $\{\mu_n\}$ es convergente a μ^*, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $||\mu_n - \mu^*|| < \frac{r_\epsilon}{2}$.
Se sigue $\epsilon \pm [\mu_n - \mu^*] \in B\left(\epsilon, \frac{r_\epsilon}{2}\right)$ y así $\epsilon \pm [\mu_n - \mu^*] \in int(P)$.
Por lo tanto, $-\epsilon << \mu_n - \mu^* << \epsilon$, es decir, $\{\mu_n\}$ es $w-$convergente a μ^*. ■

El recíproco no siempre se cumple. El siguiente ejemplo es de una sucesión $w-$convergente pero no convergente en norma.

Ejemplo 3.2.2. *Sea $X = C^1[0,1]$ espacio normado ordenado con el cono $P = \{x \in X : x(t) \geq 0,\ 0 \leq t \leq 1\}$ y la norma $||x|| = ||x||_\infty + ||x'||_\infty$.
Para $n \in \mathbb{N}$ se define $x_n(t) = \frac{\sin(nt)}{n}$, pero $(x_n(t))' = cos(nt)$ entonces $||(x_n(t))'||_\infty = 1$.
Así $||x_n|| \geq 1$ por lo cual $\{x_n\}$ no converge en norma a $\bar{0}$. Por otra parte, para $y_n = \frac{1}{n}$ se tiene $y_n \in P$ y $\{y_n\}$ converge en norma a $\bar{0}$ y $-y_n \leq x_n \leq y_n$. Por Teorema 3.2.1 se tiene que para todo $\epsilon \in int(P)$ existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $\bar{0} \leq y_n << \epsilon$ y por tanto $-\epsilon << x_n << \epsilon$. Por lo cual, $\{x_n\}$ es $w-$convergente a $\bar{0}$.*

En el ejemplo anterior se tiene que P no es normal. El siguiente teorema prueba que un cono P sea normal es una condición suficiente para que la $w-$convergencia y la convergencia en norma sean equivalentes.

Teorema 3.2.2. *Sea P un cono sólido de un espacio $(X, ||\cdot||, P)$ normado ordenado, $\{\mu_n\}$ una sucesión en X y $\mu^* \in X$. Si $\{\mu_n\}$ es $w-$convergente a μ^* y P normal con constante de normalidad N, entonces $\{\mu_n\}$ es convergente en norma a μ^*.*

Demostración

Sean $x \in int(P)$ y $\epsilon > 0$, por Lema 3.2.3 se tiene que $y = \dfrac{\epsilon}{(||x||+1)(2N+1)} x \in int(P)$. Así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $-y << \mu_n << y$ o bien $\bar{0} << \mu_n + y << 2y$. Por Lema 3.2.1 $\bar{0} \leq \mu_n + y \leq 2y$. Como P es normal se cumple $||\mu_n + y|| \leq N||2y||$. Por consiguiente,

$$||\mu_n|| \leq ||\mu_n + y|| + || - y|| \leq N||2y|| + ||y|| = (2N+1)||y|| = \frac{||x||\epsilon}{1 + ||x||} < \epsilon$$

Por lo tanto, $\{\mu_n\}$ converge a $\bar{0}$. ■

Teorema 3.2.3. *Sea $(X, ||\cdot||, P)$ un ENO con P un cono sólido y $\{\mu_n\}$ es una sucesión en X. Si $\{\mu_n\}$ es $w-$convergente, entonces $\{\mu_n\}$ es $x-$uniformemente convergente para todo $x \in int(P)$.*

Demostración

Sea $x \in int(P)$, por el Lema 3.2.3 para todo $\epsilon > 0$ se cumple $\epsilon x \in int(P)$ y como $\{\mu_n\}$ una sucesión $w-$convergente para algún $\mu^* \in X$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ se cumple $-\epsilon x << x_n - x^* << \epsilon x$.

Aplicando el Lema 3.2.1 que dice que la relación $<<$ implica la relación de orden $\leq$, se tiene $-\dfrac{1}{n} x \leq x_n - x^* \leq \dfrac{1}{n} x$. ■

Lema 3.2.5. *Sean $(X, || \cdot ||, P)$ un espacio de Banach ordenado con P un cono sólido. Si μ es un elemento de X tal que $\bar{0} \leq \mu << c$ para todo $\bar{0} << c$, entonces $\mu = \bar{0}$.*

Demostración

Sea $c \in intP$ por Lema 3.2.3 para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\dfrac{1}{n} c \in intP$.
Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mu << \dfrac{1}{n} c$ o bien $\dfrac{1}{n} c - \mu \in intP \subset P$.
Como $\left\{\dfrac{1}{n} c - \mu\right\}$ converge a $-\mu$ y P es cerrado, se tiene que $-\mu \in P$.
Además por hipótesis $\mu \in P$, por lo cual $\mu = \bar{0}$. ■

EL siguiente teorema nos caracteriza los elementos en $int(P)$ en términos de las unidades de $P-$orden.

Teorema 3.2.4. *Sea $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio normado ordenado con P un cono sólido. Si $e \in P$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) e es una unidad de P-orden,

(ii) $e \in int(P)$, es punto interior de P,

(iii) e es punto interno de P.

Demostración

(i) implica (ii).

P sólido implica $intP \neq \emptyset$, es decir, existen $x^* \in P$ y $r > 0$ tal que $B(x^*, r) \subseteq P$, esto implica que

$$\text{para todo } y \in X, \text{ si } ||y - x^*|| < r \text{ implica } y \in P. \tag{3.1}$$

Por otro lado, si $e \in P$ unidad en orden implica que existe $\lambda > 0$ tal que $x^* \leq \lambda e$, entonces

$$e - \frac{x^*}{\lambda} \geq \bar{0}. \tag{3.2}$$

Observemos que $B\left(e, \frac{r}{\lambda}\right) \subseteq P$ ya que $y \in B\left(e, \frac{r}{\lambda}\right)$ lo cual implica $||y - e|| < \frac{r}{\lambda}$.

Se nota que

$$\frac{1}{\lambda}||x^* + (\lambda y - \lambda e) - x^*|| = \left|\left|\frac{x^*}{\lambda} + (y - e) - \frac{x^*}{\lambda}\right|\right| = ||y - e|| < \frac{r}{\lambda}.$$

Así, $||[x^* + \lambda y - \lambda e] - x^*|| < r$ y por (3.1), $[x^* + \lambda y - \lambda e] \in P$. Como $\lambda > 0$, entonces $\left[\frac{x^*}{\lambda} + (y - e)\right] \in P$. Por lo cual, $\left[\frac{x^*}{\lambda} + (y - e)\right] \geq \bar{0}$.

Por (3.2) se sigue que $y = \left[e - \frac{x^*}{\lambda}\right] + \left[\frac{x^*}{\lambda} + (y - e)\right] \geq \bar{0}$.

Así, $y \in P$, es decir, $B\left(e, \frac{r}{\lambda}\right) \subseteq P$.

$\therefore e \in intP$.

(ii) implica (iii).

$e \in int(P)$ implica que existe $r > 0$ tal que $B(e, r) \subseteq P$. Sea $x \in X$, se define $\lambda_0 = \frac{r}{1 + ||x||} > 0$. Si $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, $\quad ||[e + \lambda x] - e|| = \lambda||x|| = \frac{r}{1 + ||x||} \cdot ||x|| < r$.

Así, $[e+\lambda x] \in B(e,r) \subseteq P$ o bien $[e+\lambda x] \in P$ para $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$.
$\therefore e$ es un punto interno de P.
(iii) implica (i) por Lema 2.3.2. $\blacksquare$

Nota: $y \in A$ punto interno si y sólo si para todo $x \in X$ existe $0 < \alpha_0 < 1$ tal que $[\alpha y + (1-\alpha)x] \in A$, para todo $\alpha_0 < \alpha_0 < 1$.

El teorema anterior probó que siempre que se tengas puntos interiores de P se tiene unidades de $P-$orden, el reciproco no siempre se cumple. Los siguientes ejemplos son de un mismo espacio vectorial cuando $a = 1$, $b = 2$ que tiene unidades de $P-$orden pero dependiendo la norma se tiene o no puntos interiores para P.

Ejemplo 3.2.3. *Sea* $(C[1,2], ||\cdot||_\infty)$ *un espacio normado. Observemos que* $1_{[1,2]} : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dado por* $1(x) = 1$ *es una unidad de orden para el orden inducido por* $P = \{f \in C[1,2] : f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in [1,2]\}$. *Más aún, es un punto interior de* P.

Sea $f \in C[1,2]$ *tal que* $||f - 1_{[1,2]}||_\infty < \dfrac{1}{2}$ *y* $|f(x)-1| \leq ||f-1||_\infty$ *para toda* $x \in [1,2]$. *Entonces,* $|f(x)-1| \leq \dfrac{1}{2}$, *para toda* $x \in [1,2]$. *Así,* $\dfrac{1}{2} \leq f(x)$, *es decir,* $f \in P$.
Así, $1_{[1,2]} \in intP$.

Ejemplo 3.2.4. *Sea* $(C[a,b], ||\cdot||_1)$ *un espacio normado ordenado con el cono* $P = \{f \in C[a,b] : f(x) \geq 0\}$ *y* $||f||_1 = \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$.
Particularmente, para $a = 0$ *y* $b = 1$ *se tiene que* $1_{[0,1]} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $1_{[0,1]}(x) = 1$ *una unidad de orden, pero no es un punto interior de* P, *ya que la sucesión de funciones* $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$f_n(x) = \begin{cases} n(1+r)\left(x - \dfrac{1}{n}\right) + 1, \; si \; 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}, \\ 1 \;, si \; \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, *donde* $r \geq 0$, *se* *cumple*

$$\begin{aligned}
||f_n - 1_{[0,1]}||_1 &= \int_0^1 |f_n(x) - 1_{[0,1]}(x)|dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - 1_{[0,1]}(x)|dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{n}} |n(1+r)\left(x - \frac{1}{n}\right)|dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{n}} n(1+r)\left(\frac{1}{n} - x\right)dx \\
&= n(1+r)[\int_0^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{n} - x\right)dx] \\
&= \frac{1+r}{2n} y f_n(0) = -r \leq 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, $1_{[0,1]}$ *no es punto interior.*

El ejemplo 2.3.2 es un (X, P) espacio vectorial ordenado que nunca podría tener una norma que haga a P sólido, ya que por Teorema 3.2.4 está sería una unidad de orden y este espacio no tiene unidades de orden.

Cuando el cono P es sólido y normal se puede definir una norma equivalente a la original. Para definir esta norma se presenta los siguientes resultados.

Teorema 3.2.5. *Sea* $(X, ||\cdot||, P)$ *un espacio normado ordenado. Si* P *un cono sólido, entonces para todo* $x \in X$ *existen* $y,\ z \in int(P)$ *tal que* $x = y - z$.

Demostración

Sea $x \in X$, si $x = \bar{0}$, entonces $x = \bar{0} - \bar{0}$.

Si $x \neq \bar{0}$, se elige $x_0 \in int(P)$ lo cual implica que existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset P$.

Se sigue que $x_0 \pm \frac{r}{||x||}x \in B(x_0, r) \subset int(P)$. Como $\frac{||x||}{2r} > 0$ y por el Lema 3.2.3 se tiene que $y = \frac{||x||}{2r}\left(x_0 + \frac{r}{||x||}x\right) \in int(P)$ y $z = \frac{||x||}{2r}\left(x_0 - \frac{r}{||x||}x\right) \in int(P)$.

Además, $x = y - z$ lo cual termina la prueba. ■

Los conos sólidos no son los únicos conos que pueden crear una descomposición de cada elemento de X en -por así decirlo- una parte positiva y una negativa. Las siguientes definiciones son con respecto a este tema.

Definición 3.2.4. *Sea $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio normado ordenado. Se dice que P es*

(i) ***reproductor**, si $X = P - P$,*

(ii) ***total**, si $X = \overline{P - P}$,*

donde $P - P = \{x \in X : \exists y,\ z \in P : x = y - z\}$.

Observación 7. *Por Teorema 3.2.5 si P es sólido, entonces P es reproductor y como $P - P \subset \overline{P - P}$ entonces si P es reproductor implica que P es total.*

Lema 3.2.6. *Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado y $A \subset X$ no vacío tal que para todo x en A y $r \geq 0$, se cumple que $rx \in A$.*
Si $T = \{x \in X : r < ||x|| < R\} \subset A$, entonces $A = X$.

Demostración
Sea $x \in X$ diferente de $\bar{0}$, observemos que $x\dfrac{r+R}{2||x||} \in T \subset A$ y $\dfrac{2||x||}{r+R} > 0$.
Lo cual implica $x = x\dfrac{r+R}{2||x||} \cdot \dfrac{2||x||}{r+R} \in A$.
Como A es no vacío, entonces existe $x_0 \in A$ y así $\bar{0} = x_0 \cdot 0 \in A$. Por tanto $A = X$. ■

Los resultados que usaremos sobre conos reproductores son los siguientes.

Lema 3.2.7. *Sea $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio de Banach ordenado. Si P es reproductor entonces existe $\sigma > 0$ tal que para todo $x \in X$, existe $y \in P$, tal que $||y|| \leq \sigma||x||$ y $x \leq y$.*

Demostración
Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $E_n := \{x \in X : \exists y \in P : x \leq y,\ ||y|| \leq n||x||\}$.
Basta demostrar que $X = E_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Sea $x_0 \in X$, como P es un cono reproductor se sigue que existen $y_0,\ z_0 \in P$ tales que $x_0 = y_0 - z_0$ lo que implica $x_0 \leq x_0 + z_0 = y_0$.

Si $y \neq \bar{0}$, entonces $||y|| > 0$ y así existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||y_0|| \leq n_0||x_0||$.
Lo cual prueba que $X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y usando el Teorema de Categoría de Baire se sigue que existen $n_1 \in \mathbb{N}$, $x_1^* \in \overline{E_{n_1}}$ y $R > 0$ tales que $B(x_1^*, R) \subset \overline{E_{n_1}}$.
Sea $r \in (0, R)$, se muestra que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T_1 = \{x \in X : r < ||x|| < R\} \subset \overline{E_k}$.

Ya que por el Lema 3.2.6 y el hecho de que si $x \in E_k$ también $tx \in E_k$ para todo $t > 0$ implicará que $\overline{E_k} = X$.

Se nota que para $-x_1^*$ existen $y_1^* \in P$, $n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $-x_1^* \leq y_1^*$ y $||y_1^*|| \leq n_2||-x_1^*||$.
Sea $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $\left[n_1 + \dfrac{1}{r}(n_1 + n_2)||x_1^*||\right] < n_3$. Se probará que $T \subset \overline{E_{n_3}}$.
Sea $x \in T$, entonces $y = x - x_1^* \in T_0 = \{x \in X : r < ||x - x_1^*|| < R\} \subset \overline{E_{n_1}}$.
Por lo cual, existe $\{x_i\}$ sucesión en E_{n_1} y convergente a y, que para cada $i \in \{1, 2, \cdots\}$ se cumple que $x_i \in T$ y existen $y_i \in P$ tal que $x_i \leq y_i$ y $||y_i|| \leq n_1||x_i||$.
Luego, para cada $i \in \{1, 2, \cdots\}$ se tiene que $x_i - x_1^* \leq y_i + y_1^*$, $y_i + y_1^* \in P$ y

$$\begin{aligned}
||y_i + y_1^*|| &\leq ||y_i|| + ||y_1^*|| \\
&\leq n_1||x_i|| + n_2||x_1^*|| \\
&\leq n_1[||x_i - x_1^*|| + ||x_1^*||] + n_2||x_1^*|| \\
&\leq (n_1 + n_2)||x_1^*|| + n_1||x_i - x_1^*||.
\end{aligned}$$

Como $x_i \in T_1$ entonces $1 < \dfrac{||x_i - x_1^*||}{r}$. Así

$$(n_1 + n_2)||x_1^*|| \leq \frac{||x_i - x_1^*||}{r}(n_1 + n_2)||x_1^*||.$$

Así,

$$\begin{aligned}
||y_i + y_1^*|| &\leq (n_1 + n_2)||x_1^*|| + n_1||x_i - x_1^*|| \\
&\leq \frac{||x_i - x_1^*||}{r}(n_1 + n_2)||x_1^*|| + n_1||x_i - x_1^*|| \\
&\leq n_3||x_i - x_1^*||.
\end{aligned}$$

Por lo cual, para todo $i \in \{1, 2, \cdots\}$ se tiene que $x_i - x_1^* \in E_{n_3}$.

Pero $\{x_i - x_1^*\}$ converge a $x = y - x_1^*$. Así, $x \in T_1$ y $X = \overline{E_{n_3}}$.

Por último probaremos que $X = E_{n_3}$. Sea $x \in X$ si $x = \bar{0}$, entonces $x \in E_{n_3}$.

Supongamos que $x \neq \bar{0}$ entonces $||x|| > 0$ y así existe $x_1 \in E_{n_3}$ tal que $||x - x_1|| < \frac{1}{2^3}||x||$.

Luego, existe $x_2 \in E_{n_3}$ tal que $||(x - x_1) - x_2|| < \frac{1}{2^4}||x||$ y haciendo inducción matemática se obtiene una sucesión $\{x_n\}$ de E_{n_3} tal que $||x - x_1 - x_2 - \cdots - x_k|| < \frac{1}{2^{k+2}}||x||$.

Así, $x = \Sigma_{n=1}^{\infty} x_n$. Se observa que para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$

$$||x_k|| \leq ||x - \Sigma_{n=1}^{k-1} x_n|| + ||x - \Sigma_{n=1}^{k} x_n|| < \frac{||x||}{2}.$$

Luego, como $\{x_n\}$ es una sucesión de E_{n_3} implica que existe $\{y_n\}$ sucesión de P tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $x_n \leq y_n$ y $||y_n|| \leq n_3||x_n||$.
Se observa que

$$||\Sigma_{n=1}^{\infty} y_n|| \leq \Sigma_{n=1}^{\infty}||y_n|| \leq n_3 \Sigma_{n=1}^{\infty}||x_n|| \leq \Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}||x|| = ||x||.$$

Por lo cual, $y = \Sigma_{n=1}^{\infty} y_n$ converge como cada $y_n \in P$, entonces $y \in P$. Más aún,

$$x = \Sigma_{n=1}^{\infty} x_n \leq \Sigma_{n=1}^{\infty} y_n = y, \ ||y|| \leq \Sigma_{n=1}^{\infty}||y_n|| \leq n_3||x||.$$

Lo cual implica que $x \in E_{n_3}$ y así $X = E_{n_3}$. Lo cual termina la prueba. ■

El siguiente lema nos da un poco más de información sobre conos reproductores.

Lema 3.2.8. *Sea $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio de Banach ordenado. P es reproductor si y sólo si existe $\sigma > 0$ tal que para todo $x \in X$, existen $y, \ z \in P$, tales que*

(i) $x = y - z$,

(ii) $||y|| \leq \sigma||x||$,

(iii) $||z|| \leq \sigma||x||$.

Demostración

Si P es reproductor cumple que existe $\sigma^* > 0$ para todo $x \in X$ existe $y \in P$ tal que $||y|| \leq \sigma^*||x||$, $x \leq y$. Además, $x = y + (y - x)$ donde $y, y - x \in P$.

Por otro lado, $||y - x|| \leq ||y|| + ||x|| \leq \sigma^*||x|| + ||x|| = (\sigma^* + 1)||x||$.

También $||y|| \leq \sigma^*||x|| \leq (\sigma^* + 1)||x||$. Por lo cual, si se define $z = y - x$ y $\sigma = \sigma^* + 1$ se tiene el resultado deseado. ■

Lema 3.2.9. *Sea P un cono reproductor normal de un espacio de Banach $(X, ||\cdot||)$. Se define $||\cdot||_0 : X \longrightarrow [0, \infty)$ por:*

$$||x||_0 = \inf_{u \in P}\{||u|| : -u \leq x \leq u\}, \qquad \forall x \in X. \tag{3.3}$$

Se tiene que $||\cdot||_0$ es una norma equivalente a $||\cdot||$ y $(X, ||\cdot||_0)$ es un espacio de Banach.

Demostración

De lema 3.2.8 se deduce que hay un $\tau > 0$ tal que, para cada $x \in X$, existen $y, z \in P$ con $||y|| \leq \tau||x||$ y $||z|| \leq \tau||x||$ tal que $x = y - z$ y entonces se tiene

$$-(y - z) \leq x \leq y + z. \tag{3.4}$$

Entonces para cada $x \in X$ existe $u \in P$ tal que

$$-u \leq x \leq u \tag{3.5}$$

Por lo cual $||\cdot||_0$ está bien definido. Es fácil verificar que $||\cdot||_0$ es norma de X.

Para cada $x \in X$ de (3.5) y la normalidad de P, se obtiene

$$||x|| \leq ||x + u|| + ||u|| \leq (2N + 1)||u||.$$

Por lo tanto

$$||x|| \leq (2N + 1)\inf_{u \in P}\{||u|| : -u \leq x \leq u\} = (2N + 1)||x||_0.$$

Por otro lado, para cada $x \in X$ por (3.4) se tiene

$$||x||_0 \leq ||y + z|| \leq ||y| + ||x|| \leq 2\tau||x||.$$

Por lo tanto, $\dfrac{||x||}{2N+1} \leq ||x||_0 \leq 2\tau||x||$ para cada $x \in X$. Esto muestra que $||\cdot||$ es equivalente a $||\cdot||_0$ y por lo tanto $(X, ||\cdot||_0)$ es un espacio de Banach. ■

A continuación se presentan algunos Teoremas del Punto Fijo propios, pero inspirados en [5], [8] y [9].

Teorema 3.2.6. *Sean $(X, ||\cdot||, P)$ un espacio de Banach ordenado con P normal, $\mu_0, v_0 \in X$ con $\mu_0 \leq v_0$. Si $T : [\mu_0, v_0] \longrightarrow [\mu_0, v_0]$ es una función creciente y Lipschitz por la derecha con $0 < r < 1$, entonces existe $x^* \in [\mu_0, v_0]$ tal que para todo $x_0 \in [\mu_0, v_0]$*

(a) x^* es el único punto fijo de T;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ donde $\{x_n\}$ es la sucesión de iterados de x_0;

(c) $||x_n - x^*|| \leq 2r^n N||\nu_0 - \mu_0||$ donde N es la constante normal de P.

Demostración

Sean $n,\ k \in \mathbb{N}$. Como $\mu_k \in [\mu_0, v_0]$, por el Lema 2.4.1 se tiene que

$$\bar{0} \leq \mu_{n+k} - \mu_n \leq \nu_n - \mu_n.$$

Como T Lipschitz por la derecha implica $\nu_n - \mu_n \leq r^n(\nu_0 - \mu_0)$.

Así, $\bar{0} \leq \mu_{n+k} - \mu_n \leq r^n(\nu_0 - \mu_0)$. Por otro lado, el Teorema 3.1.5 parte (b) nos garantiza que X es uniformemente completo.

Por lo cual, existe $x^* \in X$ tal que $\{\mu_n\}$ es $(\nu_0 - \mu_0)-$uniformemente convergente a x^*.

Por Teorema 2.4.1 x^* es el único punto fijo de T.

Ahora se calcula la velocidad de convergencia $\{\mu_n\}$ a x^* de la siguiente manera.

Por Corolario 2.4.2 se tiene $\mu_n \leq x^*$ lo que implica

$$\bar{0} \leq x^* - \mu_n = T^n(x^*) - \mu_n \leq r^n(x^* - \mu_0) \leq r^n(\nu_0 - \mu_0).$$

Por lo cual, $||\mu_n - x^*|| \leq Nr^n||\nu_0 - \mu_0||$.

Por último, se observa que para todo $x_0 \in [\mu_0, v_0]$ se cumple por Lema 2.4.1 que

$\bar{0} \leq x_n - \mu_n \leq \nu_n - \mu_n \leq r^n(\nu_0 - \mu_0)$ o bien $||x_n - \mu_n|| \leq Nr^n||\nu_0 - \mu_0||$. Así,

$$\begin{aligned} ||x_n - x^*|| &\leq ||x_n - \mu_n|| + ||\mu_n - x^*|| \\ &\leq Nr^n||\nu_0 - \mu_0|| + Nr^n||\nu_0 - \mu_0|| \\ &= 2r^nN||\nu_0 - \mu_0||, \end{aligned}$$

donde $\{x_n\}$ es la sucesión de iterados de Picard de x_0. ■

Teorema 3.2.7. *Sea $(X, || \cdot ||, P)$ un espacio normado ordenado. Sean $\mu_0 \in X$, $T : [\mu_0, \infty) \to [\mu_0, \infty)$ una función creciente y Lipschitz por la derecha.*
Si $\{\mu_n\}$ es $x-$convergente a algún $x^* \in X$, entonces x^* es un punto fijo de T y para todo punto fijo y en $[\mu_0, \infty)$ se tiene $x^* \leq y$.
Si además la constante $0 < r < 1$ entonces x^* es el único punto fijo de T.

Demostración

Como $\{\mu_n\}$ es $x-$converge a x^*, entonces $\{\mu_{n+m}\}$ es $x-$convergente a x^* y para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple $\mu_0 \leq \mu_n \leq \mu_{n+m}$. Como cada $[\mu_n, \infty)$ es $x-$cerrado, entonces $\mu_n \leq x^*$, esto implica que $T(\mu_n) = \mu_{n+1} \leq T(x^*)$. Se sigue que

$$\bar{0} \leq T(x^*) - \mu_{n+1} = T(x^*) - T(\mu_n) \leq r(x^* - \mu_n).$$

Así, $\{\mu_{n+1}\}$ es $x-$converge a $T(x^*)$ y x^*. Como P es arquimediano, entonces $T(x^*) = x^*$.
Sea $y \in [\mu_0, \infty)$ un punto fijo de T, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \leq y_n = T^n(y) = y$ lo que implica que $x^* \leq y$.
Por otro lado $x^* \leq y$ implica $T(x^*) \leq T(y)$ o bien $\bar{0} \leq x^* - y = T(x^*) - T(y) \leq r(x^* - y)$.
Si $0 < r < 1$ implica $x^* = y$. ■

Los siguientes dos teoremas para funciones Lipschitz en orden son tomados de [8] dando una un prueba un poco diferente que usa la teoría hasta aquí expuesta.

Teorema 3.2.8. *Sean $(X, || \cdot ||, P)$ espacio de Banach ordenado con P normal, μ_0, $v_0 \in X$ tales que $\mu_0 \leq v_0$ y $T : [\mu_0, v_0] \to X$ una función Lipschitz en orden.*

Si $\mu_0 \leq T(\mu_0)$*,* $T(\nu_0) \leq \nu_0$ *y* $k < 1$*, entonces existe un único punto fijo* $x^* \in [\mu_0, v_0]$ *de* T *y para cada* $x_0 \in [\mu_0, v_0]$ *se tiene:*

(i) $\{x_n\}$ *la sucesión de iterados de Picard de* x_0 *para* $A(x) = \dfrac{1}{1+l}(T(x) + lx)$ *converge a* x^**,*

(ii) $||x_n - x^*|| \leq 2r^n N||\nu_0 - \mu_0||$*, donde* N *es la constante normalidad de* P *y* $r = \dfrac{k+l}{1+l}$ $(0 < r < 1)$.

Demostración

Para la prueba se usa una función auxiliar con los mismo puntos fijos que T en $[\mu_0, \nu_0]$. Se define $A : [\mu_0, v_0] \to X$ por $A(x) = \dfrac{1}{1+l}(T(x) + l(x))$.

Observación 1). A es creciente y Lipschitz por la derecha con $r = \dfrac{k+l}{1+l}$.

En efecto, sean $x,\ y \in [\mu_0, \nu_0]$. Como T es Lipschitz se cumple

$$-l(x-y) \leq T(x) - T(y) \leq k(x-y).$$

Como $\dfrac{1}{1+l} > 0$ se tiene

$$\bar{0} \leq \frac{1}{1+l}(T(x) + l(x)) - \frac{1}{1+l}(T(y) + l(y)) \leq \frac{k+l}{1+l}(x-y),$$

o equivalentemente

$$\bar{0} \leq A(x) - A(y) \leq r(x-y).$$

Y además $r = \dfrac{k+l}{1+l} \in (0,1)$ ya que $k < 1$ y $l > 0$.

Observación 2). $A([\mu_0, \nu_0]) \subset [\mu_0, \nu_0]$.

Por hipótesis $\mu_0 \leq T(\mu_0) \leq T(\nu_0) \leq \nu_0$ de lo cual se sigue:

$$(1+l)\mu_0 \leq T(\mu_0) + l(\mu_0) \leq T(\nu_0) + l(\nu_0) \leq (1+l)\nu_0.$$

Así, $\mu_0 \leq A(\mu_0) \leq A(\nu_0) \leq \nu_0$ y como A es creciente, entonces $A([\mu_0, \nu_0]) \subset [\mu_0, \nu_0]$.

Por Teorema 3.2.6 existe un único punto fijo x^* de A en $[\mu_0, \nu_0]$.

Por último, observe que:

$$\begin{aligned} y \text{ es punto fijo de } T &\Leftrightarrow T(y) = y \\ &\Leftrightarrow A(y) = \frac{1}{1+l}(T(y) + l(y)) = y \\ &\Leftrightarrow y \text{ es un punto fijo de } A. \end{aligned}$$

Por lo cual, x^* es el único punto fijo de T en $[\mu_0, \nu_0]$. ■

Capítulo 4

Teoremas del Punto Fijo sobre Álgebras Normadas Ordenadas

4.1. Conceptos previos sobre Álgebras Ordenadas

Se comienza con la definición de Álgebra de Banach la cual es tomada de [11].

Definición 4.1.1. *Un espacio vectorial X sobre un campo K se llama álgebra si existe una multiplicación en X tal que para cada $x,\ y,\ z \in X$ y $a \in K$, las siguientes condiciones son satisfechas:*

(I) $xy \in X$;

(II) $(xy)\,z = x\,(yz)$;

(III) $(x+y)\,z = xz + yz$ y $x\,(y+z) = xy + xz$;

(IV) $a\,(xy) = (ax)\,y = x\,(ay)$.

Si existe algún elemento $e \in X$ tal que $ex = xe = x$ para todo $x \in X$, se le llama unidad (unidad multiplicativa).

Cuando el espacio vectorial es particularmente un espacio normado, se da nueva definición que relaciona el concepto de álgebra con el de norma.

Definición 4.1.2. *Un espacio normado $(X, ||\cdot||)$ se llama álgebra normada si cumple:*

(I) $||xy|| \leq ||x|| ||y||$;

(II) *si X tiene una identidad e, entonces $||e|| = 1$.*

Si X es espacio de Banach, se llama X álgebra de Banach y si X tiene unidad multiplicativa se llama álgebra de Banach con unidad.

A continuación se presentan algunos de los resultados sobre álgebras de Banach necesarios para el desarrollo de este trabajo.

Proposición 4.1.1. *Sea X un álgebra con normada. Si $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son sucesiones que convergen a x, y respectivamente, entonces $\{x_n y_n\}$ converge a xy.*

Demostración

Como $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son sucesiones que convergen a x, y respectivamente, entonces existe $M > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $||y_n|| < M$ y
sea $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ implica que

$$||x_n - x|| < \frac{\epsilon}{2(||x|| + M)} \text{ y } ||y_n - y|| < \frac{\epsilon}{2(||x|| + M)}.$$

Así,

$$||x_n y_n - xy|| \leq ||x_n - x|| ||y_n|| + ||y_n - y|| ||x|| \leq (||x|| + M)(||x_n - x|| + ||y_n - y||) < \epsilon.$$

Lo cual termina la prueba. ■

Definición 4.1.3. *Sea X un álgebra y x un elemento de X. El* ***espectro de*** *x es el conjunto denotado y definido por $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (x - \lambda e)$ no es invertible$\}$.*

Definición 4.1.4. *Sea X un álgebra y x un elemento de X. El* ***radio espectral de*** x *es el número denotado y definido por $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$.*

Proposición 4.1.2. *Sea X es un álgebra de Banach con unidad e. Si $x \in X$ tal que $||x|| < 1$, entonces $e - x$ es invertible,*

$$(e-x)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \ \text{y} \ ||\,(e-x)^{-1}\,|| \leq \frac{1}{1-||x||}.$$

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $S_n = \sum_{i=0}^{n} x^i$. Como $S_{n+m} - S_n = \sum_{i=n+1}^{n+m} x^i$, entonces

$$\begin{aligned} ||S_{n+m} - S_n|| &= \left|\left|\sum_{i=n+1}^{n+m} x^i\right|\right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} ||x^i|| \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{n+m} ||x||^i = ||x||^{n+1} \sum_{i=0}^{m-1} ||x||^i \\ &\leq \frac{||x||^{n+1}}{1-||x||}. \end{aligned}$$

Así, $\{S_n\}$ es de Cauchy y como X es Banach, entonces $\{S_n\}$ es convergente y converge a $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$. Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(e-x)S_n = e + (-1)^n x^{n+1} = S_n(e-x)$. Por lo cual,

$$(e-x)\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right) = e = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)(e-x).$$

Por lo tanto, $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = (e-x)^{-1}$ y así $||\,(e-x)^{-1}\,|| \leq \sum_{i=0}^{\infty} ||x||^i = \dfrac{1}{1-||x||}$. ■

Corolario 4.1.1. *Sea X es un álgebra de Banach con unidad e. Si $x \in X$ tal que $||e - x|| < 1$, entonces x es invertible y $||x^{-1}|| \leq \dfrac{1}{1-||e-x||}$.*

Demostración

Como $||e-x|| < 1$ y por la Proposición 4.1.2 se tiene que $x = e - (e-x)$ es invertible y $||x^{-1}|| \leq \dfrac{1}{1-||e-x||}$. ■

Teorema 4.1.1. *Sea X un álgebra de Banach con unidad e.*
Para cada $x \in X$ se tiene $r(x) \leq ||x||$.

Demostración
Obsérvese que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $||x|| < |\lambda|$ implica $\left|\left|e - (e - \dfrac{1}{\lambda}x)\right|\right| = \dfrac{||x||}{|\lambda|} < 1.$
Por el Corolario 4.1.1 se tiene que $e - \dfrac{1}{\lambda}x$ es invertible y así $\lambda e - x$ es invertible.
Por lo cual, si $||x|| < |\lambda|$ implica $\lambda \notin \sigma(x)$, lo que es equivalente a
$\lambda \in \sigma(x)$ implica $|\lambda| \leq ||x||$ y entonces $r(x) \leq ||x||$. ■

Ahora se estudiará un poco el conjunto de los elementos invertibles de un álgebra normada con unidad.

Definición 4.1.5. *Sea X un álgebra normada con unidad e. Se define*
$G(X) = \{x \in X : x \text{ es invertible } \}$ ***el conjunto de los elementos invertibles de*** *X.*

El siguiente Lema se puede encontrar la demostración y la definición correspondiente en [11] página 399.

Lema 4.1.1. *Sea X un álgebra de normada con unidad e, entonces $G(X)$ es un grupo.*

Teorema 4.1.2. *Sea X un álgebra de normada con unidad e. Se cumple:*

(i) $G(X)$ es abierto.

(ii) La función $f : G(X) \longrightarrow G(X)$ dada por $f(x) = x^{-1}$ es continua.

Demostración
Sean $x, y \in G(X)$ y $\epsilon > 0$.
Prueba (i).

Sea $z \in X$ tal que $z \in B\left(x, \dfrac{1}{||x^{-1}||}\right)$, es decir, $||z - x|| < \dfrac{1}{||x^{-1}||}$, entonces

$$\begin{aligned} ||e - x^{-1}z|| = ||x^{-1}x - x^{-1}z|| &= ||x^{-1}(x - z)|| \\ &\leq ||x^{-1}|| \; ||z - x|| \\ &< 1 \end{aligned}$$

Por Corolario 4.1.1 $x^{-1}z \in G(X)$ y como $G(X)$ es un grupo $z = x(x^{-1}z) \in G(X)$. Por lo tanto, $B\left(x, \dfrac{1}{||x^{-1}||}\right) \subset G(X)$, es decir, $G(X)$ es abierto.
Prueba (ii).

Observe que $||x - y|| < \dfrac{1}{2}||x^{-1}||$ implica

$$||e - x^{-1}y|| \leq ||x^{-1}|| \; ||x - y|| < \frac{1}{2}.$$

Por el Corolario 4.1.1 se tiene que

$$||y^{-1}x|| = ||(x^{-1}y)^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||e - x^{-1}y||} < 2.$$

Así,

$$||y^{-1}|| \leq ||y^{-1}x|| \; ||x^{-1}|| \leq 2||x^{-1}||$$

y como $||x^{-1} - y^{-1}|| = ||x^{-1}(x - y)y^{-1}||$, entonces

$$||x^{-1} - y^{-1}|| \leq ||x^{-1}|| \; ||x - y|| \; ||y^{-1}|| \leq 2||x^{-1}||^2||x - y||.$$

Por último, se define $\delta = \text{mín}\left\{\dfrac{\epsilon}{2||x^{-1}||^2}, \dfrac{1}{2||x^{-1}||}\right\}$.
Si $||x - y|| < \delta$ implica $||x^{-1} - y^{-1}|| < \epsilon$. ■

Proposición 4.1.3. *Sea X un álgebra de Banach con unidad e.*

Para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple $(r(x))^n \leq r(x^n)$.

Demostración

Sea $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ y así $\lambda^n \leq r(x^n)$ o bien $\lambda \leq r(x^n)^{\frac{1}{n}}$, entonces $r(x) \leq r(x^n)^{\frac{1}{n}}$, o equivalentemente $(r(x))^n \leq r(x^n)$. ■

La prueba de la proposición 4.1.4 se pueden encontrar en [10].

Proposición 4.1.4. *Sea X un álgebra de Banach con unidad e.*

Para cada $x \in X$ se cumple la fórmula de Gelfand,

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} ||x^n||^{\frac{1}{n}}.$$

Proposición 4.1.5. *Sea X es un álgebra de Banach con unidad e. Si $x \in X$ tal que $r(x) < 1$, entonces $e + x$ es invertible y $(e+x)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^i = \sum_{i=0}^{\infty}(x)^{2i}(e-x)$.*

Demostración

Se define $y = -x$, entonces $r(y) < 1$. Por la proposición 4.1.2,

$(e-y)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} y^i$, al sustituir $y = -x$ se tiene que

$(e+x)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^i = \sum_{i}^{\infty} \lambda^{2i}(e-x)$. ■

Sea X un espacio normado, un álgebra de Banach no conmutativa muy importante es la creada por la operaciones usuales de producto, suma y composición en operadores lineales y acotados sobre espacios normados $B(X)$.

Las definiciones correspondiente $T \in B(X)$ son las siguientes:

El **espectro del operador** T es el conjunto denotado y definido por $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (T - \lambda Id)^{-1} \text{ no existe}\}$.

El **radio espectral de** T es el número denotado y definido por $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Definición 4.1.6. *Sea X un álgebra (álgebra normada) con unidad e. $P \subset X$ es un cono en X si cumple que*

(i) *P es un cono espacio vectorial (espacio normado),*

(ii) *para cada $x,\ y \in P$ implica $xy \in P$,*

(iii) *$e \in P$.*

Proposición 4.1.6. *Sea X un álgebra con unidad e, con cono P. Si $\lambda \in P$ tal que $r(\lambda) < 1$, entonces* *(i) Si x invertible y $x^{-1} > \bar{0}$ implica que $x > \bar{0}$, entonces para todo entero $n \geq 1$, $\lambda^n \leq \lambda \leq e$.*

(ii) Para todo $\mu > \bar{0}$, $\mu \nleq \lambda\mu$, es decir, $\lambda\mu - \mu \notin P$.

(iii) Si $\lambda \geq \bar{0}$, entonces $(e-\lambda)^{-1} \geq \bar{0}$.

Demostración

(i)

Como $r(\lambda) < 1$, implica que $(e-\lambda)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \geq \bar{0}$, particularmente $(e-\lambda) \geq \bar{0}$, conlleva a $\lambda \leq e$.

Usando inducción se obtiene lo deseado.

(ii)

Supóngase que existe $\mu_0 > \bar{0}$ tal que $\mu_0 \leq \lambda\mu_0$, entonces

$$(e-\lambda)\mu_0 \leq \bar{0} \quad \text{y como} \quad (e-\lambda)^{-1} \geq \bar{0}$$

se sigue que $\mu_0 \leq \bar{0}$,

$$\mu_0 = (e-\lambda)^{-1}(e-\lambda)\mu_0 \leq \bar{0} \cdot (e-\lambda)^{-1} = \bar{0}$$

es decir, $\mu_0 \leq \bar{0}$ lo cual es una contradicción.

(iii)

Como $r(\lambda) < 1$, entonces $e-\lambda$ es invertible y $(e-\lambda)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i + e \geq e > \bar{0}$.

Se define $a_n = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i \in P$ y $\lambda^i \in P$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Además, a_n converge a $(e-\lambda)^{-1}$ cuando n tiende a infinito y P es cerrado implica que $(e-\lambda)^{-1} \in P$, es decir, $(e-\lambda)^{-1}$. ■

Lema 4.1.2. *Sea (X, P) un álgebra normada ordenado con P un cono sólido y $x \in int(P)$. Si $y \in P$ tal que y tiene inverso multiplicativo, entonces $xy \in int(P)$.*

Demostración

Como $x \in int(P)$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset P$. Además, como y tiene un inverso multiplicativo, entonces $||y^{-1}|| > 0$.
Se probará que $B\left(xy, \dfrac{r}{||y^{-1}||}\right) \subset P$.
Sea $z \in B\left(xy, \dfrac{r}{||y^{-1}||}\right)$, entonces $||z - xy|| < \dfrac{r}{||y^{-1}||}$. Así,

$$||zy^{-1} - x|| \leq ||z - xy||\ ||y^{-1}|| < r$$

lo que implica que $zy^{-1} \in B(x, r) \subset P$ y como $y \in P$
se tiene que $z = zy^{-1}y \in P$.
Por tanto, $B\left(xy, \dfrac{r}{||y^{-1}||}\right) \subset P$, es decir, $xy \in int(P)$. ■

¿Cómo son los elementos invertibles en un $(X, ||\cdot||, P)$ álgebra de Banach con unidad e^0? Lo primero que podemos asegurar es que no todos los elementos tienen inversos multiplicativos. Más aún, es falso que como en el caso real los números tienen inverso o al menos si tienen inverso este sea positivo, es decir, si $x \in P$ es invertible implique $x^{-1} \in P$.

Ejemplo 4.1.1. *Sea $(C[1,2], ||\cdot||_\infty)$ y $P = \{f \in C[1,2] : f \geq 0$ y f creciente$\}$.
En efecto, sea $f(x) = 1$, $\forall x \in [1,2]$ es la unidad en $C[1,2]$, sea $f_1(x) = x \Rightarrow f_1 \in P$ y $(f_1)^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{f_1(x)}$ que no es creciente y por tanto $(f_1)^{-1} \notin P$.*

Ejemplo 4.1.2. *Sea $X = C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ dotado de la norma $||u|| = ||u||_\infty + ||u'||_\infty$ y $P = \{u \in X : u(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]\}$, donde $||u||_\infty = max_{t\in[0,1]}u(t)$ para cada $u \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$. Defina la multiplicación en X como $(xy)(t) = x(t)y(t)$ para cada $x, y \in X$ y $t \in [0,1]$. X es un álgebra de Banach con una unidad $e(t) \equiv 1$ y P es un cono sólido no normal.*

4.2. Teoremas de Punto Fijo para Álgebras Ordenadas

En esta sección se desarrollan algunos teoremas de punto fijo para a álgebras ordenadas ordenadas. Usando la definición de [9] que sustituye números positivos por su análogo $l,\ k \in P$.

Definición 4.2.1. *Sean (X, P) un álgebra de Banach ordenado, $D \subset X$ no vacío y $T : D \longrightarrow X$ un operador. T se llama* ***Lipschitz en Orden sobre Álgebras de Banach****, si existen $l, k \in P$ tales que*

$$-l\,(x-y) \leq T\,(x) - T\,(y) \leq k\,(x-y)$$

para todo $x, y \in D$ con $y \leq x$.

En este capítulo sólo se va e escribir como Lipschitz en orden, para referirme también a las funciones Lipschitz en orden sobre álgebras de Banach.Saber si se habla de la definición 2.4.2 o 4.2.1 dependerá solamente de si X es una álgebra o no.

Proposición 4.2.1. *Sea X un álgebra de Banach ordenada con unidad e, P normal y $T : [\mu_0, \nu_0] \longrightarrow [\mu_0, \nu_0]$ una función de Lipschitz en orden sobre X.*
Si $k, l \leq e$, $||l|| < 1$ y $||k + l|| < 1 - ||l||$, entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración
En la prueba se usa una función auxiliar con los mismos puntos fijos que T en $[\mu_0, \nu_0]$.
Como $||l|| < 1$ por Proposición 4.1.5 se sigue que $(e + l)$ es invertible y
$(e + l)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(l)^{2i}(e - l) \geq \bar{0}$ ya que $l, e - l \geq \bar{0}$.
Se define $A : [\mu_0, v_0] \to X$ dada por $A(x) = (e + l)^{-1}\,(T(x) + l(x))$.

Se hacen las siguientes dos observaciones. La primera es que A es creciente.
Sean $x,\ y \in [\mu_0, \nu_0]$. Como T es Lipschitz

$$-l(x-y) \leq T(x) - T(y) \leq k(x-y).$$

Lo cual implica

$$\bar{0} \leq (T(x) + l(x)) - (T(y) + l(y)) \leq (k + l)(x - y).$$

Multiplicando por $(e + l)^{-1} \geq \bar{0}$ se tiene que $\bar{0} \leq A(x) - A(y) \leq r(x - y)$, donde $r = (k + l)(e + l)^{-1} \in [\bar{0}, e]$ ya que $-l \leq k \leq e$.

La segunda observación es que $A([\mu_0, \nu_0]) \subset [\mu_0, \nu_0]$.
Ya que $\mu_0 \leq T(\mu_0)$ y $T(\nu_0) \leq \nu_0$ implica

$$\mu_0 + l\mu_0 \leq T(\mu_0) + l\mu_0 \quad \text{y} \quad T(\nu_0) + l\nu_0 \leq \nu_0 + l\nu_0$$

Multiplicando por $(e + l)^{-1} \geq \bar{0}$ se tiene que $\mu_0 \leq A(\mu_0)$ y $A(\nu_0) \leq \nu_0$.
Por la primera observación A es creciente y así se tiene $A([\mu_0, \nu_0]) \subset [\mu_0, \nu_0]$.

En consecuencia, sean $\{\nu_n\}$ la sucesión de iterados de Picard de ν_0 para el operador A y $n,\ m \in \mathbb{N}$ se cumple que $\bar{0} \leq \nu_n - \nu_{n+k} \leq r^n(\nu_0 - \nu_1)$. Como P es normal implica

$$||\nu_n - \nu_{n+k}|| \leq N||r^n(\nu_0 - \nu_1)|| \leq N||r||^n||\nu_0 - \nu_1||.$$

Además,

$$||(k + l)(e + l)^{-1}|| \leq ||(k + l)||\ ||(e + l)^{-1}|| \leq \frac{||(k + l)||}{1 - ||l||} < 1.$$

Por lo cual, $\{\nu_n\}$ es Cauchy y converge a $x^* \in [\mu_0, \nu_0]$.
Luego, sea $x_0 \in [\mu_0, \nu_0]$ se cumple

$$||\nu_n - x_n|| \leq N||r^n(\nu_0 - x_0)|| \leq N||r||^n||\nu_0 - x_0||.$$

Por lo cual, $\{x_n\}$ converge a x^*.
Obsérvese que

$$||A(x^*) - x^*|| \leq ||A(x^*) - \mu_{n+1}|| + ||\mu_{n+1} - x^*|| \leq N||\mu_n - x^*|| + ||\mu_{n+1} - x^*||.$$

Así,

$$A(x^*) = x^* \quad \text{y} \quad A(x^*) = (e + l)^{-1}\,(T(x^*) + lx^*)$$

lo que implica $T(x^*) = x^*$.

Si $y \in [\mu_0, \nu_0]$ es punto fijo de T, entonces $A(y) = (e+l)^{-1}(T(y) + ly) = y$, es decir, y es punto fijo de A, es decir, $\{y_n\}$ converge a y, pero también a x^*. Así, $y = x^*$. ■

Proposición 4.2.2. *Sea X un álgebra de Banach con un cono sólido arquimediano P y $T : [\mu_0, \nu_0] \longrightarrow [\mu_0, \nu_0]$ una función de Lipschitz en orden sobre X.*
Si $k << e$, $||l|| < 1$ y $e \in int(P)$, entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración

Para la prueba se usará una función auxiliar que tiene los mismo puntos fijos que T en $[\mu_0, \nu_0]$. Se observa que $(e + l)$ es invertible ya que $r(l) < 1$.
Se define $A : [\mu_0, v_0] \to X$ dada por $A(x) = (e + l)^{-1}(T(x) + l(x))$.

Se hacen las siguientes tres observaciones. La primera es que A es creciente.
Sean $x,\ y \in [\mu_0, \nu_0]$. Como T es Lipschitz

$$-l(x - y) \leq T(x) - T(y) \leq k(x - y).$$

Lo cual implica

$$\bar{0} \leq (T(x) + l(x)) - (T(y) + l(y)) \leq (k + l)(x - y).$$

Multiplicando por $(e + l)^{-1} \geq \bar{0}$ se tiene que

$$\bar{0} \leq A(x) - A(y) \leq r(x - y)$$

donde $r = (k + l)(e + l)^{-1}$. Ya que $K << e$ implica que

$$\bar{0} \leq k + l << e + l \quad \text{o bien} \quad \bar{0} \leq (k + l)(e + l)^{-1} << (e + l)(e + l)^{-1} = e.$$

Se sigue que $e - (k + l)(e + l)^{-1} \in int(P)$, entonces existe $\lambda > 0$ tal que

$$\bar{0} \leq (k + l)(e + l)^{-1} \leq \lambda(e - (k + l)(e + l)^{-1})$$

o equivalentemente

$$\bar{0} \leq (k+l)(e+l)^{-1} \leq \frac{\lambda}{1+\lambda}e.$$

Sean $x,\ y \in [\mu_0, \nu_0]$, entonces

$$\bar{0} \leq A(x) - A(y) \leq (k+l)(e+l)^{-1}(x-y).$$

Así, $L_e = X$ y el funcional de Minkowski $||\cdot||_e$

es una norma para L_e ya que P arquimediano. Además, recuérdese que

$$||x||_e = sup\{\lambda > 0 : x \in [-\lambda e, \lambda e]\}$$

de lo que sigue que $||(k+l)(e+l)^{-1}||_e \leq \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$, más aún

$$||A(x) - A(y)||_e \leq ||(k+l)(e+l)^{-1}||_e ||x-y||_e \leq \frac{\lambda}{1+\lambda}||x-y||_e.$$

La tercera observación es que $A([\mu_0, \nu_0]) \subset [\mu_0, \nu_0]$.

Ya que $\mu_0 \leq T(\mu_0)$ y $T(\nu_0) \leq \nu_0$ implica

$$\mu_0 + l\mu_0 \leq T(\mu_0) + l\mu_0 \quad \text{y} \quad T(\nu_0) + l\nu_0 \leq \nu_0 + l\nu_0.$$

Multiplicando por $(e+l)^{-1} \geq \bar{0}$ se tiene que $\mu_0 \leq A(\mu_0)$ y $A(\nu_0) \leq \nu_0$.

Por la primera observación A es creciente y así se tiene $A([\mu_0, \nu_0]) \subset [\mu_0, \nu_0]$.

En consecuencia, sean $\{\nu_n\}$ la sucesión de iterados de Picard de ν_0 para el operador A y $n,\ m \in \mathbb{N}$ se cumple que $\bar{0} \leq \nu_n - \nu_{n+k} \leq r^n(\nu_0 - \nu_1)$. Luego

$$||\nu_n - \nu_{n+k}||_e \leq ||r^n(\nu_0 - \nu_1)||_e \leq ||r||_e^n ||\nu_0 - \nu_1||_e < \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^n ||\nu_0 - \nu_1||_e.$$

Por lo cual, $\{\nu_n\}$ es Cauchy y converge a $x^* \in [\mu_0, \nu_0]$.

Luego, sea $x_0 \in [\mu_0, \nu_0]$ se cumple

$$||\nu_n - x_n||_e \leq ||r^n(\nu_0 - x_0)||_e \leq N||r||^n||\nu_0 - x_0||_e.$$

Por lo cual, $\{x_n\}$ converge a x^*.

Obsérvese que

$$||A(x^*) - x^*||_e \leq ||A(x^*) - \mu_{n+1}||_e + ||\mu_{n+1} - x^*||_e \leq ||\mu_n - x^*||_e + ||\mu_{n+1} - x^*||_e.$$

Así,

$$A(x^*) = x^* \quad \text{y} \quad A(x^*) = (e+l)^{-1}\left(T(x^*) + lx^*\right)$$

lo que implica $T(x^*) = x^*$.

Si $y \in [\mu_0, \nu_0]$ es punto fijo de T, entonces $A(y) = (e+l)^{-1}(T(y) + ly) = y$, es decir, y es punto fijo de A, es decir, $\{y_n\}$ converge a y, pero también a x^*. Así, $y = x^*$. ■

Las definición (2.4.3) sólo cumple una de las condiciones de la definición (2.4.2). Otra extensión del concepto de Lipschitz en orden es:

Se presentan algunos teoremas que son para funciones Lipschitz en orden sobre Álgebras de Banach. Para este teorema son necesarias las siguientes definiciones.

Definición 4.2.2. *Sean (X, P) con P un cono sólido normal, $T : X \longrightarrow X$ una función, $x_0 \in X$ y $\{x_n\}$ la sucesión de iterados de Picard de x_0. Se dice que T es:*

(i) ***Picard completo en*** *x_0, si $\{x_n\}$ es $w-$ Cauchy implica que $\{x_n\}$ es $w-$ convergente.*

(ii) ***Picard completo en*** *X, si T es Picard completo en x, para cada $x \in X$.*

Teorema 4.2.1. *Sea P un cono sólido del álgebra de Banach $(X, ||\cdot||)$ y $\mu_0, \nu_0 \in X$ con $\mu_0 \leq \nu_0$. Asumir que $T : [\mu_0, \nu_0] \to [\mu_0, \nu_0]$ es una función de orden Lipschitz creciente con $k, l \in P$. Si $r(k) < 1$ y T es Picard completo en μ_0 y ν_0, entonces T tiene un único punto fijo $x^* \in [\mu_0, \nu_0]$ y para cada $x_0 \in [\mu_0, \nu_0]$ se tiene que $x_n \xrightarrow{w} x^*$, donde $\{x_n\}$ es la sucesión de iterados de Picard de x_0.*

Demostración

Sean $\{\mu_n\}$ y $\{\nu_n\}$ las sucesiones de Iterados de Picard de μ_0 y ν_0. Como T es creciente en $[\mu_0, \nu_0]$ y Corolario 2.4.1 resulta que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \cdots \leq \nu_n \leq \cdots \leq \nu_2 \leq \nu_1 \leq \nu_0. \tag{4.1}$$

Por $P^2 \subset P$ se obtiene que

$$\bar{0} \leq \nu_n - \mu_n \leq k(\nu_{n-1} - \mu_{n-1}) \leq k^2(\nu_{n-2} - \mu_{n-2}) \leq \cdots \leq k^n(\nu_0 - \mu_0). \tag{4.2}$$

Entonces para cada $m > n$, por Lema (2.4.1) y Corolario (2.4.1) se tiene

$$\begin{aligned} \bar{0} \le \mu_m - \mu_n \le \nu_n - \mu_n \le k^n(\nu_0 - \mu_0), \\ \bar{0} \le \nu_n - \nu_m \le \nu_n - \mu_n \le k^n(\nu_0 - \mu_0). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como $r(k) < 1$, por la fórmula de Gelfand existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in [0, 1)$ tal que

$$||k^n|| \le \alpha^n, \quad \forall n \ge n_0 \tag{4.4}$$

lo que implica que $k^n \xrightarrow{||\cdot||} \bar{0}$. Note que $||k^n(\nu_0 - \mu_0)|| \le ||k^n|| ||(\nu_0 - \mu_0)||$, entonces se obtiene $k^n(\nu_0 - \mu_0) \xrightarrow{||\cdot||} \bar{0}$. Además,

$$k^n(\nu_0 - \mu_0) \xrightarrow{w} \bar{0}. \tag{4.5}$$

Así se desprende de (4.3) y (4.5) y se tiene que $\{\mu_n\}$ y $\{\nu_n\}$ son secuencias de $w-$Cauchy. Como T es Picard completo en μ_0 y ν_0, existen $\mu^*, \nu^* \in X$ de manera que

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu^*, \quad \nu_n \xrightarrow{w} \nu^*. \tag{4.6}$$

Haciendo $n \to \infty$ en (4.2) por (4.6) se tiene $\mu^* = \nu^*$. Sea $x^* = \mu^* = \nu^*$, entonces $x^* \in [\mu_0, \nu_0]$ por (4.1). Para cada $m > n$, por (4.1) se tiene

$$\mu_n \le \mu_m \le \cdots \le \nu_m \le \nu_n \tag{4.7}$$

Haciendo $m \to \infty$ en (4.7), por (4.6) se tiene que

$$\mu_n \le x^* \le \nu_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{4.8}$$

junto con la propiedad no decreciente de T en $[\mu_0, \nu_0]$ implica que,

$$\mu_n = T(\mu_{n-1}) \le T(x^*) \le T(\nu_{n-1}) = \nu_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.9}$$

Dejando $n \to \infty$ en (4.9), se obtiene $x^* = Tx^*$ por (4.6) y que el límite es único. Por lo tanto x^* es un punto fijo en T.

Para cada $x_0 \in [\mu_0, \nu_0]$, sea $x_n = T^n x_0$. Está claro que $\mu_1 = T\mu_0 \leq Tx_0 = x_1 \leq T\nu_0 = \nu_1$ ya que T es creciente en $[\mu_0, \nu_0]$. Luego, por inducción, se obtiene

$$\mu_n \leq x_n \leq \nu_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{4.10}$$

que junto con (4.6) implica que $x_n \xrightarrow{w} x^*$. Sea $y^* \in [\mu_0, \nu_0]$ ser otro punto fijo de T y $y_n = T^n(y^*)$. Del mismo modo, podemos mostrar que $y_n \xrightarrow{w} x^*$. Tenga en cuenta que $y_n = T^n y^* = y^*$ implica que $y_n \xrightarrow{w} y^*$, entonces $x = x^*$. Por lo tanto, T tiene un punto fijo único $x^* \in [\mu_0, \nu_0]$. ■

El siguiente teorema nos dice cuando tiene una convergencia en norma.

Teorema 4.2.2. *Sea P un cono sólido normal de un álgebra de Banach $(X, ||\cdot||)$ y $T : X \to X$ una función Lipschitz en orden con $l = k \in P$. Si $r(k) < 1$, entonces T tiene un punto fijo único $x^* \in X$ y para cada $x_0 \in X$, se tiene $x_n \xrightarrow{||\cdot||} x^*$, donde $\{x_n\}$ es la sucesión de iterados de Picard de x_0.*

Demostración

Sean $x, y \in X$. Como P es sólido, por Lema 3.2.8 existe $\mu \in P$ tal que $-\mu \leq x - y \leq \mu$. Se probará por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $-k^n\mu \leq T^n x - T^n y \leq k^n \mu$.

Para $n = 1$, se tiene que $-\mu \leq x - y \leq \mu$ implica $\dfrac{x+y-\mu}{2} \leq x, \quad \dfrac{x+y-\mu}{2} \leq y$. Así, aplicado que T es Lipschitz en orden sobre un álgebra de Banach se tiene

$$-k\left(\frac{x-y+\mu}{2}\right) \leq Tx - T\left(\frac{x+y-\mu}{2}\right) \leq k\left(\frac{x-y+\mu}{2}\right) \tag{4.11}$$

y

$$-k\left(\frac{y-x+\mu}{2}\right) \leq Ty - T\left(\frac{x+y-\mu}{2}\right) \leq k\left(\frac{y-x+\mu}{2}\right)$$

la segunda desigualdad se puede reescribirse como

$$-k\left(\frac{y-x+\mu}{2}\right) \leq T\left(\frac{x+y-\mu}{2}\right) - Ty \leq k\left(\frac{y-x+\mu}{2}\right). \tag{4.12}$$

Sumando (4.11) y (4.12) se tiene $-k\mu \leq Tx - Ty \leq k\mu$.

Suponer que para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple $-k^n\mu \leq T^n x - T^n y \leq k^n\mu$.

Se sigue que

$$\frac{T^n x + T^n y - k^n\mu}{2} \leq T^n x, \quad \frac{T^n x + T^n y - k^n\mu}{2} \leq T^n y.$$

Aplicando que T es Lipschitz en orden sobre un álgebra de Banach se tiene

$$\begin{aligned} -k\left(\frac{T^n x - T^n y + k^n\mu}{2}\right) &\leq T^{n+1}x - T\left(\frac{T^n x + T^n y - k^n\mu}{2}\right) \\ &\leq k\left(\frac{T^n x - T^n y + k^n\mu}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.13}$$

y

$$-k\left(\frac{T^n y - T^n x + k^n\mu}{2}\right) \leq T^{n+1}y - T\left(\frac{T^n x + T^n y - k^n\mu}{2}\right) \leq k\left(\frac{T^n y - T^n x + k^n\mu}{2}\right)$$

que puede reescribirse como

$$\begin{aligned} -k\left(\frac{T^n y - T^n x + k^n\mu}{2}\right) &\leq T\left(\frac{T^n x + T^n y - k^n\mu}{2}\right) - T^{n+1}y \\ &\leq k\left(\frac{T^n y - T^n x + k^n\mu}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Sumando (4.13) y (4.14) se obtiene $-k^{n+1}\mu \leq T^{n+1}x - T^{n+1}y \leq k^{n+1}\mu$.

Por lo tanto se cumple que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $-k^n\mu \leq T^n x - T^n y \leq k^n\mu$.

Así,

$$||T^n x - T^n y||_0 = \inf_{\nu \in P}\{||\nu|| : -\nu \leq T^n x - T^n y \leq \nu\} \leq ||k^n\mu|| \leq ||k^n||\ ||\mu||.$$

Como μ es un elemento arbitrario que cumple $-\mu \leq x - y \leq \mu$, se tiene

$$||T^n x - T^n y||_0 \leq ||k^n|| \inf_{u \in P}\{||u|| : -u \leq x - y \leq u\}, = ||k^n||\ ||x - y||_0.$$

De la formula de Gelfand y $r(k) < 1$ se sigue que existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in [0, 1)$ tal que $||k^n|| \leq \alpha^n$ y así

$$||T^n x - T^n y||_0 \leq ||k^n||\ ||x - y||_0 \leq \alpha^n ||x - y||_0, \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Por otro lado, $\alpha^{n_0} < 1$ implica que $T^{n_0} : X \to X$ es una contracción de Banach. Por el Lema 3.2.9 $(X, ||\cdot||_0)$ es un espacio de Banach, luego por el principio de contracción de Banach, T^{n_0} tiene un punto fijo único $x^* \in X$, es decir, $T^{n_0}x^* = x^*$. Por Teorema 1.1.2 se tiene x^* es el único punto fijo de T.

Sea $x_0 \in X$ y $\{x_n\}$ la sucesión de iterados de Picard de x_0. Observe que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n_0-1}, T^{n_0}x_0, T^{n_0}x_1, \cdots, T^{n_0}x_{n_0-1}, T^{2n_0}x_0, T^{2n_0}x_1, \cdots, T^{2n_0}x_{n_0-1}, \cdots\} = \{x_0, T^{n_0}x_0, T^{2n_0}x_0, \cdots\} \cup \{x_1, T^{n_0}x_1, T^{2n_0}x_1, \cdots\} \cup \cdots \cup \{x_{n_0-1}, T^{n_0}x_{n_0-1}, T^{2n_0}x_{n_0-1}, \cdots\}$.
Se define $y_n^i = T^{nn_0}x_i$ para cada n y cada $0 \le i \le n_0 - 1$.
Observe que $\{y_n^i\}$ es la sucesión de iterados de Picard de x_i para el operador T^{n_0}.
Se sigue que, para cada $i \in \{0, 1, \cdots, n_0-1\}$ $y_n^i \xrightarrow{||\cdot||_0} x^*$ y $\{y_n^i : n \in \mathbb{N}\} = \{x_i, T^{n_0}x_i, T^{2n_0}x_i, \cdots\}$.
Así, para cada $\epsilon > 0$ existe un entero positivo m_0^i tal que $||y_n^i - x^*||_0 < \epsilon$, si $n \ge m_0^i$.

Sea $m_0 = max_{0 \le i \le n_0-1} m_0^i$, entonces para cada i, se tiene $||y_n^i - x^*||_0 < \epsilon$, si $n \ge m_0$. Además, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n_0-1} \{y_n^i : n \in \mathbb{N}\}$ implica que $||x_n - x^*||_0 < \epsilon$, si $n \ge m_0 n_0$.
Por tanto, $x_n \xrightarrow{||\cdot||_0} x^*$ y así $x_n \xrightarrow{||\cdot||} x^*$, ya que $||\cdot||$ y $||\cdot||_0$ son equivalentes. ■

Definición 4.2.3. *Sean (X, P) un espacio vectorial ordenado, $D \subset X$ subespacio vectorial y $T : D \longrightarrow X$ una función. T se llama* ***Lipschitz en orden con restricciones operadores lineales y acotados****, si existen*
$A,\ B : D \longrightarrow X$ operadores lineales y acotadas tales que

$$-A\,(x-y) \le T\,(x) - T\,(y) \le B\,(x-y)$$

para todo $x,\ y \in D$ con $y \le x$.

En [9] se sustituyen los números $-l,\ k$ por operadores $-A,\ B$, sin embargo, también se pueden sustituir por elementos $l,\ k \in P$ que son análogos a los números positivos en espacios vectoriales ordenados.

También se pueden sustituir los números $l,\ k$ por operadores que estén bien definidos sobre $x-y$ cuando $y \le x$, pero esto último por definición es equivalente a $x - y \in P$.

Así se tiene la siguiente definición dada en [8]. La cual daremos como una observación de la anterior.

Observación 8. *En [8] la definición 4.2.3 se presenta:*
Sean (X, P) un espacio vectorial ordenado, $D \subset X$ y $T : D \longrightarrow X$ una función. T se llama ***Lipschitz en Orden con restricciones operadores lineales y acotados****, si existen constantes $A,\ B : P \longrightarrow P$ operadores lineales y acotados tales que*

$$A\,(x - y) \leq T\,(x) - T\,(y) \leq B\,(x - y)$$

para todo $x,\ y \in D$ con $y \leq x$.

Un caso particular de la definición Lipschitz para operadores lineales acotados es el Lipschitz sobre álgebras de Banach pensando en $A(z) = l(z)$ y $B(z) = k(z)$.
A continuación se escribirán los resultados pertinentes a estas definiciones.

Teorema 4.2.3. *Sea P un cono reproductor normal y $T : X \to X$ es un operador Lipschitz en orden con restricciones operadores lineales y acotados. Si $A = B : X \to X, ||B|| < 1$ y positivo,entonces T tiene un punto fijo único x^* en X y, para cualquier $x_0 \in X$, si $\{x_n\}$ la sucesión de iterados de Picard de x_0 y T es convergente a x^*.*

Demostración
Sean $x, y \in X$. Como P es reproductor, por Lema 3.2.8 existe $\mu \in P$ tal que $-\mu \leq x - y \leq \mu$ y la norma $||x||_0 = \text{ínf}\{||\mu|| : \mu \in P, -\mu \leq x \leq \mu\}$ es equivalente a la norma original $|| \cdot ||$. Se sigue que $x \geq \dfrac{1}{2}(x + y - \mu), \quad y \geq \dfrac{1}{2}(x + y - \mu)$.

Aplicando que T es operador Lipschitz, se tiene

$$-B\left(\frac{x - y + \mu}{2}\right) \leq Tx - T\left(\frac{x + y - \mu}{2}\right) \leq B\left(\frac{x - y + \mu}{2}\right), \tag{4.15}$$

y

$$-B\left(\frac{y - x + \mu}{2}\right) \leq Ty - T\left(\frac{x + y - \mu}{2}\right) \leq B\left(\frac{y - x + \mu}{2}\right). \tag{4.16}$$

Al restar (4.16) a (4.15), entonces se obtiene $-B\mu \leq Tx - Ty \leq B\mu$.
Como B es positivo y $\bar{0} \leq \mu$, entonces $\bar{0} = B(\bar{0}) \leq B(\mu)$ y así $B\mu \in P$.
Así, $||Tx - Ty||_0 \leq ||B\mu|| \leq ||B||\ ||\mu||$. Además, dado que μ es arbitrario, se tiene $||Tx - Ty||_0 \leq ||B||\ ||x - y||_0$. Ya que $||B|| < 1$, según el principio de contracción de Banach, T tiene un punto fijo único x^* y, para cualquier $x_0 \in X$, si $x_n = Tx_{n-1}(n = 1, 2, 3, \cdots)$, entonces se tiene $||x_n - x^*||_0$ converge a 0. Por la equivalencia de $||\cdot||_0$ y $||\cdot||$, se obtiene $||x_n - x^*||$ converge a 0 cuando n tiende a ∞. ■

A continuación se da un aplicación para la teoría expuesta en capítulos anteriores.

Ejemplo 4.2.1. *Sea* $X = C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ *esta dotado de la norma* $||u|| = ||u||_\infty + ||u'||_\infty$ *y* $P = \{u \in X : u(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]\}$*, donde* $||u||_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} u(t)$ *para cada* $u \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$. *Defina una multiplicación en* X *por* $(xy)(t) = x(t)y(t)$ *para cada* $x, y \in X$ *y* $t \in [0,1]$. *Claramente,* $(X, ||\cdot||)$ *es un Álgebra de Banach con una unidad* $e(t) \equiv 1$ *y* P *es un cono sólido no normal por el ejemplo 3.2.1.*

Sean $Tx = x^2, u_0 \equiv \theta$ *y* $v_0(t) \equiv a$*, donde* θ *es la función constante cero y* $a \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$. *Claramente,* $Tu_0 \geq u_0$ *y* $Tv_0 \leq v_0$.*Para cada* $x, y \in [u_0, v_0]$ *con* $y \leq x$*, tenemos*

$$0 \leq (Tx)(t) - (Ty)(t) = x^2(t) – y^2(t) = (x(t) + y(t))(x(t) - y(t)) \leq k(x(t) - y(t))$$

para cada $t \in [0,1]$*, donde* $k = 2ae$. *Esto muestra que* $T : [u_0, v_0] \to X$ *es una función de orden de Lipschitz creciente con* $r(k) = 2a < 1$. *Sea* $\{u_n\}$ *y* $\{v_n\}$ *el sucesiones de iterados de Picard de* u_0 *y* v_0*, luego* $u_n = \theta$ *y* $v_n(t) \equiv a^{2^n}$ *para cada* n*, y así* $||u_n|| \equiv 0$ *y* $||v_n|| = a^{2^n}$ *para cada* n*, lo que obliga a que* u_n *converge con la norma* $||\cdot||$ *a* θ *y* v_n *análogamente converge a* θ.

Se sigue que las sucesiones $\{\mu_n\}$*,* $\{\nu_n\}$ *son* $w-$*convergentes a la función 0. Sea* $\epsilon \in int(P)$ *se sigue que* $\{\mu_n\}$*,* $\{\nu_n\}$ *son* $\epsilon-$*uniformemente convergentes a la función 0. Luego, por el Teorema 3.2.6 se tiene que la función 0 es el único punto Fijo de* T.

Capítulo 5

Conclusiones

Sea una función f de un espacio normado X en sí mismo. La propiedad de tener un punto fijo es independiente de la norma que tenga X.

En [3] y [5] se definen otras convergencias para los espacios normados ordenados. En este trabajo se analizaron la $w-$convergencia y la $x-$uniforme convergencia, así como la relación que guardan con la convergencia en norma.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

(1) En [8] y [9] se trabaja con la $w-$convergencia para obtener Teoremas del Punto Fijo tipo Banach, usando principalmente las siguientes propiedades.

En el Teorema 3.2.1 se prueba que la convergencia en norma implica la $w-$convergencia.

El Ejemplo 3.2.2 es de una sucesión $w-$convergente, pero que no converge en norma.

Si el cono es normal, entonces las convergencias son equivalentes.

(2) En el capítulo 2 se define V_x, el ideal generado por un vector $x > \bar{0}$.

V_x es subespacio de X que tiene una norma $||\cdot||_x$ definida mediante el funcional de Minkowski y la convergencia en $||\cdot||_x$ es equivalente a la $x-$uniforme convergencia.

Como V_x se define en espacios vectoriales ordenados, entonces se tiene la norma $||\cdot||_x$ independientemente de si X es un espacio normado o espacio vectorial.

Por lo cual, la $x-$convergencia es útil si el espacio no tiene norma.

(3) La $w-$convergencia implica la $x-$uniformemente convergencia para $x \in int(P)$. Como no todo cono es sólido, se tiene que la $x-$uniforme convergencia no implica la $w-$convergencia. Por lo cual, la $x-$uniformemente convergencia es útil cuando el cono no es sólido.

(4) En el Ejemplo 2.2.1 se da una sucesión que es convergente norma pero no es $x-$convergente y la Observación 3 proporciona un ejemplo de una sucesión que es $x-$uniformemente convergente, pero no converge en norma. Por lo cual, la $x-$uniformemente convergencia es útil cuando la sucesión no converge en norma

(5) Si el cono es normal se tiene que una sucesión que es $x-$uniformemente convergente es convergente en norma. Así encontrar un punto fijo y la estimación de velocidad de convergencia mediante un vector es suficiente para tener un punto fijo y su estimación en V_x. Para que el algoritmo funcione en todo X se debe buscar que x sea una unidad de $P-$orden.

(6) Los Teoremas 3.1.5, 3.2.6 y las Proposiciones 4.2.1, 4.2.2 son una variación de otros Teoremas que aparecen en [5], [8] y [9]. Los primeros son demostrados usando la $x-$uniforme convergencia y conjuntos $x-$cerrados. En [5], [8] y [9] se usa la $w-$convergencia y los conjuntos $w-$cerrados.

Apéndice A

Espacios métricos

A.1. Espacios métricos

Definición A.1.1. *Sea X un conjunto diferente del vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que d es una métrica o distancia en X, si para cada x, y, $z \in X$, d cumple con las siguientes propiedades:*

(M1) $d(x, y) \geq 0$.

(M2) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ *(simetría).*

(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(desigualdad del triángulo).*

Si X es un conjunto y d es una métrica en X, entonces a la pareja (X, d) se le llama espacio métrico . Cuando no haya confusión, a X se le llamará espacio métrico sin hacer referencia a la métrica d.

Ejemplo A.1.1. *Sean $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, se define $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como:*

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

A esta métrica se le conoce como la métrica del taxista.

A continuación se presentan las siguientes definiciones, las cuales se usarán en capítulos posteriores.

Definición A.1.2. *Sea (X, d) un espacio métrico, para cada $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que $r > 0$. Se definen los siguientes subconjuntos de X:*

1. *La bola abierta con centro en x y radio r es el conjunto :*
   $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$.

2. *La bola cerrada con centro en x y radio r es el conjunto :*
   $B[x, r] = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$.

3. *La esfera con centro en x y radio r es el conjunto :*
   $S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\}$.

Observación 9. *Si el radio r es un número estrictamente positivo entonces la bola abierta y la bola cerrada son conjuntos diferentes del vacío, ya que al menos contienen a su centro.*

Las siguientes definiciones generalizan el concepto de bola abierta y bola cerrada de un conjunto.

Definición A.1.3. *Un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es:*

1. *Abierto, si para cada $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.*

2. *Cerrado, si $X \setminus A = A^c$ es abierto.*

Definición A.1.4. *Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $A \subset X$. Se dice que x es:*

1. *Un punto interior de A, si existe $\epsilon > 0$, tal que $B(x, \epsilon) \subset A$.*

2. *Un punto adherente de A, si para cada $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.*

Usualmente en la definición de punto interior el ϵ depende de x. Pero, en lugar de escribir ϵ_x se escribirá ϵ bajo el entendido que se comprende que existe esta dependencia.

Definición A.1.5. *Sea A un subconjunto de un espacio métrico (X, d); el interior de A se denota por $int(A)$ y se define como:*
$int(A) = \{x \in X : x \text{ es punto interior de } A\}$.

Definición A.1.6. *Sea A un subconjunto de un espacio métrico (X, d), la cerradura de A que se denota con $\overline{A}$ se define como:*
$\overline{A} = \{x \in X : x \text{ es punto adherente de } A\}$.

Definición A.1.7. *Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión en (X, d), es una función $f : \mathbb{N} \to X$.*

Donde $f(n)$ se representa como x_n para cada $n \in \mathbb{N}$ y se usará la notación usual para sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{x_n\}$ o simplemente (x_n).

Nota. *No se deberá confundir $\{x_n\}$ que es la notación de una función $f : \mathbb{N} \to X$ con $f(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que es el rango de la sucesión.*

Definición A.1.8. *Sean (X, d) un espacio métrico, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y x un elemento de X, se dice que:*

1. *$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x si para todo $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ de tal forma que para cada $n \geq k$ se cumple que $d(x_n, x) < \epsilon$.*

2. *$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ de tal forma que para cada $m, n \geq k$ se cumple que $d(x_m, x_n) < \epsilon$.*

Una sucesión no convergente se llama divergente.

Teorema A.1.1. *Toda sucesión convergente en un espacio métrico (X, d), es una sucesión de Cauchy.*

El recíproco del Teorema A.1.1 no es verdadero, es decir, una sucesión de Cauchy no siempre será convergente en un espacio métrico X.

Contraejemplo: Sea $X = (0, 1)$ con la métrica euclidiana en $\mathbb{R}$. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es de Cauchy en $(0, 1)$. Se sabe que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Pero $0 \notin (0, 1)$. Por lo tanto, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ no es convergente en $(0, 1)$.

Ya que no en todo espacio métrico una sucesión de Cauchy es convergente, surge la siguiente definición.

Definición A.1.9. *Un espacio métrico (X, d) es completo, si toda sucesión de Cauchy es convergente en X.*

Definición A.1.10. *Sea A un subconjunto no vacío en (X, d) espacio métrico. Se dice que A es acotado, si existe $k > 0$ tal que para todo $x,\ y \in A$, se tiene que*

$$d(x, y) \leq k.$$

Una sucesión en un espacio métrico se dice que es acotada si su imagen es acotada.

Teorema A.1.2. *Toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico X es acotada.*

El recíproco del Teorema A.1.2 no siempre es cierto, es decir, una sucesión acotada no siempre es de Cauchy.

Contraejemplo: La sucesión $\{(-1)^n\}$ es acotada, pero es fácil comprobar que tal sucesión no es de Cauchy.

Definición A.1.11. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Sea $\{n_k\}$ una sucesión de números naturales estrictamente creciente. A la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se le llama subsucesión de $\{x_n\}$.*

Teorema A.1.3. *Si una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en un espacio métrico (X, d) admite una subsucesión convergente, entonces $\{x_n\}$ es convergente y ambas tienen el mismo límite.*

Definición A.1.12. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) dos espacios métricos, x_0 en X y $f : X \to Y$ una función. Se dice que la función f es continua en el punto x_0, si se cumple la siguiente condición: para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $x \in X$ y $d_X(x, x_0) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.*

En realidad, se debería decir que f es $d_X - d_Y$ continua en el punto x_0 ya que, en general, la continuidad de f depende de las métricas que se estén considerando.

Definición A.1.13. *Sea $A \subset X$. Se dice que la función $f : X \to Y$ es continua en A, si f es continua en cada punto de A.*
Cuando ocurra que $A = X$, se dirá que f es continua.

Definición A.1.14. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) dos espacios métricos, se dirá que la función $f : X \to Y$ es uniformemente continua en X si f cumple que: para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $x_1, x_2 \in X$ y $d_X(x_1, x_2) < \delta$, entonces $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$.*

Note que δ depende de ϵ. De esta manera, se debería escribir como $\delta(\epsilon)$, pero se dejará como δ bajo el entendido que se comprende lo anterior. Además, a diferencia de la definición de continuidad de una función, en este caso se tiene que δ no depende de x.

A.2. Teorema de Categoría de Baire

Definición A.2.1. *Un subconjunto M de un espacio métrico X se dice que es:*

* ***raro o nunca denso*** *en X si la clausura $\bar{M}$ no tiene puntos interiores.*

* ***flaco o de primera categoría*** *en X si*

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

donde cada A_n es nunca denso en X.

* ***de segunda categoría*** *en X si M no es de primera categoría.*

Lema A.2.1. *Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$*

a) Si A es nada denso entonces $\bar{A}$ es nada denso

b) $int\bar{A} = \emptyset$ si y sólo si $(\overline{X \backslash \bar{A}}) = X$.

Demostración

A continuación se muestran las demostraciones por separado

a) Es consecuencia inmediata de la definición

b) Podemos suponer sin pérdida de generalidad que A es cerrado

$\Rightarrow$] Si $intA = \emptyset$ entonces cualquier abierto no vacío, dígase E, no está contenido en A, luego existe $e \in E$ tal que $e \notin A$, entonces $e \cap A^c \neq \emptyset$. Por tanto $X \backslash A$ es denso, de ahí que $(\overline{X \backslash \bar{A}}) = X$

$\Leftarrow$] Demostración análoga

■

Lema A.2.2. *Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces A es un nada denso si y sólo si para cada U conjunto abierto no vacío, existe un V conjunto abierto no vacío tal que $V \subseteq U$ y $V \cap A = \emptyset$*

Demostración

$\Rightarrow$] Sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Como $int\bar{A} = \emptyset$ se cumple que $U \not\subseteq \bar{A}$, con lo cual $U \cap X \backslash \bar{A} \neq \emptyset$ es abierto y $\left(U \cap X \backslash \bar{A}\right) \cap A \neq \emptyset$. Tomando a $V = U \cap X \backslash \bar{A}$, se termina la prueba.

$\Leftarrow$] Supóngase que $int\bar{A} \neq \emptyset$. Por hipótesis existe $V \subseteq int\bar{A}$ abierto no vacío tal que $V \cap A = \emptyset$. Si $x \in V$, dado que $V \subseteq int\bar{A} \subseteq \bar{A}$, entonces $x \in \bar{A}$ y, como V es una vecindad de x, $A \cap V \neq \emptyset$ lo cual es falso. Por tanto $int\bar{A} = \emptyset$. ■

Ejercicios:

1. Sean O_1, O_2 abiertos densos en X, entonces $O_1 \cap O_2$ es abierto y denso en X.

2. Sea $\{O_n\}$ una sucesión de abiertos y densos X. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ es denso en X.

Teorema A.2.1. *[Teorema de Categoría de Baire]*
Sea X es un espacio métrico completo y $\{A_n\}$ sucesión de subconjuntos de X.
Si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ entonces existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que el interior de A_{k_0} es no vacío.

Demostración
Sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión que $X = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Supóngase que $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de conjuntos nada densos. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $\bar{A}_n$ es nunca denso, es decir, $int(\bar{A}_n) = \emptyset$ y por el Lema (A.2.1) inciso (b) se tiene que $X \backslash int\bar{A}_n = X$ o bien $\overline{X \backslash \bar{A}_n} = X$. Así tomando $F_n = X \backslash \bar{A}_n$, se tiene que cada F_n es abierto y denso. Por Ejercicio 2 se cumple que $\bigcap F_n \neq \emptyset$. Por tanto $X \backslash \bigcup \bar{A}_n \neq \emptyset$ lo cual es falso. ■

Así sabemos que todo espacio métrico completo es de segunda categoría.

A.3. Espacios normados

Definición A.3.1. *Un conjunto X no vacío es un espacio vectorial sobre un campo K, si en X están definidas dos operaciones binarias, denotadas por $+$ (llamada suma y que es una operación interior) y $\cdot$ (producto por un escalar que es una operación exterior) tales que para cada $x, y, z \in X$ y $\alpha, \beta \in K$ se cumple:*

(V1) $x + y \in X$ *y* $\alpha \cdot \beta \in K$,

(V2) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(V3) $x + y = y + x$.

(V4) Existen $0 \in X$ *y* $1 \in K$ *tales que* $x + 0 = x$ *y* $1 \cdot x = x$.

(V5) Existe $-x \in X$ *tal que* $x + (-x) = 0$.

(V6) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

(V7) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.

(V8) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$.

En adelante usaremos $\alpha \cdot x = \alpha x$, $\alpha \cdot \beta$=$\alpha\beta$ y llamaremos a los elementos de X vectores y a los elementos de K escalares.

Ejemplo A.3.1. $\{f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ *es un espacio vectorial sobre el campo* $\mathbb{R}$.

Definición A.3.2. *Si X es un espacio vectorial sobre K y si $W \subseteq X$ no es vacío, entonces W es un subespacio de X si bajo las operaciones de X, W forma un espacio vectorial sobre K.*

Proposición A.3.1. *Si X es un espacio vectorial sobre K y $W \subseteq X$ no vacío, entonces W es un subespacio de X siempre que $w_1, w_2 \in W$ y $\alpha, \beta \in K$ implique que $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W$.*

Definición A.3.3. *Si x_1,...,x_n son vectores y α_1,...,α_n escalares, el vector*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

es una combinación lineal del sistema de vectores $\{x_i\}_{i=1}^n$.

Definición A.3.4. *Dado un sistema de vectores $\{x_i\}_{i=1}^n$, se dice que es linealmente independiente cuando*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

implica que $\alpha_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Ahora se hablará de lo que es un espacio normado ordenado. Para esto recordemos las siguientes definiciones.

Definición A.3.5. *Sea X un espacio vectorial sobre un campo K ($K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$). La función $\| \cdot \|: X \to \mathbb{R}$ se llama* ***norma*** *en X si para cada $x,\ y \in X$ y para cualquier $t \in K$ se cumplen las siguientes propiedades:*

(N1) $\| x \| \geqslant 0$.

(N2) $\| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = \bar{0}$.

(N3) $\| tx \| = | t | \, \| x \|$.

(N4) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Si $\| \cdot \|$ es una norma en X, al par $(X, \| \cdot \|)$ se le llama **espacio normado** o **espacio vectorial normado**.

Si se cumplen las condiciones $(N1)$, $(N3)$ y $(N4)$ en lugar de cumplir $(N2)$ cumple una propiedad $(N2')$ la cual es $x = \bar{0} \Longrightarrow ||x|| = 0$ se dice que es una seminorma.

Lema A.3.1. *Sea $(X, \| \cdot \|)$ un espacio normado. La función $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por $d(x, y) = \| x - y \|$ para $x,\ y \in X$ es una métrica para X.*

Demostración

Sean $x,\ y,\ z$ en X, la función d cumple:

(N1) $d(x, y) = \| x - y \| \geqslant 0$.

(N2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow \| x - y \| = 0 \Longleftrightarrow x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(N3) $d(x, y) = \| x - y \| = \| (-1)(y - x) \| = | -1 | \| y - x \| = \| y - x \| = d(y, x)$ luego $d(x, y) = d(y, x)$.

(N4) $d(x, y) = \| x - y \| = \| (x - z) + (z - y) \| \leq \| x - z \| + \| z - y \| = d(x, z) + d(z, y)$.

Por lo tanto, d es una métrica para X, es decir, (X, d) es un espacio métrico. ∎

Observación 10. *En lo que resta del trabajo cuando se hable de la métrica de un espacio normado, será la métrica definida en el Lema A.3.1, a menos que se especifique lo contrario.*

Se presentan algunos ejemplos de espacios normados.

Ejemplo A.3.2. *Sea* $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}|x_i| \text{ para cada } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

La pareja $(X, \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio normado.*

Definición A.3.6. *Sea X un espacio normado. Se dice que X es un **espacio de Banach**, si X es un espacio completo.*

Los espacios de Banach reciben su nombre en honor al matemático polaco, Stefan Banach. Estos son uno de los objetos de estudio más importantes en el Análisis Funcional.
El siguiente ejemplo se usará con frecuencia en el capítulo 4.

Ejemplo A.3.3. *Sean* $X = C([a,b], \mathbb{R}) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} |\ f \text{ es continua en } [a,b]\}$ *y* $\|\cdot\|_\infty : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \text{ para cada } x \text{ en } [a,b]\}.$$

La pareja $(X, \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio de Banach.*

Apéndice B

Complemento de espacios ordenados

Lema B.0.1. *Sea (X, P) un espacio normado con P un cono sólido y x en X. Si existe $y \in int(P)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $-\frac{1}{n}y << x << \frac{1}{n}y$, entonces $x = \bar{0}$.*

Demostración
Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $-\frac{1}{n}y << x << \frac{1}{n}y$, lo cual implica que $\bar{0} << x - \frac{1}{n}$, $\bar{0} << \frac{1}{n} - x$ o bien $x - \frac{1}{n}, \frac{1}{n} - x \in int(P) \subset P$. Aplicando límite cuando n tiende a infinito y el hecho de que P es cerrado, se tiene que $-x, x \in P$, es decir, $x = \bar{0}$. ∎

B.1. Funcional de Minkowski

Para esta sección comenzamos con las siguientes definiciones

Definición B.1.1. *Sean X un espacio vectorial real y $A \subset X$ no vacío. Se dice que A es:*

(i) ***Estelar*** *en X, si cumple*

$$\forall 0 \leq t \leq 1, x \in A \Rightarrow x \in tA.$$

(ii) ***Absorbente*** *en X, si cumple*

$$\forall x \in X \ \exists t_0 > 0 \ : \ t \geq t_0 \Rightarrow x \in tA.$$

(iii) ***Balanceado****, si cumple*

$$\forall |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda A \subset A.$$

(iv) ***Convexo****, si cumple*

$$0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda A + (1-\lambda)A \subset A.$$

Observaciones sobre conjuntos absorbentes:

Sean X un espacio vectorial real y A absorbente en X. Se cumple:

1. $\bar{0} \in A$.

   En efecto, ya que A es absorbente entonces para $\bar{0}$ existe $t > 0$ tal que $t\bar{0} \in A$ y como $\bar{0} = t\bar{0}$ se tiene el resultado deseado.

2. $\forall x \in X, \inf \{t > 0 \ : \ x \in tA\} \geq 0$.

   Como A es absorbente entonces para x existe $t > 0$ tal que $tx \in A$ y así $\{t > 0 \ : \ x \in tA\} \neq \emptyset$ y como $\{t > 0 \ : \ x \in tA\}$ es acotado inferiormente por 0 implica que existe $\inf \{t > 0 \ : \ x \in tA\}$. Más aun, $\inf \{t > 0 \ : \ x \in tA\} \geq 0$ lo cual termina la prueba.

3. A es absorbente $\Leftrightarrow \forall x \in X \ \exists t_1 > 0 \ : \ 0 \leq t \leq t_1 \Rightarrow tx \in A$.

   En efecto, A es absorbente en X, si y sólo si para todo $x \in X$ existe $t_0 > 0$ tal que $t \geq t_0$ implica $x \in tA$ o equivalentemente existe $x_t \in A$ tal que $x = tx_t$ o bien $\frac{1}{t}x = x_t$.
   Por otro lado se tiene que $t \geq t_0 > 0$ si y sólo si $0 < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{t_0}$.
   Definiendo $t_1 = \frac{1}{t_0}$ te tiene el resultado deseado.

4. $A \subset B \subset X \Rightarrow B$ es absorbente.

   En efecto, A es absorbente en X, si y sólo si para todo $x \in X$ existe $t_0 > 0$ tal que $t \geq t_0$ implica $x \in tA$ o equivalentemente existe $x_t \in A$ tal que $x = tx_t$ y $A \subset B$ implica que $x = tx_t \in tB$ lo cual concluye la prueba.

Definición B.1.2. *Sean X un espacio vectorial real y $A \subset X$ absorbente. Se define*

$$\rho_A : X \longrightarrow [0,\ \infty)$$

$\rho_A(x) = \text{ínf}\,\{t > 0\ :\ x \in tA\}$ *. A la función ρ_A se le llama **funcional de Minkowski** de . A*

La observación 2) sobre conjuntos absorbentes se tiene que el funcional de Minkowski está bien definido.

Teorema B.1.1. *Sean X un espacio vectorial real, $A \subset X$ absorbente y $\lambda \in \mathbb{R}$. Sea $\rho_A : X \longrightarrow [0,\ \infty)$ dada por $\rho_A(x) = \text{ínf}\,\{t > 0\ :\ x \in tA\}$ el funcional de Minkowski de A.*

(i) Si A es balanceado, entonces $x \in X$ se tiene $\rho_A(\lambda x) = |\lambda|\rho_A(x)$.

(ii) Si A es convexo, entonces para todo $x, y \in X$ se tiene $\rho_A(x+y) = \rho_A(x) + \rho_A(y)$.

Demostración

Prueba (i).

Sea $x \in X$, por la observación 2, $\rho_A(x) \geq 0$ está bien definido.

Caso 1) $\lambda > 0$. Primero se probará que $\rho_A(\lambda x) \leq \lambda \rho_A(x)$.

Para todo $t > 0$ tal que $x \in tA$ existe $x_t \in A$ que cumple $x = tx_t$ si y sólo si $\lambda x = t\lambda x_t$.

Así, $\rho_A(\lambda x) \leq t\lambda$ para todo t con la propiedad ya mencionada.

Luego, $\dfrac{\rho_A(\lambda x)}{\lambda}$ es cota inferior de $\{t > 0\ :\ x \in tA\}$. Se sigue que

$\dfrac{\rho_A(\lambda x)}{\lambda} \leq \text{ínf}\,\{t > 0\ :\ x \in tA\} = \rho_A(x)$.

Ahora, se probará que $\rho_A(\lambda x) \geq \lambda \rho_A(x)$.

Para todo $t > 0$ tal que $\lambda x \in tA$ existe $x_t \in A$ que cumple $\lambda x = tx_t$ si y sólo si $x = \dfrac{t}{\lambda}x_t$. Así, $\rho_A(x) \leq \dfrac{t}{\lambda}$, se sigue que $\lambda\rho_A(x) \leq t$. Por lo cual,
$\lambda\rho_A(x) \leq \text{ínf}\{t > 0 \ : \ \lambda x \in tA\} = \rho_A(\lambda x)$ lo cual termina la prueba.

Caso 2) $\lambda = 0$.

Observemos que $\lambda x = \bar{0}$ y por la observación 1, $\bar{0} \in A$, lo que implica que para todo $r > 0$ se cumple $\bar{0} = r\bar{0} \in A$, es decir, $\rho_A(\lambda x) = \rho_A(\bar{0}) = 0 = \lambda\rho_A(x)$.

Caso 3) $\lambda < 0$.

Primero se probará que $\rho_A(\lambda x) \leq -\lambda\rho_A(x)$.

Para todo $t > 0$ tal que $x \in tA$ existe $x_t \in A$ que cumple $x = tx_t$ si y sólo si $\lambda x = t\lambda x_t$ o equivalentemente $\lambda x = (-\lambda t)(-x_t)$ donde $-x_t \in A$ ya que A es balanceado. Así, $\rho_A(\lambda x) \leq -\lambda t$ para todo t con la propiedad ya mencionada.
Luego, $\dfrac{\rho_A(\lambda x)}{-\lambda}$ es cota inferior de $\{t > 0 \ : \ x \in tA\}$. Se sigue que
$\dfrac{\rho_A(\lambda x)}{-\lambda} \leq \text{ínf}\{t > 0 \ : \ x \in tA\} = \rho_A(x)$.
Ahora, se probará que $\rho_A(\lambda x) \geq -\lambda\rho_A(x)$.

Para todo $t > 0$ tal que $\lambda x \in tA$ existe $x_t \in A$ que cumple $\lambda x = tx_t$ si y sólo si $x = \dfrac{t}{-\lambda}(-x_t)$. Así, $\rho_A(x) \leq \dfrac{t}{-\lambda}$, se sigue que $-\lambda\rho_A(x) \leq t$. Por lo cual,
$-\lambda\rho_A(x) \leq \text{ínf}\{t > 0 \ : \ \lambda x \in tA\} = \rho_A(\lambda x)$ lo cual termina la prueba.

Prueba (ii).

Sean $t_1, t_2 > 0$ tales que existen $x_{t_1}, x_{t_2} \in A$ cumplen $x = t_1x_{t_1}, y = t_2x_{t_2}$ y como A es convexo, entonces $\dfrac{1}{t_1+t_2}[x+y] = \left[\dfrac{t_1}{t_1+t_2}x_1 + \dfrac{t_2}{t_1+t_2}x_2\right] \in A$. Así, $[x+y] \in (t_1+t_2)A$.
Por lo cual, $\rho_A(x+y) \leq t_1 + t_2$ lo cual implica $\rho_A(x+y) - t_1 \leq t_2$. Así,
$\rho_A(x+y) - t_1 \leq \rho_A(y)$ se sigue que $\rho_A(x+y) - t_1 \leq \rho_A(y)$ o bien $\rho_A(x+y) - \rho_A(y) \leq t_1$.
Por lo cual, $\rho_A(x+y) - \rho_A(y) \leq \rho_A(x)$ o bien $\rho_A(x+y) \leq \rho_A(x) + \rho_A(y)$. ■

Teorema B.1.2. *Sean X un espacio vectorial real y $A \subset X$ absorbente. Si A es balanceado y convexo en X, entonces ρ_A es una seminorma.*

Demostración

Por el Teorema B.1.1 se tiene que cumple los axiomas de seminorma. ■

Bibliografía

[1] AGARWAL RAVI P., MEEHAN MARIA y O'REGAN DONAL. *Fixed point theory and applications*. Cambridge University Press, volumen 141. First Edition. (2001).

[2] AGARWAL RAVI P., O'REGAN DONAL y SAHU DR. *Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications*. Springer , volumen 6. (2009).

[3] ALIPRANTIS, CHARALAMBOS D y TOURKY, RABEE. *Cones and duality*. American Mathematical Soc., volumen 84. (2007).

[4] ESCAMILLA R. A., MENDOZA T. J., RAGGI C. M. G. *Introducción a la Teoría de Espacios Métricos*. Textos Científicos. Primera Edición. (2010).

[5] GOU D., YEOL J. C. y JIANG Z. *Partial Ordering Methods in Nonlinear Problems*, Nova Science Plublishers Inc. Segunda edición. (2004).

[6] HARDY, G.E., ROGERS, T.D. *A generalization of a fixed point theorem of reich*. Canad. Math. Bull, volume 16. (1973).

[7] JERIBI A. KRICHEN B. *Nonlinear Functional Analysis in Banach Spaces and Banach Algebras: Fixed Point Theory Under Weak Topology for Nonlinear Operators and Block Operator Matrices with Applications*. CRC Press, volumen 12. (2005).

[8] JIANG, SHUJUN y LI, ZHILONG. Article. *Fixed point theorems of order-Lipschitz mappings in Banach algebras*, Fixed Point Theory and Applications. (2016).

[9] Jiang, Shujun y Li, Zhilong. Article. *Order-Lipschitz Mappings Restricted with Linear Bounded Mappings in Normed Vector Spaces without Normalities of Involving Cones via Methods of Upper and Lower Solutions*, Faculty of Sciences and Mathematics University of Niš. (2018).

[10] Kaniuth, Eberhard. *A Course in Commutative Banach Algebras.* Springer Science and Business Media, volumen 246. (2008).

[11] Kreyszig, Erwin. *Introductory functional analysis with applications.* Wiley New York, volumen 1. (1978).

[12] Pietsch, Albrecht. *History of Banach Spaces and Linear Operators*, Birkhäuser, Boston. (2007).

[13] Rhoades Billy E. *A comparison of various definitions of contractive mappings.* Transactions of the American Mathematical Society, volumen 226. (1977).

[14] Vandana Garg Chetan. *A brief study of fixed point theorem.* Applied Sciences Department. (2017).

[15] Zeidler Eberhard. *Nonlinear Funcional Analysis and its Applications, Fixed-Point Theorem.* Springer-Verlag New York. (1986).

Índice alfabético