



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD

AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA

“LUIS RIVERA TERRAZAS”



+

**Hacia un álgebra de Lie para el
f-oscilador cuántico**

TESIS PRESENTADA POR

JOSÉ IGNACIO PERALTA CID

COMO REQUISITO PARA OBTENCIÓN DEL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS

(FÍSICA)

DIRIGIDA POR

Dr. Alejandro Palma Almendra

Noviembre de 2014

Índice general

Índice general	I
Agradecimientos	III
Dedicatoria	V
Introducción	VI
1. Álgebras de Lie	1
1.1. Campo y Espacio Vectorial	1
1.2. Nociones de álgebras de Lie	3
1.3. Álgebras $su(2)$ y $su(1,1)$	6
2. f-osciladores	9
2.1. Oscilador Armónico	11
2.2. q-osciladores	12
2.3. El q-oscilador Clásico	15
2.4. f-osciladores	18
3. Método de Wei-Norman	21
3.1. Teorema de Wei- Norman	21
3.2. El Método de Wei-Norman	23

4. Aplicaciones	27
4.1. Álgebra $su(2)$	27
4.2. Álgebra $su(1,1)$	30
4.3. q-osciladores	32
4.4. f-osciladores	33
4.5. Potencial de Pöschl-Teller Modificado	35
4.5.1. Álgebra $su(2)$	39
4.5.2. Álgebra $su(1,1)$	39
4.6. Hamiltoniano de Caldirola-Kanai	40
5. Conclusiones	43
Bibliografía	46

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado bajo la atinada dirección del Dr. Alejandro Palma Almendra, Investigador Titular del Instituto de Física de la BUAP, a quién no sólo agradezco por su interés en la elaboración de esta tesis, sino también por el estímulo que siempre me brindó.

Agradezco al Instituto de Física “Luis Rivera Terrazas” por su apoyo para la realización de mis estudios de posgrado; a mis maestros, especialmente al Dr. José Luis Carrillo Estrada por su apoyo y motivación; a Mónica Hernández, Margarita Muñoz y a todos los integrantes del Instituto que de una forma u otra contribuyeron a mi formación académica.

Debo agradecer a la VIEP por el apoyo que me brindó durante el desarrollo de esta tesis.

A mis sinodales Dr. Emerson L. Sadurní, Dr. Carlos Pando y Dr. Umapada Pal les agradezco su apoyo para culminar esta etapa en mi formación académica, especialmente al Dr. Sadurní quien con sus excelentes comentarios y sugerencias contribuyó a mejorar este trabajo.

Finalmente, agradezco al Dr. Raúl A. Brito Orta y al Dr. Javier Olvera Hernández †, por su amistad y estímulo tanto en mi formación personal como académica.

*Esta investigación fue realizada
con el apoyo del Consejo de Cien-
cia y Tecnología del Estado de Puebla.*

Dedico este trabajo a:

Mi Madre Celia Cid Mota †

Por quien soy y a quien todo debo

Mi esposa y compañera Joaquina Madero García

Por su cariño, comprensión y apoyo

Mis hijos Ignacio, Daniel y Belén

Que son mi todo

Zadorov Amín Peralta Márquez

Quien llegó a alegrar mi existencia

Introducción

**It is more important
to have beauty in one's
equation than to have
them fit experiment.**

P. A. M. Dirac

I. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es obtener el álgebra de Lie para el f-oscilador cuántico, ver si ésta cumple los criterios de solubilidad para un álgebra y establecer con ello su equivalencia con otros problemas que conducen a la misma álgebra.

Se busca también obtener las ecuaciones diferenciales asociadas con el álgebra de Lie correspondiente y ver si éstas pueden realmente resolverse por métodos analíticos o por cuadraturas.

El concepto de álgebras de Lie solubles está muy relacionado al concepto de grupo, cuyo origen puede trazarse históricamente desde la solución a la ecuación algebraica de grado n , cuando $n \geq 5$ [1].

Aun cuando ya se habían encontrado las soluciones a las ecuaciones cúbicas y de grado cuarto, los esfuerzos realizados por personalidades como Euler, Lagrange, entre otros, por encontrar la solución de la ecuación de quinto grado por radicales fracasó.

Por fin, Abel a principios del siglo XIX y un poco antes P. Ruffini, a finales

del siglo XVIII, demostraron independientemente, la imposibilidad de encontrar soluciones por radicales a la ecuación general de grado mayor que cuatro.

La importancia de la prueba de Abel está en que inspiró a Galois, quien en algún momento creyó haber encontrado la solución a la ecuación de grado quinto por radicales, a buscar más profundamente la fuente de solubilidad de la ecuación de grado $n \geq 5$, encontrándolo en el concepto de grupo introducido por él mismo y desarrollando una nueva herramienta que ahora se conoce como teoría de grupos [2, 3]. Esta aportación de Galois es reconocida también en textos elementales de álgebra [4], aunque con ciertos errores.

El descubrimiento por Lagrange de las permutaciones fue de gran importancia para el desarrollo de la teoría general de grupos; pues sugirieron los grupos abstractos, que finalmente, motivaron a Lie en su invención de los grupos continuos y con ello a la teoría de transformaciones de grupo dando lugar a los llamados grupos solubles o, si se prefiere, a las álgebras solubles de Lie. El concepto de álgebras de Lie solubles se ha aplicado a muy diversos problemas entre los que podemos citar “The linear time – dependent potential” [5], “The one mode – field perturbed harmonic oscillator” [6] y “The Caldirola-Kanai Hamiltonian” [7]. Previamente a estos trabajos existen otras aplicaciones interesantes a otros problemas que ya se han convertido en clásicos de referencia obligada [10].

Otro concepto basado sobre las álgebras de Lie y que ha despertado mucho interés es el del q-oscilador:

Macfarlane [11], generalizando el modelo de Schwinger del momento angular cuántico, desarrolla un formalismo para la q- deformación del álgebra del oscilador armónico cuántico. Casi simultáneamente partiendo del enfoque de Jordan-Schwinger para el álgebra de Lie $su(2)$ (“su” es la abreviación en inglés de “special unitary”) el cual consiste en que mapea dos espinores independientes sobre los operadores de bosón J_+ , J_- y J_z , definiéndolos adecuadamente, Biedenharn [12] usando un análogo q del mapeo de Jordan-Schwinger [13], desarrolla un q-análogo del oscilador armónico y construye el cálculo de los operadores de

bosón. A los osciladores que resultan de estas contribuciones se les conoce ahora como q -osciladores.

Los f -osciladores fueron propuestos originalmente por V.I. Man'ko et al. [14, 15, 16]. En esta contribución se estudian los q -osciladores, los cuales se obtienen transformando los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico con la introducción de un parámetro adimensional.

Con estos nuevos operadores y el operador de número tradicional, obtienen las relaciones de conmutación usuales reemplazando en todos lados los operadores del oscilador armónico por los nuevos operadores que podemos denominar q -operadores, excepto el conmutador del operador de creación con el de aniquilación, el cual es ahora diferente de la unidad. Vía la generalización de la q -deformación del álgebra del oscilador armónico se obtienen los f -osciladores.

Cuando el álgebra es soluble, el método de Wei-Norman permite encontrar la solución a ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con operadores lineales dependientes del tiempo, conduce necesariamente a un conjunto de ecuaciones diferenciales que pueden integrarse por cuadraturas. Existen algunos problemas como el hamiltoniano de Caldirola- Kanai [7], que tienen asociada un álgebra no soluble, sin embargo, las ecuaciones diferenciales pueden integrarse analíticamente.

En el primer capítulo exponemos algunas nociones sobre el álgebra de Lie y las características que definen las álgebras $su(2)$ y $su(1,1)$. En el segundo, desarrollamos el formalismo del q -oscilador y el de los f -osciladores, para continuar con el capítulo tercero con el método de Wei-Norman. El último capítulo está dedicado a las aplicaciones de la teoría a casos específicos.

Capítulo 1

Álgebras de Lie

Me parece que ha llegado
el momento de hacer un progreso
análogo (al de Galois) para las
ecuaciones diferenciales.

Sophus Lie

En este capítulo estudiamos los conceptos básicos sobre las álgebras de Lie. Sin embargo, antes de definir las, introducimos dos conceptos en los que se basa la definición de estas álgebras; estos conceptos son: *campo* y *espacio vectorial lineal* [17]:

1.1. Campo y Espacio Vectorial

Un **campo** K está constituido por una colección de elementos f_0, f_1, f_2, \dots , y dos operaciones, la adición (+) y la multiplicación (\cdot), tal que se cumple:

$$\begin{aligned}
 f_i + f_j &\in K && \text{propiedad de cerradura} \\
 f_i + (f_j + f_k) &= (f_i + f_j) + f_k && \text{propiedad asociativa} \\
 f_0 + f_i &= f_i = f_i + f_0 && \text{existencia del elemento identidad} \\
 f_i + (-f_i) &= (-f_i) + f_i = f_0 && \text{existencia de un inverso único} \\
 f_i + f_j &= f_j + f_i && \text{propiedad conmutativa}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
 f_i \cdot f_j &\in K && \text{propiedad de cerradura} \\
 f_i \cdot (f_j \cdot f_k) &= (f_i \cdot f_j) \cdot f_k && \text{propiedad asociativa} \\
 f_i \cdot 1 &= 1 \cdot f_i = f_i && \text{existencia del elemento identidad} \\
 f_i \cdot f_i^{-1} &= f_i^{-1} \cdot f_i = 1, (f_i \neq f_0) && \text{existencia de un inverso único,} \\
 f_i \cdot (f_j + f_k) &= f_i \cdot f_j + f_i \cdot f_k && \text{propiedad distributiva} \\
 (f_i + f_j) \cdot f_k &= f_i \cdot f_k + f_j \cdot f_k &&
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Si

$$f_i \cdot f_j = f_j \cdot f_i$$

el campo K es conmutativo.

Los campos más usados en física son el de los números reales, complejos y en menor grado los cuaterniones.

Un **espacio vectorial lineal** V consta de:

Un conjunto de elementos $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \in V$, llamados vectores, una colección $f_0, f_1, f_2, \dots \in K$, junto con dos operaciones, la adición vectorial (+), y el producto escalar (\cdot), tal que se cumple:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in V &\Rightarrow \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j \in V && \text{propiedad de cerradura} \\
 \mathbf{v}_i + (\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k) &= (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) + \mathbf{v}_k && \text{propiedad asociativa} \\
 \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_i && \text{existencia del elemento identidad} \\
 \mathbf{v}_i + (-\mathbf{v}_i) &= (-\mathbf{v}_i) + \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 && \text{existencia del elemento inverso} \\
 \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j &= \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i && \text{propiedad conmutativa} \\
 f_i \in K, \mathbf{v}_j \in V &\Rightarrow f_i \cdot \mathbf{v}_j \in V && \text{propiedad de cerradura} \\
 f_i \cdot (f_j \cdot \mathbf{v}_k) &= (f_i \cdot f_j) \cdot \mathbf{v}_k && \text{propiedad asociativa} \\
 1 \cdot \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_i \cdot 1 && \text{existencia del elemento identidad} \\
 f_i \cdot (\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k) &= f_i \cdot \mathbf{v}_j + f_i \cdot \mathbf{v}_k \\
 (f_i + f_j) \cdot \mathbf{v}_k &= f_i \cdot \mathbf{v}_k + f_j \cdot \mathbf{v}_k && \text{propiedad de bilinealidad.}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.2. Nociones de álgebras de Lie

Existe una gran variedad de textos sobre la teoría de Lie algunos de ellos son el de Gilmore [17], Hausner y Schwartz [18], Greiner y Muller [19]. Aquí seguimos en términos generales aquellos de Gilmore, Hausner y Schwartz.

La cantidad fundamental en la teoría de Lie, es el conmutador o derivada de Lie denotada por $[\cdot, \cdot]$.

Definición: Un álgebra de Lie, L , sobre un campo K , es un espacio vectorial sobre K , el cual posee una transformación o mapeo

$$[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$$

tal que:

(a) es bilineal

$$[\mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}] = a[\mathbf{u}, \mathbf{v}] + b[\mathbf{u}, \mathbf{w}]$$

$$[a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}] = a[\mathbf{u}, \mathbf{w}] + b[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \quad (1.4)$$

para $a, b \in K$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in L$

(b) es antisimétrica

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}] \quad (1.5)$$

para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$.

(c) satisface la identidad de Jacobi

$$[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] = 0 \quad (1.6)$$

para $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in L$.

Un álgebra de Lie, se dice abeliana sí $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0$.

En el caso particular de matrices el conmutador $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$, está definido por

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u} \quad (1.7)$$

y las condiciones (a), (b), y (c) se cumplen automáticamente.

Similarmente en el caso de un álgebra de Lie para operadores el conmutador $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ está definido por

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\phi = \mathbf{u}(\mathbf{v}\phi) - \mathbf{v}(\mathbf{u}\phi) \quad (1.8)$$

para cualquier par de operadores \mathbf{u}, \mathbf{v} y para cualquier elemento ϕ del espacio vectorial sobre el cual actúen.

Con un álgebra de Lie finita, es decir L es un espacio vectorial de dimensión finita y $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{j=n}$ una base de L , dada la bilinealidad del conmutador, el valor de $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$ arbitrarios queda determinado por los valores de $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$), ya que si $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ y $\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j$ se tiene

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = [u^i \mathbf{e}_i, v^j \mathbf{e}_j] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u^i v^j [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] \quad (1.9)$$

Por otro lado $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]$ debe pertenecer a L y según Gilmore[17]

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = \sum_k c_{ij}^k \mathbf{e}_k \quad (1.10)$$

los C_{ij}^k son n^3 escalares llamados constantes de estructura. Dado que el conmutador es antisimétrico en i y j , las constantes de estructura son antisimétricas en los subíndices

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \quad (1.11)$$

también, de la identidad de Jacobi tenemos que

$$\sum_{mn} \{c_{ij}^m c_{mk}^n + c_{jk}^m c_{mi}^n + c_{ki}^m c_{mj}^n\} = 0 \quad (1.12)$$

Definición. Sea L un álgebra de Lie. Una subálgebra, M de L , es un subconjunto de L el cual es un álgebra de Lie con las operaciones heredadas de L .

Debido a que muchas propiedades que definen un álgebra de Lie se cumplen automáticamente para cualquier subconjunto de un álgebra dada (por ejemplo, la antisimetría y bilinealidad del conmutador) basta usar el criterio dado por el siguiente teorema para mostrar que algún subconjunto es o no una subálgebra.

Teorema. Sea L una álgebra de Lie y M una subálgebra de L . M es una subálgebra de L si y sólo si para $\mathbf{u} \in M$, $\mathbf{v} \in L$ y $a \in K$, los elementos $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $a\mathbf{u}$ y $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \in M$.

Definición. Sean L una álgebra de Lie y M una subálgebra de L . M es una subálgebra invariante de L o un *ideal* en L si para $\mathbf{u} \in M$ y $\mathbf{v} \in L$, $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$

pertenece a M . Así, dada un álgebra de Lie, podemos construir un ideal a partir de la subálgebra que se deriva de los conmutadores de M ,

$$L^{(1)} = [L, L] \tag{1.13}$$

claramente $[L^{(1)}, L] \subset L^{(1)}$, es por eso que es un ideal. Si $L^{(1)} \neq L, \{0\}$ podemos seguir este proceso y encontrar la subálgebra derivada de

$$L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}] \tag{1.14}$$

y podemos continuar el proceso indefinidamente.

Es claro que L misma y $\{0\}$ son ideales de L y que si L es abeliana, cualquier subálgebra de L es invariante.

Definición. Un álgebra de Lie, es simple si no es abeliana y no posee otros ideales además de L y $\{0\}$. L es semisimple si el único ideal abeliano que contiene es $\{0\}$.

Definición. Se dice que un álgebra de Lie es soluble si la serie de subálgebras derivadas termina con $L^{(k)} = \{0\}$ para algún k .

Según las definiciones precedentes se sigue que toda álgebra de Lie abeliana es soluble y que las álgebras simples no son solubles.

1.3. Álgebras $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{su}(1,1)$

El álgebra $\mathfrak{su}(2)$ es una c-álgebra (esto es, un álgebra sobre el campo de los números complejos) de operadores auto-adjuntos $\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_y, \mathbf{J}_z$ que obedecen las

relaciones de conmutación [20]

$$[\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_y] = i\mathbf{J}_z, \quad [\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_x] = i\mathbf{J}_y, \quad [\mathbf{J}_y, \mathbf{J}_z] = i\mathbf{J}_x \quad (1.15)$$

Por otro lado definiendo los operadores

$$\mathbf{J}_\pm = \mathbf{J}_x \pm i\mathbf{J}_y, \quad \mathbf{J}_+^+ = \mathbf{J}_- \quad (1.16)$$

no es difícil verificar que

$$[\mathbf{J}_+, \mathbf{J}_-] = 2\mathbf{J}_z, \quad [\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_\pm] = \pm\mathbf{J}_\pm \quad (1.17)$$

Al álgebra de Lie generada por los operadores, \mathbf{J}_x , \mathbf{J}_y y \mathbf{J}_z se le conoce como álgebra $\mathbf{su}(2)$. La nomenclatura tiene su origen en la teoría de grupos. No obstante, los aspectos formales de dicha teoría no son tratados en este trabajo.

Por otra parte, los generadores del álgebra de Lie $\mathbf{su}(1,1)$ son los operadores hermíticos o autoadjuntos \mathbf{K}_x , \mathbf{K}_y y \mathbf{K}_z que satisfacen las relaciones de conmutación [20].

$$[\mathbf{K}_x, \mathbf{K}_y] = -i\mathbf{K}_z \quad [\mathbf{K}_y, \mathbf{K}_z] = i\mathbf{K}_x \quad [\mathbf{K}_z, \mathbf{K}_x] = i\mathbf{K}_y \quad (1.18)$$

Nótese que la diferencia entre las relaciones de conmutación de $\mathbf{su}(1,1)$ y el conjunto de conmutadores de $\mathbf{su}(2)$ es el signo del conmutador correspondiente a las componentes x y y . Como en el caso de los operadores de $\mathbf{su}(2)$, los operadores de $\mathbf{su}(1,1)$ pueden interpretarse como las componentes de un vector en un espacio tridimensional. Pero el espacio de los operadores de $\mathbf{su}(1,1)$ ya no es el espacio euclidiano de los operadores de $\mathbf{su}(2)$. Formalmente, al primero se le conoce como el espacio $(2 + 1)$ -dimensional de Minkowski, en el cual los productos punto y

cruz entre dos vectores. \mathbf{a} y \mathbf{b} , se definen como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y - a_z b_z \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i &= - \sum_{j,k=x,y,z} \epsilon_{ijk} a_j b_k \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z &= - \sum_{j,k=x,y,z} \epsilon_{zjk} a_j b_k \end{aligned} \quad (1.20)$$

Aquí, $\epsilon_{x,y,z}$ es +1 (-1) para permutaciones pares (impares) de x, y, z ; $\epsilon_{i,j,k} = 0$ si dos de los subíndices i, j, k se repiten. Nótese también que el producto escalar ecuación (1.19) no tiene las propiedades del producto escalar euclidiano, pues por ejemplo la norma de un vector $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ no necesariamente es positivo.

Definiendo

$$\mathbf{K}_\pm = \mathbf{K}_x \pm i\mathbf{K}_y, \quad \mathbf{K}_+^+ = \mathbf{K}_- \quad (1.21)$$

y usando las relaciones (1.18), obtenemos las relaciones de conmutación

$$[\mathbf{K}_z, \mathbf{K}_\pm] = \pm\mathbf{K}_\pm \quad [\mathbf{K}_+, \mathbf{K}_-] = -2\mathbf{K}_z \quad (1.22)$$

Capítulo 2

f-osciladores

**What immortal hand or eye
could frame thy fearful symmetry?**

William Blake

Como se sabe el modelo de oscilador armónico es uno de los más usados en la física teórica; sin embargo, su aplicación se restringe a sistemas que permanezcan cercanos a su punto de equilibrio. En sistemas donde la amplitud de las oscilaciones es suficientemente grande, tal modelo es insuficiente para la descripción de sistemas no lineales por lo que se hace necesario recurrir al uso de un formalismo más general.

Un camino conveniente a seguir es generalizar el álgebra del oscilador armónico por medio de una transformación no canónica de los operadores armónicos mediante una deformación.

Vale la pena recordar aquí que Born, Jordan y Heisenberg en 1926 definieron una transformación canónica en mecánica cuántica [21] como el cambio de variables $q \rightarrow Q$, $p \rightarrow P$ si preserva la relación de conmutación $[q, p] = i\hbar 1$; es decir,

$$pq - qp = -i\hbar 1 \iff PQ - QP = -i\hbar 1$$

dado que esta es una condición suficiente para recobrar las ecuaciones de movimien-

to de Heisenberg.

Actualmente se considera que una transformacion canónica es aquella que preserva la relación de conmutación entre operadores[22]:

Si U es un operador lineal con un inverso U^{-1} ,

$$UU^{-1} = U^{-1}U = 1$$

entonces el mapeo

$$A \rightarrow \tilde{A} = UAU^{-1}$$

es canónico debido a que dado $[A, B] = C$ tenemos

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A} = U[A, B]U^{-1} = \tilde{C}$$

La idea básica es mantener la estructura algebraica del hamiltoniano pero con una definición de los operadores de creación y aniquilación de manera que, en términos de estos operadores, el hamiltoniano reproduzca el comportamiento del sistema.

Como mencionamos en la Introducción, los q-osciladores introducidos independientemente por Macfarlane [11] y Biedenharn [12], pueden ser interpretados (Man'ko et al. [14]) como osciladores no lineales con una no linealidad específica, siendo ésta, la dependencia de la frecuencia con el coseno hiperbólico de la energía. Man'ko et al. [15, 16] generalizan el concepto de q-osciladores simplemente seleccionando otras dependencias funcionales diferentes de aquella de los q-osciladores. Podemos llamar a éstos f-osciladores donde f es ahora la función que determina la dependencia de la frecuencia con la energía.

En la sección 2.1 damos las relaciones básicas para el oscilador armónico, en la sección 2.2 y 2.3 estudiamos los q-osciladores y en la sección 2.4 los f-osciladores.

2.1. Oscilador Armónico

Dado que tanto el concepto de q-osciladores como el de f-osciladores se refieren a osciladores no lineales, siguiendo a Man'ko et al. [15], nos valemos del modelo de oscilador armónico cuántico, para la introducción de aquéllos, presentando sólo las relaciones básicas necesarias.

Con los operadores de aniquilación y creación definidos por

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\{x + ip\} \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\{x - ip\} \quad (2.1)$$

donde hemos utilizado las así llamadas unidades naturales ($\hbar = 1, m = 1$ y $w = 1$) con

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (2.2)$$

Definiendo el operador de número

$$N = a^+a \quad N|n\rangle = n|n\rangle \quad (2.3)$$

se tiene que

$$[a, a^+] = 1 \quad [N, a] = -a \quad [N, a^+] = a^+ \quad (2.4)$$

y

$$H = \frac{w}{2}(a^+a + aa^+) \quad (2.5)$$

Con ayuda de las ecuaciones (2.4), (2.5) y la ecuación de movimiento de Heisenberg

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -i[A, H] \quad (2.6)$$

obtenemos

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -iwa \quad \frac{\partial a^+}{\partial t} = iwa^+ \quad (2.7)$$

con soluciones

$$a(t) = a(0)e^{-i\omega t} \quad a^+(t) = a^+(0)e^{i\omega t} \quad (2.8)$$

Tenemos entonces que para este sistema la amplitud de las oscilaciones es lineal en los operadores bosónicos y la frecuencia ω es independiente del nivel de excitación del oscilador.

Definiendo

$$a|0\rangle = 0 \quad (2.9)$$

tenemos

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{n!}|0\rangle \quad (2.10)$$

que es la base para los operadores H y N .

2.2. q-osciladores

Los q-osciladores pueden ser introducidos definiendo los números q-enteros n_q

$$n_q = \frac{\text{senh}(\lambda n)}{\text{senh}(\lambda)} \quad q = e^\lambda \quad (2.11)$$

donde q y λ son parámetros complejos adimensionales. Si $\lambda = 0$ entonces $q = 1$ y los q-enteros n_q coinciden con n . Notemos que el término “q-enteros” es solamente una etiqueta, pues para cualesquiera otros valores de λ los n_q no son enteros pero sí función de enteros.

Con la ayuda de la ecuación (2.11) podemos generalizar el álgebra del oscilador armónico y obtener el álgebra de los q-osciladores o q-análogos del oscilador armónico como se les conoce.

Para ello, procedemos como sigue:

Definimos los q-operadores por su acción sobre el estado propio $|n\rangle$ del

oscilador armónico

$$a_q|n \rangle = \sqrt{n_q}|n-1 \rangle \quad a_q^+|n \rangle = \sqrt{(n+1)_q}|n+1 \rangle \quad (2.12)$$

y el q-operador de número

$$N_q = a_q^+ a_q \quad N_q|n \rangle = n_q|n \rangle \quad (2.13)$$

en completa analogía con las relaciones (2.2) y (2.3) para el oscilador armónico.

Con la ayuda de las relaciones (2.12) y (2.13), obtenemos¹

$$a_q a_q^+ = (N+1)_q \quad (2.14)$$

también

$$[a_q, N] = a_q \quad [a_q^+, N] = -a_q^+ \quad (2.15)$$

$$[a_q, a_q^+] = (N+1)_q - N_q = \frac{\text{senh}(\lambda(N+1)) - \text{senh}(\lambda N)}{\text{senh} \lambda} = F(N) \quad (2.16)$$

Además de las relaciones de conmutación, tenemos, usando las relaciones (2.13) y (2.14), la llamada *relación de reordenamiento*[11]

$$a_q a_q^+ - q a_q^+ a_q = q^{-N} \quad (2.17)$$

Esta expresión representa una deformación de algún tipo de la relación de conmutación del oscilador armónico; también es usualmente tomada como la definición de los q-osciladores.

Vale la pena notar que los operadores a_q y a_q^+ pueden ser expresados en términos de los operadores a y a^+ :

¹Por cierto la contribución de Manko et al. tiene un error en la ecuación(2.14) de la referencia [14]

$$a_q|n \rangle = \frac{\sqrt{n_q}}{\sqrt{n}} \sqrt{n}|n-1 \rangle = \sqrt{\frac{n_q}{n}} a|n \rangle = a \sqrt{\frac{N_q}{N}} |n \rangle \quad (2.18)$$

Es decir

$$a_q = af(N) \quad y \quad a_q^+ = f(N)a^+ \quad (2.19)$$

y

$$f(N) = \sqrt{\frac{N_q}{N}} \quad (2.20)$$

Nótese que a_q también puede ser escrita en la forma

$$a_q = f(N+1)a \quad (2.21)$$

pues

$$a_q|n \rangle = f(N+1)a|n \rangle = f(N+1)\sqrt{n}|n-1 \rangle = f(n)a|n \rangle = af(N)|n \rangle$$

de (2.21) se sigue que

$$a_q^+ = a^+ f(N+1) \quad (2.22)$$

con ayuda de las relaciones (2.13), (2.14) y (2.16) obtenemos

$$[a_q, N_q] = F(N)a_q \quad [a_q^+, N_q] = -a_q^+ F(N) \quad (2.23)$$

también de las relaciones (2.20), 2.21) y (2.22) se sigue que

$$[a_q, a_q^+] = (N+1)f^2(N+1) - Nf^2(N) \quad (2.24)$$

El hamiltoniano para el q-oscilador se define de tal forma que tenga la forma del hamiltoniano para el oscilador armónico:

$$H_q = \frac{w}{2} \{a_q a_q^+ + a_q^+ a_q\} \quad (2.25)$$

y de la ecuación de movimiento de Heisenberg

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -i[A, H] \quad (2.26)$$

obtenemos

$$\frac{\partial a_q(t)}{\partial t} = -i\frac{w}{2}\{F(N+1) + F(N)\}a_q \quad (2.27)$$

Definimos

$$\Omega(N) = \frac{w}{2}\{F(N+1) + F(N)\} \quad (2.28)$$

entonces

$$\frac{\partial a_q(t)}{\partial t} = -i\Omega(N)a_q(t) \quad (2.29)$$

similarmente

$$\frac{\partial a_q^+}{\partial t} = ia_q^+\Omega(N) \quad (2.30)$$

con $F(N)$ dada por la ecuación (2.16).

2.3. El q-oscilador Clásico

En este apartado estudiamos el q-oscilador clásico. Para ello, procederemos de manera inversa al proceso usual de cuantizar un sistema clásico; en otras palabras, pasaremos del q-oscilador cuántico al q-oscilador clásico usando una representación compleja del oscilador clásico.

El oscilador armónico vibrando con frecuencia w está dado por

$$H = \frac{p^2 + w^2q^2}{2} \quad (2.31)$$

Introduciendo las variables complejas

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{ip}{\sqrt{w}} + \sqrt{w}q\right) \quad \alpha^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-ip}{\sqrt{w}} + \sqrt{w}q\right) \quad (2.32)$$

Podemos entonces escribir el hamiltoniano como

$$H = w\alpha\alpha^* \quad (2.33)$$

Y el paréntesis de Poisson está dado por

$$\{\alpha, \alpha^*\} = -i \quad (2.34)$$

Ahora de (2.20) y (2.21)

$$a_q = a\sqrt{\frac{a_q^+ a_q}{a^+ a}} \quad a_q^+ = \sqrt{\frac{a_q^+ a_q}{a^+ a}} a^+ \quad (2.35)$$

y haciendo la correspondencia

$$\begin{aligned} a^+ &\rightarrow \alpha & a &\rightarrow \alpha^* \\ a_q^+ &\rightarrow \alpha_q & a_q &\rightarrow \alpha_q^* \end{aligned} \quad (2.36)$$

tenemos que

$$\alpha_q = \sqrt{\frac{\sinh\lambda\alpha\alpha^*}{\alpha\alpha^*\sinh\lambda}}\alpha \quad \alpha_q^* = \sqrt{\frac{\sinh\lambda\alpha\alpha^*}{\alpha\alpha^*\sinh\lambda}}\alpha^* \quad (2.37)$$

Definimos el q-oscilador clásico en términos de estas variables con el hamiltoniano H_q dado por

$$H_q = w\alpha_q\alpha_q^* \quad (2.38)$$

El q-hamiltoniano puede, por supuesto, ser escrito en términos de las variables (α, α^*) : insertando las relaciones (2.37) en la expresión para H_q conduce a

$$H_q = w\frac{\sinh\lambda\alpha\alpha^*}{\sinh\lambda} \quad (2.39)$$

De la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \{A, H\} \quad (2.40)$$

Donde $\{, \}$ representa el paréntesis de Poisson, obtenemos

$$\frac{\partial \alpha_q}{\partial t} = -i\lambda w \frac{\cosh \lambda \alpha \alpha^*}{\operatorname{senh} \lambda} \alpha_q \quad \frac{\partial \alpha_q^*}{\partial t} = i\lambda w \frac{\cosh \lambda \alpha \alpha^*}{\operatorname{senh} \lambda} \alpha_q^* \quad (2.41)$$

donde hemos hecho uso de las ecuaciones (2.32), (2.33), (2.37) y (2.39)

Definiendo

$$w_q = \lambda w \frac{\cosh \lambda \alpha \alpha^*}{\operatorname{senh} \lambda} \quad (2.42)$$

Las ecuaciones (2.41) se convierten en

$$\frac{\partial \alpha_q}{\partial t} = -iw_q \alpha_q \quad \frac{\partial \alpha_q^*}{\partial t} = iw_q \alpha_q^* \quad (2.43)$$

Notemos que $\alpha \alpha^*$ es una constante de movimiento tanto para el oscilador armónico como para el q-oscilador.

La principal diferencia entre estos dos sistemas es que la *frecuencia en el segundo depende de la órbita* mientras que para el primero la *frecuencia es constante*. Podemos interpretar entonces al q-oscilador como un oscilador no lineal con un tipo muy específico de no linealidad. Es decir, *su frecuencia depende del coseno hiperbólico de la energía*.

Después de cuantizar a la manera usual el q-oscilador clásico, obtenemos el q-oscilador cuántico, el cual no es otra cosa que un oscilador cuántico no lineal con una anarmonicidad específica descrita por una serie de potencias infinitas en la energía.

Podemos generalizar este esquema aun cuando la frecuencia de vibración dependa de la energía, introduciendo otras dependencias funcionales diferentes del coseno hiperbólico. Podemos llamar a estos osciladores no lineales *f-osciladores*, donde ahora f es la función que determina la dependencia de la frecuencia con la energía. Este es lo que estudiamos en la siguiente sección.

2.4. f-osciladores

Como mencionamos líneas arriba el oscilador deformado es un sistema no armónico cuyas variables dinámicas (operadores de creación y aniquilación) se construyen deformando los operadores usuales de oscilador armónico a y a^+ mediante la transformación

$$A = af(N) = f(N + 1)a \quad A^+ = f(N)a^+ = a^+f(N + 1) \quad (2.44)$$

donde $N = a^+a$ es el operador de número y $f(N)$ es la función de deformación real y positiva que depende del número de excitación y de algunos parámetros físicos.

El f-oscilador está caracterizado por un hamiltoniano cuya forma es similar a la de un oscilador armónico

$$H_f = \frac{w}{2}(AA^+ + A^+A) \quad (2.45)$$

Aquí w es una frecuencia específica y los operadores de creación y aniquilación fueron reemplazados por sus contrapartes deformados definidos en (2.44).

En términos del operador de número N y usando la relación canónica $[a^+, a] = 1$ obtenemos para el hamiltoniano (2.45)

$$H_f = \frac{w}{2}[(N + 1)f^2(N + 1) + Nf^2(N)] \quad (2.46)$$

Además la terna de operadores A , A^+ y N satisfacen las relaciones de conmutación

$$[A, N] = A \quad [A^+, N] = -A^+ \quad (2.47)$$

y

$$[A, A^+] = (N + 1)f^2(N + 1) - Nf^2(N) = G(N) \quad (2.48)$$

Claramente, el conmutador (2.48) no es un número, sino una función del operador de número cuya complejidad dependerá de la forma explícita de la función de deformación $f(N)$.

Nótese que si $f(N) = 1$, esta álgebra deformada se reduce al caso particular de oscilador armónico.

La terna de operados A, A^+, N no generan un álgebra de Lie, pues no satisfacen la identidad de Jacobi.

La evolución temporal de las variables deformadas está gobernada por la ecuación de movimiento de Heisenberg

$$\frac{dA}{dt} = -i[A, H_f] \quad (2.49)$$

Con ayuda de la relacion (2.48), obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = -i\frac{w}{2}\{(N+2)f^2(N+2) - Nf^2(N)\}A \quad (2.50)$$

definimos

$$\Omega(N) = \frac{w}{2}\{(N+2)f^2(N+2) - Nf^2(N)\} \quad (2.51)$$

entonces

$$\frac{dA}{dt} = -i\Omega(N)A \quad \frac{dA^+}{dt} = iA^+\Omega(N) \quad (2.52)$$

con soluciones

$$A(t) = e^{-i\Omega(N)t}A(0) \quad A^+ = A^+(0)e^{i\Omega(N)t} \quad (2.53)$$

Vemos entonces que el f -oscilador cuántico también vibra con una frecuencia que depende de la amplitud; pero la frecuencia de vibración depende del grado de excitación a través de la función $f(N)$. En otras palabras el f -oscilador se puede interpretar como un oscilador no lineal cuya frecuencia depende de su grado de excitación, a diferencia del caso armónico (cf. Ecuaciones (2.8)) cuya frecuencia de vibración es independiente de la energía.

El hamiltoniano para el f -oscilador H_f es diagonal en los estados propios del

operador de número, de aquí que sus valores propios (eigenvalores) son

$$E_f = \frac{w}{2}[(n + 1)f^2(n + 1) + nf^2(n)] \quad (2.54)$$

Esta relación sugiere que eligiendo convenientemente la función de deformación $f(N)$, podemos reproducir el espectro de energía del sistema físico de interés.

Capítulo 3

Método de Wei-Norman

Los encantos de esta ciencia sublime,
las matemáticas, sólo se revelan
a aquellos que tienen el valor de
profundizar en ella.

Carl F. Gauss

3.1. Teorema de Wei- Norman

Otro aspecto fundamental en el desarrollo de esta tesis consiste en encontrar las soluciones de la ecuación

$$\frac{dU(t)}{dt} = H(t)U(t) \quad U(0) = I$$

donde H y U son operadores lineales en un espacio vectorial de dimensión finita e I es el operador identidad. El operador $H(t)$ es una función dada del tiempo.

El operador $H(t)$ aparece con frecuencia en física como el hamiltoniano de una ecuación de movimiento o como una matriz de probabilidad de transición.

Esta ecuación aparece en diversos problemas de la física tales como las probabilidades de transición de Landau-Teller de un sistema de osciladores armónicos

simples, dispersión de rayos x por redes cristalinas; estas y otras aplicaciones pueden encontrarse en la ref. [10]. Otro problema en que la ecuación diferencial aparece es en la integral de Franck-Condon empleada para estudiar los eigenvalores de dos osciladores distorsionados y desplazados [8]. Recientemente se han encontrado también aplicaciones a la economía y finanzas [9].

El método que emplearemos para encontrar las soluciones de la ecuación diferencial, se basa en el teorema que Wei y Norman enunciaron en 1963 [10]:

Teorema. Supóngase que el operador lineal $A(t)$ puede ser expresado en la forma

$$H(t) = \sum_{i=1}^m a_i(t)A_i \quad (m \text{ finita}) \quad (3.1)$$

donde las $a_i(t)$ son funciones escalares del tiempo y las A_i son operadores independientes del tiempo.

Sea el álgebra de Lie denotada por L y generada por los operadores A_1, A_2, \dots, A_m . Entonces existe una vecindad de $t = 0$ en la cual la solución de la ecuación

$$\frac{dU(t)}{dt} = H(t)U(t) \quad U(0) = I \quad (3.2)$$

puede ser expresada en la forma

$$U(t) = \prod_{i=1}^m e^{[g_i(t)A_i]} \quad (3.3)$$

donde A_1, \dots, A_m es una base de L y las $g_i(t)$ son funciones escalares del tiempo, las $g_i(t)$ dependen solamente del álgebra de Lie L y las $a_i(t)$.

El teorema permite construir un algoritmo usando las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) y por la aplicación repetida de la bien conocida fórmula (Baker-Hausdorff):

$$e^X Y e^{-X} = Y + [X, Y] + \frac{[X, [X, Y]]}{2!} + \frac{[X, [X[X, Y]]]}{3!} + \dots \quad (3.4)$$

a condición de que se satisfagan las condiciones del teorema [10].

En la siguiente sección mostramos como aplicar el método usando un operador $H(t)$ general.

3.2. El Método de Wei-Norman

En esta sección mostramos el método de Wei-Norman para un operador general. Sea

$$H(t) = a_1(t)C + a_2(t)B + a_3(t)A \quad (3.5)$$

donde A , B y C generan un álgebra de Lie y que además satisfacen las relaciones de conmutación

$$[A, B] = \alpha A \quad [C, B] = \beta C \quad [A, C] = \gamma B \quad (3.6)$$

Vale la pena mencionar que las relaciones (3.6) constituyen el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ que es el álgebra de Lie del grupo de Lie $SL(2, \mathbb{C})$ que entre otras cosas permite estudiar grupos compactos y no compactos [17]; ¹ siendo $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{su}(1,1)$ casos particulares de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Sea

$$U(t) = \exp[\phi_1(t) C] \exp[\phi_2(t) B] \exp[\phi_3(t) A] \quad (3.7)$$

¹Como ya mencionamos en la sección 1.3 los aspectos formales de la teoría de grupos no son tratados en este trabajo.

Sustituyendo (3.5) y (3.7) en la ecuación (3.2), obtenemos

$$\begin{aligned} \{a_1(t)C + a_2(t)B + a_3(t)A\}U(t) &= \frac{d\phi_1(t)}{dt}CU(t) + \\ &+ \frac{d\phi_2(t)}{dt}e^{[\phi_1(t)C]}Be^{[\phi_2(t)B]}e^{[\phi_3(t)A]} + \\ &+ \frac{d\phi_3(t)}{dt}e^{[\phi_1(t)C]}e^{[\phi_2(t)B]}Ae^{[\phi_3(t)A]} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Multiplicando por la derecha a ambos lados de esta igualdad por el inverso de $U(t)$ conduce a

$$\begin{aligned} a_1(t)C + a_2(t)B + a_3(t)A &= \frac{d\phi_1(t)}{dt}C + \frac{d\phi_2(t)}{dt}\{e^{[\phi_1(t)C]}Be^{[-\phi_1(t)C]}\} \\ &+ \frac{d\phi_3(t)}{dt}\{e^{[\phi_1(t)C]}e^{[\phi_2(t)B]}Ae^{[-\phi_2(t)B]}e^{[-\phi_1(t)C]}\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dado que A , B y C no conmutan entre sí (ecuaciones (3.6)), debemos trabajar por separado los términos entre llaves de los dos últimos términos de (3.9):

Usando la fórmula de Baker-Hausdorff, ecuación (3.4) y las relaciones de conmutación (3.6) obtenemos

$$\exp[\phi_1(t)C]B[-\phi_1(t)C] = B + \beta\phi_1(t)C \quad (3.10)$$

tambien

$$\begin{aligned} e^{[\phi_1(t)C]}e^{[\phi_2(t)B]}Ae^{[-\phi_2(t)B]}e^{[-\phi_1(t)C]} &= e^{[-\alpha\phi_2(t)]}\{e^{[\phi_1(t)C]}Ae^{[-\phi_1(t)C]}\} = \\ &= e^{[-\alpha\phi_2(t)]}\{A - \gamma\phi_1(t)B - \frac{\beta\gamma}{2}\phi_1^2(t)C\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Insertando (3.10) y (3.11) en (3.9) nos conduce a

$$\begin{aligned}
 a_1(t)C + a_2(t)B + a_3(t)A &= \\
 &= \left\{ \frac{d\phi_1(t)}{dt} + \frac{d\phi_2(t)}{dt} \beta \phi_1(t) \right. \\
 &\quad \left. - \beta \gamma \frac{\phi_1(t)^2}{2} \frac{d\phi_3(t)}{dt} e^{[-\alpha\phi_2(t)]} \right\} C + \\
 &\quad + \left\{ \frac{d\phi_2(t)}{dt} - \gamma \phi_1(t) \frac{d\phi_3(t)}{dt} e^{[-\alpha\phi_2(t)]} \right\} B \\
 &\quad + \frac{d\phi_3(t)}{dt} e^{[-\alpha\phi_2(t)]} A \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Dado que C, B y A son linealmente independientes, la ecuación (3.12) nos conduce al conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales, acopladas para las $\phi_i(t)$'s:

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = a_1(t) - \beta \phi_1(t) \frac{d\phi_2(t)}{dt} + \frac{\beta \gamma}{2} \phi_1^2(t) e^{-\alpha\phi_2(t)} \frac{d\phi_3(t)}{dt} \tag{3.13}$$

$$\frac{d\phi_2(t)}{dt} = a_2(t) + \gamma \phi_1(t) e^{-\alpha\phi_2(t)} \frac{d\phi_3(t)}{dt} \tag{3.14}$$

$$\frac{d\phi_3(t)}{dt} = a_3(t) e^{+\alpha\phi_2(t)} \tag{3.15}$$

Estas ecuaciones pueden simplificarse más, obteniendo

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = a_1(t) - \beta a_2(t) \phi_1(t) - \frac{\beta \gamma}{2} a_3(t) \phi_1^2(t) \tag{3.16}$$

$$\frac{d\phi_2(t)}{dt} = a_2(t) + \gamma a_3(t) \phi_1(t) \tag{3.17}$$

$$\frac{d\phi_3(t)}{dt} = a_3(t) \exp[\alpha\phi_2(t)] \tag{3.18}$$

Como puede verse, el teorema de Wei-Norman, proporciona un método eficiente para obtener las soluciones a la ecuación (3.2) con la condición de que los operadores A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) generen un álgebra de Lie.

Hemos encontrado también un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer

orden no lineales siguiendo el método de Wei-Norman y, como puede verse, el método es directo a diferencia de otros, como el de Magnus [26], que es mucho más complejo que el seguido por nosotros, cumpliendo hasta ahora una parte de los objetivos a alcanzar en este trabajo de tesis.

Capítulo 4

Aplicaciones

Si les plats que je vous offre sont mal préparés,
c'est moins la faute de mon cuisiner que celle de
la chimie, qui est encore dans l'enfance.

Anatole France

Hasta ahora, los conceptos presentados a lo largo de esta tesis así como los resultados que hemos obtenido en el capítulo anterior son de carácter general.

En este capítulo, armados con el marco teórico expuesto, aplicamos los resultados obtenidos en la última sección del capítulo anterior para obtener las álgebras de Lie $su(2)$ y $su(1,1)$. Intentamos también hacer lo mismo, para los q -osciladores y los f -osciladores; a continuación, aplicamos nuestros resultados al problema del potencial de Pöschl - Teller. Finalmente estudiamos el hamiltoniano de Caldirola - Kanai.

4.1. Álgebra $su(2)$

Como sabemos, los operadores J_z , J_- y J_+ son los generadores del álgebra de Lie $su(2)$ y satisfacen las reglas de conmutación

$$[J_z, J_-] = -J_- \quad [J_z, J_+] = J_+ \quad [J_+, J_-] = 2J_z \quad (4.1)$$

De las relaciones de conmutación (3.6) haciendo

$$A = J_- \quad B = J_z \quad C = J_+ \quad (4.2)$$

$$\alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = -2 \quad (4.3)$$

obtenemos las relaciones de conmutación para el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$.

$$[J_-, J_z] = J_- \quad [J_+, J_z] = -J_+ \quad [J_-, J_+] = -2J_z \quad (4.4)$$

Por lo que, insertando las relaciones (4.3) en las ecuaciones (3.16), (3.17) y (3.18), obtenemos

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = a_1(t) + a_2(t)\phi_1(t) - a_3(t)\phi_1^2(t) \quad (4.5)$$

$$\frac{d\phi_2(t)}{dt} = a_2(t) - 2a_3(t)\phi_1(t) \quad (4.6)$$

$$\frac{d\phi_3(t)}{dt} = a_3(t) \exp[\phi_2(t)] \quad (4.7)$$

Por otro lado, Puri [20], siguiendo un procedimiento diferente del de Wei-Norman, obtiene las ecuaciones diferenciales para los generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$

$$\frac{df_+(t)}{dt} = \alpha_+ + \alpha_z f_+(t) - \alpha_- f_+^2(t) \quad (4.8)$$

$$\frac{df_z(t)}{dt} = \alpha_z - 2\alpha_- f_+(t) \quad (4.9)$$

$$\frac{df_-(t)}{dt} = \alpha_- \exp[f_z(t)] \quad (4.10)$$

Comparando los dos conjuntos de ecuaciones diferenciales vemos que si hace-

mos la correspondencia

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= f_+(t) & \phi_2(t) &= f_z(t) & \phi_3(t) &= f_-(t) \\ a_1(t) &\rightarrow \alpha_+ & a_2(t) &\rightarrow \alpha_z & a_3(t) &\rightarrow \alpha_-\end{aligned}\tag{4.11}$$

nuestros resultados coinciden, excepto por que nuestras a_i son funciones del tiempo y las α_j son constantes.

Regresando a las ecuaciones (4.5), (4.6) y (4.7) es obvio que no podemos obtener su solución pues no conocemos la forma analítica de las $a_i(t)$; pero si hacemos $a_i(t) \rightarrow a_i$ independientes del tiempo, la ecuación (4.5), toma la forma $\frac{dy}{dt} = ay^2 + by + c$ que es conocida como la ecuación de Riccati, Después de integrar, obtenemos

$$\phi_1(t) = \frac{a_1}{\Gamma_1} \frac{\sinh(\Gamma_1 t)}{\cosh(\Gamma_1 t) - \frac{a_2}{2\Gamma_1} \sinh(\Gamma_1 t)}\tag{4.12}$$

donde

$$\Gamma_1^2 = \frac{a_2^2}{4} + a_1 a_3\tag{4.13}$$

Las soluciones para $\phi_2(t)$ y $\phi_3(t)$ pueden ser encontradas una vez que $\phi_1(t)$ es determinada, obteniendo

$$\phi_2(t) = -2 \ln \left\{ \cosh(\Gamma_1 t) - \frac{a_2}{2\Gamma_1} \sinh(\Gamma_1 t) \right\}\tag{4.14}$$

$$\phi_3(t) = \frac{a_3}{\Gamma_1} \frac{\sinh(\Gamma_1 t)}{\cosh(\Gamma_1 t) - \frac{a_2}{2\Gamma_1} \sinh(\Gamma_1 t)}\tag{4.15}$$

Hemos obtenido las soluciones de las ecuaciones diferenciales (4.5), (4.6) y (4.7) obtenidas por el método de Wei-Norman con la restricción $a_i(t) \rightarrow a_i$, aun

cuando esta álgebra no es soluble pues con $L = \{J_z, J_+, J_-\}$, tenemos que

$$L^{(1)} = [L, L] = L$$

4.2. Álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$

Los operadores K_+ , K_- y K_z son los generadores de el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$ y obedecen las relaciones de conmutación

$$[K_z, K_-] = -K_- \quad [K_z, K_+] = K_+ \quad [K_+, K_-] = -2K_z \quad (4.16)$$

Comparando con las relaciones de conmutación (3.6), tenemos que si

$$\begin{aligned} A &= K_- & B &= K_z & C &= K_+ \\ \alpha &= 1 & \beta &= -1 & \gamma &= 2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

obtenemos las relaciones de conmutación para el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$

Insertando las relaciones (4.17) en las ecuaciones (3.16), (3.17) y (3.18), nos conduce a

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = a_1(t) + a_2(t)\phi_1(t) + a_3(t)\phi_1^2(t) \quad (4.18)$$

$$\frac{d\phi_2(t)}{dt} = a_2(t) + 2a_3(t)\phi_1(t) \quad (4.19)$$

$$\frac{d\phi_3(t)}{dt} = a_3(t) \exp[\phi_2(t)] \quad (4.20)$$

Al comparar con las ecuaciones diferenciales obtenidas por Puri [20]

$$\frac{d\phi_+(t)}{dt} = \alpha_+ + \alpha_z \phi_+(t) + \alpha_- \phi_+^2(t) \quad (4.21)$$

$$\frac{d\phi_z(t)}{dt} = \alpha_z + 2\alpha_- \phi_+(t) \quad (4.22)$$

$$\frac{d\phi_-(t)}{dt} = \alpha_- \exp[\phi_z(t)] \quad (4.23)$$

si hacemos la correspondencia

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \phi_+(t) & \phi_2(t) &= \phi_z(t) & \phi_3 &= \phi_-(t) \\ a_1(t) &\rightarrow \alpha_+ & a_2(t) &\rightarrow \alpha_z & a_3(t) &\rightarrow \alpha_- \end{aligned} \quad (4.24)$$

nuestros resultados coinciden.

Procediendo de manera semejante al caso anterior, hacemos la correspondencia $a_i(t) \rightarrow \alpha_i$, independientes del tiempo, en las ecuaciones (4.18), (4.19) y (4.20), podemos integrarlas para obtener

$$\phi_1(t) = \frac{a_1}{\Gamma_2} \frac{\sinh(\Gamma_2 t)}{\cosh(\Gamma_2 t) - \frac{a_2}{2\Gamma_2} \sinh(\Gamma_2 t)} \quad (4.25)$$

$$\phi_2(t) = -2 \ln \left\{ \cosh(\Gamma_2 t) - \frac{a_2}{2\Gamma_2} \sinh(\Gamma_2 t) \right\} \quad (4.26)$$

$$\phi_3(t) = \frac{a_3}{\Gamma_2} \frac{\sinh(\Gamma_2 t)}{\cosh(\Gamma_2 t) - \frac{a_2}{2\Gamma_2} \sinh(\Gamma_2 t)} \quad (4.27)$$

donde

$$\Gamma_2^2 = \frac{a_2^2}{4} - a_1 a_3. \quad (4.28)$$

Notemos que esta álgebra tampoco es soluble, puesto que si $L = \{K_z, K_+, K_-\}$ entonces

$$L^{(1)} = [L, L] = L$$

Sin embargo con la restricción $a_i(t) \rightarrow \alpha_i$ hemos obtenido analíticamente las soluciones a las ecuaciones (4.18), (4.19) y (4.20).

4.3. q-osciladores

Los operadores a_q , a_q^+ y N satisfacen las relaciones de conmutación

$$[a_q, N] = a_q \quad [a_q^+, N] = -a_q^+ \quad [a_q, a_q^+] = F(N) \quad (4.29)$$

Comparando con las ecuaciones (3.6), si hacemos

$$\begin{aligned} A = J_+ = a_q \quad B = J_z = N \quad C = J_- = a_q^+ \\ \alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = 2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

obtenemos

$$[a_q, N] = a_q \quad [a_q^+, N] = -a_q^+ \quad [a_q, a_q^+] = 2N \neq F(N) \quad (4.31)$$

y no se satisface la última relación de conmutación (4.29) y, por supuesto, tampoco las relaciones de conmutación para el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$.

Las relaciones de conmutación para el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$ tampoco se satisfacen, pues si

$$\begin{aligned} A = K_- = a_q \quad B = K_z = N \quad C = K_+ = a_q^+ \\ \alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = 2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

No se satisface la última de las ecuaciones (4.31), pues se tiene que

$$[a_q, a_q^+] = -2N \neq F(N) \quad (4.33)$$

4.4. f-osciladores

Con los f-osciladores ocurre lo mismo que con los q-osciladores, pues si en las ecuaciones (3.6) hacemos

$$\begin{aligned} A = J_- = A \quad B = J_z = N \quad C = J_+ = A_+ \\ \alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = -2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

tenemos

$$[A, N] = A \quad [A^+, N] = -A^+$$

y

$$[A, A^+] = -2N \neq (N+1)f^2(N+1) - Nf^2(N) \quad (4.35)$$

vemos entonces que no se satisfacen las relaciones de conmutación para el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$.

También si en las ecuaciones (3.6) hacemos

$$\begin{aligned} A = K_- = A \quad B = K_z = N \quad C = K_+ = A^+ \\ \alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = 2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

obtenemos

$$[A, N] = A \quad [A^+, N] = -A^+$$

$$[A, A^+] = 2N \neq (N+1)f^2(N+1) - Nf^2(N) \quad (4.37)$$

y tampoco se satisfacen las relaciones de conmutación para el álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$.

Es posible, sin embargo, encontrar una función $f(N)$ tal que obtengamos las álgebras $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{su}(1,1)$; para ello simplemente hacemos

$$\pm 2N = (N+1)f^2(N+1) - Nf^2(N) \quad (4.38)$$

en las ecuaciones (4.35) y (4.37), donde el signo $(-)$ corresponde al álgebra $\text{su}(2)$ y el signo $(+)$ al álgebra $\text{su}(1,1)$. La solución de esta ecuación para $f(N)$ la encontramos por un proceso de iteración, obteniendo

$$f(N) = \pm \sqrt{\frac{c \pm N(N-1)}{N}} \quad (4.39)$$

luego entonces, si escribimos

$$f(N) = \pm \sqrt{\frac{c - N(N-1)}{N}} \quad (4.40)$$

tenemos el álgebra de Lie $\text{su}(2)$; y con

$$f(N) = \pm \sqrt{\frac{c + N(N-1)}{N}} \quad (4.41)$$

obtenemos $\text{su}(1,1)$.

El signo $(-)$ en la ecuación (4.40) significa que existe un número máximo de cuantos $n_{m\acute{a}x}$ determinado por c y que a su vez determina el tamaño finito de las matrices que representan a $\text{su}(2)$, lo que está en completo acuerdo con la teoría de momento angular; en tanto que el signo $(+)$ en la ecuación (4.41) nos dice que el número de cuantos es ilimitado por lo que las matrices para $\text{su}(1,1)$ son infinitas.

Con la elección de $f(N)$ dada por la ecuación (4.39) hemos obtenido las álgebras de Lie $\text{su}(2)$ y $\text{su}(1,1)$; sin embargo, para $f(N)$ arbitraria no se satisface la relación de conmutación $[A, A^+]$ para estas álgebras.

La explicación para esto la encontramos simplemente al considerar que la q -deformación $q = e^\lambda$ la cual lleva a los q -osciladores y la función de deformación $f(N)$ que lleva a los f -osciladores no son canónicas, esto es, no preservan la relación de conmutación $[a, a^+] = 1$ del oscilador armónico.

Esto por un lado, por el otro, al introducir la q -deformación $q = e^\lambda$, sólo se pide que λ sea real y positivo, pero, a final de cuentas, no sabemos nada más

sobre el parámetro λ , excepto el caso $\lambda = 0$ que hace $f(N) = 1$.

También la función $f(N)$ en $A = af(N)$, es de carácter general y la única condición sobre ella es que $f(N) = 1$.

Otro caso en el que podemos soslayar esta dificultad, lo encontramos estudiando el potencial de Pöschl – Teller modificado, enfocándonos solamente en la región de energías negativas; esto lo hacemos a continuación.

4.5. Potencial de Pöschl-Teller Modificado

El potencial de Pöschl – Teller modificado se escribe como [25]

$$V(x) = -U_0 \operatorname{tgh}^2(ax) \quad (4.42)$$

donde U_0 es la profundidad del pozo, a es el rango del potencial y x es la distancia relativa a la posición de equilibrio.

El potencial de Pöschl-Teller modificado es pertinente para la descripción de excitaciones vibracionales de modos moleculares

Las funciones de onda de la ecuación de Schroedinger asociadas a este potencial son [23]

$$\Psi_n = A_n (1 - \xi^2)^{1/2} {}_2F_1(-n, \varepsilon + s + 1; \varepsilon + 1, \frac{1 - \varepsilon}{2}) \quad (4.43)$$

donde

$$\xi = \operatorname{tgh}(ax) \quad (4.44)$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{-2\mu(E - U_0)}}{\hbar a} \quad (4.45)$$

$$s(s + 1) = \frac{2\mu U_0}{\hbar^2 a^2} \quad (4.46)$$

A_n es un factor de normalización, μ es la masa reducida de la molécula y ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma, z)$ es el símbolo que representa la función hipergeométrica [23].

Los niveles de energía se determinan por la condición $s - \varepsilon = n$, con $n = 0, 1, 2, \dots$ de donde

$$E_n = U_0 - \frac{\hbar^2 a^2}{8\mu} \left[- (2n + 1) + \sqrt{1 + \frac{8\mu U_0}{\hbar^2 a^2}} \right] \quad (4.47)$$

Existe un número finito de niveles de energía determinado por la condición $\varepsilon > 0$, es decir, $n < s$; por lo que el último estado ligado corresponde a $n_{max} = s - 1$.

Si escribimos los valores propios ecuación (4.47) en términos del parámetro s obtenemos

$$E_n = \frac{\hbar^2 a^2}{2\mu} (s + 2sn - n^2) \quad (4.48)$$

Consideremos ahora el f-oscilador cuántico dado por el hamiltoniano

$$\begin{aligned} H_f &= \frac{w}{2} (AA^+ + A^+A) = \\ &= \frac{w}{2} [(N + 1)f^2(N + 1) + Nf^2(N)] \end{aligned} \quad (4.49)$$

Seguendo a de los Santos-Sánchez et al. [25] elegimos la f-deformación como

$$f^2(N) = \frac{\hbar a^2}{2\mu w} (2s + 1 - N) \quad (4.50)$$

entonces el f-hamiltoniano ecuación (4.49) se convierte en

$$H_f = \frac{\hbar a^2}{2\mu} (-N^2 + 2sN + s) \quad (4.51)$$

cuyo espectro es idéntico al de la ecuación (4.48). Notemos que el caso armónico $f(N) = 1$ se recupera al tomar los límites $s \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$ y $sa^2 \rightarrow \mu w / \hbar$

Para la f-deformación dada por la ecuación (4.50) los f-operadores A , A^+ y el

operador de número N satisfacen

$$[A, N] = A \quad [A^+, N] = -A \quad [A, A^+] = \frac{\hbar a^2}{\mu w}(s - N) \quad (4.52)$$

estas relaciones de conmutación se reducen al caso armónico en los límites arriba mencionados.

Si hacemos

$$\chi = \frac{\hbar a^2}{\mu w} s \quad (4.53)$$

tenemos que

$$[A, A^+] = \chi \left(1 - \frac{N}{s}\right) \quad (4.54)$$

definimos

$$G(\chi N) = \chi \left(1 - \frac{N}{s}\right) \quad (4.55)$$

De manera tal que las ecuaciones (4.52) se convierten en

$$[A, G(\chi N)] = -\frac{\chi}{s} A \quad [A^+, G(\chi N)] = \frac{\chi}{s} A^+ \quad [A, A^+] = G(\chi N) \quad (4.56)$$

Es claro que los operadores A , A^+ y $G(\chi N)$ son elementos de un álgebra de Lie.

Con esto en mente, podemos obtener las ecuaciones diferenciales dadas por el método de Wei-Norman, como sigue:

Si en las ecuaciones (3.6) hacemos

$$\begin{aligned} A &= A & B &= G(\chi N) & C &= A^+ \\ \alpha &= -\chi/s & \beta &= \chi/s & \gamma &= 1 \end{aligned} \quad (4.57)$$

obtenemos las relaciones de conmutación (4.56).

Insertando las relaciones (4.57) en las ecuaciones diferenciales (3.16), (3.17) y

(3.18) nos conduce a

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = a_1(t) - \frac{\chi}{s} a_2(t) \phi_1(t) - \frac{\chi}{2s} a_3(t) \phi_1^2(t) \quad (4.58)$$

$$\frac{d\phi_2(t)}{dt} = a_2(t) + a_3(t) \phi_1(t) \quad (4.59)$$

$$\frac{d\phi_3(t)}{dt} = a_3(t) \exp\left[-\frac{\chi}{s} \phi_2(t)\right] \quad (4.60)$$

Si comparamos con las ecuaciones obtenidas por de los Santos et al. [25] quienes las obtienen siguiendo el procedimiento de Puri [20]

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = \alpha_1 - \frac{\chi}{s} \alpha_2 \phi_1(t) - \frac{\chi}{2s} \alpha_3 \phi_1^2(t) \quad (4.61)$$

$$\frac{d\phi_2(t)}{dt} = \alpha_2 + \alpha_3 \phi_1(t) \quad (4.62)$$

$$\frac{d\phi_3(t)}{dt} = \alpha_3 \exp\left[-\frac{\chi}{s} \phi_2(t)\right] \quad (4.63)$$

entonces. haciendo la correspondencia $a_i(t) \rightarrow \alpha_i$ nuestros resultados coinciden.

Es posible obtener las soluciones de las ecuaciones (4.58), (4.59) y (4.60) [20] aun cuando el álgebra generada por las relaciones (4.56) no es soluble, pues con

$$L = \{A, A^+, G(\chi N)\}$$

obtenemos

$$L^{(1)} = [L, L] = L$$

.

Podemos obtener, a partir de las ecuaciones ((4.56)) las relaciones de conmutación para las álgebras de Lie $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{su}(1,1)$ respectivamente como sigue:

4.5.1. Álgebra su(2)

Haciendo

$$J_z = \frac{s}{\chi}G(\chi/N) \quad J_- = A^+ \quad J_+ = A$$

en las relaciones de conmutación

$$[J_-, J_z] = J \quad [J_+, J_z] = -J_+ \quad [J_-, J_+] = -2J_z \quad (4.64)$$

obtenemos

$$\left[\frac{s}{x}G(\chi N), A^+\right] = -A^+ \quad \left[\frac{s}{x}G(\chi N), A\right] = A \quad [A, A^+] = 2\frac{s}{x}G(\chi N) \quad (4.65)$$

comparando con las relaciones de conmutación ecuación (4.56)

$$[A, G(\chi N)] = -\frac{\chi}{s}A \quad [A^+, G(\chi N)] = \frac{\chi}{s}A^+ \quad [A, A^+] = G(\chi N) \quad (4.66)$$

Entonces, imponiendo la condición $\chi/s = 2$ obtenemos las relaciones de conmutación (4.56) y también las relaciones de conmutación para el álgebra de Lie su(2). Las ecuaciones diferenciales obtenidas por el método de Wei-Norman son:

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = a_1(t) - a_2(t)\phi_1(t) - \frac{1}{2}a_3(t)\phi_1^2(t) \quad (4.67)$$

$$\frac{d\phi_2(t)}{dt} = a_2(t) + a_3(t)\phi_1(t) \quad (4.68)$$

$$\frac{d\phi_3(t)}{dt} = a_3 \exp[-\phi_2(t)] \quad (4.69)$$

4.5.2. Álgebra su(1,1)

Haciendo

$$K_+ = A \quad K_- = A^+ \quad K_z = s/\chi G(\chi N)$$

en las relaciones de conmutación (1.22)

$$[K_z, K_-] = -K_- \quad [K_z, K_+] = K_+ \quad [K_+, K_-] = -2K_z \quad (4.70)$$

nos conduce a

$$\left[\frac{s}{x}G(\chi N), A^+\right] = -A^+ \quad \left[\frac{s}{x}G(\chi N), A\right] = A \quad [A, A^+] = -2\frac{s}{x}G(\chi N) \quad (4.71)$$

Así, si hacemos $\chi/s = -2$, obtenemos las relaciones de conmutación

$$[A, G(\chi N)] = -\frac{\chi}{s}A \quad [A^+, G(\chi N)] = \frac{\chi}{s}A^+ \quad [A, A^+] = G(\chi N) \quad (4.72)$$

y las relaciones de conmutación para el álgebra $\text{su}(1,1)$.

Las ecuaciones diferenciales dadas por el método de Wei-Norman son

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = a_1(t) + a_2(t)\phi_1(t) + \frac{1}{2}a_3(t)\phi_1^2(t) \quad (4.73)$$

$$\frac{d\phi_2(t)}{dt} = a_2(t) + a_3(t)\phi_1(t) \quad (4.74)$$

$$\frac{d\phi_3(t)}{dt} = a_3 \exp[-\phi_2(t)] \quad (4.75)$$

4.6. Hamiltoniano de Caldirola-Kanai

Finalizamos este apartado con el problema del Hamiltoniano de Caldirola-Kanai¹ que también es conocido como el oscilador armónico amortiguado con coeficiente de fricción, lo cual se traduce en pérdida de energía o decaimiento de los estados excitados del oscilador armónico.

El hamiltoniano de Caldirola-Kanai está dado por

$$H(t) = \frac{p^2}{2m}e^{-\gamma t} + \frac{mw^2}{2}e^{\gamma t}x^2 \quad (4.76)$$

¹Aunque es un subcaso de la sección 4.2 es instructivo discutir por separado un caso concreto como éste

donde γ es el coeficiente de fricción y que en este trabajo tomamos como un parámetro real.

Para aplicar el método de Wei-Norman escribimos el hamiltoniano como

$$H(t) = a_1(t)H_1 + a_2(t)H_2 + a_3(t)H_3 \quad (4.77)$$

Siguiendo a Sandoval et al. [7], escribimos

$$H_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad H_2 = \frac{1}{4} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} x \right) \quad H_3 = \frac{1}{2} x^2 \quad (4.78)$$

H_1 , H_2 y H_3 satisfacen las reglas de conmutación

$$[H_1, H_2] = H_1 \quad [H_2, H_3] = H_3 \quad [H_1, H_3] = 2H_2 \quad (4.79)$$

que corresponden al álgebra de Lie $\mathfrak{su}(1,1)$.

Los coeficientes dependientes del tiempo son

$$a_1(t) = \frac{\hbar^2}{m} e^{-\gamma t} \quad a_2(t) = 0 \quad a_3(t) = mw^2 e^{\gamma t} \quad (4.80)$$

Comparando (4.77) y (4.79) con las relaciones (3.5) y (3.6), concluimos que haciendo

$$\begin{aligned} C &= H_1 & B &= H_2 & A &= H_3 \\ \alpha &= -1 & \beta &= 1 & \gamma &= -2 \end{aligned} \quad (4.81)$$

obtenemos el hamiltoniano de Caldirola-Kanai y las relaciones de conmutación (4.79).

Con ayuda de las ecuaciones (4.18), (4.19) y (4.20) obtenemos las ecuaciones

diferenciales

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = a_1(t) + a_3(t)\phi_1^2(t) \quad (4.82)$$

$$\frac{d\phi_2(t)}{dt} = a_2(t) - 2a_3(t)\phi_1(t) \quad (4.83)$$

$$\frac{d\phi_3(t)}{dt} = a_3(t)e^{-\phi_2(t)} \quad (4.84)$$

Insertando los coeficientes $a_i(t)$ dados por (4.80) estas ecuaciones se transforman en

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = \frac{\hbar^2}{m}e^{-\gamma t} + mw^2e^{\gamma t}\phi_1^2(t) \quad (4.85)$$

$$\frac{d\phi_2(t)}{dt} = -mw^2e^{\gamma t}\phi_1 \quad (4.86)$$

$$\frac{d\phi_3(t)}{dt} = mw^2e^{-\phi_2(t)} \quad (4.87)$$

Queda por responder la cuestión de si estas ecuaciones diferenciales pueden integrarse por cuadraturas.

Para responder esta pregunta, recordemos que una ecuación diferencial es soluble por cuadraturas si puede escribirse como una diferencial exacta, y este no es el caso para la primera de estas ecuaciones.

Sin embargo, la solución del sistema de ecuaciones (4.85)-(4.87) se reduce a cuadraturas después de resolver la ecuación de Riccati

$$\frac{dy(t)}{dt} = mw^2y^2(t) + \gamma y(t) + \frac{\hbar^2}{m} \quad (4.88)$$

que resulta del cambio de variable $y(t) = e^{\gamma t}\phi_1(t)$ en la ecuación (4.85) cuya solución puede encontrarse por métodos analíticos [27].

Las ecuaciones (4.85)-(4.87) corresponden al problema resuelto por Sandoval et al. [7]. Mostrando que este también es un caso particular del tratamiento considerado en esta tesis.

Capítulo 5

Conclusiones

Hemos visto que una deformación del álgebra del oscilador armónico cuántico vía la introducción del parámetro q da lugar a los así llamados q -osciladores; después de construir los elementos básicos de esta álgebra, siguiendo a Man'ko et al. [14] hemos podido interpretar a los q -osciladores, como osciladores no lineales con una anarmonicidad específica, a saber, la dependencia de la frecuencia con el coseno hiperbólico de la energía.

Generalizando este esquema, introduciendo otras dependencias funcionales de la energía diferentes de la del coseno hiperbólico, por medio de la función de deformación $f(N)$, N el operador de número tradicional, obtuvimos los f -osciladores y construimos los elementos básicos de su álgebra. Obtuvimos también las relaciones de conmutación que satisfacen los f -operadores $\{A, A^+ \text{ y } N\}$.

Basándonos en el teorema de Wei-Norman, obtuvimos un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, con el auxilio de los generadores del álgebra de Lie $\{A, B, C\}$, los cuales son de carácter completamente general y constituyen el álgebra $sl(2, \mathbb{C})$.

Vale la pena notar que las álgebras $su(2)$ y $su(1,1)$ son casos particulares del álgebra $sl(2, \mathbb{C})$.

Aplicamos estos resultados de carácter general a diferentes problemas que pueden ser considerados como casos particulares de aquellos.

Los casos particulares estudiados son:

1. Álgebras de Lie $su(2)$ y $su(1,1)$
2. Álgebras de los q -osciladores.
3. Álgebras de los f -osciladores.
4. Álgebra de Lie del potencial de Pöschl-Teller modificado y sus álgebras $su(2)$ y $su(1,1)$.
5. Hamiltoniano de Caldirola-Kanai.

En el caso de las álgebras $su(2)$ y $su(1,1)$ (estudiadas en la sección 4.1 y 4.2), basándonos en el método de Wei-Norman encontramos un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden cuyas soluciones, no obstante que estas álgebras no son solubles, las pudimos obtener por medios analíticos.

No fue posible obtener las álgebras $su(2)$ y $su(1,1)$ para el caso de los q -osciladores.

Encontramos que para una función de deformación arbitraria $f(N)$ no es posible construir las álgebras $su(2)$ y $su(1,1)$ para los f -osciladores; no obstante imponiendo la condición (4.38), encontramos funciones $f(N)$ para las que fue posible obtener aquellas álgebras.

Para el potencial Pöschl-Teller modificado con una elección adecuada de la función de deformación $f(N)$, nos fue posible reproducir el espectro de valores propios de la energía, obtenidos vía solución de la ecuación de Schroedinger. Con esta f -deformación, obtuvimos el álgebra de Lie para la terna de f -operadores $\{A, A^+, G(\chi N)\}$. Es posible encontrar las soluciones a las ecuaciones diferenciales obtenidas por el método de Wei-Norman [20] no obstante que el álgebra de Lie para este problema no es soluble.

Mediante una elección adecuada de los parámetros χ 's en el operador $G(\chi N)$ encontramos las álgebras $su(2)$ y $su(1,1)$ para este potencial.

En el caso del Hamiltoniano de Caldirola-Kanai, encontramos que el álgebra de Lie generada a partir de los operadores dados por la ecuación (4.78), satisfacen el álgebra $su(1,1)$.

Las ecuaciones diferenciales obtenidas por el método de Wei-Norman para este hamiltoniano se reducen a cuadraturas después de obtener la solución de la ecuación (4.85) por métodos analíticos.

A partir de esto podemos concluir que:

1. No es posible obtener el álgebra de Lie para la terna de operadores A, A^+, N del f-oscilador cuántico con $f(N)$ arbitraria; sin embargo, con una elección adecuada de la función de deformación, es posible obtener las álgebras $\text{su}(2)$ y $\text{su}(1,1)$.
2. El teorema de Wei-Norman proporciona un método directo y eficiente que puede ser aplicado a diferentes problemas; las soluciones de las ecuaciones diferenciales obtenidas no pueden ser encontradas por cuadraturas, debido a que las álgebras de Lie estudiadas no son solubles; sin embargo, fue posible encontrar las soluciones de éstas.

Por tanto, al buscar las álgebras para el f-oscilador cuántico, encontrar que éstas no son solubles y obtener el conjunto de ecuaciones diferenciales para ellas hemos alcanzado los objetivos planteados para el desarrollo de esta tesis.

Bibliografía

- [1] E. T. Bell, *The Development of Mathematics* Dover, 1962.
- [2] Ian Stewart, *Galois Theory* Chapman and Hall, 1973.
- [3] M. M. Postnikov, *Foundations of Galois Theory* Pergamon Press, 1962.
- [4] A. Baldor, *Algebra séptima ed.*, 1980 Publicaciones Cultural 467.
- [5] A. Palma, M. Villa, L. Sandoval, *Int. J. Quantum Chem.* **11** (2011) 1646.
- [6] A. Palma, M. Villa, L. Sandoval, *Int. J. Quantum Chem.* **112** (2012) 2441.
- [7] L. Sandoval, I. Urdaneta, and A. Palma, (to be published).
- [8] A. Palma and L. Sandoval *Int. J. Quantum Chem.* **22** (1988)503.
- [9] Hernández, I. y Mateos, C. *Rev. Met. Cuant. para la Econ. y la Empresa.* **6** (2008) 74.
- [10] J. Wei and E. Norman, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 575.
- [11] A. J. Macfarlane, *J. Phys.* **A22** (1989) 4581.
- [12] Biedenharn, L. C. *J. Phys.* **A22** (1989) L873.
- [13] Biedenharn, L. C. and Louck, J. D. 1981 *Angular Momentum in Quantum Physics (Encyclopedia of Mathematics and its Applications)* **8** Addison Wesley.

- [14] Man'ko, V. I., Marmo, G., Solimeno S. y Zaccaria, F., *Int. J. Mod. Phys A* **8** (1993) 3577.
- [15] Man'ko, V. I., Marmo G. y Zaccaria, *Geom. Struc. for Phys. Theories, II* **54** (1996) 4.
- [16] Man'ko, V. I., Marmo, G., Sudarshan, E. C. G., y Zaccaria, F., *Physica Scripta* **55** (1997) 528.
- [17] Gilmore R., *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* Dover. 1974.
- [18] Hausner, M. y Schwartz, J. T., *Lie Groups, Lie Algebras* T. Nelson and Sons. 1968.
- [19] Greiner W. y Müller B. *Quantum Mechanics, Symmetries* Springer. 2001
- [20] Puri, Ravinder R., *Mathematical Methods of Quantum Optics* Springer. 2001
- [21] Lacky, Jan., *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* (2004) 35
- [22] Fernández Francisco y Castro Eduardo, *Algebraic Methods in Quantum Chemistry and Physics*. CRC Press Inc., 1996
- [23] Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. *Mecánica Cuántica no Relativista* (trad. Ramón Ortiz Fornaguera). Reverté.1967
- [24] Abramowitz, M. y Stegun, A., *Handbook of Mathematical Functions* Dover. 1972
- [25] De los Santos-Sánchez, O. y Recamier, *J. J. Phys. A: Math Theor.* **44** 2011 145307.
- [26] W. Magnus, *Commun. Pure Appl. Math.* **7** (1954) 649.
- [27] J. Varona, *Mét. Clásicos de Resolución de Ec. Dif.* Univ. de La Rioja. 1996.