Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Una Introducción a la teoría de la dinámica holomorfa

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas

por

Fernando Zayas Herrera

Directora de Tesis

Dra. Patricia Domínguez Soto

Puebla Pue.
31 de marzo de 2023

Título: Una Introducción a la teoría de la dinámica holomorfa
Estudiante: Fernando Zayas Herrera

COMITÉ

Dra. Laura Angélica Cano Cordero
Presidente

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres
Secretario

Dr. Fernando Macías Romero
Vocal

Dra. Patricia Domínguez Soto
Directora

Agradecimientos

A mi esposa, por todo su amor, comprensión, paciencia, y apoyo; por sus palabras de aliento y principalmente por confiar en mi, por estar incondicionalmente.

A mi madre y padre, por brindarme su amor, su apoyo y la oportunidad de conocer el maravilloso mundo de las matemáticas.

A mis amigos y compañeros, por todo su apoyo incondicional a lo largo de la carrera.

A la Dra. Patricia Domínguez Soto, por brindarme la oportunidad de trabajar juntos en esta tesis.

A mis sinodales, Dra. Laura Angélica Cano Cordero, Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, y Dr. Fernando Macías Romero, por aceptar serlo y por su tiempo dedicado a la revisión de esta tesis.

Índice general

Resumen

En las últimas décadas del siglo XX se retomó el estudio de la dinámica holomorfa, que supuso un importante desarrollo para las clases de funciones trascendentes enteras y trascendentes meromorfas. Las propiedades y sus demostraciones de los conjuntos de Fatou y Julia se encuentran dispersas en diversos libros y artículos relacionados con la dinámica de funciones racionales, funciones trascendentes enteras y funciones trascendentes meromorfas.

En esta tesis se da una introducción a la teoria de variable compleja y a la dinámica holomorfa de funciones trascendentes enteras, Se presentan los conjuntos de Fatou y Julia, algunas de sus propiedades y se dan algunos ejemplos de estos conjuntos. La tesis se conforma de tres capítulos.

El primer capítulo contiene los preliminares, donde se enuncian definiciones y algunos resultados del campo de los números complejos, culminando con las definiciones y resultados de sucesiones y series de funciones complejas.

En el capítulo 2 se presentan definiciones y resultados relacionados con funciones de variable compleja, este capítulo da pie a la introducción de la dinámica holomorfa con la definición de función analítica y su relación con las series de potencias.

Finalmente, en el capítulo 3 se definen los conceptos de iteración, puntos fijos, los conjuntos de Fatou y Julia, algunas propiedades básicas y ejemplos de estos conjuntos.

Introducción

En muchas áreas de investigación matemática se encuentran fenómenos repetitivos o cíclicos que dependen de cierta condición o condiciones que llamamos parámetros y que, al cambiar algunos de estos parámetros se presenta una forma distinta del fenómeno estudiado. Este comportamiento puede ser estudiado matemáticamente mediante el análisis de los sistemas dinámicos.

La teoría de Sistemas Dinámicos Holomorfos tiene sus inicios en el siglo XX, motivado por el análisis de la convergencia para el método de Newton, sin embargo, los trabajos de Pierre Fatou (1878-1929) y Gaston Julia (1893-1978), fueron el cimiento para que la teoría global de la iteración de funciones racionales se estudiará de manera formal.

Una aplicación importante que tienen los trabajos antes mencionados fue el uso de la teoría de las familias normales para dividir la esfera de Riemann en dos conjuntos de comportamiento dinámico distinto, llamados conjunto Estable y conjunto Inestable, hoy conocidos como los conjuntos de Fatou y Julia en honor a los matemáticos antes mencionados.

El estudio del comportamiento dinámico de clases de funciones sobre la esfera de Rieman comenzó en el siglo XX , por los matemáticos franceses Pierre Fatou y Gaston Julia, los cuales definieron dos conjuntos que hoy llevan su nombre. El principal campo de estudio de estos dos matemáticos fue la iteración de funciones racionales sobre la esfera de Riemann.

El trabajo de tesis de Paul Montel (1876-1975), matemático francés, les permitió dividir la esfera en dos conjuntos: el conjunto estable, que es el conjunto de puntos del plano complejo tales que su sucesión de iteraciones está bien definida y es normal en alguna vecindad de dicho punto, y el conjunto inestable o caótico que es el complemento del conjunto estable.

Pierre Fatou y Gaston Julia estudiaron propiedades de los conjuntos estable y caótico para funciones racionales entre 1918-1920. Posteriormente en 1926 Pierre Fatou extiende los resultados obtenidos a funciones enteras trascendentes, es decir extiende las propiedades.

En está tesis se expondrán dos propiedades de los conjuntos de Fatou y Julia para funciones enteras trascendentes.

En el primer capítulo se define el campo de los números complejos, denotado por $\mathbb{C}$, se enuncian sus operaciones, propiedades, estructura, y se enuncia la notación exponencial. Se define el plano complejo, se representan conjuntos en él, se concretan algunas definiciones topológicas y se define la esfera de Riemann, que permite introducir el punto ∞ en el plano complejo, insistiendo en la diferencia en el concepto de infinito en la recta real, que es un conjunto totalmente ordenado con $-\infty$ y $+\infty$, y el concepto de infinito en el plano complejo.

En el segundo capítulo se definen las funciones complejas. Se extienden al plano complejo las funciones reales, y se define la derivada de una función compleja, que es de importancia fundamental dentro de la teoría, poniendo especial atención en presentar las diferencias existentes entre la derivada de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, las funciones de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y la derivada compleja. Se introduce el concepto de función holomorfa. Se enfatiza que las funciones holomorfas en un conjunto abierto tienen propiedades que las diferencian de las funciones reales, como el ser funciones analíticas, es decir desarrollable en serie de potencias en los puntos de ese abierto; va a ser infinitamente derivable en los puntos de su dominio donde es holomorfa.

Se definen las funciones analíticas en un punto z_0 como funciones desarrollables en series de potencias en un entorno de z_0 y se mencionan algunas de sus propiedades; como, por ejemplo, el hecho de que una función analítica es infinitamente derivable.

El objetivo fundamental del capítulo 3 es introducir los conceptos de los conjuntos de Fatou y Julia, enunciar y demostrar dos de sus propiedades básicas y algunos ejemplos. El punto de partida para definir los conjuntos antes mencionados son los espacios de funciones continuas y funciones holomorfas (analíticas), así como los conceptos de equicontinuidad y familia normal para cada uno de los espacios mencionados, utilizando todas las herramientas de los 2 capítulos anteriores.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. El campo de los números Complejos.

El campo de los números reales presenta algunas deficiencias, como por ejemplo, la no solución de ecuaciones polinomiales como $x^2 + 1 = 0$. Los números complejos surgen para encontrar solución a ecuaciones algebraicas de este tipo, y, a partir de su aparición, fueron objeto de estudio con los fines de extender las nociones del cálculo a un ambiente más general. Es así como se fueron desarrollando los conceptos de funciones de variable compleja, y sus operaciones de límites, derivación e integración. Pronto se advirtió también la sencilla forma en que, mediante simples operaciones algebraicas entre números complejos, podía llevarse a cabo movimientos del plano como rotaciones, traslaciones, simetrías, etc., dando origen a nuevos campos de estudio y aplicaciones de los números complejos.

A continuación, se definen los números complejos, y se expone la estructura algebraica y geométrica de los mismos. Se mencionan distintas formas de representarlos, y se extienden muchas de las nociones que se conocen para números reales.

Definición 1. *[14] El* **sistema de números complejos***, denotado por $\mathbb{C}$, es el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las operaciones binarias* **suma** *$(+)$ y* **producto** *$(\cdot)$ definidas como:*
Sean $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$, entonces:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2).$$

Un número complejo es un par ordenado de números reales, y el conjunto de todos los números complejos está definidodo por:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : \; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

En otras palabras, si z es un número complejo, debe ser $z = (a, b)$ en donde a y b son ambos números reales; a se denomina la **parte real** de z denotada mediante $\mathfrak{Re}\,\mathbf{z}$, y b se denomina la parte **imaginaria** de z denotada mediante $\mathfrak{Im}\,\mathbf{z}$.

A partir de ahora omitiremos el punto para denotar un producto de números complejos.

Como observamos de la definición anterior, las operaciones binarias $+$ y $\cdot$ son operaciones cerradas en $\mathbb{C}$. Si $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$, gracias a las propiedades de conmutatividad y asociatividad de la suma y el producto de los números reales y la distributividad del producto respecto de la suma de los mismos, se deducen la conmutatividad de la suma y el producto, la asociatividad de ambas operaciones y la distributividad del producto respecto a la suma en $\mathbb{C}$.

El **elemento neutro de la suma** es $(0, 0)$, y el **elemento neutro del producto** es $(1, 0)$, que son únicos.

Cualquier número complejo $z = (a, b)$ posee un único **inverso para la suma**, que se llama el **opuesto** de z y se denota por $-z$, siendo $-z = (-a, -b)$.

Cualquier número complejo $z = (a, b) \neq (0, 0)$ posee un único **inverso para el producto**, que se denomina el **inverso de** z y se denota por z^{-1} donde:

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

Todas estas propiedades llevan a que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un campo conmutativo.

Observación 2. *A los elementos de* $\mathbb{R}^2$ *se les llama unas veces pares ordenados de números reales, otras vectores o puntos y también números complejos. La razón de esto es que en* $\mathbb{R}^2$ *conviven varias estructuras cada una con su terminología propia. Los elementos de* $\mathbb{R}^2$ *se les llama vectores, si se está considerando la estructura de espacio vectorial, puntos si fijamos la atención en la estructura topológica, pares ordenados cuando estamos pensando en* $\mathbb{R}^2$ *como conjunto sin ninguna estructura particular y números complejos cuando se considera la estructura de campo antes definida.*

Una diferencia esencial que presenta $\mathbb{C}$ en relación con el campo de los números reales consiste en que no se introduce un orden en $\mathbb{C}$, por lo que expresiones tales como $z_1 < z_2$, con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, no tienen sentido.

1.2. Los reales como subconjunto de los complejos.

A partir de la definición de número complejo, podría inferirse que un número real no pertenece a $\mathbb{C}$. Sin embargo, veremos cómo un subconjunto de los complejos se comporta (en sentido algebraico) igual que los números reales, y eso nos permitirá ver a $\mathbb{R}$ como subconjunto de $\mathbb{C}$.

Llamaremos complejos reales a los números complejos con parte imaginaria cero. Sea $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ el conjunto de todos estos números, es decir,

$$\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \{(a, 0) \in \mathbb{C} : a \in \mathbb{R}\}.$$

La función $f : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ definida por $f((a, 0)) = a$, asigna a cada complejo real su primera componente. Esta aplicación es biyectiva y además un isomorfismo de $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ en $\mathbb{R}$, respecto de la suma y del producto. En efecto, sean $z_1 = (a_1, 0)$ y $z_2 = (a_2, 0)$; entonces,

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= f((a_1, 0) + (a_2, 0)) \\ &= f(a_1 + a_2, 0) \\ &= a_1 + a_2 \\ &= f((a_1, 0)) + f((a_2, 0)) \\ &= f(z_1) + f(z_2). \end{aligned}$$

Además, tenemos:

$$\begin{aligned} f(z_1 z_2) &= f((a_1, 0)(a_2, 0)) \\ &= f(a_1 a_2, 0) \\ &= a_1 a_2 \\ &= f((a_1, 0))f((a_2, 0)) \\ &= f(z_1)f(z_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos indistinguibles desde el punto de vista algebraico, y, en este sentido, podemos considerar a los reales como inmersos en el conjunto de los complejos. Este isomorfismo permite identificar cada complejo real con el real correspondiente a su parte real, siendo conveniente en la práctica escribir al complejo $(a, 0)$ directamente como a; en particular, $(0, 0) = 0$ y $(1, 0) = 1$.

Ahora resulta más natural que para cualesquiera $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b).$$

Definición 3. *[14] Para $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, se dfine la n-ésima potencia de z, denotada z^n, como:*

$$z^n = \begin{cases} z & \text{si } n = 1, \\ zz^{n-1} & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Además, para cualquier complejo $z \neq 0$, se define:

a) $z^0 = 1$.

b) Si $n < 0$, entonces $z^n = (z^{-1})^{|n|}$.

1.3. Forma binómica de los números complejos.

Los números complejos que tienen parte real igual a cero se llaman números imaginarios puros. En particular, el número complejo imaginario puro que tiene componente imaginaria igual a 1 se llama **unidad imaginaria**, y se denota mediante i; es decir, $\mathbf{i} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$, que satisface que $i^2 = -1$.

En virtud del isomorfismo entre los complejos reales y los reales, y de que $i = (0, 1)$, cualquier complejo $z = (a, b)$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} z &= (a, b) \\ &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \\ &= a + bi. \end{aligned}$$

Cuando un complejo (a, b) se expresa en la forma $a + bi$, se dice que está expresado en **forma binómica**. La conveniencia de dicha forma es que facilita los cálculos algebraicos, evitando el uso de pares ordenados, que requieren recordar las fórmulas de adición y producto. Por lo tanto, se tiene que:

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Para cada $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tenemos:

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

A partir de ahora denotaremos al conjunto $\mathbb{C} - \{0\}$ como $\mathbb{C}^*$ y usaremos la forma binómica de los números complejos, a menos que se diga lo contrario.

Observemos que las potencias sucesivas de i son:

$$i^0 = 1 \qquad i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1.$$

En general, si el exponente de i es un número natural $p > 3$, al aplicar el algoritmo de la división para p y 4 existen $q, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $p = 4q + r$, con $0 \leq r < 4$. En consecuencia:

$$i^p = i^{4q+r} = i^{4q} i^r = (i^4)^q i^r = (1) i^r = i^r.$$

Definición 4. *[7] Sea $z = x + yi \in \mathbb{C}$, su* **conjugado** *es:*

$$\bar{z} = x - yi.$$

Proposición 5. *[7] Para cada $z, w \in \mathbb{C}$, se cumplen las siguietes propiedades:*

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
3. $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$.
4. $\mathfrak{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ *y* $\mathfrak{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
5. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, $(w \neq 0)$.

Definición 6. *[8] Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, el* **módulo** *de z, es:*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Proposición 7. *[8] Para cada $z, w \in \mathbb{C}$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $|z| = |\overline{z}|$.
2. $|zw| = |z||w|$.
3. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.
4. $|z^{-1}| = |z|^{-1}, \ (z \neq 0)$.
5. $|z| = |-z|$.
6. $|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$ *y* $|\mathfrak{Im}(z)| \leq |z|$.
7. $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \ (z \neq 0)$.
8. $|z + w| \leq |z| + |w|$. *(***Desigualdad del triángulo***).*

1.4. Los complejos como espacio vectorial.

El conjunto de los números complejos, con las operaciones de suma de complejos y producto de complejo por un escalar real $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$, constituye un espacio vectorial sobre el campo de los reales, porque se verifican los axiomas correspondientes.

Para cada $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, y para cada $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, se cumplen:

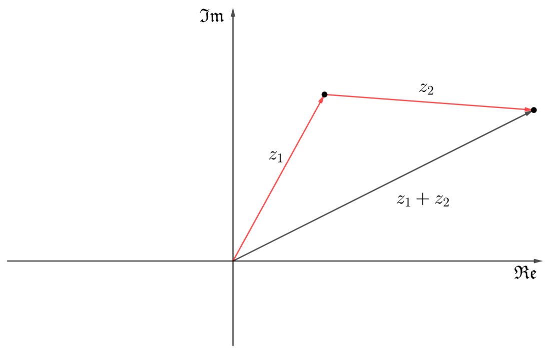
1. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
3. $0 + z_1 = z_1$.
4. $z_1 + (-z_1) = 0$.
5. $\lambda(z_1 + z_2) = \lambda z_1 + \lambda z_2$.
6. $(\lambda + \alpha)z_1 = \lambda z_1 + \alpha z_1$.
7. $\lambda(\alpha z_1) = (\lambda\alpha)z_1$.
8. $1z_1 = z_1$.

Se deduce que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$, con las operaciones habituales de suma y producto por un escalar, son isomorfos como espacios vectoriales sobre el campo de los reales, considerando a la función $f((x, y)) = (x, y)$. Debido a este isomorfismo, un número complejo puede verse como un punto o como un vector en el plano.

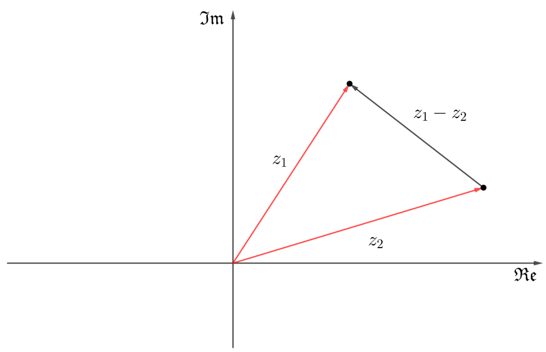
El módulo de un número complejo es la distancia entre el punto que representa al complejo y el origen de coordenadas.

Cuando los números complejos se consideran en correspondencia uno a uno con los puntos del plano cartesiano, al plano se lo denomina **plano complejo**. Los ejes de coordenadas se llaman **eje real** y **eje imaginario** del plano complejo.

Puesto que la suma de números complejos se lleva a cabo sumando componente a componente, la suma de complejos corresponde a la suma de vectores de acuerdo con la regla del paralelogramo. Entonces, el vector $z_1 + z_2$ es una de las diagonales del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores z_1 y z_2, véase figura 1.1(a).



(a) Desigualdad del triángulo.



(b) Geométria de $z_1 - z_2$.

Figura 1.1: Geométria de la suma y resta.

El vector $z_1 - z_2$ es la otra diagonal del paralelogramo que tiene como lados adyacentes a los vectores z_1 y z_2, es el vector que va desde z_2 hasta z_1, como puede verse al construir el paralelogramo correspondiente a la suma de z_1 y $-z_2$, véase figura 1.1(b).

Se deduce entonces que la distancia entre z_1 y z_2 es $|z_1 - z_2|$.

1.5. Forma exponencial de los números complejos

Podemos considerar a cualquier número complejo $z = (x, y)$ como un vector con punto de origen $(0, 0)$ y extremo en el punto (x, y). Otra manera útil de representar a los números complejos es la forma polar, que utiliza justamente las coordenadas polares en vez de las coordenadas cartesianas.

Definición 8. *[8] Si $z \in \mathbb{C}^*$, el* **argumento** *de z, que denotaremos por $\arg(z)$, es el ángulo θ que hay del eje real positivo al vector determinado por el punto z, y escribimos:*

$$\arg(z) = \theta.$$

Nótese que cualquier múltiplo entero de 2π puede ser sumado a θ sin cambiar z, y, en este sentido, $\arg(z)$ representa una infinidad de valores, que están englobados en la expresión $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$ y θ_0 es algún valor particular de $\arg(z)$ en radianes.

Definición 9. *[14] El* **argumento principal** *de z, denotado $Arg(z)$, es el único argumento de z mayor que $-\pi$ y menor o igual que π. Es decir:*

$$-\pi < Arg(z) \leq \pi.$$

Observamos que:

$$\arg(z) = Arg(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}.$$

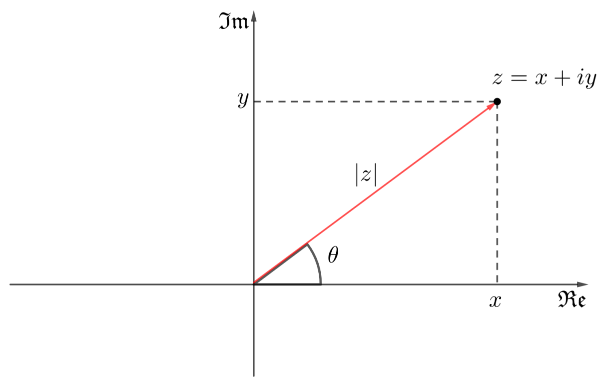


Figura 1.2: Argumento y módulo de z.

Ahora, si $z \in \mathbb{C}^*$ y $z = x + iy$, consideramos el triángulo cuyos lados son los vectores determinados por x, y y z, véase figura 1.2, entonces:

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|z|}.$$

Por lo que $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, llamada **forma polar**. Si $x \neq 0$, entonces $\tan\theta = \frac{y}{x}$, restringiendo el dominio de la función tangente a un intervalo donde sea biyectiva tenemos:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Leonhard Euler, uno de los más grandes matemáticos, introdujo, en particular la expresión:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta),$$

llamada **Fórmula de Euler**, que define el símbolo $e^{i\theta}$ para cualquier valor real de θ. Con ella, podemos expresar al número complejo $z = x + iy$ en una manera más compacta:

$$z = re^{i\theta},$$

llamada **forma exponencial**, donde r es un número real mayor o igual que cero (el módulo de z) y θ es cualquier argumento de z. La elección del símbolo $e^{i\theta}$ para denotar $\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ no es arbitraria y se justificara en la sección de funciones de variable compleja.

Para el punto en el origen, r es igual a cero, y en tal caso θ no está definido, pero por convención establecemos que la forma exponencial para el complejo $(0,0)$ es 0.

¿Cómo determinar si son iguales dos números complejos no nulos que están expresados en forma exponencial?

Al respecto, es claro que ambos deben tener igual módulo, y, con relación a los argumentos, deben diferir en un múltiplo entero de 2π. Para verlo, notemos primero que, para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$e^{i\theta} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \,:\, \theta = 2k\pi.$$

Para cualesquiera $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} &\iff r_1 = r_2 \wedge e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \\ &\iff r_1 = r_2 \wedge e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = 1 \\ &\iff r_1 = r_2 \wedge \exists k \in \mathbb{Z} \,:\, \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi. \end{aligned}$$

La ventaja de la forma exponencial es que, al realizar productos, cocientes y potencias enteras de complejos, se preservan las propiedades conocidas de la exponenciación (productos y cocientes de potencias de igual base, y potencia de una potencia). Representar un numeró complejo z en términos de su módulo y su argumento, nos permite dar una interpretación geométrica al producto, véase figura 1.3.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, entonces:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} \\ &= r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1 r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + i(\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \end{aligned}$$

Observemos que si $z = re^{i\theta}, z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, entonces:

1. $\overline{z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{i(-\theta)}$.
2. $z^{-1} = r^{-1} e^{-i\theta}$.
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ siempre que $r_2 > 0$.

Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2); \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) - \arg(z_2). \end{aligned}$$

En general si $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, entonces:

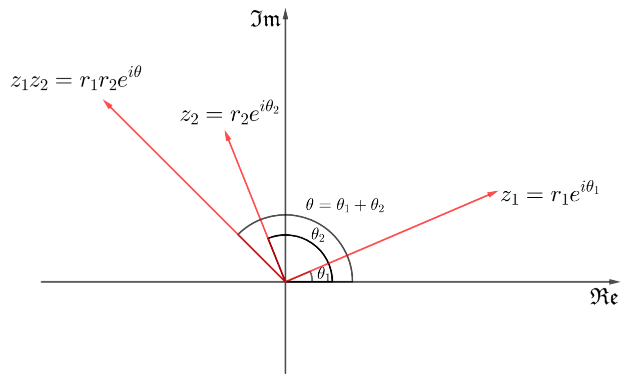


Figura 1.3: Geometría del producto de números complejos.

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, teniendo en cuenta la expresión para el producto en forma exponencial, se cumple que:

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

(b) Si $n \in \mathbb{N}_-$, digamos $n = -k$ con $k > 0$, entonces:

$$z^n = (z^{-1})^k = (r^{-1}e^{-i\theta})^k = (r^{-1})^k e^{-ik\theta} = r^{-k}e^{i(-k)\theta} = r^n e^{in\theta}.$$

(c) Cuando el exponente es nulo,

$$z^0 = 1 = r^0 e^{i0}.$$

Entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ se cumplen:

$$|z^n| = |z|^n = r^n \qquad \text{y} \qquad \arg(z^n) = n\arg(z) = n\theta.$$

Así, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 10 (D'Moivre)**.** *[4] Si $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, $r > 0$ y $r, \theta \in \mathbb{R}$, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene:*

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = r^n(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)).$$

Definición 11. *[1] Si $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es una* **raíz n − ésima** *de z, denotada por $w = \sqrt[n]{z}$, si $w^n = z$.*

Si $w, z \in \mathbb{C}$, utilizando el teorema de D'Moivre podemos resolver la ecuación

$$z^n = w,$$

para encontrar las raíces n-esimas de w.

Sean $w, z \in \mathbb{C}$, tales que $w = re^{i\theta}$, $z = \rho e^{i\phi}$.

Supongamos que $z^n = w$, como consecuencia del teorema de D'Moivre tenemos que:

$$\begin{aligned} z^n = w &\Rightarrow \rho^n e^{in\phi} = re^{i\theta} \\ &\Rightarrow \rho^n = r \wedge n\phi = \theta + 2\pi k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \\ &\Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r} \wedge \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \text{ para álgun } k \in \mathbb{Z}. \\ &\Rightarrow z = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

¿Esto querría decir que obtenemos una infinidad de raíces n-ésimas, una para cada k? En realidad, no; sólo obtendremos un número finito: Observemos que:

$$\frac{\theta + 2\pi(k+n)}{n} = \frac{\theta + 2\pi k}{n} + 2\pi,$$

y como las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π, tenemos que $z_{k+n} = z_k$ para todo n, lo cual muestra que $z_0, \ldots, z_{n-1}$ son las únicas raíces n-ésimas posibles de w, por lo que podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 12. *[4] Si $z \in \mathbb{C}^*$, entonces z tiene exactamente n raices complejas de la forma:*

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right],$$

donde $k \in \{0, \cdots, n-1\}$.

Esto nos dice que existen n raíces n-ésimas distintas de cualquier número complejo distinto de cero. Todas tienen el mismo módulo y sus argumentos difieren en múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$, es decir:

1. $|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}$.

2. $\arg(\sqrt[n]{z}) = \frac{Arg(z)+2k\pi}{n}; k = 0, \ldots, n-1$.

Geométricamente, cuando n es mayor que dos, las raíces n-ésimas de z son los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en un círculo con centro en el origen y radio igual a $|\sqrt[n]{z}|$.

Ejemplo 1. *Calcular $\sqrt[5]{-1}$.*

El módulo de cualquier $\sqrt[5]{-1}$ es $r = \sqrt[5]{|-1|} = 1$, y sus argumentos son $\frac{\pi+2k\pi}{5}$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Por lo tanto, las cinco raíces quintas de -1 son:

$$\begin{aligned} w_0 &= e^{i\frac{\pi}{5}} = \cos\frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}; \\ w_1 &= e^{i\frac{3\pi}{5}} = \cos\frac{3\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{5}; \\ w_2 &= e^{i\pi} = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi; \\ w_3 &= e^{i\frac{7\pi}{5}} = \cos\frac{7\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{5}; \\ w_4 &= e^{i\frac{9\pi}{5}} = \cos\frac{9\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{5}. \end{aligned}$$

Estas cinco raíces son vértices de un pentágono regular, véase figura 1.4.

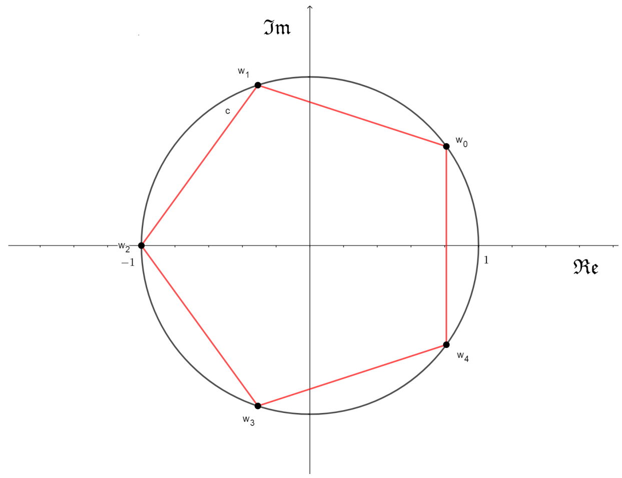


Figura 1.4: Raices quintas de -1.

1.6. La topología usual de los complejos.

Habiendo establecido las propiedades y operaciones básicas del conjunto de los números complejos, introduciremos algunas definiciones para poder extender las ideas de límite, y derivada aprendidas para las funciones de variable real a las funciones de variable compleja.

Definición 13. *[14] La* **distancia euclídea** *en el plano complejo es la función:*

$$\begin{aligned} d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) &\mapsto |z_2 - z_1|. \end{aligned}$$

La distancia euclídea tiene las siguientes propiedades:

1. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$.

2. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : d(z_1, z_2) \geq 0$.

3. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$.

4. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$.

Definición 14. *[13] Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r \geq 0$. Se tienen los siguientes conceptos:*

1. *La* **bola abierta** *de centro z_0 y radio r es el conjunto:*

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) < r\}.$$

2. *La* **bola cerrada** *de centro z_0 y radio r es el conjunto:*

$$\overline{B}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) \leq r\}.$$

3. *La* **esfera** *de centro z_0 y radio r es el conjunto:*

$$S_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) = r\}.$$

Definición 15. *[13] Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$.*

1. *Decimos que z_0 es un* **punto interior** *de A si existe $r > 0$ tal que $B_r(z_0) \subseteq A$.*

2. *El conjunto de puntos interiores de A se llama* **interior** *de A, y se denota $Int(A)$.*

3. *Decimos que z_0 es un* **punto de acumulación** *o* **punto límite** *de A si para todo $r > 0$ se tiene que la bola $B_r(z_0)$ contiene al menos un punto de A distinto de z_0. Es decir, si para todo $r > 0$ se tiene que:*

$$(A \cap B_r(z_0)) - \{z_0\} \neq \emptyset.$$

4. *El conjunto de puntos de acumulación de A se llama* **derivado** *de A, y se denota A'.*

5. *Decimos que z_0 es un* **punto de adherencia** *del conjunto A si para todo $r > 0$ se tiene que la bola $B_r(z_0)$ contiene al menos un punto de A. Es decir, si para todo $r > 0$ se tiene que:*

$$A \cap B_r(z_0) \neq \emptyset.$$

6. *El conjunto de puntos de adherencia de A se llama* **clausura** *de A, y se denota $\overline{A}$.*

7. *Decimos que z_0 es un* **punto de frontera** *del conjunto A si para todo $r > 0$ se tiene que:*

$$A \cap B_r(z_0) \neq \emptyset \qquad y \qquad (\mathbb{C} - A) \cap B_r(z_0) \neq \emptyset.$$

8. *El conjunto de puntos de frontera de A se llama* **frontera** *de A, y se denota ∂A o $Fr(A)$.*

9. *Decimos que z_0 es un* **punto aislado** *del conjunto A si existe $r > 0$ tal que:*

$$A \cap B_r(z_0) = \{z_0\}.$$

10. *Decimos que z_0 es un* **punto exterior** *del conjunto A si existe $r > 0$ tal que:*

$$A \cap B_r(z_0) = \emptyset.$$

11. *A es* **cerrado** *si contiene a todos sus puntos de acumulación, es decir:*

$$A' \subseteq A.$$

12. *A es* **abierto** *si todos sus puntos son interiores, es decir:*

$$Int(A) = A.$$

13. *A es* **acotado** *si existe $r > 0$ tal que:*

$$A \subseteq B_r(0).$$

14. A es **denso** *en* $\mathbb{C}$ *si:*

$$\overline{A} = \mathbb{C}.$$

Definición 16. *[12] Sea* $A \subset \mathbb{C}$.

1. *A es* **disconexo** *si existen dos conjuntos abiertos ajenos* $U, V \subset \mathbb{C}$ *tales que:*

$$A \cap U \neq \emptyset, A \cap V \neq \emptyset \text{ y } A \subset (U \cup V).$$

2. *Un conjunto A es* **conexo** *si y sólo si no es disconexo.*

Definición 17. *[12] Un conjunto* $U \subset \mathbb{C}$ *es una* **región** *(o un dominio) de* $\mathbb{C}$ *si y sólo si* U *es abierto y conexo.*

1.7. El plano extendido y la esfera de Riemann

Para muchos propósitos es útil ampliar el sistema de números complejos mediante la introducción del símbolo ∞ que representa infinito, llamado número complejo infinito. El número complejo infinito no tiene signo ni argumento, pero puede entenderse como un número cuyo módulo es mayor que cualquier número real dado. Los puntos del plano junto con el punto del infinito constituyen el **plano complejo extendido**:

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

En el plano complejo extendido suponemos que se satisfacen:

1. $\forall z \in \mathbb{C} : z + \infty = \infty + z = \infty$.

2. $\forall z \in \mathbb{C}^* : z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$.

3. $\infty \cdot \infty = \infty$.

4. $\infty + \infty = \infty$.

5. $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{z}{\infty} = 0$.

6. $\forall z \in \mathbb{C}^* : \frac{\infty}{z} = \infty$.

Las siguientes expresiones no están definidas:

1. $\infty \pm \infty$.

2. $0 \cdot \infty$.

3. $\frac{\infty}{\infty}$.

No es posible representar al número complejo infinito por un punto del plano complejo. Un modelo que representa el plano extendido lo constituye la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{R}^3$, esto es:

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Este modelo se llama **esfera de Riemann**, y la correspondencia entre los puntos se denomina **proyección estereográfica**.

Si $N = (0, 0, 1)$, podemos identificar $\mathbb{S}^2 - \{N\}$ con $\mathbb{R}^2$ donde identificamos $\mathbb{R}^2$ con el plano $\Pi = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2\}$, y el punto N con el punto infinito. Para esto, empleamos la proyección estereográfica, $\varphi : \mathbb{S}^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$, tal que:

$$\varphi(u) = \begin{cases} \infty & \text{si } u = N, \\ \ell_u \cap \Pi & \text{si } u \neq N. \end{cases}$$

Donde ℓ_u es la recta que pasa por el punto N y el punto u. Esta recta interseca al plano Π en un punto, el cual denotamos como $\varphi(u)$, como se ve en la figura 1.5.

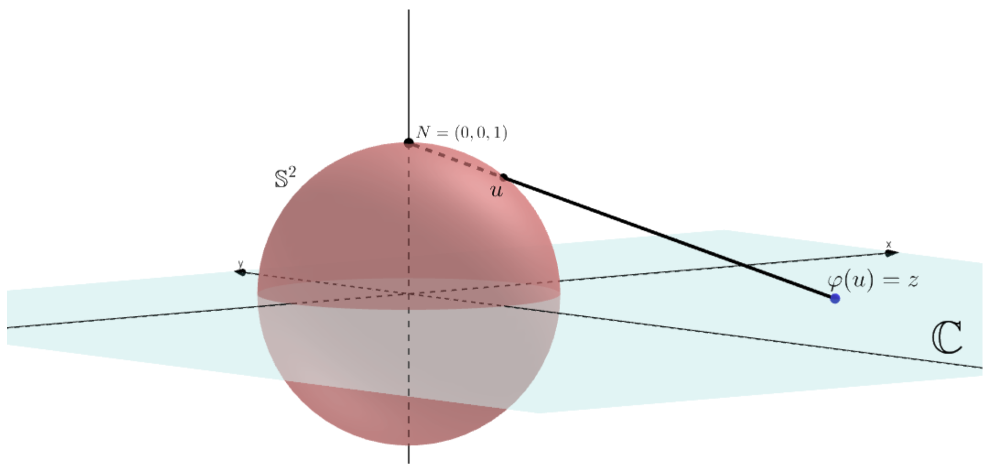


Figura 1.5: Proyección Estereográfica.

Entonces $\varphi(u) = \varphi(v)$ si y sólo si $u = v$, es decir, φ es inyectiva.

Además, φ es sobre, esto es, si $z \in \Pi$, consideramos la recta ℓ que pasa por los puntos N y z, dicha recta corta exactamente en un punto $u \in \mathbb{S}^2$, en particular $\varphi(u) = z$.

Para obtener el valor que φ y φ^{-1} toman en un punto procederemos de la siguiente forma.

Sea $z = x + iy$, identificamos $z \in \mathbb{C}$ con el punto $z = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$, sea $u = (x_1, x_2, x_3)$ el punto correspondiente en $\mathbb{S}^2$. La recta que pasa por z y N está dada por:

$$\{((1-t)x, (1-t)y, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Un punto de la forma $((1-t)x, (1-t)y, t)$ está en $\mathbb{S}^2$ si:

$$\begin{aligned} 1 =& (1-t)^2x^2 + (1-t)^2y^2 + t^2 \\ =& (1-t)^2|z|^2 + t^2. \end{aligned}$$

De donde $t = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$, de aquí se sigue que:

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(z) &= \left[\left(1 - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)x, \left(1 - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)y, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right] \\
&= \left[\left(\frac{|z|^2+1-|z|^2+1}{|z|^2+1}\right)x, \left(\frac{|z^2+1-|z|^2+1}{|z|^2+1}\right)y, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right] \\
&= \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \\
&= \left(\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}, \frac{-i(z-\overline{z})}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x_1 = \frac{z+\overline{z}}{1+|z|^2}, \qquad x_2 = \frac{i(z-\overline{z})}{1+|z|^2}, \qquad x_3 = \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}.$$

Por otra parte, si $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 - \{N\}$, entonces se cumple que:

$$|z|^2 = \frac{1+t}{1-t}.$$

Entonces reemplazando en las fórmulas para x_1, x_2, y despejando tenemos que:

$$x = \frac{x_1}{1-t} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{x_2}{1-t}.$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}.$$

Esto es, hay una correspondencia uno a uno entre los puntos de la esfera y el plano complejo extendido.

Debemos notar que el exterior del círculo unitario centrado en el origen del plano complejo extendido corresponde al hemisferio norte, sin el ecuador; los puntos de la frontera de dicho círculo son fijos para la proyección estereográfica, y los puntos interiores corresponden al hemisferio sur. En particular, 0 corresponde al punto $(0, 0, -1)$ (polo sur). Además, para cada r positivo, los puntos del plano complejo exteriores al círculo $|z| = r$ corresponden a puntos de la esfera próximos al punto N. Por esta razón, llamaremos al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ una bola de radio $\frac{1}{r}$ del punto del infinito. Es decir:

$$B_{\frac{1}{r}}(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}.$$

1.8. Sucesiones de números complejos

Las sucesiones y series de números complejos se comportan de la misma forma que las sucesiones y series de números reales. Así, tenemos las siguientes definiciones.

Definición 18. *[12] Una* **sucesión** *de números complejos es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $f(n) = z_n$, denotaremos a la sucesión simplemente por $\{z_n\}$.*

Definición 19. *[12] Una sucesión de números complejos z_n* **converge** *a z_0 si se cumple que:*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |z_n - z_0| < \epsilon.$$

Escribiremos $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$.

El término n-ésimo de una sucesión compleja $\{z_n\}$ tiene parte real y parte imaginaria, digamos x_n e y_n respectivamente, es decir, $z_n = x_n + iy_n$. Entonces existen dos sucesiones de números reales que pueden asociarse naturalmente a $\{z_n\}$, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Llamaremos **sucesión de partes reales** a $\{x_n\}$ y **sucesión de partes imaginarias** a $\{y_n\}$ de la sucesión $\{z_n\}$, y escribiremos $\mathfrak{Re}\{z_n\}$ y $\mathfrak{Im}\{z_n\}$ respectivamente. Por lo tanto el estudio de la convergencia de la sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{C}$ se puede reducir al estudio de la convergencia de $\{x_n\}$ y de $\{y_n\}$ en $\mathbb{R}$.

Proposición 20. *[14] Sean $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos, con $z_n = x_n + iy_n$, y $z_0 \in \mathbb{C}$. Se tiene que $\{z_n\}$ converge a z_0 si, y sólo si, $\{x_n\}$ converge a $\mathfrak{Re}(z_0)$ e $\{y_n\}$ converge a $\mathfrak{Im}(z_0)$.*

El concepto de sucesión de Cauchy para sucesiones de números reales se extiende a sucesiones complejas, de una manera natural.

Definición 21. *[14] Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Decimos que $\{z_n\}$ es una* **sucesión de Cauchy** *si se cumple que:*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : n, m > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \epsilon.$$

Observación 22. *Si $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces las sucesiones de partes reales e imaginarias $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son de Cauchy.*

Proposición 23. *[14] Una sucesión compleja es convergente si, y sólo si, es de Cauchy.*

Supongamos que $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son dos sucesiones de números complejos. Con ellas, se pueden definir la sucesión en la que el n-ésimo término es $z_n + w_n$, la sucesión en la que el n-ésimo término es $z_n w_n$, y la sucesión en la que el n-ésimo término es $\frac{z_n}{w_n}$, con $w_n \neq 0$ para todo n. Tiene sentido preguntarse si existe el límite de tales sucesiones cuando existen los límites de las sucesiones $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$.

Proposición 24. *[14] Si $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son dos sucesiones convergentes de números complejos y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces:*

1. $\lim_{n\to\infty}(\lambda z_n) = \lambda(\lim_{n\to\infty} z_n)$;
2. $\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n$;
3. $\lim_{n\to\infty}(z_n w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \lim_{n\to\infty} w_n$;
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} w_n}$ *si* $w_n \neq 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} w_n \neq 0$;
5. $\overline{\lim_{n\to\infty} z_n} = \lim_{n\to\infty} \overline{z}$;
6. $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |\lim_{n\to\infty} z_n|$.

1.9. Series de números complejos

Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Las sumas parciales se definen por:

$$\begin{aligned} S_1 &= z_1, \\ S_2 &= z_1 + z_2, \\ S_3 &= z_1 + z_2 + z_3, \\ &\vdots \\ S_k &= z_1 + z_2 + \cdots + z_k. \end{aligned}$$

1. La **serie generada por** $\{z_n\}$ es la suma formal:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n.$$

2. Decimos que la serie **converge** a $S \in \mathbb{C}$ si y sólo si existe el límite de la **sucesión de sumas parciales** $\{S_k\}$ y es igual a S, donde:

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} z_n,$$

y

$$\lim_{k\to\infty} S_k = S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n.$$

Observación 25. *Dada $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos tal que $z_n = x_n + iy_n$, basta estudiar el comportamiento de las series de números reales $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ para analizar la convergencia de la serie compleja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, es decir, se pueden utilizar los criterios de convergencia de series reales para analizar la convergencia de las series complejas. De este hecho se deduce el siguiente resultado.*

Proposición 26. *[10] Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos tal que $z_n = x_n + iy_n$, entonces:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ convergen.}$$

Proposición 27 (Criterio de Cauchy)**.** *[12] La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y sólo si*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : m > k > N \Rightarrow \left| \sum_{n=k}^{m} z_n \right| < \epsilon. \tag{1.1}$$

Observación 28. *La expresión (1.1) es equivalente a decir que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k, l > N$, $k \neq l$, entonces $|S_k - S_l| < \epsilon$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es convergente y tomamos $m = n$ en la proposición anterior, tenemos que para cada $\epsilon > 0$ existe N tal que para todo $n \geq N$, $|z_n| < \epsilon$. Obtenemos así una condición necesaria de convergencia, que se resume en el siguiente enunciado.*

Proposición 29. *[14] Si una serie compleja converge, su término general tiende a 0.*

Definición 30. *[12] Decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es* **absolutamente convergente** *si y sólo si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ es convergente.*

Como consecuencia de la desigualdad del triángulo, tenemos que, si una serie converge absolutamente, entonces converge, por lo que tenemos el siguiente resultado.

Proposición 31. *[14] Toda serie absolutamente convergente es una serie convergente.*

1.10. Criterios de convergencia de series

Como consecuencia de los criterios de convergencia de series de números reales, tenemos criterios para establecer la convergencia de series de números complejos.

1. **Criterio de comparación** [14]: Sean $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ tales que existe un N_0 tal que para cada $n \geq N_0$, $|z_n| \leq |w_n|$. Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|$ converge. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.

2. **Criterio del cociente** [14]: Supongamos que existe $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$. Entonces:

   - Si $L < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.
   - Si $L > 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ diverge.
   - Si $L = 1$, no podemos decir nada por este criterio.

3. **Criterio de la raíz** [14]: Supongamos que existe $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$. Entonces:

   - Si $L < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.
   - Si $L > 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ diverge.
   - Si $L = 1$, no podemos decir nada por este criterio.

Capítulo 2

Funciones de Variable Compleja

El concepto de función de variable compleja representa un caso particular del concepto matemático de función. Ya se ha mencionado que el plano complejo $\mathbb{C}$ se puede considerar isomorfo al plano real $\mathbb{R}^2$. Esto puede llevar a pensar, al definir una función sobre $\mathbb{C}$, que la situación es análoga a la de una función de dos variables reales, porque si $z = x + iy$, la función $f(z)$ se puede considerar como una función que depende de las variables reales x e y. Pero esto no es totalmente cierto en general, la razón es que $f(z)$ es también una función de una única variable, la variable z. Por esta razón es posible que para una función compleja se puedan definir conceptos que no son posibles definir para funciones de dos variables reales [8].

Definición 32. *[7] Sea $D \subseteq \mathbb{C}$. Llamaremos* **función compleja** *o simplemente función a toda aplicación $f : D \to \mathbb{C}$ tal que a cada $z \in D$ le corresponda un único número complejo $w = f(z)$.*

Ejemplo 1. *La función $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $g(z) = \overline{z}$.*

Ejemplo 2. *La función $\mathfrak{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que, $\mathfrak{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.*

Ejemplo 3. *La función $|\ | : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.*

Sean $f : A \to \mathbb{C}$ una función compleja con $z = x + iy \in A$ y $w = u + iv \in \mathbb{C}$. Si $f(z) = w$, entonces $f(x + iy) = u + iv$. Podemos observar que tanto u como v dependen de x e y. Luego f puede ser expresada en términos de dos funciones reales en dos variables $u(x, y)$ y $v(x, y)$ como sigue:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{2.1}$$

Llamaremos a la función $u(x, y)$ la **parte real** de la función f y a $v(x, y)$ la **parte imaginaria** de f. Para abreviar, denotaremos $f = u + iv$.

Ejemplo 4. *Sea $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, tal que $f(z) = \overline{z}^{-1}$, para obtener u y v en general, hacemos:*

$$f(z) = \frac{1}{\overline{z}} = \left(\frac{1}{x - iy}\right)\left(\frac{x + iy}{x + iy}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

de donde obtenemos que:

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

ambas definidas para todo vector no nulo de $\mathbb{R}^2$.

De la expresión (2.1) se deduce que una función de variable compleja, por una parte se puede suponer similar a una función de una variable real, ya que a cada número complejo z le corresponde un valor complejo $f(z)$. Pero por otra parte se puede tomar como el resultado de aplicar las funciones u y v que están definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, y desde este punto de vista f podría considerarse próxima a las funciones definidas en $\mathbb{R}^2$. Es precisamente esta situación la que hace que las funciones complejas tengan propiedades diferentes a las de las funciones reales.

Definición 33. *[14] Si $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función de variable compleja, su* **gráfica** *es el conjunto:*

$$G = \{(z,w) : z \in D \text{ y } w = f(z)\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

Observemos que G está contenido en un espacio vectorial de dimensión cuatro sobre los reales. Su representación gráfica en ejes independientes es imposible, por lo que vamos a representar a los valores de la variable independiente z y de la variable dependiente w en dos planos complejos distintos que llamaremos plano z (con ejes x e y) y plano w (con ejes u y v), respectivamente. La relación funcional $w = f(z)$ establece una correspondencia entre los puntos (x,y) del plano z y los puntos (u,v) del plano w.

2.1. Funciones Elementales

Definición 34. *[10] Los* **polinomios complejos** *son funciones de la forma:*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \;\; a_j \in \mathbb{C}.$$

Las partes real e imaginaria de una función polinómica compleja son funciones polinómicas de dos variables reales.

Ejemplo 5.

$$f(z) = 2z^2 + 3 = 2(x^2 - y^2) + 3 + i4xy = u(x,y) + iv(x,y).$$

Es importante resaltar que una función polinómica compleja es aquélla que se puede expresar como una combinación lineal de potencias de exponente natural de z, ya que puede ocurrir que $u(x,y)$ y $v(x.y)$ sean funciones polinómicas en $\mathbb{R}^2$ y sin embargo $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ no sea un polinomio complejo.

Ejemplo 6. $f(z) = (x^2+y^2) + i(x^2-y^2)$, *no puede ser expresado de la forma* az^2+bz+c, *y por tanto no es un polinomio complejo.*

Definición 35. *[10] Una función racional es el cociente de dos polinomios complejos:*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde suponemos que $P(z)$ y $Q(z)$ no tienen factores en común.

Como en el caso real, las funciones racionales se pueden definir en todo el plano complejo, salvo en el conjunto de los números complejos que anulen el denominador, que son las raíces del polinomio $Q(z)$.

Ejemplo 7. *Sea $f : \mathbb{C} - \{i, -i\} \to \mathbb{C}$, tal que:*

$$\frac{2z^2+1}{z^2+1}.$$

Definición 36. *[10] Sea $z \in \mathbb{C}$ la* **función exponencial compleja** *se define como:*

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y). \tag{2.2}$$

Como de costumbre, también escribiremos e^z como $\exp(z)$ en casos convenientes.

Podemos observar que:

$$|e^z| = e^x \text{ y que } \arg e^z = y.$$

Proposición 37. *[14] La función exponencial cumple lo siguiente:*

1. *Si $\theta \in \mathbb{R}$, entonces $|e^{i\theta}| = 1$; en particular:*

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \qquad e^{\pi i} = -1, \qquad e^{\frac{3\pi}{2}} = -i, \qquad y \qquad e^{2\pi i} = 1.$$

2. $e^z = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i$.
3. $\forall z, w \in \mathbb{C} : e^{z+w} = e^z e^w$.
4. $\forall z, w \in \mathbb{C} : e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}$.
5. $\forall z \in \mathbb{C} : e^z = e^{z+2\pi i}$.
6. $\forall z \in \mathbb{C} : e^z \neq 0$.
7. $\forall n \in \mathbb{Z} : \forall z \in \mathbb{C} : (e^z)^n = e^{nz}$.

La Proposición 37 nos dice que la exponencial compleja comparte algunas propiedades con la exponencial real, pero no todas. La exponencial real es creciente y por tanto tiene una inversa, el conocido logaritmo natural. Por otro lado, debido a que la función exponencial es periódica y por tanto no inyectiva, no podemos definir una sola función inversa de la exponencial. Sin embargo, podemos restringir el dominio de la exponencial compleja, para que sea inyectiva en ese dominio. Como la exponencial compleja tiene periodo $2\pi i$, podemos considerar cualquier franja horizontal de ancho 2π.

Si $y_0 \in \mathbb{R}$, entonces:

$$A_{y_0} = \{x + iy | x \in \mathbb{R}, y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}.$$

Proposición 38. *[12] Para cualquier $y_0 \in \mathbb{R}$, la exponencial compleja manda la franja A_{y_0} sobre $\mathbb{C}^*$ de manera biyectiva.*

Demostración. (inyectividad) Sean $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ tales que $z_1, z_2 \in A_{y_0}$ y $\exp(z_1) = \exp(z_2)$. Calculando los módulos en esta última expresión, tenemos que $\exp(x_1) = \exp(x_2)$, de modo que $x_1 = x_2$. Entonces $z_1 - z_2 = i(y_1 - y_2)$ y por tanto $\exp(i(y_1 - y_2)) = 1$. Esto implica que $y_1 - y_2 = 2\pi k$, con $m \in \mathbb{Z}$. Como $|y_1 - y_2| < 2\pi$, esto sólo puede ocurrir si $k = 0$, es decir, cuando $y_1 = y_2$.

Antes de ver la suprayectividad, veamos que la función exponencial es suprayectiva en $\mathbb{C}*$.

Sea $w = r_0(\cos\theta_0 + i\operatorname{sen}\theta_0) \in \mathbb{C}^*$, de modo que $r_0 > 0$. Queremos ver si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^z = w$; es decir, tal que:

$$e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y) = r_0(\cos\theta_0 + isen\theta_0).$$

Entonces $e^x = r_0$ y $y = \theta_0$, de modo que los números $z = ln(r_0) + i(\theta_0 + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$, cumplen que $e^z = w$.
(Suprayectividad) Dado un número complejo $w = r_0(\cos\theta_0 + i\operatorname{sen}\theta_0), r_0 > 0$, el número:

$$z = ln(r_0) + i\theta_0 \tag{2.3}$$

cumple que $e^z = w$. Por la periodicidad de la exponencial, todos los números de la forma:

$$z = ln(r_0) + i(\theta_0 + 2\pi k), k \in \mathbb{Z},$$

satisfacen que $e^z = w$. Puesto que la franja A_{y_0} tiene ancho exactamente igual a 2π, alguno de estos números cae en A_{y_0}, lo que concluye la demostración. □

La ecuación (2.3) sugiere la siguiente definición.

Definición 39. *[12] Sea $y_0 \in \mathbb{R}$. Definimos* **la rama del logaritmo de z** *en A_{y_0} como la función $\log : \mathbb{C}^* \to A_{y_0}$ tal que a cada $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \neq 0$ le asocia:*

$$\log z = ln(r) + i(\theta + 2\pi k),$$

donde k es el único entero tal que $y_0 \leq \theta + 2\pi k < y_0 + 2\pi$.

Observación 40. *En la definición anterior, el número $\theta + 2\pi k$ recibe el nombre de* **argumento** *de z (con respecto de la rama del logaritmo en A_{y_0}) y se denota por $\arg z$. Aunque podemos adoptar cualquier rama en nuestras definiciones, dos son preferidas sobre las demás:*

- *Una cuando $y_0 = 0$, de modo que elegimos el argumento de z en el intervalo $[0, 2\pi)$.*
- *La otra cuando $y_0 = -\pi$, de modo que elegimos el argumento de z en $[-\pi, \pi)$. En lo sucesivo a ésta se le llamará la* **rama principal del logaritmo***.*

Proposición 41. *[12] El logaritmo es la función inversa de la exponencial, en el siguiente sentido:*

1. *Para cualquier rama del logaritmo,* $\exp(\log z) = z$ *para todo* $z \neq 0$.

2. *Dada una rama del logaritmo en* A_{y_0} *y* $z \in A_{y_0}$*, entonces* $\log(\exp z) = z$.

Para cualquiera $z_1, z_2 \neq 0$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$.

2. $\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log(z_1) - \log(z_2)$.

También, podemos extender la noción de elevar un número a una potencia, definiendo:

$$z^w = e^{w \log z},$$

con $z, w \in \mathbb{C}$, donde elegimos (y fijamos) una rama de log.

Con la exponencial y el logaritmo, podemos definir algunas funciones que extienden a funciones reales conocidas.

Definición 42. *[12] Sea* $z \in \mathbb{C}$*. Definimos las funciones* **seno** *y* **coseno** *de* z *como:*

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad y \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Proposición 43. *[12] Para todo* $z, w \in \mathbb{C}$*, se tiene que:*

1. $\operatorname{sen}(z + 2\pi k) = \operatorname{sen} z$ *y* $\cos(z + 2\pi k) = \cos z$.

2. $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.

3. $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$ *y* $\cos(-z) = \cos z$.

4. $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z$.

5. $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} w \operatorname{sen} z$.

Las funciones trigonométricas restantes se definen de la siguiente manera:

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z},\ \cos z \neq 0; \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z},\ \operatorname{sen} z \neq 0.$$
$$\sec z = \frac{1}{\cos z},\ \cos z \neq 0; \qquad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z},\ \operatorname{sen} z \neq 0.$$

Nótese que si z fuese un real, las expresiones definidas coinciden con las conocidas expresiones trigonométricas para números reales. Una diferencia fundamental con las funciones trigonométricas sobre números reales es que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ no están restringidas sólo al intervalo $[-1, 1]$, sino que pueden tomar cualquier valor (real o complejo).

2.2. Límites

Al igual que en el caso de funciones reales de variable real, la importante noción de límite permite el desarrollo posterior del concepto de la derivación.

Definición 44. *[14] Sean $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función, z_0 un punto de acumulación de D y $L \in \mathbb{C}$. Decimos que el* **límite de f** *cuando z tiende a z_0 es L si:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0 : \forall z \in D : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon,$$

escribimos $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$.

Observar que no es necesario que $z_0 \in D$ para poder hablar de límite cuando z tiende a z_0. Además, aun estando definida la función en z_0, podría ocurrir que $f(z_0) \neq L$. También, tenemos que el límite de una función, cuando existe, es único.

Debemos notar un hecho muy importante. En el dominio de definición de la función, puede haber muchas trayectorias por las que podemos acercarnos a z_0. Si por dos trayectorias distintas, los límites de $f(z)$ no son iguales, entonces no existe $\lim_{z \to z_0} f(z)$. Formalizamos esto de la siguiente manera.

Proposición 45. *[14] Si $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tiene límite L cuando z tiende a z_0, y $S \subset D$ que tiene a z_0 como punto de acumulación, entonces* $\lim_{z \to z_0} f|_S(z) = L$.

Ahora daremos una caracterización de límites de funciones de variable compleja a partir de límites de funciones de variables reales.

Proposición 46. *[14] Sea $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja, con partes real e imaginaria $u(x, y)$ y $v(x, y)$ respectivamente. Sean $x_0, y_0, a, b \in \mathbb{R}$, donde $z_0 = x_0 + iy_0$. Entonces:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a + ib \quad \Longleftrightarrow \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = a \quad y \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = b.$$

El límite de una función de variable compleja existe si, y sólo si, existen los límites de sus partes real e imaginaria en el punto (x_0, y_0), y, en ese caso, las partes real e imaginaria del límite son, respectivamente, los límites de la parte real y de la parte imaginaria.

Veamos ahora aspectos algebraicos de los límites de funciones de variable compleja.

Proposición 47. *[14] Sean f y g funciones complejas definidas en $D \subseteq \mathbb{C}$, y sea z_0 punto de acumulación de D. Supongamos que* $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_1$ *y* $\lim_{z \to z_0} g(z) = w_2$. *Entonces:*

1. $\lim_{z \to z_0}(f(z) + g(z)) = w_1 + w_2$.

2. $\lim_{z \to z_0}(f(z)g(z)) = w_1 w_2$.

3. $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_1}{w_2}$, *siempre que $w_2 \neq 0$ y $g(z) \neq 0$.*

Ahora, veamos variantes de la definición de límite, que permiten que la variable tienda a infinito, o que el límite sea infinito.

Definición 48. *[14] Sean $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y z_0 punto de acumulación de D, decimos que $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ si se cumple que:*

$$\forall M \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M.$$

Definición 49. *[14] Sean $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que D contenga el exterior de algún círculo con centro en el origen, y dado $L \in \mathbb{C}$, decimos que $\lim_{z\to\infty} f(z) = L$ si se cumple que:*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |z| > \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon.$$

Como observamos, f debe estar definida en alguna bola del infinito, y para cada $\epsilon > 0$ debe haber una bola del infinito en el cual los valores de la función difieren de L (en módulo) en una cantidad menor que ϵ.

Ejemplo 8. *Mostremos que, para cualquier $a \in \mathbb{C}$, el $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z-a} = 0$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, basta con elegir $\delta = |a| + \frac{1}{\epsilon} > 0$, ya que para cualquier z que cumple $|z| > \delta$, tenemos que $|z - a| \geq |z| - |a| > \frac{1}{\epsilon}$, de donde $|\frac{1}{z-a}| < \epsilon$. □

Definición 50. *[14] Sean $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que D contenga el exterior de algún círculo con centro en el origen, decimos que $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ si se cumple que:*

$$\forall M \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : |z| > \delta \Rightarrow |f(z)| > M.$$

Esto quiere decir que para cada M podemos encontrar un entorno del infinito en el cual el módulo de la función es mayor que M.

2.3. Continuidad

Definición 51. *[7] Una función $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es* **continua** *en $z_0 \in D$ si:*

1. *$f(z_0)$ existe.*
2. *$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$*

Si f es continua en todo punto de $E \subseteq D$, decimos que f es **continua en E**.

La continuidad de f en $z_0 = x_0 + iy_0$ está estrechamente vinculada a la de sus funciones de parte real e imaginaria $u(x, y)$ y $v(x, y)$ en (x_0, y_0).

Proposición 52. *[14] Una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es continua en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$ si, y sólo si, sus funciones componentes u y v son continuas en el punto (x_0, y_0).*

Como la continuidad se define en términos de límites, tenemos las siguientes propiedades de las funciones continuas.

Proposición 53. *[4] Sean $f, g : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continuas en $E \subseteq D$. Entonces:*

1. *$f(z) + g(z)$ es continua en E.*

2. $f(z)g(z)$ es continua en E.

3. $\frac{f(z)}{g(z)}$ es continua en E, excepto en los puntos donde $g(z) = 0$.

4. Si f es continua en z_0, entonces $|f(z)|$ es continua en z_0.

Veamos qué ocurre con la continuidad de la composición de funciones.

Proposición 54. *[14] Sean $f : D_1 \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g : D_2 \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, funciones tales que $f(D_1) \subseteq D_2$. Supongamos que z_0 es punto de acumulación de D_1, que $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe, y que g es continua en él. Entonces:*

$$\lim_{z \to z_0} g(f(z)) = g(\lim_{z \to z_0} f(z)).$$

Proposición 55. *[14] Si $f : D_1 \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en z_0 y $g : D_2 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en $f(z_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en z_0.*

Ahora, vamos a definir un tipo especial de continuidad, que es muy útil.

Definición 56. *[14] Sean $f : D \subseteq C \to \mathbb{C}$. Se dice que f es* **uniformemente continua** *en D si:*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall z, w \in D : |z - w| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \epsilon.$$

Es decir, en la continuidad uniforme, fijado ϵ, se obtiene δ que no depende de z o de w.

2.4. Funciones holomorfas

La derivada compleja, es un concepto fundamental dentro de la teoría de funciones de variable compleja porque, aunque la definición es análoga a la de derivada de una función de una variable real, el hecho de que el límite se tome en el plano complejo hace que las condiciones en las que existe la derivada sean más fuertes que en el caso real. Esta es la razón por la que una función compleja que sea derivable en un subconjunto adecuado del plano complejo tenga un comportamiento mejor que en el caso real, véase [10].

Definición 57. *[12] Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f : A \to \mathbb{C}$ una función y $z_0 \in A$ punto de acumulación de A. f es* **holomorfa** *en z_0 (o* **derivable** *en z_0) si*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

existe; en tal caso, dicho límite se llama **la derivada de f** *en z_0 y se denota por $f'(z_0)$.*

Proposición 58. *[7] Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f : A \to \mathbb{C}$ una función y $z \in A$. Si f es diferenciable en z, entonces f es continua en z.*

La derivación en $\mathbb{C}$ conserva además algunas propiedades básicas ya conocidas en $\mathbb{R}$.

Proposición 59. *[7] Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f, g : A \to \mathbb{C}$ dos funciones y $z \in A$. Si f y g son diferenciables en z entonces:*

1. $(f + \alpha g)'(z) = f'(z) + \alpha g'(z)$, *con* $\alpha \in \mathbb{C}$.

2. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, *siempre que* $g(z) \neq 0$.

La regla de la cadena vale también para el caso complejo.

Proposición 60 (Regla de la Cadena)**.** *[7] Sean* $A, B \subseteq \mathbb{C}$ *dos conjuntos abiertos,* $f : A \to \mathbb{C}$ *y* $g : B \to \mathbb{C}$ *dos funciones derivables en* A *y* B *respectivamente, tales que* $f(A) \subset B$*. Entonces* $g \circ f$ *es derivable en* A *y* $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ *para todo* $z \in A$*.*

Veremos ahora la importancia de las partes real e imaginaria $u(x, y)$ y $v(x, y)$ de una función f para analizar su derivabilidad.

Proposición 61 (Condición necesaria de derivabilidad)**.** *Supongamos que la función* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *tiene derivada en el punto* $z_0 = x_0 + iy_0$*. Entonces las derivadas parciales* u_x*,* u_y*,* v_x *y* v_y *existen en* (x_0, y_0) *y se verifican las siguientes igualdades, denominadas* **Ecuaciones de Cauchy – Riemann***:*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0); \qquad\qquad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

La proposición anterior nos dice que, en caso de ser derivable f en z_0, el valor de la derivada se puede obtener a partir de u y v de cualquiera de las dos formas siguientes:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \tag{2.4}$$

Ejemplo 9. *Sea* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *con* $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$ *y* $v(x, y) = 0$*. Veremos que, para esta función, se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann en el origen, y sin embargo no es derivable allí, mostrando entonces que el cumplimiento de las ecuaciones es una* **condición necesaria pero no suficiente** *para la derivabilidad de una función compleja en un punto.*

Calcularemos las derivadas parciales de u *en* $(0, 0)$ *usando la definición:*

$$u_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

y, por simetría de la definición de u *en términos de* x *e* y*, también es* $u_y(0, 0) = 0$*. Además, siendo* v *constantemente nula, es* $v_x(0, 0) = 0 = v_y(0, 0)$*. Por lo tanto, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en* 0*.*

Por otro lado, tenemos que:

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy}\frac{(x - iy)}{(x - iy)} = \frac{x\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} - i\frac{y\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2}.$$

Si nos aproximamos a $(0, 0)$ *por el semieje positivo de las* x*, la parte real de esta función tiene límite* 0*, mientras que si nos aproximamos por la recta* $y = x$ *desde el primer cuadrante, el límite es* $\frac{(1-i)}{2}$*. En consecuencia, la parte real del cociente* $\frac{f(z)-f(0)}{z-0}$ *no tiene límite, y por lo tanto el cociente tampoco. Entonces no existe* $f'(0)$*, pese a satisfacerse allí las ecuaciones de Cauchy-Riemann.*

Proposición 62 (Condición suficiente de derivabilidad). *[14] Supongamos que la función* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto* $z_0 = x_0 + iy_0$, *y que las derivadas parciales* u_x, u_y, v_x *y* v_y *son continuas en un entorno de* (x_0, y_0). *Entonces, la función* f *es derivable en* z_0.

2.5. Sucesiones y Series de funciones

Las sucesiones y series de funciones complejas se comportan de la misma forma que las sucesiones y series de funciones reales. Los conceptos de convergencia puntual, absoluta y uniforme de una sucesión de funciones o de la serie asociada son análogas al caso de sucesiones de funciones reales, así como los teoremas que permiten transmitir las buenas propiedades de las funciones que forman la sucesión a la función límite [10].

Definición 63. *[14] Sea* $D \subset \mathbb{C}$. *Una* **sucesión de funciones** *en* D *es una familia de funciones* $\{f_n\}$ *de manera que a cada* $n \in \mathbb{N}$ *corresponde una función* $f_n : D \to \mathbb{C}$. *La* **serie de funciones** *asociada a la familia* $\{f_n\}$ *es la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, *definida para cada* $z \in D$ *en los que la serie converge.*

Observación 64. *Las funciones que componen una sucesión de funciones pueden ser de índole muy distinta entre sí. Además, una serie de funciones puede converger para algunos valores de* z *y divergir para otros. De hecho, el criterio del cociente establece que si:*

$$r(z) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right|,$$

la serie convergerá para todos los z *que hagan* $r(z) < 1$ *y divergirá para aquellos que hagan* $r(z) > 1$.

Definición 65. *[14] Decimos que la sucesión de funciones* $\{f_n\}$ *definida en* $D \subset \mathbb{C}$, **converge puntualmente** *a la función límite* $f : D \to \mathbb{C}$, *si para cada* $z \in D$ *dado* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq N$ *entonces* $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$.

Escribimos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z).$$

Cabe preguntarse qué características hereda la función límite de las funciones que componen la sucesión. Por ejemplo, si todas las f_n son continuas, ¿Será que la función límite es también continua? En general no es así. Sin embargo, existe un tipo de convergencia más fuerte, que garantiza que la función límite hereda ciertas propiedades.

Definición 66. *[14] Decimos que la sucesión de funciones* $\{f_n\}$ *definida en* $D \subset \mathbb{C}$, **converge uniformemente a** $f : D \to \mathbb{C}$, *si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq N$ *entonces* $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$, *para cada* $z \in D$.

Observación 67. N *depende sólo de* ϵ, *es decir, fijado* ϵ, N *es válido para todo* $z \in D$.

Teorema 68. *[14] La sucesión de funciones* $\{f_n\}$ *definidas en* $D \subset \mathbb{C}$ *converge uniformemente a la función* $f : D \to \mathbb{C}$ *si y sólo si, para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para cada* $m, n \geq N$ *y todo* $z \in D$, $|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon$.

El siguiente teorema es una propiedad básica de la convergencia uniforme.

Teorema 69. *[4] Sean f_n funciones continuas en $D \subset \mathbb{C}$. Si la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a f, entonces f es continua.*

Definición 70. *[4] Sean $D \subset \mathbb{C}$ y $f_n : D \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones definida en D. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ de funciones* **converge puntualmente** *a la función f en D si la sucesión de sumas parciales $\{S_N(z)\}$ converge puntualmente a f en D, donde:*

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_N(z),$$

es decir, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, para $z \in D$.

Definición 71. *[4] Sean $D \subset \mathbb{C}$ y $f_n : D \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones definida en D. La serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$* **converge absolutamente** *a la función f en D, si la sucesión de sumas parciales $S_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ converge puntualmente a f en D.*

Definición 72. *[4] Sean $D \subset \mathbb{C}$ y $f_n : D \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones definida en D. La serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$* **converge uniformemente** *a la función f en D, si y sólo si, la sucesión de sumas parciales $S_N(z)$ converge uniformemente a f en D.*

Teorema 73 (Criterio de Weierstrass)**.** *[14] Sea $\{M_n\}$ una sucesión de números reales no negativos tal que $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ es convergente. Sea $\{f_n(z)\}$ una sucesión de funciones complejas definidas en $D \subset \mathbb{C}$. Si para todo $n \geq 0$ y todo $z \in D$ se tiene que $|f_n(z)| \leq M_n$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en D. Además, para cada $z \in D$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge absolutamente.*

2.6. Series de potencias

Las series de potencias son series de funciones complejas de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots , \tag{2.5}$$

en donde los a_n's, son llamados **coeficientes** de la serie de potencias y $z, z_0 \in \mathbb{C}$. El número complejo z_0 se denomina **centro** del desarrollo en serie de potencias, y se dice que la serie de potencias se desarrolla **alrededor de** z_0, véase [14].

Observación 74. *En la expresión (2.5), a_n es el factor complejo que multiplica a la potencia n-ésima de $z - z_0$; además, a_n no puede depender de z.*

Ejemplo 10. *La serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es una serie de potencias con centro en $z_0 = 0$ y coeficiente $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Lema 75 (Abel-weierstrass)**.** *[4] Sean $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos y r_0, M reales positivos tales que $|z_n| r_0^n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $r < r_0$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge en forma absoluta y uniforme en $\overline{B_r}(z_0) = \{|z - z_0| \leq r\}$.*

Teorema 76. *[12] Para cada serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *existe* $0 \leq R \leq \infty$, *tal que si:*

1. $|z-z_0| < R$, *la serie converge.*

2. $|z-z_0| > R$, *la serie diverge.*

La convergencia de la serie es uniforme y absoluta en toda bola cerrada contenida en $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$.

Definición 77. *[10] Se llama* **radio de convergencia** *de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, *al número real* R *tal que la serie converge en el interior de* $B_R(z_0)$ *y diverge si* $|z-z_0| > R$.

Además:

$$R = \sup\left\{ r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ converge} \right\}.$$

Definición 78. *[10] Se llama* **disco de convergencia** *de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *al conjunto* $B_R(z_0)$, *donde* R *es el radio de convergencia de la serie.*

Teorema 79. *[4] Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *una serie de potencias, si* $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ *existe, entonces* $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Observación 80. *El radio de convergencia de una serie puede ser 0 (lo que significa que la serie converge sólo cuando* $z = z_0$*),* ∞ *(lo que significa que la serie converge para todo* $z \in \mathbb{C}$*) o algún número real positivo.*

2.7. Funciones analíticas

En esta sección se analiza la relación que existe entre las funciones holomorfas y las series de potencias. Se expone que toda función definida por una serie de potencias es holomorfa, y que toda función holomorfa admite un desarrollo en serie de potencias.

A continuación, se introduce el concepto de función analítica, este se basa en la representación local de una función en términos de una serie de potencias convergente.

Definición 81. *[4] Sea* f *una función compleja definida en un conjunto abierto* $A \subset \mathbb{C}$. *Diremos que* f *es* **analítica** *en* A, *si para cada* $z_0 \in A$, *existen* $B_r(z_0) \subset A$ *y una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *que converge en* $B_r(z_0)$, *tal que:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \; z \in B_r(z_0). \tag{2.6}$$

A la expansión en serie de potencias (2.6) también la llamamos una serie de Taylor de f *alrededor de* z_0.

Ejemplo 11. *La función* $f(z) = \frac{1}{1-z}$ *es analítica en* $B_1(0)$, *porque* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *para cada* $z \in B_1(0)$.

Definición 82. *Una función f definida y analítica en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ se llama* **función entera**.

Teorema 83. *[14] Si dos funciones son analíticas en un conjunto A, la suma y el producto son analíticas en A.*

La composición de funciones analíticas es analítica.

Teorema 84. *[14] Si f es analítica en z_0 y g es analítica en $f(z_0)$, entonces $g \circ f$ es analítica. en z_0.*

El siguiente resultado muestra la relación entre funciones holomorfas y analíticas.

Teorema 85. *[2] Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$, entonces:*

1. *Para cada $k \geq 1$, la serie de potencias:*

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k},$$

   tiene radio de convergencia R.

2. *La función f es infinitamente diferenciable en $B_R(z_0)$ y, además, para todo $k \geq 1$ y $z \in B_R(z_0)$ se tiene que:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}.$$

3. *Para $n \geq 0$, el n-ésimo término de la serie de f satisface que $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$.*

Ejemplo 12. *Sea la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, entonces:*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = 1.$$

Su derivada está dada por:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n},$$

y su radio de convergencia es $R = 1$.

Teorema 86. *[4] f es una función analítica si y sólo si f es holomorfa.*

Los teoremas 85 y 86 aseguran que, si se conoce la derivada de una función holomorfa, entonces se conoce su expresión como una serie de potencias alrededor de algún punto z_0.

Ejemplo 13. *Sea* $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

Tanto la parte real como la parte imaginaria de la función exponencial son funciones continuas con derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$*. Además:*

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y; & u_y &= -e^x \operatorname{sen} y, \\ v_x &= e^x \operatorname{sen} y; & v_y &= e^x \cos y. \end{aligned}$$

Entonces la función exponencial cumple las condiciones de Cauchy-Riemann en todo punto del plano complejo, con lo que se puede asegurar que la función exponencial es holomorfa en todo el plano complejo.

Al ser holomorfa en cada punto del plano, aplicando la formula (2.4) tenemos que:

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z.$$

Nótese que si $z_0 = 0$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $f^n(z) = e^z$ *y* $f^n(z_0) = 1$*, entonces* $a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!} = \frac{1}{n!}$*, por lo tanto tenemos que la expansión en serie de potencias alrededor de cero de la función exponencial está dada por:*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

que tiene radio de convergencia infinito y por tanto converge en todo $\mathbb{C}$.

Teorema 87 (Convergencia de Weierstrass)**.** *[5] Sea* G *una región de* $\mathbb{C}$ *y* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones analíticas definidas en* G*. Si* $\{f_n\} \to f$ *uniformemente en compactos de* G*, entonces* f *es analítica en* G*. Además,* $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ *(derivada de orden* k*) converge puntualmente en* G *y uniformemente en compactos de* G*, para todo* $k \in \mathbb{N}$*.*

Capítulo 3

Introducción a la Dinámica Holomorfa

3.1. Espacios Métricos y Topológicos

Definición 88. *[13] Sean X un conjunto diferente del vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que d es* **una métrica** *o* **una distancia** *en X, si para cada $x, y, z \in X$, d cumple con las siguientes propiedades:*

1. $d(x, y) \geq 0$.

2. $d(x, y) = 0$, *si y sólo si,* $x = y$.

3. $d(x, y) = d(y, x)$.

4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (**Desigualdad del Triángulo**).

A la pareja ordenada (X, d) le llamaremos **espacio métrico**. *En general, diremos simplemente espacio métrico X.*

Definición 89. *[13] Sean (X, d) un espacio métrico y $O \subset X$. Diremos que O es un* **conjunto abierto** *o simplemente abierto, si se cumple:*

$$\forall x \in O : \exists r > 0 : B_r(x) \subset O.$$

Definición 90. *[13] Sean (X, d) un espacio métrico y $F \subset X$. Decimos que F es un* **conjunto cerrado**, *si $\mathbb{C} - F$ es un conjunto abierto.*

Definición 91. *[5] Un espacio métrico (X, d) es* **conexo** *si los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X.*

Definición 92. *[5] Un conjunto conexo no vacío en cualquier espacio D, en particular si $D = (X, d)$, se llama* **dominio**.

Uno de los conceptos más útiles en los espacios métricos es la convergencia de sucesiones.

Definición 93. *[13] Sean (X, d) un espacio métrico, $\{x_n\}$ una sucesión en X y $x \in X$. Se dice que x es el* **límite de la sucesión** $\{x_n\}$ *cuando n tiende a infinito, si se cumple que:*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists k \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \epsilon, \text{ para cada } n \geq k.$$

Definición 94. *[13] Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico X es una* **sucesión de Cauchy** *en X, si cumple con la siguiente condición:*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists k \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \epsilon \text{ si } n, m \geq k.$$

Definición 95. *[5] Si (X, d) tiene la propiedad de que cada sucesión de Cuachy tiene un límite en X, entonces diremos que el espacio métrico (X, d) es* **completo**.

A continuación, definimos lo que es una topología sobre un conjunto y un espacio topológico. También consideraremos algunos de los conceptos elementales que tienen que ver con espacios topológicos.

Definición 96. *[11] Una* **topología** *sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

1. *$\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{T}$.*
2. *La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.*
3. *La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathcal{T}$ pertenece a $\mathcal{T}$.*

Observación 97. *Los espacios métricos son un tipo particular de espacios topológicos.*

Definición 98. *[11] Un* **espacio topológico** *es un par ordenado $(X, \mathcal{T})$, formado por un conjunto X y una topología $\mathcal{T}$ sobre X.*

Definición 99. *[11] Si X es un espacio topológico con una topología $\mathcal{T}$, diremos que un subconjunto U de X es un conjunto abierto de X si U pertenece a la colección $\mathcal{T}$.*

La noción de compacidad no es tan natural ni intuitiva como otros conceptos, pero permite trabajar en contextos más arbitrarios.

Definición 100. *[11] Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio $(X, \mathcal{T})$ se dice que* **cubre** *X, o que es un* **cubrimiento** *de X, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ coincide con X. Se dice que $\mathcal{A}$ es un* **cubrimiento abierto** *de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X.*

Definición 101. *[11] Un espacio $(X, \mathcal{T})$ se dice que es* **compacto** *si de cada cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X podemos extraer una subcolección finita que también cubre X.*

Definición 102. *[11] Un espacio $(X, \mathcal{T})$ se dice que es* **localmente compacto en** *x si existe un subespacio compacto C de X que contiene un entorno de x. Si X es localmente compacto en cada uno de sus puntos, diremos que X es* **localmente compacto**.

Ahora se introduce una versión de compacidad llamada compacidad secuencial.

Definición 103. *[11] Sea X un espacio topológico.*

1. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de X y si $\{n_i\}$ es una sucesión creciente de enteros positivos, entonces la sucesión $\{y_i\}$ definida por $y_i = x_{n_i}$ se denomina* **subsucesión** *de la sucesión $\{x_n\}$.*

2. *El espacio X se dice que es* **secuencialmente compacto** *si cada sucesión de puntos de X contiene una subsucesión convergente.*

Uno de los métodos más importantes y frecuentemente usados para dotar de una topología a un conjunto es definir la topología en términos de una distancia en el conjunto.

Definición 104. *[11] Sea $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico.*

1. *Se dice que X es* **metrizable** *si existe una distancia d en el conjunto X que induce la topología de X.*

2. *Un* **espacio métrico** *es un espacio metrizable X junto a una distancia específica d que da la topología de X.*

Definición 105. *[11] Si d es una distancia en el conjunto X, entonces la colección de todas las bolas $B_\epsilon(x)$ de radio $\epsilon > 0$, para $x \in X$, es una base para una topología sobre X, denominada* **topología métrica** *inducida por d.*

Ahora es posible dotar al plano complejo $\mathbb{C}$ de una estructura topológica, ya que, $(\mathbb{C}, d_2)$ es un espacio metrizable, donde:

$$d_2(z, w) = |z - w|, \text{ para todo } z, w \in \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

Más aún, $(\mathbb{C}, d_2)$ es completo y localmente compacto.

Definición 106. *[11] Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se denomina* **espacio de Hausdorff** *si para cada par x_1, x_2 de puntos distintos de X, existen entornos U_1 y U_2 de x_1 y x_2, respectivamente, que son ajenos.*

Observación 107. *Todo espacio métrico es un espacio de Hausdorff.*

El siguiente teorema se denomina **Teorema de Compactificación de Alexandroff**.

Teorema 108. *[5] Sean X un conjunto y ∞ un objeto matemático, tal que $\infty \notin X$. Definimos:*

$$X_\infty = X \cup \{\infty\} \text{ y } \tau_2 = \{\tau_1\} \cup \{A \subset X_\infty : X - A \text{ es compacto}\}.$$

Si (X, τ_1) es un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff, entonces:

1. *(X, τ_2) es un espacio topológico compacto y de Hausdorff.*

2. *La topología inducida en X por X_∞ es τ_1.*

Sea τ la topología métrica inducida por (3.1), aplicando el Teorema 108 a $(\mathbb{C}, \tau)$ obtenemos lo que llamamos el plano complejo extendido $(\mathbb{C}_\infty, \tau_\alpha)$, donde $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

3.2. Familias Normales

En esta sección se introducen la definición de familia normal y equicontinuidad, posteriormente se enuncian algunos resultados importantes.

Sean $G \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y (X, d) un espacio métrico completo. Se denota por $C(G, X)$ al conjunto de todas las funciones continuas de G a X. $C(G, X) \neq \emptyset$, porque contiene a las funciones constantes. De hecho si $X = \mathbb{C}$, cada función analítica en U está en $C(G, \mathbb{C})$.

Proposición 109. *[5] $(C(G, X), \rho)$ es un espacio métrico, donde:*

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}, \ \rho_n(f, g) = \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in k_n\},$$

y cada K_n es compacto en U.

Proposición 110. *[5] $(C(G, X))$ es un espacio métrico completo.*

A partir de ahora $\mathcal{F}$ denotara una familia de funciones.

Definición 111. *[5] Una familia $\mathcal{F} \subset C(G, X)$ es* **equicontinua en un punto** *$z_0 \in G$ si, y sólo si:*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow d(f(z), f(z_0)) < \epsilon \text{ para cada } f \in \mathcal{F}.$$

Definición 112. *[5] Una familia $\mathcal{F} \subset C(G, X)$ es* **equicontinua en un conjunto** *$E \subset G$ si:*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall z_1, z_2 \in E : |z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow d(f(z_1), f(z_2)) < \epsilon \text{ para cada } f \in \mathcal{F}.$$

Definición 113. *[5] Una familia $\mathcal{F} \subset C(G, X)$ es* **normal** *en G, si cada sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ tiene una subsucesión $\{f_{n_i}\}$ que converge a una función f en $C(G, X)$.*

Definición 114. *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones continuas sobre un conjunto abierto $G \in \mathbb{C}$ está* **puntualmente acotada** *si para todo $z \in G$ el conjunto $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado.*

Definición 115. *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones continuas sobre un conjunto abierto $G \in \mathbb{C}$ es* **puntualmente equicontinua** *si para todo $z_0 \in G$ y para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que si $|z - z_0| < \delta$, $z \in G$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.*

Proposición 116. *Una familia $\mathcal{F} \subset C(G, X)$ es normal si, y sólo si su clausura es un conjunto compacto.*

El siguiente teorema relaciona los conceptos de normalidad y equicontinuidad.

Teorema 117 (Arzelà-Ascoli)**.** *[5] Una familia $\mathcal{F}$ de funciones continuas sobre un abierto G en $\mathbb{C}$ es normal si, y sólo si está puntualmente acotada y es puntualmente equicontinua en G.*

Sea G un conjunto abierto de $\mathbb{C}$. Se denota por $\mathcal{H}(G)$ a la colección de funciones holomorfas (analíticas) de G. La letra $\mathcal{H}$ se usa en referencia a la palabra "holomorfa". Consideramos a $\mathcal{H}(G) \subset C(G, \mathbb{C})$ y siempre asumiremos que la métrica en $\mathcal{H}(G)$ es la métrica que hereda como un subconjunto de $C(G, \mathbb{C})$.

Observación 118. *$\mathcal{H}(G)$ es cerrado en $C(G, \mathbb{C})$ y además es un espacio métrico completo.*

Teorema 119 (Teorema de Montel)**.** *[5] Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas sobre un abierto $G \subset \mathbb{C}$ es normal si, y solo si $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada en cada compacto de G.*

3.3. Funciones Trascendentes Enteras

Las funciones enteras que no son polinomios se denominan **funciones trascendentes enteras**. En general, para funciones trascendentes enteras el infinito es una singularidad esencial aislada.

Definición 120. *[5] Sean $G \subset \mathbb{C}$ abierto, y $f : G \to \mathbb{C}$ una función. Un punto $z \in G$ donde la función f no es analítica se llama un* **punto singular** *o* **singularidad** *de f.*

Definición 121. *[5] Una función f tiene una singularidad aislada en $z_0 \in G$ si existe $r > 0$ tal que f está definida y es analítica en $B_r(z_0) - \{z_0\}$.*

Existen tres distintos tipos de singularidades.

Definición 122. *[5] Sea z_0 una singularidad aislada de $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que G es un conjunto abierto, entonces:*

1. *z_0 es una* **singularidad removible** *o* **evitable** *de f si:*
$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = 0.$$

2. *z_0 es un* **polo de orden n** *de f si existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que:*
$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = c, \; c \neq 0.$$
Si $n = 1$, entonces z_0 es llamado un **polo simple**.

3. *z_0 es una* **singularidad esencial** *de f si z_0 no es polo ni es removible.*

Ejemplo 14. *La función $f(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^2}$ tiene una singularidad removible en $z_0 = 0$, porque:*
$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} (z - 0) \left(\frac{1 - \cos(z)}{z^2} \right) = \lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos(z)}{z} = 0.$$

Ejemplo 15. *La función $g(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}$ tiene una singularidad removible en $z_0 = 0$, porque:*
$$\lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} (z - 0) \left(\frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \right) = \lim_{z \to 0} \operatorname{sen}(z) = 0.$$

Ejemplo 16. *La función* $h(z) = \frac{1-\cos(z)}{(z-1)^2}$ *tiene un polo de orden 2 en* $z_0 = 1$*, porque:*

$$\lim_{z\to 0} h(z) = \lim_{z\to 0}(z-1)^2\left(\frac{1-\cos(z)}{(z-1)^2}\right) = 1-\cos(1) \neq 0.$$

Ejemplo 17. *La función* $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ *tiene una singularidad esencial en* $z_0 = 0$*, porque,* z_0 *no es singularidad removible ni es polo.*

Definición 123. *[5] Sean* $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *y* $z_0 \in G$. z_0 *es un* **valor omitido** *o un* **valor excepcional de Picard** *de* f *si:*

$$f(z) \neq z_0 \text{ para todo } z \in G.$$

Al conjunto de valores excepcionales de Picar se le denota por $\mathscr{P}\mathscr{V}(f)$.

Ejemplo 18. *Si* $f(z) = e^z$*, entonces* 0 *y* ∞ *son valores omitidos de la función* f*.*

Ejemplo 19. *Si* $f(z) = \cos(z)$*, entonces* ∞ *es un valor omitido de la función* f*.*

Los siguientes teoremas y sus demostraciones se pueden consultar en [5].

Teorema 124 (Pequeño de Picard)**.** *Si* f *es una función entera que omite dos valores, entonces* f *es constante.*

Teorema 125 (Grande de Picard)**.** *Toda función analítica* f *toma en un entorno arbitrario de un punto singular esencial* z_0 *cualquier valor finito, a excepción, posiblemente, de uno.*

Definición 126. *[14] Sea* f *una función analítica. Si* f *es una* **función trascendete entera** *tenemos que* ∞ *es una singularidad esencial de* f*.*

Al conjunto de funciones trascendentes enteras lo denotaremos por:

$$\mathcal{E} = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \text{ es trascendente entera}\}.$$

Ejemplo 20. *Las siguientes funciones son trascendentes enteras.*

- $f(z) = \lambda e^z, \ \lambda \in \mathbb{C}.$
- $g(z) = \lambda e^z + z, \ \lambda \in \mathbb{C}.$
- $h(z) = \lambda \operatorname{sen}(z), \ \lambda \in \mathbb{C}.$

3.4. Iteración y Puntos Fijos

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función definida en todo el plano complejo. Es posible componer **reiterativamente** la función f consigo misma, es decir, dado $z_0 \in \mathbb{C}$, se tiene que $f(z_0) \in$

$\mathbb{C}$, entonces:

$$\begin{aligned}
(f \circ f)(z_0) =& z_1 \text{ para algún } z_1 \in \mathbb{C},\\
(f \circ f \circ f)(z_0) =& z_2 \text{ para algún } z_2 \in \mathbb{C},\\
(f \circ f \circ f \circ f)(z_0) =& z_3 \text{ para algún } z_3 \in \mathbb{C},\\
&\vdots\\
\underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n-\text{ veces}}(z_0) =& z_n \text{ para algún } z_n \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Al proceso de aplicar f en cada paso se llama una **iteración**.

A continuación, enunciamos la definición formal de iteración de funciones trascendentales enteras.

Definición 127. *[5] Sea $f \in \mathcal{E}$. La* $\mathbf{n-}$**ésima iterada** *de f, no constante, es:*

$$f^n = f \circ f^{n-1}, \text{ cuando } n \geq 2 \text{ con } n \in \mathbb{N},$$

donde $f^1 = f$ y $f^0 = Id$.

La composición se entiende como la multiplicación en el semigrupo $\{f^n : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$. No debe haber confusión con la potenciación ordinaria, que se escribirá explícitamente como $(f(z))^n$ si es necesario.

Ejemplo 21. *Sea $f(z) = z^2$, la n-ésima iterada de f está dada por $f^n = z^{2^n}$.*

Definición 128. *[5] Sean $f \in \mathcal{E}$, y $z_0 \in \mathbb{C}$. z_0 es un* **punto fijo** *de la función f, si:*

$$f(z_0) = z_0.$$

Definición 129. *[5] Sean $f \in \mathcal{E}$, y $z_0 \in \mathbb{C}$. z_0 es un* **punto fijo periódico***, de período n, de la función f, si n es el menor natural que cumple que:*

$$f^n(z_0) = z_0.$$

Observación 130. *Si $f \in \mathcal{E}$, entonces $f^n \in \mathcal{E}$.*

Ejemplo 22. *Sea $f(z) = z^2$. Los complejos 0 y 1 son puntos fijos para f, mientras que $e^{\frac{i2\pi}{3}}$ y $e^{\frac{i4\pi}{3}}$ son periódicos de período 2.*

Definición 131. *[5] Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, la* **órbita hacia adelante** *de z_0 es el conjunto:*

$$O^+(z_0) = \{z_n = f^n(z_0) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si z_0 es un punto periódico de período n, entonces $O^+(z_0)$ es llamado **ciclo***.*

Definición 132. *[5] Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, la* **órbita hacia atras** *de z_0 es el conjunto:*

$$O^-(z_0) = \{z : f^n(z) = z_0, n \in \mathbb{N}\}.$$

Definición 133. *[5] Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. La* **gran órbita** *de z_0 es el conjunto:*

$$O(z_0) = O^-(z_0) \cup O^+(z_0).$$

Definición 134. *[5] Un punto $z_0 \in G \subset \mathbb{C}$ es llamado un* **punto excepcional** *si $O^-(z_0)$ es finito. El conjunto de puntos excepcionales de f es denotado por $E(f)$.*

Definición 135. *[5] Sea z_0 un punto periódico, de período n, de la función f; $\lambda = (f^n)'(z_0)$ es llamado* **multiplicador**.

Observación 136. *De la Definición 135 y la regla de la cadena tenemos que:*

$$(f^n)'(z_0) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(z_0)).$$

La definición 135 puede ser confusa cuando $z = \infty$, ya que el multiplicador $\lambda \neq \lim_{z\to\infty}(f^n)'(z)$, en este caso, λ es igual al recíproco de este número. Por ejemplo, si $f(z) = 2z$, entonces ∞ es punto fijo con multiplicador $\lambda = \frac{1}{2}$. Una vez definidos los multiplicadores, es posible clasificar a los ciclos de puntos periódicos como:

1. **Súper atractor** si $\lambda = 0$;
2. **Atractor** si $0 < \lambda < 1$;
3. **Repulsor** si $|\lambda| > 1$;
4. **Indiferente** si $|\lambda| = 1$;
   a) **Racional indiferente**, si $\lambda^m = 1$, para algún $m \in \mathbb{N}$;
   b) **Irracional indiferente**, si $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Las siguientes definiciones muestran la relación que existe entre el multiplicador y la definición topológica.

Definición 137 (Puntos Atractores)**.** *[5] Un punto fijo z_0 de una función f es atractor si existe una vecindad U de z_0, donde la sucesión $\{f^n|_U\}$ converge uniformemente a la función constante z_0.*

Lema 138 (Características de Punto Atractor)**.** *[5] Un punto fijo para una función holomorfa es* **topológicamente atractor** *si, y sólo si, $|\lambda| < 1$.*

Teorema 139. *[5] Si z_0 es un punto fijo atractor de una función f y f es analítica en la bola $B_R(z_0)$, entonces la familia de iteradas $\{f^n\}$ de f es normal en alguna bola $B_r(z_0)$ de z_0.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, tal que $\epsilon < 1 - |\lambda|$, entonces existe algún $R > r > 0$, tal que para $|z - z_0| < r$ se tiene:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \epsilon.$$

Como $\epsilon < 1 - |\lambda|$, tenemos:

$$\left| \frac{f(z) - z_0}{z - z_0} \right| < |\lambda| + \epsilon < 1.$$

Hagamos $|\lambda| + \epsilon = \rho$. Así:

$$|f(z) - z_0| = \rho |z - z_0| < r.$$

Aplicando f a la última desigualdad obtenemos:

$$|f(f(z)) - z_0| = \rho |f(z) - z_0| < \rho^2 |z - z_0| < \rho^2 r.$$

Siguiendo el proceso, inductivamente tenemos:

$$|f^n(z) - z_0| < \rho^n r \to 0, \text{ cuando } n \to \infty,$$

porque $\rho < 1$. La convergencia es uniforme en la bola $B_r(z_0)$ por la elección inicial de $|z - z_0| < r$. Por lo tanto $\{f^n\}$ es normal en $B_r(z_0)$. □

Definición 140 (Puntos Repulsores). *[5] Un punto fijo z_0 de una función f es* **repulsor** *si existe una vecindad U de z_0 tal que para cada $z \in U - \{z_0\}$ existe $n \geq 1$ que cumple que $f^n \notin U$.*

En otras palabras, la única órbita que está completamente contenida en U es la órbita del punto fijo z_0. Si este es el caso, U es llamada **vecindad aislada bajo iteración**.

Lema 141 (Característica de Punto Repulsor). *[5] Un punto fijo para una función holomorfa f es* **topológicamente repulsor** *si, y sólo si $|\lambda| > 1$.*

Teorema 142. *[5] Si z_0 un punto fijo repulsor de f, y f es una función analítica en U, donde U es una vecindad centrada en z_0, entonces la familia de iteradas $\{f^n\}$ de f no es normal en z_0.*

Demostración. Supóngase que la familia de funciones $\{f^n\}$ es normal en alguna vecindad U de z_0. Entonces $f^n(z_0) = z_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se sigue que f^n no converge a ∞ en U.

Por lo tanto existe alguna subsucesión $\{f^{n_i}\}$ de $\{f^n\}$, que converge uniformemente a una función g sobre U. Así por el Teorema 87 tenemos que $|(f^{n_i})'(z_0)| \to |g'(z_0)|$, pero:

$$(f^{n_i})'(z_0)| = \underbrace{|f'(z_0)| \cdots |f'(z_0)|}_{n_i - \text{ veces}} = |\lambda|^n \to \infty,$$

porque $|\lambda| > 1$ por ser z_0 un punto repulsor de f, pero esto es una contradicción, porque $|(f^{n_i})'(z_0)| \to |g'(z_0)|$.

Por lo tanto, la familia de iteradas de f no es normal en z_0. □

Corolario 143. *[5] Sea $f : U \to U$ una función analítica y supóngase que z_0 es un punto periódico repulsor de f. Entonces la familia de iteradas $\{f^n\}$ de f no es normal en z_0.*

Demostración. Por hipótesis z_0 es un punto periódico de período m. Si definimos $g = f^m$, entonces $g(z_0) = f^{mk}(z_0) = z_0$ para toda k. Aplicando el Teorema 142 se tiene que la familia de iteradas de g no es normal en z_0.

Así, la familia $\{f^{mk}\}$ de f no es normal en z_0, es decir, existe una subsucesión $\{f^{mk}\}$ de funciones de la familia $\{f^n\}$ que no converge uniformemente en vecindades cerradas de U. Por lo tanto la familia de iteradas $\{f^n\}$ no es normal en z_0. □

3.5. Los conjuntos de Fatou y Julia

En esta sección se definen los conjuntos de Fatou y Julia de una función, además se enuncian algunas propiedades básicas de éstos para las funciones trascendentes enteras.

Definición 144. *[5] El* **conjunto de Fatou***, denotado por $\mathscr{F}(f)$, para funciones $f \in \mathcal{E}$ es el conjunto:*

$$\mathscr{F}(f) = \{z \in \mathbb{C} : \ \{f^n\} \text{ está bien definida y es normal en alguna vecindad de } z\}.$$

El **conjunto de Julia***, denotado por $\mathcal{J}(f)$ es el complemento del conjunto de Fatou, es decir:*

$$\mathcal{J}(f) = (\mathscr{F}(f))^c.$$

Proposición 145. *[5] Si $f \in \mathcal{E}$, entonces:*

$$\mathscr{F}(f) = \bigcup_{z \in \mathscr{F}(f)} \mathscr{V}_z,$$

donde $\mathscr{V}_z$ es una vecindad de z y $\{f^n\}$ está bien definida y es normal en $\mathscr{V}_z$.

Demostración. Por la definición de $\mathscr{F}(f)$ tenemos que $\mathscr{F}(f) \subset \bigcup_{z \in \mathscr{F}(f)} \mathscr{V}_z$. Recíprocamente, si $z_0 \in \mathscr{F}(f)$ y $\mathscr{V}_{z_0}$ su respectiva vecindad, entonces $\mathscr{V}_{z_0}$ es un conjunto abierto por ser una vecindad. Así, tenemos que para todo $z \in \mathscr{V}_{z_0}$ existe $\mathscr{V}_z$, tal que $\mathscr{V}_z \subset \mathscr{V}_{z_0}$. Como $\{f^n\}$ está bien definida y es normal en $\mathscr{V}_{z_0}$, entonces $\{f^n\}$ está bien definida y es normal en $\mathscr{V}_z$, por lo que $\mathscr{V}_{z_0} \subset \mathscr{F}(f)$, para todo $z_0 \in \mathscr{F}(f)$, por lo tanto $\bigcup_{z \in \mathscr{F}(f)} \mathscr{V}_z \subset \mathscr{F}(f)$. □

A continuación se presentan dos propiedades básicas de los conjuntos de Fatou y Julia y sus demostraciones.

Teorema 146. *[5] Si $f \in \mathcal{E}$ se tienen las siguientes propiedades:*

1. *$\mathscr{F}(f)$ es un conjunto abierto y $\mathcal{J}(f)$ es un conjunto cerrado.*
2. *$\mathscr{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f)$ son completamente invariantes.*

Demostración.

1. Por la Proposición 145 tenemos que $\mathscr{F}(f)$ es la unión arbitraria de conjuntos abiertos, por lo que $\mathscr{F}(f)$ es un conjunto abierto. Al ser $\mathcal{J}(f)$ el complemento de un conjunto abierto, entonces $\mathcal{J}(f)$ es un conjunto cerrado.

2. El conjunto de Fatou es completamente invariante si se cumple que:

$$z_0 \in \mathscr{F}(f) \Leftrightarrow f(z_0) \in \mathscr{F}(f).$$

($\Rightarrow$) Sea $z_0 \in \mathscr{F}(f)$, entonces existe una vecindad $\mathscr{V}_0 = \{z : |z - z_0| < r_0\}$, tal que la familia $\{f^n\}$ es normal. Elegimos $r_1 > 0$, tal que $\mathscr{V}_1 \subset f(\mathscr{V})$, donde $\mathscr{V}_1 = \{z : |z - f(z_0)| < r_1\}$ y $\mathscr{V} = \{z : |z - f(z_0)| < \frac{r_0}{2}\}$, entonces la familia $\{f^{n-1}\}$ es normal en $\mathscr{V}_1$, por lo tanto $f(z_0) \in \mathscr{F}(f)$.

($\Leftarrow$) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, tal que $f(z_0) \in \mathscr{F}(f)$, entonces, como $\mathscr{F}(f)$ es abierto, existe un abierto $W \subset \mathscr{F}(f)$, tal que $f(z_0) \in W$. Elegimos $r_0 > 0$ tal que $\mathscr{V} = \{z :$

$|z - f(z_0)| < r_0\} \subset W$, entonces la familia $\{f^n\}$ es normal en $\mathscr{V}$. Ahora elegimos $\mathscr{V}' = \{z : |z - z_0| < r_1\}$, tal que $f(z) - f(z_0) < \frac{r_0}{2}$ para $z \in \mathscr{V}'$, entonces la familia $\{f^{n+1}\}$ es normal en $\mathscr{V}'$, con lo cual concluimos que $z_0 \in \mathscr{F}(f)$.

Por lo tanto el conjunto de Fatou $\mathscr{F}(f)$ es completamente invariante. Más aún, como $\mathcal{J}(f)$ es el complemento de un conjunto completamente invariante, se sigue qué $\mathcal{J}(f)$ también es completamente invariante.

□

Las propiedades anteriores fueron demostradas por Fatou en 1926.

3.6. Ejemplos de los conjuntos de Fatou y Julia

En esta sección daremos algunos ejemplos de los conjuntos de Fatou y Julia, donde se pueden observar las propiedades del Teorema 20. Para poder dar los ejemplos necesitamos la siguiente definición.

El plano de parámetros se define como el conjunto de todos los parámetros tal que la sucesion de iteradas de una función $f \in \mathcal{E}$ es acotada, es decir,

$$\mathbb{M} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \{f\}^n \text{es acotada}\}.$$

El plano dinámico de una función dado un parámetro fijo λ_0 está definido como el siguiente conjunto:

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \{f_{\lambda_0}(z)\}^n \text{es acotada}\}.$$

El ejemplo que se enuncia a continuación está relacionado con la familia de funciones $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ que se encuentra en la clase de funciones en $\mathcal{E}$, donde λ es el parámetro. Recordemos que para funciones en la clase $\mathcal{E}$ el infinito es una singularidad escencial.

Ejemplo 23. *Sea la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$, con $|\lambda| < 1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Observemos que la familia $\lambda \operatorname{sen} z$ tiene un punto fijo en $z = 0$, dado que una solución de la ecuación $\lambda \operatorname{sen} z = z$ es cero. Ahora, veamos que tipo de punto fijo es, para eso tomamos:

$$|f'_\lambda(0)| = |\lambda \cos(0)| = |\lambda| < 1.$$

La desigualdad anterior confirma que $z = 0$ es un punto fijo atractor. Así, por el Teorema 18 la familia de iteradas es normal en alguna vecindada de cero. En otras palabras el punto fijo $z = 0$ pertenece al conjunto de Fatou. Con esto en mente, ahora podemos enunciar el siguiente resultado, véase la demostración en el artículo [6] de Domínguez y Sienra.

Resultado 1. La familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$, con $|\lambda| < 1$, tiene una componente atractora simplementa conexa y completamente invariante en el conjunto de Fatou.

El plano de parámetros de la familia $f_\lambda(z) = \lambda \operatorname{sen} z$ se puede programar usando programas como Mathematica y Fractal Stream. En la Figura 3.1 se muestra el plano de parámetros, en él color negro se encuentran todos los parámetros λ para los cuales la sucesión de iteradas está acotada. Los diferentes colores rojos son la velocidad con que las sucesiones de iteradas convergen más rápido a infinito. El color amarillo denota la frontera del conjunto. Para poder visulaisar los conjuntos de Fatou y Julia, debemos tomar un pa-

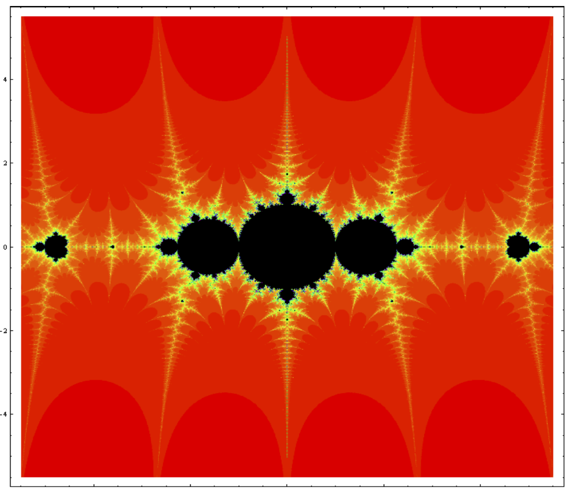


Figura 3.1: Plano de parámetros

rámetro λ fijo. Tomemos el parámetro λ que cumpla $|\lambda| < 1$. El plano dinámico se muestra en la Figura 3.2. Observar que el conjunto de Fatou, en color negro, consiste de una sola

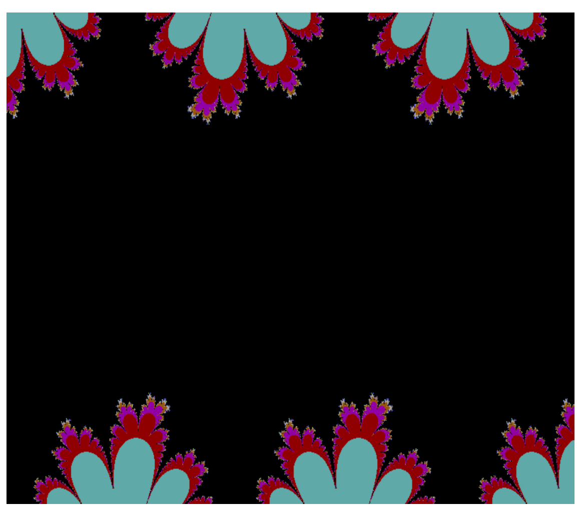


Figura 3.2: Plano dinámico

coponente U que es completamente invariante, es decir, $f_\lambda(U) \subset U$ y $f_\lambda^{-1}(U) \subset U$. Esto muestra una de las propiedades enunciadas en el Teorema 20.

3.6.1. Trabajo a Futuro

1. Estudiar otras propiedades básicas de los conjuntos de Fatou y Julia.

2. Investigar iteración de las funciones trascendentes enteras y otro tipo de clases de funciones con polos, como lo es la función $\tan(z)$, que es una función que tiene dominio los complejos e imagen la esfera.

3. Estudiar programación para poder graficar los conjuntos de parámetros de familia de funciones y los conjuntos de Fatou y Julia en el plano dinámico.

Referencias

[1] Angoa Amador, J., Arroyo García, J., Contreras Carreto, A., y otros. *Álgebra I.* Textos Científios Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2007.

[2] Conway, J. *Functions of one complex variable.* Springer, 1995.

[3] Derrick, William R. y Rosales, M. A. *Variable compleja con aplicaciones.* Grupo Editorial Iberoamericana, 1987.

[4] Domínguez Soto, P., Cano Cordero, L. A., y Hernández Orzuna, I. *Complex analysis.* Textos Científios Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2017.

[5] Domínguez Soto, P., y Contreras Hernández, V. *Dinámica holomorfa, los conjuntos de Fatou y Julia y algunas de sus propiedades de tres clases de funciones meromorfas.* Textos Científios Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.

[6] Domínguez Soto, P., and Sienra, G. *A Study of the Dynamics of* $\lambda \sin z$. International Journal of Bifurcation and Chaos *12* (2002), 2869–2883.

[7] Ferreyra, D. E., González, L. J., y Levis, F. E. *Primeros conceptos de análisis complejo.* http://www.unlpam.edu.ar/images/extension/edunlpam/QuedateEnCasa/primeros-conceptos-de-analisis-complejo.pdf.

[8] Hidalgo Solís, L. *Variable Compleja I.* Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, 2006.

[9] Hou Hua, X., and Chun Yang, C. *Dynamics of Transcendental Functions.* Gordon and Breach Science Publishers, 1998.

[10] Molero Aparicio, M., Salvador Alcaide, A., Menárguez Palanca, T., y Garmendia Salvador, L. *Análisis matemático para ingeniería.* Pearson Educación, 2007.

[11] Munkres, J. *Topology.* Pearson Education, 2014.

[12] Palmas, O., y Lazcano, A. *Notas para un curso de Variable Compleja I.*, Facultad de Ciencias UNAM, 2020.

[13] Raggi Cárdenas, M. G., Escamilla Reyna, J. A., y Mendoza Torres, F. J. *Introducción a la teoría de espacios métricos.*

[14] Yazlle, J. *Variable Compleja.*(Apuntes de cátedra), 2016.