

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Posición de la imagen registrada por un observador de una  
fuente puntual colocada sobre el eje óptico de un espejo  
parabólico

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

Alfredo Orozco Viveros

Asesorado por

Dr. Gilberto Silva Ortigoza  
Dra. Citlali Teresa Sosa Sánchez

Puebla Pue.  
14 de febrero de 2023



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Posición de la imagen registrada por un observador de una  
fuente puntual colocada sobre el eje óptico de un espejo  
parabólico

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

Alfredo Orozco Viveros

Asesorado por

Dr. Gilberto Silva Ortigoza  
Dra. Citlali Teresa Sosa Sánchez

Puebla Pue.  
14 de febrero de 2023



**Título:** Posición de la imagen registrada por un observador de una fuente puntual colocada sobre el eje óptico de un espejo parabólico

**Estudiante:** ALFREDO OROZCO VIVEROS

COMITÉ

---

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo  
Presidente

---

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco  
Secretario

---

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero  
Vocal

---

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez  
Suplente

---

Dr. Gilberto Silva Ortigoza  
Dra. Citlali Teresa Sosa Sánchez  
Asesor



# Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Derivación de la ecuación iconal	1
2. Las leyes de reflexión y refracción	5
2.0.1. Derivación Vectorial . . . . .	6
3. La ecuación exacta del espejo	11
3.0.1. Espejo plano . . . . .	13
3.0.2. Espejo Parabólico . . . . .	15
4. Conclusiones	23
A. Apéndice: Camino Óptico	25
Bibliografía	27



# Resumen

En este trabajo suponemos que en el espacio vacío tenemos: un observador, un espejo parabólico y una fuente puntual colocada sobre el eje óptico del espejo parabólico. El objetivo es usar la aproximación de la óptica geométrica para determinar la posición de la imagen de la fuente puntual registrada por el observador con posición arbitraria. Para esto, haciendo uso de la ley de reflexión y el principio de Huygens se calculan los rayos de luz reflejados por el espejo parabólico que llegan al observador y que éste registra como imágenes, determinadas por aquellos puntos resultados de la intersección de los rayos de luz y la cáustica.



# Introducción

Dentro de la aproximación paraxial de la óptica es bien conocido que la imagen de una fuente de luz puntual producida por un espejo parabólico cóncavo es otro punto [1]. Es decir, en esta aproximación la parte del frente de onda esférico divergente emitido por la fuente de luz puntual que es reflejada por el espejo parabólico se transforma en otra parte de un frente de onda esférico convergente con centro en el punto imagen. Esto quiere decir que todos los rayos de luz emitidos por la fuente de luz puntual que son reflejados por el espejo parabólico son enfocados en un solo punto, el cual corresponde a la envolvente producida por los rayos de luz reflejados y que por definición es la cáustica determinada por estos mismos. Por lo tanto, dentro de la aproximación paraxial, la cáustica asociada con los rayos de luz reflejados, que en este caso es un solo punto, determina la posición de la imagen. Ahora bien si colocamos en este sistema óptico, compuesto por el espejo y una fuente de luz puntual, a un observador con posición arbitraria es consecuente querer saber cuál es la posición de la imagen, de la fuente de luz puntual, registrada por el observador. De nuestros conocimientos de óptica paraxial sabemos que los rayos de luz reflejados, en general, llenaran una región cónica cuyo vértice determina la imagen de la fuente puntual. Por lo tanto, si el observador se encuentra sobre o dentro de esta región cónica registrará una imagen y si se encuentra fuera de esta región no registrará la imagen formada por el espejo. De esto concluimos que en la aproximación paraxial la imagen de la fuente de luz puntual registrada por el observador tiene una posición determinada por el punto de contacto entre el rayo de luz reflejado que recibe y la cáustica determinada por la familia de rayos de luz reflejados. Es importante remarcar que en esta aproximación este punto de contacto coincide con la cáustica porque es un solo punto.

En el presente trabajo suponemos que en el espacio vacío tenemos: un observador, un espejo parabólico y una fuente puntual colocada sobre el eje óptico del espejo parabólico. El objetivo es obtener, dentro de la aproximación de la óptica geométrica, la posición de la imagen de la fuente registrada por el observador con una posición arbitraria. Para ello usaremos el siguiente resultado. Dentro de la aproximación de la óptica geométrica la fuente puntual emite una familia de rayos de luz, tantos como puntos tiene una esfera bidimensional. Cada rayo emitido se refleja de acuerdo con la ley de reflexión. En general, un número finito de estos rayos llegará al observador. Cada uno de los rayos que llegan al observador se verá como una imagen, situada donde ese rayo toca a la cáustica formada por la familia de los rayos reflejados por el espejo parabólico. Sabemos que, si la fuente puntual se encuentra en el infinito sobre el eje óptico, entonces todos los rayos de luz son enfocados en un solo punto, el cual coincide con el foco del paraboloide. Además, si la fuente puntual se encuentra sobre el eje óptico entonces la región focal o cáustica determinada por los rayos de luz reflejados tiene dos ramas, una es un segmento de línea recta sobre el eje óptico y la otra es una superficie de revolución con una singularidad de tipo cúspide. En estos casos la cáustica no es estable, en el sentido, de que ante una pequeña variación en la posición de la fuente puntual el punto, en primer caso, y las dos ramas, en el segundo caso, se transforman en superficies bidimensionales que si son estables [5, 12]. Este último caso es el más interesante e importante en la formación de imágenes por un espejo parabólico. Sin embargo, en este trabajo nos restringimos al caso especial cuando la fuente puntual se encuentra sobre el eje óptico. De esta manera en este trabajo se establecen las bases para poder resolver el problema general.



# Capítulo 1

## Derivación de la ecuación iconal

La ecuación iconal es una ecuación diferencial parcial no lineal de primer orden que se encuentra en la teoría de propagación de ondas. Esta ecuación puede ser vista como la intermediaria entre dos paradigmas, la óptica de ondas y la óptica de rayos de luz que comúnmente llamamos óptica geométrica. Esta rama está caracterizada por "despreciar" la longitud de onda, es decir, es la rama correspondiente al caso límite en que  $\lambda \rightarrow 0$ , y donde al tener esta aproximación, las leyes ópticas pueden ser formuladas en el lenguaje de la geometría [2]. En esta rama es común describir la propagación de la energía en términos de curvas llamadas rayos. Los rayos son abstracciones útiles para aproximar los caminos a lo largo de los cuales la luz se propaga bajo ciertas circunstancias. Como se expondrá más adelante, la propagación de la luz en líneas rectas solo será válida cuando la luz viaje a través de un medio homogéneo con índice de refracción constante (este es una cantidad adimensional que describe qué tan rápido viaja la luz en el medio). Todas estas propiedades de la luz descritas por la óptica geométrica son heredadas por la ecuación iconal. En general, las observaciones anteriores implican que cuando la longitud de onda es lo suficientemente pequeña, la suma total de fenómenos ópticos puede ser deducida de consideraciones geométricas, al determinar los caminos de los rayos de luz junto al cálculo de su intensidad y polarización asociada. Las siguientes derivaciones (la ecuación iconal y la ecuación de los rayos) se formularán considerando las implicaciones en las ecuaciones de Maxwell cuando  $\lambda \rightarrow 0$ .

Comenzamos proponiendo un campo armónico general dependiente del tiempo dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t},\end{aligned}\tag{1.1}$$

en un medio isótropo no conductor,  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{H}_0$  denotan funciones vectoriales complejas de la posición. Se entiende que las partes reales de las expresiones en la parte derecha de la igualdad en (1.1) representan a los campos. Los vectores complejos  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{H}_0$  deben cumplir las ecuaciones de Maxwell en su forma independiente de tiempo. En las regiones libres de corrientes y cargas ( $\mathbf{j} = \rho = 0$ ), estas ecuaciones son

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 + ik_0\epsilon\mathbf{E}_0 = 0,\tag{1.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 - ik_0\mu\mathbf{H}_0 = 0,\tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}_0) = 0,\tag{1.4}$$

$$\nabla \cdot (\mu\mathbf{H}_0) = 0.\tag{1.5}$$

Aquí las relaciones materiales  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  han sido usadas, al igual que,  $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  con  $\lambda_0$  siendo la longitud de onda en el vacío. Sabemos que una onda plana homogénea en un medio con índice de refracción,  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ , propagándose en una dirección específica dada por el vector

unitario  $\hat{\mathbf{s}}$ , es representada por

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0 &= \mathbf{e}e^{ik_0n(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})}, \\ \mathbf{H}_0 &= \mathbf{h}e^{ik_0n(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})},\end{aligned}\tag{1.6}$$

donde  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$  son dos vectores constantes, generalmente complejos. Para un campo dipolar eléctrico (monocromático) en el vacío, se encuentra que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0 &= \mathbf{e}e^{ik_0r}, \\ \mathbf{H}_0 &= \mathbf{h}e^{ik_0r},\end{aligned}\tag{1.7}$$

donde  $r$  es la distancia del dipolo eléctrico al punto de campo. En este caso,  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$  ya no son vectores constantes, sin embargo para distancias lo suficientemente lejanas al dipolo ( $r \gg \lambda_0$ ) estos vectores son, con una normalización adecuada del momento dipolar, independientes de  $k_0$ .

Estos dos ejemplos sugieren que para regiones que están alejadas, a muchas longitudes de onda de la fuente, podemos representar ciertos tipos de campos más generales en la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0 &= \mathbf{e}(\mathbf{r})e^{ik_0S(\mathbf{r})}, \\ \mathbf{H}_0 &= \mathbf{h}(\mathbf{r})e^{ik_0S(\mathbf{r})},\end{aligned}\tag{1.8}$$

donde  $S(\mathbf{r})$ , el **camino óptico**, es una función escalar real de la posición,  $\mathbf{e}(\mathbf{r})$  y  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$  son funciones vectoriales de la posición, las cuales en general pueden ser complejas. Con (1.8) como propuesta de solución, las ecuaciones de Maxwell proporcionan un conjunto de relaciones entre  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  y  $S$ . Como mostraremos para  $k_0$  suficientemente grande, lo cual es equivalente a pedir que  $\lambda$  sea pequeña, estas relaciones implican que  $S$  sea solución a una ecuación diferencial en derivadas parciales denominada ecuación iconal, la cual es independiente de la amplitud de los vectores  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$ .

De (1.8), usando identidades vectoriales bien conocidas encontramos que,

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = (\nabla \times \mathbf{h} + ik_0 \nabla S \times \mathbf{h})e^{ik_0S},\tag{1.9}$$

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}_0) = (\mu \nabla \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \nabla \mu + ik_0 \mu \mathbf{h} \cdot \nabla S)e^{ik_0S},\tag{1.10}$$

con expresiones similares para  $\nabla \times \mathbf{E}_0$  y  $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}_0)$ . Así, las expresiones (1.2)-(1.5) toman la siguiente forma

$$\nabla S \times \mathbf{h} + \epsilon \mathbf{e} = -\frac{1}{ik_0} \nabla \times \mathbf{h},\tag{1.11}$$

$$\nabla S \times \mathbf{e} - \mu \mathbf{h} = -\frac{1}{ik_0} \nabla \times \mathbf{e},\tag{1.12}$$

$$\mathbf{e} \cdot \nabla S = -\frac{1}{ik_0} (\mathbf{e} \cdot \nabla \ln \epsilon + \nabla \cdot \mathbf{e}),\tag{1.13}$$

$$\mathbf{h} \cdot \nabla S = -\frac{1}{ik_0} (\mathbf{h} \cdot \nabla \ln \mu + \nabla \cdot \mathbf{h}).\tag{1.14}$$

Estamos interesados en la solución que se obtiene cuando el valor absoluto de los vectores que multiplican al factor  $1/k_0$  en los miembros derechos de las ecuaciones (1.11)-(1.14) es mucho menor que  $k_0$ . A esta aproximación se le denomina aproximación de óptica geométrica. De tal forma que se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\nabla S \times \mathbf{h} + \epsilon \mathbf{e} = 0,\tag{1.15}$$

$$\nabla S \times \mathbf{e} - \mu \mathbf{h} = 0,\tag{1.16}$$

$$\mathbf{e} \cdot \nabla S = 0,\tag{1.17}$$

$$\mathbf{h} \cdot \nabla S = 0.\tag{1.18}$$

Centrándonos solamente en (1.15) y (1.16) ya que las ecuaciones (1.17) y (1.18) siguen de éstas usando la multiplicación escalar con  $\nabla S$ . Ahora (1.15) y (1.16) pueden ser vistas como un conjunto de ecuaciones escalares lineales homogéneas simultáneas para las componentes cartesianas de  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{h}$ . Estas ecuaciones simultáneas tienen soluciones no triviales solo si el determinante asociado es igual a cero. Tal condición se obtiene al eliminar  $\mathbf{e}$  o  $\mathbf{h}$  de (1.15) y (1.16). Resolviendo para  $\mathbf{h}$  de (1.16), entonces (1.15) toma la siguiente forma

$$\frac{1}{\mu}[(\mathbf{e} \cdot \nabla S)\nabla S - \mathbf{e}(\nabla S)^2] + \epsilon\mathbf{e} = 0. \quad (1.19)$$

El primer término se hace cero por (1.17), y la ecuación entonces se reduce, ya que  $\mathbf{e}$  no es cero en todas partes, a

$$(\nabla S)^2 = n^2, \quad (1.20)$$

o escrita explícitamente en coordenadas cartesianas

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z), \quad (1.21)$$

donde  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$  denota el índice de refracción. La función  $S$  es usualmente llamada la iconal y (1.21) es conocida como la **Ecuación iconal** [3]; que es la ecuación fundamental de la óptica geométrica. Las superficies

$$S(\mathbf{r}) = \text{constante}, \quad (1.22)$$

son llamadas las superficies de onda geométricas o los frentes de onda geométricos.

En particular los rayos de luz geométricos están definidos como las trayectorias ortogonales a los frentes de onda geométricos  $S(\mathbf{r}) = \text{constante}$ . En general, los rayos son curvas cuya dirección coincide en todo lugar con la dirección del promedio del vector de Poynting. El vector  $\mathbf{r}(s)$  denota la posición de un punto  $p$  sobre un rayo, además este vector es función de la longitud de arco  $s$  de dicho rayo, entonces  $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{s}$  y la ecuación del rayo de luz puede ser escrita como

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla S, \quad (1.23)$$

La ecuación (1.23), determina a los rayos por medio de la función  $S$ , también es posible derivar de ésta una ecuación diferencial que especifique a los rayos directamente en términos del índice de refracción  $n(\mathbf{r})$ .

Diferenciamos (1.23) con respecto a  $s$  y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) &= \frac{d}{ds} \nabla S \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla(\nabla S) \\ &= \frac{1}{n} \nabla S \cdot \nabla(\nabla S) \quad \text{usando (1.23)} \\ &= \frac{1}{2n} \nabla[(\nabla S)^2] \\ &= \frac{1}{2n} \nabla n^2 \quad \text{usando (1.20)} \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n. \quad (1.24)$$

Esta es la forma vectorial de la ecuación diferencial que describe los rayos de luz. En particular, en un medio homogéneo con  $n = \text{constante}$  la ecuación (1.24) se reduce a

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0, \quad (1.25)$$

donde

$$\mathbf{r} = s\mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad (1.26)$$

siendo  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  vectores constantes. La ecuación (1.26) es la ecuación vectorial de una línea recta en la dirección de  $\mathbf{a}$ , pasando a través del punto  $\mathbf{r} = \mathbf{b}$ . De aquí se concluye que *en un medio homogéneo los rayos de luz siguen trayectorias rectas*.

Con estos resultados obtenemos la base principal de la óptica geométrica, la ecuación iconal y la ecuación de los rayos de luz. En particular tenemos que de la ecuación de los rayos de luz hemos obtenido la posibilidad de tratar a la trayectoria de la energía promedio como líneas rectas. Y de la ecuación iconal obtenemos que si se conoce  $n(\vec{r})$  podemos determinar la dirección de propagación de los rayos de luz. Estos resultados serán clave más adelante para utilizar las aproximaciones necesarias en nuestro tratamiento del cálculo de las ecuaciones del espejo parabólico.

## Capítulo 2

# Las leyes de reflexión y refracción

Cuando un rayo de luz incide en la interfaz entre dos medios distintos, parte de éste es reflejado de vuelta al primer medio y el resto del rayo es refractado al entrar en el segundo medio. Las direcciones tomadas por estos rayos están descritas por dos leyes bien conocidas. Para un análisis más profundo del fenómeno de reflexión tomemos en cuenta un haz de luz compuesto por frentes de onda planos incidiendo con algún ángulo (llamado ángulo de incidencia) sobre la superficie plana de un medio ópticamente denso. Supongamos que el entorno que lo rodea es el vacío. Siguiendo la trayectoria de un frente de onda a medida que pasa por las moléculas de la superficie, éste las energiza y vuelve a reenergizar una tras otra, las moléculas funcionan como esparcidores que radian la luz que incide en ellas. Cada una puede considerarse como un frente de ondas semiesférico saliendo del medio incidente. Estos frentes de onda avanzan conjuntamente y se suman constructivamente en una sola dirección, lo que provoca que solo haya un rayo reflejado bien definido.

Para ilustrar esto veamos la figura 2.1a, aquí la línea  $\overline{AB}$  se encuentra a lo largo de un frente de onda entrante, mientras  $\overline{CD}$  se encuentra a lo largo un frente de onda saliente; en efecto,  $\overline{AB}$  se transforma en la reflexión en  $\overline{CD}$ . También tenemos que el frente de ondas emitido desde A llegará a C en fase con el frente de ondas que se está emitiendo desde D (a medida que es estimulado por B), siempre y cuando las distancias  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  sean iguales. En otras palabras, si todas los frentes de onda emitidos por todos las moléculas de la superficie se superponen en fase y forman una sola onda plana reflejada, es necesariamente porque  $\overline{AC} = \overline{BD}$ . Entonces, como ambos triángulos tienen en común la hipotenusa

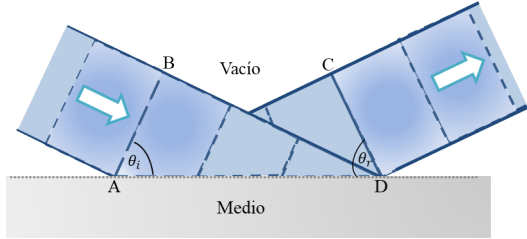
$$\frac{\text{sen } \theta_i}{\overline{BD}} = \frac{\text{sen } \theta_r}{\overline{AC}}, \quad (2.1)$$

todas las ondas viajan en el medio incidente con la misma velocidad  $v_i$ . De esto sigue que en el tiempo ( $\Delta t$ ) que toma al punto B en el frente de onda el alcanzar el punto D en la superficie, el frente de ondas emitido de A alcanza el punto C. En otras palabras,  $\overline{BD} = v_i \Delta t = \overline{AC}$ , y entonces por la ecuación (2.1), vemos que  $\text{sen } \theta_i = \text{sen } \theta_r$ , que significa que

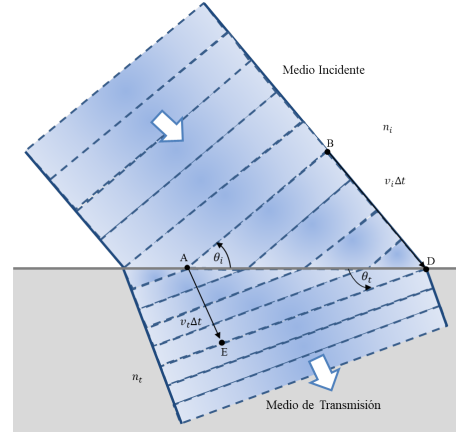
$$\theta_i = \theta_r \quad (2.2)$$

el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Esta ecuación es la **Ley de Reflexión**.

Examinemos ahora la parte del rayo que es refractado. Hablando clásicamente, cada molécula que es energizada en la interfaz por el haz de luz incidente irradia frentes de onda en el cristal que se expanden a velocidad  $c$ . Estos frentes de onda pueden ser vistos como una onda secundaria que a su vez se recombina con los restos no dispersados de la onda primaria para formar una onda neta transmitida. El proceso continúa una y otra vez a medida que la onda avanza en el medio transmisor. Esta onda neta transmitida se propaga con una velocidad efectiva  $v_t < c$ , es más lenta que la onda incidente. Debido a esto los frentes de onda transmitidos son refractados, desplazados (desviados con respecto a los frentes de onda incidentes), por lo que el haz de luz se dobla.



(a) Las ondas planas entran por la izquierda y se reflejan hacia la derecha. El frente de onda reflejado  $CD$  está formado por las ondas dispersadas por los átomos en la superficie de  $A$  a  $D$ . Así como el primer frente de onda llega a  $C$  de  $A$ , el átomo en  $D$  emite, haciendo que se completa el frente de onda a lo largo de  $CD$ .



(b) La refracción de las ondas. Los átomos en la región de la superficie del medio transmisor reirradian frentes de onda que se combinan constructivamente para formar un haz refractado.

Para ilustrar esto, podemos ver a la Figura 2.1b como una foto de tomas múltiples de un único frente de ondas mostrándolo tras una serie de intervalos de tiempo iguales y sucesivos. Véase que en el tiempo  $\Delta t$ , que es el que toma al punto  $B$  del frente de onda (viajando a velocidad  $v_i$ ) para llegar al punto  $D$ , la porción transmitida de ese mismo frente de onda (viajando a velocidad  $v_t$ ) habrá llegado al punto  $E$ . Si el medio transmitido ( $n_t$ ) es inmerso en un medio incidente ( $n_i$ ) donde  $n_t > n_i$ ,  $v_t < v_i$ , y  $\overline{AE} < \overline{BD}$ , el frente de ondas se dobla. El frente de onda refractado se extiende de  $E$  a  $D$ , haciendo un ángulo con la interface de  $\theta_t$ . Como antes, los dos triángulos  $ABD$  y  $AED$  en la figura 2.1b tienen en común la hipotenusa ( $\overline{AD}$ ), y entonces

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{\overline{BD}} = \frac{\text{sen } \theta_t}{\overline{AE}} \quad (2.3)$$

donde  $\overline{BD} = v_i \Delta t$  y  $\overline{AE} = v_t \Delta t$ . Entonces

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{v_i} = \frac{\text{sen } \theta_t}{v_t} \quad (2.4)$$

multiplicando ambos lados por  $c$ , y como  $n_i = \frac{c}{v_i}$  y  $n_t = \frac{c}{v_t}$  obtenemos

$$n_i \text{sen } \theta_i = n_t \text{sen } \theta_t, \quad (2.5)$$

esta ecuación es **Ley de Refracción**, también conocida como la ley de Snell [1]. A continuación se mostrará la derivación vectorial de ambas leyes.

### 2.0.1. Derivación Vectorial

Suponemos que el espacio tridimensional está lleno con dos medios ópticos con índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$ , constantes, que están separados por una superficie arbitraria, la cual está descrita localmente por

$$\mathbf{r}(x, y) = x\hat{x} + y\hat{y} + f(x, y)\hat{z}. \quad (2.6)$$

En el medio óptico con índice de refracción  $n_1$  colocamos una fuente puntual de luz en el punto con vector de posición  $\mathbf{s}$ . El camino óptico (OPL), denotado por  $\Phi$ , de la posición de la fuente  $\mathbf{s}$  a un punto arbitrario  $\mathbf{X} = X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}$  en el medio óptico con índice  $n_2$  es igual a

$$\Phi(\mathbf{X}, x, y) = n_1 |\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{s}| + n_2 |\mathbf{X} - \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{y})|. \quad (2.7)$$

Observe que para valores fijos de  $x, y$  la ecuación (2.7) es una solución a la ecuación iconal en el medio óptico con índice de refracción  $n_2$ . Esto significa que  $\Phi(\mathbf{X}, x, y)$  es una integral completa de la ecuación iconal<sup>1</sup>; para ver el significado físico asociado con esta integral completa, determinamos sus frentes de onda asociados, que por definición están dados por todos los puntos  $\mathbf{X}$  tales que  $\Phi(\mathbf{X}, x, y) = C$ , esto es

$$|\mathbf{X} - \mathbf{r}(x, y)| = \frac{C}{n_2} - \gamma|\mathbf{r}(x, y) - \mathbf{s}|. \quad (2.8)$$

donde  $C$  es una constante real y

$$\gamma = \frac{n_1}{n_2}. \quad (2.9)$$

Notemos que para valores fijos de  $x, y, C$  la ecuación (2.8) describe una superficie esférica con su centro en el punto de la superficie refractante,  $\mathbf{r}(x, y)$ , y radio dado por  $\frac{C}{n_2} - \gamma|\mathbf{r}(x, y) - \mathbf{s}|$ . Esto significa que cada rayo de luz emitido por la fuente puntual de luz, al momento que llega a la superficie refractante se transforma en una nueva fuente de luz puntual tal que sus frentes de onda asociados están dados por (2.8). En otras palabras, cada rayo que es emitido por la fuente puntual al momento que llega a la superficie refractante tiene la posibilidad de tomar cualquier dirección de propagación. Por lo tanto, al usar únicamente la información de la integral completa (2.7) no es posible determinar la dirección de propagación del rayo de luz refractado. Para obtener tal dirección, usamos el **principio de Huygens**, este consiste en que cada punto perteneciente al frente de onda en propagación es una fuente puntual, es decir, una fuente de ondas esféricas secundarias; de modo que después de un tiempo  $t$  el nuevo frente de onda será la envolvente de los frentes de onda esféricos. Es de importancia mencionar que si la onda que se propaga tiene una frecuencia  $\nu$ , y una velocidad  $v$ , entonces los frentes de onda secundarios tendrán la misma frecuencia y velocidad. Este principio se ilustra en la Figura 2.3. Para nuestro caso suponemos que el tren de frentes de onda refractado está dado por la envolvente de los frentes de onda (2.8).

Por definición, la envolvente<sup>2</sup> está dada por todos los puntos  $\mathbf{X}$  tales que satisfacen (2.8) y las dos condiciones siguientes para  $\Phi$ :

$$\Phi_x = -n_2(\hat{\mathbf{R}} - \gamma\hat{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{r}_x, \quad (2.10)$$

$$\Phi_y = -n_2(\hat{\mathbf{R}} - \gamma\hat{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{r}_y, \quad (2.11)$$

donde  $\Phi_x, \Phi_y, \mathbf{r}_x$  y  $\mathbf{r}_y$  denotan las derivadas parciales de  $\Phi$  y  $\mathbf{r}$  con respecto a  $x$  y  $y$  respectivamente. Mientras que

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}, \quad (2.12)$$

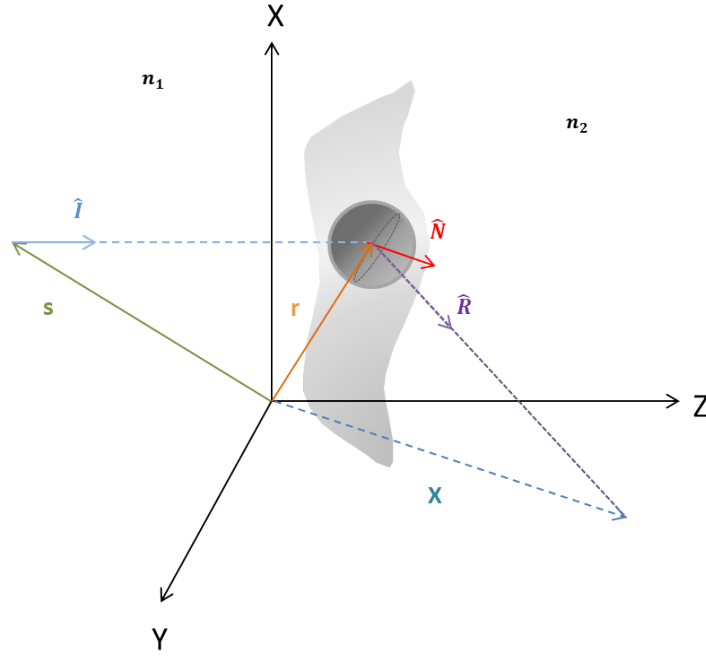
$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{X} - \mathbf{r}}{|\mathbf{X} - \mathbf{r}|}, \quad (2.13)$$

donde  $\hat{\mathbf{I}}$  proporciona la dirección del rayo de luz incidente, y  $\hat{\mathbf{R}}$  la dirección del rayo de luz refractado. Si  $\hat{\mathbf{N}}$  denota el vector unitario a la superficie refractante, entonces  $\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{r}_x = 0$  y  $\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{r}_y = 0$ , ya que  $\mathbf{r}_x$  y  $\mathbf{r}_y$  son vectores tangentes a la superficie refractante. Entonces, en general  $\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y$  y  $\hat{\mathbf{N}}$  son vectores linealmente independientes. Esto significa que cada vector en el medio óptico con índice de refracción  $n_2$  puede ser escrito como una combinación lineal de los vectores anteriores. De las ecuaciones (2.10) y (2.11) concluimos que

$$\hat{\mathbf{R}} - \gamma\hat{\mathbf{I}} = \Omega\hat{\mathbf{N}}, \quad (2.14)$$

<sup>1</sup>La ecuación iconal es una ecuación diferencial parcial lineal, un tipo de solución a esta clase de ecuaciones se denomina *integral completa*, esto significa que la solución contiene tantos parámetros libres como grados de libertad hay en la ecuación diferencial parcial. En este caso, la integral completa  $\Phi$  tendrá dos parámetros libres dados por las constantes  $x$  y  $y$ , esto debido al número de variables independientes que presenta la ecuación.

<sup>2</sup>Para términos más generales, en geometría, la envolvente de una familia de curvas es la curva que es tangente a cada miembro de la familia en un punto dado. Es decir, el conjunto de cada uno de estos puntos de tangencia forma la envolvente.



**Figura 2.2:** Se presenta un esquema de dos medios ópticos con índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$  separados por una interfaz arbitraria localmente dada por  $z = f(x, y)$ . En el medio óptico con índice de refracción  $n_1$  se coloca una fuente de luz puntual en una posición arbitraria  $\mathbf{s}$ ;  $\mathbf{r}$  denota el vector de posición de un punto en la interfaz,  $\hat{\mathbf{N}}$  denota el vector normal a la superficie refractante,  $\hat{\mathbf{I}}$  da la dirección del rayo incidente y  $\hat{\mathbf{R}}$  es la dirección de propagación del rayo de luz refractado.

donde  $\Omega$  es una función determinada por la condición:  $\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = 1$ . Un cálculo directo muestra que esta condición provee dos soluciones para  $\Omega$ , dadas por

$$\Omega^\pm = -\gamma(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}}) \pm \sqrt{1 - \gamma^2(1 - (\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})^2)}. \quad (2.15)$$

Entonces concluimos que las condiciones (2.10) y (2.11) en la integral completa (2.7) de la ecuación iconal determinan dos direcciones de propagación, que corresponden a las leyes de reflexión y refracción en forma vectorial.

La ley de refracción está dada por la ecuación (2.14) con  $\Omega$  dada por la ecuación (2.15) con el signo positivo porque el haz de luz atraviesa la superficie refractante. Esto es, dada por

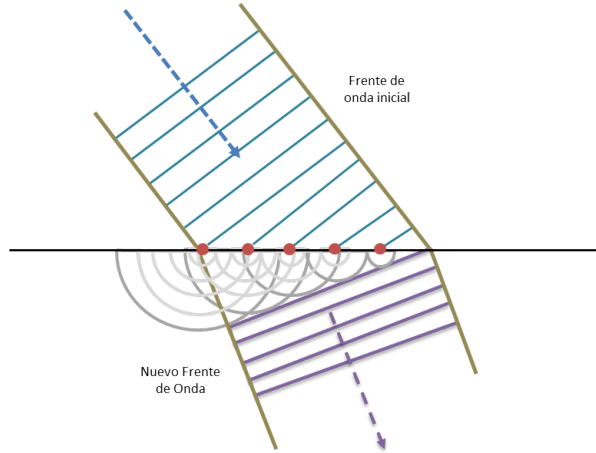
$$\hat{\mathbf{R}} = \gamma\hat{\mathbf{I}} + \Omega\hat{\mathbf{N}}, \quad (2.16)$$

$$\Omega \equiv -\gamma(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}}) + \sqrt{1 - \gamma^2(1 - (\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})^2)}, \quad (2.17)$$

observe que cuando  $n_1 = n_2$ , entonces  $\gamma = 1$ ,  $\Omega = 0$  y  $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{I}}$ , es decir que si la luz no cambia de medio óptico el rayo continuará su camino sin cambio de dirección, el cual es un resultado ya conocido. La ley de reflexión está dada por la ecuación (2.14) con  $\Omega$  dado por la ecuación (2.15) con el signo negativo y tomando  $n_1 = n_2$  [5]. Esto es, por

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{I}} - 2(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})\hat{\mathbf{N}}. \quad (2.18)$$

Recuerde que la envolvente de los frentes de onda está dada por todos los puntos  $\mathbf{X}$  tales que satisfacen las ecuaciones (2.8), (2.10) y (2.11). De los resultados obtenidos, observe que las ecuaciones (2.10) y (2.11) determinan dos direcciones de propagación: una corresponde a la dirección



**Figura 2.3:** Se tiene un frente de onda inicial en propagación que al incidir en una superficie arbitraria se convierte en una fuente de ondas esféricas secundarias; de modo que después de un tiempo  $t$  el nuevo frente de onda será la envolvente de los frentes de onda esféricos

de los rayos de luz refractados dada por la ecuación (2.16), y la otra corresponde a la dirección de los rayos de luz reflejados dada por la ecuación (2.18). Entonces la envolvente de los frentes de ondas (2.8) tiene dos ramas, una corresponde a los frentes de onda refractados y la otra a los frentes de onda reflejados. Al usar las ecuaciones (2.8), (2.13), (2.16) y (2.18) un cálculo directo muestra que los frentes de onda refractados están dados por

$$\mathbf{X} = \mathbf{r} + \left( \frac{C}{n_2} - \gamma|\mathbf{r} - \mathbf{s}| \right) [\gamma\hat{\mathbf{I}} + \Omega\hat{\mathbf{N}}], \quad (2.19)$$

y los frentes de onda reflejados por

$$\mathbf{X} = \mathbf{r} + \left( \frac{C}{n_1} - |\mathbf{r} - \mathbf{s}| \right) [\hat{\mathbf{I}} - 2(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})\hat{\mathbf{N}}]. \quad (2.20)$$

Estos resultados fueron obtenidos en la literatura [6-11] al usar el procedimiento de la función- $k$  y las leyes de refracción y reflexión. Esto es, la integral completa (2.7) se reescribe de la siguiente forma:

$$\Phi(\mathbf{X}, x, y) = n_2(\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{R}}) + k, \quad (2.21)$$

donde  $k$  es una función dada por

$$k(x, y) = n_1|\mathbf{r} - \mathbf{s}| - n_2(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{R}}), \quad (2.22)$$

Entonces, dependiendo el caso,  $\hat{\mathbf{R}}$  es calculada al usar explícitamente las leyes de refracción y reflexión; y finalmente, las dos condiciones extras (2.10) y (2.11) son aplicadas. De los resultados obtenidos aquí concluimos que no es necesario usar las leyes de reflexión y refracción explícitamente para calcular los frentes de onda reflejados o refractados porque son equivalentes a las condiciones extras (2.10) y (2.11) en la integral completa y el camino óptico,  $\Phi$ , dado por la ecuación (2.7). Es importante recalcar que la envolvente de los frentes de onda (2.8) en el medio óptico con índice de refracción  $n_2$  indica la evolución de los frentes de onda refractados, y está dada por la ecuación (2.19). En el medio óptico con índice de refracción  $n_1$ , la ecuación (2.8) se reduce a

$$|\mathbf{X} - \mathbf{r}(x, y)| = \frac{C}{n_1} - |\mathbf{r}(x, y) - \mathbf{s}|, \quad (2.23)$$

y la envolvente de estos frentes de onda está dada por la ecuación (2.20), que describe la evolución de dichos frentes de onda.

En contraste con la derivación puramente geométrica mostrada al principio, aquí las leyes de reflexión y refracción se han derivado al usar el método de la envolvente, lo cual nos permite conocer de manera precisa las ecuaciones de los frentes de onda refractados y reflejados al igual que su evolución. A continuación se derivan las ecuaciones generales que determinan las imágenes vistas por un observador cuando un conjunto de rayos de luz emitidos por un objeto extendido y que son reflejados por un espejo liso le alcanzan.

## Capítulo 3

# La ecuación exacta del espejo

En el espacio libre proponemos que se tiene un sistema de ejes coordenados  $x, y$  y  $z$ . Y que además, en éste se tiene un observador, una fuente puntual de luz y un espejo, con vectores de posición dados por:

$$\mathbf{r}_0 = x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{r}_s = x_s\hat{x} + y_s\hat{y} + z_s\hat{z}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z(x, y)\hat{z}, \quad (3.3)$$

respectivamente, donde  $x_o, y_o$  y  $z_o$  etiquetan la posición del observador,  $x_s, y_s$  y  $z_s$  la posición de la fuente puntual de luz y  $x$  y  $y$  los puntos en el espejo. Los rayos emitidos por la fuente puntual de luz, con vector de posición (3.2) que llegan a los puntos del espejo (3.3) pueden ser escritos de la siguiente manera:

$$\mathbf{X}(x, y, \tau) = \mathbf{r}_s + \tau[\mathbf{r}(x, y) - \mathbf{r}_s], \quad (3.4)$$

donde  $0 \leq \tau \leq 1$  es un parámetro que etiqueta cada punto en un rayo de luz emitido. Los rayos de luz reflejados por el espejo están dados por

$$\mathbf{Y}(x, y, l) = \mathbf{r}(x, y) + l\hat{\mathbf{R}}(x, y), \quad (3.5)$$

donde  $l > 0$  etiqueta los puntos de un rayo de luz reflejado dado,  $l < 0$  etiqueta los puntos en la prolongación trasera del rayo de luz reflejado correspondiente, y  $\hat{\mathbf{R}}$ , que da la dirección del rayo de luz reflejado, está dada por la ley de reflexión [5], Esto es,

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_s}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}, \quad (3.6)$$

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)}{\left|\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)\right|}, \quad (3.7)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{I}} - 2(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})\hat{\mathbf{N}}, \quad (3.8)$$

aquí  $\hat{\mathbf{I}}$  da la dirección de los rayos de luz emitidos por la fuente de luz puntual y  $\hat{\mathbf{N}}$  es el vector normal al espejo. Ahora buscamos los rayos de luz reflejados (3.5) que llegan al observador (3.1). Esto es, entre todos los valores permitidos para  $x$  y  $y$  que etiquetan los puntos del espejo, buscamos aquellos valores tales que los rayos de luz emitidos por la fuente de luz puntual, al ser reflejados, lleguen al observador. Entonces, imponemos la condición  $\mathbf{Y}(x, y, l) = \mathbf{r}_0$ . En otras palabras queremos obtener

los valores de  $x$  y  $y$  tales que

$$x + l(\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{x}) = x_0, \quad (3.9)$$

$$y + l(\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{y}) = y_0, \quad (3.10)$$

$$z + l(\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{z}) = z_0. \quad (3.11)$$

En estas ecuaciones se supone que las variables conocidas son el observador y el vector de posición de la fuente, además de la forma del espejo, dada por  $z = z(x, y)$ . Entonces tenemos tres ecuaciones para las tres variables no conocidas  $x$ ,  $y$  y  $l$ . Si  $(\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{z}) \neq 0$  entonces de la ecuación (3.11) obtenemos

$$l = \frac{z_0 - z(x, y)}{\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{z}}, \quad (3.12)$$

sustituyendo estos resultados en las ecuaciones (3.9) y (3.10) obtenemos

$$[z_0 - z(x, y)](\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{x}) = (x_0 - x)\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{z}, \quad (3.13)$$

$$[z_0 - z(x, y)](\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{y}) = (y_0 - y)\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{z}. \quad (3.14)$$

Es importante recalcar que si el observador, con vector de posición  $r_0$ , está fuera de la región cáustica determinada por los rayos de luz reflejados, la solución a las ecuaciones (3.13) y (3.14) es única. Por otro lado, si el observador está sobre la región cáustica se admiten múltiples soluciones, esto se debe a que la región cáustica está formada por aquellos puntos donde atraviesan dos o más rayos de luz, es decir es una región singular. Si denotamos las soluciones por  $x = \bar{x}_\mu$  y  $y = \bar{y}_\mu$ , donde  $\mu$  etiqueta las diferentes soluciones, entonces los vectores de posición de los puntos del espejo que estamos buscando están dados por

$$r_\mu = \bar{x}_\mu \hat{x} + \bar{y}_\mu \hat{y} + z(\bar{x}_\mu, \bar{y}_\mu) \hat{z}, \quad (3.15)$$

y la distancia,  $\bar{l}_{0\mu}$ , de estos puntos al observador es obtenida al reemplazar  $(x, y)$  por  $(\bar{x}^\mu, \bar{y}^\mu)$  respectivamente en la ecuación (3.12). Esto es,

$$\bar{l}_{0\mu} = \frac{z - z(\bar{x}^\mu, \bar{y}^\mu)}{[\hat{\mathbf{R}}(\bar{x}^\mu, \bar{y}^\mu)] \cdot \hat{z}}. \quad (3.16)$$

Recordemos que queremos calcular la posición de la imagen de la fuente de luz puntual registrada por el observador. Hasta ahora tenemos determinados los puntos en el espejo y así los rayos de luz reflejados que llegan al observador. Para determinar la imagen vista por el observador necesitamos calcular los puntos de contacto de estos particulares rayos de luz reflejados con la región cáustica asociada a la familia entera de rayos de luz reflejados (3.5). Para este fin, observe que desde un punto de vista matemático la ecuación (3.5) describe un mapeo entre dos subconjuntos de  $R^3$ , donde  $(x, y, l)$  son coordenadas del espacio del dominio y  $(Y_1, Y_2, Y_3)$  son coordenadas locales del codominio donde  $\mathbf{Y} = Y_1 \hat{x} + Y_2 \hat{y} + Y_3 \hat{z}$ . El conjunto cáustico del mapeo (3.5) es calculado usando lo siguiente:

**Definición:** Sea  $h : M \rightarrow N$  un mapeo diferenciable, con  $M$  y  $N$  variedades diferenciables. El conjunto de puntos en  $M$  donde  $h$  no es localmente inyectiva es referido como el conjunto crítico, y la imagen del conjunto crítico es referido como conjunto cáustico de  $h$  [13]. De acuerdo con esta definición cuando  $H_2 \neq 0$  el conjunto crítico del mapeo (3.5) puede ser escrito de la siguiente manera

$$l_1 = \frac{-H_1 + \sqrt{H_1^2 - 4H_2H_0}}{2H_2}, \quad (3.17)$$

$$l_2 = \frac{-H_1 - \sqrt{H_1^2 - 4H_2H_0}}{2H_2}, \quad (3.18)$$

donde

$$H_0 = \hat{\mathbf{R}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \right) \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) \right], \quad (3.19)$$

$$H_1 = \hat{\mathbf{R}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \right) \times \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial x} \right) \times \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) \right], \quad (3.20)$$

$$H_2 = \hat{\mathbf{R}} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial x} \right) \times \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial y} \right) \right], \quad (3.21)$$

y el conjunto cáustico, que es obtenido sustituyendo las ecuaciones (3.17) y (3.18) en la ecuación (3.5), puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\mathbf{Y}_1(x, y) = \mathbf{r} + l_1 \hat{\mathbf{R}}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{Y}_2(x, y) = \mathbf{r} + l_2 \hat{\mathbf{R}}. \quad (3.23)$$

Las imágenes vistas por el observador son determinadas al reemplazar  $(x, y)$  por  $(\bar{x}^\mu, \bar{y}^\mu)$  respectivamente en la expresión para la cáustica (3.22) y (3.23). Entonces las imágenes vistas por el observador están dadas por

$$\mathbf{y}_{1\mu} = \mathbf{Y}_1(\bar{x}^\mu, \bar{y}^\mu), \quad (3.24)$$

$$\mathbf{y}_{2\mu} = \mathbf{Y}_2(\bar{x}^\mu, \bar{y}^\mu). \quad (3.25)$$

Si el objeto extendido es unidimensional o bidimensional entonces su imagen es calculada punto por punto. Así, (3.2) es reemplazado por

$$\mathbf{r}_s(\alpha) = x_s(\alpha)\hat{x} + y_s(\alpha)\hat{y} + z_s(\alpha)\hat{z}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{r}_s(\alpha, \beta) = x_s(\alpha, \beta)\hat{x} + y_s(\alpha, \beta)\hat{y} + z_s(\alpha, \beta)\hat{z}, \quad (3.27)$$

en (3.26),  $\alpha$  etiqueta los puntos en el objeto extendido unidimensional y en (3.27),  $\alpha$  y  $\beta$ , etiquetan los puntos en el objeto extendido bidimensional.

### 3.0.1. Espejo plano

Para probar que el procedimiento general mostrado produce resultados conocidos, calculamos la imagen registrada por un observador cuando el espejo es plano. Para este fin, suponemos que el vector de posición del espejo está dado por

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y}. \quad (3.28)$$

Los rayos de luz emitidos por la fuente puntual de luz que llegan al espejo plano están dados por

$$\mathbf{X} = [x_s + \tau(x - x_s)]\hat{x} + [y_s + \tau(y - y_s)]\hat{y} + [z_s + \tau(z - z_s)]\hat{z}. \quad (3.29)$$

En este caso, de las ecuaciones (3.2), (3.6), (3.7), (3.8) y (3.28) un cálculo directo muestra que

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{(x - x_s)\hat{x} + (y - y_s)\hat{y} - z_s\hat{z}}{\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + z_s^2}}, \quad (3.30)$$

$$\hat{\mathbf{N}} = \hat{z}, \quad (3.31)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{(x - x_s)\hat{x} + (y - y_s)\hat{y} + z_s\hat{z}}{\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + z_s^2}}. \quad (3.32)$$

Así, los rayos de luz reflejados (3.5) para el espejo plano pueden ser escritos de la siguiente manera

$$\mathbf{Y}(x, y, l) = x\hat{x} + y\hat{y} + l \frac{(x - x_s)\hat{x} + (y - y_s)\hat{y} + z_s\hat{z}}{\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + z_s^2}}. \quad (3.33)$$

De las ecuaciones (3.17)-(3.23) y (3.32) un cálculo directo muestra que los conjuntos críticos y cáusticos determinados por el mapeo (3.33) están dados por

$$l_1 = l_2 = -\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + z_s^2}, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = x_s\hat{x} + y_s\hat{y} - z_s\hat{z}. \quad (3.35)$$

Entonces, la cáustica es un solo punto y es virtual porque,  $l_1(x, y) < 0$ , está detrás del espejo plano, véase la Figura 3.1. Así, la solución de las ecuaciones (3.13) y (3.14) para el espejo plano es única y un cálculo directo muestra que está dada por

$$\bar{x} = \frac{x_0 z_s + x_s z_0}{z_s + z_0}, \quad (3.36)$$

$$\bar{y} = \frac{y_0 z_s + y_s z_0}{z_s + z_0}. \quad (3.37)$$

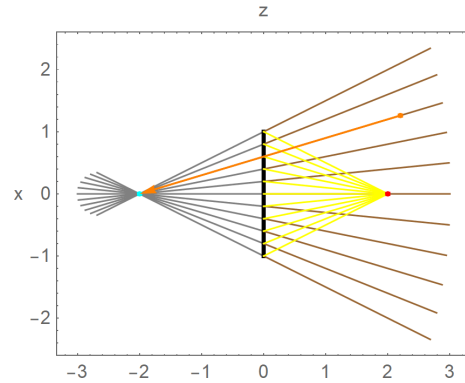
Usando estas expresiones en la ecuación (3.16) obtenemos

$$\bar{l}_0 = \frac{z_0 \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}}{z_0 + z_s}. \quad (3.38)$$

De la ecuación (3.33), tenemos que el rayo de luz reflejado que llega al observador está dado por

$$\mathbf{Y} = \bar{x}\hat{x} + \bar{y}\hat{y} + l \frac{(\bar{x} - x_s)\hat{x} + (\bar{y} - y_s)\hat{y} + z_s\hat{z}}{\sqrt{(\bar{x} - x_s)^2 + (\bar{y} - y_s)^2 + z_s^2}}, \quad (3.39)$$

usando las ecuaciones (3.36) y (3.37) un cálculo directo muestra que la parte virtual del rayo de luz reflejado toca el punto cáustico en  $l = l_1(x, y)$  dado por la ecuación (3.34).



**Figura 3.1:** Para el espejo plano, en  $y=0$ , se ilustra: la fuente puntual de luz (rojo), algunos rayos de luz incidentes (amarillo), los rayos reflejados correspondientes (café), el espejo (negro), la cáustica determinada por la prolongación virtual de los rayos de luz reflejados, que corresponde a la imagen de la fuente de luz puntual (cian), el observador (naranja) y la prolongación virtual de los rayos de luz reflejados (gris).

Entonces, la imagen vista por el observador está dada por el punto cáustico virtual

$$\mathbf{y} = x_s\hat{x} + y_s\hat{y} - z_s\hat{z}, \quad (3.40)$$

cuya ecuación también se interpreta como la intersección de la continuación trasera de los rayos de luz reflejados por el espejo plano, el cual es un resultado bien conocido [12]. En la Figura 3.1 se muestra en el plano  $y = 0$ : la fuente puntual de luz (rojo), algunos rayos de luz incidentes (amarillo), los rayos reflejados correspondientes (café), el espejo (negro), la cáustica determinada por la prolongación virtual de los rayos de luz reflejados, que corresponde a la imagen de la fuente de luz puntual (cian), el observador (naranja) y la prolongación virtual de los rayos de luz reflejados (gris). Para este gráfico  $r_o = 1.26\hat{x} + 2.2\hat{z}$ ,  $r_s = 2\hat{z}$  y  $-1 \leq x \leq 1$ .

### 3.0.2. Espejo Parabólico

El trabajo central de esta tesis es calcular la imagen recibida por un observador cuando el espejo es parte de un paraboloides de foco  $a$ , y cuyo vector de posición está dado como

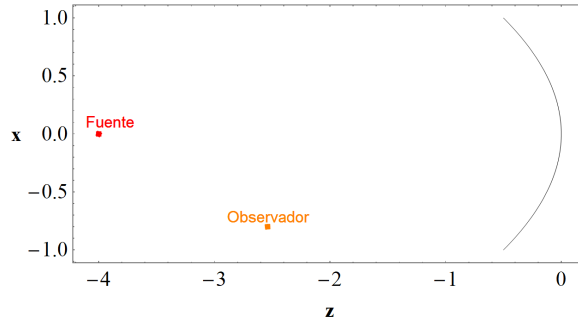
$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + \frac{x^2 + y^2}{2a}\hat{z}. \quad (3.41)$$

Es importante mencionar que se está trabajando con la fuente colocada en el eje óptico, mientras que el observador se encuentra en un punto arbitrario, por lo que ambos tendrán su vector de posición dado por

$$\mathbf{r}_s = z_s\hat{z}, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{r}_o = x_o\hat{x} + y_o\hat{y} + z_o\hat{z}, \quad (3.43)$$

respectivamente, observar figura 3.2.



**Figura 3.2:** Para el espejo parabólico, se muestra en  $y = 0$ : el espejo (negro), el observador (naranja) dado en  $r_o = -0.8\hat{x} - 2.54\hat{z}$  y la fuente puntual (rojo) colocada en  $r_s = -4\hat{z}$ .

Así, los rayos emitidos por la fuente puntual de luz que llegan al espejo parabólico están dados por

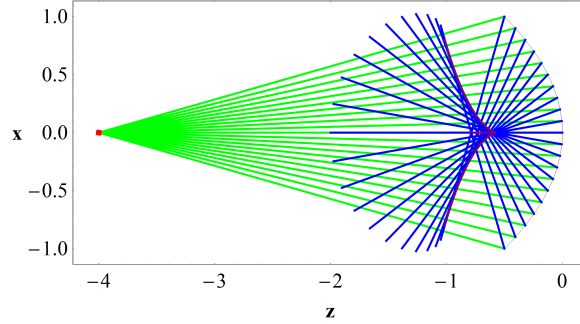
$$\mathbf{X} = \mathbf{r}_s + \tau(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s), \quad (3.44)$$

donde  $0 \leq \tau \leq 1$  es un parámetro que etiqueta cada punto de un rayo de luz emitido. Haciendo uso de las ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.41) un cálculo directo nos muestra que

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}(-x\hat{x} - y\hat{y} + a\hat{z}), \quad (3.45)$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(x^2+y^2)^2}{4a^2} - \frac{(x^2+y^2)z_s}{a} + z_s^2}} \left( x\hat{x} + y\hat{y} + \frac{x^2 + y^2 - 2az_s}{a}\hat{z} \right), \quad (3.46)$$

lo que nos permite calcular el vector  $\hat{R}$  para el caso del espejo parabólico, dado por



**Figura 3.3:** Para un espejo parabólico, se ilustra en el plano  $y = 0$ : la fuente puntual de luz (rojo) en el punto  $(0,0,-4)$ , los rayos incidentes (azul), el espejo parabólico (negro), los rayos reflejados (verde) y las dos ramas de la cáustica (morado).

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{2a^2x(a-2az_s)}{\omega} \hat{x} + \frac{2a^2y(a-2az_s)}{\omega} \hat{y} + \frac{3a^2(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2 + 2a^3z_s - 2a(x^2+y^2)z_s}{\omega} \hat{z}, \quad (3.47)$$

donde se ha definido

$$\omega = (a^2 + x^2 + y^2) \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 4a(x^2 + y^2)z_s + 4a^2(x^2 + y^2 + a^2)}$$

y entonces, haciendo uso de las ecuaciones (3.5) y (3.47) los rayos de luz reflejados pueden ser escritos de la siguiente manera

$$\mathbf{Y} = \left( x + l \frac{2a^2x(a-2az_s)}{\omega} \right) \hat{x} + \left( y + l \frac{2a^2y(a-2az_s)}{\omega} \right) \hat{y} + \left( \frac{x^2 + y^2}{2a} + l \frac{3a^2(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 + 2a^3z_s - 2a(x^2 + y^2)z_s}{\omega} \right) \hat{z}. \quad (3.48)$$

Utilizando el cambio a coordenadas polares ( $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ) y haciendo uso de las ecuaciones (3.17)- (3.21), (3.41) y (3.47), un cálculo directo muestra que las dos ramas del conjunto crítico, dado por el mapeo (3.48), están escritas como

$$l_1 = -\frac{(a^2 + r^2)(r^2 + 2az_s) \sqrt{r^4 - 4ar^2z_s + 4a^2(r^2 + z_s^2)}}{2a^2(a - 2az_s)(-3r^2 + 2az_s)}, \quad (3.49)$$

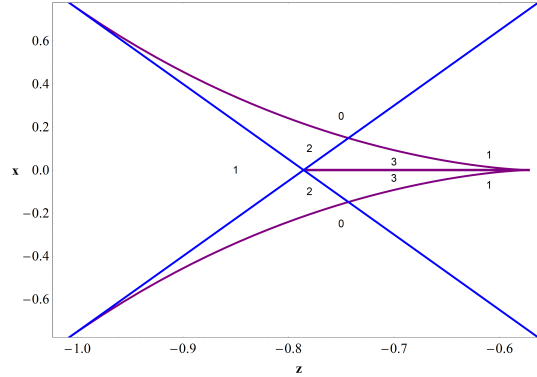
$$l_2 = -\frac{(a^2 + r^2) \sqrt{r^4 - 4ar^2z_s + 4a^2(r^2 + z_s^2)}}{2a^2(a - 2az_s)}. \quad (3.50)$$

Y el conjunto cáustico, que se obtiene al sustituir las ecuaciones (3.49) y (3.50) en la ecuación (3.48) (teniendo en cuenta aún el cambio que se hizo a coordenadas polares), es escrito de la siguiente manera

$$\mathbf{Y}_1 = -\frac{2a^2r^2 + r^4 + 2a^3z_s}{2a^2(a - 2z_s)} \hat{z}, \quad (3.51)$$

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{4r^3 \cos \theta}{3r^2 - 2az_s} \hat{x} + \frac{4r^3 \sin \theta}{3r^2 - 2az_s} \hat{y} - \frac{6a^2r^4 + r^6 + 6a^3r^2z_s - 6ar^4z_s + 4a^4z_s^2}{2a^2(a - 2z_s)(-3r^2 + 2az_s)} \hat{z}. \quad (3.52)$$

Como tenemos a la fuente puntual de luz colocada en el eje óptico, el sistema tiene simetría axial alrededor del eje  $z$ . Para este caso particular, en la Figura 3.3, se ilustra en el plano  $y = 0$ : la fuente



**Figura 3.4:** Para un espejo parabólico, en el plano  $y = 0$ , se presentan las diferentes regiones donde el observador recibe: cero, uno, dos o tres rayos de luz reflejados. En cada punto de la línea cáustica el observador recibe un círculo de rayos reflejados, mientras que en la cúspide cáustica recibe dos rayos reflejados.

puntual de luz (rojo) en el punto  $(0,0,-4)$ , los rayos incidentes (azul), el espejo parabólico (negro), los rayos reflejados (verde) y las dos ramas de la cáustica (morado). Este gráfico fue obtenido haciendo uso de las ecuaciones (3.2), (3.41), (3.44), (3.48), (3.51) y (3.52), con  $z_s = -4$ ,  $a = -1$ ,  $-1 \leq r \leq 1$  y  $\theta = \pi$ .

Además, en la Figura 3.4 se ilustran las diferentes regiones alrededor de las ramas de la cáustica, en las que un observador puede llegar a registrar cero, uno, dos, tres o incluso un círculo de rayos de luz reflejados. Tomando solo en cuenta los puntos sobre las ramas de la cáustica, es importante recalcar que en cada punto de la línea cáustica (3.51) el observador registra un círculo de rayos reflejados, mientras que en cada punto de la cúspide cáustica (3.52) sólo se observan dos rayos de luz reflejados.

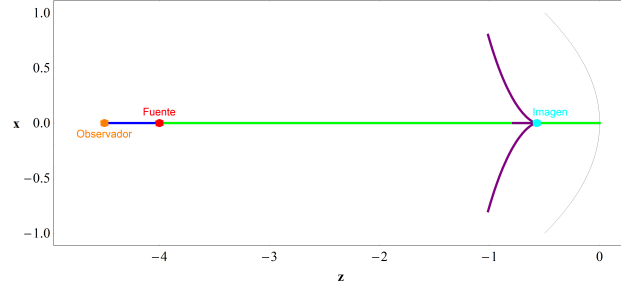
De las ecuaciones (3.47) y (3.48) vemos que para el caso del espejo parabólico las ecuaciones (3.13) y (3.14) toman la siguiente forma

$$(x - x_0)(3a^2(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 - 2az_s(x^2 + y^2) + 2a^3z_s) = ax(x^2 + y^2 - 2az_o)(a - 2z_s), \quad (3.53)$$

$$(y - y_0)(3a^2(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 - 2az_s(x^2 + y^2) + 2a^3z_s) = ay(x^2 + y^2 - 2az_o)(a - 2z_s). \quad (3.54)$$

Estas dos ecuaciones dan los valores  $x = \bar{x}_\mu$  y  $y = \bar{y}_\mu$ , que determinan las imágenes registradas por el observador. Como en este caso, cuando la fuente puntual de luz es colocada en el eje óptico del sistema y la cáustica es real, hay regiones donde el observador registra cero, uno, dos o tres rayos reflejados. Y como ya se había comentado anteriormente, en cada punto de la línea cáustica (3.51) el observador registra un círculo de rayos reflejados, mientras que en la cúspide cáustica (3.52), el observador registra dos rayos de luz reflejados exactamente. Esto significa que dependiendo de la ubicación del observador, éste puede recibir cero, uno, dos y tres imágenes puntuales o incluso una imagen circular.

Ahora vamos a calcular la posición de las imágenes registradas por el observador en las zonas descritas anteriormente. Esto es, calculamos la imagen cuando el observador se encuentra en el eje óptico y también cuando se encuentra en algún punto dentro de las diferentes zonas dadas por la Figura 3.4 y en los puntos de la región cáustica. Cuando el observador se encuentra en el eje óptico tenemos que  $x_o = 0$  y  $y_o = 0$ . Así, bajo estas condiciones y haciendo el cambio a coordenadas polares ( $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ) un cálculo directo muestra que las soluciones a las



**Figura 3.5:** Para el espejo parabólico, en el plano  $y = 0$  se presenta al observador (naranja), la fuente (rojo), la imagen vista por el observador (cian), las dos ramas de la cáustica (morado), el espejo (negro), un rayo de luz emitido (verde) en el eje óptico y el rayo de luz reflejado correspondiente (azul) que llega al observador

ecuaciones (3.53) y (3.54) están dadas como

$$\bar{r} = 0, \quad (3.55)$$

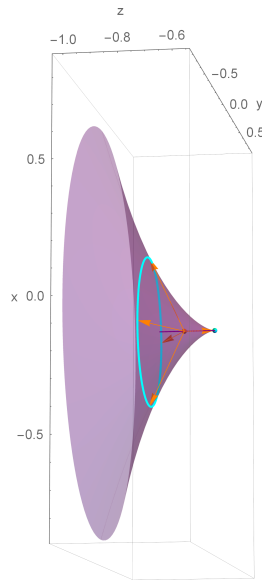
$$\bar{r} = -\sqrt{-a^2 - \sqrt{a^2(a - 2az_0)(a - 2z_s)}}, \quad (3.56)$$

$$\bar{r} = -\sqrt{-a^2 + \sqrt{a^2(a - 2az_0)(a - 2z_s)}}, \quad (3.57)$$

$$\bar{r} = \sqrt{-a^2 + \sqrt{a^2(a - 2az_0)(a - 2z_s)}}, \quad (3.58)$$

$$\bar{r} = \sqrt{-a^2 - \sqrt{a^2(a - 2az_0)(a - 2z_s)}}. \quad (3.59)$$

Para calcular la imagen correspondiente a estas soluciones, tenemos que considerar las diferentes posiciones del observador a lo largo del eje óptico. De la Figura 3.4 vemos que cuando  $0 < z_o \leq (\mathbf{Y}_1 \cdot \hat{z})(r = 0) = (az_s)/(2z_s - a) = -4/7$ , el observador sólo recibe un rayo de luz reflejado, que corresponde a la solución (3.55), la posición de la imagen es obtenida sustituyendo (3.55) en las dos ramas de la cáustica, las ecuaciones (3.51) y (3.52).



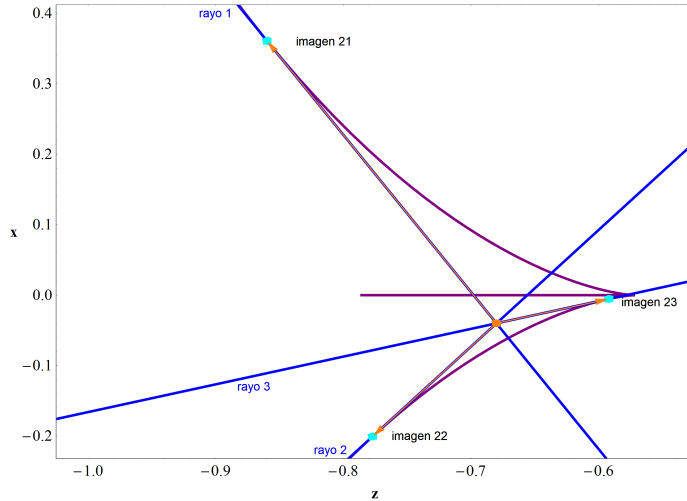
**Figura 3.6:** Para el espejo parabólico se presenta las dos ramas de la cáustica, la línea y la cúspide cáustica (morado), el observador (naranja) en la línea cáustica y la imagen circular (vista) por éste.

Un cálculo directo muestra que ambas ramas de la cáustica proveen el mismo vector de posición para la imagen, este es

$$\mathbf{y}_0 = \frac{az_s}{2z_s - a} \hat{z} = -\frac{4\hat{z}}{7}, \quad (3.60)$$

en la Figura 3.5 se muestra un esquema de un caso particular cuando el observador está colocado en  $r_o = -4.5\hat{z}$  y el espejo sólo recibe un rayo de luz.

La segunda región de interés en el eje óptico está determinada por la línea cáustica. Entonces, si  $(\mathbf{Y}_1 \cdot \hat{z})(r=0) = (az_s)/(2z_s - a) = -4/7 < z_o \leq (\mathbf{Y}_1 \cdot \hat{z})(r=1) = -(2a^2(1 + az_s) + 1)/(2a^2(a - 2z_s)) = -11/14$ , el observador recibe un rayo de luz reflejado correspondiente a la solución (3.55) y un círculo de rayos de luz reflejado correspondiente a la solución de la ecuación (3.58). Es importante aclarar que las ecuaciones (3.56) y (3.59) no entregan soluciones con sentido físico (arrojan números imaginarios), por lo que se descartan. Y se elige (3.58) sobre (3.57) por la conveniencia de no tener el signo menos de esta última ecuación.



**Figura 3.7:** Para el espejo parabólico, en el plano  $y = 0$  se ilustra: la cúspide cáustica (morado), el observador (naranja) colocado en  $r_o = -0.04\hat{x} - 0.68\hat{z}$ , los tres rayos de luz reflejados (azul) que llegan al observador y las tres imágenes puntuales (cian) vistas por éste

Así, en este caso el observador registra la imagen dada por la ecuación (3.60) y las imágenes dadas por las soluciones de la ecuación (3.58). Sustituyendo la ecuación (3.58) en la ecuación (3.51) encontramos que la posición de una segunda imagen está dada por  $\mathbf{y}_2 = z_o\hat{z}$ , esto es, está colocada en la posición del observador. La posición de la otra imagen dada por la otra rama de la cáustica es obtenida al sustituir la ecuación (3.58) en la ecuación (3.52), esto es

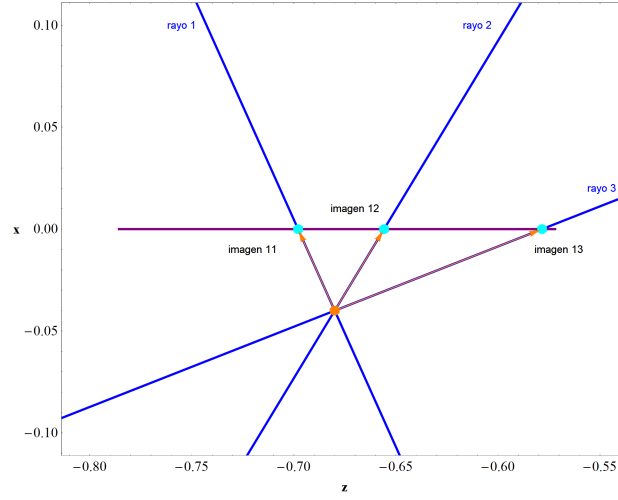
$$\mathbf{y}_3 = \rho_3(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) + z_3\hat{z}, \quad (3.61)$$

donde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , y se tiene que

$$\rho_3 = \frac{4\left(-a^2 + \sqrt{a^2(a-2z_o)(a-2z_s)}\right)^{3/2}}{-3a^2 + 3\sqrt{a^2(a-2z_o)(a-2z_s)} - 2az_s}, \quad (3.62)$$

$$z_3 = \frac{-4a^3 + 4a\sqrt{a^2(a-2z_o)(a-2z_s)} + z_o\sqrt{a^2(a-2z_o)(a-2z_s)} - 6az_oz_s + a^2(3z_o + 4z_s)}{3a^2 - 3\sqrt{a^2(a-2z_o)(a-2z_s)} + 2az_s}. \quad (3.63)$$

La ecuación (3.61) corresponde a un círculo de radio  $\rho_3$  y con centro en  $(0, 0, z_3)$ . Para ilustrar el caso en el que el observador está localizado en un punto dentro de la línea cáustica, en la Figura 3.6 se presenta en el plano  $y = 0$ : el observador colocado en  $r_o = -0.69\hat{z}$ , las dos ramas de la cáustica



**Figura 3.8:** Para el espejo parabólico, en el plano  $y = 0$  se ilustra: la línea cáustica (morado), el observador (naranja) colocado en  $r_o = -0.04\hat{x} - 0.68\hat{z}$ , los tres rayos de luz reflejados (azul) que llegan al observador y las tres imágenes puntuales (cian) vistas por éste

(morado), la imagen puntual (cian) y la imagen circular (cian) registradas por el observador. Nótese que en esta figura no se ha incluido la imagen puntual correspondiente al punto  $r_o = -0.69$ .

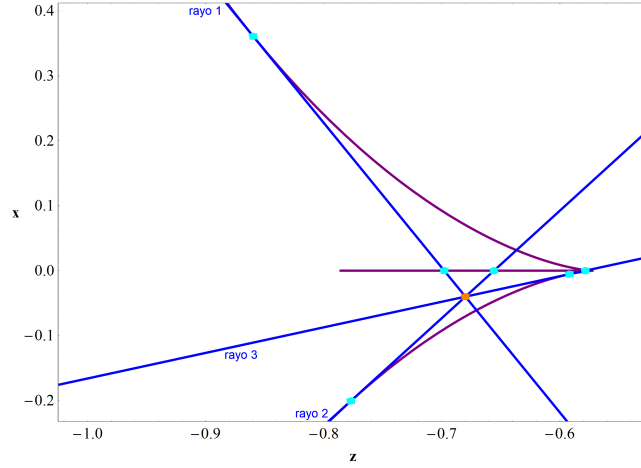
El último caso que nos interesa estudiar es cuando el observador se encuentra colocado fuera de las ramas de la cáustica, como nos muestra la Figura 3.4 dependiendo de la posición del observador éste puede llegar a registrar uno, dos o tres rayos de luz reflejados. Comencemos estudiando la región en la que el observador recibe tres rayos de luz reflejados en una posición determinada. Para esto, proponemos dicha posición en  $r_o = -0.04\hat{x} - 0.68\hat{z}$ . Un cálculo numérico muestra que las soluciones a las ecuaciones (3.53) y (3.54) están dadas por  $\bar{y}_\mu = 0$  y  $\bar{x}_1 = -0.815$ ,  $\bar{x}_2 = 0.691$ ,  $\bar{x}_3 = 0.218$ . Las imágenes correspondientes son obtenidas al sustituir estos puntos en las ecuaciones (3.51) y (3.52). Para la primera ecuación un cálculo directo nos muestra que la posición de las imágenes localizadas en la línea cáustica está dada por

$$\mathbf{y}_{11} = -0.698\hat{z}, \quad \mathbf{y}_{12} = -0.656\hat{z}, \quad \mathbf{y}_{13} = -0.578\hat{z}, \quad (3.64)$$

La Figura 3.8 ilustra esto al mostrar las tres imágenes puntuales (cian) dadas por (3.64), localizadas en la línea cáustica (morado) y que están determinadas por los rayos de luz reflejados (azul) que alcanzan al observador. Para la segunda ecuación un cálculo directo nos muestra que la posición de las imágenes localizadas en la cúspide cáustica está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{21} &= 0.36\hat{x} - 0.859\hat{z}, \\ \mathbf{y}_{22} &= -0.2\hat{x} - 0.777\hat{z}, \\ \mathbf{y}_{23} &= -0.005\hat{x} - 0.592\hat{z}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

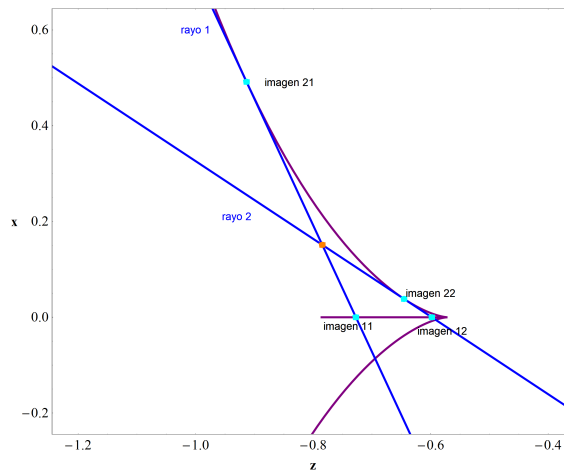
La Figura 3.7 ilustra esto al mostrar las tres imágenes puntuales dadas por la ecuación (3.65), localizadas en la cúspide cáustica (morado) y que están determinadas por los rayos de luz reflejados (azul) que alcanzan al observador. Es importante observar que en este caso, cada uno de los tres rayos reflejados que alcanza al observador toca ambas ramas de la cáustica en un punto determinado, produciendo las seis imágenes puntuales que se ilustran en la Figura 3.9. A pesar de esto, el observador únicamente podrá ver una sola imagen puntual correspondiente por cada uno de los tres rayos reflejados, esto debido a que las imágenes producidas por un mismo rayo se superponen al estar en la misma dirección en que las registra el observador. Continuando con el análisis, pasamos al caso en el que el observador está colocado en una región en la que solo



**Figura 3.9:** Para el espejo parabólico, en el plano  $y = 0$  se ilustra: la dos ramas de la cáustica (morado), el observador (naranja) colocado en  $r_o = -0.04\hat{x} - 0.68\hat{z}$ , los tres rayos de luz reflejados (azul) que llegan al observador y las seis imágenes puntuales (cian) registradas por el observador.

recibe dos rayos de luz reflejados. Proponemos dicha posición en  $r_o = 0.151\hat{x} + 0.784\hat{z}$ . Un cálculo numérico muestra que las soluciones a las ecuaciones (3.53) y (3.54) están dadas por  $\bar{y}_\mu = 0$  y  $\bar{x}_1 = -0.885$ ,  $\bar{x}_2 = -0.415$ . Las imágenes correspondientes son obtenidas al sustituir estos puntos en las ecuaciones (3.51) y (3.52). Para la primera ecuación un cálculo directo nos muestra que la posición de las imágenes localizadas en la línea cáustica está dada por

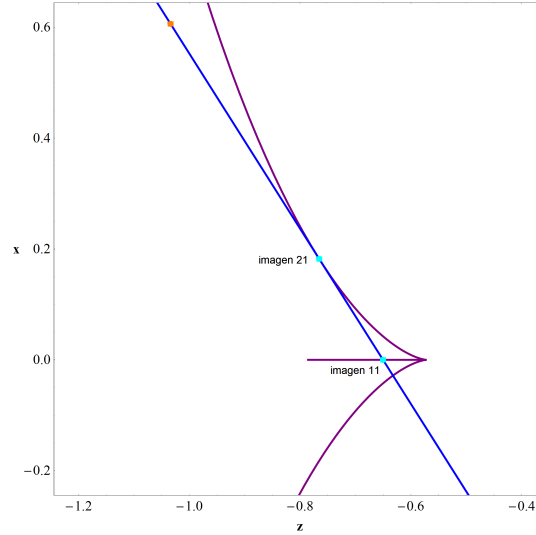
$$\mathbf{y}_{11} = -0.727\hat{z}, \quad \mathbf{y}_{12} = -0.598\hat{z}, \quad (3.66)$$



**Figura 3.10:** Para el espejo parabólico se presenta en el plano  $y = 0$ : las dos ramas de la cáustica (morado), el observador (naranja) posicionado en  $r_o = 0.151\hat{x} + 0.784\hat{z}$ , los dos rayos de luz reflejados (azul) que llegan al observador y las 4 imágenes puntuales (cian)

Para la segunda ecuación un cálculo directo nos muestra que la posición de las imágenes localizadas en la cúspide cáustica está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{21} &= 0.492\hat{x} - 0.913\hat{z}, \\ \mathbf{y}_{22} &= 0.038\hat{x} - 0.645\hat{z}, \end{aligned} \quad (3.67)$$



**Figura 3.11:** Para el espejo parabólico se presenta en el plano  $y = 0$ : el observador (naranja) en el punto  $r_o = 0.606\hat{x} - 1.034\hat{z}$ , las dos ramas de la cáustica (púrpura), el rayo de luz reflejado (azul) y las dos imágenes puntuales (cian)

La Figura 3.10 ilustra esto al presentar en el plano  $y = 0$ : las dos ramas de la cáustica (morado), el observador (naranja) posicionado en  $r_o = 0.151\hat{x} + 0.784\hat{z}$ , los dos rayos de luz reflejados (azul) que llegan al observador y las dos imágenes puntuales localizadas en la línea cáustica (cian) y las dos imágenes puntuales localizadas en la cúspide cáustica (cian). Semejante al caso anterior, de las cuatro imágenes producidas por los dos rayos reflejados el observador solo registrará dos imágenes puntuales, esto por razones anteriores ya mencionadas.

Finalmente analizamos el caso en el que el observador está colocado en una región en la que solo recibe un solo rayo de luz reflejado. Para este propósito, colocamos al observador en  $r_o = 0.606\hat{x} - 1.034\hat{z}$ . Un cálculo directo muestra que la única solución aceptable para las ecuaciones (3.53) y (3.54) está dada por  $\bar{y}_1 = 0$  y  $\bar{x}_1 = -0.671$ . La imagen correspondiente es obtenida al sustituir este punto en las ecuaciones (3.51) y (3.52). Para la primera ecuación un cálculo directo nos muestra que la posición de la imagen localizada en la línea cáustica está dada por

$$\mathbf{y}_{11} = -0.65\hat{z}. \quad (3.68)$$

Para la segunda ecuación un cálculo directo nos muestra que la posición de la imagen localizada en la cúspide cáustica está dada por

$$\mathbf{y}_{21} = 0.182\hat{x} - 0.766\hat{z}, \quad (3.69)$$

La Figura 3.11 ilustra esto al presentar en el plano  $y = 0$ : el observador (naranja), las dos ramas de la cáustica (púrpura), el rayo de luz reflejado (azul) y la imagen puntual localizada en la línea cáustica y la imagen puntual localizada en la cúspide cáustica (cian).

## Capítulo 4

# Conclusiones

En este trabajo se ha propuesto que en el espacio libre se tiene un observador colocado en el eje óptico del sistema, un espejo parabólico y un objeto arbitrario tratado bajo la aproximación de la óptica geométrica que lo reduce a una fuente puntual, haciendo así que éste emita una familia de rayos de luz. Como se ha revisado cada rayo de luz es reflejado de acuerdo a la ley de reflexión, donde cierta cantidad de estos rayos de luz alcanzarán al observador. Estos rayos que se registran serán vistos como imágenes para el observador localizadas en aquellos puntos donde estos rayos tocan a la cáustica. Se establecieron las ecuaciones para el cálculo de estas imágenes, como resultado principal se obtuvo que la cáustica es real y está formada por dos ramas: la línea y la cúspide cáustica. Utilizando este resultado se analizaron las regiones fuera y dentro de la cáustica para las cuales dependiendo de la posición del observador éste recibe: cero, uno, dos, tres o un círculo de rayos reflejados. Se mostraron ejemplos numéricos en detalle para el cálculo de las imágenes de todos estos casos mencionados. Como parte del seguimiento a este trabajo, cuando la fuente puntual de luz está fuera del eje óptico la cáustica no es estable, por lo que sería enriquecedor calcular la posición de las imágenes producidas por el espejo parabólico en dicha situación.



## Apéndice A

# Apéndice: Camino Óptico

Suponemos que tenemos un material estratificado compuesto de  $m$  capas, cada una con un índice de refracción diferente. El tiempo de recorrido de S a P será entonces

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \cdots + \frac{s_m}{v_m} \quad (\text{A.1})$$

o bien

$$t = \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{v_i} \quad (\text{A.2})$$

donde  $s_i$  y  $v_i$  serán respectivamente la longitud de camino y la velocidad asociadas a la  $i$ -ésima contribución. Así

$$t = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^m n_i s_i, \quad (\text{A.3})$$

en la cual la suma es conocida como la **longitud de camino óptico** recorrida por el rayo, en contraste con la longitud de trayectoria espacial  $\sum_{i=1}^m s_i$ . Claramente, para un medio inhomogéneo donde  $n$  es función de la posición, la suma debe ser cambiada por una integral

$$OPL = \int_s^p n(s) ds, \quad (\text{A.4})$$

**El camino óptico representa la distancia recorrida por la luz en el vacío en el mismo tiempo que atraviesa la distancia  $s$  en el medio con índice  $n$ .** Es decir, ambas distancias corresponderán al mismo número de longitudes de onda,  $\frac{OPL}{\lambda_0} = \frac{s}{\lambda}$ , y el mismo cambio de fase a medida que la luz avanza.



# Bibliografía

- [1] E. Hecht, *ÓPTICA* (5ta edición, Pearson, 2017)
- [2] R. G. González-Acuña y H. A. Chaparro-Romo, *Stigmatic Optics* (1ra edición, IOP Publishing, 2020)
- [3] M. Born y E. Wolf, *Principles of Optics* (7ma edición, Cambridge University Press, 1999).
- [4] F. Jenkins y H. White, *Fundamentals of Optics* (4ta edición, McGraw-Hill, 1976).
- [5] J. Castro-Ramos, S. A. Juárez-Reyes, M. Marcelino-Aranda, P. Ortega-Vidals, G. Silva-Ortigoza, R. Silva-Ortigoza y R. Suárez-Xique, The refraction and reflection laws from a complete integral of the eikonal equation and Huygens' principle, *J. Opt.* 17 (2014) 015601.
- [6] D. G. Burkhard y D. L. Shealy, Flux density for ray propagation in geometrical optics, *J. Opt. Soc. Am. A* 63 (1973) 299-304.
- [7] J. Castro-Ramos, O. de Ita-Prieto y G. Silva-Ortigoza, Computation of the disk of least confusion for conic mirrors, *Appl. Opt.* 43 (2004) 6080–9.
- [8] E. Román-Hernández, J. G. Santiago-Santiago, G. Silva-Ortigoza, R. Silva-Ortigoza y J. Velázquez-Castro, Describing the structure of ronchigrams when the grating is placed at the caustic region: The parabolical mirror, *J. Opt. Soc. Am. A* 27 (2010) 832–45.
- [9] M. V. Berry, Disruption of images: the caustic-touching theorem, *J. Opt. Soc. Am. A* 4 (1987) 561-569.
- [10] E. Román-Hernández, J. G. Santiago-Santiago, G. Silva-Ortigoza y R. Silva-Ortigoza, Wavefronts and caustic of a spherical wave reflected by an arbitrary smooth surface, *J. Opt. Soc. Am. A* 26 (2009) 2295–305
- [11] D. L. Shealy y J. A. Hoffnagle, Wavefront and caustics of a plane wave refracted by an arbitrary surface, *J. Opt. Soc. Am. A* 25 (2008) 2370–82.
- [12] G. Silva-Ortigoza, I. Julián-Macías, A. González-Juárez, E. Espíndola-Ramos, R. Silva Ortigoza y M. Marciano-Melchor, Exact mirror equation, *J. Opt. Soc. Am. A* 9 (2022) 1364-10.
- [13] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade y A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps, Volume 1*, (Birkhäuser, Boston, 2012).