



# **BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

## **EVOLUCIÓN TEMPORAL DEL ESTADO ENREDADO DE UN HAZ DE PARTÍCULAS DE SPÍN ARBITRARIO EN EL EXPERIMENTO DE STERN-GERLACH.**

**TESIS**

PRESENTADA AL  
**POSGRADO EN FÍSICA APLICADA**  
PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE  
**MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA APLICADA)**

PRESENTA  
**JULIO ABRAHAM MENDOZA FIERRO**

ASESOR  
**DR. LUIS MANUEL ARÉVALO AGUILAR**

PUEBLA, PUE. JUNIO DE 2018.



---

**Evolución temporal del estado enredado de un haz de  
partículas de spin arbitrario en el experimento de  
Stern-Gerlach.**

---

**Julio Abraham Mendoza Fierro**

**COMITÉ**

---

**Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco**  
**Presidente**

---

**Dra. Marcela Maribel Méndez Otero**  
**Secretario**

---

**Dr. Wuiyebaldo Fermín Guerrero Sánchez**  
**Vocal**

---

**Dr. Rodolfo Palomino Merino**  
**Suplente**

---

**Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar**  
**Asesor**



# Índice general

## 1 | Capítulo 1 Preliminares

- 1.1 Introducción: breve historia del experimento de Stern Gerlach 1
- 1.2 Planteamiento del problema 4
- 1.3 Justificación y antecedentes 6
- 1.4 Metodología 7

## 9 | Capítulo 2 Marco teórico

- 2.1 Los postulados de la mecánica cuántica 9
  - 2.1.1 Introducción 9
  - 2.1.2 Postulados esenciales 9
- 2.2 El operador de densidad 11
  - 2.2.1 Introducción 11
  - 2.2.2 Propiedades del operador de densidad 12
  - 2.2.3 Mezcla estadística de estados 13
  - 2.2.4 El caso puro 14
- 2.3 Factorización del operador de evolución 15
  - 2.3.1 Introducción 15
  - 2.3.2 El método de factorización 17
- 2.4 La entropía de Von Neumann 20
  - 2.4.1 Introducción 20
  - 2.4.2 Definición 21

## 23 | Capítulo 3 Resultados

- 3.1 Solución al problema 23
  - 3.1.1 Introducción 23
  - 3.1.2 El caso para una mezcla estadística de estados de espín 24
  - 3.1.3 El caso para una superposición de estados de espín (el caso puro) 31
  - 3.1.4 Midiendo el enredamiento 33
  - 3.1.5 Un magneto como un dispositivo polarizador 39

3.2 Resumen y Conclusiones 47

## 51 | Capítulo 4

Apéndice

- 4.1 Solución a la integral para la matriz reducida  $\rho^s$ . 51
- 4.2 Código *Mathematica* para la solución a los polinomios característicos para las matrices  $\rho^s$  para  $S = 1/2, 1, 3/2$ . 53
- 4.3 Código *Mathematica* para la obtención de las gráficas 3.1 y 3.2. 54
- 4.4 Código *Mathematica* para la solución a los polinomios característicos (3.1.90) a (3.1.92) para las polarizaciones  $|1, \pm 1\rangle$ ,  $|3/2, \pm 3/2\rangle$ ,  $|3/2, \pm 1/2\rangle$  para los espines  $s = 1, 3/2$ . 59
- 4.5 Código *Mathematica* para la obtención de las gráficas 3.5 y 3.6. 60

## Dedicatoria

A los que me conocen.

## Agradecimientos

A aquellos que me han ayudado a realizar este trabajo.

## Carta

Entre vacilaciones y reniegos he decidido escribir este fragmento a consecuencia de la autoinducida idea de que aquellos que realmente me conocen intentarán en un futuro escudriñar mis actuales sentires. La odisea comenzó en el lugar seco y arenoso cuando el credo de la verdad se convirtió en un incómodo desasosiego para mí y al igual que Ismael, teniendo poco o ningún dinero en el bolsillo y nada en particular que me interesara en la tierra, decidí embarcarme en la búsqueda de aquel añejo aliciente que desde antaño ha sido parte de mí. Con la desazón de dejar a los nuestros y con la inquietud de encontrar mil leviatanes, cruzamos el cabalístico mar de tierra en compañía de ese durmiente par de ópalos verdes, hasta que, tras peligroso viaje, encallamos en aquel arrinconado zaquizamí donde llegamos a estar rodeados de ajenas usanzas y extraños verbos. Comenzamos con nocturna caminata bajo oscuro azul turquesa y titilantes ojos claros que miraban desde prodigiosa vista el par de amantes temerosos que dilucidaban, a la fuerza, el incierto porvenir. Fiebre álgida primer huella, incertidumbre diario pan, languidez sollozante, deseado claudicar, labios que resuelan, hartazgo de amar, hesitación recalcitrante, amargo solaz. Pero, como quien pierde languidez y recupera lozanía, el ánimo recobró su ímpetu y la luz de las buenas nuevas esclareció las finas siluetas de aquél sendero serpenteante y escabroso que termina bajo aquel seguro horizonte. Y pusimos pie en esta vereda terregosa rodeada, en un inicio, de antiquísimas casonas con decoradas buhardillas y sostenidas por barrocos muros que confinan, para siempre, pasionales relatos capaces de dar material suficiente a cualquier poeta para escribir infinidad de tomos. He de confesarlo, hay algo de magia en esto, y que me lleva a aquellos tiernos años en que las vendas de los ensueños cubrían mis ojos. Y a paso cierto comenzamos veraniega andadura de pendiente pronunciada, pero de deleite intrínseco que nos paliaba ese sentimiento de nostalgia. Pero al poco tiempo el destino mostró su cara fosca y arrebató con hoscas manos la doncellesca y aquejada existencia de aquella que estaba destinada a dejar esta tierra a esa edad en alago a su propio nombre, ¡y como no recordarle si era de mi misma sangre!; tras cavilar en lo efímero de la existencia y encontrar aliento en estoica filosofía, retomé con consuelo y menor pesadez el acompasado caminar. Y al final, decidí ignorar el atisbo de aquella espesa mirada que me intentaba ahormar... esto es simple, tengo aversión a lo absoluto...





# Resumen

El experimento de Stern-Gerlach fue concebido por Otto Stern en el año de 1921 como una prueba para la cuantización espacial (cuantización del momento angular orbital) y fue culminado en el año de 1922 en colaboración con Walter Gerlach; el experimento constituye una piedra angular para el desarrollo de la Mecánica Cuántica, pues, desde su realización, ha provisto evidencia tanto teórica como experimental de las contraintuitivas características del mundo cuántico: desde la cuantización del momento angular magnético de los átomos hasta la desconcertante idea del entrelazamiento cuántico.

Teóricamente, este experimento constituye una pieza invaluable para abordar conceptos propiamente mecánico cuánticos como el espín, el proceso cuántico de medición, la decoherencia, el formalismo de la matriz de densidad etc. La idea del experimento original es simple: un haz no polarizado de átomos de plata eléctricamente neutros y de espín neto  $\frac{1}{2}$  entra en una región de campo magnético inhomogéneo, luego, en este lugar, la función de onda asociada a este ensamble de átomos sufre una separación en regiones espacialmente distintas, finalmente esta función de onda colapsa a manera de un par de distribuciones de impacto en una pantalla detectora.

En este trabajo se realiza un análisis teórico donde a través del método del operador de evolución se obtiene la evolución temporal del estado cuántico que representa un haz de átomos o moléculas con espín arbitrario en la región del campo magnético del experimento de Stern-Gerlach. Dicha evolución describe las situaciones para un haz polarizado y uno no polarizado (situación correspondiente al experimento de Stern-Gerlach original); los grados de libertad internos son representados por una mezcla estadística de estados y una superposición de estados respectivamente; los grados de libertad externos se representan a través de un paquete de ondas Gaussiano. La evolución obtenida muestra un enredamiento cuántico entre los dos grados de libertad del sistema y a partir de las expresiones obtenidas puede derivarse la evolución temporal para cualquier espín específico. El enredamiento cuántico es caracterizado para el caso puro (la situación del haz polarizado) a través de la entropía de Von Neumann.



# 1

## Preliminares

*“The opposite of a profound truth may well be another profound truth.”*  
-Niels Bohr

### 1.1 Introducción: breve historia del experimento de Stern Gerlach

Apelando como una justificación a la premisa de Friedrich (Friedrich and Herschbach, 2003) de que son pocos los científicos atómicos (yo incluyo científicos de otras áreas de la física, profesores de la materia, estudiantes, y por supuesto, personas ajenas a la ciencia) que conocen los detalles históricos (y dramáticos y que bien podrían describir muchos trabajos de este tipo en el mundo científico) del experimento de Stern-Gerlach; se presenta una breve narración histórica de este trabajo experimental basada en la investigación hecha por Friedrich (Friedrich and Herschbach, 2003).

Otto Stern recibió su doctorado en físico química en la universidad de Breslau en 1912 con una investigación sobre la presión osmótica de soluciones de dióxido de carbono en distintos solventes. Posteriormente realizó estudios postdoctorales de la mano de Albert Einstein, convirtiéndose en su primer alumno. Bajo la tutela de Einstein, Stern se interesó en los modernos conceptos de la época, como los cuantos de luz, la naturaleza de los átomos, el magnetismo y la física estadística. Después de la Primera Guerra Mundial y tras haber servido en el Ejército Alemán, Stern se trasladó a Fráncfort, donde llegó a ser asistente de Max Born en el instituto para física teórica de dicha ciudad, donde comenzó su incursión en la técnica experimental con haces moleculares.

Por otra parte, Walter Gerlach se doctoró en física en el año de 1912 en la universidad de Tubinga Alemania con una investigación sobre la radiación de cuerpo negro y el efecto fotoeléctrico. Al mismo tiempo que servía en el Ejército Alemán en la Primera Guerra Mundial, trabajó con Wilhelm Wien en el desarrollo de la telegrafía inalámbrica. En 1920 llegó a ser asistente de profesor en el instituto de física experimental adyacente al instituto donde se encontraba Stern; ahí comenzó a estudiar las propiedades diamagnéticas de cristales de Bismuto en campos magnéticos no homogéneos.

El experimento fue originalmente concebido por Otto Stern y su estímulo inmediato fue la investigación de una propiedad física que se desprende de la cuantización espacial: la birrefringencia de gas hidrogénico en un campo magnético; Stern mismo argumentó que dicha idea fue planteada en un seminario; La mañana siguiente después de tal seminario, Stern se levantó muy de temprano, pero el clima era demasiado frío como para salir de la cama, así que decidió quedarse recostado pensando

## 1.1 Introducción: breve historia del experimento de Stern Gerlach

sobre las cuestiones del día anterior y fue ahí donde tuvo la idea del experimento (Herschbach, 1987). La idea no fue inicialmente bien recibida por Born e incluso intentó persuadir a Stern de que la cuantización espacial era meramente una expresión simbólica; en palabras de Born:

*“Me tomó bastante tiempo antes de tomarme esta idea en serio. Siempre pensé que la cuantización [del espacio] era una especie de expresión simbólica de algo que no entiendes. Pero tomar esto literalmente como lo hizo Stern, esta era su propia idea ... Traté de persuadir a Stern de que no tenía sentido, pero luego me dijo que valía la pena intentarlo.”* (Born, 2014)

Pese a la negativa de Born, Stern encontró apoyo en Gerlach, quien hasta ese momento no tenía conocimiento de la cuantización espacial; fue así como se inició el pacto para la realización de este trabajo, que tomó más de un año en ser completado. El diseño final del experimento consistía en la producción de un haz de átomos de plata mediante el calentamiento en un horno a una temperatura de unos 1000°C, el haz escapaba por efusión y posteriormente era colimado por un par de rejillas colineales de 0.03 mm de grosor, después, este haz entraba a la región de un campo magnético con una componente constante de unos 0.1 T de intensidad y una componente variable, de manera que existía un gradiente de 10 T/cm; finalmente, el haz emerge del campo magnético y una película delgada de plata era depositada en la placa del detector. Cuando el experimento llegó a completarse, la separación entre las dos distribuciones de impacto obtenidas fue de tan sólo 0.2 mm. Todo el experimento se llevó a cabo en vacío.

Es difícil que un experimento científico obtenga resultados satisfactorios sin dificultades previas y el experimento de Stern-Gerlach no fue la excepción; el primer inconveniente para este trabajo fue que los depósitos de plata eran muy tenues para ser visibles a simple vista, el propio Stern describe como, por accidente, se solucionó el problema:

*“Después de ventilar para liberar el vacío, Gerlach eliminó la brida del detector. Pero no pudo ver ningún rastro del haz de plata y me dio la brida. Con Gerlach mirando por encima de mi hombro mientras miraba de cerca la placa, nos sorprendió ver cómo emergía gradualmente el depósito del haz... finalmente nos dimos cuenta de lo que había sucedido. Yo era el equivalente de un profesor asistente. Mi salario era demasiado bajo para comprar buenos cigarrillos, así que fumaba puros malos. Estos tenían un alto contenido en azufre, así que mi aliento en el plato convirtió la plata en sulfuro de plata, el cual es color negro azabache, fácilmente visible. Fue como revelar una película fotográfica.”*  
Herschbach (1987)

Después de este suceso, ambos científicos utilizaron un proceso de revelado fotográfico para la visualización de los depósitos de plata. Los meses obedecieron al tiempo y transcurrieron, Stern y Gerlach no tenían los resultados esperados, no lograban observar la división del haz y la convicción de Stern para la cuantización espacial fluctuaba; al mismo tiempo, Gerlach encontraba rechazo al experimento, Debye, por ejemplo, le dijo:

*“No creerás seriamente que la orientación espacial de los átomos sea algo físicamente real, eso es solamente una instrucción que obedecen los electrones”*  
Rechenberg (1989).

Otro problema para el desarrollo del experimento fue el de índole económico: Alemania se encontraba en dificultades económicas tras la Primera Guerra Mundial. En apoyo al experimento,

## 1.1 Introducción: breve historia del experimento de Stern Gerlach

Born aprovechó el interés de las personas en Einstein y su teoría de la relatividad y presentó una serie de conferencias en la universidad de Fráncfort sobre el tema, en las cuales cobraba una comisión por su entrada. El dinero recaudado ayudo a financiar el proyecto por algún tiempo, pero la gran inflación del periodo de entreguerras agotaba los recursos rápidamente. Born describió la situación a manera de broma a través de una carta a un amigo que partiría de viaje a Nueva York; sorprendido quedo Born cuando al cabo de unas cuantas semanas la carta respuesta le recomendaba la escritura de una carta al empresario americano de ascendencia alemana Henry Goldman, cuya familia era proveniente de Fráncfort; Goldman era fundador de la firma de inversión Goldman Sachs y de las tiendas Woolworth Co; en palabras de Born:

*“En primera instancia lo tomé por una broma, pero bajo reflexión decidí que debería hacerse un intento... Una carta bien redactada fue compuesta y enviada y pronto llegó una encantadora respuesta y un cheque por algunos cientos de dólares ... Después de que el cheque de Goldman salvara la continuación de los experimentos, el trabajo llegó a completarse satisfactoriamente.” Born (2014)*

Mientras tanto, Stern llegó a ser profesor de física teórica en la universidad de Rostock. A principios de 1922 él y Gerlach acordaron encontrarse a mitad de camino entre las ciudades de Fráncfort y Rostock, en la ciudad de Gotinga, con la finalidad de evaluar la situación; decidieron darse por vencidos. Sin embargo, una huelga de ferrocarriles retrasó la vuelta de Gerlach a Fráncfort dándole un día entero para reevaluar todos los detalles detenidamente. Gerlach decidió continuar el trabajo y a su regreso a Fráncfort mejoró el calibrado del aparato y al cabo de poco tiempo logró una clara división en dos partes del haz atómico de plata. Stern recordó la sorpresa que obtuvo cuando tiempo después de su reunión en Gotinga recibió un escueto telegrama de Gerlach que rezaba:

*“Bohr tiene razón después de todo.” Segre (1973).*

Gerlach posteriormente envió una tarjeta postal a Bohr con un mensaje de felicitación mostrando una fotografía de la división del haz (vea la figura 1.2). Esta demostración del concepto de la cuantización espacial fue inmediatamente aceptada por la comunidad científica (vea (Friedrich and Herschbach, 2003, Pág. 57)) y constituyó la primera evidencia contundente para la naciente teoría cuántica; sin embargo, fue sólo a través de los años que la mecánica cuántica adquirió su estructura matemática formal y dio la explicación hoy aceptada como correcta en términos del concepto de espín.

## 1.2 Planteamiento del problema

En la presente sección se define el problema principal a desarrollar en este trabajo. Un haz no relativista ( $v \leq c$ ) de partículas <sup>1</sup> con carga eléctrica neutra y espín arbitrario  $s = n/2$  (tal que  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ ) emerge de una fuente emisora, posteriormente cruza un par de pinholes, es decir, un par de placas paralelas agujeradas colinealmente, cuya finalidad es corregir la dispersión del haz emergente y seleccionar a aquellos átomos cuyo movimiento sea en una sólo dirección <sup>2 3</sup>, en este trabajo se asume la orientación de los ejes coordenados tal que la dirección de propagación del haz es a lo largo del eje  $y$ . Cuando el haz colimado emerge, existen dos opciones:

1. **El haz de partículas se polariza.** Una vez que las partículas emergen de los pinholes se hace uso de un dispositivo polarizador; en la práctica, este proceso consiste en hacer que el haz atraviese un campo magnético producido por un imán de varios polos, las componentes de espín son separadas y bloqueadas de manera tal, que sólo emerge una componente, vea por ejemplo Jeske et al. (2011); así los grados internos de libertad de las partículas serán representadas por un único estado cuántico, es decir, el espín es descrito por un estado puro, que, por el principio de superposición, puede ser representado por una combinación lineal de vectores ortonormales de un conjunto base.
2. **El haz de partículas no se polariza.** Ante esta situación el espín está orientado isotrópicamente en el espacio y cada dirección es igualmente probable; así, los grados internos de libertad son descritos correctamente a través de una mezcla estadística de estados (Cohen-Tannoudji et al., 1977, Pág. 438). En el trabajo experimental de Stern y Gerlach, el haz de átomos no fue polarizado, entonces, esta situación describe el caso original del experimento (Benítez et al., 2017b), (Benítez et al., 2017a).

En este trabajo se trata teóricamente las dos situaciones anteriores. Después, el haz se dirige a la región de un campo magnético de la forma:  $\mathbf{B}(x, z) = -\alpha x \mathbf{i} + (B_0 + \alpha z) \mathbf{k}$ , siendo  $B_0$  y  $\alpha$  constantes reales. El problema consiste en: **encontrar la evolución temporal que presenta el estado cuántico que describe el sistema físico de las partículas de espín arbitrario en la región de campo magnético del aparato, considerando las dos situaciones planteadas anteriormente; corroborar el enredamiento cuántico que surge entre los grados de libertad del sistema y cuantificar en función del tiempo  $t$  dicho enredamiento.** Es necesario enfatizar que la variable temporal  $t$  utilizada en este trabajo hace alusión al tiempo de estancia del haz de partículas dentro del campo magnético. Es en esta región donde es común encontrar descripciones semiclásicas para la física de las partículas (vea por ejemplo (Sakurai, 1995, pág. 2-3) y (Townsend, 2000, Pág. 1-3)) o descripciones cuánticas incompletas donde solamente se tratan los grados internos de libertad (vea (Griyths, 2016, Pág. 162-165)); sin embargo, a la luz de los postulados modernos de la mecánica cuántica, tales descripciones no resisten un análisis teórico; incluso el hecho de atribuir trayectorias clásicas a los átomos dentro del aparato es una tesis que es sustentada en la segunda ley de Newton (Benítez et al., 2017b), (Benítez et al., 2017a); trayectorias

<sup>1</sup>A partir de este punto se utilizará la palabra partícula para abarcar tanto a átomos y/o moléculas que conforman el haz emergente.

<sup>2</sup>El experimento de Stern-Gerlach original, en lugar de utilizar un par de pinholes, empleó un par de placas con rejillas paralelas de un ancho aproximado de unas  $30 \mu m$  (Friedrich and Herschbach, 2003).

<sup>3</sup>Este proceso no constituye una medición cuántica para las partículas colimadas por los pinholes, más bien, constituye un claro ejemplo de preparación de estados; esto puede ser entendido a través del experimento de la doble rendija, por favor vea: (Audretsch, 2008, Pág. 23-29).

clásicas para las partículas no deben existir al considerar un análisis cuántico completo, puesto que una trayectoria implicaría que los observables tienen valores predeterminados antes de una medición, contradiciendo el postulado de la medición en mecánica cuántica (vea la sección 2.1.2). En la parte final del experimento las partículas emergen del campo magnético y su función de onda colapsa en una pantalla detectora; en el experimento original, átomos de plata con espín interno neto  $s = 1/2$  colapsan a manera de dos distribuciones de impacto, vea la figura 1.2; pero en general, para espines arbitrarios deben existir  $2s + 1$  distribuciones de impacto. En la figura 1.1 se muestra la configuración experimental del problema.

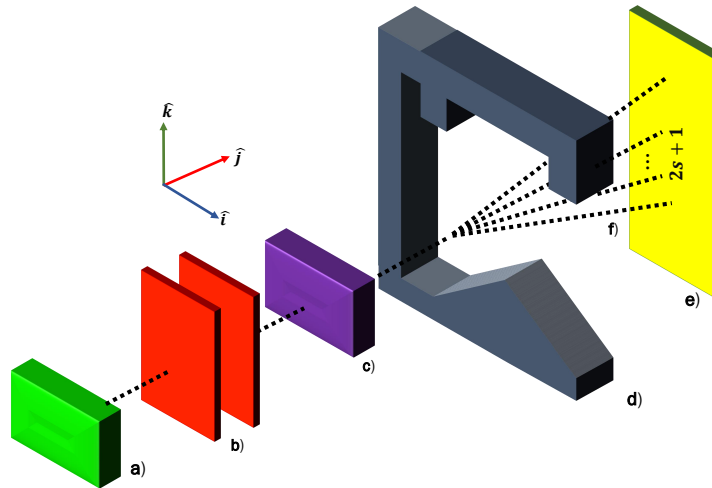


Figura 1.1: Configuración experimental del aparato de Stern-Gerlach del problema **a)** Fuente de partículas de espín arbitrario  $s$ . **b)** Pinholes colimadores. **c)** Sistema de polarización de espín (Utilizado en el caso cuando el sistema de partículas es polarizado) **d)** región de campo magnético. **e)** Pantalla detectora, donde  $2s + 1$  distribuciones de impacto deben aparecer. **f)** La línea punteada que describe la “trayectoria” de las partículas implica el hecho de que, de acuerdo a los postulados modernos de la mecánica cuántica, los observables no poseen valores predeterminados antes de una medición.

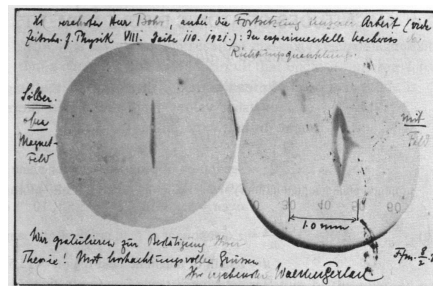


Figura 1.2: Tarjeta postal enviada a Niels Bohr por Walter Gerlach con fecha del 8 de Febrero de 1922. La placa del lado izquierdo muestra la distribución de impacto para el haz atómico de plata con la ausencia de campo magnético. La placa del lado derecho muestra la clara división del haz bajo la presencia del campo magnético; note las dos distribuciones de impacto. La traducción del mensaje es: “mi estimado Sr. Bohr adjunta se encuentra la continuación de nuestro trabajo [vide Zeitschr. f. Phys. 8, 110 (1921)]: La prueba experimental de la cuantización espacial. Le felicitamos por la confirmación de su teoría.”

### 1.3 Justificación y antecedentes

El experimento de Stern-Gerlach (Stern and Gerlach, 1922) ha sido una piedra angular para el desarrollo de la mecánica cuántica. Fue concebido como una prueba para la birrefringencia de gas hidrógeno en un campo magnético (Friedrich and Herschbach, 1998), (Herschbach, 2001) y como una prueba decisiva entre la teoría clásica de Larmor y la antigua teoría cuántica de Sommerfeld-Debye (Weinert, 1995). El experimento constituye la primera prueba experimental para la teoría cuántica primitiva, que, en primera instancia, constituía solamente un conjunto de postulados de carácter *ad hoc*. El experimento midió por vez primera la propiedad cuantizada de un átomo (Schmidt-Böcking, Horst et al., 2016): el momento angular magnético (que hoy en día es de común saber que es proporcional al espín), el cual, es un factor elemental para explicar la estabilidad atómica, i.e. de la materia, por lo tanto, proveyó una base firme para que en 1926 fuera sustentado el concepto de espín propuesto por Uhlenbeck y Goudsmith (Uhlenbeck and Goudsmit, 1926)<sup>4</sup> La interpretación en términos del espín para la fenomenología física dentro del aparato llegó en 1927 cuando Phipps y Taylor publicaron un artículo donde se estudiaba el momento magnético de átomos de hidrógeno en una configuración experimental similar a la del aparato de Stern-Gerlach (Phipps and Taylor, 1927). Así mismo, el espín es un concepto fundamental que ha jugado un rol crucial en el avance de la mecánica cuántica moderna, dando lugar a descubrimientos como la ecuación que describe a partículas de espín 1/2 (Dirac, 1928) (que a su vez dio pie al descubrimiento de la antimateria) o fenómenos como el Corrimiento Lamb (Lamb and Retherford, 1947) y el incremento anómalo en el momento magnético del electrón, los cuales fueron elementos clave para el desarrollo de la electrodinámica cuántica.

El experimento de Stern-Gerlach ha sido un referente para el estudio del proceso cuántico de medición (vea, por ejemplo: Reddy et al. (2016) y Hannout et al. (1998)); el colapso de la función de onda que representa al sistema físico de los átomos en el campo magnético del aparato ha sido un tema de discusión desde hace varios años (vea, por ejemplo: Patil (1998), Benítez et al. (2017b) Benítez et al. (2017a) y Devereux (2015)); la búsqueda para entender porque las propiedades cuánticas no son observadas en el mundo macroscópico y explicar el proceso cuántico de medición, dio nacimiento al concepto de decoherencia, cuyos inicios se remontan a inicios de 1970, con el trabajo de Zeh (Zeh, 1970) y a principios de 1980 con el trabajo de Zurek, (Zurek, 1981) (Zurek, 1982); en el contexto del experimento de Stern-Gerlach, la decoherencia ha sido utilizada para estudiar la reducción de la matriz de densidad que describe a los átomos en el aparato para el caso puro (vea, por ejemplo: Gomis and Pérez (2016), Gondran et al. (2012)).

Así mismo, es bien sabido que en la primera etapa del proceso cuántico de medición, abordado desde el experimento de Stern-Gerlach, se obtiene enredamiento cuántico entre los grados de libertad de los átomos. El enredamiento cuántico es una de las características concebidas como genuinamente cuánticas y es utilizado como un recurso para realizar tareas no clásicas, como el proceso de teleportación (Bennett et al., 1993) y la criptografía cuántica (Barenco, 1996). Desde la perspectiva del experimento de Stern-Gerlach, el enredamiento cuántico para el caso de un haz polarizado de partículas ha sido estudiado a través de la entropía de Von Neumann por Roston (Roston et al., 2005) y Harshman (Harshman, 2007). Recientemente Benítez et. al. han estudiado la

<sup>4</sup>Es interesante señalar que la primera mención de la cuantización del momento magnético de la materia fue hecha por Compton (Compton, 1921), aunque el concepto original de espín fue inicialmente concebido y propuesto a Pauli por Kronig un año antes de la publicación por Uhlenbeck y Goudsmith, sin embargo, Pauli rechazó fuertemente la idea; además, dicho concepto no fue bien recibido por Kramers y Heisenberg, a lo cual, Kronig abandonó la idea (Mehra and Rechenberg, 1982).



dinámica temporal típica de átomos con espín  $s = 1/2$  en el campo magnético del aparato, a través de un método totalmente equivalente a resolver la ecuación de Schrödinger: el método del operador de evolución (Benítez et al., 2017b) (Benítez et al., 2017a); estos autores han caracterizado los grados internos de libertad de dos maneras distintas: **a)** Una mezcla estadística de estados y **b)** una superposición de estados (el caso puro), obteniendo en ambos casos una evolución temporal que presenta un enredamiento cuántico entre los grados de libertad del sistema.

El presente trabajo de grado consiste en una generalización del trabajo publicado por Benítez et. al (Benítez et al., 2017b), (Benítez et al., 2017a), para dinámicas temporales en el campo magnético del experimento de Stern-Gerlach para partículas con espines arbitrarios, es decir,  $s = n/2$ ,  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ , empleando la misma metodología matemática que la utilizada por los ya mencionados autores; además, dada la naturaleza general del trabajo, se deriva una expresión general para la matriz de densidad reducida que caracteriza los grados internos de libertad del sistema y a partir de la cual es posible calcular la cantidad de enredamiento cuántico, en función del tiempo, para un espín específico cualquiera, utilizando la entropía de Von Neumann.

El experimento de Stern-Gerlach, a casi cien años de su realización, se ha caracterizado por sobrevivir a las cuatro etapas de desarrollo de la mecánica cuántica <sup>5</sup>, arrojando a través de cada una de ellas conocimiento relevante y significativo; la presente contribución pretende arrojar un ínfimo rayo de luz al misterioso significado (cualquiera que sea) de la mecánica cuántica, pues, como Bernstein afirmó: "... *all of quantum mechanics is summarized in the Stern-Gerlach experiments at least all of quantum mechanics that is really mysterious*" (Bernstein, 2010).

## 1.4 Metodología

El proceso de solución al problema planteado en la sección 1.2 se dará mediante la aplicación del método que ha caracterizado a las ciencias exactas: el método científico. Debido al carácter teórico del problema, en el desarrollo de este trabajo se hará uso de las herramientas cuantitativas modernas de la mecánica cuántica (Vea: Paris (2012)). La evolución del sistema cuántico de las partículas se obtendrá a partir de la aplicación del operador de evolución  $\exp[-i\mathbf{H}t/\hbar]$  a un estado cuántico inicial generalizado (dicha generalización corresponde a la arbitrariedad del espín, como se mostrará en las secciones 3.1.2 y 3.1.3, esta arbitrariedad permite obtener una expresión a partir de la cual puede obtenerse la evolución temporal para el estado cuántico de partículas con cualquier espín) que se define sobre un espacio de Hilbert que resulta del producto tensorial entre los espacios de Hilbert respectivos a los grados de libertad del sistema, siendo en este caso dos:

1. **Grados de libertad internos.** Referentes al espín de las partículas y que para cubrir las dos situaciones planteadas en la sección 1.2, su representación será dada a través de: **i)** una mezcla estadística de eigenestados del operador de espín  $\mathbf{S}_z$  (correspondiente a la situación 2 de la sección 1.2) y **ii)** una superposición de dichos estados (es decir, el caso puro, correspondiente a la situación 1 de la sección 1.2).
2. **Grados de libertad externos.** cuya función es describir la posición de las partículas, su base ortonormal es de carácter continuo y su representación será dada mediante un paquete de ondas Gausiano.

<sup>5</sup>El desarrollo histórico de la mecánica cuántica puede dividirse en cuatro etapas temporales (Carr and McKagan, 2009).

El Hamiltoniano  $\mathbf{H}$  del operador de evolución es definido como la suma de los operadores que intervienen en la energía total del sistema: la energía de propagación del haz de partículas (la cual, en este caso corresponde a la de una partícula libre) y la energía que surge de la interacción entre el espín de las partículas con el campo magnético del aparato. Para la correcta aplicación del operador de evolución, se seguirá el proceso de factorización mostrado por García y Arévalo (García and Arévalo, 2007). Debido a la naturaleza del Hamiltoniano, se espera que la aplicación de los operadores exponenciales resultantes del proceso de factorización tenga efecto en los grados externos de libertad del sistema (desplazamientos temporales al paquete de ondas Gaussiano), por lo tanto, se hará uso del método expuesto por Blinder (Blinder, 1968) para la aplicación de tales operadores.

Por cumplir características ideales mencionadas por Bennett (Bennett et al., 1996), la entropía de Von Neumann es utilizada para cuantificar el enredamiento  $E$  entre los grados de libertad para el caso puro, correspondiente a la situación 2 de la sección 1.2. Para esto será necesario tomar el producto externo  $|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle\langle\psi(\mathbf{r}, t)|$  del estado que describe la evolución temporal del sistema e integrar sobre las variables espaciales, dada la naturaleza matemática del paquete de ondas que describe los grados externos de libertad, la integral será del tipo Gaussiano y las variables espaciales serán eliminadas, así, el resultado será el operador de densidad  $\rho^s$  reducido que describe los grados internos de libertad del sistema; la representación matricial de dicho operador será dada a través de la base de eigenestados del operador  $\mathbf{S}_z$ ; los eigenvalores de  $\rho^s$  son utilizados, al igual que Roston et. al. y Harshman (Roston et al., 2005) (Harshman, 2007) en la definición matemática de la entropía de Von Neumann con la finalidad de medir el enredamiento cuántico entre los grados de libertad del sistema. Dichos eigenvalores son obtenidos a través de la solución a los polinomios característicos de las matrices  $\rho^s$ , para esto se hace uso del software *Wolfram Mathematica 10.4*.

# 2

## Marco teórico

“La duda no es una condición placentera pero la certeza es absurda”  
-Voltaire

### 2.1 Los postulados de la mecánica cuántica

#### 2.1.1 Introducción

En mecánica clásica cualquier sistema físico puede ser determinado *exactamente* a cualquier tiempo  $t$  mediante el conocimiento de la posición  $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$  y el momento  $m(d\mathbf{R}(\mathbf{r}, t)/dt)$  de cada uno de los puntos que lo conforman; sin embargo, a la luz del formalismo de la mecánica cuántica, la descripción exacta (probabilísticamente hablando) de un sistema no es posible; para entender esto, en esta sección se introducen los postulados sobre los cuales la descripción cuántica de un sistema físico es fundamentada. Los libros de texto a menudo introducen cuatro, cinco, o más postulados, sin embargo, en este trabajo se presenta una definición compacta de acuerdo a los objetivos de este trabajo; debe hacerse hincapié en que los postulados aquí expuestos hacen referencia a un sistema físico aislado, es decir, que no interactúa con su medio ambiente; también, se hace referencia a espectros discretos de eigenvalores no degenerados, sin embargo la extensión a espectros degenerados no es complicada (vea (Cohen-Tannoudji et al., 1977, Pág. 217)).

#### 2.1.2 Postulados esenciales

##### Primer postulado

**El estado de un sistema físico.** Un sistema físico es representado a un tiempo  $t_0$  por un vector  $|\psi(t_0)\rangle$  normalizado (es decir  $\langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle = 1$ ) contenido en un espacio vectorial complejo con producto interno,  $\mathcal{H}$ , denominado espacio de Hilbert. Sistemas compuestos por más de un objeto físico o compuestos por  $k$  diferentes grados de libertad, son definidos en espacios de Hilbert dados por el producto tensorial  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \cdots \mathcal{H}_k$ . Es necesario que  $|\psi(t_0)\rangle$  posea ciertas propiedades de regularidad matemática como, continuidad, infinita diferenciabilidad, definición en todo lugar del espacio, normalización, etc. (Cohen-Tannoudji et al., 1977, pág. 94-95); entonces, no todos los vectores contenidos en un espacio de Hilbert pueden representar a un sistema físico, un claro ejemplo es dado por Harshman (Harshman (2007)), quien define los  $d$ -dimensionales grados externos de libertad de un haz de partículas libres con espín, en un subespacio nuclear de un espacio de Hilbert, dicho subespacio siendo conformado por funciones cuadrado integrables de Lebesgue  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Por el principio de superposición, el estado  $|\psi(t_0)\rangle$  puede ser expresado como una combinación lineal

## 2.1 Los postulados de la mecánica cuántica

(normalizada) de vectores  $|\psi_i(t_0)\rangle$  que son solución a la ecuación de Schrödinger

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_i c_i |\psi_i(t_0)\rangle, \quad c_i \in \mathbb{C}; \quad (2.1.1)$$

alternativamente a la representación en términos de un vector estado, un sistema físico puede ser representado al tiempo  $t_0$  de una forma más general a través de un operador de densidad  $\rho$  dado por

$$\rho = |\psi(t_0)\rangle\langle\psi(t_0)|. \quad (2.1.2)$$

Las representaciones en el lenguaje del vector estado o del operador de densidad son equivalentes y la conveniencia de su uso depende del problema a tratar; como se verá en la sección 2.2.3, el uso del operador de densidad provee un marco matemático útil para representar estados cuánticos que no son completamente conocidos.

### Segundo postulado

**La medición cuántica.** Cantidades observables son definidas por operadores autoadjuntos. La condición de autoadjunto para un operador  $\mathbf{A}$  está directamente relacionada con el postulado anterior; para que  $\mathbf{A}$  sea autoadjunto es requerido que un conjunto de vectores  $\phi_i$ , sobre las cuales  $\mathbf{A}$  actúa, cumplan con las condiciones de regularidad mencionadas en el primer postulado, en otras palabras, la característica de autoadjunto para un operador no está definida para todo el conjunto de vectores contenido en un espacio de Hilbert, más bien, tal condición es válida para subespacios conformados por vectores que están contenidos en el dominio del operador (Araujo et al. (2004)). Considere un par de vectores  $\phi_i$  y  $\phi_{i'}$  pertenecientes un subespacio de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , se dice que un operador  $\mathbf{A}$ , está definido como autoadjunto para el conjunto de vectores contenido en si

$$(\mathbf{A}\phi_i, \phi_{i'}) = (\phi_i, \mathbf{A}\phi_{i'}); \quad (2.1.3)$$

los operadores autoadjuntos satisfacen  $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$  y admiten una descomposición espectral en términos de sus eigenvalores reales  $a$  y los proyectores  $\mathbf{P}_a = |a\rangle\langle a|$

$$\mathbf{A} = \sum_a a \mathbf{P}_a; \quad (2.1.4)$$

Los estados  $|a\rangle$  satisfacen la relación de ortonormalización  $\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$  y la relación de completéz  $\sum_i |a_i\rangle\langle a_i| = \mathbb{I}$ ; por lo tanto el conjunto  $\{|a\rangle\}$ , conocido como eigenvectores de  $\mathbf{A}$ , forma una base ortonormal en un espacio de Hilbert.

la probabilidad  $P(a)$  de obtener el valor  $a$ , tras una medición del observable  $\mathbf{A}$  sobre el estado físico, está dada en los lenguajes del vector estado y el operador de densidad, respectivamente como

$$P(a) = |\langle a | \psi \rangle|^2 = \langle a | \mathbf{P}_a | \psi \rangle, \quad (2.1.5)$$

$$P(a) = \text{Tr} [\rho \mathbf{P}_a]. \quad (2.1.6)$$

El valor esperado de  $\mathbf{A}$  en ambas representaciones es

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle, \quad (2.1.7)$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \text{Tr} \{ \rho \mathbf{A} \}. \quad (2.1.8)$$

El estado físico cambia después de una medición y es proyectado en el eigenspacio del observable; esto es, para el vector estado y el operador de densidad respectivamente

$$|\psi'\rangle = \frac{\mathbf{P}_a |\psi\rangle}{\sqrt{P(a)}}, \quad (2.1.9)$$

$$\rho' = \frac{\mathbf{P}_a \rho \mathbf{P}_a}{P(a)}. \quad (2.1.10)$$

### Tercer postulado

**La dinámica de un sistema cuántico.** La evolución dinámica de un sistema cuántico cerrado es descrita por operadores unitarios. Si  $|\psi_0\rangle$  es el estado que representa a un sistema físico al tiempo  $t_0$ , entonces el estado del sistema al tiempo  $t$  es dado por

$$|\psi_t\rangle = \mathbf{U}(t, t_0) |\psi_0\rangle; \quad (2.1.11)$$

y la evolución al tiempo  $t$  para la representación a través del operador de densidad es

$$\rho(t) = \mathbf{U}(t, t_0) \rho(t_0) \mathbf{U}^\dagger(t, t_0); \quad (2.1.12)$$

el operador unitario satisface  $\mathbf{U}(t, t_0) \mathbf{U}^\dagger(t, t_0) = \mathbb{I}$  (siendo  $\mathbb{I}$  la matriz identidad). Sustituya (2.1.11) en la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}(t, t_0) |\psi_0\rangle = \mathbf{H}(t) \mathbf{U}(t, t_0) |\psi_0\rangle, \quad (2.1.13)$$

Por lo tanto

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}(t, t_0) = \mathbf{H}(t) \mathbf{U}(t, t_0); \quad (2.1.14)$$

en este trabajo se asume un Hamiltoniano  $\mathbf{H}$  independiente del tiempo, por lo tanto, la ecuación diferencial (2.1.14) es trivial de resolver, la solución es

$$\mathbf{U}(t, t_0) = \exp[-i\mathbf{H} \times (t - t_0)/\hbar]. \quad (2.1.15)$$

El cuál es el operador de evolución utilizado en este trabajo para obtener la dinámica temporal de las partículas dentro del aparato del experimento de Stern-Gerlach. Entonces la evolución de un sistema cuántico cerrado es descrita a través de una transformación unitaria.

## 2.2 El operador de densidad

### 2.2.1 Introducción

**E**n esta sección se muestra el tratamiento base de un concepto cuántico elemental: el operador de densidad. El operador de densidad constituye una formulación alternativa al lenguaje de los vectores estado para la representación de la mecánica cuántica. Un argumento a favor de la descripción a través de un operador de densidad es que, en la práctica, el estado cuántico de un sistema físico no es perfectamente conocido; para ilustrar esto, considere una fuente, como un horno a una temperatura  $T$  que emite un haz de partículas libres con espín y asuma que desea dar una descripción cuántica de los grados internos de libertad (su espín), la única información que se posee sobre el espín es: (i) tiene una dirección arbitraria y (ii) todas las direcciones son igualmente probables; por lo tanto, sólo es posible realizar inferencias estadísticas sobre el estado que describe este sistema. Otro ejemplo es el de una fuente no polarizadora de luz natural; la polarización de

los fotones emitidos es arbitraria y entonces el estado cuántico que describe tal polarización debe tener un carácter estadístico. Note, entonces, que la naturaleza crea realidades físicas cuyo carácter presenta una incertidumbre matemática inherente (aunada a las incertidumbres relacionadas con la interpretación probabilística de la función de onda y al proceso cuántico de medición) y ante tal hecho es natural apelar a la teoría de la probabilidad. Por lo anterior, es necesario introducir una forma adecuada de representar estadísticamente un sistema cuántico que no es perfectamente conocido, tal concepto es conocido como *mezcla estadística de estados* y su representación matemática hace uso del operador de densidad. Además, en esta sección se muestra que el operador de densidad también es aplicable a un sistema físico que está dado por un *estado puro*, el cual, es un caso particular del concepto de mezcla estadística de estados.

### 2.2.2 Propiedades del operador de densidad

Por causa del primer postulado de la mecánica cuántica (vea la sección 2.1.2) un sistema físico puede representarse a través de un operador de densidad  $\rho$ , el cual es un operador lineal cuya representación matricial en una base ortonormal ( $\{|u_n\rangle\} \in \mathcal{H}$ ) es conocida como *matriz de densidad*; sus elementos matriciales son dados por

$$\rho_{pn} = \langle u_p | \rho | u_n \rangle; \quad (2.2.1)$$

la suma de los elementos de la diagonal principal de  $\rho$  es igual a 1 (condición de normalización)

$$\text{Tr} \{\rho\} = \sum_n \rho_{nn} = 1; \quad (2.2.2)$$

$\rho$  es un operador positivo, es decir

$$\langle u_p | \rho | u_n \rangle \geq 0; \quad (2.2.3)$$

como consecuencia de (2.2.2) y (2.2.3),  $\rho$  tiene una descomposición espectral en términos de sus eigenvalores  $k$  y sus proyectores  $\mathbf{P}_k = |k\rangle\langle k|$

$$\rho = \sum_k k |k\rangle\langle k|; \quad (2.2.4)$$

Además de las ecuaciones (2.1.11) y (2.2.17) el operador de densidad obedece una evolución temporal equivalente, que es deducida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho &= \frac{\partial}{\partial t} (|\psi\rangle\langle\psi|) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle \right) \langle\psi| + |\psi\rangle \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi| \right), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

utilice la ecuación de Schrödinger  $(\partial/\partial t) |\psi\rangle = (1/i\hbar) \mathbf{H} |\psi\rangle$  en (2.2.5)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \left( \frac{1}{i\hbar} \mathbf{H} |\psi\rangle \right) \langle\psi| + |\psi\rangle \left( \frac{1}{-i\hbar} \langle\psi| \mathbf{H} \right), \quad (2.2.6)$$

entonces el operador de densidad obedece la ecuación de evolución

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [\mathbf{H}, \rho]. \quad (2.2.7)$$

Tome la definición (2.1.2) para el operador de densidad y calcule  $\rho^\dagger$ , es claro que

$$\rho = \rho^\dagger. \quad (2.2.8)$$

Entonces, el operador de densidad es hermítico.

### 2.2.3 Mezcla estadística de estados

En los ejemplos presentados en la introducción de esta sección, el estado cuántico del sistema no está totalmente determinado y la descripción matemática debe ser probabilística, es decir, existe una probabilidad  $p_1$  de que el sistema se encuentre en el estado  $|\psi_1\rangle$ , una probabilidad  $p_2$  de estar en el estado  $|\psi_2\rangle$  y una probabilidad  $p_k$  de estar en el estado  $|\psi_k\rangle$ , donde evidentemente

$$\sum_k p_k = 1, \quad (2.2.9)$$

se dice que este sistema físico es representable a través de una mezcla estadística de estados de los kets  $|\psi_k\rangle$  asociados a cada sistema con una probabilidad  $p_k$ . En el formalismo, los estados  $|\psi_k\rangle$  no necesariamente deben ser ortogonales; sin embargo, en el desarrollo de este trabajo se hace referencia sólo a mezclas estadísticas dadas por estados que satisfacen tal condición. Una mezcla estadística de estados debe ser representada a través del operador de densidad del sistema, de la forma

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \sum_k p_k \rho_k, \quad (2.2.10)$$

siendo  $\rho_k$  el operador de densidad asociado a cada estado  $|\psi_k\rangle$ . La expresión anterior no debe confundirse con un sistema dado por una superposición de estados

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\psi_k\rangle, \quad (2.2.11)$$

debido a la ecuación (2.1.2), también puede ser asociado un operador de densidad al estado (2.2.11), sin embargo, éste será distinto al que es dado en (2.2.10); para ilustrar esto, considere el operador de densidad del estado (2.2.11)

$$\rho = \sum_k \sum_{k'} c_k c_{k'}^* |\psi_k\rangle\langle\psi_{k'}| = \sum_k |c_k|^2 |\psi_k\rangle\langle\psi_k| + \sum_{k \neq k'} c_k c_{k'}^* |\psi_k\rangle\langle\psi_{k'}|, \quad (2.2.12)$$

comparando (2.2.10) con (2.2.12) es claro que el operador de densidad asociado a una superposición de estados es distinto al que representa a una mezcla estadística. Note que si el segundo término del lado derecho de (2.2.12) fuese nulo, entonces se recupera la ecuación (2.2.10) (tomando  $p_k = |c_k|^2$ ); es en este factor en el que radica la diferencia entre una mezcla estadística y una superposición de estados, vea (Cohen-Tannoudji et al., 1977, Pág. 253-254); tal término muestra los efectos de interferencia entre las distintas amplitudes de probabilidad  $c_k$  asociadas a cada estado  $|\psi_k\rangle$ . Tales efectos de interferencia son importantes a la hora de entender el proceso cuántico de medición (Deepak (1998)). Por otro lado, Harshman ha mostrado que para el enredamiento cuántico surgido de la interacción de un haz de partículas libres con espín y un campo magnético inhomogéneo, los efectos de interferencia están directamente relacionados con la cantidad de entropía de enredamiento del sistema (Harshman (2007)). Básicamente, una mezcla estadística de estados corresponde a una asignación de probabilidades a los posibles operadores de densidad  $\rho$  asociados a los estados cuánticos en los que puede encontrarse un sistema. Bajo esta condición estadística, ¿cómo calcular las probabilidades  $P(a)$  para los posibles eigenvalores, el valor esperado de un observable  $\mathbf{A}$ , el operador de densidad postmedición y la evolución temporal?; la respuesta es que las ecuaciones (2.1.6), (2.1.8), (2.1.10), (2.1.12) y (2.2.7) siguen cumpliéndose para el operador de densidad que representa a una mezcla estadística, simplemente sustituya (2.2.10) en dichas ecuaciones, entonces se obtiene

$$P(a) = \sum_k p_k \text{Tr} \{ \rho_k \mathbf{P}_a \}, \quad (2.2.13)$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \sum_k p_k \text{Tr} \{ \rho_k \mathbf{A} \}, \quad (2.2.14)$$

$$\rho' = \sum_k p_k \frac{\mathbf{P}_a \rho_k \mathbf{P}_a}{P(a)}, \quad (2.2.15)$$

$$i\hbar \sum_k p_k \frac{\partial}{\partial t} \rho_k = \sum_k p_k [\mathbf{H}, \rho_k], \quad (2.2.16)$$

$$\rho(t) = \sum_k p_k \mathbf{U}(t, t_0) \rho_k(t_0) \mathbf{U}^\dagger(t, t_0). \quad (2.2.17)$$

El operador de densidad (2.2.10) mantiene la propiedad de hermiticidad; para probar esto, tome su complejo conjugado  $\rho^\dagger$  y, puesto que las probabilidades  $p_k$  son reales y positivas, es claro que  $\rho^\dagger = \rho$ . Tome la traza de la mezcla estadística (2.2.10)

$$\text{Tr} \{ \rho \} = \sum_k p_k \text{Tr} \{ \rho_k \} = \sum_k p_k = 1, \quad (2.2.18)$$

donde se ha utilizado el hecho de que cada  $\rho_k$  satisface la ecuación (2.2.2), entonces, la mezcla estadística (2.2.10) satisface la condición de normalización para el operador de densidad. Además, note que de paso se ha demostrado la ecuación (2.2.9). La ecuación anterior muestra que los elementos diagonales  $p_{nm}$  de la matriz de densidad de una mezcla estadística son las distintas probabilidades  $p_k$ , y evidentemente  $p_k < 1$ , por lo tanto, tal matriz satisface

$$\rho^2 \neq \rho, \quad (2.2.19)$$

consecuentemente

$$\text{Tr} \{ \rho^2 \} \leq 1. \quad (2.2.20)$$

Las ecuaciones (2.2.19) y (2.2.20) son sólo válidas para mezclas estadísticas de estados. La matriz de densidad que describe estos sistemas es netamente diagonal, por lo que no existe interferencia entre amplitudes de probabilidad; en secciones posteriores se analizará, desde el punto de vista del experimento de Stern-Gerlach, que la reducción en la cantidad de elementos de interferencia entre amplitudes de probabilidad en la matriz de densidad reducida que describe los grados internos de libertad de las partículas dentro del aparato, resulta en un aumento de la entropía de Von Neumann (Harshman (2007)) y en consecuencia, la cantidad de enredamiento.

### 2.2.4 El caso puro

En el marco matemático para el caso puro, todas las probabilidades  $p_k$  que aparecen en las ecuaciones (2.2.13) a (2.2.17) son nulas excepto una, la cual, en efecto, es igual a uno; esto implica que todos los elementos físicos que conforman el sistema son caracterizados por un mismo estado cuántico y se tiene una total certeza de su composición. Un ejemplo para la preparación física de un estado puro es dado si en el detector del aparato de Stern-Gerlach original (el caso para  $s = 1/2$ ), es bloqueada solamente una de las dos posibles componentes para el haz atómico de plata, vea la Figura 2.1. Claramente cada uno de los átomos que conforman la parte no bloqueada del haz es un sistema físico cuyo estado cuántico es el mismo y ha sido determinado por la medición de la posición de las partículas que han sido bloqueadas por la pantalla detectora. Note que en el arreglo 2.1 el aparato está actuando como un polarizador de espín, además se ha denotado el haz mediante una línea punteada, esto representa el hecho de que antes de que los átomos alcancen la pantalla detectora, no se ha realizado medición sobre el sistema, por lo tanto, no es posible asignarle



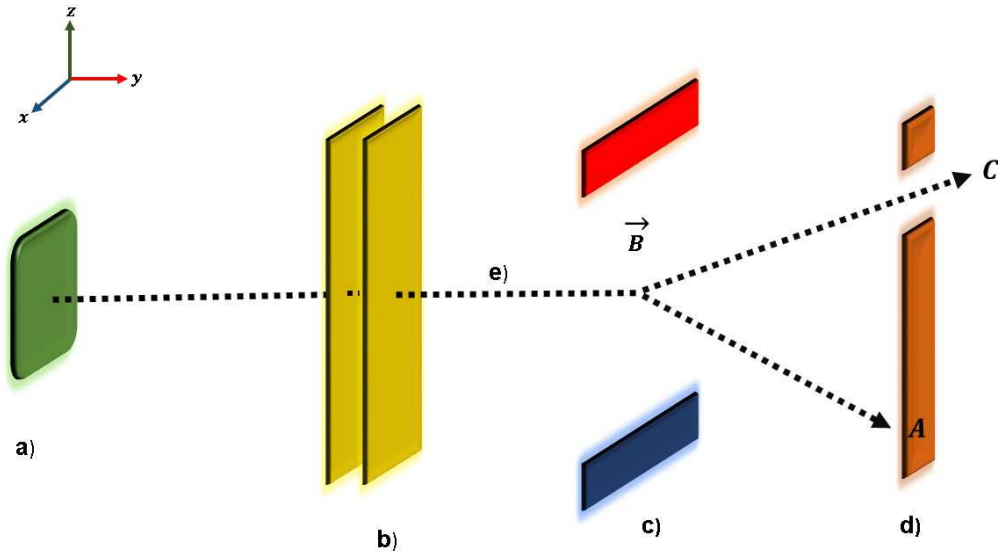


Figura 2.1: Aparato de Stern-Gerlach utilizado para fabricar estados puros. **a)** Horno emisor de átomos de plata. **b)** Pinholes seleccionadores. Su función es seleccionar a los átomos que viajen en la misma dirección. **c)** Región de campo magnético. Un campo magnético inhomogéneo es generado por un electroimán. **d)** Preparación de un estado puro. En el punto *A*, de la pantalla detectora (dispositivo de medición) es bloqueada una de las dos *posibles* componentes que puede adquirir el haz atómico de plata, mientras que un orificio en el punto *C*, permite la salida de la componente restante. **e)** La trayectoria punteada expresa el hecho de que antes de que se realice la medición en la pantalla detectora, el haz atómico no ha adquirido valor de algún observable.

observable alguna como trayectoria, velocidad, posición, etc. A diferencia de las ecuaciones (2.2.19) y (2.2.20), el operador de densidad  $\rho$  para el caso puro, satisface

$$\rho^2 = \rho, \quad (2.2.21)$$

$$\text{Tr} \{ \rho^2 \} = 1. \quad (2.2.22)$$

El caso puro describe la segunda situación planteada en la sección 1.2; en este caso el haz de partículas ha sido previamente polarizado mediante algún dispositivo previo a la entrada del campo magnético del aparato.

## 2.3 Factorización del operador de evolución

### 2.3.1 Introducción

La mecánica cuántica, a través de los años, ha mostrado ser una teoría exitosa, puesto que ha dado explicaciones a procesos naturales que han culminado en aplicaciones tecnológicas como la criptografía cuántica, el transistor, el láser, la tomografía cuántica, el teleporte cuántico, etc. Sin embargo, la especialización en algún campo específico de la disciplina requiere años de duro estudio para el desarrollo de herramientas y habilidades que permitan la creación de ciencia relevante en el área. Precisamente una de las tareas cognitivas fundamentales para aquellos que son novicios en el

## 2.3 Factorización del operador de evolución

estudio de la materia, es el entendimiento de las técnicas de solución a la fundamental ecuación de Schrödinger (García and Arévalo (2007))

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \mathbf{H} \Psi(x, t); \quad (2.3.1)$$

en la literatura pedagógica la técnica común para resolver la ecuación anterior es encontrar los eigenvalores y las eigenfunciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\mathbf{H} \psi_n(x) = E_n \psi_n(x), \quad (2.3.2)$$

y construir la solución para la ecuación (2.3.1), a todo tiempo  $t$ , mediante la superposición de las eigenfunciones  $\psi_n(x)$  del Hamiltoniano multiplicadas por la solución  $\phi(t) = \exp(-iE_n t/\hbar)$  de la parte temporal de la ecuación (2.3.1)

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(-iE_n t/\hbar) \psi_n(x), \quad (2.3.3)$$

donde los coeficientes  $c_n = \int \Psi(x, 0) \psi_n(x) dx$ , siendo  $\Psi(x, 0)$  el estado inicial del sistema bajo consideración; esta técnica es considerada por los especialistas como el *método de los eigenestados* (García and Arévalo, 2007). Una manera alternativa para dar solución a la ecuación (2.3.1) es a través del *método del operador de evolución*. Para ilustrar este método, asuma un Hamiltoniano independiente del tiempo<sup>1</sup>, entonces, resuelva la ecuación (2.3.1) mediante la técnica de separación de variables

$$\int \frac{d\Psi(x, t)}{\Psi(x, t)} = -\frac{i}{\hbar} \mathbf{H} \int dt, \quad (2.3.4)$$

con la solución

$$\Psi(x, t) = \exp\left(-\frac{it}{\hbar} \mathbf{H}\right) \psi(x, 0), \quad (2.3.5)$$

siendo  $\psi(x, 0)$  el estado inicial del sistema físico. La ecuación anterior implica la aplicación de un operador exponencial (cuya potencia es un término proporcional al operador de Hamilton del sistema) al estado inicial que representa al sistema. Este método es equivalente a dar solución a la ecuación de Schrödinger; para probar este argumento, tome  $\psi(x, 0) = \sum_n c_n \psi_n(x)$ , es decir, una superposición de eigenfunciones  $\psi_n(x)$  del operador  $\mathbf{H}$  (esto es válido puesto que el conjunto  $\psi_n(x)$  es completo, vea (Griyths, 2016, Pág. 28)) e inserte en (2.3.5)

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \sum_n c_n \exp\left(-\frac{it}{\hbar} \mathbf{H}\right) \psi_n(x) \\ &= \sum_n \sum_k c_n \frac{(-it/\hbar)^k}{k!} \mathbf{H}^k \psi_n(x) \\ &= \sum_n \sum_k c_n \frac{(-it/\hbar)^k}{k!} E_n^k \psi_n(x) \\ &= \sum_n c_n \exp\left(-\frac{it}{\hbar} E_n\right) \psi_n(x), \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

donde se ha hecho uso del desarrollo en serie de Taylor del exponencial:  $e^\gamma = \sum_k \gamma^k/k!$ , así como la relación  $\mathbf{H}^k \psi_n(x) = E_n^k \psi_n(x)$ , fácil de obtener mediante recurrencia a partir de (2.3.2);

<sup>1</sup>para la solución al problema fundamental planteado en este trabajo, se considera un Hamiltoniano que no presenta dependencia temporal.

y note que se ha recuperado la ecuación (2.3.3), y queda finalizada la prueba. La dificultad del método de factorización del operador de evolución estriba en que, por lo general, el Hamiltoniano del sistema es una suma de dos o más operadores y la factorización no es trivial, depende de la regla de conmutación entre los operadores que aparecen en  $\mathbf{H}$ . En este trabajo se desarrolla dicha factorización para el Hamiltoniano de partículas eléctricamente neutras, de espín arbitrario y que presentan un movimiento libre a través del campo magnético del aparato de Stern-Gerlach.

### 2.3.2 El método de factorización

El campo magnético que genera el magneto del aparato de Stern-Gerlach es de la forma

$$\mathbf{B}(x, z) = -\alpha x \mathbf{i} + (B_0 + \alpha z) \mathbf{k}, \quad (2.3.7)$$

con  $B_0$  y  $\alpha$  constantes reales; en la Figura 2.2 se muestran diversos cortes planos del campo vectorial que genera la expresión (2.3.7) utilizando varios valores de  $B_0$  y  $\alpha$ . Cuando las partículas entran a la región de campo magnético del aparato, el Hamiltoniano del sistema es de la forma

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \nu_s (\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}), \quad (2.3.8)$$

con  $\nu_s = ge/2m$ ; siendo  $g$ ,  $m$  y  $e$ , el factor de Landé, la masa y la carga del electrón respectivamente. El primer término de la expresión anterior hace referencia a la energía cinética de las partículas, siendo  $\mathbf{P}$  el operador de momento en las tres direcciones espaciales; el segundo término hace referencia a la energía potencial resultante de la interacción entre el momento angular de espín y el campo magnético  $\mathbf{B}(x, z)$ . Un aspecto importante para la metodología es que, cuando las partículas entran a la región del campo magnético del aparato, su espín comienza a realizar un giro de precesión de alta frecuencia en torno a la dirección  $\hat{\mathbf{i}}$ , y en consecuencia el valor promedio  $\langle \mathbf{S}_x \rangle$  es cero, este hecho ha sido verificado de forma teórica por Hsu (Hsu et al. (2011)); por lo tanto, la componente  $x$  de  $\mathbf{S}$  puede ser descartada y el Hamiltoniano (2.3.8) es de la forma

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}^2/2m + \nu_s \mathbf{S}_z \cdot \mathbf{B}_z, \quad (2.3.9)$$

donde  $\mathbf{S}_z$  y  $\mathbf{B}_z$  son las componentes de espín y campo magnético en la dirección  $z$  respectivamente. Con el Hamiltoniano (2.3.9) y la definición  $\mathbf{U}(t) = \exp[-it\mathbf{H}/\hbar]$ , el operador de evolución por factorizar será

$$\exp \left[ -\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}^2 - \frac{it\nu_s}{\hbar} \mathbf{S}_z \mathbf{B}_z \right] = \exp \left[ -\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}_x^2 \right] \exp \left[ -\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}_y^2 \right] \exp \left[ -\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}_z^2 - \frac{it\nu_s}{\hbar} \mathbf{S}_z \mathbf{B}_z \right], \quad (2.3.10)$$

donde se ha utilizado el hecho de que los operadores  $\mathbf{P}_x$  y  $\mathbf{P}_y$  conmutan entre sí y con el término  $(it\nu_s/\hbar)\mathbf{S}_z\mathbf{B}_z$ , entonces, el proceso se reduce a factorizar la parte en  $z$ ; para ello tome  $\mathbf{A} = (-it/2m\hbar)\mathbf{P}_z^2$  y  $\mathbf{D} = (-it\nu_s/\hbar)\mathbf{S}_z\mathbf{B}_z$  y sean las reglas de conmutación entre esos operadores

$$[\mathbf{A}, \mathbf{D}] = \frac{it^2\nu_s\alpha}{m\hbar} \mathbf{P}_z \mathbf{S}_z = \mathbf{C}, \quad (2.3.11)$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{C}] = 0, \quad (2.3.12)$$

$$[\mathbf{D}, \mathbf{C}] = \frac{it^3\nu_s^2\alpha^2}{m\hbar} \mathbf{S}_z^2 = \mathbf{k}; \quad (2.3.13)$$

en este trabajo se prescinde de la prueba para tales conmutadores, sin embargo, no es difícil probarlos a través de la definición matemática para un conmutador y una función de prueba  $f(z)$ .

## 2.3 Factorización del operador de evolución

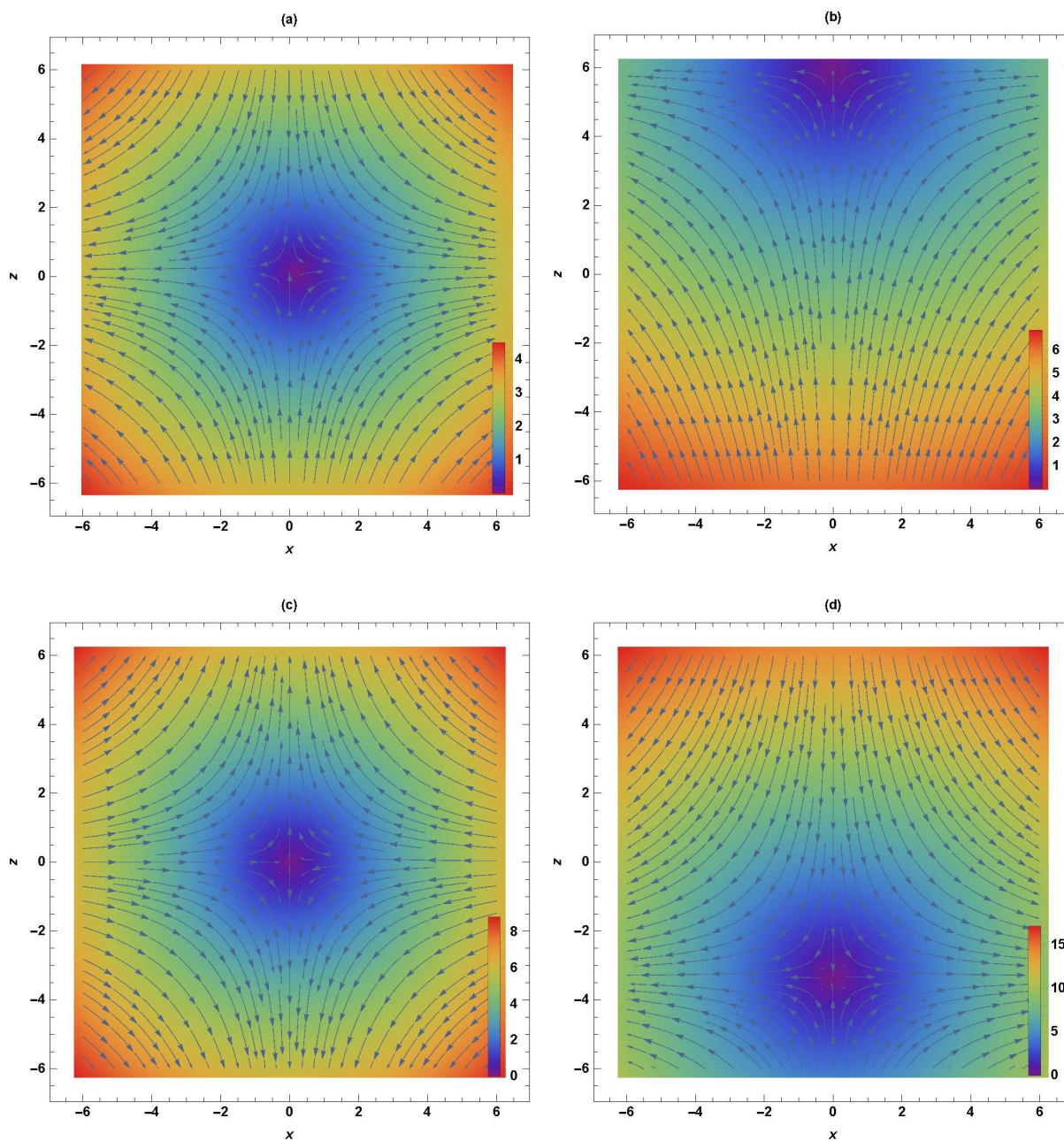


Figura 2.2: Gráficas del campo magnético  $\mathbf{B} = (-\alpha x, 0, B_0 + \alpha z)$  para diferentes valores de las constantes  $B_0$  y  $\alpha$ . (a)  $B_0 = 0.10$  [T],  $\alpha = -0.50$  [T/m], (b)  $B_0 = 3.00$  [T],  $\alpha = -0.50$  [T/m], (c)  $B_0 = 0.00$  [T],  $\alpha = 1.00$  [T/m], (d)  $B_0 = -5.00$  [T],  $\alpha = -1.50$  [T/m].

Tome un parámetro  $\xi^2$  y defina una función  $F(\xi)$  en términos de la parte a factorizar del operador de evolución

$$F(\xi) = e^{\xi(\mathbf{A}+\mathbf{D})}, \quad (2.3.14)$$

y sea su factorización de la forma<sup>3</sup>

$$F(\xi) = e^{f_0(\xi)} e^{f_1(\xi)\mathbf{D}} e^{f_2(\xi)\mathbf{C}} e^{f_3(\xi)\mathbf{A}}, \quad (2.3.15)$$

tome las derivadas de las ecuaciones (2.3.14) y (2.3.15)

$$F'(\xi) = (\mathbf{A} + \mathbf{D})F(\xi), \quad (2.3.16)$$

$$\begin{aligned} F'(\xi) = & \frac{df_0(\xi)}{d\xi} e^{f_0(\xi)} e^{f_1(\xi)\mathbf{D}} e^{f_2(\xi)\mathbf{C}} e^{f_3(\xi)\mathbf{A}} + \frac{df_1(\xi)}{d\xi} \mathbf{D} e^{f_0(\xi)} e^{f_1(\xi)\mathbf{D}} e^{f_2(\xi)\mathbf{C}} e^{f_3(\xi)\mathbf{A}} \\ & + \frac{df_2(\xi)}{d\xi} e^{f_0(\xi)} e^{f_1(\xi)\mathbf{D}} \mathbf{C} e^{f_2(\xi)\mathbf{C}} e^{f_3(\xi)\mathbf{A}} + \frac{df_3(\xi)}{d\xi} e^{f_0(\xi)} e^{f_1(\xi)\mathbf{D}} e^{f_2(\xi)\mathbf{C}} \mathbf{A} e^{f_3(\xi)\mathbf{A}}, \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

donde el motivo del color azul en los términos tercero y cuarto del lado derecho de la expresión anterior se hará aparente más adelante. El objetivo es factorizar la función  $F(\xi)$  del lado derecho de (2.3.17) e igualar con (2.3.16) para obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales que permitan determinar el valor de las funciones  $f_i(\xi)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), posteriormente sustituirlas en (2.3.15) y la factorización de la parte  $z$  del operador de evolución quedará completa. Note, sin embargo, que los operadores  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{A}$  del tercer y cuarto término de (2.3.17) impiden lo anterior. Para solucionar esto considere el hecho de que para operadores autoadjuntos se cumple que (García and Arévalo (2007))

$$e^{f_i(\xi)\mathbf{M}} \mathbf{N} = \left( e^{f_i(\xi)\mathbf{M}} \mathbf{N} e^{-f_i(\xi)\mathbf{M}} \right) e^{f_i(\xi)\mathbf{M}}, \quad (2.3.18)$$

pero (Louisell, 1990, Pág. 136-137)

$$\left( e^{f_i(\xi)\mathbf{M}} \mathbf{N} e^{-f_i(\xi)\mathbf{M}} \right) = \mathbf{N} + f_i(\xi) [\mathbf{M}, \mathbf{N}] + \frac{f_i^2(\xi)}{2!} [\mathbf{M}, [\mathbf{M}, \mathbf{N}]] + \dots, \quad (2.3.19)$$

por lo tanto, con ayuda de (2.3.18), (2.3.19) y los conmutadores (2.3.11) a (2.3.13), los términos en azul de (2.3.17) serán

$$e^{f_1(\xi)\mathbf{D}} \mathbf{C} = (\mathbf{C} + f_1 \mathbf{k}) e^{f_1(\xi)\mathbf{D}}, \quad (2.3.20)$$

$$e^{f_2(\xi)\mathbf{C}} \mathbf{A} = \mathbf{A} e^{f_2(\xi)\mathbf{C}}, \quad (2.3.21)$$

sustituyendo (2.3.20) y (2.3.21) en (2.3.17), se obtiene

$$\begin{aligned} F'(\xi) = & \frac{df_0(\xi)}{d\xi} e^{f_0(\xi)} e^{f_1(\xi)\mathbf{D}} e^{f_2(\xi)\mathbf{C}} e^{f_3(\xi)\mathbf{A}} + \frac{df_1(\xi)}{d\xi} \mathbf{D} e^{f_0(\xi)} e^{f_1(\xi)\mathbf{D}} e^{f_2(\xi)\mathbf{C}} e^{f_3(\xi)\mathbf{A}} \\ & + \frac{df_2(\xi)}{d\xi} (\mathbf{C} + f_1 \mathbf{k}) e^{f_0(\xi)} e^{f_1(\xi)\mathbf{D}} e^{f_2(\xi)\mathbf{C}} e^{f_3(\xi)\mathbf{A}} + \frac{df_3(\xi)}{d\xi} e^{f_0(\xi)} e^{f_1(\xi)\mathbf{D}} \mathbf{A} e^{f_2(\xi)\mathbf{C}} e^{f_3(\xi)\mathbf{A}}, \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

ahora sólo falta desplazar hacia la izquierda el operador  $\mathbf{A}$  del cuarto término de la ecuación anterior; aplicando nuevamente las ecuaciones (2.3.18), (2.3.19) y los conmutadores (2.3.11) a (2.3.13)

$$e^{f_1(\xi)\mathbf{D}} \mathbf{A} = \left( \mathbf{A} - f_1(\xi)\mathbf{C} - \frac{f_1^2(\xi)}{2!} \mathbf{k} \right) e^{f_1(\xi)\mathbf{D}}, \quad (2.3.23)$$

<sup>2</sup> $\xi$  es un parámetro auxiliar que, al final del cálculo, será tomado como 1, por lo tanto su definición no afecta de ninguna forma al proceso de factorización

<sup>3</sup>En este trabajo se ha tomado la factorización de esta manera, sin embargo, en la práctica, el orden de los exponenciales queda a juicio propio, de manera que se facilite la aplicación a la función en cuestión. Aquí, se ha elegido este orden por conveniencia.

## 2.4 La entropía de Von Neumann

entonces, sustituyendo (2.3.23) en (2.3.22), se llega a

$$F'(\xi) = \frac{df_0(\xi)}{d\xi} + \frac{df_1(\xi)}{d\xi} \mathbf{D} + \frac{df_2(\xi)}{d\xi} (\mathbf{C} + f_1 \mathbf{k}) + \frac{df_3(\xi)}{d\xi} \left( \mathbf{A} - f_1(\xi) \mathbf{C} - \frac{f_1^2(\xi)}{2!} \mathbf{k} \right) F(\xi); \quad (2.3.24)$$

igualando la expresión anterior con (2.3.16), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{df_1(\xi)}{d\xi} = 1, \quad (2.3.25)$$

$$\frac{df_3(\xi)}{d\xi} = 1, \quad (2.3.26)$$

$$\frac{df_0(\xi)}{d\xi} + \frac{df_2(\xi)}{d\xi} f_1(\xi) \mathbf{k} - \frac{df_3(\xi)}{d\xi} \frac{f_1^2(\xi)}{2} \mathbf{k} = 0, \quad (2.3.27)$$

$$\frac{df_2(\xi)}{d\xi} - \frac{df_3(\xi)}{d\xi} f_1(\xi) = 0. \quad (2.3.28)$$

La solución al sistema anterior es trivial, el resultado es

$$f_0(\xi) = -\frac{\xi^3}{6} \mathbf{k}, \quad (2.3.29)$$

$$f_1(\xi) = \xi, \quad (2.3.30)$$

$$f_2(\xi) = \frac{\xi^2}{2}, \quad (2.3.31)$$

$$f_3(\xi) = \xi; \quad (2.3.32)$$

tomando  $\xi = 1$  y sustituyendo (2.3.29) a (2.3.32) en (2.3.15), se llega al resultado

$$\mathbf{U}(t) = e^{-\frac{1}{6} \frac{it^3 \nu_s^2 \alpha^2}{m\hbar} \mathbf{S}_z^2} e^{-\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{p}_x^2} e^{-\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{p}_y^2} e^{-\frac{it\nu_s}{\hbar} (B_0 + \alpha z) \mathbf{S}_z} e^{\frac{it^2 \nu_s \alpha}{2m\hbar} \mathbf{p}_z \mathbf{S}_z} e^{-\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{p}_z^2}. \quad (2.3.33)$$

La expresión anterior es el operador de evolución temporal que se utilizará para obtener la evolución del estado cuántico de partículas de espín arbitrario en el experimento de Stern-Gerlach. El proceso de factorización que se ha mostrado corresponde al caso número 1 de aquellos que son abordados por García y Arévalo, Para un mayor entendimiento del proceso de factorización vea su artículo (García and Arévalo (2007)).

## 2.4 La entropía de Von Neumann

### 2.4.1 Introducción

**E**n esta sección se revisa en una forma básica el concepto de entropía de Von Neumann, el cual es utilizado en este trabajo para medir la cantidad de enredamiento presente en el sistema cuántico de las partículas del aparato de Stern-Gerlach cuando los grados internos de libertad son descritos por una superposición de estados de espín, es decir el caso puro. La entropía de Von Neumann es un concepto basado en la entropía clásica de Shannon, la cual cuantifica la cantidad de información ganada en promedio *después* de llegar a conocer el valor de una variable aleatoria  $X$  de un evento probabilístico, o, visto desde otro punto de vista, la entropía de Shannon es una medida de la cantidad de incertidumbre asociada a  $X$  *antes* de conocer su valor; entonces, la entropía de Shannon cuantifica la incertidumbre asociada a distribuciones de probabilidad clásicas. Los estados

cuánticos pueden ser descritos de una manera similar, con operadores de densidad reemplazando a las distribuciones de probabilidad clásicas (Nielsen and Chuang, 2004, Pág. 500, 510). Bennet (Bennett et al., 1996) ha puesto de manifiesto el hecho de que la entropía de Von Neumann es una medida natural del enredamiento para estados puros y ha destacado las características ideales de sus propiedades. Por lo anterior, es objetivo de esta sección el realizar una justificación de la definición matemática para este concepto.

### 2.4.2 Definición

El enredamiento de un estado bipartito  $|\Psi\rangle$  puro (o bien, el enredamiento entre los  $n$  grados de libertad de un sistema físico), puede ser medido convenientemente a través de la entropía de Von Neumann

$$E(|\Psi\rangle) = S(\rho^A) = S(\rho^B), \quad (2.4.1)$$

donde  $E(|\Psi\rangle)$  debe interpretarse simplemente como cantidad de enredamiento, y

$$S(\rho^i) = -\text{Tr} \{ \rho^i \ln \rho^i \} \quad (i = A, B), \quad (2.4.2)$$

el término  $S(\rho^i)$  representa la entropía asociada al operador de densidad del sistema  $A$  o  $B$  y el cual puede obtenerse mediante la toma de la traza parcial del operador de densidad global  $\rho$ , sobre el subsistema  $B$  o  $A$  respectivamente, es decir

$$\rho^i = \text{Tr}_j \{ \rho \}, \quad (2.4.3)$$

con  $i = A, B$  y  $j = B, A$  en ese orden. Comúnmente La traza parcial  $\text{Tr}_j \{ \rho \}$  debe tomarse como la suma de los valores esperados del operador de densidad global del sistema  $\rho$ , utilizando todos los vectores de una base ortonormal cualquiera del espacio de Hilbert para los sistemas  $A$  o  $B$  según sea el caso. El enredamiento que produce el aparato de Stern-Gerlach es del tipo Continuo-Discreto (Harshman, 2007); en este peculiar enredamiento, una de las dos partes,  $A$  o  $B$ , corresponde a un sistema definido a través de un conjunto base de vectores discretos; mientras que la otra parte corresponde a un sistema definido a través de un conjunto base de carácter continuo; los conjuntos base continuos están conformados por vectores que no pertenecen a ningún espacio de Hilbert<sup>4</sup>; funciones cuadrado integrables pueden ser obtenidas a través de la superposición de tales elementos a través de funciones continuas que juegan el rol análogo a los coeficientes de superposición  $C_n$  para el caso discreto (vea, (Griyths, 2016, Pág. 61) y (Cohen-Tannoudji et al., 1977, Pág. 101)); dichas funciones deben cumplir características especiales (es decir, ser funciones de una regularidad matemática suficiente para permitir diferenciación a través de la integral de la superposición (Cohen-Tannoudji et al., 1977, Pág. 22)), esto con la finalidad de evitar divergencias matemáticas que se traduzcan, por ejemplo, en la no finitud de la energía del sistema (Harshman, 2007). En ese sentido, Harshman (Harshman, 2007) ha aclarado que, al describir los grados externos de libertad del enredamiento Continuo-Discreto a través de paquetes de ondas, las funciones continuas que juegan el rol de coeficientes  $C_n$  en la superposición, deben ser descritas en subespacios nucleares de un espacio de Hilbert. Una buena opción para tal subespacio, en el enredamiento Continuo-Discreto que genera el aparato de Stern-Gerlach, es el subespacio de Schwartz, conformado por funciones rápidamente decrecientes cuando el parámetro sobre el cual dependen tiende a infinito. Para una mayor comprensión al respecto, vea la introducción a la sección 3.1. En este trabajo se trabajará con la entropía de enredamiento  $E(\rho^s)$  asociada a la parte discreta

<sup>4</sup>Ejemplos de estos vectores son el conjunto de las deltas de Dirac y el conjunto de las ondas planas, vea (Cohen-Tannoudji et al., 1977, Pág.100-105)

## 2.4 La entropía de Von Neumann

del sistema (por simplicidad matemática), la cual, es asociada a los grados internos de libertad de las partículas. Entonces, en este trabajo, el enredamiento cuántico se medirá a través de

$$E(|\Psi\rangle) = S(\rho^s) = -\text{Tr} \{ \rho^s \ln \rho^s \}, \quad (2.4.4)$$

siendo  $\rho^s$  la matriz que describe los grados internos de libertad de las partículas. Existe una forma más útil de expresar (2.4.4), para obtener dicha forma, se sigue el desarrollo de (Roston et al., 2005).

Cualquier operador de densidad (vea la sección 2.2.2) puede tener una descomposición espectral de la forma

$$\rho^s = \sum_{m_s} \lambda_{m_s} |\rho_{m_s}\rangle\langle\rho_{m_s}|, \quad (2.4.5)$$

siendo  $\lambda_{m_s}$  los eigenvalores de  $\rho^s$  y  $|\rho_{m_s}\rangle$  sus eigenestados. Para una función analítica  $f(\rho^s)$  se cumple

$$f(\rho^s) = \sum_{m_s} f(\lambda_{m_s}) |\rho_{m_s}\rangle\langle\rho_{m_s}|; \quad (2.4.6)$$

tome  $f(\rho^s) = \rho^s \ln \rho^s$ . Entonces la expresión (2.4.6) será

$$\rho^s \ln \rho^s = \sum_{m_s} \lambda_{m_s} \ln \lambda_{m_s} |\rho_{m_s}\rangle\langle\rho_{m_s}|, \quad (2.4.7)$$

tome la traza de la ecuación anterior por ambos lados de la igualdad

$$\text{Tr} \{ \rho^s \ln \rho^s \} = \text{Tr} \left\{ \sum_{m_s} \lambda_{m_s} \ln (\lambda_{m_s}) |\rho_{m_s}\rangle\langle\rho_{m_s}| \right\} = \sum_{m_s} \lambda_{m_s} \ln (\lambda_{m_s}), \quad (2.4.8)$$

donde se ha utilizado la propiedad de que para cada  $m_s$  se cumple que  $\text{Tr} (|\rho_{m_s}\rangle\langle\rho_{m_s}|) = 1$  (vea la ecuación (2.2.2)); sustituya (2.4.8) en (2.4.4)

$$E(|\Psi\rangle) = S(\rho^s) = - \sum_{m_s} \lambda_{m_s} \ln (\lambda_{m_s}). \quad (2.4.9)$$

La ecuación anterior es una herramienta sumamente útil; implica que la cantidad de enredamiento  $E(|\Psi\rangle)$  que genera el experimento de Stern-Gerlach entre los grados de libertad de las partículas, puede ser cuantificada a través de los eigenvalores  $\lambda_{m_s}$  de la matriz de densidad  $\rho^s$  que describe el espín del sistema. Es importante señalar que  $E(|\Psi\rangle)$ , para sistemas enredados entre dos partes, tiene una unidad conocida como *ebit*, que, según la definición de Bennet: "[Un ebit es:] *la cantidad de enredamiento contenida en un estado cuántico máximamente enredado que está conformado por dos cubits*<sup>5</sup>, o cualquier otro estado bipartito puro para el cual  $E(|\Psi\rangle) = 1$  (Bennett et al., 1996)<sup>6</sup>". Entonces,  $E(|\Psi\rangle)$  también es utilizado para medir el enredamiento entre dos sistemas con  $N$  estados, como es el caso para sistemas con espines mayores a  $s = 1/2$ , donde el enredamiento Continuo-Discreto generado por el aparato de Stern-Gerlach tendrá, en general,  $N = 2s + 1$  estados. La cantidad de enredamiento  $E(|\Psi\rangle)$  está acotada según

$$0 \leq E(|\Psi\rangle) \leq 1, \quad (2.4.10)$$

donde  $E(|\Psi\rangle) = 0$  para estados que no están enredados, y por lo tanto, el estado cuántico del sistema físico es representable a través de un producto de estados; y  $E(|\Psi\rangle) = 1$  cuando el sistema se encuentra máximamente enredado (y tiene un ebit de enredamiento). Puesto que  $E(|\Psi\rangle)$  está acotado según (2.4.10), esta cantidad debería ser normalizada si es necesario.

<sup>5</sup>Un cubit es cualquier estado cuántico conformado por una superposición de dos estados, por ejemplo, el estado que describe a una partícula con espín  $s = 1/2$ :  $|\zeta\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ , vea (Nielsen and Chuang, 2004, Pág. 13).

<sup>6</sup>La definición se ha traducido del inglés.



# 3

## Resultados

“Dios: una enfermedad de la que imaginamos estar curados porque nadie se muere de ella hoy en día”  
-Emil Cioran

### 3.1 Solución al problema

#### 3.1.1 Introducción

La presente sección es el núcleo de este trabajo. Aquí se desarrolla la metodología utilizada para obtener un par de ecuaciones a partir de las cuales puede obtenerse la evolución temporal del estado cuántico de las partículas con espín arbitrario en el experimento de Stern-Gerlach, cuando los grados internos de libertad son descritos a través de una mezcla estadística y una superposición de estados de espín. Se mostrará que los resultados obtenidos exhiben enredamiento cuántico entre los grados internos y externos de libertad del sistema.

Los grados externos de libertad son representados a través de elementos  $\psi(\mathbf{r})$  que están contenidos en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_r = L^2(\mathbb{R}^3)$  (conjunto de funciones de Lebesgue cuadrado integrables en 3 dimensiones) y que son construidos a través del conjunto base  $\{\varepsilon(\mathbf{r})\}$  de las ondas planas; sin embargo, el problema fundamental de los elementos de esta base es que *no pertenecen a ningún espacio de Hilbert*, pero en la práctica son útiles herramientas para la construcción de funciones de onda o vectores que si están contenidos en  $\mathcal{H}_r$ . Debido a la naturaleza divergente de los elementos  $\varepsilon(\mathbf{r})$  (esto implica que:  $\int_{\infty}^{\infty} |\varepsilon(\mathbf{r})|^2 = \infty$ ) restringimos los grados externos de libertad a un subespacio  $\mathcal{S}_r$  tal que  $\mathcal{S}_r \subset \mathcal{H}_r$ , denominado *espacio de Schwartz* y que, para fines prácticos, es definido como el espacio de funciones rápidamente decrecientes cuando el parámetro sobre el cual dependen tiende a  $\infty$ ; esta asunción es importante para obtener resultados físicamente aceptables (Harshman, 2007). Además, cuando las partículas emergen de la fuente emisora, se propagan libremente en el espacio (una partícula libre), por lo tanto, se representan los grados externos de libertad a través de un paquete de ondas Gaussiano, el cual, en efecto, está contenido en  $\mathcal{S}_r$  y es a su vez solución a la ecuación de Schrödinger para una partícula libre.

Los grados internos de libertad son definidos en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_s = \mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 0$  cuyos elementos  $|s, m_s\rangle$  son dados por el conjunto de estados propios del operador  $S_i$ , es decir, una componente de espín en una dirección arbitraria, sin embargo, en este trabajo se utiliza  $i = z$  debido a la definición (2.3.7) para el campo magnético que genera el aparato de Stern-Gerlach, tomando en

### 3.1 Solución al problema

cuenta la condición  $\langle \mathbf{S}_x \rangle = 0$  establecida en la sección 2.3.2. Note que del formalismo del momento angular de spin, dichos eigenestados también lo son del operador  $\mathbf{S}^2$ . La representación de los grados internos de libertad se dará a través de dos formas: (a) una mezcla estadística de estados de espín; y (b) una superposición de estados de espín; estas dos situaciones abarcan respectivamente los puntos dos y uno planteados en la sección 1.2. Debido a las definiciones anteriores, el estado del sistema estará definido en un espacio de Hilbert que resulta del producto tensorial de los espacios de Hilbert donde son definidos los grados de libertad  $\mathcal{H} = \mathcal{S}_r \otimes \mathcal{H}_s$ . Vea el postulado uno de la mecánica cuántica, desarrollado en la sección 2.1.2.

El enredamiento obtenido es medido utilizando la definición para la entropía de Von Neumann, que se desarrolló en la sección 2.4. Se obtienen las curvas que muestran la evolución temporal para el enredamiento  $E$  para los casos de espín  $s = 1/2, 1, 3/2$ ; sin embargo, se deriva la expresión general para la matriz reducida  $\rho^s$  para el caso de una superposición de estados de espín que describe los grados internos de libertad del sistema; a través de tal matriz pueden ser obtenidos los eigenvalores  $\lambda_{m_s}$  y en consecuencia la curva de evolución del enredamiento  $E$  para un espín  $s$  cualquiera. Se analiza a través de la teoría desarrollada por Harshman (Harshman (2007)) que el enredamiento que exhibe el estado cuántico de las partículas (cuando los grados internos de libertad son dados por una superposición de estados) a través de su matriz de densidad  $\rho^s$  está directamente relacionado con los elementos fuera de la diagonal principal de tal matriz. Se analizará el caso para cuando  $\rho^s$  es netamente diagonal y dichos elementos son de la forma  $1/(2s+1)$ , entonces el enredamiento es máximo (i.e.  $E = 1$ ) a un determinado tiempo  $\tau$  y el sistema evoluciona a una mezcla estadística equiprobable, también se examinará el caso cuando los elementos diagonales no son equiprobables, en este caso el sistema evoluciona a una mezcla estadística no equiprobable y el máximo entrelazamiento posible no es alcanzado.

#### 3.1.2 El caso para una mezcla estadística de estados de espín

En esta sección se da solución a la segunda situación expuesta en el planteamiento del problema (vea, la sección 1.2). En la introducción a la sección 2.2 se analizó el caso en que una fuente emite un haz de partículas no polarizadas con espín; se mostraron los argumentos por los cuales es necesario describir, a través de una mezcla estadística de estados, los grados internos de libertad de este sistema. En este trabajo consideramos tal mezcla a través de los eigenestados  $|s, m_s\rangle$ <sup>1</sup> de los operadores  $\mathbf{S}_z$  y  $\mathbf{S}^2$ , los cuales satisfacen las siguientes definiciones

$$\mathbf{s}^2 |s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, m_s\rangle, \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{s}_z |s, m_s\rangle = \hbar m_s |s, m_s\rangle. \quad (3.1.2)$$

Así, por la definición (2.2.10), los grados internos de libertad para las partículas en nuestro experimento de Stern-Gerlach generalizado, son dados por

$$\rho_{s'} = \sum_{m_s} \frac{1}{2s+1} |s, m_s\rangle \langle s, m_s|, \quad (3.1.3)$$

donde el factor  $1/(2s+1)$  juega el rol probabilístico  $p_k$  de la definición (2.2.10), entonces, la mezcla estadística es equiprobable. El número adimensional  $m_s$  es el número cuántico magnético que es

<sup>1</sup>Sin embargo esta mezcla estadística también podría ser expresada en términos de los eigenestados de cualquier otra componente de espín, lo que físicamente equivale a rotaciones del magneto del aparato de Stern-Gerlach; para un mayor entendimiento vea el trabajo de Tekin (Tekin, 2016).

asociado a un espín  $s$  determinado y la suma en (3.1.3) es definida para los posibles valores de  $m_s$ , los cuales están acotados según

$$-s \leq m_s \leq s, \quad (3.1.4)$$

y son dados por

$$m_s = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s. \quad (3.1.5)$$

La notación aquí expuesta, es una manera formal de expresar la notación matemática para el momento angular de espín, para una comprensión más clara vea (Nouredine, 2009, pág. 285-293). Para ilustrar el formalismo de (3.1.3), considere el caso típico de  $s = 1/2$ ; según (3.1.4) y (3.1.5) la suma en (3.1.3) es evaluada para  $m_s = -1/2, 1/2$ , entonces, (3.1.3) será de la forma

$$\rho_{s'} = \frac{1}{2} (|1/2, -1/2\rangle\langle 1/2, -1/2| + |1/2, 1/2\rangle\langle 1/2, 1/2|), \quad (3.1.6)$$

que, en la notación tradicional de flechas, este operador es

$$\rho_{s'} = \frac{1}{2} (|\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z| + |\downarrow_z\rangle\langle\downarrow_z|), \quad (3.1.7)$$

que es la mezcla estadística utilizada por Benítez et. al. (Benítez et al. (2017b)) (Benítez et al., 2017a) en la ecuación (25) de su artículo para describir los grados internos de libertad para el típico caso de espín  $1/2$ . Para considerar otro ejemplo, tome el caso en que  $s = 1$ , entonces, los posibles valores para el número cuántico magnético son  $m_s = -1, 0, 1$  y la mezcla estadística (3.1.3) para este caso será

$$\rho_{s'} = \frac{1}{3} (|1, -1\rangle\langle 1, -1| + |1, 0\rangle\langle 1, 0| + |1, 1\rangle\langle 1, 1|), \quad (3.1.8)$$

que, en notación de flechas, este operador se puede escribir como

$$\rho_{s'} = \frac{1}{3} (|\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z| + |\rightarrow_z\rangle\langle\leftarrow_z| + |\downarrow_z\rangle\langle\downarrow_z|). \quad (3.1.9)$$

Por lo tanto, la ecuación (3.1.3) constituye una expresión general a partir de la cual puede obtenerse la mezcla estadística de estados para un espín arbitrario  $s$ .

Los grados externos de libertad del sistema son tratados cuántico mecánicamente. La descripción de partículas que emergen libremente de una fuente, puede ser descrita a través de paquetes de ondas Gaussianos (que son solución a la ecuación de Schrödinger para una partícula libre), esta representación es frecuentemente utilizada en la literatura formal (Harshman (2007)), (Roston et al. (2005)), (Benítez et al. (2017b)) (Benítez et al., 2017a) y su construcción es dada por

$$(\mathbf{r}, t = 0) = A \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \xi(\mathbf{r}) d^3k, \quad (3.1.10)$$

donde  $A$  es un factor que asegura la normalización del estado. La ecuación anterior significa que el paquete de ondas es construido mediante la superposición de funciones  $\phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$  (definidas en el espacio  $\mathbf{k}$  y centradas alrededor del valor esperado  $\mathbf{k}_0$ ), utilizando una base continua  $\{\xi(\mathbf{r})\}$  que, como se mencionó en la introducción, no pertenece al espacio de Hilbert de la partícula. Eligiendo  $A = 1/\sqrt{2\pi}$ ,  $\phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) = (\sigma(2\pi^3)^{1/2})^{-1/2} \exp[-(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 \sigma^2]$  y  $\{\xi(\mathbf{r})\}$  como el conjunto de ondas planas  $\xi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , la representación para los grados externos de libertad del sistema es

$$(\mathbf{r}, t = 0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/4}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}|^2}{4\sigma^2} + i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}\right), \quad (3.1.11)$$

## 3.1 Solución al problema

donde  $\sigma$  representa el ancho inicial del paquete de ondas justo antes de la interacción con el campo magnético. Debido a los pinholes colimadores (vea la figura 1.1), las componentes  $\mathbf{k}_0$  perpendiculares al movimiento de las partículas son cero, así, debe tomarse  $k_{0x} = k_{0z} = 0$  en la ecuación anterior. El estado inicial que representa a las partículas en este caso, será dado por el producto entre (3.1.3) y (3.1.11)

$$\rho(\mathbf{r}, t = 0) = \psi(\mathbf{r}) \left[ \sum_{m_s} \frac{1}{2s+1} |s, m_s\rangle \langle s, m_s| \right] \psi^\dagger(\mathbf{r}); \quad (3.1.12)$$

note que los grados de libertad en el estado inicial (3.1.12) no están enredados y son dados por un producto de estados. Por el tercer postulado de la mecánica cuántica (vea la sección 2.1.2), la evolución temporal a la ecuación anterior vendrá dada por la aplicación del operador de evolución (2.3.33) de la forma

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(t)\rho(\mathbf{r}, t = 0)\mathbf{U}^\dagger(t); \quad (3.1.13)$$

antes de la aplicación del operador de evolución, el paquete de ondas no está enredado con los grados internos de libertad, así, la ecuación anterior puede ser expresada como

$$\rho(\mathbf{r}, t = 0) = \sum_{m_s} \left[ \frac{1}{2s+1} \mathbf{U}(t)\psi(\mathbf{r}) |s, m_s\rangle \langle s, m_s| \psi^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{U}^\dagger(t) \right]. \quad (3.1.14)$$

Para desarrollar la ecuación anterior, simplemente basta calcular el término  $\mathbf{U}(t)\psi(\mathbf{r}) |s, m_s\rangle$ , tomar el complejo conjugado  $\langle s, m_s| \psi^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{U}^\dagger(t)$ , realizar el producto de estos dos términos y sustituir en (3.1.14). Este proceso se describe a continuación. Tomando en cuenta la definición (2.3.33), entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t)\psi(\mathbf{r}) |s, m_s\rangle &= e^{-\frac{1}{6} \frac{it^3 \nu_s^2 \alpha^2}{m\hbar} \mathbf{S}_z^2} e^{-\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}_x^2} e^{-\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}_y^2} e^{-\frac{it\nu_s}{\hbar} (B_0 + \alpha z) \mathbf{S}_z} e^{\frac{it^2 \nu_s \alpha}{2m\hbar} \mathbf{P}_z \mathbf{S}_z} e^{-\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}_z^2} \\ &\times \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-x^2/4\sigma^2} \right] \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-(y^2/4\sigma^2) + ik_{0y}y} \right] \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-z^2/4\sigma^2} \right] |s, m_s\rangle, \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

donde se ha expresado el paquete de ondas  $\psi(\mathbf{r})$  en términos de sus componentes cartesianas  $x, y, z$ ; los operadores de momento actúan sobre las respectivas componentes del paquete de ondas, esto es

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t)\psi(\mathbf{r}) |s, m_s\rangle &= \left( e^{-\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}_x^2} \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-x^2/4\sigma^2} \right] \right) \left( e^{-\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}_y^2} \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-(y^2/4\sigma^2) + ik_{0y}y} \right] \right) \\ &\times \left( e^{-\frac{1}{6} \frac{it^3 \nu_s^2 \alpha^2}{m\hbar} \mathbf{S}_z^2} e^{-\frac{it\nu_s}{\hbar} (B_0 + \alpha z) \mathbf{S}_z} e^{\frac{it^2 \nu_s \alpha}{2m\hbar} \mathbf{P}_z \mathbf{S}_z} e^{-\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}_z^2} \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-z^2/4\sigma^2} \right] |s, m_s\rangle \right). \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Considere primeramente la aplicación de los operadores en la parte espacial  $z$ , es decir el último elemento entre paréntesis del lado derecho de la ecuación anterior. Para la aplicación de los operadores exponenciales, se hace uso de la metodología expuesta por Blinder (Blinder (1968)), donde se muestra la aplicación de operadores de este tipo a paquetes de ondas Gaussianos. Así la aplicación del primer operador en  $z$ , se inicia sustituyendo la definición  $\mathbf{P}_z = (-i\hbar)d/dz$  y tomando el desarrollo en serie de McLaurin del exponencial

$$e^{-\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}_z^2} \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-z^2/4\sigma^2} \right] |s, m_s\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{i\hbar t}{2m} \right)^k \frac{d^{2k}}{dz^{2k}} \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-z^2/4\sigma^2} \right] |s, m_s\rangle, \quad (3.1.17)$$

donde se ha mostrado en azul la última parte de la ecuación anterior por razones que serán obvias poco más adelante. Antes de aplicar la derivada  $d^{2k}/dz^{2k}$  en la expresión anterior, considere las siguientes definiciones, fáciles de probar y que vienen reportadas por (Blinder (1968))

$$\frac{d^{2k}}{dz^{2k}} \left( \omega^{-1/2} e^{-z^2/4\omega} \right) = \frac{d^k}{d\omega^k} \left( \omega^{-1/2} e^{-z^2/4\omega} \right), \quad (3.1.18)$$

$$\left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-z^2/4\sigma^2} \right] = \left[ \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} \omega^{-1/2} e^{-z^2/4\omega} \right]; \quad (3.1.19)$$

se ha mostrado en color rojo el lado izquierdo de (3.1.18) por razones que serán obvias un poco más adelante. En la última parte de la ecuación (3.1.19) se ha hecho uso de la ecuación  $\omega = \sigma^2$ , siendo  $\omega$  un parámetro auxiliar que al final del cálculo se removerá. Sustituya (3.1.19) en (3.1.17) para obtener

$$e^{-\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}_z^2} \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-z^2/4\sigma^2} \right] |s, m_s\rangle = \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{i\hbar t}{2m} \right)^k \frac{d^{2k}}{dz^{2k}} \left[ \omega^{-1/2} e^{-z^2/4\omega} \right] |s, m_s\rangle; \quad (3.1.20)$$

utilice (3.1.18) en la expresión anterior, y se tiene

$$e^{-\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}_z^2} \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-z^2/4\sigma^2} \right] |s, m_s\rangle = \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{i\hbar t}{2m} \right)^k \frac{d^k}{d\omega^k} \left( \omega^{-1/2} e^{-z^2/4\omega} \right) |s, m_s\rangle; \quad (3.1.21)$$

ahora considere la conocida definición

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \beta^k \frac{d^k}{d\omega^k} (f(\omega)) = f(\omega + \beta), \quad (3.1.22)$$

y note que el factor de desplazamiento  $\beta$  en la ecuación (3.1.21) es el elemento  $(i\hbar t/2m)$ . Además, observe que  $(\omega^{-1/2} e^{-z^2/4\omega})$  es una función del parámetro  $w$ , por lo tanto, por la definición (3.1.22), la ecuación (3.1.21) será

$$e^{-\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}_z^2} \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-z^2/4\sigma^2} \right] |s, m_s\rangle = \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} \left( [\omega + i\hbar t/2m]^{-1/2} e^{-z^2/4[\omega + i\hbar t/2m]} \right) |s, m_s\rangle; \quad (3.1.23)$$

tome nuevamente el cambio de variable  $\omega = \sigma^2$ , para obtener

$$e^{-\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}_z^2} \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-z^2/4\sigma^2} \right] |s, m_s\rangle = \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} \left( [\sigma^2 + i\hbar t/2m]^{-1/2} e^{-z^2/4[\sigma^2 + i\hbar t/2m]} \right) |s, m_s\rangle, \quad (3.1.24)$$

y se ha aplicado el primer operador exponencial de momento en  $z$ ; en particular, observe como se ha desplazado la función Gaussiana por el factor  $i\hbar t/2m$  en el ancho paquete de ondas inicial  $\sigma$ . Además note que el ket  $|s, m_s\rangle$  no es modificado, puesto que el operador exponencial en  $\mathbf{P}_z^2$  actúa únicamente sobre la parte continua del estado inicial. Es importante notar que este proceso es exactamente el mismo para la aplicación del exponencial en  $\mathbf{P}_x^2$  a la parte de la función Gaussiana en  $x$ , entonces

$$e^{-\frac{it}{2m\hbar} \mathbf{P}_x^2} \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-x^2/4\sigma^2} \right] = \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} \left( [\sigma^2 + i\hbar t/2m]^{-1/2} e^{-x^2/4[\sigma^2 + i\hbar t/2m]} \right). \quad (3.1.25)$$

## 3.1 Solución al problema

Se aplica el siguiente operador exponencial de la parte  $z$  a la función que ha resultado en (3.1.24), para ello, tome nuevamente la definición  $\mathbf{P}_z = -i\hbar d/dz$  en el operador por aplicar y tome su desarrollo en serie de McLaurin, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} & e^{\frac{it^2\nu_s\alpha}{2m\hbar}\mathbf{P}_z\mathbf{S}_z} \left[ \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} \left( [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} e^{-z^2/4[\sigma^2 + iht/2m]} \right) |s, m_s\rangle \right] \\ &= \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{t^2\nu_s\alpha}{2m} \right)^k \frac{d^k}{dz^k} e^{-z^2/4[\sigma^2 + iht/2m]} \mathbf{S}_z^k |s, m_s\rangle, \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

la derivada actúa sobre la parte continua y el operador de espín  $\mathbf{S}_z^k$  actúa sobre el ket  $|s, m_s\rangle$ , es decir:  $\mathbf{S}_z^k |s, m_s\rangle = (\hbar m_s)^k |s, m_s\rangle$  (esto es fácil de comprobar mediante recurrencia de la ecuación (3.1.2)), entonces la sumatoria de la ecuación anterior queda como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{t^2\nu_s\alpha}{2m} \right)^k \frac{d^k}{dz^k} e^{-z^2/4[\sigma^2 + iht/2m]} \mathbf{S}_z^k |s, m_s\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{t^2\nu_s\alpha}{2m} \right)^k \frac{d^k}{dz^k} e^{-z^2/4[\sigma^2 + iht/2m]} (\hbar m_s)^k |s, m_s\rangle, \quad (3.1.27)$$

pero el término  $(\hbar m_s)^k$  puede asociarse dentro del elemento  $t^2\nu_s\alpha/2m$  que también está elevado a la potencia  $k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{t^2\nu_s\alpha}{2m} \right)^k \frac{d^k}{dz^k} e^{-z^2/4[\sigma^2 + iht/2m]} \mathbf{S}_z^k |s, m_s\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{t^2\nu_s\alpha\hbar}{2m} m_s \right)^k \frac{d^k}{dz^k} e^{-z^2/4[\sigma^2 + iht/2m]} |s, m_s\rangle, \quad (3.1.28)$$

sustituyendo la ecuación anterior en (3.1.26), se obtiene

$$\begin{aligned} & e^{\frac{it^2\nu_s\alpha}{2m\hbar}\mathbf{P}_z\mathbf{S}_z} \left[ \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} \left( [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} e^{-z^2/4[\sigma^2 + iht/2m]} \right) |s, m_s\rangle \right] \\ &= \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{t^2\nu_s\alpha\hbar}{2m} m_s \right)^k \frac{d^k}{dz^k} e^{-z^2/4[\sigma^2 + iht/2m]} |s, m_s\rangle, \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

compare el lado derecho de la expresión anterior con la identidad (3.1.22) y note que el desplazamiento es llevado a cabo, esta vez, sobre la variable  $z$  del exponencial Gaussiano, siendo el factor de desplazamiento  $t^2\nu_s\alpha\hbar m_s/2m$

$$\begin{aligned} & e^{\frac{it^2\nu_s\alpha}{2m\hbar}\mathbf{P}_z\mathbf{S}_z} \left[ \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} \left( [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} e^{-z^2/4[\sigma^2 + iht/2m]} \right) |s, m_s\rangle \right] \\ &= \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} e^{-(z + [t^2\nu_s\alpha\hbar/2m]m_s)^2/4[\sigma^2 + iht/2m]} |s, m_s\rangle; \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

note que se ha desplazado el exponencial gaussiano en la variable  $z$  por un factor proporcional a  $m_s$ . Como lo muestran los ejemplos dados en las ecuaciones (3.1.6) y (3.1.8), cada número  $m_s$  adquiere un valor único para cada ket  $|s, m_s\rangle$ , esto implica que se ha producido una correspondencia única entre cada elemento  $|s, m_s\rangle$  y cada función exponencial Gaussiana en  $z$ . Esta no separabilidad implica que se ha creado un enredamiento cuántico entre los grados de libertad del sistema, sufriendo cada paquete de ondas en  $z$  un desplazamiento según su número  $m_s$  asociado. Tome la aplicación del siguiente operador en  $z$ , para ello desarrolle nuevamente el operador exponencial en serie de

McLaurin y aplíquelo a la función resultante obtenida en (3.1.30)

$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{it\nu_s}{\hbar}(B_0+\alpha z)\mathbf{S}_z} \left( \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} e^{-(z+[t^2\nu_s\alpha\hbar/2m]m_s)^2/4[\sigma^2+iht/2m]} |s, m_s\rangle \right) \\
&= \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( -\frac{it\nu_s}{\hbar} (B_0 + \alpha z) \right)^k e^{-(z+[t^2\nu_s\alpha\hbar/2m]m_s)^2/4[\sigma^2+iht/2m]} \mathbf{S}_z^k |s, m_s\rangle,
\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

aplique nuevamente la identidad  $\mathbf{S}_z^k |s, m_s\rangle = (\hbar m_s)^k |s, m_s\rangle$  y asocie el eigenvalor resultante con el elemento  $([-it\nu_s/\hbar](B_0 + \alpha z))^k$

$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{it\nu_s}{\hbar}(B_0+\alpha z)\mathbf{S}_z} \left( \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} e^{-(z+[t^2\nu_s\alpha\hbar/2m]m_s)^2/4[\sigma^2+iht/2m]} |s, m_s\rangle \right) \\
&= \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( -\frac{it\nu_s}{\hbar} (B_0 + \alpha z) \hbar m_s \right)^k e^{-(z+[t^2\nu_s\alpha\hbar/2m]m_s)^2/4[\sigma^2+iht/2m]} |s, m_s\rangle,
\end{aligned} \tag{3.1.32}$$

esta vez no existe derivada que cause desplazamiento a la función exponencial Gaussiana, así, puede ser revertida la serie de McLaurin para obtener

$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{it\nu_s}{\hbar}(B_0+\alpha z)\mathbf{S}_z} \left( \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} e^{-(z+[t^2\nu_s\alpha\hbar/2m]m_s)^2/4[\sigma^2+iht/2m]} |s, m_s\rangle \right) \\
&= \left( \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} e^{-\frac{it\nu_s\hbar}{\hbar}(B_0+\alpha z)m_s} e^{-(z+[t^2\nu_s\alpha\hbar/2m]m_s)^2/4[\sigma^2+iht/2m]} |s, m_s\rangle \right).
\end{aligned} \tag{3.1.33}$$

Aplique el último operador de la parte en  $z$  al resultado obtenido en la ecuación anterior desarrollando en serie de McLaurin el exponencial

$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{1}{6} \frac{it^3\nu_s^2\alpha^2}{m\hbar} \mathbf{S}_z^2} \left( \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} e^{-\frac{it\nu_s\hbar}{\hbar}(B_0+\alpha z)m_s} e^{-(z+[t^2\nu_s\alpha\hbar/2m]m_s)^2/4[\sigma^2+iht/2m]} |s, m_s\rangle \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( -\frac{1}{6} \frac{it^3\nu_s^2\alpha^2}{m\hbar} \right)^k \left( \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} e^{-\frac{it\nu_s\hbar}{\hbar}(B_0+\alpha z)m_s} e^{-(z+[t^2\nu_s\alpha\hbar/2m]m_s)^2/4[\sigma^2+iht/2m]} |s, m_s\rangle \right) \\
&\quad \times (\mathbf{S}_z^2)^k |s, m_s\rangle,
\end{aligned}$$

nuevamente tome la ecuación  $(\mathbf{S}_z^2)^k |s, m_s\rangle = ((\hbar m_s)^2)^k |s, m_s\rangle$  y asocie el eigenvalor  $((\hbar m_s)^2)^k$  con el factor de desplazamiento  $(it^3\nu_s^2\alpha^2/6m\hbar)^k$ , luego, revierta la serie de McLaurin. Entonces se obtiene

$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{1}{6} \frac{it^3\nu_s^2\alpha^2}{m\hbar} \mathbf{S}_z^2} \left( \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} e^{-\frac{it\nu_s\hbar}{\hbar}(B_0+\alpha z)m_s} e^{-(z+[t^2\nu_s\alpha\hbar/2m]m_s)^2/4[\sigma^2+iht/2m]} |s, m_s\rangle \right) \\
&= \left( \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} [\sigma^2 + iht/2m]^{-1/2} e^{-\frac{1}{6} \frac{it^3\nu_s^2\alpha^2}{m\hbar} (\hbar m_s)^2} e^{-\frac{it\nu_s\hbar}{\hbar}(B_0+\alpha z)m_s} e^{-(z+[t^2\nu_s\alpha\hbar/2m]m_s)^2/4[\sigma^2+iht/2m]} |s, m_s\rangle \right),
\end{aligned} \tag{3.1.35}$$

## 3.1 Solución al problema

y se han aplicado todos los operadores de la parte  $z$ . Note que la metodología de aplicación del exponencial en  $y$  ha sido expuesta en las ecuaciones (3.1.17) a (3.1.24), sin embargo, el elemento  $ik_{0y}y$  en la potencia de la función Gaussiana impide la puesta en marcha de esta técnica; este problema es solucionado si se completa el trinomio cuadrado perfecto en la potencia del exponencial, de manera que

$$e^{-\frac{it}{2m\hbar}\mathbf{P}_y^2} \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-(y^2/4\sigma^2)+ik_{0y}y} \right] = e^{-(k_{0y}\sigma)^2} e^{-\frac{it}{2m\hbar}\mathbf{P}_y^2} \left( (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-\frac{y'^2}{4\sigma^2}} \right), \quad (3.1.36)$$

donde  $y' = y - 2ik_{0y}\sigma^2$ . Y ahora la aplicación del operador exponencial en  $y$  es fácil, obteniendo

$$e^{-\frac{it}{2m\hbar}\mathbf{P}_y^2} \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-(y^2/4\sigma^2)+ik_{0y}y} \right] = \left\{ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right\}^{1/2} [\sigma^2 + i\hbar t/2m]^{-1/2} e^{-(k_{0y}\sigma)^2} \left( e^{-y'^2/4[\sigma^2+i\hbar t/2m]} \right). \quad (3.1.37)$$

Sustituya (3.1.25), (3.1.35) y (3.1.37) en (3.1.16) y tome el desarrollo de  $y'^2$ , para obtener

$$\mathbf{U}(t)\psi(\mathbf{r}) |s, m_s\rangle = \sum_{m_s} M'(x, y, t) \exp \left[ -\frac{it\nu_s\hbar}{\hbar} (B_0 + \alpha z)m_s \right] \exp \left[ F'(t) (z + m_s A(t))^2 \right] |s, m_s\rangle, \quad (3.1.38)$$

con

$$M'(x, y, t) = \left[ -\frac{1}{4F'(t)} \right]^{-3/2} \left[ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right]^{3/2} \exp \left( -\frac{it^3\nu_s^2\alpha^2}{6m\hbar} (\hbar m_s)^2 \right) \exp \left( -\sigma^2 k_{0y}^2 \right) \exp \left[ -4i\sigma^2 k_{0y} F'(t) y \right] \exp \left[ F'(t) (x^2 + y^2 - 4\sigma^4 k_{0y}^2) \right], \quad (3.1.39)$$

$$F'(t) = -\frac{1}{4(\sigma^2 + i\hbar t/2m)}, \quad (3.1.40)$$

$$A(t) = \frac{t^2\nu_s\alpha\hbar}{2m}. \quad (3.1.41)$$

Tome el complejo conjugado de (3.1.38), realice el producto  $\mathbf{U}(t)\psi(\mathbf{r}) |s, m_s\rangle \langle s, m_s| \psi^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{U}^\dagger(t)$  y sustituya el resultado en (3.1.14), para obtener, finalmente

$$\rho(x, y, z, t) = M(x, y, t) \left[ \sum_{m_s} \frac{1}{2s+1} e^{[F(t)(z+m_s A(t))^2]} |s, m_s\rangle \langle s, m_s| \right]; \quad (3.1.42)$$

con

$$M(x, y, t) = \left[ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right]^3 \left[ -\frac{\sigma^2}{2F(t)} \right]^{-3/2} \exp \left[ -2\sigma^2 k_{0y}^2 \right] \exp \left[ F(t) (x^2 + y^2 - 4\sigma^4 k_{0y}^2) \right] \exp \left[ -\frac{2\hbar t k_{0y} F(t)}{m} y \right], \quad (3.1.43)$$

$$F(t) = -\frac{\sigma^2}{2 \left[ \sigma^4 + (\hbar t/2m)^2 \right]}, \quad (3.1.44)$$

además, puede verificarse que

$$F'(t) + F'(t)^* = F(t), \quad (3.1.45)$$

$$|M'(x, y, t)|^2 = M(x, y, t). \quad (3.1.46)$$



La ecuación presentada en (3.1.42) representa la evolución temporal para el estado cuántico de las partículas en la región de campo magnético del aparato de Stern-Gerlach, cuando los grados internos de libertad son dados por una mezcla estadística de estados y cuando *el espín es arbitrario*; esto último implica que (3.1.42) predice la evolución temporal para partículas con cualquier espín; para obtener dicha dinámica, simplemente basta sustituir los valores del número cuántico magnético  $m_s$  asociado a un espín determinado; por lo tanto la expresión (3.1.42) predice la dinámica establecida por (Benítez et al. (2017b)) en la versión corregida del artículo<sup>2</sup> (Benítez et al. (2017a)), para esto, simplemente basta tomar  $m_s = -1/2, 1/2$  y  $\mu_c = \hbar\nu_s/2$  en (3.1.42) y el resultado para  $s = 1/2$  es exactamente recuperado. Pero quizá el aspecto más importante de la ecuación (3.1.42) es que *representa un estado enredado*. Este enredamiento cuántico, no se refiere a dos objetos físicos distintos, más bien hace referencia al enredamiento que surge entre las dos distintas eigenbases utilizadas para describir los grados de libertad de las partículas; claramente esta es una interpretación que no está de acuerdo con la que es usualmente presentada en algunos libros de texto (Sakurai (1995)), (Townsend, 2000), donde se explica semiclassicalmente que las partículas en el campo magnético son separadas, según su espín, debido a la acción de la fuerza  $\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$ ; esta interpretación evoca el hecho de que las partículas adquieren trayectorias clásicas desde su interacción con el campo magnético hasta su impacto en la pantalla detectora del aparato; sin embargo, a la luz del segundo postulado de la mecánica cuántica, la ecuación (3.1.42) no representa un estado resultante de una medición (vea el segundo postulado de la mecánica cuántica en la sección 2.1), más bien, el resultado (3.1.42) está en armonía con la interpretación de Patil (Patil (1998)) quien argumenta que la función de onda que representa a las componentes de espín de las partículas sufre una separación espacial debido a la influencia de la energía potencial que surge de la interacción entre el momento angular de espín y el campo magnético. Esta separación es evidente en (3.1.42): a cada componente discreta de espín,  $|s, m_s\rangle$ , le corresponde una función Gaussiana  $\phi_{m_s(z)} = e^{[F(t)(z+m_s A(t))^2]}$  que evoluciona de una forma espacialmente distinta según su número cuántico magnético  $m_s$ . Entonces, bajo la luz de un tratamiento mecánico cuántico completo la adquisición de propiedades cualitativas (como trayectorias, posición, momento, etc.) en el sistema cuántico de las partículas del experimento de Stern-Gerlach, sólo es posible bajo una medición, y tal medición es llevada a cabo *únicamente* en la pantalla detectora del aparato.

### 3.1.3 El caso para una superposición de estados de espín (el caso puro)

En esta sección se da solución a la situación uno, planteada en la sección 1.2, es decir cuando los grados internos de libertad de las partículas son descritos a través de una superposición de estados de espín; por simplicidad y al igual que en la sección anterior, se representa tal superposición a través de los eigenestados de los operadores  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{S}_z$ , entonces son satisfechas las ecuaciones (3.1.1) y (3.1.2) (para una comprensión clara del desarrollo expuesto en esta sección, se recomienda al lector comenzar una lectura concienzuda de la sección 3.1.2). El hecho de que los grados internos de libertad sean representados a través de una superposición de estados de espín implica que el haz de partículas se polariza previo a su entrada al campo magnético del aparato. En la sección 2.2.3, se mostró que, al asociar una matriz de densidad a una superposición de estados, se obtienen términos de interferencia entre las amplitudes de probabilidad del estado; se analizará en la sección 3.1.4 que al considerar estos efectos de interferencia, la cantidad de enredamiento entre los grados de libertad de las partículas se ve directamente afectada.

Los grados internos de libertad de las partículas son representados por una superposición gene-

<sup>2</sup>Un corrigendum para el artículo original ha sido publicado, donde se ha corregido un pequeño error (un signo) en dos de los términos que conforman el operador de evolución factorizado del sistema.

## 3.1 Solución al problema

ral de la forma

$$|\chi\rangle = \sum_{m_s} C_{m_s} |s, m_s\rangle, \quad (3.1.47)$$

donde el valor  $C_{m_s}$  es la amplitud de probabilidad asociada a cada estado  $|s, m_s\rangle$ . Al igual que en el caso para una mezcla estadística de estados de espín (analizado en la sección 3.1.2), la sumatoria es evaluada para los posibles valores del número cuántico magnético  $m_s$ , el cual adquiere valores según las ecuaciones (3.1.4) y (3.1.5). Por ejemplo, en la sección anterior se mostró que los valores  $m_s$  para los casos específicos de  $s = 1/2$  y  $s = 1$  son, respectivamente,  $-1/2, 1/2$  y  $-1, 0, 1$ , entonces las superposiciones de estados de espín para tales casos serán dadas, según la ecuación (3.1.47) por

$$|\chi\rangle = C_{-1/2} |1/2, -1/2\rangle + C_{1/2} |1/2, 1/2\rangle, \quad (3.1.48)$$

$$|\chi\rangle = C_{-1} |1, -1\rangle + C_0 |1, 0\rangle + C_1 |1, 1\rangle, \quad (3.1.49)$$

que, en notación coloquial de flechas, las ecuaciones anteriores pueden ser escritas como

$$|\chi\rangle = C_{-1/2} |\downarrow\rangle + C_{1/2} |\uparrow\rangle, \quad (3.1.50)$$

$$|\chi\rangle = C_{-1} |\downarrow\rangle + C_0 |\rightarrow\rangle + C_1 |\uparrow\rangle; \quad (3.1.51)$$

note que si se toma  $C_{-1/2} = \beta$  y  $C_{1/2} = \alpha$  en (3.1.50), se recupera la superposición dada por Benítez et. al (Benítez et al. (2017b)) (Benítez et al., 2017a) en la ecuación (32) de su artículo. La ecuación (3.1.47) representa una expresión general a partir de la cual puede obtenerse cualquier superposición de estados de espín para un número  $s$  cualquiera. Los grados externos de libertad de las partículas, siguen siendo representados por el paquete de ondas Gaussiano dado por (3.1.11), entonces, el estado inicial será dado por el producto entre (3.1.11) y (3.1.47)

$$|\psi(\mathbf{r}, t = 0)\rangle = \psi(\mathbf{r}, t = 0) \left( \sum_{m_s} C_{m_s} |s, m_s\rangle \right). \quad (3.1.52)$$

Por el tercer postulado de la mecánica cuántica expuesto en la sección 2.1, la dinámica temporal del estado anterior se obtiene aplicando el operador de evolución  $\mathbf{U}(t)$  dado por (2.3.33), de la forma

$$|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle = \mathbf{U}(t) |\psi(\mathbf{r}, t = 0)\rangle = \sum_{m_s} C_{m_s} \mathbf{U}(t) \psi(\mathbf{r}) |s, m_s\rangle, \quad (3.1.53)$$

pero note que el término  $\mathbf{U}(t) \psi(\mathbf{r}) |s, m_s\rangle$  ya ha sido calculado en la sección 3.1.2 y es dado por la ecuación (3.1.38), entonces simplemente sustitúyalo en (3.1.53) para obtener

$$|\psi(\mathbf{r}, t)\rangle = \sum_{m_s} C_{m_s} M'(x, y, t) \exp \left[ -\frac{it\nu_s \hbar}{\hbar} (B_0 + \alpha z) m_s \right] \exp \left[ F'(t) (z + m_s A(t))^2 \right] |s, m_s\rangle, \quad (3.1.54)$$

donde las funciones  $M'(x, y, t)$ ,  $F'(t)$ ,  $A(t)$  son dadas por las ecuaciones (3.1.39), (3.1.40) y (3.1.41) respectivamente. La ecuación (3.1.54), al igual que (3.1.42) representa una ecuación a partir de la cual puede obtenerse la evolución temporal del estado cuántico de las partículas cuando sus grados internos de libertad son representados a través de una superposición de estados de espín, es decir cuando las partículas son polarizadas previo a la entrada del campo magnético del aparato, además, note que si toma  $m_s = -1/2, 1/2$  y  $\mu_c = \hbar\nu_s/2$  en (3.1.54), el resultado para  $s = 1/2$  establecido por Benítez et. al (Benítez et al. (2017b)) (Benítez et al., 2017a) en la ecuación (34) de su artículo es exactamente recuperado. Nuevamente se obtiene un enredamiento cuántico entre la parte continua (posición) y la parte discreta (espín) del sistema: a cada estado de espín  $|s, m_s\rangle$  le corresponde una función Gaussiana  $\langle z | \phi_{m_s} \rangle = [-(it\nu_s \hbar / \hbar) (B_0 + \alpha z) m_s] \exp [F'(t) (z + m_s A(t))^2]$  que evoluciona en regiones espacialmente distintas según el valor  $m_s$  asociado a un espín  $s$  determinado.

### 3.1.4 Midiendo el enredamiento

La cantidad de enredamiento entre los grados de libertad de los átomos en el experimento de Stern-Gerlach puede ser medida a través de la entropía de Von Neumann (vea la sección 2.4), concepto utilizado para cuantificar la cantidad de enredamiento de sistemas puros bipartitos entrelazados. En esta sección se considera el caso cuando el estado puro entrelazado dado en (3.1.54) puede alcanzar la cantidad máxima de entrelazamiento posible, i.e.  $E = 1$ . Para comenzar el análisis tome el operador de densidad del estado general dado en (3.1.54), que, por la ecuación (2.1.2), será dado por el producto externo  $\rho = |\psi(\mathbf{r}, t)\rangle\langle\psi(\mathbf{r}, t)|$ , entonces, este operador de densidad será

$$\begin{aligned} \rho &= M(x, y, t) \sum_{m_s} \sum_{m'_s} C_{m_s} C_{m'_s}^* \exp \left[ -\frac{it\nu_s \hbar}{\hbar} (B_0 + \alpha z)(m_s - m'_s) \right] \\ &\times \exp \left[ F'(t)(z + A(t)m_s)^2 + F'(t)^*(z + A(t)m'_s)^2 \right] |s, m_s\rangle\langle s, m'_s|, \end{aligned} \quad (3.1.55)$$

donde se ha utilizado la ecuación (3.1.46). Como lo muestra la ecuación (2.4.1), la cantidad de enredamiento  $E(\psi(\mathbf{r}, t))$  asociada al estado general (3.1.54) puede ser obtenida a través de cualquiera de las matrices de densidad reducidas que describen los grados de libertad de los átomos; sin embargo, en la sección 2.4 se afirmó que en este trabajo se utilizará la matriz de densidad  $\rho^s$  asociada a los grados internos de libertad; la razón para esto es bastante simple: esta matriz tiene elementos discretos, mientras que aquella asociada a los grados externos de libertad es de carácter continuo, y, dada la mayor facilidad de trabajar con matrices discretas, por mera simplicidad matemática, se elige  $\rho^s$  para caracterizar el enredamiento, además, en la literatura científica, es común utilizar esta matriz para caracterizar el enredamiento (Harshman, 2007), (Roston et al., 2005). La matriz reducida  $\rho^s$  se puede obtener como (Harshman, 2007), (Roston et al., 2005)

$$\begin{aligned} \rho^s &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (M(x, y, t) \sum_{m_s} \sum_{m'_s} C_{m_s} C_{m'_s}^* \exp \left[ -\frac{it\nu_s \hbar}{\hbar} (B_0 + \alpha z)(m_s - m'_s) \right] \\ &\times \exp \left[ F'(t)(z + A(t)m_s)^2 + F'(t)^*(z + A(t)m'_s)^2 \right] |s, m_s\rangle\langle s, m'_s|) \, dx dy dz, \end{aligned} \quad (3.1.56)$$

la integral de la ecuación anterior se resuelve en el apéndice en la sección 4.1, el resultado es

$$\rho^s = \sum_{m_s} \sum_{m'_s} C_{m_s} C_{m'_s}^* \exp(\zeta_{m_s, m'_s}) |s, m_s\rangle\langle s, m'_s|, \quad (3.1.57)$$

con

$$\zeta_{m_s, m'_s} = -\frac{t\nu_s(m_s - m'_s) [32iB_0m^2\sigma^2 + \alpha^2t\nu_s \{(\hbar^2t^2 + 16m^2\sigma^4)(m_s - m'_s) - 8i\hbar m t\sigma^2(m_s + m'_s)\}]}{32m^2\sigma^2}, \quad (3.1.58)$$

la expresión (3.1.57) representa la matriz de densidad reducida que describe los grados internos de libertad de partículas de espín *arbitrario* en el experimento de Stern-Gerlach. Sean denotados los elementos matriciales de esta matriz por  $q_{m_s, m'_s}$ ; aquellos elementos que se encuentran fuera de la diagonal principal (cuando  $m_s \neq m'_s$ ), satisfacen

$$q_{m_s, m'_s} = q_{m'_s, m_s}^*, \quad (3.1.59)$$

es decir, el elemento en la  $m_s$ -ésima fila y  $m'_s$ -ésima columna es igual al complejo conjugado del elemento situado en la  $m'_s$ -ésima fila y la  $m_s$ -ésima columna. Estos elementos matriciales son dados por exponenciales decrecientes, de manera que, a un determinado tiempo  $t =$ , éstos serán nulos y la matriz (3.1.57) será netamente diagonal; esto es fácil de verificar dado que la potencia  $\zeta_{m_s, m'_s}$  dada

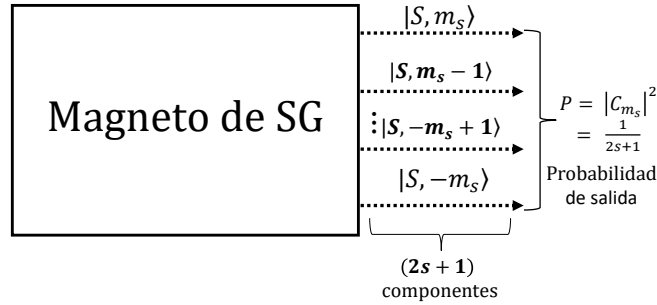


Figura 3.1: Los elementos  $|C_{m_s}|^2$  representan las probabilidades de salida para una componente  $|s, m_s\rangle$  cuando una medición de la observable  $\mathbf{S}_z$  es realizada. para una partícula de espín arbitrario existen  $2s + 1$  posibles componentes, la ecuación (3.1.60) implica que todas las componentes son igualmente probables de obtener.

por (3.1.58) es negativa; el decaimiento de tales elementos muestra que, para un ensamble puro, el efecto del campo magnético del aparato sobre las partículas es destruir gradualmente la superposición coherente que describe su espín, de manera que a al tiempo  $t = \tau$ , el espín del ensamble de partículas será descrito totalmente por una mezcla estadística de estados dada por una matriz de densidad reducida  $\rho^s$  exactamente igual a la que se obtiene de (3.1.42) y que puede ser calculada de la misma manera que en (3.1.56). Los elementos de la diagonal principal de (3.1.58) (cuando  $m_s = m'_s$ ) son dados por los módulos al cuadrado  $|C_{m_s}|^2$  de las amplitudes de probabilidad de la superposición (3.1.47); esto se verifica fácilmente dado que la potencia  $\zeta_{m_s, m'_s}$  dada por (3.1.58) es cero cuando  $m_s = m'_s$ , y, en consecuencia, los exponentes de (3.1.57) se reducen a uno; por lo anterior, los elementos de la diagonal principal de  $\rho^s$  deben ser reales; para que las partículas alcancen el máximo entrelazamiento posible, es necesario que dichos elementos sean de la forma (Harshman, 2007)

$$q_{m_s, m_s} = |C_{m_s}|^2 = \frac{1}{2s + 1}, \quad (3.1.60)$$

Puesto que los grados internos de libertad de las partículas (su espín) son representados por la superposición lineal dada en (3.1.47), entonces los módulos al cuadrado de los coeficientes complejos  $C_{m_s}$  con que se construye dicha superposición representan las probabilidades de salida para una componente discreta  $|s, m_s\rangle$  dada una medición de la componente de espín  $\mathbf{S}_z$  (dado que los elementos  $|s, m_s\rangle$  son eigenestados de  $\mathbf{S}_z$ , vea (Cohen-Tannoudji et al., 1977) pág. 253). Entonces, la ecuación (3.1.60) implica que es igualmente probable obtener una componente discreta para un espín determinado (vea la figura 3.1). Para obtener una matriz  $\rho^s$  para un espín específico, basta sustituir las combinaciones de los números  $m_s$  y  $m'_s$  en la potencia  $\zeta_{m_s, m'_s}$  dada por (3.1.58) y realizar los productos diádicos  $|s, m_s\rangle\langle s, m'_s|$  que supone la ecuación (3.1.57); son estos productos los que dan el carácter matricial a  $\rho^s$ , puesto que, en el formalismo, los estados  $|s, m_s\rangle$  son representados por matrices columna de dimensión  $(2s + 1) \times 1$  con un único elemento no nulo e igual a 1, que va descendiendo en la posición de la columna de elementos de la matriz a medida que el número  $m_s$  disminuye. Para una mayor transparencia, se desarrollan las matrices para los casos  $s = 1/2, 1, 3/2$ , y se procede a calcular su cantidad de enredamiento  $E(\psi(\mathbf{r}, t))$ . Para  $s = 1/2$  se tiene que los números  $m_s$  y  $m'_s$  adquieren los valores de  $-1/2, 1/2$ , y las combinaciones para estos números son:  $(1/2, 1/2), (1/2, -1/2), (-1/2, 1/2), (-1/2, -1/2)$ , sustituyéndolas en (3.1.58) y utilizando (3.1.60) y (3.1.59) la matriz (3.1.57) para  $s = 1/2$  tendrá la forma

$$\rho_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & C_{1/2} C_{-1/2}^* \exp(\zeta_0) \\ C_{-1/2} C_{1/2}^* \exp(\zeta_0^*) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.1.61)$$

con:

$$\zeta_0 = -\frac{t\nu_s}{32} \left( 32iB_0 + \frac{b^2 t \nu_s \{ \hbar^2 t^2 + 16m^2 \sigma^4 \}}{m^2 \sigma^2} \right), \quad (3.1.62)$$

y donde se ha utilizado el conjunto base  $\{|1/2, m_s\rangle\}$

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.63)$$

Para  $s = 1$  se tiene que los números  $m_s$  y  $m'_s$  adquieren los valores de  $-1, 0, 1$  y las combinaciones para estos números son:  $(1, 1), (1, 0), (1, -1), (0, 1), (0, 0), (0, -1), (-1, 1), (-1, 0), (-1, -1)$ , sustituyéndolas en (3.1.58) y utilizando (3.1.60) y (3.1.59) la matriz (3.1.57) para  $s = 1$  tendrá la forma

$$\rho^s = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & C_1 C_0^* \exp(\zeta_1) & C_1 C_{-1}^* \exp(\zeta_2) \\ C_0 C_1^* \exp(\zeta_1^*) & \frac{1}{3} & C_0 C_{-1}^* \exp(\zeta_3) \\ C_{-1} C_1^* \exp(\zeta_2^*) & C_{-1} C_0^* \exp(\zeta_3^*) & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad (3.1.64)$$

con

$$\zeta_1 = -\frac{t\nu_s}{32} \left( 32iB_0 + \frac{b^2 t \nu_s \{ \hbar^2 t^2 - 8i\hbar m t \sigma^2 + 16m^2 \sigma^4 \}}{m^2 \sigma^2} \right), \quad (3.1.65)$$

$$\zeta_2 = -\frac{t\nu_s}{8} \left( 16iB_0 + \frac{b^2 t \nu_s \{ \hbar^2 t^2 + 16m^2 \sigma^4 \}}{m^2 \sigma^2} \right), \quad (3.1.66)$$

$$\zeta_3 = -\frac{t\nu_s}{32} \left( 32iB_0 + \frac{b^2 t \nu_s \{ \hbar^2 t^2 + 8i\hbar m t \sigma^2 + 16m^2 \sigma^4 \}}{m^2 \sigma^2} \right), \quad (3.1.67)$$

y donde ahora se ha utilizado el conjunto base  $\{|1, m_s\rangle\}$

$$|1, 1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1, 0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1, -1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.68)$$

Para  $s = 3/2$  se tiene que los números  $m_s$  y  $m'_s$  adquieren los valores de  $-3/2, -1/2, 1/2, 3/2$  y las combinaciones para estos números son:  $(3/2, 3/2), (3/2, 1/2), (3/2, -1/2), (3/2, -3/2), (1/2, 3/2), (1/2, 1/2), (1/2, -1/2), (1/2, -3/2), (-1/2, 3/2), (-1/2, 1/2), (-1/2, -1/2), (-1/2, -3/2), (-3/2, 3/2), (-3/2, 1/2), (-3/2, -1/2), (-3/2, -3/2)$ , sustituyéndolas en (3.1.58) y utilizando (3.1.60) y (3.1.59) la matriz (3.1.57) para  $s = 3/2$  tendrá la forma

$$\rho^s = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & C_{3/2} C_{1/2}^* \exp(\zeta_4) & C_{3/2} C_{-1/2}^* \exp(\zeta_5) & C_{3/2} C_{-3/2}^* \exp(\zeta_6) \\ C_{1/2} C_{3/2}^* \exp(\zeta_4^*) & \frac{1}{4} & C_{1/2} C_{-1/2}^* \exp(\zeta_7) & C_{1/2} C_{-3/2}^* \exp(\zeta_8) \\ C_{-1/2} C_{3/2}^* \exp(\zeta_5^*) & C_{-1/2} C_{1/2}^* \exp(\zeta_7^*) & \frac{1}{4} & C_{-1/2} C_{-3/2}^* \exp(\zeta_9) \\ C_{-3/2} C_{3/2}^* \exp(\zeta_6^*) & C_{-3/2} C_{1/2}^* \exp(\zeta_8^*) & C_{-3/2} C_{-1/2}^* \exp(\zeta_9^*) & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad (3.1.69)$$

con

$$\zeta_4 = -\frac{t\nu_s}{32} \left( 32iB_0 + \frac{b^2 t \nu_s \{ \hbar^2 t^2 - 16i\hbar m t \sigma^2 + 16m^2 \sigma^4 \}}{m^2 \sigma^2} \right), \quad (3.1.70)$$

$$\zeta_5 = -\frac{t\nu_s}{8} \left( 16iB_0 + \frac{b^2 t \nu_s \{ \hbar^2 t^2 - 4i\hbar m t \sigma^2 + 16m^2 \sigma^4 \}}{m^2 \sigma^2} \right), \quad (3.1.71)$$

$$\zeta_6 = -\frac{3t\nu_s}{32} \left( 32iB_0 + \frac{3b^2 t \nu_s \{ \hbar^2 t^2 + 16m^2 \sigma^4 \}}{m^2 \sigma^2} \right), \quad (3.1.72)$$

$$\zeta_7 = -\frac{t\nu_s}{32} \left( 32iB_0 + \frac{b^2 t \nu_s \{ \hbar^2 t^2 + 16m^2 \sigma^4 \}}{m^2 \sigma^2} \right), \quad (3.1.73)$$

## 3.1 Solución al problema

$$\zeta_8 = -\frac{t\nu_s}{8} \left( 16iB_0 + \frac{b^2 t \nu_s \{ \hbar^2 t^2 + 4i\hbar m t \sigma^2 + 16m^2 \sigma^4 \}}{m^2 \sigma^2} \right), \quad (3.1.74)$$

$$\zeta_9 = -\frac{t\nu_s}{32} \left( 32iB_0 + \frac{b^2 t \nu_s \{ \hbar^2 t^2 + 16i\hbar m t \sigma^2 + 16m^2 \sigma^4 \}}{m^2 \sigma^2} \right), \quad (3.1.75)$$

y donde esta vez se ha utilizado el conjunto base  $\{|3/2, m_s\rangle\}$

$$|3/2, 3/2\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |3/2, 1/2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |3/2, -1/2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |3/2, -3/2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.76)$$

El enredamiento para los sistemas de espín  $s = 1/2, 1$  y  $3/2$  será caracterizado por los eigenvalores de las matrices (3.1.61), (3.1.64) y (3.1.69); los cuales se hallan resolviendo el polinomio característico

$$|\boldsymbol{\rho}^s - \lambda_{m_s} \mathbf{I}| = 0, \quad (3.1.77)$$

siendo  $\mathbf{I}$  la matriz identidad y  $\lambda_{m_s}$  los eigenvalores de  $\boldsymbol{\rho}^s$ . En general los polinomios característicos son de orden  $(2s + 1)$ , entonces hay  $(2s + 1)$  eigenvalores. Para las matrices (3.1.61), (3.1.64) y (3.1.69) los polinomios característicos son, respectivamente

$$(1/2 - \lambda_{1/2})^2 - (1/2)^2 e^{[l]} = 0, \quad (3.1.78)$$

$$(1/3 - \lambda_1)^3 - (1/3)^2 e^{[4l]} \left( 1 + 2e^{[-3l]} \right) (1/3 - \lambda_1) + 2(1/3)^3 e^{[3l]} = 0, \quad (3.1.79)$$

$$(1/4 - \lambda_{3/2})^4 - \frac{1}{16} e^{[9l]} \left( 1 + 2e^{[-5l]} + 3e^{[-8l]} \right) (1/4 - \lambda_{3/2})^2 + \frac{1}{16} e^{[7l]} \left( 1 + e^{[-4l]} \right) (1/4 - \lambda_{3/2}) + \kappa = 0, \quad (3.1.80)$$

con

$$\kappa = \frac{1}{256} \exp [10l] \{ 1 - 2 \exp [-l] + \exp [-2l] - 2 \exp [-4l] - 2 \exp [-5l] + \exp [-8l] \}, \quad (3.1.81)$$

y

$$l = - \left( \frac{\alpha t \nu_s}{4m\sigma} \right)^2 \left[ (\hbar t)^2 + (4m\sigma^2)^2 \right], \quad (3.1.82)$$

La solución a los polinomios característicos (3.1.78), (3.1.79) y (3.1.80) se ha obtenido mediante *Wolfram Mathematica 10.4*, la sintaxis se deja en el apéndice en la sección 4.2. sus valores son, respectivamente

$$\lambda_{1/2} = 1/2 \pm 1/2 e^{[l/2]}, \quad (3.1.83)$$

$$\lambda_1 = 1/3 - (1/6) e^{2l} \left( -1 \pm \sqrt{1 + 8e^{-3l}} \right), \quad (3.1.84)$$

$$\lambda_1 = 1/3 - 1/3 e^{2l}, \quad (3.1.85)$$

$$\lambda_{3/2} = \frac{1}{4} - \frac{e^{l/2} (1 + e^{4l}) \pm \sqrt{5e^l - 8e^{5l/2} + 4e^{4l} - 2e^{5l} + e^{9l}}}{8}, \quad (3.1.86)$$

$$\lambda_{3/2} = \frac{1}{4} + \frac{e^{l/2} (1 + e^{4l}) \pm \sqrt{5e^l + 8e^{5l/2} + 4e^{4l} - 2e^{5l} + e^{9l}}}{8}. \quad (3.1.87)$$

Los eigenvalores  $\lambda_{m_s}$  tienen una interpretación física desde un punto de vista experimental: representan las tasas de conteo normalizadas medidas por el detector del aparato de Stern-Gerlach (Jeske et al., 2011); además, note que dependen, por la ecuación (3.1.82), del ancho inicial del paquete

de ondas  $\sigma$ , la masa  $m$  de las partículas, la constante de Planck reducida  $\hbar$ , la inhomogeneidad  $\alpha$  del campo magnético (vea la ecuación (2.3.7)) del aparato de Stern-Gerlach y la variable temporal  $t$ , la cual hace referencia a tiempos de estancia de las partículas en la región de campo magnético del aparato de Stern-Gerlach. Un punto interesante es que la componente constante  $B_0$  del campo magnético no interviene en la cantidad de enredamiento del sistema. Tome unidades naturales, entonces  $\hbar = 1$ ,  $m = 1$  y, por simplicidad, tome  $\nu_s = 1$ , entonces, sustituya los eigenvalores (3.1.78) a (3.1.80) en (2.4.9) para obtener la cantidad de enredamiento  $E(|\psi(\mathbf{r}, t)|)$  como una función del tiempo  $t$  para los casos  $s = 1/2, 1, 3/2$ ; en las figuras 3.1 y 3.2 se muestran juntas dichas gráficas, tomando tres valores distintos para la constante  $\alpha$  asociada a la inhomogeneidad del campo magnético y tres valores distintos para el parámetro  $\sigma$  que representa el ancho inicial del paquete de ondas. La cantidad  $E(|\psi(\mathbf{r}, t)|)$  ha sido normalizada a través del factor  $1/\ln(2s+1)$  (es decir para los casos  $s = 1/2, 1, 3/2$  se ha normalizado a través de los factores  $1/\ln(2)$ ,  $1/\ln(3)$ ,  $1/\ln(4)$  respectivamente) con la finalidad de cumplir la condición de acotamiento dada en (2.4.10). Las gráficas 3.1 y 3.2 han sido obtenidas a través del software *Wolfram Mathematica 10.4*, la sintaxis se deja en el apéndice en la sección 4.3. ¿Que información puede ser extraída de estas gráficas? para responder esta pregunta, tome  $\tau$  como el tiempo al cual cada sistema de espín  $s$  alcanza un ebit de enredamiento (esto es  $E(|\psi(\mathbf{r}, t)|) = 1$ , es decir la máxima cantidad de enredamiento); entonces, note que las gráficas 3.1 y 3.2 muestran (para un valor específico de  $\sigma$  o  $\alpha$ ) que todos los sistemas de espín alcanzan el ebit al mismo tiempo  $\tau$ ; sin embargo, al tiempo  $t < \tau$ , un sistema con espín  $s$  presenta una cantidad de enredamiento mayor que otro sistema de espín  $s'$ , tal que  $s > s'$ ; así, la cantidad de enredamiento  $E(|\psi(\mathbf{r}, t)|)$  para  $s = 3/2$  es mayor para el caso de  $s = 1$  y a su vez el enredamiento para  $s = 1$  es mayor que el de  $s = 1/2$ . Note que la figura 3.1 muestra que el tiempo de máximo enredamiento  $\tau$  se ve disminuido a medida que la inhomogeneidad  $\alpha$  del campo magnético del aparato aumenta en magnitud, mientras que la figura 3.2 muestra que este tiempo es disminuido a medida que disminuye el ancho inicial  $\sigma$  del paquete de ondas que representa a las partículas. A medida que el tiempo transcurre, los elementos fuera de la diagonal principal de las matrices (3.1.61), (3.1.64) y (3.1.69) tienden a cero; esto es fácil de comprobar dado que estos elementos son exponenciales Gaussianos con potencia negativa dada por la ecuación (3.1.58). Note, entonces, que estas matrices al tiempo  $\tau$  serán netamente diagonales y, de hecho, tendrán exactamente la misma forma que la representación matricial para el operador de densidad  $\rho^s$  asociado al caso de la mezcla estadística de estados dado en la ecuación (3.1.42).

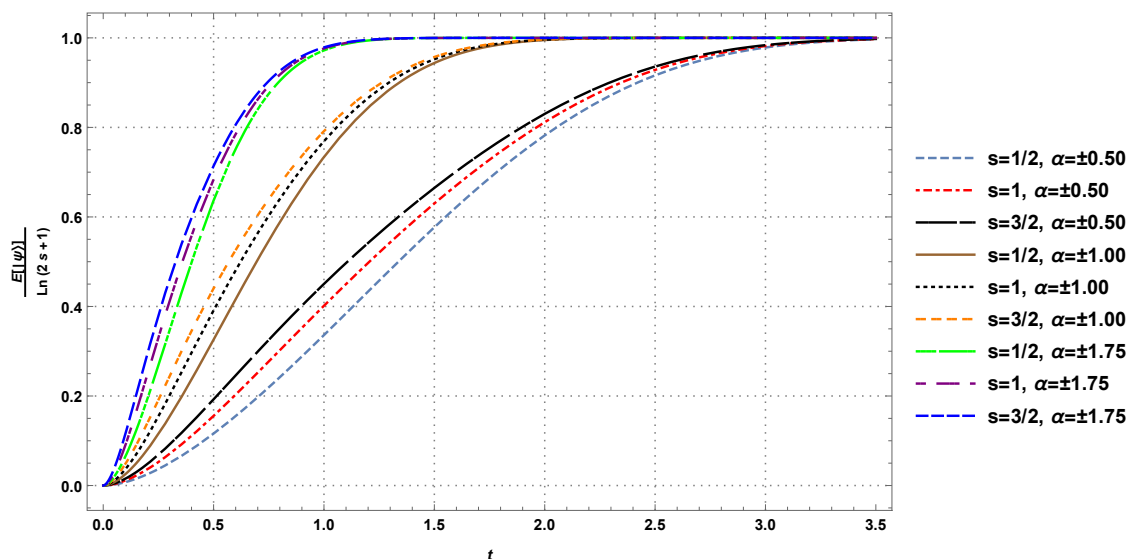


Figura 3.1: Dependencia temporal de la entropía de Von Neumann normalizada  $E(|\psi(\mathbf{r}, t)|)/\ln(2s+1)$  en el experimento de Stern-Gerlach para los espines  $s = 1/2, 1, 3/2$ , para distintos valores de la inhomogeneidad  $\alpha$  del campo magnético  $\mathbf{B}(x, y)$  del aparato de Stern-Gerlach.  $\alpha = \pm 0.50, \pm 1.00, \pm 1.75$  con  $\sigma = 1, m = 1, \nu_s = 1$ .

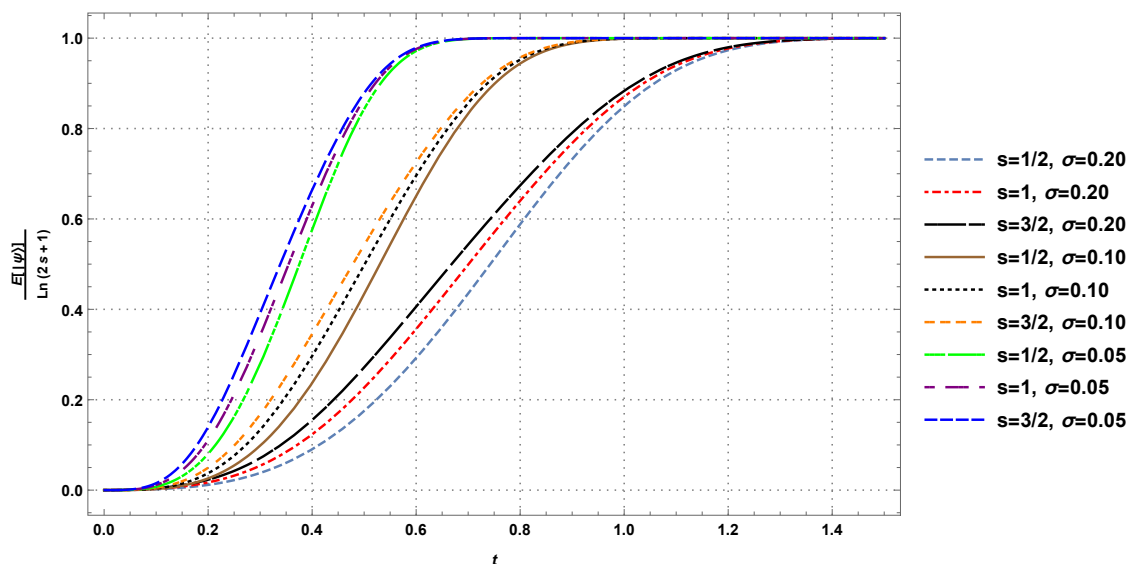


Figura 3.2: Dependencia temporal de la entropía de Von Neumann normalizada  $E[|\psi|]/\ln(2s+1)$  en el experimento de Stern-Gerlach para los espines  $s = 1/2, 1, 3/2$  para distintos valores del ancho inicial  $\sigma$  del paquete de ondas que representa a las partículas.  $\sigma = 0.20, 0.10, 0.05$  con  $\alpha = 1, m = 1, \nu_s = 1$ .



### 3.1.5 Un magneto como un dispositivo polarizador

En la sección previa se analizó el caso cuando las salidas finales para el haz de partículas son equiprobables, es decir, los elementos de la diagonal principal de las matrices reducidas  $\hat{\rho}^s$  son todos de la forma  $1/(2s+1)$ , esta asunción permite estudiar el caso cuando estas matrices evolucionan en un estado máximamente mixto y por lo tanto cuando el máximo entrelazamiento posible ocurre (i.e.  $E=1$ ) a determinado tiempo  $\tau$  (Harshman, 2007).

En la práctica, el proceso de polarización se lleva a cabo por un dispositivo que consiste de un magneto que separa las componentes de espín respecto a una dirección determinada y donde solamente una de estas componentes es seleccionada a fin de entrar al campo magnético del aparato de Stern-Gerlach (este mecanismo de polarización ya se ha empleado experimentalmente, vea por ejemplo (Jeske et al., 2011)), esta configuración experimental es equivalente a tener dos magnetos de Stern-Gerlach secuenciales e implica matemáticamente que los elementos de la diagonal principal de las matrices reducidas  $\rho^s$  no necesariamente satisfacen la ecuación (3.1.60).

A partir del trabajo de Tekin (Tekin, 2016) puede derivarse una expresión para las amplitudes de probabilidad  $C_{m_s}$  con la que es construida la superposición dada en (3.1.47), tales amplitudes dependerán de la dirección de polarización en la cual el dispositivo polarizador prepara los grados internos de libertad de las partículas; dicha expresión es

$$C_{m_s} = \frac{1}{2^s} (1 + \cos \theta)^s \left( \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^{\binom{n_s - m_s}{2}} \sum_k (-1)^{k - n_s + m_s} \Gamma_{mk}^s \left( \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^k e^{-im_s \phi}, \quad (3.1.88)$$

Donde  $s$  es el número de espín,  $n_s$  es el número cuántico magnético de la dirección en la cual son polarizadas las partículas en el dispositivo polarizador, dicha dirección es dada por un vector unitario  $\hat{n}$  medido en coordenadas esféricas, por lo tanto,  $\phi$  y  $\theta$  son los ángulos azimutal y polar asociados a  $\hat{n}$ . El número  $m_s$  es el número cuántico magnético que ha sido utilizado a lo largo de este trabajo y el cual es asociado a las componentes discretas de espín que describen los grados internos de libertad de las partículas a la salida del magneto principal del aparato, respecto de la dirección  $z$ . El término  $\Gamma_{mk}^s$  es dado por

$$\Gamma_{mk}^s = \frac{\sqrt{(s+n_s)!(s-n_s)!(s+m_s)!(s-m_s)!}}{k!(s+n_s-k)!(s-k-m_s)!(k-n_s+m_s)!}, \quad (3.1.89)$$

Donde la suma en (3.1.88) es evaluada sobre todos los valores enteros de  $k$  que no dan argumentos negativos en los factoriales de (3.1.89). La configuración descrita en esta sección es mostrada en la figura 3.3. Entonces cuando es utilizado un magneto como dispositivo polarizador, las amplitudes  $C_{m_s}$  que aparecen en (3.1.57) serán funciones de  $\theta$  y  $\phi$ , y pueden ser obtenidas a partir de (3.1.88) y (3.1.89). En esta sección se analiza nuevamente el caso para cuando el espín de las partículas toma los valores  $s = 1/2, 1, 3/2$ . En el cuadro 3.1 se muestran las diferentes amplitudes de probabilidad asociadas a las posibles salidas finales de la función de onda que representa a las partículas, considerando las distintas combinaciones de los números cuánticos magnéticos  $n_s$  y  $m_s$  para los tres casos específicos de espín mencionados anteriormente.

## 3.1 Solución al problema

Espín	Componente $n_s$	Componente $m_s$	Amplitud $C_{m_s}(\theta, \phi)$
1/2	1/2	1/2	$e^{-i\phi/2}(1 + \cos \theta)^{1/2}/\sqrt{2}$
		-1/2	$e^{i\phi/2}(1 - \cos \theta)^{1/2}/\sqrt{2}$
	-1/2	1/2	$-e^{-i\phi/2}(1 - \cos \theta)^{1/2}/\sqrt{2}$
		-1/2	$e^{i\phi/2}(1 + \cos \theta)^{1/2}/\sqrt{2}$
1	1	1	$e^{-i\phi}(1 + \cos \theta)/2$
		0	$\sin \theta/\sqrt{2}$
		-1	$e^{i\phi}(1 - \cos \theta)/2$
	0	1	$-e^{-i\phi} \sin \theta/\sqrt{2}$
		0	$\cos \theta$
		-1	$e^{i\phi} \sin \theta/\sqrt{2}$
	-1	1	$e^{-i\phi}(1 - \cos \theta)/2$
		0	$-\sin \theta/\sqrt{2}$
-1		$e^{i\phi}(1 + \cos \theta)/2$	
3/2	3/2	3/2	$e^{-3i\phi/2}(1 + \cos \theta)^{3/2}/2\sqrt{2}$
		1/2	$e^{-i\phi/2} \left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right) (1 + \cos \theta)^{1/2} \sin \theta$
		-1/2	$e^{i\phi/2} \left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right) (1 - \cos \theta)^{1/2} \sin \theta$
		-3/2	$e^{3i\phi/2}(1 - \cos \theta)^{3/2}/2\sqrt{2}$
	1/2	3/2	$-e^{-3i\phi/2} \left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right) (1 + \cos \theta)^{1/2} \sin \theta$
		1/2	$e^{-i\phi/2} \frac{(1 + \cos \theta)^{3/2} - 2(1 - \cos \theta)^{1/2} \sin \theta}{2\sqrt{2}}$
		-1/2	$e^{i\phi/2} \frac{-(1 - \cos \theta)^{3/2} + 2(1 + \cos \theta)^{1/2} \sin \theta}{2\sqrt{2}}$
		-3/2	$e^{3i\phi/2} \left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right) (1 - \cos \theta)^{1/2} \sin \theta$
	-1/2	3/2	$e^{-3i\phi/2} \left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right) (1 - \cos \theta)^{1/2} \sin \theta$
		1/2	$e^{-i\phi/2} \frac{(1 - \cos \theta)^{3/2} - 2(1 + \cos \theta)^{1/2} \sin \theta}{2\sqrt{2}}$
		-1/2	$e^{i\phi/2} \frac{(1 + \cos \theta)^{3/2} - 2(1 - \cos \theta)^{1/2} \sin \theta}{2\sqrt{2}}$
		-3/2	$e^{3i\phi/2} \left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right) (1 + \cos \theta)^{1/2} \sin \theta$
	-3/2	3/2	$-e^{-3i\phi/2}(1 - \cos \theta)^{3/2}/2\sqrt{2}$
		1/2	$e^{-i\phi/2} \left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right) (1 - \cos \theta)^{1/2} \sin \theta$
		-1/2	$-e^{i\phi/2} \left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right) (1 + \cos \theta)^{1/2} \sin \theta$
		-3/2	$e^{3i\phi/2}(1 + \cos \theta)^{3/2}/2\sqrt{2}$

Cuadro 3.1: Diferentes amplitudes de probabilidad para los estados  $|s, m_s\rangle$  considerando todas las combinaciones de los números cuánticos  $n_s$  y  $m_s$ , para los casos de espín  $s = 1/2, 1, 3/2$ .

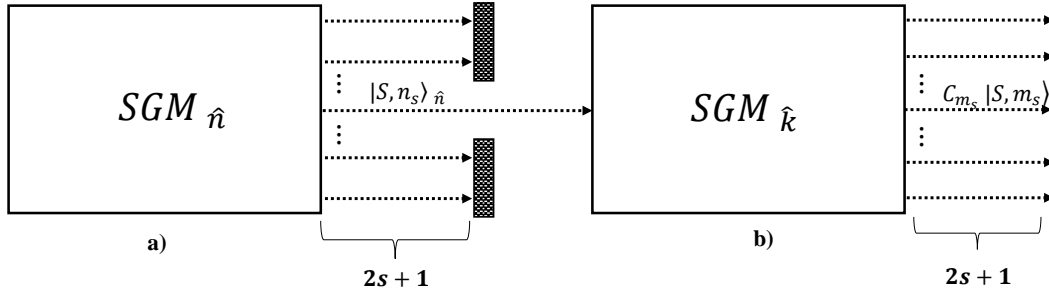


Figura 3.3: Configuración experimental para cuando es utilizado un magneto tipo Stern-Gerlach como dispositivo polarizador. a) las partículas de espín  $s$  son polarizadas en un Polarizador de Stern-Gerlach, el cual es en esencia un magneto que apunta en la dirección de un vector unitario  $\hat{n}$ ; la función de onda es separada en  $2s+1$  posibles componentes cuyos grados internos de libertad son representados por los estados  $|s, n_s\rangle_{\hat{n}}$ ; todas las componentes son bloqueadas excepto una, la cual, entra a b) el magneto del aparato de Stern-Gerlach, que apunta en la dirección  $\hat{k}$ ; aquí la función de onda es nuevamente separada en  $2s+1$  posibles componentes cuyos grados internos de libertad son representados por los eigenestados  $|s, m_s\rangle$  del operador de espín  $S_z$ ; las amplitudes de probabilidad  $C_{m_s}$  asociadas a estas últimas componentes, dependen de los números cuánticos  $n_s$  y  $m_s$ , el espín  $s$  de las partículas y los ángulos polar  $\theta$  y azimutal  $\phi$  de coordenadas esféricas asociada a  $\hat{n}$ .

Con el objetivo de estudiar el enredamiento entre los grados de libertad de las partículas, en este trabajo se calcula el valor máximo que  $E$  puede adquirir. Cuando se calcula el polinomio característico asociado a las matrices  $\rho^s$  a través de la ecuación (3.1.77), la dependencia en  $\phi$  es eliminada puesto que en el polinomio característico únicamente intervienen los módulos cuadrados de las amplitudes  $C_{m_s}$ , así, los eigenvalores de dichas matrices serán funciones del tiempo  $t$  y el ángulo polar  $\theta$ , consecuentemente, la cantidad de enredamiento  $E$  también dependerá únicamente de esas dos variables. Entonces, encontrar el valor máximo de  $E$  será equivalente a encontrar el valor máximo que puede adquirir una función de dos variables, sin embargo el problema es simplificado a una sola variable si se considera que el máximo entrelazamiento ocurre al tiempo  $\tau$  cuando todos los elementos no diagonales de las matrices dadas en (3.1.57) han decaído totalmente, así, la matriz llega a ser netamente diagonal y sus eigenvalores son los elementos que conforman dicha diagonal, estos elementos dependen únicamente de  $\theta$  y pueden ser calculados con ayuda de (3.1.88) y (3.1.89), de esta manera, utilizando esos valores en la definición (2.4.9) para  $E$ , se encuentra que la máxima entropía únicamente dependerá de  $\theta$ , es decir se remueve la dependencia temporal y así sólo se necesita encontrar el ángulo  $\theta$  para el cual el máximo entrelazamiento es obtenido. El ángulo  $\theta$  puede ser hallado solucionando la ecuación  $dE(\theta)/d\theta = 0$ . Debe notarse que las partículas de un mismo espín que han sido polarizadas en los estados  $|s, \pm n_s\rangle_{\hat{n}}$  tendrán asociadas matrices reducidas  $\rho^s$  que tendrán los mismos polinomios característicos, eigenvalores y cantidad de enredamiento. En la figura 3.4 se muestra la dependencia  $\theta$  de la entropía asociada a los estados  $|s, \pm n_s\rangle_{\hat{n}}$  para los casos de espín  $s = 1/2, 1, 3/2$ .

## 3.1 Solución al problema

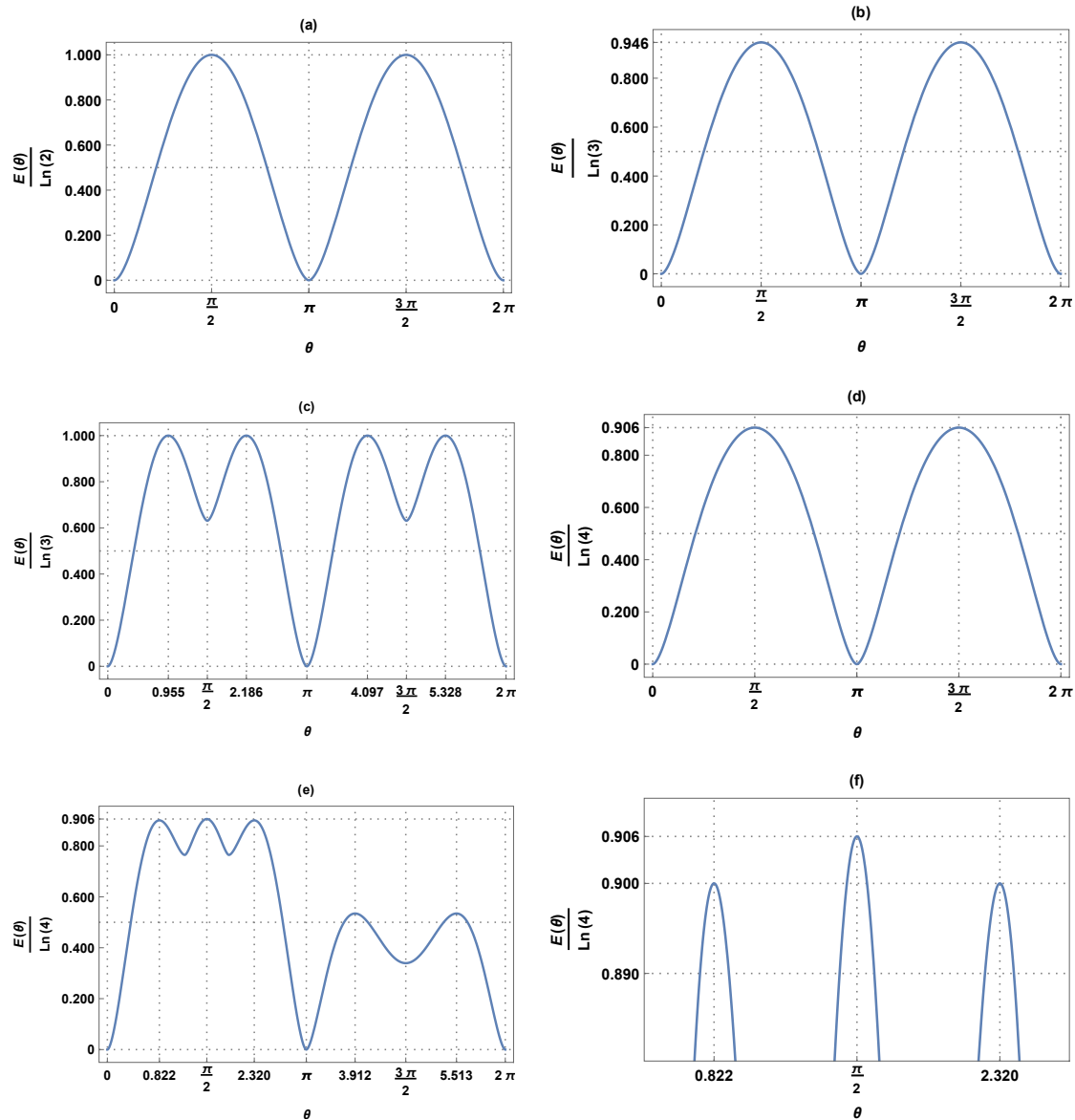


Figura 3.4: Gráficas de la dependencia angular  $\theta$ , de la entropía de Von Neumann normalizada  $E(\theta)/\text{Ln}(2s+1)$  asociada a las partículas que han sido polarizadas en los estados  $|s, \pm n_s\rangle_{\hat{n}}$  a través del dispositivo polarizador. (a)  $E(\theta)$  Normalizada para  $|1/2, \pm 1/2\rangle_{\hat{n}}$ . (b)  $E(\theta)$  Normalizada para  $|1, \pm 1\rangle_{\hat{n}}$ . (c)  $E(\theta)$  Normalizada para  $|1, 0\rangle_{\hat{n}}$ . (d)  $E(\theta)$  Normalizada para  $|3/2, \pm 3/2\rangle_{\hat{n}}$ . (e)  $E(\theta)$  Normalizada para  $|3/2, \pm 1/2\rangle_{\hat{n}}$ ; en esta gráfica debido a que es difícil apreciar el valor máximo de la función, en (f) se hace un acercamiento a la parte izquierda de la gráfica, donde los tres máximos están localizados.  $\theta$  está en unidades de radianes.

Puede ser visualizado de las gráficas 3.4 que un ángulo común  $\theta$ , para que las componentes  $|s, n_s\rangle_{\hat{n}}$  alcancen el máximo entrelazamiento es  $\theta = \pi/2$  [rad], excepto para la componente  $|1, 0\rangle_{\hat{n}}$  en este caso los ángulos ideales son  $\theta = 2\pi - 2 \arctan \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$  y  $\theta = 2 \arctan \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$  [rad]. A partir de este punto, por simplicidad, se omitirá el subíndice  $\hat{n}$  en los estados  $|s, n_s\rangle_{\hat{n}}$  sobreentendiéndose que se ha utilizado el ángulo  $\theta$  para el cual estos estados alcanzan el máximo entrelazamiento. Un punto interesante que muestran las gráficas 3.4 es que solamente los estados  $|1/2, \pm 1/2\rangle$  y  $|1, 0\rangle$  alcanzan el máximo entrelazamiento posible ( $E = 1$ ), de hecho, estos casos constituyen la preparación de un sistema que evolucionará en un estado máximamente mixto, como aquellos que fueron analizados en la sección anterior. Los estados  $|1, \pm 1\rangle$  alcanzan un máximo de entrelazamiento de  $E \approx 0.946$ , mientras que los estados  $|3/2, \pm 3/2\rangle$  y  $|3/2, \pm 1/2\rangle$  alcanzan ambos un máximo de  $E \approx 0.906$ . Note que no existe entrelazamiento cuándo el ángulo entre los magnetos es dado en factores enteros de  $\pi$  [rad] (i.e.  $n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$ ), esto significa físicamente que la dirección principal de ambos magnetos es colineal.

Se calcula a continuación los polinomios característicos y eigenvalores para las matrices reducidas  $\rho^s$  dadas en (3.1.57), utilizando las amplitudes dadas en (3.1.88) y utilizando un ángulo  $\theta$  que permite la máxima entropía en cada componente para los casos de espín  $s = 1/2, 1, 3/2$ . Para las polarizaciones  $|1/2, \pm 1/2\rangle$  y  $|1, 0\rangle$  se obtienen los mismos polinomios característicos dados en (3.1.78) y (3.1.79) y eigenvalores (3.1.83) y (3.1.84), (3.1.85) respectivamente, los polinomios característicos para el resto de las componentes son

$$\left(-1 + e^{2\iota} + 4\lambda_1\right) \left(-1 + 2e^\iota + 6\lambda_1 - 8\lambda_1^2 + e^{2\iota}(-1 + 2\lambda_1)\right) = 0, \quad \text{para } |1; \pm 1\rangle, \quad (3.1.90)$$

$$\lambda_{3/2}^4 - \lambda_{3/2}^3 + A_1 \lambda_{3/2}^2 + B_1 \lambda_{3/2} + \kappa_1 = 0, \quad \text{para } |3/2; \pm 3/2\rangle, \quad (3.1.91)$$

$$\lambda_{3/2}^{\prime 4} - \lambda_{3/2}^{\prime 3} + A_2 \lambda_{3/2}^{\prime 2} + B_2 \lambda_{3/2}^{\prime} + \kappa_1 = 0, \quad \text{para } |3/2; \pm 1/2\rangle \quad (3.1.92)$$

con

$$A_1 = \frac{1408 - 960e^\iota - 384e^{4\iota} - 64e^{9\iota}}{4096}, \quad A_2 = \frac{1408 - 448e^\iota - 384e^{4\iota} - 576e^{9\iota}}{4096}, \quad (3.1.93)$$

$$B_1 = \frac{-192 + 336e^\iota - 288e^{3\iota} + 192e^{4\iota} - 96e^{7\iota} + 48e^{9\iota}}{4096}, \quad B_2 = \frac{-192 + 240e^\iota - 96e^{3\iota} + 192e^{4\iota} - 288e^{7\iota} + 144e^{9\iota}}{4096}, \quad (3.1.94)$$

y

$$\kappa_1 = \frac{9 - 27e^\iota + 9e^{2\iota} + 36e^{3\iota} - 18e^{4\iota} - 18e^{5\iota} - 18e^{6\iota} + 36e^{7\iota} + 9e^{8\iota} - 27e^{9\iota} + 9e^{10\iota}}{4096}. \quad (3.1.95)$$

La solución a los polinomios característicos (3.1.90), (3.1.91) y (3.1.92) se ha obtenido mediante *Wolfram Mathematica 10.4*, la sintaxis se deja en el apéndice en la sección 4.4. sus valores son, respectivamente

$$\lambda_1 = \frac{1}{8} \left( 3 + e^{2\iota} \pm \sqrt{1 + 16e^\iota - 2e^{2\iota} + e^{4\iota}} \right), \quad (3.1.96)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \left( 1 - e^{2\iota} \right), \quad (3.1.97)$$

$$\lambda_{3/2} = \frac{1}{16} \left( 4 + e^{\iota/2} (3 + e^{4\iota}) \pm \sqrt{4 + 12e^{\iota/2} + 21e^\iota + 24e^{5\iota/2} + 12e^{4\iota} - 4e^{9\iota/2} - 6e^{5\iota} + e^{9\iota}} \right), \quad (3.1.98)$$

$$\lambda_{3/2} = \frac{1}{16} \left( 4 - e^{\iota/2} (3 + e^{4\iota}) \pm \sqrt{4 - 12e^{\iota/2} + 21e^\iota - 24e^{5\iota/2} + 12e^{4\iota} + 4e^{9\iota/2} - 6e^{5\iota} + e^{9\iota}} \right), \quad (3.1.99)$$

## 3.1 Solución al problema

$$\lambda'_{3/2} = \frac{1}{16} \left( 4 + e^{\iota/2}(1 + 3e^{4\iota}) \pm \sqrt{4 - 4e^{\iota/2} + 13e^{\iota} + 24e^{5\iota/2} + 12e^{4\iota} + 12e^{9\iota/2} - 6e^{5\iota} + 9e^{9\iota}} \right), \quad (3.1.100)$$

$$\lambda'_{3/2} = \frac{1}{16} \left( 4 - e^{\iota/2}(1 + 3e^{4\iota}) \pm \sqrt{4 + 4e^{\iota/2} + 13e^{\iota} - 24e^{5\iota/2} + 12e^{4\iota} - 12e^{9\iota/2} - 6e^{5\iota} + 9e^{9\iota}} \right), \quad (3.1.101)$$

Con  $\iota$  dada en (3.1.82). Como se hizo en la sección previa, se utilizan los eigenvalores (3.1.83) a (3.1.85) y (3.1.96) a (3.1.101) en la definición (2.4.9) de  $E$  para obtener la entropía en función del tiempo; a través del uso de unidades naturales ( $\hbar = 1$ ,  $m = 1$  y, por simplicidad  $\nu_s = 1$ ). En las gráficas 3.5 y 3.6 se muestra la dependencia temporal de la entropía para las distintas polarizaciones de los casos de espín aquí analizados, para tres valores distintos de los parámetros  $\alpha$  y  $\sigma$  respectivamente. Dichas gráficas han sido obtenidas a través del software *Wolfram Mathematica 10.4*, la sintaxis se deja en el apéndice en la sección 4.5.

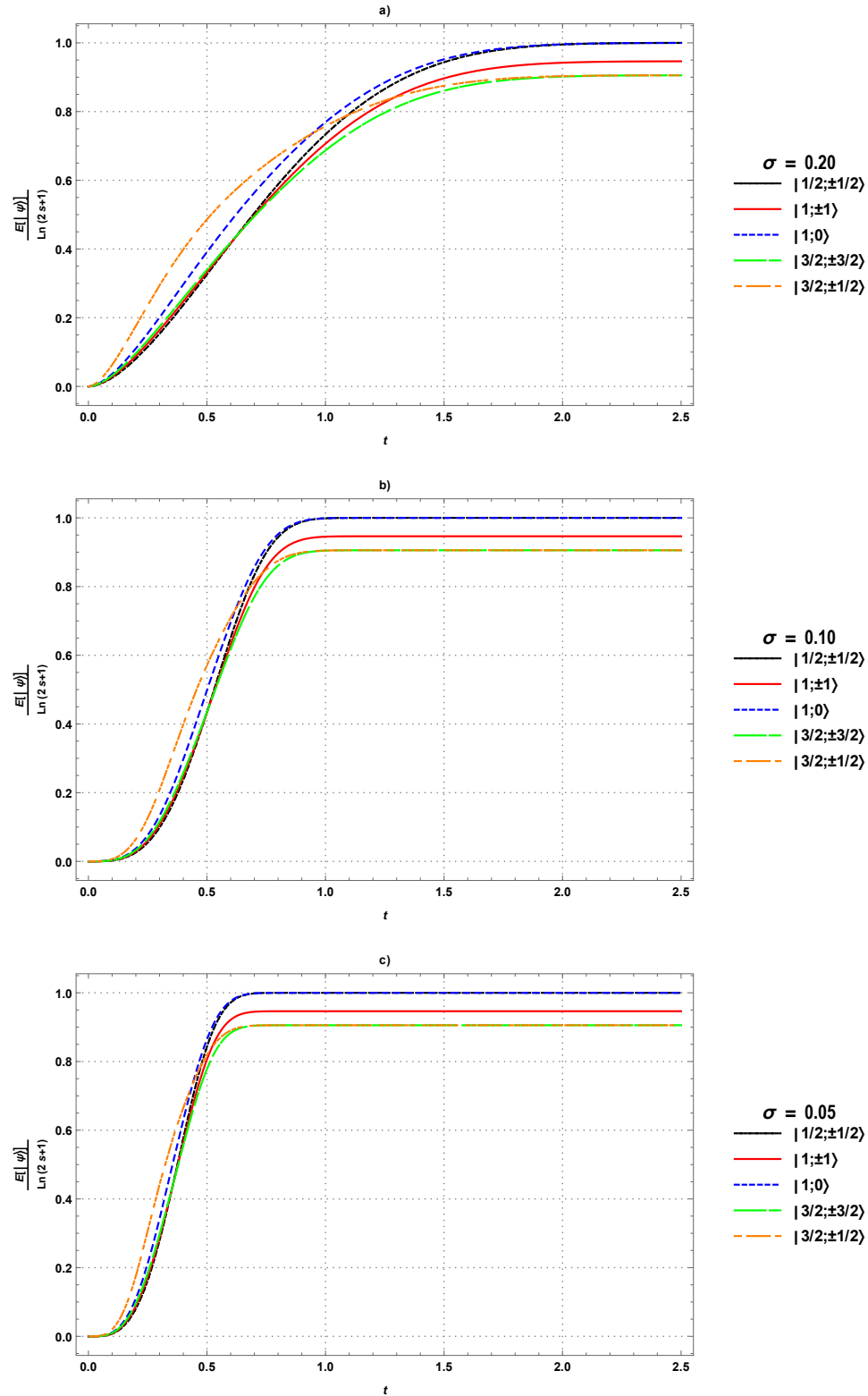


Figura 3.6: Dependencia temporal de la entropía de Von Neumann normalizada  $E[|\psi\rangle]/\ln(2s+1)$  en el campo magnético del aparato de Stern-Gerlach, asociada a las partículas preparadas en los estados  $|1/2, \pm 1/2\rangle$ ,  $|1, \pm 1\rangle$ ,  $|1, 0\rangle$ ,  $|3/2, \pm 3/2\rangle$ ,  $|3/2, \pm 1/2\rangle$ , cuando el parámetro  $\sigma$  toma los valores: (a)  $\sigma = 0.20$ . (b)  $\sigma = 0.10$ . (c)  $\sigma = 0.05$ . Se ha tomado el valor de  $\alpha$  como unitario.

## 3.1 Solución al problema

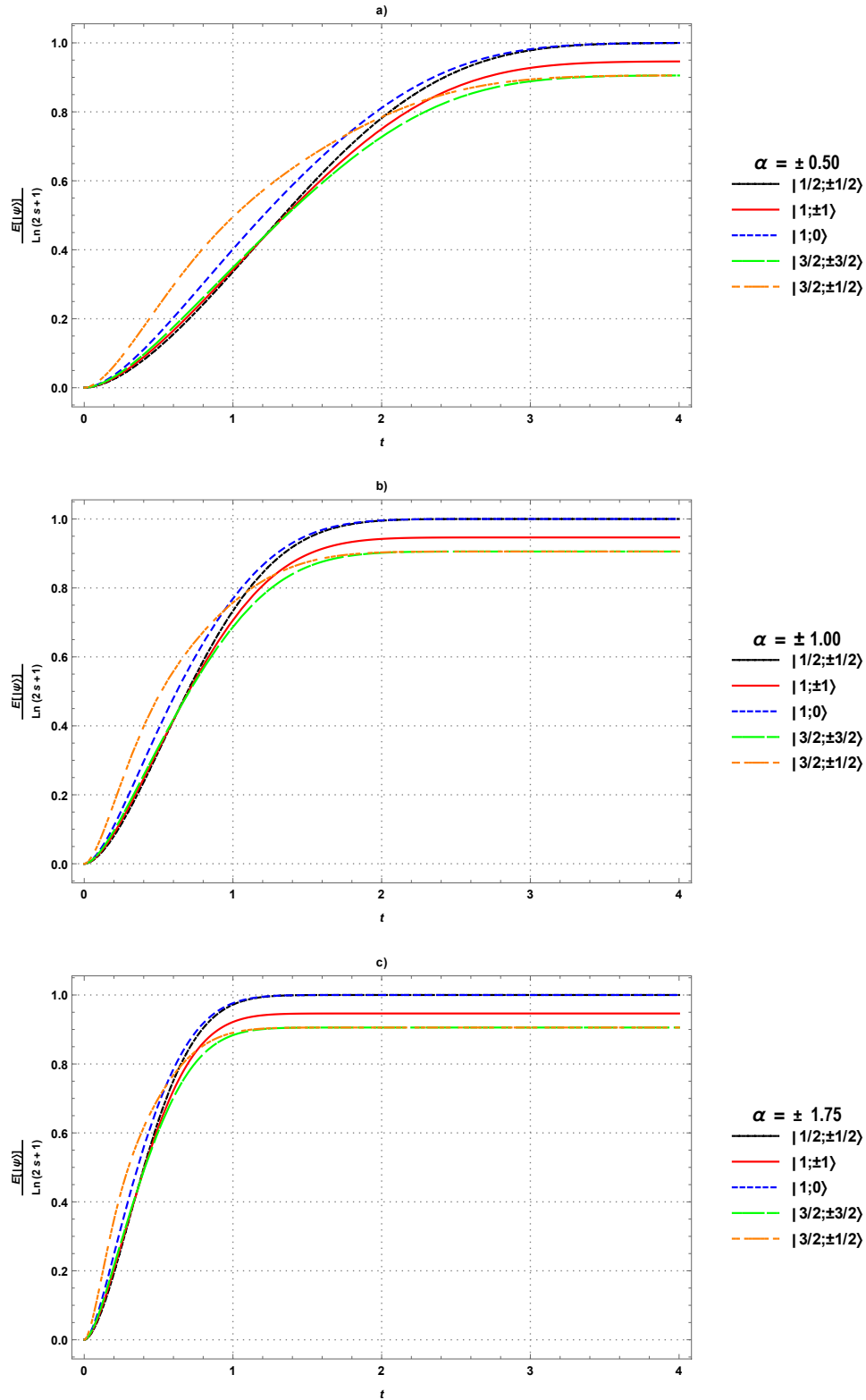


Figura 3.5: Dependencia temporal de la entropía de Von Neumann normalizada  $E(|\psi\rangle)/\ln(2s+1)$  en el campo magnético del aparato de Stern-Gerlach, asociada a las partículas preparadas en los estados  $|1/2, \pm 1/2\rangle$ ,  $|1, \pm 1\rangle$ ,  $|1, 0\rangle$ ,  $|3/2, \pm 3/2\rangle$ ,  $|3/2, \pm 1/2\rangle$ , cuando el parámetro  $\alpha$  toma los valores: (a)  $\alpha = \pm 0.50$ . (b)  $\alpha = \pm 1.00$ . (c)  $\alpha = \pm 1.75$ . Se ha tomado el valor de  $\sigma$  como unitario.



A partir de las gráficas 3.5 y 3.6 puede inferirse que el argumento establecido en la sección previa, de que la entropía al tiempo  $t$  es mayor a medida que el número de espín  $s$  se incrementa, no es enteramente válido cuando es utilizado un magneto (cuya dirección principal de campo magnético está orientada a un ángulo  $\theta$  respecto al magneto del aparato, tal que  $\theta$  es el ángulo que permite el máximo entrelazamiento) como un dispositivo polarizador; este comportamiento es percibido solamente en tiempos iniciales por las polarizaciones  $|1/2, \pm 1/2\rangle$ ,  $|1, \pm 1\rangle$ ,  $|3/2, \pm 3/2\rangle$  y satisfecho a todo tiempo  $t$  si solamente se considera las componentes  $|1/2, \pm 1/2\rangle$  y  $|1, 0\rangle$ , las cuales son las únicas polarizaciones que pueden alcanzar el máximo entrelazamiento posible ( $E = 1$ ), esto último demuestra que el argumento de que la cantidad de enredamiento al tiempo  $t$  se incrementa a medida que el espín se incrementa, es únicamente válido cuando se considera sistemas que evolucionarán en estados máximamente mixtos. Un punto notable es que las polarizaciones  $|3/2, \pm 1/2\rangle$  presentan inicialmente una entropía más grande que el resto de las componentes. Así mismo se muestra que los estados  $|1, \pm 1\rangle$  y  $|3/2, \pm 3/2\rangle$ ,  $|3/2, \pm 1/2\rangle$ , alcanzan un valor máximo de entropía de  $E \approx 0.946$  y  $E \approx 0.906$  respectivamente, esto puede ser visualizado desde las gráficas 3.4 donde esos valores máximos son claramente mostrados, entonces bajo esta configuración experimental no siempre se alcanza el máximo entrelazamiento posible.

Un aspecto notable es que las gráficas 3.5 y 3.6 también muestran que, al menos en los tres casos de espín aquí considerados, se satisface que, dentro de un mismo caso de espín, la entropía al tiempo  $t$  asociada con una polarización  $|s, \pm n_s\rangle$  será mayor o igual que la que es asociada con otra polarización  $|s, n'_s\rangle$  si  $|n_s| < |n'_s|$ ; este es el caso para las polarizaciones  $|1, \pm 1\rangle$ ,  $|1, 0\rangle$  y  $|3/2, \pm 3/2\rangle$ ,  $|3/2, \pm 1/2\rangle$ . Además, note que el tiempo  $\tau$  en el cual se obtiene el máximo entrelazamiento, se reduce cuando la magnitud de  $\alpha$  crece y cuando el valor de  $\sigma$  disminuye. De las gráficas es posible observar que todas las polarizaciones alcanzan su máximo entrelazamiento asociado al mismo  $\tau$ .

## 3.2 Resumen y Conclusiones

A través del método del operador de evolución se ha obtenido la dinámica temporal del estado cuántico que describe a partículas de espín arbitrario en el campo magnético del experimento de Stern-Gerlach; dicha dinámica abarca los casos correspondientes a un haz no polarizado y a uno polarizado. El primer caso constituye la preparación original del experimento de Stern-Gerlach y el segundo constituye una descripción a través de un estado cuántico puro, el cual es preparado a través de un dispositivo polarizador previo al magneto principal del aparato. Las ecuaciones (3.1.42) y (3.1.54) describen dichas situaciones y su rasgo más característico es que cada una de las componentes de espín (representadas por los estados  $|s, m_s\rangle$  o por los operadores de densidad  $|s, m_s\rangle\langle s, m_s|$ ) se encuentran enredadas cuánticamente con la parte espacial  $z$  del paquete de ondas que describe los grados externos de libertad del sistema; de esto se desprende que cada una de las componentes de espín son separadas (en el plano  $z$ ) en la región del campo magnético del aparato, de manera que cada función de onda asociada a cada componente evolucionará en regiones espacialmente distintas. Es interesante notar que para partículas fermiónicas, es decir, aquellas con espín semientero, se obtiene una separación par del paquete de ondas Gaussiano en la región de campo magnético, mientras que para el caso de partículas bosónicas, es decir, de espín entero, la separación es impar, con una única componente que no sufre desplazamiento en el campo magnético.

Las ecuaciones (3.1.42) y (3.1.54) constituyen una generalización para espines arbitrarios (por lo tanto para espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_s = \mathbb{C}^n$  de  $n$  dimensiones) a la evolución dinámica presentada por Benítez et. al. (Benítez et al., 2017b), (Benítez et al., 2017a), donde es obtenida la evolución para átomos de plata con espín  $s = 1/2$ , es decir, el experimento original. A partir de (3.1.42) y

### 3.2 Resumen y Conclusiones

(3.1.54) pueden ser obtenidos los mismos resultados que los de dichos autores, además, la evolución temporal para cualquier espín específico puede ser obtenida, para esto, basta sustituir en (3.1.42) y (3.1.54) los valores que adquiere el número cuántico magnético  $m_s$  para un espín determinado.

La cantidad de enredamiento entre los grados de libertad del sistema fue medida para el caso puro a través de la entropía de Von Neumann, considerando los casos específicos de espín  $s = 1/2, 1, 3/2$ . En esencia se consideraron dos situaciones: **(i)** cuando el máximo enredamiento es obtenido, i.e.  $E = 1$ , y **(ii)** cuando el máximo enredamiento no necesariamente es alcanzado.

En la situación **(i)** la cantidad de enredamiento al tiempo  $t$  es una cantidad creciente a medida que el número de espín de las partículas aumenta, sin embargo esta diferencia de enredamiento disminuye a medida que se alcanza el tiempo  $\tau$  de máximo enredo. En esta situación cualquier partícula de espín  $s$  alcanza el máximo enredamiento posible, es decir,  $E = 1$ .

En la situación **(ii)** el espín de las partículas se polariza en la dirección de un vector unitario  $\hat{n} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$  a través de un dispositivo polarizador que consiste de un magneto previo al magneto principal del aparato. Bajo esta configuración se encontró que el enredamiento cuántico entre los grados de libertad de las partículas depende del ángulo polar  $\theta$  y no del ángulo azimutal  $\phi$ , ambos ángulos asociados a  $\hat{n}$ ; además, la cantidad de enredamiento también dependerá de la componente  $|s, \pm n_s\rangle$  (aquellas componentes dentro de un caso específico de espín que tienen la misma magnitud del número cuántico magnético  $n_s$  producirán la misma cantidad de enredamiento en el magneto principal del aparato) que sea seleccionada en el magneto polarizador. También, en esta situación se mostró que el argumento de la cantidad de enredamiento creciente de la situación **(i)** no es válido, además, el máximo entrelazamiento posible,  $E = 1$ , no necesariamente es alcanzado, inclusive cuando se utiliza el ángulo  $\theta$  ideal; es decir, se encontró que las polarizaciones  $|1, \pm 1\rangle$  y  $|3/2, \pm 3/2\rangle, |3/2, \pm 1/2\rangle$  que se producen en el magneto polarizador, alcanzan dentro del campo magnético del aparato una cantidad máxima de entrelazamiento de  $E \approx 0.946$  y  $E \approx 0.906$  respectivamente; en cambio, el máximo entrelazamiento posible sólo es alcanzado por las polarizaciones  $|1/2, \pm 1/2\rangle$  y  $|1, 0\rangle$ , las cuales constituyen un estado que evolucionará en un estado máximamente mixto. También, en esta situación, se encontró que dentro de un mismo caso de espín, se satisface que una partícula polarizada en el estado  $|s, n_s\rangle$  presentará, al tiempo  $t$ , una cantidad de enredamiento mayor o igual que la de otra partícula polarizada en el estado  $|s, n'_s\rangle$  si se satisface que  $|n_s| < |n'_s|$ . No se produce entrelazamiento cuántico cuando el ángulo  $\theta$ , asociado a la dirección de polarización  $\hat{n}$ , es un múltiplo entero de  $\pi$ , i.e.  $\theta = n\pi, n = 0, 1, 2 \dots$ , esto físicamente implica que los campos magnéticos de ambos magnetos son colineales.

En las dos situaciones anteriores se satisface que el tiempo de máximo entrelazamiento  $\tau$  se ve reducido cuando la inhomogeneidad del campo magnético aumenta su magnitud (esto implica el aumento de la magnitud de la constante  $\alpha$ ) y cuando el ancho inicial del paquete de ondas que representa a la partícula se ve disminuido (esto representa la reducción del valor del parámetro  $\sigma$ ). Además, en ambas situaciones se satisface que el máximo entrelazamiento para cualquier espín es alcanzado al mismo tiempo  $\tau$ .

Cuando no existe inhomogeneidad del campo magnético ( $\alpha = 0$ ), no se crea enredamiento cuántico; esto es fácil de comprobar, pues, cuando el término  $\iota$  dado en (3.1.82) es cero, los eigenvalores dados en las ecuaciones (3.1.83) a (3.1.87) y (3.1.96) a (3.1.101) solamente pueden adquirir los valores de 0 y 1, que al sustituirlos en la expresión para la entropía de Von Neumann dada en

(2.4.9) se tiene que  $E = 0$  (considerando que  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$ ); también es fácil verificar que la cantidad de entrelazamiento no depende de la componente constante del campo magnético, puesto que el término  $\iota$  dado en (3.1.82) no depende de  $B_0$ . El estado cuántico inicial que representa a las partículas en el momento justo antes de su entrada al campo magnético del aparato no se encuentra enredado entre sus grados de libertad; el efecto de la interacción entre el campo magnético y partículas es destruir la superposición coherente que describe los grados internos de libertad y transformar gradualmente el sistema puro en una mezcla estadística de estados; este cambio gradual se refleja en el aumento progresivo de la cantidad de enredamiento hasta su valor máximo. Esto se verifica también con el decaimiento de los elementos exponenciales fuera de la diagonal principal de la matriz (3.1.61) y este decaimiento es evidente dada la naturaleza negativa de la potencia  $\zeta_{m_s, m'_s}$  dada en (3.1.58).

El análisis teórico realizado en este trabajo cubre los dos primeros pasos de los tres que conforman lo que hoy en día es entendido como el proceso de la medición cuántica (para una breve y sencilla revisión de estos tres pasos por favor revise la sección 2 del artículo de Hannout (Hannout et al., 1998)); en el primer paso de tal proceso, un entrelazamiento cuántico surge entre los grados de libertad del sistema debido a una evolución unitaria; este primer paso es representado en este trabajo a través del enredamiento cuántico que exhibe la expresión (3.1.54). En el segundo paso del proceso de la medición cuántica, la matriz de densidad que describe el sistema adquiere la forma de un estado impuro, es decir una mezcla estadística, matemáticamente esto implica la diagonalización de la matriz de densidad del sistema, siendo los elementos diagonales las posibles salidas de la medición; este segundo paso es representado en este trabajo a través de la diagonalización de la matriz de densidad reducida que describe a los grados internos de libertad de las partículas, los elementos diagonales de esta matriz representan las posibles salidas de la medición de la componente  $z$  del espín. El último paso, también conocido como colapso, implica que la mezcla estadística que representa al sistema se transforma nuevamente es un estado cuántico puro debido a la medición de una observable determinada, donde efectivamente el estado resultante es proyectado en el eigenspacio de la observable. La esencia del problema cuántico de la medición se encuentra en entender y explicar a cabalidad este último paso. El punto aquí es que las aproximaciones semiclásicas (Sakurai (1995)), (Townsend, 2000), atribuyen el colapso de la función de onda de las partículas en la región de campo magnético al establecer trayectorias clásicas, estas aproximaciones son teóricamente cuestionables si se examinan desde el punto de vista de los postulados de la mecánica cuántica, de hecho, esta crítica constituye una tesis fundamental del trabajo realizado por Benítez (Benítez et al., 2017b), (Benítez et al., 2017a). Es fundamental el hecho de que un sistema cuántico adquiere propiedades específicas para las observables sólo cuando se realiza una medición, y a este respecto la medición en el experimento de Stern-Gerlach sólo se realiza en la pantalla del detector.

■



# 4

## Apéndice

### 4.1 Solución a la integral para la matriz reducida $\rho^s$ .

La integral (3.1.56) puede ser escrita como

$$\rho^s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, y, t) dx dy \sum_{m_s} \sum_{m'_s} C_{m_s} C_{m'_s}^* \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{it\nu_s \hbar}{\hbar} (B_0 + \alpha z) (m_s - m'_s) \right] \\ \times \exp \left[ F'(t) (z + A(t)m_s)^2 + F'(t)^* (z + A(t)m'_s)^2 \right] dz \quad |s, m_s \rangle \langle s, m'_s|; \quad (4.1.1)$$

se resuelve primero la parte en color azul. Para ello utilice (3.1.43), entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, y, t) dx dy = \left[ \frac{\sigma}{(2\pi)^{1/2}} \right]^3 \left[ -\frac{\sigma^2}{2F(t)} \right]^{-3/2} \exp \left[ -2\sigma^2 k_{0y}^2 \right] \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ F(t) (x^2 + y^2 - 4\sigma^4 k_{0y}^2) \right] \exp \left[ -\frac{2\hbar t k_{0y} F(t)}{m} y \right] dx dy, \quad (4.1.2)$$

tomando el signo negativo fuera de  $F(t)$  de (3.1.44), no es difícil probar que la expresión anterior puede ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, y, t) dx dy = \left[ \frac{F(t)}{\pi} \right]^{3/2} \exp \left[ -2\sigma^2 k_{0y}^2 + 4F(t)\sigma^4 k_{0y}^2 \right] \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -F(t)x^2 \right] dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -F(t) \left( y^2 + \frac{2\hbar t k_{0y} F(t)}{m} y \right) \right] dy; \quad (4.1.3)$$

pero considere que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\alpha z^2 - \beta z \right] = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp \left[ \frac{\beta^2}{4\alpha} \right], \quad (4.1.4)$$

utilizando (4.1.4), el resultado para (4.1.3) puede escribirse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, y, t) dx dy = \sqrt{\frac{F(t)}{\pi}} \exp \left[ -2\sigma^2 k_{0y}^2 + 4F(t)\sigma^4 k_{0y}^2 + F(t) \left( \frac{\hbar t k_{0y}}{m} \right)^2 \right], \quad (4.1.5)$$

simplificando la potencia del exponencial anterior

$$-2\sigma^2 k_{0y}^2 + 4F(t)\sigma^4 k_{0y}^2 + F(t) \left( \frac{\hbar t k_{0y}}{m} \right)^2 = -2\sigma^2 k_{0y}^2 + F(t) \left\{ 4\sigma^4 k_{0y}^2 + \left( \frac{\hbar t k_{0y}}{m} \right)^2 \right\}, \quad (4.1.6)$$

4.1 Solución a la integral para la matriz reducida  $\rho^s$ .

pero  $F(t)$  dado en (3.1.44) puede ser escrito como:  $2m^2\sigma^2/(\hbar t)^2 + (2m\sigma^2)^2$  (recuerde que en la ecuación (4.1.3) se tomó el signo negativo de  $F(t)$ ); sustituya en (4.1.6)

$$\begin{aligned} -2\sigma^2 k_{0y}^2 + 4F(t)\sigma^4 k_{0y}^2 + F(t) \left( \frac{\hbar t k_{0y}}{m} \right)^2 &= -2\sigma^2 k_{0y}^2 + \frac{2m^2\sigma^2}{(\hbar t)^2 + (2m\sigma^2)^2} \left\{ 4\sigma^4 k_{0y}^2 + \left( \frac{\hbar t k_{0y}}{m} \right)^2 \right\} \\ &= -2\sigma^2 k_{0y}^2 + \frac{2m^2\sigma^2}{(\hbar t)^2 + (2m\sigma^2)^2} \left\{ \frac{[(\hbar t)^2 + (2m\sigma^2)^2] k_{0y}^2}{m^2} \right\} = -2\sigma^2 k_{0y}^2 + 2\sigma^2 k_{0y}^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

entonces la parte en azul de la ecuación (4.1.1) es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(x, y, t) \, dx dy = \sqrt{\frac{F(t)}{\pi}}. \quad (4.1.8)$$

Se resuelve la integral resaltada en color rojo en (4.1.1); dicha integral puede ser puesta en la forma de la ecuación (4.1.4), para ello desarrolle los binomios al cuadrado del segundo exponencial de dicha integral y agrupe los términos resultantes en torno a la variable de integración  $z$ , tomando el valor negativo de  $F'(t)$  y haciendo uso de la ecuación ; se obtiene

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{it\nu_s \hbar}{\hbar} (B_0 + \alpha z)(m_s - m'_s) \right] \exp \left[ F'(t)(z + A(t)m_s)^2 + F'(t)^*(z + A(t)m'_s)^2 \right] dz \\ &= \exp \left[ -\left\{ A^2(t) \left( F'(t)m_s^2 + F'(t)^*m_s'^2 \right) + it\nu_s B_0(m_s - m'_s) \right\} \right] \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -F(t)z^2 - \left\{ 2A(t) \left( F'(t)m_s + F'(t)^*m'_s \right) + it\nu_s \alpha (m_s - m'_s) \right\} z \right], \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

aplicando la ecuación (4.1.4) el resultado para la integral de la ecuación anterior es

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{it\nu_s \hbar}{\hbar} (B_0 + \alpha z)(m_s - m'_s) \right] \exp \left[ F'(t)(z + A(t)m_s)^2 + F'(t)^*(z + A(t)m'_s)^2 \right] dz \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{F(t)}} \times \exp \left[ -\left\{ A^2(t) \left( F'(t)m_s^2 + F'(t)^*m_s'^2 \right) + it\nu_s B_0(m_s - m'_s) \right\} \right] \\ &\times \exp \left[ \frac{\left\{ 2A(t) \left( F'(t)m_s + F'(t)^*m'_s \right) + it\nu_s \alpha (m_s - m'_s) \right\}^2}{4F(t)} \right]; \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

sustituya (4.1.8) y (4.1.10) en (4.1.1), entonces

$$\begin{aligned} \rho^s &= \sum_{m_s} \sum_{m'_s} C_{m_s} C_{m'_s}^* \exp \left[ -\left\{ A^2(t) \left( F'(t)m_s^2 + F'(t)^*m_s'^2 \right) + it\nu_s B_0(m_s - m'_s) \right\} \right] \\ &\times \exp \left[ \frac{\left\{ 2A(t) \left( F'(t)m_s + F'(t)^*m'_s \right) + it\nu_s \alpha (m_s - m'_s) \right\}^2}{4F(t)} \right] |s, m_s\rangle \langle s, m'_s| \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

las potencias de los exponenciales anteriores se suman por ley de exponentes, dicha potencia se simplifica mediante *Mathematica 10.4*, se deja el código a continuación

## 4.2 Código *Mathematica* para la solución a los polinomios característicos para las matrices $\rho^s$ para $S = 1/2, 1, 3/2$ .

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{1}{4*(\sigma^2+i*(\frac{h*t}{2m}))}; \\
 ff &= \frac{1}{4*(\sigma^2-i*(\frac{h*t}{2m}))}; \\
 F &= \frac{\sigma^2}{2*(\sigma^4+(\frac{h*t}{2m})^2)}; \\
 A &= \frac{t^2*\nu_s*\alpha*h}{2*m}; \\
 \text{FullSimplify} &\left[(-i*t*\nu_s*B_0*(n-nn)-A^2*(f*n^2+ff*nn^2))+\left(\frac{(2*A*(f*n+ff*nn)+i*t*\nu_s*\alpha*(n-nn))^2}{4*F}\right)\right] \\
 &-\frac{(n-nn)t\nu_s(32im^2\sigma^2B_0+t\alpha^2(h^2(n-nn)t^2-8ihm(n+nn)t\sigma^2+16m^2(n-nn)\sigma^4)\nu_s)}{32m^2\sigma^2}
 \end{aligned}$$

La última línea del código anterior es el resultado para la simplificación; el comando **FullSimplify** indica a *Mathematica* que muestre la forma más simplificada de la expresión en cuestión. En el código anterior se ha tomado  $F'(t) = \mathbf{f}$ ,  $F'(t)^* = \mathbf{ff}$ ,  $F(t) = \mathbf{F}$ ,  $A(t) = \mathbf{A}$ ,  $m_s = \mathbf{n}$ ,  $m'_s = \mathbf{nn}$ . Sustituyendo el resultado que arroja el software *Mathematica* en la expresión (4.1.11), el resultado para  $\rho^s$  es

$$\rho^s = \sum_{m_s} \sum_{m'_s} C_{m_s} C_{m'_s}^* \exp \left[ -\frac{t\nu_s(m_s - m'_s) [32iB_0m^2\sigma^2 + \alpha^2t\nu_s \{(\hbar^2t^2 + 16m^2\sigma^4)(m_s - m'_s) - 8ihmt\sigma^2(m_s + m'_s)\}]}{32m^2\sigma^2} \right] \times |s, m_s\rangle \langle s, m'_s|, \quad (4.1.12)$$

el cual es el resultado mostrado en (3.1.57) y (3.1.58).

## 4.2 Código *Mathematica* para la solución a los polinomios característicos para las matrices $\rho^s$ para $S = 1/2, 1, 3/2$ .

Se muestra el código de *Wolfram Mathematica 10.4* para la solución a los polinomios característicos (3.1.78) a (3.1.80) correspondientes a las matrices  $\rho^s$  para los casos de espín  $s = 1/2, 1, 3/2$ :

$$\begin{aligned}
 &\text{Solve} \left[ \left( \frac{1}{2} - \lambda_{\frac{1}{2}} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 * E^{\nu} == 0, \lambda_{\frac{1}{2}} \right] \\
 &\left\{ \left\{ \lambda_{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2} (1 - e^{\nu/2}) \right\}, \left\{ \lambda_{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2} (1 + e^{\nu/2}) \right\} \right\} \\
 &\text{Solve} \left[ \left( \frac{1}{3} - \lambda_1 \right)^3 - \left( \frac{1}{3} \right)^2 * E^{4*\nu} * (1 + 2 * E^{-3*\nu}) * \left( \frac{1}{3} - \lambda_1 \right) + 2 * \left( \frac{1}{3} \right)^3 * E^{3*\nu} == 0, \lambda_1 \right] \\
 &\left\{ \left\{ \lambda_1 \rightarrow \frac{1}{3} (1 - e^{2\nu}) \right\}, \left\{ \lambda_1 \rightarrow \frac{1}{6} (2 + e^{2\nu} - \sqrt{8e^{\nu} + e^{4\nu}}) \right\}, \left\{ \lambda_1 \rightarrow \frac{1}{6} (2 + e^{2\nu} + \sqrt{8e^{\nu} + e^{4\nu}}) \right\} \right\} \\
 &k = \frac{1}{256} * E^{10*\nu} * (1 - 2 * E^{-\nu} + E^{-2*\nu} - 2E^{-4*\nu} - 2E^{-5*\nu} + E^{-8*\nu}); \\
 &\text{Solve} \left[ \left( \frac{1}{4} - \lambda_{\frac{3}{2}} \right)^4 - \left( \frac{1}{16} \right) * E^{9*\nu} * (1 + 2 * E^{-5*\nu} + 3 * E^{-8*\nu}) * \left( \frac{1}{4} - \lambda_{\frac{3}{2}} \right)^2 \right. \\
 &\left. + \left( \frac{1}{16} \right) * E^{7*\nu} * (1 + E^{-4*\nu}) * \left( \frac{1}{4} - \lambda_{\frac{3}{2}} \right) + k == 0, \lambda_{\frac{3}{2}} \right] \\
 &\left\{ \lambda_{\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{1}{8} (2 - e^{\nu/2} - e^{9\nu/2} - \sqrt{5e^{\nu} - 8e^{5\nu/2} + 4e^{4\nu} - 2e^{5\nu} + e^{9\nu}}) \right\},
 \end{aligned}$$

4.3 Código *Mathematica* para la obtención de las gráficas 3.1 y 3.2.

$$\left\{ \lambda_{\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{1}{8} \left( 2 - e^{t/2} - e^{9t/2} + \sqrt{5e^t - 8e^{5t/2} + 4e^{4t} - 2e^{5t} + e^{9t}} \right) \right\},$$

$$\left\{ \lambda_{\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{8} e^{t/2} (1 + e^{4t}) - \frac{1}{8} \sqrt{5e^t + 8e^{5t/2} + 4e^{4t} - 2e^{5t} + e^{9t}} \right\},$$

$$\left\{ \lambda_{\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{8} e^{t/2} (1 + e^{4t}) + \frac{1}{8} \sqrt{5e^t + 8e^{5t/2} + 4e^{4t} - 2e^{5t} + e^{9t}} \right\},$$

Los resultados mostrados, aunque expresados de distinta manera que en las ecuaciones (3.1.35) a (3.1.42), son exactamente los mismos.

4.3 Código *Mathematica* para la obtención de las gráficas 3.1 y 3.2.

El código *Wolfram Mathematica 10.4* utilizado para la gráfica 3.1 es

```

γ = 1;
h = 1;
m = 1;
σ = 1;
α = 0.5;
αα = 1;
ααα = 1.75;

i = - (α*t*γ / (4*m*σ))^2 * ((h*t)^2 + (4*m*σ^2)^2);
ii = - (αα*t*γ / (4*m*σ))^2 * ((h*t)^2 + (4*m*σ^2)^2);
iii = - (ααα*t*γ / (4*m*σ))^2 * ((h*t)^2 + (4*m*σ^2)^2);

e1 = 1/2 - 1/2 E^i;
e11 = 1/2 - 1/2 E^ii;
e111 = 1/2 - 1/2 E^iii;
e2 = 1/2 + 1/2 E^i;
e22 = 1/2 + 1/2 E^ii;
e222 = 1/2 + 1/2 E^iii;

s1 = 1/3 - (1/6 E^2i (-1 - 1*sqrt(1 + 8E^-3i)));
s11 = 1/3 - (1/6 E^2ii (-1 - 1*sqrt(1 + 8E^-3ii)));

```



$$s111 = 1/3 - \left(\frac{1}{6}E^{2iii} (-1 - 1\sqrt{(1 + 8E^{-3iii})})\right);$$

$$s2 = 1/3 - \left(\frac{1}{6}E^{2i} (-1 + 1\sqrt{(1 + 8E^{-3i})})\right);$$

$$s22 = 1/3 - \left(\frac{1}{6}E^{2ii} (-1 + 1\sqrt{(1 + 8E^{-3ii})})\right);$$

$$s222 = 1/3 - \left(\frac{1}{6}E^{2iii} (-1 + 1\sqrt{(1 + 8E^{-3iii})})\right);$$

$$s3 = 1/3 - \left(\frac{1}{3}E^{2i}\right);$$

$$s33 = 1/3 - \left(\frac{1}{3}E^{2ii}\right);$$

$$s333 = 1/3 - \left(\frac{1}{3}E^{2iii}\right);$$

$$d1 = \frac{1}{8} \left(2 - e^{i/2} - e^{9i/2} - \sqrt{(5e^i - 8e^{5i/2} + 4e^{4i} - 2e^{5i} + e^{9i})}\right);$$

$$d11 = \frac{1}{8} \left(2 - e^{ii/2} - e^{9ii/2} - \sqrt{(5e^{ii} - 8e^{5ii/2} + 4e^{4ii} - 2e^{5ii} + e^{9ii})}\right);$$

$$d111 = \frac{1}{8} \left(2 - e^{iii/2} - e^{9iii/2} - \sqrt{(5e^{iii} - 8e^{5iii/2} + 4e^{4iii} - 2e^{5iii} + e^{9iii})}\right);$$

$$d2 = \frac{1}{8} \left(2 - e^{i/2} - e^{9i/2} + \sqrt{(5e^i - 8e^{5i/2} + 4e^{4i} - 2e^{5i} + e^{9i})}\right);$$

$$d22 = \frac{1}{8} \left(2 - e^{ii/2} - e^{9ii/2} + \sqrt{(5e^{ii} - 8e^{5ii/2} + 4e^{4ii} - 2e^{5ii} + e^{9ii})}\right);$$

$$d222 = \frac{1}{8} \left(2 - e^{iii/2} - e^{9iii/2} + \sqrt{(5e^{iii} - 8e^{5iii/2} + 4e^{4iii} - 2e^{5iii} + e^{9iii})}\right);$$

$$d3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{i/2} (1 + e^{4i}) - \frac{1}{8}\sqrt{(5e^i + 8e^{5i/2} + 4e^{4i} - 2e^{5i} + e^{9i})};$$

$$d33 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{ii/2} (1 + e^{4ii}) - \frac{1}{8}\sqrt{(5e^{ii} + 8e^{5ii/2} + 4e^{4ii} - 2e^{5ii} + e^{9ii})};$$

$$d333 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{iii/2} (1 + e^{4iii}) - \frac{1}{8}\sqrt{(5e^{iii} + 8e^{5iii/2} + 4e^{4iii} - 2e^{5iii} + e^{9iii})};$$

$$d4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{i/2} (1 + e^{4i}) + \frac{1}{8}\sqrt{(5e^i + 8e^{5i/2} + 4e^{4i} - 2e^{5i} + e^{9i})};$$

$$d44 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{ii/2} (1 + e^{4ii}) + \frac{1}{8}\sqrt{(5e^{ii} + 8e^{5ii/2} + 4e^{4ii} - 2e^{5ii} + e^{9ii})};$$

$$d444 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{iii/2} (1 + e^{4iii}) + \frac{1}{8}\sqrt{(5e^{iii} + 8e^{5iii/2} + 4e^{4iii} - 2e^{5iii} + e^{9iii})};$$

$$\text{Entropia1} = -(e1 * \text{Log}[e1] + e2 * \text{Log}[e2]) * (1/\text{Log}[2]);$$

$$\text{Entropia11} = -(e11 * \text{Log}[e11] + e22 * \text{Log}[e22]) * (1/\text{Log}[2]);$$

$$\text{Entropia111} = -(e111 * \text{Log}[e111] + e222 * \text{Log}[e222]) * (1/\text{Log}[2]);$$

$$\text{Entropia2} = -(s1 * \text{Log}[s1] + s2 * \text{Log}[s2] + s3 * \text{Log}[s3]) * (1/\text{Log}[3]);$$

$$\text{Entropia22} = -(s11 * \text{Log}[s11] + s22 * \text{Log}[s22] + s33 * \text{Log}[s33]) * (1/\text{Log}[3]);$$

$$\text{Entropia222} = -(s111 * \text{Log}[s111] + s222 * \text{Log}[s222] + s333 * \text{Log}[s333]) * (1/\text{Log}[3]);$$

$$\text{Entropia3} = -((d1 * \text{Log}[d1] + d2 * \text{Log}[d2] + d3 * \text{Log}[d3] + d4 * \text{Log}[d4]) * (1/\text{Log}[4]));$$

4.3 Código *Mathematica* para la obtención de las gráficas 3.1 y 3.2.

```

Entropia33 = -((d11 * Log[d11] + d22 * Log[d22] + d33 * Log[d33] + d44 * Log[d44]) * (1/Log[4]));
Entropia333 = -((d111 * Log[d111] + d222 * Log[d222] + d333 * Log[d333] + d444 * Log[d444]) * (1/Log[4]));

Plot[{Entropia1, Entropia2, Entropia3, Entropia11, Entropia22, Entropia33, Entropia111,
Entropia222, Entropia333}, {t, 0, 3.5}, PlotLegends → {"s=1/2, σ =0.2", "s=1.0, σ =0.2", "s=3/2, σ =0.2",
"s=1/2, σ=0.1", "s=1, σ=0.1", "s=3/2, σ =0.1", "s=1/2, σ=0.05", "s=1, σ=0.05", "s=3/2, σ =0.05"},
Frame → True, PlotStyle → {Dashed, {Red, DotDashed}, {Black, Dashing[{0.02, 0.005, 0.05, 0.01}]},
Brown, {Black, Dotted}, {Orange, Dashing[{0.04, 0.008, 0.008, 0.015}]},
{Green, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.005, 0.005, 0.005, 0.005, 0.01, 0.05, 0.005}]},
{Purple, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.025, 0.02, 0.005}]},
{Blue, Dashing[{0.02, 0.01, 0.02, 0.01}]}, FrameLabel → {t, "  $\frac{E[\psi]}{\text{Ln}(2s+1)}$  "},
LabelStyle → Directive[Black, Bold, FontFamily → "Helvetica"],
ImageSize → Large, PerformanceGoal → "HighQuality", MaxRecursion → 15,
GridLines → Automatic, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dotted]]

```

El código *Wolfram Mathematica 10.4* utilizado para la gráfica 3.2 es

```

γ = 1;
h = 1;
m = 1;
α = 1;
σ = 0.2;
σσ = 0.1;
σσσ = 0.05;

i = - (  $\frac{\alpha * t * \gamma}{4 * m * \sigma}$  )2 * ((h * t)2 + (4 * m * σ2)2);
ii = - (  $\frac{\alpha * t * \gamma}{4 * m * \sigma \sigma}$  )2 * ((h * t)2 + (4 * m * σσ2)2);
iii = - (  $\frac{\alpha * t * \gamma}{4 * m * \sigma \sigma \sigma}$  )2 * ((h * t)2 + (4 * m * σσσ2)2);

e1 =  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} E^{\frac{i}{2}}$ ;
e11 =  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} E^{\frac{ii}{2}}$ ;

```

$$e111 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}E^{\frac{iii}{2}};$$

$$e2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E^{\frac{i}{2}};$$

$$e22 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E^{\frac{ii}{2}};$$

$$e222 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E^{\frac{iii}{2}};$$

$$s1 = 1/3 - \left(\frac{1}{6}E^{2i} (-1 - 1\sqrt{(1 + 8E^{-3i})})\right);$$

$$s11 = 1/3 - \left(\frac{1}{6}E^{2ii} (-1 - 1\sqrt{(1 + 8E^{-3ii})})\right);$$

$$s111 = 1/3 - \left(\frac{1}{6}E^{2iii} (-1 - 1\sqrt{(1 + 8E^{-3iii})})\right);$$

$$s2 = 1/3 - \left(\frac{1}{6}E^{2i} (-1 + 1\sqrt{(1 + 8E^{-3i})})\right);$$

$$s22 = 1/3 - \left(\frac{1}{6}E^{2ii} (-1 + 1\sqrt{(1 + 8E^{-3ii})})\right);$$

$$s222 = 1/3 - \left(\frac{1}{6}E^{2iii} (-1 + 1\sqrt{(1 + 8E^{-3iii})})\right);$$

$$s3 = 1/3 - \left(\frac{1}{3}E^{2i}\right);$$

$$s33 = 1/3 - \left(\frac{1}{3}E^{2ii}\right);$$

$$s333 = 1/3 - \left(\frac{1}{3}E^{2iii}\right);$$

$$d1 = \frac{1}{8} \left(2 - e^{i/2} - e^{9i/2} - \sqrt{(5e^i - 8e^{5i/2} + 4e^{4i} - 2e^{5i} + e^{9i})}\right);$$

$$d11 = \frac{1}{8} \left(2 - e^{ii/2} - e^{9ii/2} - \sqrt{(5e^{ii} - 8e^{5ii/2} + 4e^{4ii} - 2e^{5ii} + e^{9ii})}\right);$$

$$d111 = \frac{1}{8} \left(2 - e^{iii/2} - e^{9iii/2} - \sqrt{(5e^{iii} - 8e^{5iii/2} + 4e^{4iii} - 2e^{5iii} + e^{9iii})}\right);$$

$$d2 = \frac{1}{8} \left(2 - e^{i/2} - e^{9i/2} + \sqrt{(5e^i - 8e^{5i/2} + 4e^{4i} - 2e^{5i} + e^{9i})}\right);$$

$$d22 = \frac{1}{8} \left(2 - e^{ii/2} - e^{9ii/2} + \sqrt{(5e^{ii} - 8e^{5ii/2} + 4e^{4ii} - 2e^{5ii} + e^{9ii})}\right);$$

$$d222 = \frac{1}{8} \left(2 - e^{iii/2} - e^{9iii/2} + \sqrt{(5e^{iii} - 8e^{5iii/2} + 4e^{4iii} - 2e^{5iii} + e^{9iii})}\right);$$

$$d3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{i/2} (1 + e^{4i}) - \frac{1}{8}\sqrt{(5e^i + 8e^{5i/2} + 4e^{4i} - 2e^{5i} + e^{9i})};$$

$$d33 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{ii/2} (1 + e^{4ii}) - \frac{1}{8}\sqrt{(5e^{ii} + 8e^{5ii/2} + 4e^{4ii} - 2e^{5ii} + e^{9ii})};$$

$$d333 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{iii/2} (1 + e^{4iii}) - \frac{1}{8}\sqrt{(5e^{iii} + 8e^{5iii/2} + 4e^{4iii} - 2e^{5iii} + e^{9iii})};$$

$$d4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{i/2} (1 + e^{4i}) + \frac{1}{8}\sqrt{(5e^i + 8e^{5i/2} + 4e^{4i} - 2e^{5i} + e^{9i})};$$

$$d44 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{ii/2} (1 + e^{4ii}) + \frac{1}{8}\sqrt{(5e^{ii} + 8e^{5ii/2} + 4e^{4ii} - 2e^{5ii} + e^{9ii})};$$

$$d444 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{iii/2} (1 + e^{4iii}) + \frac{1}{8}\sqrt{(5e^{iii} + 8e^{5iii/2} + 4e^{4iii} - 2e^{5iii} + e^{9iii})};$$

$$\text{Entropia1} = -(e1 * \text{Log}[e1] + e2 * \text{Log}[e2]) * (1/\text{Log}[2]);$$

4.3 Código *Mathematica* para la obtención de las gráficas 3.1 y 3.2.

```

Entropia11 = -(e11 * Log[e11] + e22 * Log[e22]) * (1/Log[2]);
Entropia111 = -(e111 * Log[e111] + e222 * Log[e222]) * (1/Log[2]);

Entropia2 = -(s1 * Log[s1] + s2 * Log[s2] + s3 * Log[s3]) * (1/Log[3]);
Entropia22 = -(s11 * Log[s11] + s22 * Log[s22] + s33 * Log[s33]) * (1/Log[3]);
Entropia222 = -(s111 * Log[s111] + s222 * Log[s222] + s333 * Log[s333]) * (1/Log[3]);
Entropia3 = -((d1 * Log[d1] + d2 * Log[d2] + d3 * Log[d3] + d4 * Log[d4]) * (1/Log[4]));
Entropia33 = -((d11 * Log[d11] + d22 * Log[d22] + d33 * Log[d33] + d44 * Log[d44]) * (1/Log[4]));
Entropia333 = -((d111 * Log[d111] + d222 * Log[d222] + d333 * Log[d333] + d444 * Log[d444]) * (1/Log[4]));

Plot[{Entropia1, Entropia2, Entropia3, Entropia11, Entropia22, Entropia33, Entropia111,
Entropia222, Entropia333}, {t, 0, 1.5}, PlotLegends → {"s=1/2, σ =0.2", "s=1.0, σ =0.2", "s=3/2, σ =0.2",
"s=1/2, σ=0.1", "s=1, σ=0.1", "s=3/2, σ =0.1", "s=1/2, σ=0.05", "s=1, σ=0.05", "s=3/2, σ =0.05"},
Frame → True, PlotStyle → {Dashed, {Red, DotDashed}, {Black, Dashing[{0.02, 0.005, 0.05, 0.01}]},
Brown, {Black, Dotted}, {Orange, Dashing[{0.04, 0.008, 0.008, 0.015}]},
{Green, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.005, 0.005, 0.005, 0.005, 0.01, 0.05, 0.005}]},
{Purple, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.025, 0.02, 0.005}]},
{Blue, Dashing[{0.02, 0.01, 0.02, 0.01}]}, FrameLabel → {t, "  $\frac{E[\psi]}{\ln(2s+1)}$  "},
LabelStyle → Directive[Black, Bold, FontFamily → "Helvetica"],
ImageSize → Large, PerformanceGoal → "HighQuality", MaxRecursion → 15,
GridLines → Automatic, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dotted]]

```

4.4 Código *Mathematica* para la solución a los polinomios característicos (3.1.90) a (3.1.92) para las polarizaciones  $|1, \pm 1\rangle, |3/2, \pm 3/2\rangle, |3/2, \pm 1/2\rangle$  para los espines  $s = 1, 3/2$ .

#### 4.4 Código *Mathematica* para la solución a los polinomios característicos (3.1.90) a (3.1.92) para las polarizaciones $|1, \pm 1\rangle, |3/2, \pm 3/2\rangle, |3/2, \pm 1/2\rangle$ para los espines $s = 1, 3/2$ .

Se muestra el código de *Wolfram Mathematica 10.4* para la solución a los polinomios característicos (3.1.90) a (3.1.92)

$$\text{Solve} \left[ \frac{1}{32} (-1 + e^{2t} + 4\lambda) (-1 + 2e^t + 6\lambda - 8\lambda^2 + e^{2t}(-1 + 2\lambda)) == 0, \lambda \right]$$

$$\left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{4} (1 - e^{2t}) \right\},$$

$$\left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{8} \left( 3 + e^{2t} - \sqrt{1 + 16e^t - 2e^{2t} + e^{4t}} \right) \right\},$$

$$\left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{8} \left( 3 + e^{2t} + \sqrt{1 + 16e^t - 2e^{2t} + e^{4t}} \right) \right\}$$

**FullSimplify[**

$$\text{Solve} \left[ \frac{9 - 27e^t + 9e^{2t} + 36e^{3t} - 18e^{4t} - 18e^{5t} - 18e^{6t} + 36e^{7t} + 9e^{8t} - 27e^{9t} + 9e^{10t}}{4096} + \frac{(-192 + 336e^t - 288e^{3t} + 192e^{4t} - 96e^{7t} + 48e^{9t})\lambda}{4096} + \frac{(1408 - 960e^t - 384e^{4t} - 64e^{9t})\lambda^2}{4096} - \lambda^3 + \lambda^4 == 0, \lambda \right]$$

$$\left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{16} \left( 4 + e^{t/2} (3 + e^{4t}) - \sqrt{4 + 12e^{t/2} + 21e^t + 24e^{5t/2} + 12e^{4t} - 4e^{9t/2} - 6e^{5t} + e^{9t}} \right) \right\},$$

$$\left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{16} \left( 4 + e^{t/2} (3 + e^{4t}) + \sqrt{4 + 12e^{t/2} + 21e^t + 24e^{5t/2} + 12e^{4t} - 4e^{9t/2} - 6e^{5t} + e^{9t}} \right) \right\},$$

$$\left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{16} \left( 4 - e^{t/2} (3 + e^{4t}) - \sqrt{4 - 12e^{t/2} + 21e^t - 24e^{5t/2} + 12e^{4t} + 4e^{9t/2} - 6e^{5t} + e^{9t}} \right) \right\},$$

$$\left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{16} \left( 4 - e^{t/2} (3 + e^{4t}) + \sqrt{4 - 12e^{t/2} + 21e^t - 24e^{5t/2} + 12e^{4t} + 4e^{9t/2} - 6e^{5t} + e^{9t}} \right) \right\}$$

**FullSimplify[**

$$\text{Solve} \left[ \frac{9 - 27e^t + 9e^{2t} + 36e^{3t} - 18e^{4t} - 18e^{5t} - 18e^{6t} + 36e^{7t} + 9e^{8t} - 27e^{9t} + 9e^{10t}}{4096} + \frac{(-192 + 240e^t - 96e^{3t} + 192e^{4t} - 288e^{7t} + 144e^{9t})\lambda}{4096} + \frac{(1408 - 448e^t - 384e^{4t} - 576e^{9t})\lambda^2}{4096} - \lambda^3 + \lambda^4 == 0, \lambda \right]$$

$$\left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{16} \left( 4 - e^{t/2} (1 + 3e^{4t}) - \sqrt{4 + 4e^{t/2} + 13e^t - 24e^{5t/2} + 12e^{4t} - 12e^{9t/2} - 6e^{5t} + 9e^{9t}} \right) \right\},$$

$$\left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{16} \left( 4 - e^{t/2} (1 + 3e^{4t}) + \sqrt{4 + 4e^{t/2} + 13e^t - 24e^{5t/2} + 12e^{4t} - 12e^{9t/2} - 6e^{5t} + 9e^{9t}} \right) \right\},$$

$$\left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{16} \left( 4 + e^{t/2} + 3e^{9t/2} - \sqrt{4 - 4e^{t/2} + 13e^t + 24e^{5t/2} + 12e^{4t} + 12e^{9t/2} - 6e^{5t} + 9e^{9t}} \right) \right\},$$

$$\left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{16} \left( 4 + e^{t/2} + 3e^{9t/2} + \sqrt{4 - 4e^{t/2} + 13e^t + 24e^{5t/2} + 12e^{4t} + 12e^{9t/2} - 6e^{5t} + 9e^{9t}} \right) \right\}$$

4.5 Código *Mathematica* para la obtención de las gráficas 3.5 y 3.6.

#### 4.5 Código *Mathematica* para la obtención de las gráficas 3.5 y 3.6.

El código *Wolfram Mathematica 10.4* utilizado para la gráfica 3.5 es

```
ClearAll["Global*"]
```

**Eigenvalores spin 1/2,  $n=\pm 1/2$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$**

$$a1 = \frac{1}{2} (1 - e^{t/2});$$

$$a2 = \frac{1}{2} (1 + e^{t/2});$$

**Eigenvalores spin 1,  $n=\pm 1$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$**

$$b1 = \frac{1}{4} (1 - e^{2t});$$

$$b2 = \frac{1}{8} (3 + e^{2t} - \sqrt{1 + 16e^t - 2e^{2t} + e^{4t}});$$

$$b3 = \frac{1}{8} (3 + e^{2t} + \sqrt{1 + 16e^t - 2e^{2t} + e^{4t}});$$

**Eigenvalores spin 1,  $n=0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$**

$$c1 = \frac{1}{3} (1 - e^{2t});$$

$$c2 = \frac{1}{6} (2 + e^{2t} - \sqrt{8e^t + e^{4t}});$$

$$c3 = \frac{1}{6} (2 + e^{2t} + \sqrt{8e^t + e^{4t}});$$

**Eigenvalores spin 3/2,  $n=\pm 3/2$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$**

$$d1 = \frac{1}{16} (4 + e^{t/2} (3 + e^{4t}) - \sqrt{4 + 12e^{t/2} + 21e^t + 24e^{5t/2} + 12e^{4t} - 4e^{9t/2} - 6e^{5t} + e^{9t}});$$

$$d2 = \frac{1}{16} (4 + e^{t/2} (3 + e^{4t}) + \sqrt{4 + 12e^{t/2} + 21e^t + 24e^{5t/2} + 12e^{4t} - 4e^{9t/2} - 6e^{5t} + e^{9t}});$$

$$d3 = \frac{1}{16} (4 - e^{t/2} (3 + e^{4t}) - \sqrt{4 - 12e^{t/2} + 21e^t - 24e^{5t/2} + 12e^{4t} + 4e^{9t/2} - 6e^{5t} + e^{9t}});$$

$$d4 = \frac{1}{16} (4 - e^{t/2} (3 + e^{4t}) + \sqrt{4 - 12e^{t/2} + 21e^t - 24e^{5t/2} + 12e^{4t} + 4e^{9t/2} - 6e^{5t} + e^{9t}});$$

**Eigenvalores spin 3/2,  $n=\pm 1/2$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$**

$$e1 = \frac{1}{16} \left( 4 - e^{t/2} (1 + 3e^{4t}) - \sqrt{4 + 4e^{t/2} + 13e^t - 24e^{5t/2} + 12e^{4t} - 12e^{9t/2} - 6e^{5t} + 9e^{9t}} \right);$$

$$e2 = \frac{1}{16} \left( 4 - e^{t/2} (1 + 3e^{4t}) + \sqrt{4 + 4e^{t/2} + 13e^t - 24e^{5t/2} + 12e^{4t} - 12e^{9t/2} - 6e^{5t} + 9e^{9t}} \right);$$

$$e3 = \frac{1}{16} \left( 4 + e^{t/2} + 3e^{9t/2} - \sqrt{4 - 4e^{t/2} + 13e^t + 24e^{5t/2} + 12e^{4t} + 12e^{9t/2} - 6e^{5t} + 9e^{9t}} \right);$$

$$e4 = \frac{1}{16} \left( 4 + e^{t/2} + 3e^{9t/2} + \sqrt{4 - 4e^{t/2} + 13e^t + 24e^{5t/2} + 12e^{4t} + 12e^{9t/2} - 6e^{5t} + 9e^{9t}} \right);$$

**Entropías para spin 1/2**

$$E1 = \frac{-(a1*\text{Log}[a1]+a2*\text{Log}[a2])}{\text{Log}[2]};$$

$$E2 = E1/.t \rightarrow u;$$

$$E3 = E1/.t \rightarrow uu;$$

**Entropías para spin 1,  $n=\pm 1$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$**

$$EE1 = \frac{-(b1*\text{Log}[b1]+b2*\text{Log}[b2]+b3*\text{Log}[b3])}{\text{Log}[3]};$$

$$EE2 = EE1/.t \rightarrow u;$$

$$EE3 = EE1/.t \rightarrow uu;$$

**Entropías para spin 1,  $n=0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$**

$$EE11 = \frac{-(c1*\text{Log}[c1]+c2*\text{Log}[c2]+c3*\text{Log}[c3])}{\text{Log}[3]};$$

$$EE22 = EE11/.t \rightarrow u;$$

$$EE33 = EE11/.t \rightarrow uu;$$

**Entropías para spin 3/2,  $n=\pm 3/2$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$**

$$EEE1 = \frac{-(d1*\text{Log}[d1]+d2*\text{Log}[d2]+d3*\text{Log}[d3]+d4*\text{Log}[d4])}{\text{Log}[4]};$$

$$EEE2 = EEE1/.t \rightarrow u;$$

$$EEE3 = EEE1/.t \rightarrow uu;$$

**Entropías para spin 3/2,  $n = \pm 1/2$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$**

$$EEEE1 = \frac{-(e1 * \text{Log}[e1] + e2 * \text{Log}[e2] + e3 * \text{Log}[e3] + e4 * \text{Log}[e4])}{\text{Log}[4]}$$

$$EEEE2 = EEEE1 / . \iota \rightarrow \iota \iota;$$

$$EEEE3 = EEEE1 / . \iota \rightarrow \iota \iota \iota;$$

**Luego definimos los parámetros de  $\iota$**

$$\alpha = 0.50;$$

$$\alpha\alpha = 1.00;$$

$$\alpha\alpha\alpha = 1.75;$$

$$\gamma = 1;$$

$$m = 1;$$

$$\sigma = 1;$$

$$h = 1;$$

$$\iota = - \left( \frac{\alpha * t * \gamma}{4 * m * \sigma} \right)^2 * \left( (h * t)^2 + (4 * m * \sigma^2)^2 \right); (*\alpha=0.50*)$$

$$\iota\iota = - \left( \frac{\alpha\alpha * t * \gamma}{4 * m * \sigma} \right)^2 * \left( (h * t)^2 + (4 * m * \sigma^2)^2 \right); (*\alpha=1.00*)$$

$$\iota\iota\iota = - \left( \frac{\alpha\alpha\alpha * t * \gamma}{4 * m * \sigma} \right)^2 * \left( (h * t)^2 + (4 * m * \sigma^2)^2 \right); (*\alpha=1.75*)$$

**Entropías  $\alpha = 0.50$**

Plot[{E1, EE1, EE11, EEE1, EEEE1}, {t, 0, 4.0},

PlotLegends  $\rightarrow$  LineLegend[{"|1/2;  $\pm 1/2$ ", "|1;  $\pm 1$ ", "|1; 0", "|3/2;  $\pm 3/2$ ", "|1/2;  $\pm 3/2$ "}],

LegendLabel  $\rightarrow$  " $\alpha = 0.50$ ", Frame  $\rightarrow$  True,

FrameLabel  $\rightarrow$  {{" $\frac{E[\psi]}{\text{Ln}(2s+1)}$ ", Null}, {t, "a"}},

PlotStyle  $\rightarrow$  {{Black, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.002, 0.002}]},

Red, {Blue, Dashing[{0.01, 0.009, 0.009, 0.009, 0.01}]},

{Green, Dashing[{0.02, 0.005, 0.05, 0.01}]}, {Orange, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.015, 0.005}]},

LabelStyle  $\rightarrow$  Directive[Black, Bold],

ImageSize  $\rightarrow$  Large, PerformanceGoal  $\rightarrow$  "HighQuality", GridLines  $\rightarrow$  Automatic,



GridLinesStyle → Directive[Gray, Dotted]]

### Entropías $\alpha = 1.00$

Plot[{E2, EE2, EE22, EEE2, EEEE2}, {t, 0, 4.0},

PlotLegends → LineLegend[{"|1/2;  $\pm 1/2$ }", "|1;  $\pm 1$ ", "|1; 0", "|3/2;  $\pm 3/2$ ", "|1/2;  $\pm 3/2$ "}],

LegendLabel → " $\alpha = 1.00$ ", Frame → True,

FrameLabel → {{" $\frac{E[\psi]}{\ln(2s+1)}$ ", Null}, {t, "b"}},

PlotStyle → {{Black, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.002, 0.002}]}, Red,

{Blue, Dashing[{0.01, 0.009, 0.009, 0.009, 0.01}]},

{Green, Dashing[{0.02, 0.005, 0.05, 0.01}]}, {Orange, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.015, 0.005}]},

LabelStyle → Directive[Black, Bold],

ImageSize → Large, PerformanceGoal->"HighQuality", GridLines → Automatic,

GridLinesStyle → Directive[Gray, Dotted]]

### Entropías $\alpha = 1.75$

Plot[{E3, EE3, EE33, EEE3, EEEE3}, {t, 0, 4.0},

PlotLegends → LineLegend[{"|1/2;  $\pm 1/2$ }", "|1;  $\pm 1$ ", "|1; 0", "|3/2;  $\pm 3/2$ ", "|1/2;  $\pm 3/2$ "}],

LegendLabel → " $\alpha = 1.75$ ", Frame → True,

FrameLabel → {{" $\frac{E[\psi]}{\ln(2s+1)}$ ", Null}, {t, "c"}},

PlotStyle → {{Black, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.002, 0.002}]}, Red,

{Blue, Dashing[{0.01, 0.009, 0.009, 0.009, 0.01}]},

{Green, Dashing[{0.02, 0.005, 0.05, 0.01}]}, {Orange, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.015, 0.005}]},

LabelStyle → Directive[Black, Bold],

ImageSize → Large, PerformanceGoal->"HighQuality", GridLines → Automatic,

GridLinesStyle → Directive[Gray, Dotted], PlotRange → All]

El código *Wolfram Mathematica 10.4* utilizado para la gráfica 3.6 es

ClearAll["Global\*"]

**Eigenvalores spin 1/2,  $n=\pm 1/2$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$**

$$a1 = \frac{1}{2} (1 - e^{\iota/2});$$

$$a2 = \frac{1}{2} (1 + e^{\iota/2});$$

**Eigenvalores spin 1,  $n=\pm 1$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$**

$$b1 = \frac{1}{4} (1 - e^{2\iota});$$

$$b2 = \frac{1}{8} (3 + e^{2\iota} - \sqrt{1 + 16e^{\iota} - 2e^{2\iota} + e^{4\iota}});$$

$$b3 = \frac{1}{8} (3 + e^{2\iota} + \sqrt{1 + 16e^{\iota} - 2e^{2\iota} + e^{4\iota}});$$

**Eigenvalores spin 1,  $n=0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$**

$$c1 = \frac{1}{3} (1 - e^{2\iota});$$

$$c2 = \frac{1}{6} (2 + e^{2\iota} - \sqrt{8e^{\iota} + e^{4\iota}});$$

$$c3 = \frac{1}{6} (2 + e^{2\iota} + \sqrt{8e^{\iota} + e^{4\iota}});$$

**Eigenvalores spin 3/2,  $n=\pm 3/2$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$**

$$d1 = \frac{1}{16} (4 + e^{\iota/2} (3 + e^{4\iota}) - \sqrt{4 + 12e^{\iota/2} + 21e^{\iota} + 24e^{5\iota/2} + 12e^{4\iota} - 4e^{9\iota/2} - 6e^{5\iota} + e^{9\iota}});$$

$$d2 = \frac{1}{16} (4 + e^{\iota/2} (3 + e^{4\iota}) + \sqrt{4 + 12e^{\iota/2} + 21e^{\iota} + 24e^{5\iota/2} + 12e^{4\iota} - 4e^{9\iota/2} - 6e^{5\iota} + e^{9\iota}});$$

$$d3 = \frac{1}{16} (4 - e^{\iota/2} (3 + e^{4\iota}) - \sqrt{4 - 12e^{\iota/2} + 21e^{\iota} - 24e^{5\iota/2} + 12e^{4\iota} + 4e^{9\iota/2} - 6e^{5\iota} + e^{9\iota}});$$

$$d4 = \frac{1}{16} (4 - e^{\iota/2} (3 + e^{4\iota}) + \sqrt{4 - 12e^{\iota/2} + 21e^{\iota} - 24e^{5\iota/2} + 12e^{4\iota} + 4e^{9\iota/2} - 6e^{5\iota} + e^{9\iota}});$$

**Eigenvalores spin 3/2,  $n=\pm 1/2$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$**

$$e1 = \frac{1}{16} (4 - e^{\iota/2} (1 + 3e^{4\iota}) - \sqrt{4 + 4e^{\iota/2} + 13e^{\iota} - 24e^{5\iota/2} + 12e^{4\iota} - 12e^{9\iota/2} - 6e^{5\iota} + 9e^{9\iota}});$$

$$e2 = \frac{1}{16} (4 - e^{\iota/2} (1 + 3e^{4\iota}) + \sqrt{4 + 4e^{\iota/2} + 13e^{\iota} - 24e^{5\iota/2} + 12e^{4\iota} - 12e^{9\iota/2} - 6e^{5\iota} + 9e^{9\iota}});$$

$$e3 = \frac{1}{16} \left( 4 + e^{t/2} + 3e^{9t/2} - \sqrt{4 - 4e^{t/2} + 13e^t + 24e^{5t/2} + 12e^{4t} + 12e^{9t/2} - 6e^{5t} + 9e^{9t}} \right);$$

$$e4 = \frac{1}{16} \left( 4 + e^{t/2} + 3e^{9t/2} + \sqrt{4 - 4e^{t/2} + 13e^t + 24e^{5t/2} + 12e^{4t} + 12e^{9t/2} - 6e^{5t} + 9e^{9t}} \right);$$

### Entropías para spin 1/2

$$E1 = \frac{-(a1 \cdot \text{Log}[a1] + a2 \cdot \text{Log}[a2])}{\text{Log}[2]};$$

$$E2 = E1/.t \rightarrow u;$$

$$E3 = E1/.t \rightarrow uu;$$

### Entropías para spin 1, $n=\pm 1$ , $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$EE1 = \frac{-(b1 \cdot \text{Log}[b1] + b2 \cdot \text{Log}[b2] + b3 \cdot \text{Log}[b3])}{\text{Log}[3]};$$

$$EE2 = EE1/.t \rightarrow u;$$

$$EE3 = EE1/.t \rightarrow uu;$$

### Entropías para spin 1, $n=0$ , $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$EE11 = \frac{-(c1 \cdot \text{Log}[c1] + c2 \cdot \text{Log}[c2] + c3 \cdot \text{Log}[c3])}{\text{Log}[3]};$$

$$EE22 = EE11/.t \rightarrow u;$$

$$EE33 = EE11/.t \rightarrow uu;$$

### Entropías para spin 3/2, $n=\pm 3/2$ , $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$EEE1 = \frac{-(d1 \cdot \text{Log}[d1] + d2 \cdot \text{Log}[d2] + d3 \cdot \text{Log}[d3] + d4 \cdot \text{Log}[d4])}{\text{Log}[4]};$$

$$EEE2 = EEE1/.t \rightarrow u;$$

$$EEE3 = EEE1/.t \rightarrow uu;$$

**Entropías para spin 3/2,  $n = \pm 1/2$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$**

$$EEEE1 = \frac{-(e1 * \text{Log}[e1] + e2 * \text{Log}[e2] + e3 * \text{Log}[e3] + e4 * \text{Log}[e4])}{\text{Log}[4]};$$

$$EEEE2 = EEEE1 /. \iota \rightarrow \mu;$$

$$EEEE3 = EEEE1 /. \iota \rightarrow \mu\mu;$$

$$\sigma = 0.2;$$

$$\sigma\sigma = 0.10;$$

$$\sigma\sigma\sigma = 0.05;$$

$$\alpha = 1;$$

$$\gamma = 1;$$

$$m = 1;$$

$$\sigma = 1;$$

$$h = 1;$$

$$\iota = - \left( \frac{\alpha * t * \gamma}{4 * m * \sigma} \right)^2 * \left( (h * t)^2 + (4 * m * \sigma^2)^2 \right); (*\sigma=0.20*)$$

$$\mu = - \left( \frac{\alpha * t * \gamma}{4 * m * \sigma\sigma} \right)^2 * \left( (h * t)^2 + (4 * m * \sigma\sigma^2)^2 \right); (*\sigma=0.10*)$$

$$\mu\mu = - \left( \frac{\alpha * t * \gamma}{4 * m * \sigma\sigma\sigma} \right)^2 * \left( (h * t)^2 + (4 * m * \sigma\sigma\sigma^2)^2 \right); (*\sigma=0.05*)$$

**Entropías  $\sigma = 0.20$**

Plot[{E1, EE1, EE11, EEE1, EEEE1}, {t, 0, 2.5},

PlotLegends  $\rightarrow$  LineLegend[{"|1/2,  $\pm 1/2$ }", "|1,  $\pm 1$ }", "|1, 0}", "|3/2,  $\pm 3/2$ ", "|3/2,  $\pm 1/2$ "}],

LegendLabel  $\rightarrow$  " $\sigma = 0.20$ ", Frame  $\rightarrow$  True,

FrameLabel  $\rightarrow$  {{" $\frac{E[\psi]}{\text{Ln}(2s+1)}$ ", Null}, {t, "a"}},

PlotStyle  $\rightarrow$  {{Black, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.002, 0.002}]}, Red,

{Blue, Dashing[{0.01, 0.009, 0.009, 0.009, 0.01]}},

{Green, Dashing[{0.02, 0.005, 0.05, 0.01]}}, {Orange, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.015, 0.005}]},

LabelStyle  $\rightarrow$  Directive[Black, Bold],

ImageSize  $\rightarrow$  Large, PerformanceGoal  $\rightarrow$  "HighQuality", GridLines  $\rightarrow$  Automatic,

GridLinesStyle  $\rightarrow$  Directive[Gray, Dotted]]

**Entropías  $\sigma = 0.10$** 

```

Plot[{"|1/2, ±1/2>", "|1, ±1>", "|1, 0>", "|3/2, ±3/2>", "|3/2, ±1/2>"},
LegendLabel → "σ = 0.10", Frame → True,
FrameLabel → {{"  $\frac{E[\psi]}{\ln(2s+1)}$  ", Null}, {t, "b"}},
PlotStyle → {{Black, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.002, 0.002}]}, Red,
{Blue, Dashing[{0.01, 0.009, 0.009, 0.009, 0.01}]},
{Green, Dashing[{0.02, 0.005, 0.05, 0.01}]}, {Orange, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.015, 0.005}]}}},
LabelStyle → Directive[Black, Bold],
ImageSize → Large, PerformanceGoal->"HighQuality", GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[Gray, Dotted]]

```

**Entropías  $\sigma = 0.05$** 

```

Plot[{"|1/2, ±1/2>", "|1, ±1>", "|1, 0>", "|3/2, ±3/2>", "|3/2, ±1/2>"},
LegendLabel → "σ = 0.05", Frame → True,
FrameLabel → {{"  $\frac{E[\psi]}{\ln(2s+1)}$  ", Null}, {t, "c"}},
PlotStyle → {{Black, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.002, 0.002}]}, Red,
{Blue, Dashing[{0.01, 0.009, 0.009, 0.009, 0.01}]},
{Green, Dashing[{0.02, 0.005, 0.05, 0.01}]}, {Orange, Dashing[{0.005, 0.005, 0.005, 0.015, 0.005}]}}},
LabelStyle → Directive[Black, Bold],
ImageSize → Large, PerformanceGoal->"HighQuality", GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[Gray, Dotted], PlotRange → All]

```





## Bibliografía

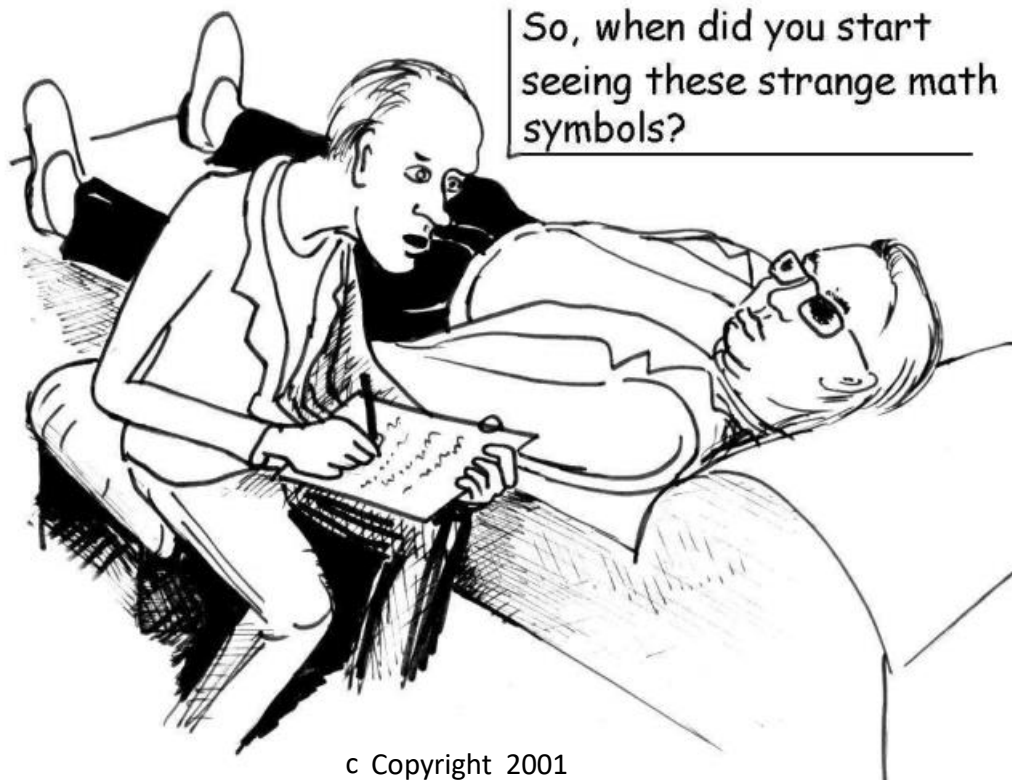
- Araujo, V. S., Coutinho, F. A. B., and Perez, J. F. (2004). Operator domains and self-adjoint operators. *American Journal of Physics*, 72(2):203–213.
- Audretsch, J. (2008). *Entangled systems: new directions in quantum physics*. John Wiley & Sons.
- Barenco, A. (1996). Quantum physics and computers. *Contemporary Physics*, 37(5):375–389.
- Benítez, E., Arévalo, L. M., and Piceno, E. (2017a). Corrigendum: A full quantum analysis of the stern - gerlach experiment using the evolution operator method: analysing current issues in teaching quantum mechanics. *European Journal of Physics*, 38(6):069501.
- Benítez, E., Arévalo, L. M., and Piceno, E. (2017b). A full quantum analysis of the stern -gerlach experiment using the evolution operator method: analyzing current issues in teaching quantum mechanics. *European Journal of Physics*, 38(2):025403.
- Bennett, C. H., Brassard, G., Crépeau, C., Jozsa, R., Peres, A., and Wootters, W. K. (1993). Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70(13):1895–1899.
- Bennett, C. H., DiVincenzo, D. P., Smolin, J. A., and Wootters, W. K. (1996). Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, 54(5):3824–3851.
- Bernstein, J. (2010). The stern-gerlach experiment. *arXiv:1007.2435*.
- Blinder, S. M. (1968). Evolution of a gaussian wavepacket. *American Journal of Physics*, 36(6):525–526.
- Born, M. (2014). *My Life: Recollections of a Nobel Laureate*, volume 3. Routledge.
- Carr, L. D. and McKagan, S. B. (2009). Graduate quantum mechanics reform. *American Journal of Physics*, 77(4):308–319.
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., and Laloë, F. (1977). *Quantum mechanics*. Wiley, New York.
- Compton, A. H. (1921). The magnetic electron. *Journal of the Franklin Institute*, 192(2):145–155.
- Deepak, K. (1998). Measurement problem in quantum mechanics: characteristics of an apparatus. *Pramana*, 51(5):567–575.
- Devereux, M. (2015). Reduction of the atomic wavefunction in the stern-gerlach magnetic field. *Canadian Journal of Physics*, 93(11):1382–1390.
- Dirac, P. (1928). The quantum theory of electron. *Proceedings of the royal society A*, 117(778):610.

- Friedrich, B. and Herschbach, D. (1998). Space quantization: Otto stern's lucky star. *Daedalus*, 127(1):165–191.
- Friedrich, B. and Herschbach, D. (2003). Stern and gerlach: How a bad cigar helped reorient atomic physics. *Physics Today*, 56(12):53–59.
- García, P. C. and Arévalo, L. M. (2007). Factorizing the time evolution operator. *Physica Scripta*, 75(2):185.
- Gomis, P. and Pérez, A. (2016). Decoherence effects in the stern-gerlach experiment using matrix wigner functions. *Phys. Rev. A*, 94(1):012103.
- Gondran, M., Gondran, A., and Kenoufi, A. (2012). Decoherence time and spin measurement in the stern-gerlach experiment. *AIP Conference Proceedings*, 1424(1):116–120.
- Griyths, D. J. (2016). *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge University Press.
- Hannout, M., Hoyt, S., Kryowonos, A., and Widom, A. (1998). Quantum measurement theory and the stern-gerlach experiment. *American Journal of Physics*, 66(5):377–379.
- Harshman, N. (2007). Continuous-discrete entanglement: an example with non-relativistic particles. *Quantum Information & Computation*, 7(3):273–280.
- Herschbach, D. (2001). Molecular beams entwined with quantum theory: A bouquet for max planck. *Annalen der Physik*, 10(1-2):163–176.
- Herschbach, D. R. (1987). Molecular dynamics of elementary chemical reactions (nobel lecture). *Angewandte Chemie International Edition*, 26(12):1221–1243.
- Hsu, B. C., Berrondo, M., and Van Huele, J.-F. S. (2011). Stern-gerlach dynamics with quantum propagators. *Physical Review A*, 83(1):012109.
- Jeske, F., Stöferle, T., and DeKieviet, M. (2011). Massive spin-momentum entanglement measured in an atomic beam spin echo experiment. *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 63(1):25–32.
- Lamb, W. and Retherford, R. C. (1947). Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method. *Phys. Rev.*, 72(3):241–243.
- Louisell, W. H. (1990). *Quantum Statistical Properties of Radiation*. New York: Wiley.
- Mehra, J. and Rechenberg, H. (1982). *The Quantum Theory of Planck, Einstein, Bohr and Sommerfeld: Its Foundation and the Rise of Its Difficulties 1900-1925*. Springer Verlag New York.
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. (2004). *Quantum computation and quantum information* (cambridge series on information and the natural sciences).
- Nouredine, Z. (2009). *Quantum mechanics concepts and applications*.
- Paris, M. G. A. (2012). The modern tools of quantum mechanics. *The European Physical Journal Special Topics*, 203(1):61–86.
- Patil, S. H. (1998). Quantum mechanical description of the stern-gerlach experiment. *European Journal of Physics*, 19(1):25.



- Phipps, T. E. and Taylor, J. B. (1927). The magnetic moment of the hydrogen atom. *Phys. Rev.*, 29(2):309–320.
- Rechenberg, H. (1989). Walther gerlach erinnerungen anlässlich seines 100. geburtstages. *Physikalische Blätter*, 45(8):326–326.
- Reddy, A., Samuel, J., Shivam, K., and Sinha, S. (2016). Coarse quantum measurement: An analysis of the stern-gerlach experiment. *Physics Letters A*, 380(11):1135 – 1140.
- Roston, G., Casas, M., Plastino, A., and Plastino, A. (2005). Quantum entanglement, spin-1/2 and the stern-gerlach experiment. *European journal of physics*, 26(4):657.
- Sakurai, J. J. (1995). *Modern quantum mechanics, revised edition*. AAPT.
- Schmidt-Böcking, Horst, Schmidt, Lothar, Lüdde, Hans JÄ $\frac{1}{4}$ rger, Trageser, Wolfgang, Templeton, Alan, and Sauer, Tilman (2016). The stern-gerlach experiment revisited. *Eur. Phys. J. H*, 41(4-5):327–364.
- Segre, E. (1973). Otto stern. *Bibliographical Memoirs of the National Academy of Sciences*, 43:215–236.
- Stern, O. and Gerlach, W. (1922). Der experimentelle nachweis des magnetischen moments des silberatoms. *Zeitschrift für Physik*, 8(1):110–111.
- Tekin, B. (2016). Stern-gerlach experiment with higher spins. *European Journal of Physics*, 37(3):035401.
- Townsend, J. S. (2000). *A modern approach to quantum mechanics*. University Science Books.
- Uhlenbeck, G. E. and Goudsmit, S. (1926). Spinning electrons and the structure of spectra. *Nature*, 117:264.
- Weinert, F. (1995). Wrong theory right experiment: The significance of the stern-gerlach experiments. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 26(1):75 – 86.
- Zeh, H. (1970). On the interpretation of measurement in quantum theory. *Found. Phys.*, 1(1):69–76.
- Zurek, W. H. (1981). Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse? *Phys. Rev. D*, 24(6):1516–1525.
- Zurek, W. H. (1982). Environment-induced superselection rules. *Phys. Rev. D*, 26(8):1862–1880.

And. . .after writing my thesis work. . .



c Copyright 2001  
Wieslaw Krawcewicz

---

*“Aunque tengo de la vida una concepción sombría, siempre he sentido gran pasión por la existencia.”*  
-Emil Cioran