

# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

## CODIFICACIÓN DE HACES COMPLEJOS DE LUZ MEDIANTE HOLOGRAMAS SINTÉTICOS DE FASE

Tesis presentada para obtener el título de:

**Licenciada en física aplicada**

Presenta:

Teresa de Jesús Cerdà Astorga

Dirigida por:

Dr. Ulises Ruiz Corona

Investigador del Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

Puebla, Pue.

Junio 2016



## Agradecimientos

Agradezco infinitamente a todas las personas que me han acompañado a lo largo de todo mi desarrollo académico. Tanto a mi familia como amigos. A mis padres por todo el esfuerzo que han invertido en mi. Especialmente a mi madre por todas las noches de desvelo a mi lado, por todos sus consejos y los fabulosos momentos que me ayudaron a hacer más ameno este episodio de mi vida. También por enseñarme a nunca conformarme con nada y querer ser mejor. Ella es una persona tan maravillosa que le agradezco por compartirme su chispa para poder ver la vida de una forma más bonita (de lo que ya es). A mi padre por toda su participación a distancia, que aunque no podamos vernos tanto como quisiéramos, yo se que está dispuesto a ayudarme siempre y brindarme apoyo.

Agradezco a mi asesor Ulises, porque logró ayudarme cuando más lo necesitaba sin hacer preguntas ni dudar en ningún momento sobre mi capacidad para desarrollar este trabajo de tesis. Nos hemos entendido bien en la forma de trabajar que espero podamos seguir así para la maestría y lo que tenga que venir.

Todos mis amigos han formado parte importante en mi vida, y aunque no sean muchos y casi no nos veamos, siempre están ahí para apoyarme o para pasar un buen rato. Le doy gracias a Mario que logró convertirse en una parte importante en mi vida, siendo mi compañero de equipo desde tercer semestre y hasta la fecha. También a Agus por ayudarme a encontrarle sentido a las matemáticas y darme muchas razones para quererlas, porque cabe mencionar que lo que nos enseñan en la preparatoria, no tiene nada que ver con lo que se encuentra uno en la universidad.

Son muchas las personas que me gustaría mencionar, sin embargo, nunca podría terminar de agradecerles. No son tantas, pero sí hay mucho que decirles.



# Resumen

Lo interesante de un holograma óptico es que, al ser una placa plana en la cual es grabado el campo, se puede lograr reproducir una imagen en tres dimensiones. Además, el hacer un holograma no involucra el sentido usual de grabar imágenes, resulta ser algo un poco más complejo.

Una característica muy relevante en el área de la holografía, es la capacidad que se tiene para plasmar el campo completo de una onda, es decir, conservar tanto la amplitud como la fase del campo. Ya que el medio que se utiliza para grabar responde a variaciones de intensidad, es necesario convertir la información de la fase en cambios de intensidad. Esto se logra implementando métodos sencillos para la grabación de hologramas los cuales en sentido general utilizan una onda de referencia y una onda esparcida por el objeto, provenientes de la misma fuente. Ambas llegan a la placa fotográfica y son grabadas formando un patrón de interferencia. Para realizar la reconstrucción del campo codificado es necesario utilizar la misma onda de referencia que se usó para generar el holograma.

Debido a que la holografía ha evolucionado considerablemente en los últimos años, es posible crear hologramas en computadora y utilizarlos experimentalmente para la reconstrucción del frente de onda de algún campo codificado. Es por esto que la generación de campos ópticos escalares complejos con modulación espacial de amplitud y fase, que son independientes, es una labor importante dentro de la óptica contemporánea. Un método práctico y versátil para generar estos campos arbitrarios es utilizando hologramas sintéticos de fase generados con ayuda de un modulador de fase.

En este trabajo de tesis se discute la teoría básica de la generación de hologramas de este tipo, así como sus propiedades. Se analizan tres diferentes tipos de hologramas sintéticos de fase con los cuales se evalúa la calidad de los mismos, en la generación de varios haces complejos, tales como Bessel, Hermite-Gauss y Laguerre-Gauss. Finalmente se presentan los resultados experimentales obtenidos.



# Objetivo general

Analizar las propiedades de diferentes hologramas sintéticos de fase en la codificación de campos complejos y generarlos experimentalmente.

## Objetivos específicos

- Aprender las características de los hologramas sintéticos de fase mediante su estudio utilizando análisis de Fourier.
- Estudiar las características de las fases que pueden ser utilizadas en los hologramas sintéticos de fase de acuerdo al punto anterior.
- Desarrollar numéricamente algunos tipos de hologramas sintéticos de fase para analizar su estructura y así poder evaluar su desempeño en la generación de campos complejos.
- Caracterizar un modulador espacial de luz con el cual se desplegará experimentalmente la codificación de los distintos campos complejos.
- Generación y comparación de distintos campos complejos mediante el uso del modulador espacial de luz.





# Índice general

Resumen	v
Objetivos	vii
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>5</b>
2.1. Holografía . . . . .	5
2.2. Hologramas por computadora . . . . .	8
2.2.1. Hologramas de amplitud . . . . .	9
2.2.2. Hologramas de fase . . . . .	10
<b>3. Análisis teórico para hologramas de fase</b>	<b>11</b>
3.1. Desarrollo teórico-numérico . . . . .	11
3.1.1. Holograma modificado . . . . .	13
3.2. Tipos de SPH . . . . .	14
3.2.1. SPH 1 . . . . .	14
3.2.2. SPH 2 . . . . .	15
3.2.3. SPH 3 . . . . .	16
<b>4. Resultados</b>	<b>19</b>
4.1. Modulador espacial de luz . . . . .	19
4.1.1. Curva de respuesta del modulador . . . . .	20
4.2. Resultados experimentales . . . . .	22
4.2.1. Arreglo experimental . . . . .	22
4.3. Haces Bessel . . . . .	25
4.3.1. Tipo 1 . . . . .	26
4.3.2. Tipo 2 . . . . .	27
4.3.3. Tipo 3 . . . . .	28
4.4. Haces Hermite-Gauss . . . . .	29
4.4.1. Tipo 1 . . . . .	30
4.4.2. Tipo 2 . . . . .	31
4.4.3. Tipo 3 . . . . .	32

4.5. Haces Laguerre-Gauss . . . . .	33
4.5.1. Tipo 1 . . . . .	34
4.5.2. Tipo 2 . . . . .	35
4.5.3. Tipo 3 . . . . .	36
4.5.4. Discusión de resultados . . . . .	37
<b>5. Conclusiones</b>	<b>41</b>
<b>    Apéndice 1</b>	<b>43</b>
<b>    Apéndice 2</b>	<b>47</b>
<b>    Apéndice 3</b>	<b>53</b>
<b>    Bibliografía</b>	<b>56</b>

# **Codificación de haces complejos de luz mediante hologramas sintéticos de fase**

**Teresa de Jesús Cerdà Astorga**

9 de junio de 2016



# Capítulo 1

## Introducción

El estudio de los fenómenos relacionados con la radiación electromagnética, en este caso de la luz, ha llevado al desarrollo de nuevos conceptos en el área de óptica y fotónica, siendo ramas fundamentales de la física, volviéndose de gran interés por sus aplicaciones a las nuevas tecnologías. Dentro de esto, la investigación de la propagación de la luz en espacio libre, materiales lineales y no lineales se ha destacado por su importancia y riqueza de conceptos. La difracción de la luz constituye un fenómeno universal de la física y es uno de los más estudiados hasta la fecha. Este proceso físico afecta la propagación de la luz a través de cualquier medio produciéndole un ensanchamiento en su perfil transversal y consecuentemente, una disminución de la intensidad de la luz.

La invención del láser implicó el comienzo de una nueva era para el desarrollo de la óptica. Es bien sabido que la luz láser es cuasimonocromática, coherente y puede alcanzar altos niveles de intensidad. Estas características la hacen atractiva para diversas aplicaciones como sensores ópticos, óptica integrada, holografía, etc. En todas estas aplicaciones la difracción juega un papel importante.

En 1948, Dennis Gabor propuso un novedoso procesamiento de dos pasos para imágenes el cual llamó **reconstrucción de frente de onda** y el cual es conocido actualmente como **holografía**. Este consistió de una onda suficientemente coherente la cual utilizó como referencia y otra difractada o dispersada por algún objeto, entonces, tanto la información de la amplitud como la de la fase de la onda difractada o dispersada podían ser grabadas en algún material con respuesta única a la intensidad de la luz. Él demostró que, a partir de un patrón de interferencia grabado, una imagen del objeto original, podía ser obtenida [1].

La técnica de imágenes de Gabor no recibió el interés esperado, sin embargo, en los 60's se observó una dramática mejora tanto en el concepto como en la tecnología, mejoras que extendieron bastante la aplicabilidad y la practicidad. En 1971 Gabor recibió el premio Nobel de física por este invento.

Debido a que la holografía ha evolucionado considerablemente en los últimos años, hoy en día es posible generar hologramas en computadora y emplearlos experimentalmente para la reconstrucción del frente de onda de algún campo codificado. Esta técnica fue discutida hasta 1978 por Lee, y en 1980 por Yaroslavskii y Merlyakov, es decir, aproximadamente 30 años después del surgimiento de los hologramas ópticos.

La generación de un campo óptico arbitrario es una tarea importante en la óptica física. Para lograrlo, se requiere la modulación independiente tanto de la amplitud como de la fase del campo. Un método conveniente para realizar esta tarea es utilizar holografía sintética. Tanto la eficiencia como la exactitud de los hologramas de esta técnica dependen del tipo de holograma que se utilice y el campo que será generado.

Los diferentes tipos de hologramas sintéticos, para la generación de campos complejos arbitrarios, se basan sólo en la modulación de la amplitud y de la fase. En la generación de un campo complejo es posible emplear un holograma sintético de fase (Synthetic Phase Hologram, SPH) [4].

En este trabajo de tesis, para la generación de SPHs, se utiliza un modulador espacial de luz (spatial light modulator, SLM) el cual está basado en tecnología de cristal líquido que provee modulación de fase. Este es un dispositivo electrónicamente direccionable y configurable en tiempo real, lo cual permite realizar de forma sencilla la codificación experimental de los diferentes SPHs.

Se analizan tres tipos de SPHs y se emplean tres tipos de haces complejos, Bessel, Hermite-Gauss y Laguerre-Gauss, los cuales son haces invariantes en propagación, es decir, que su perfil de intensidad no cambia conforme se propagan a través del aire.

La estructura de esta tesis es la siguiente: El presente capítulo es la introducción, la cual proporciona un breve preámbulo sobre este trabajo de tesis. El segundo capítulo incluye el marco teórico respecto a la holografía propia de la óptica moderna y más adelante se discuten los hologramas generados por computadora. En el tercer capítulo se tiene el desarrollo teórico-numérico para los tres tipos de hologramas de fase con los cuales se trabajó. El cuarto

---

capítulo presenta los resultados numéricos y experimentales, así como la explicación del arreglo experimental que se empleó para obtener estos resultados y las especificaciones relevantes acerca del modulador de fase. El quinto capítulo contiene las conclusiones, seguidas por el primer apéndice, análisis de Fourier y el segundo apéndice, funciones especiales. Finalmente se tiene la bibliografía requerida para esta tesis.





# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Holografía

Lo interesante de un holograma es que al ser grabado en una placa delgada, se hablan de dos dimensiones, sin embargo logra reproducir una imagen en tres dimensiones. Además, el hacer un holograma no involucra el sentido usual de grabar imágenes, resulta ser algo un poco más complejo.

En todas las técnicas para la generación de imágenes, un campo tridimensional es grabado en una superficie sensible a la luz, pudiese ser película fotográfica o algún otro material fotosensible. Lo que se graba es sencillamente la distribución de intensidad del campo. Como resultado, toda la información en la fase relativa del frente de onda, se pierde, es decir, la información de la diferencia de camino óptico en diferentes puntos, es nula. Por lo tanto, la imagen no tiene ninguna profundidad, es por eso que resulta ser sólo en dos dimensiones.

Una característica muy relevante en esta área de la óptica es la idea de plasmar el campo completo de la onda, es decir, tanto la amplitud como la fase se conservan. Ya que el medio que se utiliza para grabar responde a variaciones de intensidad, es necesario convertir la información de la fase en variaciones de este tipo. Esto se logra iluminando un objeto con una fuente coherente y teniendo una onda plana (o esférica) de referencia, tanto esta última como la onda dispersada por el objeto llegarán al medio donde se registrará el campo deseado.

En términos generales, el patrón de interferencia producido por las dos ondas queda grabado en algún medio fotosensible y la intensidad en cualquier punto dependerá de igual forma de la fase como de la amplitud de la onda original del objeto.

La placa de material fotosensible, que puede ser una placa fotográfica, ya procesada se conoce como **holograma**. La información de la fase y de la amplitud se encuentran de forma codificada. El holograma por sí solo no tiene semejanza con el objeto. Este puede ser reconstruido al iluminar el holograma con la misma onda de referencia.

Para un observador, la onda reconstruida resulta indistinguible a la onda del objeto, sin embargo podrá apreciar una imagen tridimensional en la cual el efecto de profundidad y perspectiva se puedan notar, si es que el objeto las posee [2].

El principio que gobierna a un holograma es la superposición de dos campos, el del objeto y el de la onda de referencia, por lo que al reconstruir las imágenes, estas están traslapadas, lo cual dificulta la visualización del campo reconstruido. El primer método exitoso para la separación de imágenes gemelas fue desarrollado por Leith y Upatnieks [1962-1964]. Ellos utilizaron un haz de referencia separado del eje del holograma derivado de la misma fuente con la cual se graba el holograma.

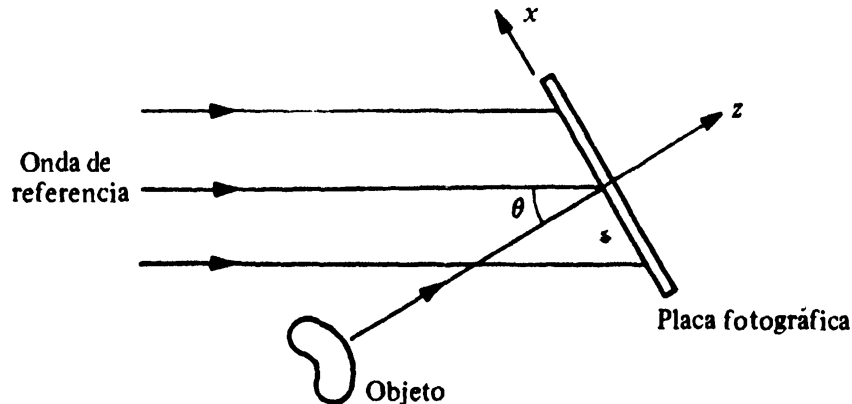


Figura 2.1: Esquema para hologramas fuera de eje

En la Fig.(2.1) se puede ver que la onda de referencia incide a un ángulo  $\theta$  en la placa fotográfica respecto del haz del objeto. Se asume que esta es una onda plana. Además se omitirá el término temporal  $e^{i\omega t}$  debido a que el análisis únicamente se hace espacialmente. La amplitud compleja debida al objeto en cualquier punto  $(x, y)$  en la placa fotográfica puede ser escrita como

$$o(x, y) = |o(x, y)| \exp[-i\phi(x, y)] \exp(ikz), \quad (2.1)$$

## 2.1 Holografía

---

la cual se propaga en dirección  $z$ , mientras que la onda de referencia, con intensidad constante, que se propaga en el plano  $x - z$  formando un ángulo  $\theta$  respecto del eje  $z$  está dada por

$$r(x, y) = r \exp(i2\pi\xi_r x) \exp(ikz), \quad (2.2)$$

siendo  $\xi_r = \frac{\sin\theta}{\lambda}$ .

La amplitud resultante es igual a la suma de la contribución de cada amplitud, tanto la de la onda de referencia como la del objeto, de manera que se puede escribir la intensidad en cualquier punto de la placa como el módulo cuadrado de la suma, es decir

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |o(x, y) + r(x, y)|^2 \\ &= |o(x, y)|^2 + r^2 + o^*(x, y)r + o(x, y)r^*(x, y) \\ &= |o(x, y)|^2 + r^2 \\ &\quad + r|o(x, y)|[\exp(i\phi(x, y)) \exp(i2\pi\xi_r x) \\ &\quad + \exp(-i\phi(x, y)) \exp(-i2\pi\xi_r x)] \\ &= r^2 + |o(x, y)|^2 + 2r|o(x, y)| \cos[2\pi\xi_r x + \phi(x, y)]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

La amplitud y la fase de la onda del objeto por lo tanto se codifican como modulación de amplitud y fase respectivamente, de un conjunto de franjas de interferencia equivalente a una portadora con frecuencia espacial  $\xi_r$ .

Para los hologramas ópticos se puede escribir la función de transmitancia

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + \beta TI, \quad (2.4)$$

en donde  $\mathbf{t}_0$  es la transmitancia de fondo,  $T$  es el tiempo de exposición, y  $\beta$  es un parámetro determinado por el material fotográfico utilizado y las condiciones de procesamiento.

A partir de esta última ecuación, sustituimos el valor encontrado en Ec.(2.3), asumiendo que la transmitancia de la amplitud resultante de la placa fotográfica está relacionada linealmente con la intensidad en el patrón de interferencia, la transmitancia de la amplitud del holograma puede escribirse

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(x, y) &= \mathbf{t}_0 + \beta T \{ |o(x, y)|^2 + r^2 \\ &\quad + r|o(x, y)|[\exp(i\phi(x, y)) \exp(i2\pi\xi_r x) \\ &\quad + \exp(-i\phi(x, y)) \exp(-i2\pi\xi_r x)] \}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

en donde  $\beta$  es la pendiente de la transmitancia de la amplitud versus la característica de la exposición del material fotográfico,  $T$  y  $\mathbf{t}_0$  siguen siendo el

tiempo de exposición y la transmitancia de fondo respectivamente.

Para reconstruir la imagen, es necesario iluminar el holograma nuevamente con una onda de referencia equivalente a la que se utilizó para grabarlo. La amplitud compleja  $u(x, y)$  de la transmitancia de la onda, puede ser escrita como

$$\begin{aligned} u(x, y) &= r(x, y)\mathbf{t}(x, y) \\ &= u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y), \end{aligned} \quad (2.6)$$

en donde

$$u_1(x, y) = r \exp(i2\pi\xi_r)[\mathbf{t}_0 + \beta Tr^2] \quad (2.7)$$

$$u_2(x, y) = \beta Tr |o(x, y)|^2 \exp(i2\pi\xi_r x) \quad (2.8)$$

$$u_3(x, y) = \beta Tr^2 |o(x, y)| \exp(-i\phi(x, y)) \quad (2.9)$$

$$u_4(x, y) = \beta Tr^2 |o(x, y)| \exp(i4\pi\xi_r x) \exp(i\phi(x, y)). \quad (2.10)$$

El término  $u_1(x, y)$  es simplemente el haz de referencia atenuado, el cual es una onda plana transmitida directamente a través del holograma. Este haz transmitido está rodeado por un halo debido al segundo término,  $u_2(x, y)$ , cuya extensión angular se determina en función de la extensión del objeto. El tercer término  $u_3(x, y)$  es casi idéntico a la onda del objeto, excepto por un factor constante, y produce una imagen virtual del objeto en su posición original; esta onda forma un ángulo  $\theta$  con la onda directamente transmitida. Similarmente, el cuarto término  $u_4(x, y)$ , da lugar a la imagen conjugada. Vemos que existe un factor  $\exp(i4\pi\xi_r x)$ , este indica que la onda conjugada se refleja desde el eje  $z$  en un ángulo de aproximadamente el doble que el que tiene con la onda de referencia.

Los hologramas ópticos formaron parte de una nueva generación para el procesamiento de imágenes, sin embargo, en la actualidad se ha buscado mejorar esta técnica utilizando nuevos materiales fotosensibles e incluso hacer los hologramas por computadora, lo cual permitiría tener más control sobre el grabado y mejorar la eficiencia en la reconstrucción de los campos codificados.

## 2.2. Hologramas por computadora

Los hologramas generados por medio de una computadora pueden ser utilizados para producir frentes de onda con una amplitud y distribución de fase ya prescritas, por lo tanto, estos son extremadamente útiles en aplicaciones tales como el escaneo con luz láser (laser-beam scanning) y filtraje óptico espacial al igual que para pruebas ópticas de superficies.

La producción de hologramas utilizando procesos digitales fue discutida por Lee [1978], Yaroslavskii y Merzlyakov [1980], e involucra dos etapas. Primero, es necesario calcular la amplitud compleja de la onda del objeto en el plano del holograma  $o(x, y)$ . Si la onda tiene un muestreo suficientemente grande de número de puntos proporciona una mínima pérdida de información. Si una imagen de  $N \times N$  elementos de resolución se desea reconstruir, la onda del objeto tendrá un muestreo de la misma cantidad de puntos igualmente espaciados, y son evaluados  $N \times N$  coeficientes complejos de su transformada de Fourier discreta. Esto se puede realizar fácilmente con un programa computacional utilizando el algoritmo de la transformada de Fourier rápida [Cochram et al., 1967] para arreglos hasta con  $1024 \times 1024$  puntos. El segundo paso involucra una transparencia (el holograma) generado por los valores calculados de la transformada de Fourier discreta, los cuales reconstruyen la onda del objeto cuando es iluminado adecuadamente.

Se han buscado dos aproximaciones para este propósito. La primera es análoga al holograma óptico fuera de eje (off-axis). Las amplitudes complejas de la onda del plano de referencia  $r(x, y)$  y la onda del objeto se juntan en el plano del holograma, y el cuadrado del módulo de su suma es evaluado. Estos valores son utilizados para producir la transparencia cuya amplitud de transmitancia es real y positiva en cualquier lugar.

Una aproximación alternativa, la cual podría ser posible únicamente utilizando un holograma generado por computadora, es producir una transparencia que graba tanto la amplitud como la fase de la onda del objeto en el plano del holograma. Esto puede pensarse como la superposición de dos transparencias, una con grosor constante la cual posee una transmitancia proporcional a la de la amplitud de la onda del objeto, y otra con grosor variable, correspondiente a la fase de la onda del objeto pero sin tener variaciones de transmitancia. Estos hologramas tienen la ventaja que de pueden estar en uno solo, una imagen en eje (on-axis image).

### 2.2.1. Hologramas de amplitud

De la expresión 2.3 para hologramas ópticos, podemos obtener la siguiente expresión matemática para los hologramas de amplitud generados por computadora

$$\begin{aligned}
 h(x, y) &= |o(x, y) + r(x, y)|^2 \\
 &= |o(x, y)|^2 + r^2 \\
 &\quad + r|o(x, y)|[\exp(-i\phi(x, y)) \exp(i2\pi\xi_r x) \\
 &\quad + \exp(i\phi(x, y)) \exp(-i2\pi\xi_r x)].
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Como se puede ver, en esta ecuación se tienen tres términos, el central, que es la suma de las intensidades, los ordenes 1 y  $-1$  son conjugados entre sí y de los cuales se puede reconstruir el objeto de interés.

De acuerdo a nuestro holograma, se puede observar que los valores se pueden representar en niveles de gris en el rango de 0 a 255, lo cual nos permite de una forma sencilla poder imprimirlos y con ello generar experimentalmente el objeto.

### 2.2.2. Hologramas de fase

Para este tipo de hologramas, se tiene una expresión matemática distinta, la cual los hace un poco más complejos comparados con los hologramas de amplitud. Sin embargo presentan grandes ventajas tales como una mayor eficiencia y mejor calidad.

Su análisis es similar al de los anteriores debido a que la onda del objeto está codificada en uno de los ordenes que conforma este tipo de hologramas. Hasta ahora han sido desarrollados una gran variedad de este tipo de hologramas, aproximadamente diez, cada uno posee diferentes características por lo que su desempeño depende de la onda del objeto a codificar. En el siguiente capítulo, nos enfocamos a tres tipos de dichos hologramas.

# Capítulo 3

## Análisis teórico para hologramas de fase

Debido a que la holografía ha evolucionado considerablemente en los últimos años, es posible crear hologramas en computadora y utilizarlos experimentalmente para la reconstrucción del frente de onda como ya se ha ido hablando. Por lo que la generación de campos ópticos escalares complejos con modulación espacial de amplitud y fase que son específicamente independientes es una labor importante en la óptica contemporánea. Un método práctico y versátil para generar estos campos complejos arbitrarios es utilizando hologramas generados por computadora (computer-generated holograms CGHs). En particular, este trabajo de tesis se enfocará en los SPHs.

### 3.1. Desarrollo teórico-numérico

El propósito de este trabajo es generar un campo óptico complejo arbitrario cuya modulación de amplitud y fase sean independientes. Este campo puede ser expresado de la forma

$$s(x, y) = a(x, y) \exp[i\phi(x, y)], \quad (3.1)$$

en donde la amplitud  $a(x, y)$  y la fase  $\phi(x, y)$  tomen valores en el intervalo  $[0, 1]$  y  $[-\pi, \pi]$ , respectivamente. Los valores complejos de la amplitud de la función  $s(x, y)$  pertenecen a un conjunto de números con módulo igual o menor a uno, denotado como  $\Omega_s$ . El objetivo es codificar el campo complejo  $s(x, y)$  por medio de la transmitancia de un holograma sintético de fase. Este tipo de hologramas, que codifica la modulación compleja arbitraria  $s(x, y)$ , tiene una transmitancia compleja limitada con valores en un subconjunto de  $\Omega_s$ . En el caso de los SPH, este subconjunto está formado por puntos complejos

de modulo uno. La transmitancia de este tipo de hologramas se puede escribir como una función dependiente de la amplitud y de la fase del campo codificado, dada por

$$h(x, y) = \exp[i\Phi(a, \phi)], \quad (3.2)$$

en donde  $\Phi(a, \phi)$  es la fase modulada del SPH.

El propósito que se tiene es establecer funciones de fase de la forma de la ecuación anterior, la cual proporciona la apropiada codificación del campo complejo  $s(x, y)$ . Un método relevante para determinar adecuadamente la forma de la fase modulada del holograma  $\Phi(a, \phi)$  es usando una representación basada en series de Fourier de  $h(x, y)$  en el dominio de  $\phi$ . Haciendo el desarrollo en series de Fourier, la transmitancia del SPH puede ser expresada como

$$h(x, y) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} h_q(x, y), \quad (3.3)$$

en donde

$$h_q(x, y) = c_q^a \exp(iq\phi), \quad (3.4)$$

$$c_q^a = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\Phi(a, \phi)] \exp(-iq\phi) d\phi. \quad (3.5)$$

En la Ec.(3.5) se puede ver que al hacer la integral respecto de  $\phi$ , los coeficientes resultantes  $c_q^a$  permanecen dependientes de  $a$ , lo cual los hace implícitamente dependientes de  $(x, y)$ . De la Ec.(3.4) se puede notar que la fase original del campo  $s(x, y)$  aparece implícitamente con el valor de  $q = 1$ . Por lo que la señal completa  $s(x, y)$  es recuperada del primer término  $h_1(x, y)$  de las series si la identidad [4]

$$c_1^a = Aa \quad (3.6)$$

se cumple para cualquier constante positiva  $A$ . Esta identidad nos define la condición de codificación de la señal.

De la Ec.(3.5) y Ec.(3.6) se puede observar que se cumplen las siguientes expresiones

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin[\Phi(a, \phi) - \phi] d\phi = 0 \quad (3.7)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos[\Phi(a, \phi) - \phi] d\phi = 2\pi Aa \quad (3.8)$$

Estas últimas ecuaciones proporcionan una base determinante apropiada para los SPH. Las funciones de fase que satisfacen estas ecuaciones definen una clase específica de SPHs. Ya que el valor máximo de la integral de la Ec. (3.8) es  $2\pi$ , por lo cual el valor más grande que puede tener  $A$  en la condición



[Ec.(3.6)] es uno. Este resultado proporciona un límite en la eficiencia de los SPHs que pertenecen a esta clase. El trabajo centrará la atención en las funciones  $\Phi(\phi, a)$  con simetría impar en la variable  $\phi$ . La simetría de tales funciones garantiza que se cumpla la Ec.(3.7).

De acuerdo a nuestra condición de codificación [Ec.(3.6)], se puede observar que solo un término de la serie de Fourier,  $h_1(x, y)$ , contiene la señal compleja  $s(x, y)$  por lo que tendremos que centrarnos en un método para separar cada uno de los términos de la serie y así poder recuperar nuestra señal original.

### 3.1.1. Holograma modificado

Se asume que la reconstrucción del campo codificado se realiza por el filtrado espacial en el plano del espectro de Fourier.

Para lograr el aislamiento espacial del campo codificado, a la definición del SPH se le agregará una modulación de fase lineal  $\phi_p = 2\pi(u_0x + v_0y)$ , la cual llamaremos portadora, con frecuencias espaciales  $(u_0, v_0)$ . La transmitancia del SPH modificado resulta ser

$$h_p(x, y) = \exp[i\Phi(a, \phi + \phi_p)], \quad (3.9)$$

que puede ser expresado en series de Fourier como

$$h_p(x, y) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} h_q(x, y) \exp[iq\phi_p]. \quad (3.10)$$

De acuerdo a la ecuación anterior, y considerando el Teorema de Desplazamiento de la transformada de Fourier pueden ser separados los órdenes del holograma, por lo que el espectro de Fourier del SPH modificado está dado por

$$H_p(u, v) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} H_q(u - qu_0, v - qv_0), \quad (3.11)$$

en donde  $H_q(u, v)$  es la transformada de Fourier de  $h_q(x, y)$ , el cual se definió en la Ec.(3.4). La estructura de la transformada de Fourier [Apéndice 1] del SPH, formada por copias desplazadas de los espectros de Fourier  $H_q(u, v)$ , permite el aislamiento espacial del campo codificado, cuyo espectro de Fourier aparece como  $H_1(u - u_0, v - v_0)$ .

La distribución espectral del SPH en términos de  $H_q(u - qu_0, v - qv_0)$  cuando  $u_0 = v_0$  se esquematiza en la Fig.(3.1). El orden cero  $H_0(u, v)$  aparece en el centro de figura.

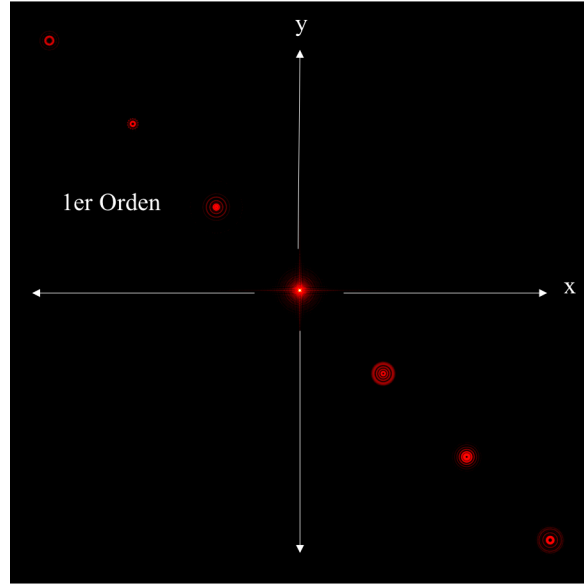


Figura 3.1: Distribución espacial del espectro de un SPH en términos de  $H_q(u - qu_0, v - qv_0)$ , con  $u_0 = v_0$ .

## 3.2. Tipos de SPH

El objetivo de los SPHs es obtener la reconstrucción de los campos codificados con una buena calidad y la mayor eficiencia posible para esto, de forma general, se puede analizar un gran número de fases, en este trabajo se estudiarán casos particulares donde la fase propuesta es una función separable de las variables  $a$  y  $\phi$ .

### 3.2.1. SPH 1

Como primer ejemplo de un SPH se tiene un holograma cuya fase modulada puede ser expresada de la forma [3]:

$$\Phi(a, \phi) = f(a)\phi, \quad (3.12)$$

en donde la función  $f(a)$  es temporalmente desconocida.

Sustituyendo el valor de la fase modulada  $\Phi(a, \phi)$  en la Ec.(3.5), se obtiene el valor de los coeficientes de  $q$ -ésimo orden de la serie de Fourier para este SPH

$$c_q^a = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i(q - f(a))\phi] d\phi, \quad (3.13)$$

realizando la integral anterior se llega a

$$c_q^a = \text{sinc}[q - f(a)], \quad (3.14)$$

con la función  $\text{sinc}(\xi) = (\pi\xi)^{(-1)} \sin(\pi\xi)$ . Si  $f(a)$  se obtiene a partir de la relación

$$\text{sinc}[1 - f(a)] = a, \quad (3.15)$$

entonces la condición de codificación [Ec.3.6] se satisface con  $A = 1$ . Para completar la definición del SPH, se puede obtener la relación que define los valores de  $f(a)$  a partir de Ec.(3.2), que se puede ver de manera más clara en la Fig.(3.2).

### 3.2.2. SPH 2

Otro tipo de fase modulada  $\Phi$  con simetría impar se puede escribir como:

$$\Phi(a, \phi) = \phi + f(a) \sin(\phi). \quad (3.16)$$

Sustituyendo esta fase en la ecuación general del holograma [Ec.(3.2)] tenemos el SPH de la forma

$$h(x, y) = \exp(i\phi) \exp[if(a) \sin(\phi)]. \quad (3.17)$$

La serie de Fourier en el dominio de  $\phi$  para la transmitancia de fase puede ser encontrada directamente utilizando la identidad de Jacobi-Anger [5]. De acuerdo con esto, la segunda exponencial de la ecuación anterior para la transmitancia del SPH está dada como

$$\exp[if(a) \sin(\phi)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m[f(a)] \exp(im\phi), \quad (3.18)$$

en donde  $J_m$  denota una función Bessel de grado  $m$ , con  $m$  entero. Es claro que sustituyendo este último resultado en la Ec.(3.17) se tiene que

$$h(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m[f(a)] \exp[i(m+1)\phi]. \quad (3.19)$$

Debido a que la fase del campo  $s(x, y)$  es  $\phi$ , se puede hacer un cambio de variable  $q = m + 1$ , y así se tiene la serie de Fourier

$$h(x, y) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{q-1}[f(a)] \exp[iq\phi], \quad (3.20)$$

por lo que los coeficientes de la serie están dados por

$$c_q^a = J_{q-1}[f(a)]. \quad (3.21)$$

De acuerdo a la Ec.(3.21), la condición de codificación es valida (con  $A = 1$ ) si  $f(a)$  es obtenida a partir de

$$J_0[f(a)] = a. \quad (3.22)$$

La ecuación anterior puede satisfacerse para cada valor de  $a$  dentro del intervalo  $[0, 1]$  tomando valores apropiados para la función  $f(a)$  dentro del dominio  $[0, x_0]$ , en donde  $x_0 \cong 2.4048$  es la primer raíz de la función Bessel  $J_0(x)$  [Fig(3.2)].

### 3.2.3. SPH 3

El último tipo de SPH que se trabajó está asociado a una fase modulada de la forma:

$$\Phi(a, \phi) = f(a) \sin(\phi). \quad (3.23)$$

Esta fase es similar a la presentada en la Ec.(3.16), sin embargo presenta características especiales que justifican su análisis. Para obtener los coeficientes de la serie de Fourier correspondientes a este SPH es necesario utilizar nuevamente la identidad de Jacobi-Anger [Ec.(3.18)]. Haciendo un desarrollo análogo se obtienen el coeficiente de q-ésimo orden de esta serie de Fourier

$$c_q^a = J_q[f(a)], \quad (3.24)$$

y la condición de codificación se satisface obteniendo la función  $f(a)$  de la siguiente expresión

$$J_1[f(a)] = Aa. \quad (3.25)$$

En este caso, el valor máximo de  $A$  para que se satisfaga la ecuación anterior se consigue cuando  $A \cong 0.5819$ , el cual corresponde al valor máximo de la función Bessel de primer orden  $J_1(x)$ , en  $x = x_1 \cong 1.84$ .

Además, este tipo de SPHs se puede implementar con una modulación de fase menor a  $2\pi$ . La función  $f(a)$  obtenida de hacer una inversión numérica (de la Ec.(3.25) adquiere valores dentro del intervalo  $[0, x_1]$  lo cual se puede ver más claro en la Fig(3.2).

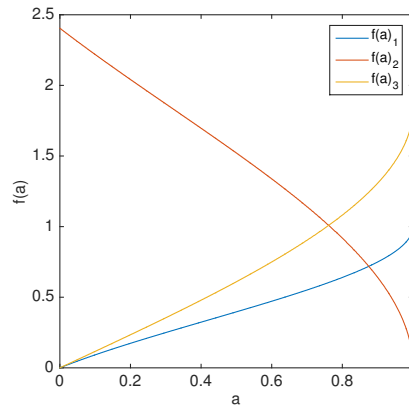


Figura 3.2: Curvas obtenidas correspondientes a la función  $f(a)$ .

En la Fig.(3.2) se presentan las curvas para la función  $f(a)$  de cada uno de los tipos de SPHs que se estudiaron en este capítulo.

A partir de la teoría antes presentada, se desarrolló un arreglo experimental para la generación de campos complejos basado en un sistema óptico  $4f$ . El cual está caracterizado por un par de lentes cuya función es realizar el filtraje espacial en el plano de Fourier de los hologramas.



# Capítulo 4

## Resultados

Un SPH emplea niveles de gris para codificar al conjunto de valores de fase de la función  $h(x, y)$  de la Ec.(2.11), dicha equivalencia entre los niveles de gris y los valores de fase depende de la modulación que provee el sistema de despliegue. Una vez obtenida la codificación de la función de transmitancia del holograma digital, se requiere un dispositivo para el despliegado de hologramas en tiempo real, que permitan la reconstrucción de la información compleja codificada.

Una de las formas más recientes para generar SPH es utilizar un modulador espacial de luz (SLM) debido a que este puede ser controlado dinámicamente en lugar de usar las placas fotográficas u otro material fotosensible donde el holograma grabado será fijo.

### 4.1. Modulador espacial de luz

Se denomina **modulador espacial de luz** a cualquier dispositivo que permita controlar la distribución espacial de la intensidad, la fase o el estado de polarización de algún campo que incida sobre dicho dispositivo. Son muy útiles debido a la versatilidad con la que pueden ser manejados.

La aparición de este tipo de moduladores revolucionó al campo de la holografía, ya que son dispositivos electrónicamente direccionables y reconfigurables en tiempo real. Estos dispositivos están formados de una celda de cristal líquido de manera que la modulación se produce gracias a que la disposición de moléculas en su interior varía en función del voltaje aplicado, este debido a un campo eléctrico externo. Como resultado, la luz incidente cambia su estado de polarización a la salida.

Una celda de cristal líquido nemático torcido es una capa delgada de cristal

líquido en su fase nemática depositada entre dos placas de vidrio pulidas en direcciones perpendiculares. La orientación de las moléculas rota helicoidalmente alrededor de un eje que es perpendicular a las placas, es decir, el eje de torsión. Este tipo de moduladores tiene la capacidad de modular ya sea en amplitud o en fase el campo incidente.

En la actualidad son más utilizados los moduladores con alineación paralela de las moléculas. Estos se iluminan con un campo polarizado linealmente paralelo a la alineación que tienen las moléculas por lo que su estado de polarización no cambia y pueden modular solamente en fase.

En la Fig.(4.1) se presenta ilustrativamente lo que sucede al aplicar un campo externo sobre la capa de cristal líquido del modulador.

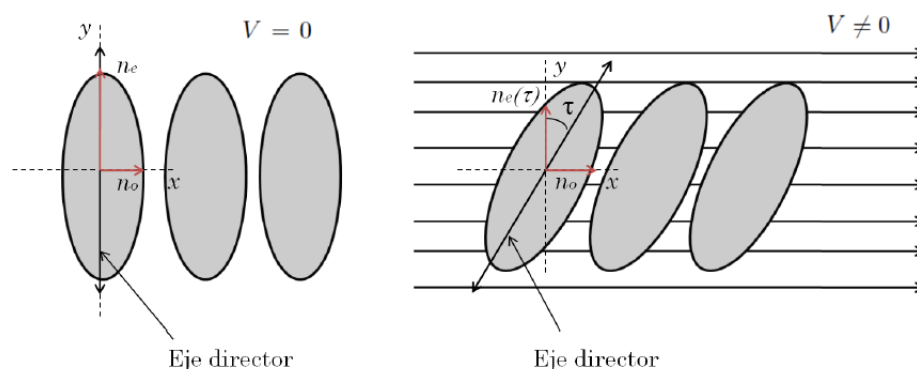


Figura 4.1: Influencia del voltaje sobre una capa de cristal líquido con alineación paralela.

El SLM, de marca Holoeye y modelo *Pluto-VIS-014 phase only*, utilizado para desplegar los campos codificados, está compuesto de una celda de cristal líquido nemático. Este es un dispositivo reflectivo y trabaja en un rango de  $420 - 650nm$ . Posee una interfaz la cual se conecta a una computadora, esta se encarga de convertir la escala de grises del holograma en diferencias de voltaje en el modulador, lo cual permite que su manejo sea más sencillo.

#### 4.1.1. Curva de respuesta del modulador

Para caracterizar la modulación del SLM es suficiente con iluminar con luz linealmente polarizada y monocromática, la cual se puede conseguir colocando un polarizador lineal a la entrada del modulador. Al aplicar un voltaje sobre la celda del SLM, las moléculas del cristal líquido se inclinan lo cual induce a



## 4.1 Modulador espacial de luz

---

un cambio en el índice de refracción efectivo dado por:

$$\frac{1}{n_{ef}(\tau)} = \frac{\sin^2(\tau)}{n_o^2} + \frac{\cos^2(\tau)}{n_e^2}. \quad (4.1)$$

Esto modifica espacialmente la fase del campo que depende del índice de refracción como  $\Psi = kn_{ef}(\tau)d$ . Un método que puede ser utilizado para obtener dicha fase es haciendo uso de rejillas binarias desplegadas en el SLM. La celda básica de la rejilla tiene dos franjas de igual espesor, moduladas con niveles de gris 0 y  $g$ , respectivamente (en donde  $g$  está en el intervalo  $[0, 255]$ ). Las modulaciones complejas en estas franjas, pueden ser expresadas como

$$\begin{aligned} m_0 &= \exp(i\Psi_0) \\ m_g &= \exp(i\Psi_g). \end{aligned} \quad (4.2)$$

La potencia en el orden cero de la rejilla es proporcional al modulo cuadrado de la suma de las modulaciones  $m_0$  y  $m_g$ . Considerando Ec.(4.2) la potencia del orden cero está dada por  $P_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\Psi_g - \Psi_0)$ . Experimentalmente se mide  $P_{00}$  y  $P_{0g}$  en donde la primera tendrá la función de normalizar nuestra potencia  $P_{0g}$  medida, entonces

$$\begin{aligned} \cos(\Psi_g - \Psi_0) &= 2P_{0g} - 1 \\ \Rightarrow \Psi_g &= \cos^{-1}(2P_{0g} - 1) + \Psi_0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Finalmente, se tiene la curva de respuesta para el modulador de fase normalizada, la cual se muestra a continuación [6].

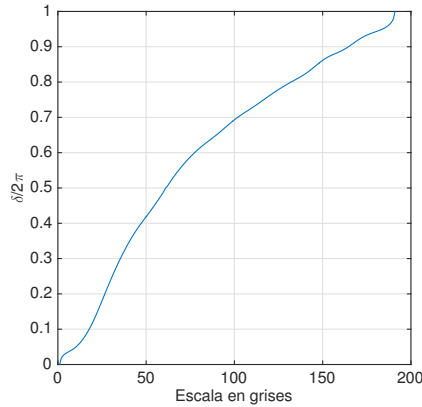


Figura 4.2: Curva de respuesta del modulador de fase.

---

## 4.2. Resultados experimentales

La reconstrucción del campo codificado es realizada por un filtrado espacial del espectro de Fourier del holograma, el arreglo experimental utilizado para este propósito se esquematiza en la Fig.(4.3).

Cuando un modulador espacial de luz (SLM) es empleado para implementar un SPH, la calidad del campo reconstruido puede ser verdaderamente afectado por el ruido generado en las contribuciones de los ordenes mayores del campo difractado.

En este trabajo de tesis se discuten tres tipos de SPHs que codifican campos escalares complejos arbitrarios. Se demuestra que dos de los SPHs, proporcionan la reconstrucción apropiada de los campos codificados, incluso si se aplican con un SLM con baja resolución. El buen desempeño de estos SPHs se debe a la reducción significativa de la intensidad relativa de las contribuciones del campo difractado de orden superior que comparten el dominio de la frecuencia espacial del campo codificado. Uno de los hologramas propuestos puede ser implementado con un SLM de fase que proporciona un rango de fase reducida ( $\approx 1.16\pi$ ).

Lo antes discutido se presenta de manera más clara y con un análisis cuantitativo de los campos reconstruidos respecto al campo codificado, en la sección (4.5.4) del presente capítulo. Teniendo esto como propósito evidenciar de manera numérica, el desempeño de cada tipo de SPH.

### 4.2.1. Arreglo experimental

El arreglo experimental que se implementó para realizar la reconstrucción de distintos frentes de onda codificados en el modulador de fase utilizó un láser HeNe. Se colocó un objetivo de microscopio con un pinhole de  $30\mu m$ , cuyo propósito es limpiar el ruido del haz y expandirlo para cubrir la superficie total activa del SLM. Después, la primer lente positiva ( $f_1$ ) colimará el haz que ilumina un diafragma para poder implementar un sistema óptico  $4f$ , esto con el objetivo de controlar el diámetro del haz de iluminación. Al final de esta parte se tiene el SLM el cual desplegará los hologramas [7].

## 4.2 Resultados experimentales

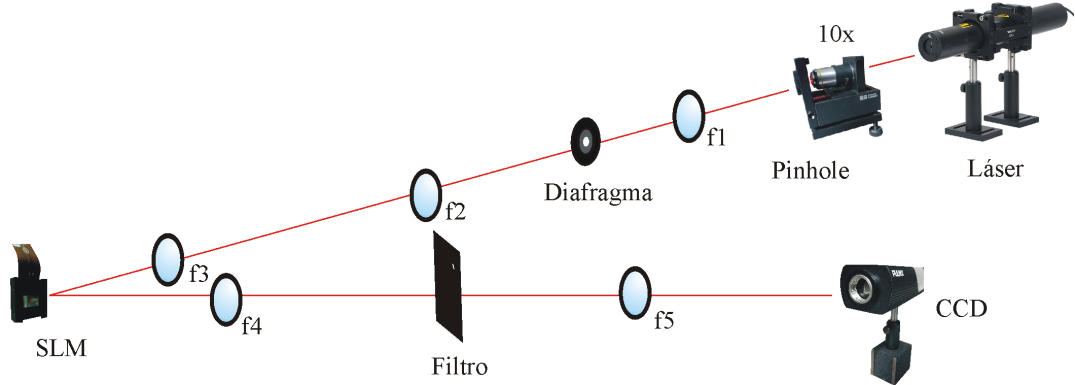


Figura 4.3: Arreglo experimental para generación de los campos complejos el cual está basado en un sistema óptico 4f. Donde  $f_1 = 25cm$ ,  $f_2 = 40cm$ ,  $f_3 = 40cm$ ,  $f_4 = 75cm$ ,  $f_5 = 25cm$  y SLM es el modulador espacial de luz.

Para realizar la reconstrucción del campo codificado se coloca una lente justo después del SLM, la cual aplicaría una transformada de Fourier.

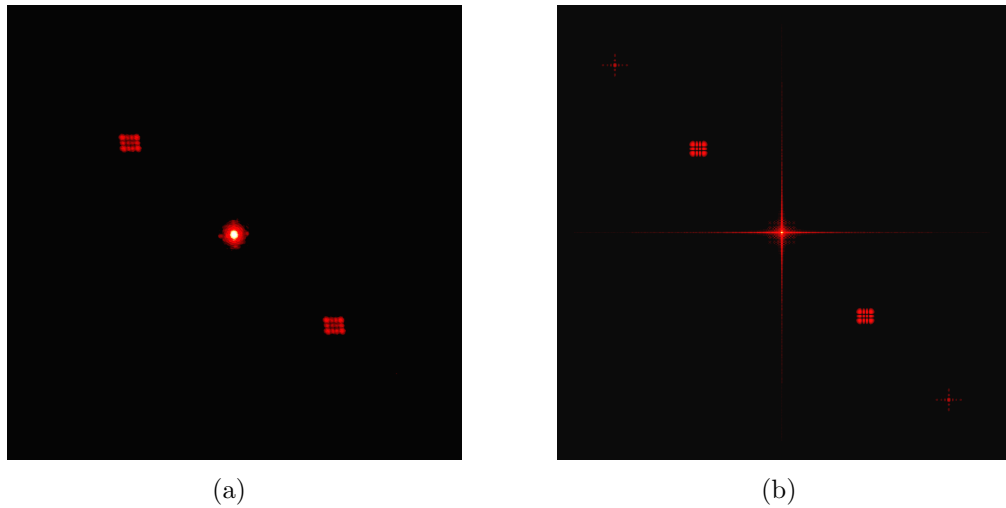


Figura 4.4: Transformada de Fourier del campo codificado utilizando un SPH tipo 3 para haces Hermite-Gauss , a) experimental y b) simulado.

Con este último resultado (Fig.(4.4)) se puede realizar la reconstrucción del campo codificado utilizando el primer orden de la transformada de Fourier como se explicó en la sección 3.1.1. Es necesario realizar el filtraje espacial de este orden para después aplicar la transformada inversa de Fourier, esto se logra colocando una nueva lente a su distancia focal, en este caso  $f = 25cm$ .

El haz a la salida es el campo reconstruido, por lo tanto es ahí donde se coloca la CCD para poder registrar la intensidad del campo complejo codificado.

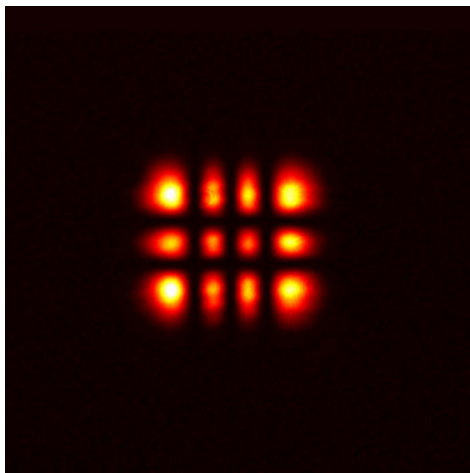


Figura 4.5: Amplitud del campo reconstruido.

La diferencia entre las distancias focales de las lentes colocadas para realizar la reconstrucción del campo codificado pueden aumentar o disminuir las dimensiones del mismo, sin embargo, esto no afecta la calidad del campo recuperado.

Se debe tomar en cuenta que para realizar el filtraje de los órdenes, el diámetro del filtro debe ser proporcional al valor de  $r_0$  para los haces Bessel, y de la cintura del haz  $w$  para los haces Hermite-Gauss y Laguerre-Gauss. Esto se considera tanto para la reconstrucción numérica como experimental.

Para comprobar las cualidades de los hologramas reportados se presenta la codificación de tres diferentes tipos de haces para cada uno de los tipos de SPHs que se presentó en la sección 3.2.

Los haces que se utilizaron para este trabajo de tesis, son solución a la ecuación paraxial de Helmholtz en distintos sistemas coordenados [7]

$$\nabla_T^2 A - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (4.4)$$

en donde  $\nabla_T^2$  es el operador laplaciano transversal.

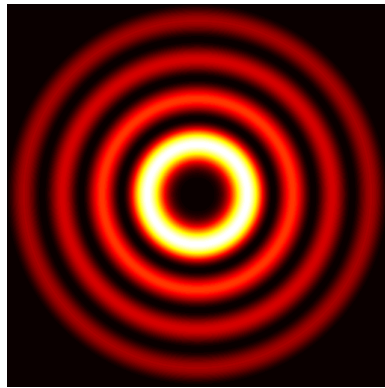
### 4.3. Haces Bessel

Los haces tipo Bessel son solución a la ecuación paraxial de Helmholtz en coordenadas esféricas, y se definen como

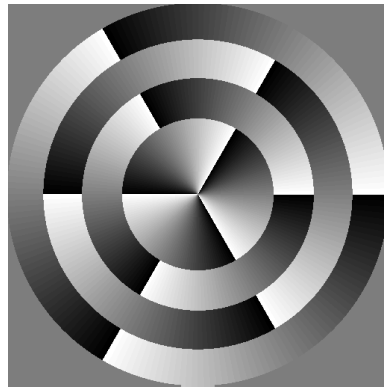
$$s(x, y) = J_n \left( \frac{2\pi r}{r_0} \right) \exp(in\theta), \quad (4.5)$$

en donde  $J_n$ , definen a la función Bessel (Apéndice 2),  $r$  es la coordenada radial,  $r_0$  es el periodo asintótico (a distancias grandes se consideran periódicas,  $w$  es la cintura del haz,  $n$  representa la carga topológica de haz y  $\theta$  es la coordenada polar azimutal.

Utilizando la Ec.(4.5) se codifica un haz Bessel de orden  $n = 3$ .



(a)

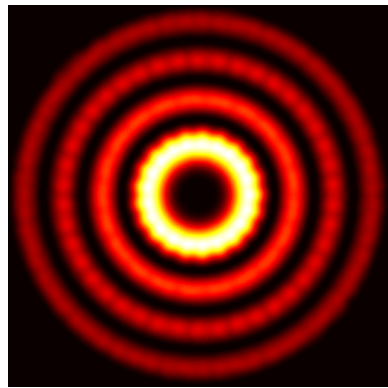


(b)

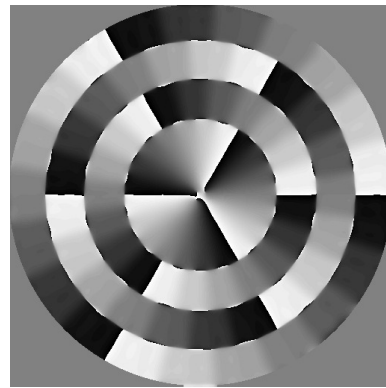
Figura 4.6: Haz Bessel de orden (3,3) , a) intensidad y b) fase.

### 4.3.1. Tipo 1

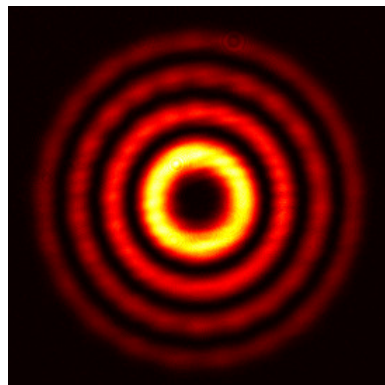
Recordando la definición para los SPH tipo 1, de la Ec.(3.12), se obtiene el holograma de dicho haz [Fig. (4.7 (d))]. En la Fig.(4.7 (a)) se muestra la intensidad reconstruida numéricamente y la fase, también numérica, se presenta en la Fig.(4.7 (b)), mientras que en la Fig.(4.7 (c)) se tiene la intensidad obtenida experimentalmente.



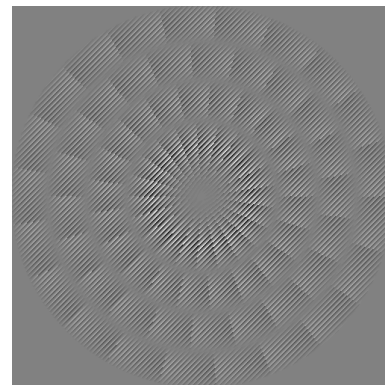
(a)



(b)



(c)

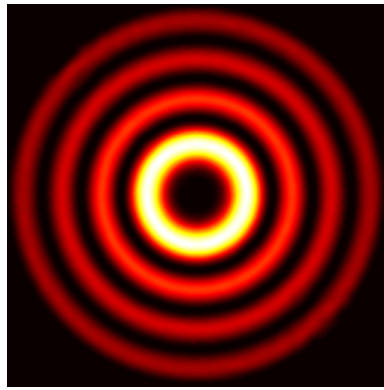


(d)

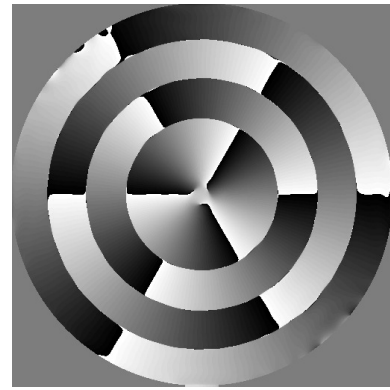
Figura 4.7: Haz Bessel orden (3,3), a) intensidad reconstruida numéricamente, b) fase reconstruida numéricamente, c) intensidad reconstruida experimentalmente y d) holograma de fase.

### 4.3.2. Tipo 2

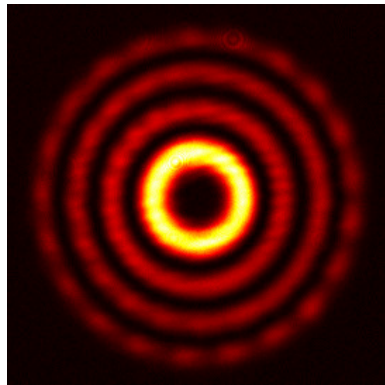
En la Fig.(4.8 (a)) se muestran la intensidad y en la Fig(4.8 (b)) la fase reconstruida numéricamente. La Fig.(4.8 (c)) muestra la intensidad obtenida experimentalmente la cual puede ser comparada con los resultados anteriores. La Ec.(3.16) define a los SPH tipo 2, de la cual se obtiene el holograma de dicho haz [Fig. (4.8 (d))].



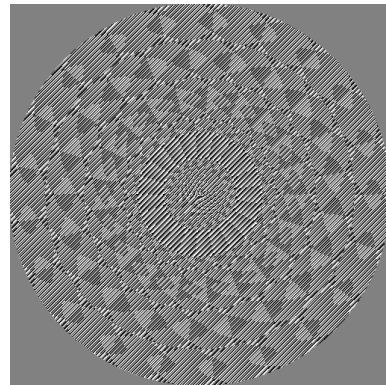
(a)



(b)



(c)

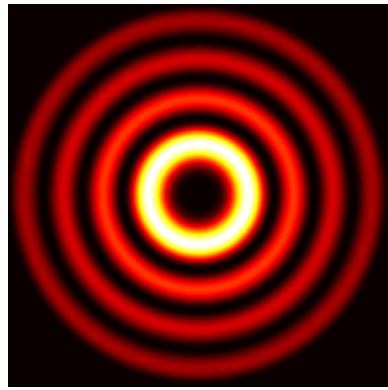


(d)

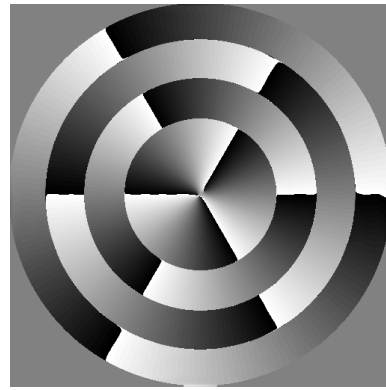
Figura 4.8: Haz Bessel orden (3,3), a) intensidad reconstruida numéricamente, b) fase reconstruida numéricamente, c) intensidad reconstruida experimentalmente y d) holograma de fase.

### 4.3.3. Tipo 3

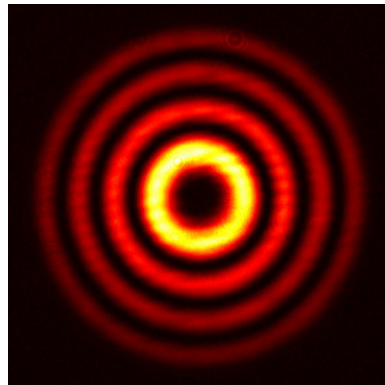
Finalmente, para los SPH tipo 3, los cuales son descritos por la Ec.(3.23) se puede obtener la Fig.(4.9 (a)) que muestra la intensidad y la fase reconstruidas numéricamente (Fig.(4.9 (b))). La Fig.(4.9 (c)) muestra la intensidad obtenida experimentalmente, la cual puede ser comparada con los resultados anteriores. Finalmente se obtiene el holograma de dicho haz [Fig. (4.9 (d))].



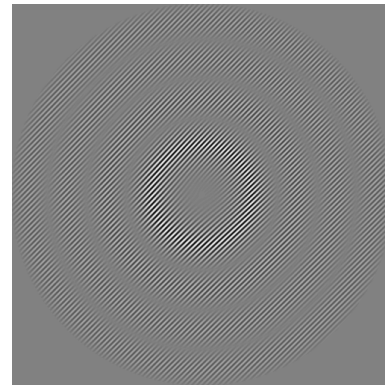
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.9: Haz Bessel orden (3,3), a) intensidad reconstruida numéricamente, b) fase reconstruida numéricamente, c) intensidad reconstruida experimentalmente y d) holograma de fase.



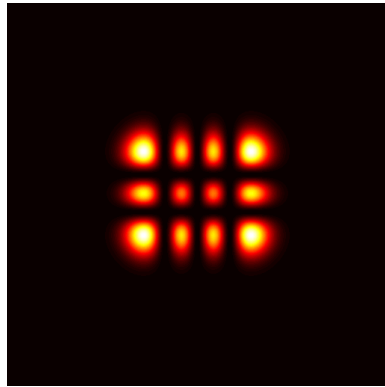
## 4.4. Haces Hermite-Gauss

Los haces Hermite-Gauss son solución a la ecuación paraxial de Helmholtz en coordenadas rectangulares, y se definen como

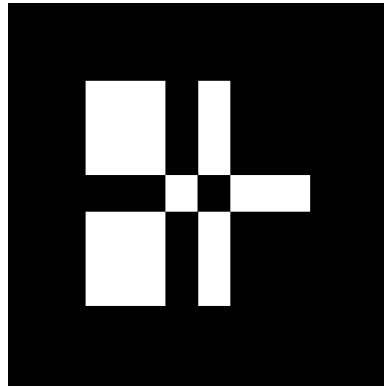
$$s(x, y) = H_p \left( \frac{\sqrt{2}}{w} x \right) H_q \left( \frac{\sqrt{2}}{w} y \right) \exp \left( -\frac{r^2}{w^2} \right) \quad (4.6)$$

en donde  $H_i$  son los polinomios de Hermite (Apéndice 2).

Utilizando la Ec.(4.6) se codifica un haz Hermite-Gauss de orden (3,2).



(a)

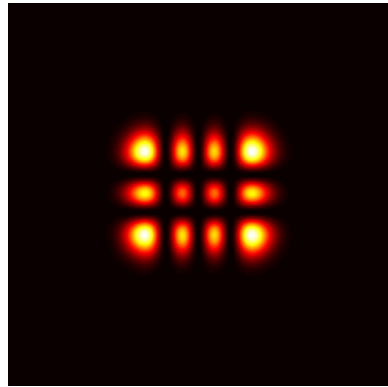


(b)

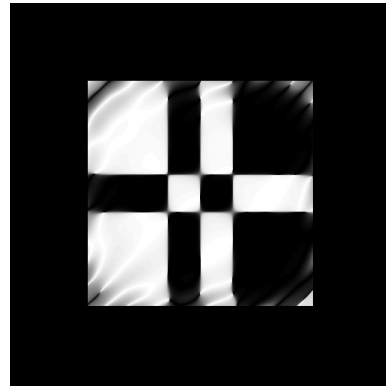
Figura 4.10: Haz Hermite-Gauss de orden (3,2), a) intensidad y b) fase.

#### 4.4.1. Tipo 1

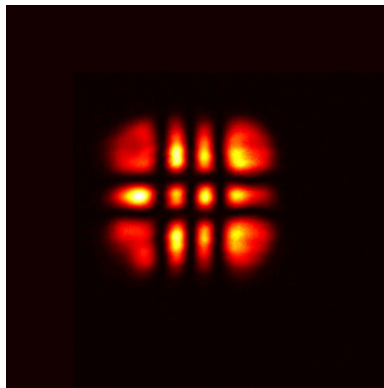
Recordando la definición para los SPH tipo 1, de la Ec.(3.12), se obtiene el holograma de dicho haz [Fig. (4.11 (d))]. En la Fig.(4.11 (a)) se muestran la intensidad y fase reconstruidas numéricamente, mientras que en la Fig.(4.11 (c)) se muestra la intensidad obtenida experimentalmente.



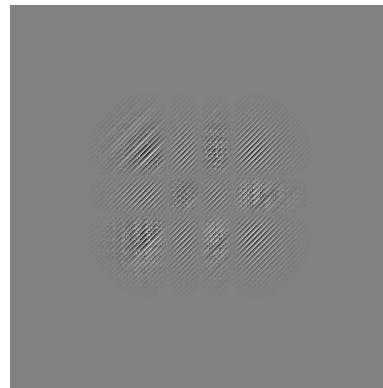
(a)



(b)



(c)

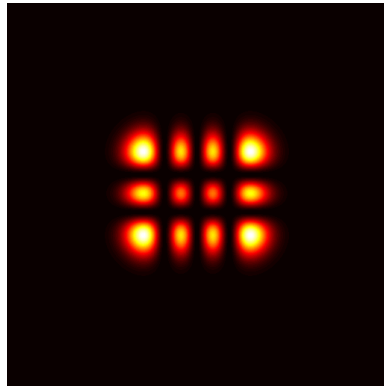


(d)

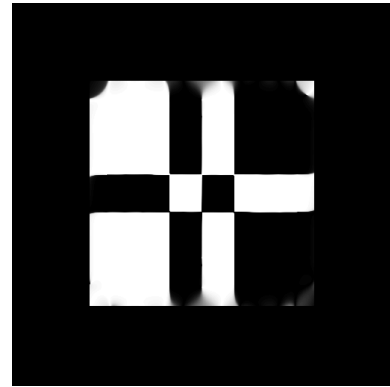
Figura 4.11: Haz Hermite-Gauss de orden (3,2), a) intensidad reconstruida numéricamente, b) fase reconstruida numéricamente, c) intensidad reconstruida experimentalmente y d) holograma de fase.

### 4.4.2. Tipo 2

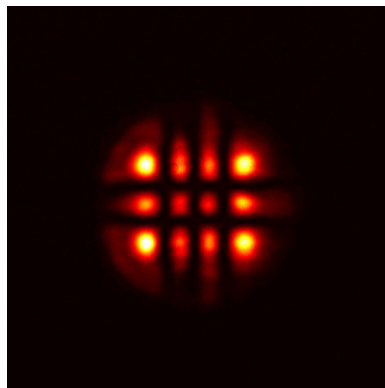
La Ec.(3.16) define a los SPH tipo 2, de la cual se obtiene el holograma de dicho haz [Fig. (4.12 (d))]. En la Fig.(4.12 (a)) se muestran la intensidad y fase reconstruidas numéricamente. La Fig.(4.12 (c)) muestra la intensidad obtenida experimentalmente la cual puede ser comparada con los resultados anteriores.



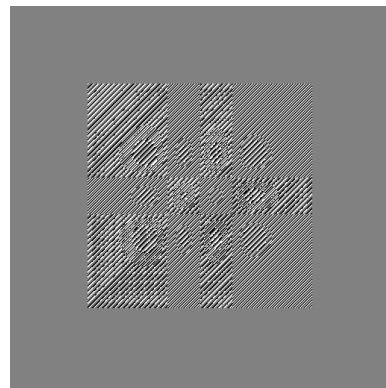
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.12: Haz Hermite-Gauss de orden (3,2), a) intensidad reconstruida numéricamente, b) fase reconstruida numéricamente, c) intensidad reconstruida experimentalmente y d) holograma de fase.

### 4.4.3. Tipo 3

Finalmente, para los SPH tipo 3, los cuales son descritos por la Ec.(3.23), se obtiene el holograma de dicho haz [Fig. (4.13 (d))]. Después, en la Fig.(4.13 (a)) se muestran la intensidad y fase reconstruidas numéricamente. La Fig.(4.13 (c)) muestra la intensidad obtenida experimentalmente la cual puede ser comparada con los resultados anteriores.

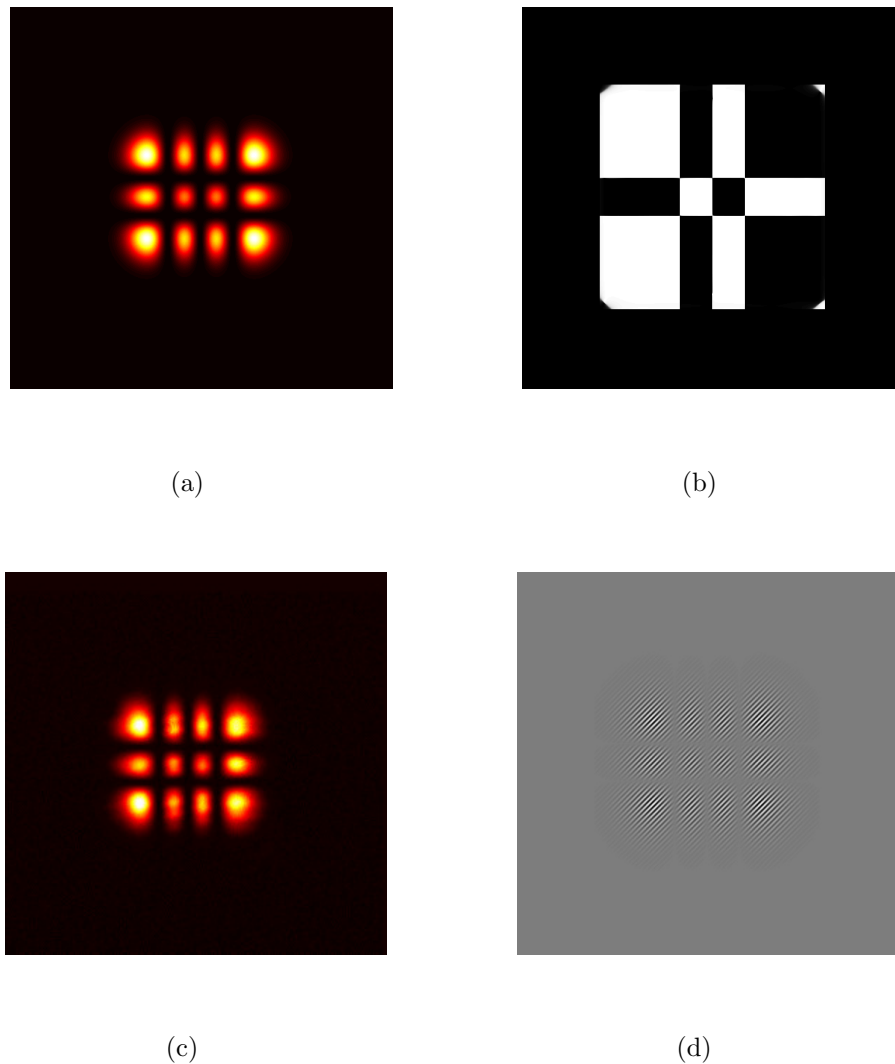


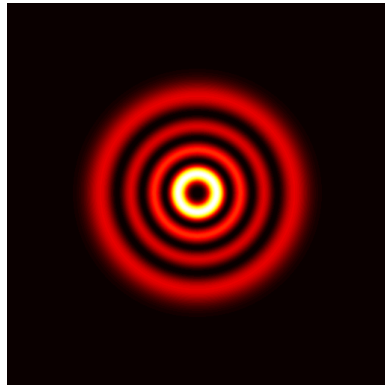
Figura 4.13: Haz Hermite-Gauss de orden  $(3,2)$ , a) intensidad reconstruida numéricamente, b) fase reconstruida numéricamente, c) intensidad reconstruida experimentalmente y d) holograma de fase.

## 4.5. Haces Laguerre-Gauss

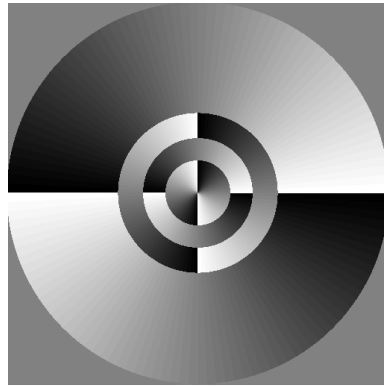
Los haces Laguerre-Gauss son solución a la ecuación paraxial de Helmholtz en coordenadas polares, y se definen, para el plano  $z=0$ , como

$$s(x, y) = \left( \frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^n L_m^n \left( \frac{2r^2}{w^2} \right) \exp \left( -\frac{r^2}{w^2} \right) \exp(in\theta), \quad (4.7)$$

con  $L_m^n$  los polinomios de Laguerre (Apéndice 2).



(a)

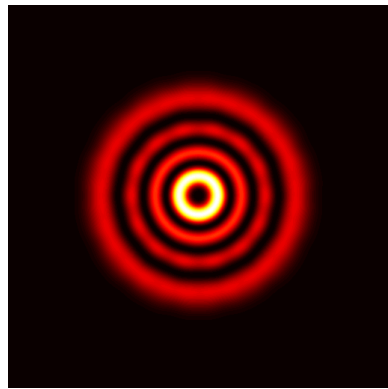


(b)

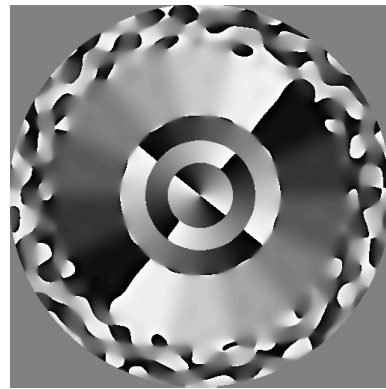
Figura 4.14: Haz Laguerre-Gauss de orden (3,2), a) intensidad y b) fase.

### 4.5.1. Tipo 1

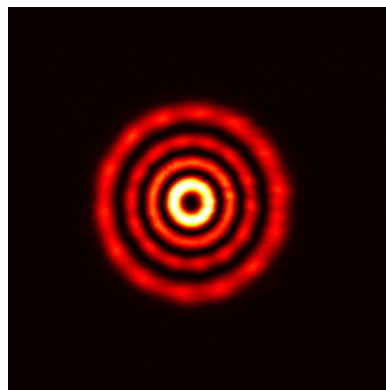
Recordando la definición para los SPH tipo 1, de la Ec.(3.12), se obtiene el holograma de dicho haz [Fig. (4.15 (d))]. En la Fig.(4.15 (a)) se muestran la intensidad y fase reconstruidas numéricamente, mientras que en la Fig.(4.15 (c)) se muestra la intensidad obtenida experimentalmente.



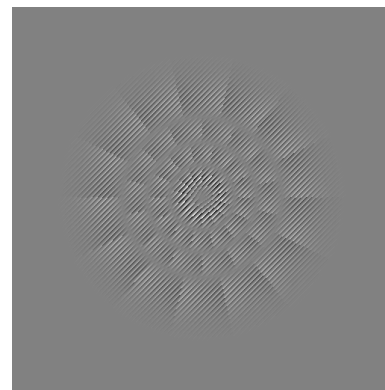
(a)



(b)



(c)

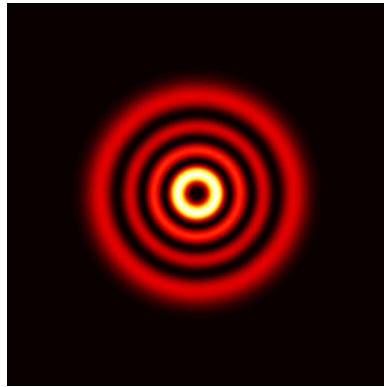


(d)

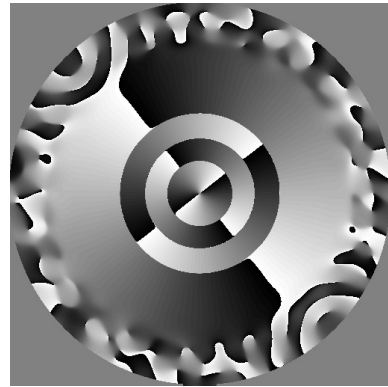
Figura 4.15: Haz Laguerre-Gauss de orden (3,2), a) intensidad reconstruida numéricamente, b) fase reconstruida numéricamente, c) intensidad reconstruida experimentalmente y d) holograma de fase.

### 4.5.2. Tipo 2

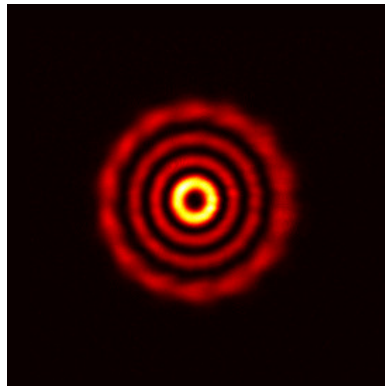
En la Fig.(4.16 (a)) se muestran la intensidad y fase reconstruidas numéricamente. La Ec.(3.16) define a los SPH tipo 2, de la cual se obtiene el holograma de dicho haz [Fig. (4.16 (d))]. La Fig.(4.16 (c)) muestra la intensidad obtenida experimentalmente la cual puede ser comparada con los resultados anteriores.



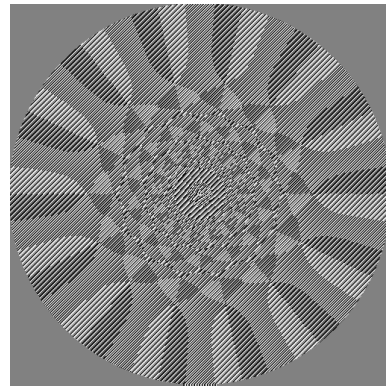
(a)



(b)



(c)

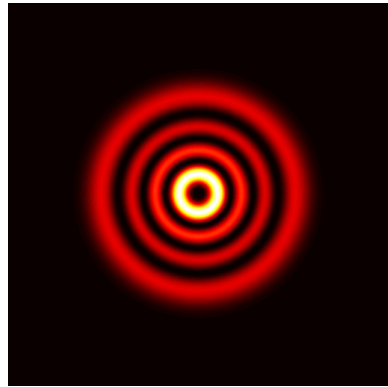


(d)

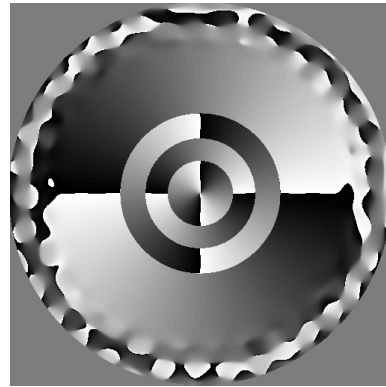
Figura 4.16: Haz Laguerre-Gauss de orden (3,2), a) intensidad reconstruida numéricamente, b) fase reconstruida numéricamente, c) intensidad reconstruida experimentalmente y d) holograma de fase.

### 4.5.3. Tipo 3

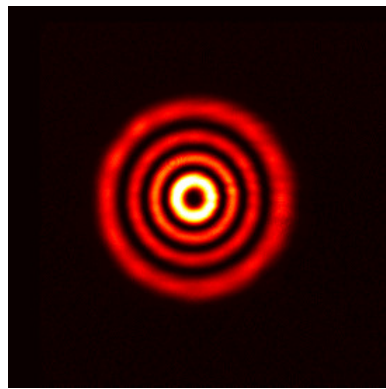
Finalmente, para los SPH tipo 3, los cuales son descritos por la Ec.(3.23), con un haz Laguerre-Gauss se obtiene el holograma de dicho haz [Fig. (4.17 (d))]. Después, en la Fig.(4.17 (a)) se muestran la intensidad y fase reconstruidas numéricamente. La Fig.(4.17 (c)) muestra la intensidad obtenida experimentalmente la cual puede ser comparada con los resultados anteriores.



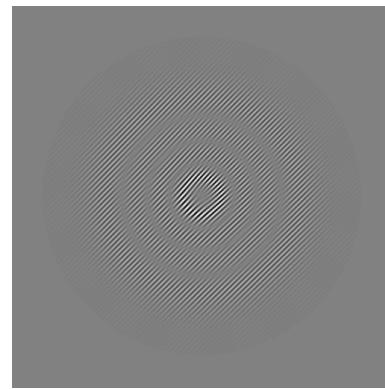
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.17: Haz Laguerre-Gauss de orden (3,2), a) intensidad reconstruida numéricamente, b) fase reconstruida numéricamente, c) intensidad reconstruida experimentalmente y d) holograma de fase.



#### 4.5.4. Discusión de resultados

A partir de los resultados para los tres diferentes tipos de SPH, se puede ver que la intensidad del tipo 3 disminuye considerablemente respecto a los demás, sin embargo, resulta tener una reconstrucción de mayor calidad. Además, este tipo de hologramas presenta la ventaja de que con una modulación de fase aproximada a  $1.16\pi$  pueden ser realizados. Esto quiere decir que puede emplearse un modulador con fase reducida o usando una longitud de onda mayor respecto a los otros dos tipos.

Para hacer una evaluación cuantitativa de los resultados obtenidos, es posible calcular la razón señal a ruido. La cual nos dice en que proporción los ordenes subsecuentes del holograma afectan nuestro campo reconstruido y se puede evaluar a través de la siguiente ecuación

$$SNR = \frac{\int \int |S|^2 dx dy}{\int \int |S - \beta S_r|^2 dx dy}, \quad (4.8)$$

en donde

$$\beta = \frac{I_r}{I_s} = \frac{\int \int |S_r|^2 dx dy}{\int \int |S|^2 dx dy}, \quad (4.9)$$

siendo  $S$  la señal inicial mientras que  $S_r$  es la señal reconstruida.

Haciendo esta evaluación a los resultados presentados en la sección anterior se obtienen los siguientes valores para cada tipo de campo con los diferentes SPHs usados.

Cuadro 4.1: Relación señal a ruido para los SPHs.

Tipo de Haz	SPH 1	SPH 2	SPH 3
Bessel	81.4488	$1.6252 \times 10^3$	$8.0661 \times 10^3$
Hermite-Gauss	251.4468	$3.8382 \times 10^4$	$4.7137 \times 10^4$
Laguerre-Gauss	103.4112	$2.7686 \times 10^3$	$4.1303 \times 10^4$

De acuerdo a la Ec.(4.8) se puede ver que el término del denominador es una comparación directa entre la señal original y la señal reconstruida, por lo que se puede deducir que entre mejor sea el campo reconstruido esta cantidad será menor, por ende la SNR aumentará.

De la tabla(4.1), es evidente que los SPHs tipo 3 tienen el mayor valor para la razón señal a ruido, esto quiere decir que el campo reconstruido tiene mejor calidad respecto a los otros dos tipos reportados.

Los resultados anteriores fueron estrictamente para evaluar la calidad de cada unos de los SPHs mediante los resultados numéricos obtenidos a partir del programa presentado en el Apéndice 3, sin embargo es necesario analizar la calidad para los resultados experimentales obtenidos.

Para evaluar la calidad de los hologramas generados experimentalmente se obtuvo un porcentaje de error entre la intensidad del campo codificado y la intensidad del campo reconstruido. Para esto, se tomó un corte transversal justo a la mitad de las intensidades de los respectivos campos, como se muestra en la Fig.(4.18). Se obtuvo el error de reconstrucción mediante la siguiente expresión

$$Error = \int \int \frac{|I - I_r|}{N} dx dy \times 100, \quad (4.10)$$

en donde  $N$  es el número de puntos del muestreo.

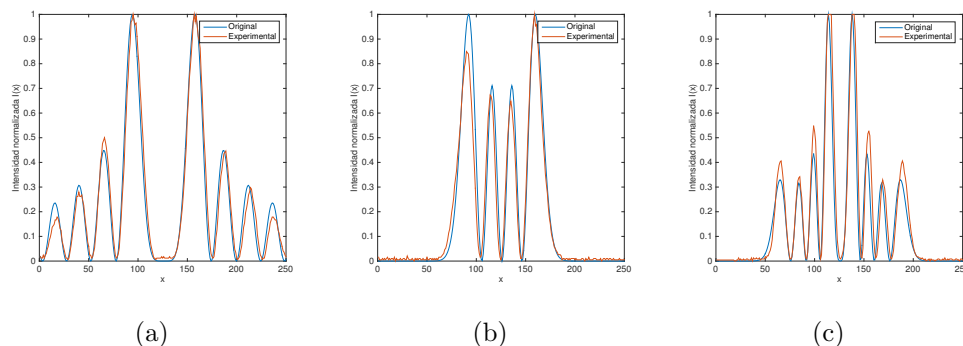


Figura 4.18: Intensidad de señal original y señal reconstruida para un SPH tipo 3 a) Haz Bessel, Haz Hermite-Gauss y c) Haz Laguerre-Gauss.

Utilizando la Ec.(4.10) se encontró el error entre los diferentes tipos de SPHs para los haces Bessel, Hermite-Gauss y Laguerre-Gauss.

Este procedimiento se extendió a toda la imagen de cada haz experimental, dando como resultado un valor porcentual promedio, el cual se mostró en la Tabla(4.2). A partir de esta se puede apreciar que el mayor error para la reconstrucción de los campos presentados se obtiene con el SPH tipo 1,

Cuadro 4.2: Error porcentual para la reconstrucción de los SPHs.

Tipo de Haz	SPH 1	SPH 2	SPH 3
Bessel	4.7540 %	5.0462 %	4.5804 %
Hermite-Gauss	3.2206 %	2.7422 %	2.6952 %
Laguerre-Gauss	4.5901 %	3.7407 %	3.1268 %

mientras que la mejor reconstrucción experimental se logra utilizando un SPH tipo 3.



# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo de tesis se pudo demostrar que los hologramas sintéticos de fase representan una gran herramienta para la generación de haces luminosos con amplitud compleja, ya que permiten controlar de forma independiente la fase a codificar utilizando un modulador de fase.

Al hacer la evaluación cuantitativa de los campos reconstruidos, ya sea numéricamente o experimentalmente, se puede observar que los SPHs tipo 3 son los que tienen mayor calidad respecto de los otros dos tipos. Esto es debido a que el ancho de banda de los ordenes subsecuentes del holograma afectan en mayor proporción al campo reconstruido en los SPHs tipo 1 y tipo 2.

Un punto muy destacable de los hologramas de tipo 3 es que presentan la ventaja de que con una modulación de fase aproximada a  $1.16\pi$  pueden ser realizados. Esto quiere decir que puede emplearse un modulador con fase reducida o usando una longitud de onda mayor respecto a los otros dos tipos. Como ejemplo, se podrían emplear moduladores espaciales de luz con configuración de torsión en la alineación de las moléculas de cristal líquido (*twisted nematic LCD*), los cuales pueden ser utilizados en configuración de amplitud o de fase, sin embargo estos comúnmente alcanzan una modulación aproximada de  $1.5\pi$  en el rango del visible.

Debido a que los moduladores espaciales de luz son reconfigurables dinámicamente, los hologramas sintéticos de fase pueden ser evaluados y aplicados sin la necesidad de desperdiciar algún material de grabado. Además, esto permite que el tiempo de generación de los hologramas se reduzca considerablemente en comparación del de la fabricación de un holograma óptico.



# Apendice 1

## Análisis de Fourier

### Series de Fourier

Las series de Fourier pueden definirse como la expansión de una función, es decir, representar la función en series de senos y cosenos tales como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx). \quad (1)$$

Los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  están relacionados a la función dada  $f(x)$  mediante las siguientes integrales, considerando  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt) dt. \quad (3)$$

Se puede notar que  $a_0$  tiene un trato especial al tener un factor  $\frac{1}{2}$ . Considerando esto, la Ec.(2) puede ser aplicada para todo  $a_n$ ,  $n = 0$  al igual que para  $n > 0$ .

Las condiciones impuestas sobre  $f(x)$  para hacer Ec.(1) válida es que esta función tenga un número finito de discontinuidades y un número finito de valores extremos, es decir, máximos y mínimos, en un intervalo  $[0, 2\pi]$ .

Expresando  $\cos(nx)$  y  $\sin(nx)$  de forma exponencial, podemos reescribir la Ec.(1) como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (4)$$

en donde, para  $n > 0$ ,

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad (5)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad (6)$$

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0. \quad (7)$$

## Transformada de Fourier

El análisis de Fourier proporciona una forma excelente de tratar los procesos ópticos en términos de frecuencias espaciales. Consideremos una función  $f$ , dependiente del tiempo que satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Físicamente esta condición establece que la energía de la señal  $f(t)$  es finita. Para dicha función existe la Transformada de Fourier definida como

$$F(\nu) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp\{-i2\pi\nu t\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt. \quad (8)$$

Esta transformada básicamente nos pasa de un dominio temporal (ya que  $f$  depende de  $t$ ), hacia un dominio frecuencial en donde  $f$  ahora depende de  $\nu$  la cual tiene unidades  $s^{-1}$ .

Por otro lado, se define la Transformada de Fourier inversa como

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\{f(t)\}] = \mathcal{F}^{-1}\{F(\nu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu. \quad (9)$$

Sin embargo, en la óptica, las señales que se utilizan suelen ser bidimensional así que es importante plantear una generalización de la Transformada de Fourier para una función que depende de dos variables.

Sea  $g$  una función dependiente de  $x$  e  $y$  tal que  $\mathcal{F}\{g(x, y)\}$  se define como

$$G(\xi_x, \xi_y) = \mathcal{F}\{g(x, y)\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i2\pi(\xi_x x + \xi_y y)} dx dy, \quad (10)$$

en donde  $\xi_x$  y  $\xi_y$  son variables independientes, que generalmente se refieren a las frecuencias. Similarmente al caso unidimensional, se define para este caso la Transformada de Fourier inversa de  $G(\xi_x, \xi_y)$  como

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(\xi_x, \xi_y)\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi_x, \xi_y) e^{i2\pi(\xi_x x + \xi_y y)} d\xi_x d\xi_y. \quad (11)$$



Note que las operaciones matemáticas de la transformada y de la transformada inversa son muy similares, sólo difiere el signo del exponente que aparece en el integrando. La transformada inversa en algunos casos se refiere como la representación integral de Fourier de la función  $g(x, y)$ . Para que a la función  $g$  se le puedan aplicar la transformada o la transformada inversa se debe cumplir que:

1.  $g$  debe ser absolutamente integrable sobre un plano infinito  $(x, y)$ .
2. Debe tener un número finito de discontinuidades y un número finito de máximos y mínimos en cualquier rectángulo finito.



# Apéndice 2

## Funciones especiales

Las funciones matemáticas con ciertas características particulares pueden ser clasificadas en el grupo de las funciones especiales. Poseen una gran importancia en el campo del análisis matemático, análisis funcional así como en el área de la física. A continuación se presentan algunas funciones especiales las cuales son necesarias para el desarrollo de este trabajo de tesis.

### Función Bessel

Las funciones Bessel de primer tipo, normalmente nombradas como  $J_\nu$ , son obtenidas a partir del método de Frobenius para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) Bessel,

$$x^2 J_\nu'' + x J_\nu' + (x^2 - \nu^2) J_\nu = 0. \quad (12)$$

El término “primer tipo” refleja el hecho de que  $J_\nu(x)$  incluye las funciones que, para enteros positivos  $\nu$ , son regulares en  $x = 0$ . Todas las soluciones a la EDO Bessel que son linealmente independientes de  $J_\nu$  son irregulares en  $x = 0$ , para toda  $\nu$ ; una elección específica para una segunda solución es denotada por  $Y_\nu$  y es llamada función Bessel de segundo tipo.

Se define la función Bessel de primer tipo como [8]

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(\nu + s + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}, \quad (13)$$

en donde  $\Gamma$  representa la función Gamma la cual está definida como

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (14)$$

A continuación se muestra la gráfica para la función Bessel de primer tipo para algunos ordenes.

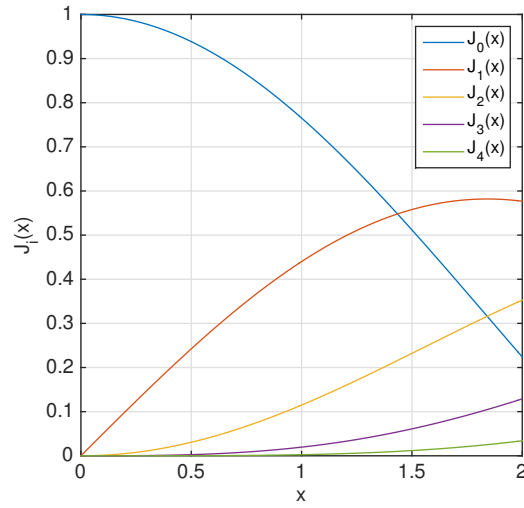


Figura 1: Funciones Bessel.

Para algunos ordenes de las funciones Bessel se pueden tener los siguientes valore relevantes, es decir, cuando la función se hace cero.

Cuadro 1: Ceros de la función Bessel.

Número de ceros	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2.4048	3.817	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178

## Polinomios de Hermite

La ecuación diferencial ordinaria de Hermite se escribe como [8]

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0. \quad (15)$$

Aquí  $n$  es un parámetro. Cuando  $n \geq 0$  es entero, la EDO tendrá como solución a  $H_n(x)$ , el cual es un polinomio de grado  $n$ ; esta solución se conoce como **polinomios de Hermite**, los cuales están definidos como

$$H_n(x) = \sum_{s=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^s n!}{(n-2s)! s!} (2x)^{n-2s}. \quad (16)$$

Desarrollando la ecuación anterior para distintos valores de  $n$  tenemos

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x. \end{aligned}$$

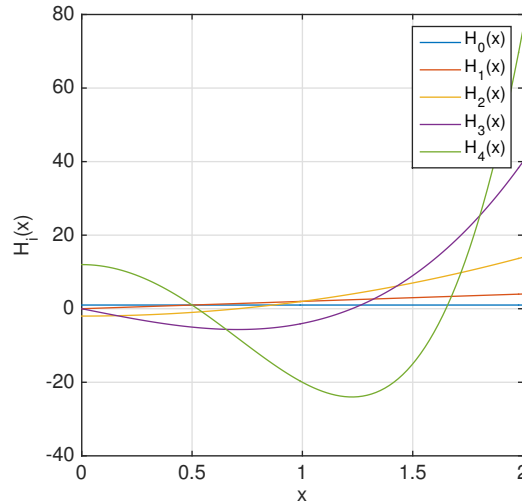


Figura 2: Polinomios de Hermite.

Si se toman distintos valores de  $n$  se puede tener la gráfica para los polinomios de Hermite presentada en figura anterior.

## Polinomios asociados de Laguerre

La ecuación diferencial ordinaria de Laguerre está definida como

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0. \quad (17)$$

Es posible obtener una función generadora para los polinomios de Laguerre. Sea  $L_n(x)$  el  $n$ -ésimo polinomio de Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^n e^{-x}), \quad (18)$$

y haciendo un desarrollo en serie de potencias se tiene

$$L_n(x) = \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^{n-s} n! x^{n-s}}{(n-s)!(n-s)!s!}. \quad (19)$$

En muchas aplicaciones en la física, es necesario definir los polinomios asociados de Laguerre [8]

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x). \quad (20)$$

Derivando la expresión general para los polinomios de Laguerre Ec.(19) se llega a que

$$L_n^k(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!m!} x^m, \quad k \geq 0. \quad (21)$$

Desarrollando los polinomios de Laguerre para algunos valores de  $n$  se tiene

$$\begin{aligned} L_0^k &= 1 \\ 1!L_1^k &= -x + (k+1) \\ 2!L_2^k &= x^2 - 2(k+2)x + (k+1)_2 \\ 3!L_3^k &= -x^3 + 3(k+3)x^2 - 3(k+2)_2x + (k+1)_3 \\ 4!L_4^k &= x^4 - 4(k+4)x^3 + 6(k+3)_2 - 4(k+2)_3 + (k+1)_4 \\ 5!L_5^k &= -x^5 - 5(k+5)x^4 - 10(k+4)_2x^3 + 10(k+3)x^3 - 5(k+2)_4x + (k+1)_5. \end{aligned}$$

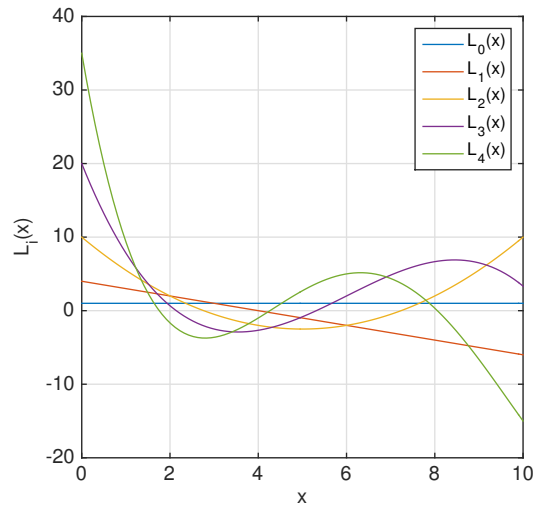


Figura 3: Polinomios de Laguerre para  $k = 3$ .

La notación  $(k+n)_m$  es el símbolo de Pochhammer, el cual está definido en general para  $a$  y números enteros positivos  $n$ , entonces, dada la notación  $(a)_n$  se puede escribir

$$(a)_0 = 1, (a)_1 = a, (a)_{n+1} = a(a+1) \dots (a+n), n \geq 1. \quad (22)$$





# Apéndice 3

## Programa en Matlab para un SPH 1 con un haz Laguerre-Gauss

```
%Se define la resolución
dx=1e-3;
N=512;
q=[-N/2:(N-1)/2];

x=q.*dx; %vector
y=x'; %vector transpuesto
[X,Y]=meshgrid(x,y); %matriz del espacio

%Tenemos que definir la función del objeto
%Para un haz gaussiano tenemos:
%(parámetro en metros)
w0=0.05; %cintura
lam=633e-9; %longitud de onda
%%%Para introducir simetría circular

radio=sqrt(X.^2+Y.^2);
%mesh(radio)
RAD=N*dx/2;
%Definición para el haz
z=0;
z0=(w0^2)*pi*lam; %distancia de rayleigh
wz=w0*sqrt(1+(z/z0).^2); %cintura
W=(w0./wz).^2;

%Función del haz
%Parametros del polinomio de laguerre
m=3;
n=2;
```

---

```
eq=2*(radio.^2)/(w0^2);
theta=angle(X+1i*Y);

%Usando la definición de la función Laguerre:
cte=(sqrt(2).*(radio/w0)).^1; %Amplitud
la=cte.*Laguerre(m,n,eq).*exp(-(radio.^2)./(w0.^2)).*exp(1i*l*theta);
la=la/max(max(abs(la))); %Normaliza

%ancho de banda
du=1/dx;
u0=du/7;
v0=du/7;
r2=exp(i*2*pi*(X*u0+Y*v0));

lacirc=radio<=RAD;

%Función del haz (multiplicado por el circ)
%Señal original por la portadora y por el filtro
lac=la.*lacirc.*r2;

aalac=abs(lac);

%Imagen para la intensidad del campo a codificar
figure
imagesc(aalac.*conj(aalac))
axis off
colormap hot
axis square

phalac=(angle(lac)).*lacirc;

%Imagen de la fase
figure
imagesc(angle(la).*lacirc)
axis off
axis square
colormap gray

%Definir vector de 0 a 1
maxvec=1000;
```

---

```
vect=linspace(0,1,maxvec);
fvect=sinc(1-vect);
%definimos nueva amplitud con mismo número de puntos
avect=vect;

%find encuentra los valores más aproximados

for z=1:maxvec
    p=find(abs(avect(z)-fvect)==min(abs(avect(z)-fvect)));
    aux(z)=vect(p);
end

%así obtenemos f(a)

fa=aux(1+floor(999*aalac));

%Definimos holograma

hf=exp(i*fa.*phalac);

%Imagen para el holograma
figure
imagesc(angle(hf))
axis off
axis square
colormap gray

wOf=2/w0;

%Aplicar transformada
NN=512; %nueva resolución
Traf2=fftshift(fft2(hf,NN,NN));
ampTraf2=abs(Traf2);

%%Definir nuevas coordenadas para plano de Fourier
du=1/dx;
deltau=du/NN;
dNN=[-NN/2:(NN-1)/2];
u=deltau.*dNN;
v=u';
[U,V]=meshgrid(u,v);
```

---

```

circdes=sqrt((U-(u0)).^2+(V-(v0)).^2);
raddes=w0f*(5/8); %filtro en terminos del radio r0
filtro=circdes<=raddes;

%Usar transformada completa, con todo y fase

Traf2filtro=Traf2.*filtro;
Traf2filtro=fftshift(Traf2filtro);
amplitud=abs(Traf2.*filtro);

AMP=(ifft2(Traf2filtro));
%normalizar AMP
AMPN=AMP/(max(max(AMP)));
ampAmp=abs(AMPN);

%Intensidad reconstruida del campo
figure
imagesc(ampAmp(1:N,1:N).^2)
colormap hot
axis off
axis square

%Fase reconstruida del campo
figure
imagesc(lacirc.*angle(AMPN.*conj(r2)))
colormap gray
axis off
axis square

%Cálculo para la razón señal a ruido

inicial=la.*lacirc;
final=-AMPN.*conj(r2);
phfinal=angle(final);
beta=sum(sum(inicial.*conj(final)))/(sum(sum((final.*conj(final)))));

O=inicial-beta.*final;
Oh=O.*conj(O);
%Valor razón señal a ruido
SNR1=sum(sum((inicial.*conj(inicial))))/(sum(sum(Oh)))

```

---

# Bibliografía

- [1] J. W. GOODMAN, *Introduction to Fourier Optics*, 3rd. Ed., Roberts & Company, USA, 2005, capítulo 9.
- [2] P. HARIHARAN, *Optical Holography, Principles, techniques, and applications*, 2nd. Ed., Cambridge U. Press, USA, 1996, capítulo 1, 2, 4, y 10.
- [3] J. A. DAVIS, D. M. COTTRELL, J. CAMPOS, M. J. YZUEL, and I. MORENO, *Encoding amplitud information onto phase-only filters*, Appl. Lett. **38**, 5004-5013 (1999).
- [4] V. ARRIZÓN, U. RUIZ, R. CARRADA and L. A. GONZÁLEZ, *Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields*, Opt. Lett. **24**, 3500-3507 (2007).
- [5] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd. Ed., Cambridge U. Press, 1922, p.22.
- [6] U. RUIZ, V. ARRIZÓN, *Characterization of twisted liquid crystal spatial light modulator*, Proc. SPIE **6422**, 1-7 (2007).
- [7] B. SALEH, M. TEICH, *Fundamentals of Photonics*, 2nd. Ed., Jonh Wiley & Sons Inc., USA, 2004, capítulo 3.
- [8] G. ARFKEN, *Mathematical methods for physicists*, 7th. Ed., Academic Press, USA, 2013, capítulos 14 y 18.
- [9] D.J. GRIFFITHS, *Introduction to Elecrodynamics*, 3th. Ed., John Wiley & Sons Inc., USA, 2002, capítulo 4.