Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Formulación de Hamilton-Jacobi de gravedad tridimensional en términos de variables de Ashtekar

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Manuel Eduardo Hernández García

Asesorado por

Dr. Alberto Escalante Hernández

Puebla Pue.
Noviembre 2020

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Formulación de Hamilton-Jacobi de gravedad tridimensional en términos de variables de Ashtekar

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Manuel Eduardo Hernández García

Asesorado por

Dr. Alberto Escalante Hernández

Puebla Pue.
Noviembre 2020

Título: Formulación de Hamilton-Jacobi de gravedad tridimensional en términos de variables de Ashtekar
Estudiante: Manuel Eduardo Hernández García

COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Presidente

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Secretario

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Vocal

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Suplente

Dr. Alberto Escalante Hernández
Asesor

Agradecimientos

La culminación de una etapa extraordinaria de mi vida no habría sido posible sin el apoyo incondicional de mi familia, por ello quiero agradecer a mi padre Cristóbal Hernández García y a mi madre Magdalena García Martínez, a mi hermano Oscar Ediel Hernández García, por confiar en mí cuando decidí estudiar física y perseguir mis sueños; gracias por tantos años de orientación y lecciones de vida, que no les quepa duda que estaré siempre para ustedes así como ustedes lo han estado para mí.

A todos mis amigos de la facultad, Máx, Joshua, Jorge, Orlando, Laura, Zaida, Andrí, Cristhian, Alexis, Yetla y demás compañeros, con quienes he compartido parte de mi aprendizaje, me han motivado, y quienes siempre llevaré en la memoria.

Finalmente, agradezco al Dr. Alberto Escalante Hernández por su paciencia, apoyo, dirección en el desarrollo de este trabajo y guiarme por el camino del aprendizaje.

Dedico esta tesis a mis padres y a mi hermano.

Resumen

En el presente trabajo se realiza el análisis de Hamilton-Jacobi de gravedad tridimensional escrita en términos de variables tipo Ashtekar. Se reportan los hamiltonianos involutivos y no-involutivos, las ecuaciones características, las transformaciones de norma, los paréntesis generalizados y el conteo de grados de libertad. Se comparan los resultados obtenidos con los reportados en la literatura.

Palabras clave: Gravedad tridimensional, Hamilton-Jacobi, variables Ashtekar.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Algoritmo de Dirac-Bergmann **3**
2.1. Sistemas clásicos singulares . . . 3
2.2. Restricciones primarias . . . 4
2.3. Ecuaciones débiles y fuertes . . . 4
2.4. Condiciones de regularidad . . . 5
2.5. Hamiltoniana canónica . . . 5
2.6. Hamiltoniana primaria y restricciones secundarias . . . 6
2.7. Hamiltoniana total y restricciones sobre los multiplicadores . . . 8
2.8. Restricciones de primera y segunda clase . . . 9
2.8.1. Separación de restricciones de primera y segunda clase . . . 10
2.9. La acción y la Hamiltoniana extendida . . . 11
2.10. Transformaciones de norma . . . 11
2.11. Grados de libertad . . . 13
2.12. Reductibilidad . . . 13
2.13. Paréntesis de Dirac . . . 13
2.14. Observables . . . 14

3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares **15**
3.1. Ecuaciones de Hamilton-Jacobi . . . 15
3.2. Ecuaciones características . . . 16
3.3. Condiciones de integrabilidad . . . 19
3.4. Hamiltonianos involutivos y no-involutivos . . . 20
3.4.1. Paréntesis Generalizado . . . 20
3.5. Ecuaciones de movimiento . . . 21
3.6. Transformaciones de norma . . . 22
3.7. Grados de libertad . . . 22

4. Análisis de Dirac y de Hamilton-Jacobi para gravedad tridimensional **23**
4.1. Análisis de Dirac . . . 24
4.2. Análisis de Hamilton-Jacobi . . . 31
4.3. Conclusiones . . . 35

A. Geometría diferencial **37**
A.1. Variedades diferenciables . . . 37
A.2. Campos vectoriales . . . 37
A.3. Formas diferenciales . . . 38
A.4. Derivada exterior . . . 40

Bibliografía **41**

Capítulo 1

Introducción

Para realizar el estudio de las interacciones fundamentales dentro de un contexto clásico, es importante entender el conjunto de simetrías que las definen, y poder hacer posteriormente una extensión para su estudio a nivel cuántico [1]. Las interacciones fundamentales entran dentro de un conjunto de sistemas dinámicos que son llamados sistemas de norma, y estos poseen una simetría particular que caracteriza los sistemas singulares más importantes, llamada simetría de norma. La simetría de norma es fundamental puesto que nos brinda una clase de equivalencia entre estados físicos, sus generadores son constricciones del sistema definidas en el espacio fase con características que nos permiten entender cómo es la evolución dinámica de los grados de libertad del sistema. Actualmente, para realizar el estudio de sistemas singulares contamos con novedosos formalismos que nos ayudan a entender las simetrías de un sistema de una manera exhaustiva, ejemplo de tales formalismos encontramos el formalismo de Dirac [1] y el formalismo de Hamilton-Jacobi [HJ] [2]. Estos formalismos nos permiten obtener las ecuaciones de movimiento, las restricciones del sistema, conocer los grados de libertad físicos, los paréntesis de Dirac o los generalizados de HJ, etc., según sea el caso de qué sistema estemos estudiando, uno puede usar alguno de esos formalismos. Por ejemplo, podemos observar en la literatura que hay análisis de sistemas usando ambos formalismos y exponiendo las diversas ventajas de cada uno de ellos [3-8].

En relación con lo comentado anteriormente, no debemos olvidar que la Relatividad General de Einstein [RG] es una teoría singular y de norma. Respecto a este punto, actualmente el estudio clásico y cuántico de RG es un área muy activa dentro de la comunidad, y ha existido un gran esfuerzo por tratar de entender las simetrías que presenta el campo gravitacional tanto a nivel Lagrangiano como a nivel Hamiltoniano. Cabe mencionar que formulaciones alternativas surgieron para estudiar a la gravedad más allá de la acción de Einstein-Hilbert [EH] donde la variable dinámica es la métrica, es la conocida formulación de Palatini [9] donde las variables del campo son una tétrada y una conexión valuada en el Álgebra del grupo $SO(3,1)$. Sin embargo, en el camino surgieron complicaciones de estructura puesto que las restricciones de la teoría no son polinomiales. De esta manera, surgen otras formulaciones alternativas como las de Ashtekar, Barbero y Holst [10,11,12]. Es importante mencionar, que la formulación de Ashtekar es el primer intento que se realiza por tratar de expresar el principio de acción del campo gravitacional en términos de conexiones, tal y como es presente en la teoría de norma de Yang-Mills. Aunque la formulación de Ashtekar es elegante y goza de cierta simplicidad, sabemos que las variables que describen al campo gravitacional son complejas y si uno quiere extraer los grados de libertad en el sector real, es necesario considerar un conjunto de restricciones extra llamadas condiciones de realidad, las cuales complican el análisis y complica más el querer analizar la formulación cuántica.

Debido a lo anterior, en el intento de querer abordar las complicaciones que uno encuentra en las diferentes formulaciones del campo gravitacional, es natural que se pretenda trabajar con modelos más sencillos sin perder de vista las simetrías que tiene gravedad; modelos como gravedad en dimensiones menores a cuatro son los candidatos ideales debido a que las restricciones de la teoría son más simples. Algunos de los ejemplos más comunes que se pueden citar son la Teoría de Chern-Simons [13], o el caso de gravedad topológicamente masiva [14]; estos son llamados “modelos de juguete”, que nos dan un panorama inicial a lo que uno encuentra en gravedad real.

De esta manera, en este trabajo de tesis, estamos enfocados en estudiar la formulación de Ashtekar de una acción definida en tres dimensiones, algo que no se había reportado en la literatura. Es importante mencionar, que en la formulación de Holst uno encuentra que la acción depende de un parámetro el cual es llamado el parámetro de Barbero-Immirzi. Dicho parámetro no presenta contribución alguna a las ecuaciones de movimiento, puesto que el término que lo acompaña es un término topológico; Holst y EH tienen las mismas ecuaciones de movimiento. Por el contrario, a nivel cuántico, el parámetro de Barbero sí presenta una contribución y aún es controversial definir si dicho parámetro es relevante o no [15]. En el caso de tres dimensiones, uno tiene ciertas complicaciones, puesto que uno no conocía de qué manera acoplar a la acción de Palatini un término que acompañe al parámetro de Barbero y que, al variar la acción, se obtuvieran las ecuaciones de EH en tres dimensiones. Por supuesto que se encuentran en la literatura ejemplos donde se han hecho varios intentos [5], sin embargo, definir las variables de Ashtekar en esos principios de acción no había sido realizado. Por otro lado, en un trabajo reciente [16] se propuso un principio de acción el cual acopla a la acción de Palatini un término que acompaña al parámetro de Barbero y al variarla uno obtiene las ecuaciones de movimiento de EH, el principio de acción describe gravedad Euclidiana [17]. El análisis que se realiza en [16] es enfocado al formalismo de Dirac, sin embargo, no se introducen las variables de Ashtekar, es por ello, que en este trabajo nos dimos a la tarea de expresar en términos de variables tipo Ashtekar a la acción publicada en [16] y la analizamos usando alternativamente el formalismo de Hamilton-Jacobi. La terminología de variables tipo Ashtekar, se debe a que nosotros usamos variables reales, aunque la estructura es prácticamente la misma. Dentro de los resultados que reportamos en este trabajo se encuentran que la acción tiene una estructura similar a la de Ashtekar, y cuando uno analiza dichas restricciones, se encuentra que es posible resolver una de ellas y al tomar en cuenta la solución uno reduce la acción original a una teoría BF, la contribución del parámetro de Barbero se reduce a estar presente a nivel de los multiplicadores de Lagrange y las restricciones toman una estructura simple. En otras palabras, en la acción tipo Holst en tres dimensiones reportada en [16] al introducir unas variables tipo Ashtekar y analizar el sistema en el marco de HJ la acción se reduce a una teoría BF teniendo como variable dinámica una conexión expresada en la representación adjunta del grupo SO(3).

En el capítulo 2 se dará una introducción del algoritmo de Dirac, se empieza a desarrollar a partir de la mecánica elemental, y posteriormente se irán dando algunos conceptos indispensables en el algoritmo. En el capítulo 3 presentaremos de forma introductoria el formalismo de HJ para sistemas singulares, empezaremos con la ecuación de HJ, y se darán conceptos fundamentales que posteriormente usaremos. En el capítulo 4 aplicaremos el algoritmo de Dirac y HJ a una acción de gravedad tridimensional (que se ha presentado en [16]) para identificar las simetrías, las ecuaciones de movimiento y los grados de libertad.

Capítulo 2

Algoritmo de Dirac-Bergmann

En este capítulo haremos una descripción del algoritmo de Dirac que usualmente es usado para estudiar a los sistemas singulares. También serán dados algunos conceptos básicos que son fundamentales para entender el formalismo, el desarrollo de este capítulo es enfocado a sistemas con grados de libertad finitos y que ayudará a extender dichos conceptos sin problema a la teoría de campos. El algoritmo de Dirac es una extensión del formalismo Hamiltoniano elemental, donde se quiere realizar un mapeo del espacio de configuraciones al espacio fase, sin embargo, el mapeo a través de la transformada de Legendre no está bien definido cuando se tienen sistemas singulares, debido a que dicho mapeo es multivaluado. Como veremos, la introducción de multiplicadores de Lagrange será de ayuda para así tener bien definido el mapeo entre los dos espacios.

2.1. Sistemas clásicos singulares

En la mecánica clásica se usan principalmente el Lagrangiano y el Hamiltoniano, los cuales nos permiten describir la dinámica de los sistemas bajo estudio, para los sistemas regulares se suele usar la lagrangiana para construir el hamiltoniano o equivalentemente en el sentido inverso, aunque en los sistemas singulares se encuentra que esto no está dado de manera única. Para ilustrar lo anterior, empezaremos con el principio de Hamilton [18]. El principio de Hamilton, en su forma lagrangiana, establece que las curvas descritas por un sistema en el espacio de configuraciones son distinguidas por el hecho que la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q^j(t), \dot{q}^j(t))\, dt, \tag{2.1}$$

tiene un mínimo (de manera general un punto estacionario) para extremos fijos. Con q_j las coordenadas, y $\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$ sus correspondientes velocidades (i=1,2...N), t es un parámetro de evolución comúnmente asociado al tiempo (newtoniano). Las condiciones en la cual la integral es estacionaria dan las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0, \tag{2.2}$$

desarrollándola,

$$\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right)\frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right)\frac{d\dot{q}^k}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0, \tag{2.3}$$

reescribiendo,

$$(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \dot{q}^j})\ddot{q}^k = -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^k \dot{q}^j}\right)\dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial q^j}. \tag{2.4}$$

De esta última ecuación se identifica al primer término como la matriz Hessiana $H_{kj} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \dot{q}^j}$, por lo que, si el determinante de ésta es distinto de cero, la matriz es invertible, lo cual nos lleva a determinar de manera única a las $\ddot{q}^k$'s en términos de q^k y $\dot{q}^k$, en el otro caso, cuando el determinante es cero, no se podrán despejar todas estas cantidades, debiéndose a que la matriz Hessiana tiene rango $R < N$. Cuando el determinante de la matriz Hessiana es cero, a $L(q^j(t), \dot{q}^j(t))$ se le llama lagrangiana singular, es precisamente a sistemas como este al cual se le aplica el algoritmo de Dirac, que de alguna manera nos dirá cómo son las otras ecuaciones que no se determinaron.

2.2. Restricciones primarias

Para realizar el formalismo hamiltoniano es necesario definir los momentos canónicos

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}. \tag{2.5}$$

Cuando se tiene que $\det(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \dot{q}^j}) = 0$ (el determinante de la matriz hessiana es igual a cero, o de manera equivalente $\det(\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^k}) = 0$), esto permite la existencia funciones que son de la manera siguiente

$$\phi^m(q, p) = 0, \tag{2.6}$$

con m=1,2,3...M, las cuales son nombradas restricciones primarias, donde éstas son obtenidas directamente de los momentos canónicos. Este también puede verse como el problema de querer expresar las velocidades (2.5) en términos de los momentos generalizados, estando en el caso de una lagrangiana singular, solo será posible encontrar R (el número de velocidades que pudieron ser despejadas directamente de (2.5)), para completar el mapeo entre los espacios es necesario tener un conjunto de ecuaciones como las $\phi^m = 0$.

Podría surgir la duda, ¿cómo saber si hemos encontrado adecuadamente todas las restricciones de primarias?, para saberlo, basta con fijarnos en la nulidad de la matriz Hessiana (H_{jk} ya definida anteriormente) que debe coincidir con el número de restricciones. Para asegurar que las restricciones primarias sean funcionalmente independientes, se requiere calcular los vectores nulos de H_{jk}, los cuales serán V^μ (sus componentes V^μ_m), además el número de vectores nulos será M' ($M' \leqslant M$) por lo que solo serán encontrados M' restricciones primarias independientes, teniendo ya encontradas las restricciones primarias ϕ^m éstas se contraen con los vectores nulos, y de esta manera se obtienen las restricciones primarias independientes

$$\Phi^\mu = V^\mu_m \phi^m. \tag{2.7}$$

Al tener las restricciones reducimos el espacio fase a una subvariedad que tiene dimensión R, más adelante daremos las condiciones para tener bien establecida la subvariedad.

2.3. Ecuaciones débiles y fuertes

Antes de continuar conviene introducir el concepto de igualdad débil, el cual se representa con el símbolo $\approx$. Dadas dos funciones F y G, se dice que son débilmente iguales, si lo son en la subvariedad definida por las restricciones primarias, $\phi^m = 0$, y se denotan como

$$F \approx G. \tag{2.8}$$

Definición: Una función F del espacio fase, restringida en la subvariedad Σ_1 definida por las restricciones primarias, es débilmente igual a cero si,

$$F \mid_{\Sigma_1} = 0, \tag{2.9}$$

mientras que es fuertemente igual a cero si

$$F \mid_{\Sigma_1} = 0, \left(\frac{\partial F}{\partial q^j}, \frac{\partial F}{\partial p_j} \right) \mid_{\Sigma_1} = 0, \tag{2.10}$$

el último término son las derivadas parciales de F con respecto a las variables canónicas.

2.4. Condiciones de regularidad

Hay varias maneras de representar la superficie generada por las restricciones primarias, pero es indispensable que estén bien definidas, por lo que es necesario imponer condiciones. Si elegimos a $f^l = \phi^l(q,p) \approx 0$ como una restricción ($\phi^l(q,p)$ son las restricciones primarias independientes), también lo serian f_l^2, $\sqrt{f_l}$, etc., sin embargo, para que estas definan adecuadamente una subvariedad de dimensión $S = 2N - M'$ es necesario que el rango de la matriz jacobiana de las restricciones sea constante e igual a M' (M' el número de restricciones independientes que se encuentran directamente de (2.5), N la dimensión de la matriz Hessiana)

$$Ran \left(\frac{\partial \phi^l}{\partial (q^j, p_j)} \right) = M'. \tag{2.11}$$

Con esto, solo cuando hacemos la elección $f^l = \phi^l(q,p) \approx 0$ definen adecuadamente una subvariedad y forman un Jacobiano de rango constante; la condición en el Jacobiano es la que se llama condición de regularidad.

2.5. Hamiltoniana canónica

En la mecánica clásica está bastante claro que cuando se tiene alguna lagrangiana regular se va de la formulación lagrangiana a la hamiltoniana a través de la transformada de Legendre [19]. En el caso de las lagrangianas singulares se requerirán de algunos otros elementos para completar este mapeo entre formulaciones. A pesar de esto, al igual que en los sistemas regulares, cuando se trabajan los sistemas singulares, se le nombra hamiltoniana canónica a aquella que se obtiene bajo la transformada de Legendre,

$$H_c \equiv \dot{q}^j p_j - L. \tag{2.12}$$

Una diferencia que se tiene con respecto a los ejemplos elementales de la mecánica clásica, en lagrangianas singulares la hamiltoniana canónica depende de las variables (q^j, p_j), pero aquí estas variables ya no son independientes en el espacio fase. Por lo que H_c solo está bien definida en la subvariedad definida por las restricciones, por lo que al agregar una combinación lineal de restricciones

$$H_c \longrightarrow H_c + u_\mu \phi^\mu, \tag{2.13}$$

el formalismo debe mantenerse invariante, ya que una combinación lineal de restricciones sigue siendo débilmente cero, y se sigue estando en la subvariedad definida por las restricciones.

Como mencionamos al principio, este algoritmo tiene un gran parecido con los multiplicadores de Lagrange, por lo que este se puede ver como el análisis de un problema de extremos con restricciones. Cuando son funciones del espacio de configuraciones se obtiene

$$\int L dt \longrightarrow \int (L + u_a \phi^a) dt, \tag{2.14}$$

pero cuando son funciones del espacio fase,

$$\int (\dot{q}^j p_j - H_c) dt \longrightarrow \int (\dot{q}^j p_j - H_c - u_a \phi^a) dt, \tag{2.15}$$

(no olvidar que la lagrangiana L y la hamiltoniana H_c; aún dependen de las variables del espacio de configuraciones y el espacio fase respectivamente). Haciendo la variación de esta última, tomando en cuenta que los extremos están fijos y usando las restricciones se obtienen las ecuaciones de movimiento,

$$\dot{q}^j = \frac{\partial H_c}{\partial p_j} + u_a \frac{\partial \phi^a}{\partial p_j}, \tag{2.16}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H_c}{\partial q^j} - u_a \frac{\partial \phi^a}{\partial q^j}. \tag{2.17}$$

Hay dos observaciones importantes que realizar. La primera, debido a que las u_a son funciones arbitrarias del espacio fase, las ecuaciones de movimiento (2.16) y (2.17) no están determinadas de manera única, por lo que será necesario encontrar el valor de las u_a. A partir de ahora las nombraremos multiplicadores de Lagrange. Y segundo, si a pesar de aplicar todo el algoritmo que incluye encontrar todas las restricciones y los multiplicadores, algunos de estos últimos no se llegan a encontrar, nos dirá que el sistema está determinado hasta ciertas funciones arbitrarias, pero aún estamos en el régimen clásico, entonces ésto tiene alguna relación con la libertad de norma del sistema, como más adelante se verá.

Ya con todo lo comentado anteriormente, si ahora se trabaja con la transformada de Legendre del espacio de configuraciones definida por las restricciones $\phi^m(p,q) = 0$ dada por:

$$q^j = q^j, \tag{2.18}$$

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}, \tag{2.19}$$

$$u_m = u_m(p,q), \tag{2.20}$$

la transformación en el espacio fase quedará como a continuación,

$$q^j = q^j, \tag{2.21}$$

$$\dot{q}^j = \frac{\partial H_c}{\partial p_j} + u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_j}, \tag{2.22}$$

$$\phi^m(p,q) = 0. \tag{2.23}$$

De esta manera, a través de la transformada de Legendre, las restricciones y los multiplicadores de Lagrange, se asegura que el mapeo es invertible entre los dos espacios aun cuando el determinante de la matriz Hessiana es igual a cero.

2.6. Hamiltoniana primaria y restricciones secundarias

A la expresión

$$H_1 \equiv H_c + u_\mu \phi^\mu, \tag{2.24}$$

se le llama Hamiltoniana primaria [1] (ya vista en (2.13)), esta ya contiene a H_c y toda la información que se tiene del sistema. Las ecuaciones de movimiento encontrados en (2.16) y (2.17) se pueden generalizar usando los corchetes de Poisson

$$\dot{g} = \{g, H_c\} + u_\mu \{g, \phi^\mu\}, \tag{2.25}$$

con $g = g(q,p)$ una función arbitraria del espacio fase. La ecuación (2.25) se puede simplificar

$$\dot{g} = \{g, H_c + u_\mu \phi^\mu\} \equiv \{g, H_1\}, \tag{2.26}$$

para demostrarlo se puede hacer el desarrollo, usando las propiedades del paréntesis de Poisson y ocupando el hecho que las restricciones $\phi^\mu = 0$.

Como ya se ha mencionado en las secciones anteriores se espera que las restricciones mantengan la subvariedad bien definida, además de esto se agrega que se conserven en el tiempo, $\dot{\phi}^\mu \approx 0$, a esta condición en se le llama "condición de consistencia", que puede ser vista como un caso particular de (2.25), es decir

$$\dot{\phi}^\nu = \{\phi^\nu, H_1\} = \{\phi^\nu, H_c\} + u_\mu\{\phi^\nu, \phi^\mu\} \approx 0, \tag{2.27}$$

esta última relación se considerara como un sistema de ecuaciones lineales no-homogéneo para los multiplicadores u_μ, dependiendo del sistema se podrán despejar todos o algunos multiplicadores. Definiendo $h^\nu = \{\phi^\nu, H_c\}$, W la matriz con entradas $W^{\nu\mu} = \{\phi^\nu, \phi^\mu\}$ y dim$W$=$M^{'}$, donde los posibles resultados se pueden englobar en los siguientes casos:

Caso I: $h \neq 0$ y det$W \neq 0$.

Escribiendo el sistema (2.27) en forma matricial

$$h + Wu \approx 0, \tag{2.28}$$

h y u vectores columna con entradas h^ν y u_μ respectivamente. Debido a la condición detW$\neq$ 0, W tiene inversa, entonces todos los multiplicadores de Lagrange van a ser determinados y están dados por,

$$u = -W^{-1}h, \tag{2.29}$$

o escrita con índices

$$u_\mu = -W^{-1}_{\nu\mu}\{\phi^\nu, H_c\} \tag{2.30}$$

este resultado lo sustituimos en (2.27),

$$\dot{g} = \{g, H_c\} - \{\phi^\nu, H_c\}W^{-1}_{\nu\mu}\{\phi^\mu, H_c\} \equiv \{g, H_c\}_D, \tag{2.31}$$

(2.31) es la definición del paréntesis de Dirac, en este caso todos los multiplicadores fueron encontrados, entonces, solo dando condiciones iniciales el sistema es completamente determinado al igual que en la mecánica clásica usual, además se presenta una nueva estructura (el paréntesis de Dirac) muy similar al paréntesis de Poisson.

Caso II: $h \neq 0$ (no todas las $h^\nu \approx 0$) y det$W$=0.

Regresando a la ecuación (2.28) y considerando que el determínate de W sea cero, solo K multiplicadores de Lagrange podrán determinarse, donde K es el rango de la matriz W ($K < M^{'}$), en este caso el sistema será determinado hasta funciones arbitrarias, este caso es de gran interés para las teorías de norma. Sean V^i los vectores nulos de W, donde se esperan encontrar ($M^{'}$-K) de ellos, que satisfacen por definición de vector nulo,

$$WV^i = 0, \tag{2.32}$$

de este resultado se obtiene

$$hV^i = 0, \tag{2.33}$$

en general estas funciones del espacio fase son independientes de los multiplicadores. Estas i relaciones implican que el sistema tiene i nuevas restricciones, a las que se le nombran restricciones secundarias.

Caso III: $h = 0$ (todas las $h^\nu \approx 0$) y det$W \neq$ 0.

Tomando en cuenta la relación (2.28) se tiene el sistema homogéneo,

$$Wu \approx 0, \tag{2.34}$$

considerando los teoremas de sistemas de ecuaciones, solo se tendrá la solución trivial, por lo que el sistema se reduce a la igualdad 0≈0, para solventarlo se puede tomar como restricción secundaria a det$W$≈0

Caso IV: $h = 0$ (todas las $h^\nu = 0$) y det$W$=0.

La relación (2.28), se sigue manteniendo en el caso tres, solo que ahora det$W$=0, si el rango de W es igual a K, solo M'-K multiplicadores podrán ser determinados.

De los cuatro casos presentados, el que es de importancia para las teorías de norma solo es el caso II, por lo que en el trabajo solo este será de importancia para analizar, desarrollando el algoritmo para éste.

Una vez que se haya extraído toda la información de las relaciones de consistencia a todas las restricciones, si se encuentran restricciones secundarias se tiene una situación similar al momento de terminar de encontrar las restricciones primarias, entonces se construye una hamiltoniana secundaria,

$$H_2 \equiv H_c + u_A \phi^A, \tag{2.35}$$

las ϕ^A son todas las restricciones encontradas hasta este momento (primarias y secundarias), ahora el hamiltoniano secundario contiene toda la información de la dinámica del sistema. Las ecuaciones de movimiento tienen la siguiente forma,

$$\dot{g} = \{g, H_c + u_A \phi^A\} \equiv \{g, H_2\}, \tag{2.36}$$

se usa esta última ecuación para aplicar las relaciones de consistencia a las restricciones secundarias, si después de aplicar esto aparecen nuevas restricciones, serán llamadas restricciones terciarias. Se repite de nuevo todo el proceso anterior; construir la hamiltoniana terciaria (semejante a la secundarias solo que con todas las restricciones encontradas hasta este punto), se calculan las relaciones de consistencia de las restricciones terciarias, y así se continua hasta que no aparezcan más restricciones. Al conjunto de restricciones que no son primarias se les llamara simplemente secundarias. La condición de consistencia, además de asegurar que las restricciones no varíen en el tiempo, permite determinar algunos multiplicadores de Lagrange y construir el paréntesis de Dirac.

2.7. Hamiltoniana total y restricciones sobre los multiplicadores

Cuando ya se hayan encontrado todas las restricciones (primarias y secundarias), construimos una nueva hamiltoniana, a la que nos referiremos como Hamiltoniana total, que incluye a la hamiltoniana canónica y a una combinación de todas las restricciones encontradas

$$H_T \equiv H_c + u_a \phi^a, \tag{2.37}$$

dado que esta hamiltoniana es la que gobierna la dinámica del sistema, se emplea para asegurar que las restricciones sigan cumpliendo las condiciones de consistencia,

$$\dot{\phi}^b = \{\phi^b, H_T\} = \{\phi^b, H_c\} + u_a\{\phi^b, \phi^a\} \approx 0, \tag{2.38}$$

con $a, b = 1, 2...J$, siendo J el número total de restricciones. Ya se ha mencionado en la sección anterior que (2.38) puede ser vista como un sistema de ecuaciones lineales para los multiplicadores u_a; y es bien sabido, del álgebra lineal elemental, la solución general de esta relación puede estar dada por la suma de una parte homogénea V_a, y otra no-homogénea U_a,

$$u_a = U_a + V_a, \tag{2.39}$$

si V_a es una solución general al sistema homogéneo,

$$V_a\{\phi^b, \phi^a\} \approx 0, \tag{2.40}$$

se puede reescribir a V_a como una combinación lineal de las soluciones del sistema homogéneo, $V_a = v_i V_a^i$ (V_a^i son componentes de los vectores nulos) donde $i = 1, 2...I$, es el número de soluciones independientes del sistema homogéneo, gracias a esto ahora escribimos lo siguiente,

$$u_a = U_a + v_i V_a^i. \tag{2.41}$$

Considerando que las v_i son arbitrarias en el sentido que no determinan ningún multiplicador, las u_a se pueden descomponer en una parte arbitraria y otra fija, esta distinción es determinada a partir las relaciones de consistencia, lo cual también es reflejado en la hamiltoniana total,

$$\begin{aligned} H_T &\equiv H_c + u_a\phi^a \\ &= H_c + (U_a + v_i V_a^i)\phi^a \\ &= H_c + U_a\phi^a + v_i V_a^i \phi^a \\ &= H_c + U_a\phi^a + v_i\phi^i, \end{aligned} \tag{2.42}$$

con $v_i\phi^i = v_i V_a^i \phi^a$ esto debido a los vectores nulos, como H_T es la que ahora gobierna la dinámica del sistema las ecuaciones de movimiento para $g = g(q,p)$ una función del espacio fase, usando las restricciones $\phi^a \approx 0$, esta será,

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \{g, H_T\} \\ &= \{g, H_c + U_a\phi^a + v_i\phi^i\} \\ &= \{g, H' + v_i\phi^i\} \\ &= \{g, H'\} + \{g, v_i\phi^i\}, \end{aligned} \tag{2.43}$$

siendo $H' = H_c + U_a\phi^a$, notar que al separar la ecuación de movimiento es más claro que existen I $(I \leq J)$ multiplicadores arbitrarios.

La aparición de estas funciones arbitrarias marca una ruptura con la mecánica clásica elemental, ya que en ésta dando solamente las condiciones iniciales la evolución del sistema es completamente determinado, mientras que en los sistemas singulares la evolución del sistema está indeterminado hasta funciones arbitrarias.

2.8. Restricciones de primera y segunda clase

La separación entre restricciones primarias y secundarias no nos proporciona información clara con respecto a la dinámica del sistema. La separación importante es la que se dará entre las restricciones de primera clase y las de segunda clase, ya que las primeras serán las generadoras de norma, las segundas permiten construir el paréntesis de Dirac (como ya se mencionó, sustituye al paréntesis de Poisson).

Definición: Sea F una función del espacio fase, se dice que es de primera clase si su paréntesis de Poisson con todas las restricciones es débilmente cero,

$$\{F, \phi^a\} \approx 0, \tag{2.44}$$

en otro caso, se dice que F es de segunda clase. Si F es de primera clase, no queda alternativa que $\{F, \phi^a\}$ será una combinación lineal de restricciones, ya que se trabaja en la subvariedad definida por las restricciones, y éstas son las únicas que son débilmente cero en toda la subvariedad. Así,

$$\{F, \phi^a\} = f_d^a \phi^d. \tag{2.45}$$

Teorema: El paréntesis de Poisson de dos funciones de primera clase también es de primera clase.

Prueba: Sean F y G funciones de primera clase, entonces $\{F, \phi^a\} = f_c^a\phi^c$ y $\{G, \phi^a\} = g_a^a\phi^a$, usando la identidad de Jacobi (y usando las propiedades del paréntesis de Poisson),

$$\begin{aligned} \{\{F, G\}, \phi^a\} &= \{\{F, \phi^a\}, G\} - \{\{G, \phi^a\}, F\} \\ &= \{f_c^a\phi^c, G\} - \{g_d^a\phi^d, F\} \\ &= f_c^a\{\phi^c, G\} + \phi^c\{f_c^a, G\} - g_d^a\{\phi^d, F\} - \phi^d\{g_d^a, F\} \\ &= (\{f_c^a, G\} - \{g_c^a, F\})\phi^c + (g_c^a f_d^c - f_c^a g_d^c)\phi^d \approx 0. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Usando este último resultado se puede demostrar que H' y ϕ^i son de primera clase. Además, la descomposición de H_T en H' y ϕ^i no es de manera única, ya que las v_i son funciones arbitrarias. Ahora demostraremos que ϕ^i es de primera clase, tenemos que $v_i V_b^i \phi^b = v_i \phi^i$, por lo que el paréntesis de Poisson de ϕ^i con todas las restricciones queda como,

$$\{\phi^i, \phi^a\} = \{V_b^i \phi^b, \phi^a\} = V_b^i \{\phi^b, \phi^a\} + \{V_b^i, \phi^a\}\phi^b = V_b^i \{\phi^b, \phi^a\}, \tag{2.47}$$

pero tenemos que V_b^i es justamente la solución a la parte homogénea de las ecuaciones para determinar los multiplicadores, por lo que $V_b^i \{\phi^b, \phi^a\} \approx 0$, llegando a que,

$$\{\phi^i, \phi^a\} \approx 0. \tag{2.48}$$

A continuación veremos qué pasa con H', para esto le sumaremos un cero débil $\{\phi^i, \phi^a\} \approx 0$,

$$\begin{aligned} \{H', \phi^a\} &= \{H_c + U_b \phi^b, \phi^a\} \\ &= \{H_c + U_b \phi^b, \phi^a\} + v_i \{\phi^i, \phi^a\} \\ &= \{H_c + U_b \phi^b + v_i \phi^i, \phi^a\} = \{H_T, \phi^a\} \\ &= \{H_T, \phi^a\} = -\{\phi^a, H_T\} \approx 0, \end{aligned} \tag{2.49}$$

la última igualdad viene de las condiciones de consistencia. Por lo que H' también es de primera clase.

2.8.1. Separación de restricciones de primera y segunda clase

Ya se ha dado la definición de restricciones de primera clase y segunda clase, pero al igual que las restricciones primarias, no sabemos cómo escogerlas de manera independiente, en este caso podrán ser combinación lineal de primarias y secundarias, para dar luz a este problema; formamos una matriz W' (parecida a W en la sección 2.6) con las entradas dadas por el paréntesis de Poisson entre todas las restricciones, calculamos los vectores nulos de la matriz W', para contraerlos con las restricciones y obtener las restricciones de primera clase correctos, ya que la parte homogénea en (2.40) es la que está relacionada con las restricciones de primera clase.

Sea W' la matriz $J \times J$ cuyas entradas,

$$W'^{ab} = \{\phi^a, \phi^b\}, \tag{2.50}$$

donde ϕ^a son todas las restricciones primarias y secundarias y J es el número total de éstas. Teniendo ya los vectores nulos de W' (w_a^j), las restricciones de primera clase de algún sistema estarán dadas por

$$\gamma^j = w_a^j \phi^a \tag{2.51}$$

Las restricciones que no son usadas por completo para formar las de primera clase, serán las que se promoverán a restricciones de segunda clase. Ya que la separación que en verdad importa es aquella que diferencia entre las de primera y las de segunda clase, entonces denotaremos a las de primera clase con γ y las de segunda clase con χ. Una vez hecha la separación, la matriz formada con los paréntesis de Poisson de las restricciones tiene la forma,

$$\begin{pmatrix} \{\gamma^i, \gamma^j\} & \{\gamma^i, \chi^k\} \\ \{\chi^l, \gamma^j\} & \{\chi^l, \chi^k\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C^{lk} \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

Notar que C^{lk} es una matriz $R' \times R'$ antisimétrica e invertible sobre la superficie de restricciones. Además, para conocer el número de restricciones de segunda clase basta con conocer el rango de la matriz C^{lk}, la dimensión de esta matriz debe de ser par.

2.9. La acción y la Hamiltoniana extendida

La Hamiltoniana total dada anteriormente, ya toma en cuenta las restricciones primarias y secundarias, pero como ya se ha mencionado, es más importante la separación entre restricciones de primera clase y de segunda clase, y estas no están dadas directamente de las restricciones primarias y secundarias. Se construye una "Hamiltoniana extendida"que ya contiene la distinción entre restricciones y considera las funciones no determinadas,

$$H_E = H_c + U_j\chi^j + v_i\gamma^i = H' + v_i\gamma^i, \tag{2.53}$$

con $H' = H_c + U_j\chi^j$, muy similar a la H' de las secciones anteriores, la Hamiltoniana extendida hace énfasis en la separación de la parte determinada y la arbitraria, la parte determinada está contenida en H' y la indeterminada contenida en los multiplicadores v_i. La Hamiltoniana extendida es la que ahora da la evolución dinámica del sistema, entonces, para una función del espacio fase $F = F(q,p)$ quedará como

$$\dot{F} = \{F, H_E\}, \tag{2.54}$$

aunque estas ecuaciones son obtenidas de manera distinta en comparación con las secciones anteriores, todas dan una evolución dinámica equivalente. Para encontrar las ecuaciones de movimiento es suficiente emplear H_T, el introducir H_E ayuda a expresar de manera manifiesta la parte indeterminada (las transformaciones de norma), lo cual extiende el formalismo elemental. Para determinar la ecuación de movimiento de las variables canónicas y encontrar algunos o todos los multiplicadores de Lagrange dependiendo del sistema, se usa H_E, donde las ecuaciones de movimiento también se pueden obtener a partir de la siguiente acción,

$$S_E[q,p,v] = \int(\dot{q}^j p_j - H' - v_i\gamma^i)dt = \int(\dot{q}^j p_j - H_E)dt, \tag{2.55}$$

a (2.55) se llama acción extendida que a diferencia de la acción dada en la sección 2.5, ya contiene la separación entre restricciones de primera clase y de segunda clase, cuyas ecuaciones de movimiento vienen dadas como,

$$\begin{aligned} \dot{q}^j &= \frac{\partial H_E}{\partial p_j}, \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H_E}{\partial q^j}, \\ \phi^a(p,q) &= 0, \end{aligned} \tag{2.56}$$

donde ϕ^a es el conjunto de todas las restricciones. Estas ecuaciones se reducen al caso de sistemas no singulares cuando no hay restricciones, las ecuaciones de movimiento (2.56) ya consideran que se está sobre una subvariedad definida por las restricciones.

2.10. Transformaciones de norma

Hemos mencionado que las funciones arbitrarias están relacionadas con la simetría de norma, entonces, ¿por qué aparecen funciones arbitrarias?, o más aún, ¿qué es una transformación de norma?. En la mecánica clásica elemental con unas condiciones iniciales se determina por completo la evolución del sistema, esto es lo que se conoce como una teoría determinista, sin embargo, aquí se ha visto que las funciones que dictan la dinámica del sistema están definidas hasta funciones arbitrarias, pero dan estados físicos equivalentes si se dan ciertas condiciones iniciales, ya que la mecánica clásica sigue siendo una teoría determinista, un ejemplo es el campo magnético y eléctrico. Cuando existen dos funciones que dan el mismo estado físico de un sistema bajo las mismas condiciones iniciales, se dice que están relacionados bajo una transformación de norma.

Con lo anterior, considerando dos estados $F(t)$ y $F'(t)$ con las mismas condiciones iniciales en un tiempo t_0, y su evolución dinámica difiere del valor de los multiplicadores de Lagrange, específicamente en la parte relacionada con las restricciones de primera clase. Desarrollando en serie de Taylor a primer orden,

$$\begin{aligned} F(t) &= F(t_0) + \dot{F}\delta t \\ &= F(t_0) + (\{F, H'\} + v_i\{F, \gamma^i\})\delta t, \end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= F(t_0) + \dot{F}'\delta t \\ &= F(t_0) + (\{F, H'\} + v_i^1\{F, \gamma^i\})\delta t, \end{aligned} \tag{2.58}$$

restando las dos ecuaciones se obtiene,

$$\delta F(t) = F(t) - F'(t) = (v_i - v_i^1)\{F, \gamma^i\}\delta t \equiv \delta v_i\{F, \gamma^i\}, \tag{2.59}$$

donde $\delta v_i{=}(v_i - v_i^1)\delta t$. Entonces se puede ver que el estado físico del sistema se mantiene inalterado cuando se le aplica este tipo de transformaciones. Se puede elegir como caso particular a las variables canónicas. El cambio en las variables canónicas no es más que aplicar una transformación infinitesimal con una función generadora $\delta v_i \gamma^i$, las funciones γ^i son precisamente las restricciones de primera clase, por lo que estas son los generadores de una transformación de norma. Yendo más allá se pueden demostrar lo siguiente:

1.- El paréntesis de Poisson $\{\gamma^j, \gamma^i\}$, de cualquiera dos restricciones de primera clase genera una transformación de norma.

2.- El paréntesis de Poisson $\{H', \gamma^i\}$, de cualquier restricción de primera clase con el Hamiltoniano de primera clase genera una transformación de norma.

3.- De los dos anteriores se encuentra que $\{H_E, \gamma^i\}$, genera una transformación de norma.

Estos resultados se pueden obtener también del hecho que los términos dentro el paréntesis son de primera clase, y como se demostró en la sección 2.8 el paréntesis de dos funciones de primera clase también es de primera clase. Teniendo estos resultados nos preguntamos qué pasará con las variables canónicas, ya que queremos saber sus transformaciones de norma durante toda la evolución dinámica del sistema. Aplicamos una transformación de norma a una función F del espacio fase, posteriormente se evoluciona en el tiempo con H_E,

$$F' \equiv F + \delta v_i\{F, \gamma^i\} \longrightarrow (F')_1 \equiv \{F', H_E\}, \tag{2.60}$$

ahora le aplicamos a F las mismas transformaciones, pero en sentido inverso,

$$F_1 \equiv \{F, H_E\} \longrightarrow (F_1)' \equiv F_1 + \delta v_i\{F_1, \gamma^i\}, \tag{2.61}$$

y su diferencia,

$$\begin{aligned} (F')_1 - (F_1)' &= \{F', H_E\} - F_1 - \delta v_i\{F_1, \gamma^i\} \\ &= \{F + \delta v_i\{F, \gamma^i\}, H_E\} - \{F, H_E\} - \delta v_i\{\{F, H_E\}, \gamma^i\} \\ &= \{\delta v_i\{F, \gamma^i\}, H_E\} + \{F, H_E\} - \{F, H_E\} - \delta v_i\{\{F, H_E\}, \gamma^i\} \\ &= \delta v_i\left[\{\{F, \gamma^i\}, H_E\} + \{\{H_E, F\}, \gamma^i\}\right] \\ &= \delta v_i\{F, \{H_E, \gamma^i\}\}. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Obteniendo una cantidad que tiene como generador de norma $\{H_E, \gamma^i\}$ (esta es de primera clase) y mantiene el estado físico del sistema inalterado, con todo esto podemos establecer una función generadora G formada por restricciones de primera clase γ^i y funciones arbitrarias δv_i, ya que como hemos visto incluso cuando la variable evoluciona en el tiempo ésta sigue teniendo como generadores restricciones de primera clase,

$$G = \delta v_i \gamma^i \longrightarrow \delta F = \{F, G\}, \tag{2.63}$$

por lo que las transformaciones de norma de cualquier función del espacio fase quedan como el término de la derecha de (2.63).

2.11. Grados de libertad

Con todas las definiciones y conceptos dados, ya es posible dar los grados de libertad del sistema, pero antes la siguiente definición.

Definición: El número de grados de libertad de un sistema es el número de variables físicas independientes necesarias para describir al sistema.

Tomando en cuenta la forma en la que se hace el conteo en mecánica elemental, el número de coordenadas generalizadas menos el número de restricciones independientes. Haciendo la extrapolación para trabajar con variables del espacio fase, el conteo de los grados de libertad quedará,

$$GL = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}\text{número total de} \\ \text{variables canónicas}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{número total de} \\ \text{restricciones de 2.da clase}\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}\text{número total de} \\ \text{restricciones de 1.era clase}\end{pmatrix}\right]. \tag{2.64}$$

El factor $1/2$ aparece para compensar que los grados de libertad solo se refieren a las coordenadas generalizadas, el dos que acompaña a las restricciones de primera clase, se debe al hecho que estos presentan un doble papel; como restricción y como generador de una transformación de norma.

2.12. Reductibilidad

Si las restricciones ϕ^a (todas las restricciones) se relacionan a través de una transformación lineal, se dice que la teoría presenta reductibilidad, pero si no es así se tiene el caso irreducible. Sin embargo, hacer esta distinción no es un trabajo simple, una de las maneras de darse cuenta que el sistema podría presentar reductibilidad es fijarse que aun al hacer una separación adecuada de las restricciones de primera y segunda clase, y calculando los grados de libertad, estos no nos dan un valor entero o mayor a cero.

2.13. Paréntesis de Dirac

La matriz C^{lk} es invertible, con la inversa C_{lk}, tal que,

$$C^{lk}C_{kj} = \delta^l_j. \tag{2.65}$$

De esta manera, sean F_1, F_2 funciones del espacio fase, se define el paréntesis de Dirac,

$$\{F_1, F_2\}_D = \{F_1, F_2\} - \{F_1, \chi^l\}C_{lk}\{\chi^k, F_2\}, \tag{2.66}$$

los términos entre corchetes de lado derecho siguen siendo el paréntesis de Poisson usual. Sean F, F_1, R funciones del espacio fase arbitrarias y G_1 una función de primera clase, χ^k restricciones de segunda clase, el paréntesis de Dirac cumple las siguientes propiedades:

$$\{F, F_1\}_D = -\{F_1, F\}_D, \tag{2.67}$$

$$\{F, F_1R\}_D = \{F, F_1\}_D R + F_1\{F, R\}_D, \tag{2.68}$$

$$\{\{F, F_1\}_D, R\}_D + \{\{F_1, R\}_D, F\}_D + \{\{R, F\}_D, F_1\}_D = 0, \tag{2.69}$$

$$\{\chi^k, F\}_D = 0, \forall F, \tag{2.70}$$

$$\{F, G_1\}_D = \{F, G_1\}, \tag{2.71}$$

la demostración de las propiedades es de manera inmediata usando la definición del paréntesis de Dirac. Debido a que H_E es de primera clase y por (2.71) las ecuaciones de movimiento se pueden reescribir,

$$\dot{F} = \{F, H_E\}_D. \tag{2.72}$$

De manera similar una transformación de norma puede ser reescrita, para cualquier funcional F del espacio fase,

$$\{F, \gamma^l\} \approx \{F, \gamma^l\}_D. \tag{2.73}$$

Hasta este momento lo que se tiene, la generalización del paréntesis de Poisson al paréntesis de Dirac, en términos de esta última se escribieron dos de las ecuaciones más importantes (2.54) y (2.63). En general no es tan simple construir este paréntesis, debido al largo proceso que lleva.

2.14. Observables

Una observable en la mecánica clásica es por definición una función que es invariante de norma en la superficie generada por las restricciones, de manera más precisa una observable es aquella función A, cuyo paréntesis de Dirac es débilmente cero con las restricciones de primera clase,

$$\{A, \gamma^b\}_D \approx 0. \tag{2.74}$$

Capítulo 3

Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares

En el capítulo anterior hemos descrito el algoritmo de Dirac para sistemas singulares, y de manera similar en este explicaremos las ideas generales que definen el formalismo de HJ para sistemas singulares con grados de libertad finitos, todo esto se puede extrapolar a las teorías de campo. El siguiente procedimiento tiene la ventaja de ser mucho más corto con respecto a los cálculos que se hacen en el algoritmo de Dirac, obteniendo en ambos resultados equivalentes como más adelante se verá. El formalismo de HJ se basa principalmente en los desarrollos de lagrangianas equivalentes introducido por Güler [20] que a su vez tomó algunas ideas de Caratheodory [21]. La idea detrás de este procedimiento se basa en querer establecer un sistema de ecuaciones diferenciales que es inspirado en la estructura de las ecuaciones de HJ.

3.1. Ecuaciones de Hamilton-Jacobi

Existen varios caminos para deducir las ecuaciones de HJ, una de ellas parte de la idea de hacer un mapeo a través de una transformación canónica del espacio fase a un nuevo espacio donde existen constantes de movimiento. El camino que emplearemos para establecer las ecuaciones de HJ partirá del concepto de lagrangianas equivalentes [2], que está definido en el espacio de configuraciones $(q^i, \dot{q}^i)$ (con $i = 1, 2, .., n$) y describen a un sistema clásico.
De esta manera, tal como se ve en la mecánica elemental, dos lagrangianas son equivalentes si sus acciones determinan las mismas ecuaciones de movimiento, entonces a partir de L se encuentra una lagrangiana equivalente de la forma,

$$L`\left(q_i(t), \dot{q}^i(t)\right) = L\left(q_i(t), \dot{q}^i(t)\right) - \frac{dF(q_i(t), t)}{dt}, \tag{3.1}$$

F es una función arbitraria. Imponiendo que esta lagrangiana tenga las siguientes condiciones:

1.- Existe algún punto $\dot{q}^i(t) = g(q_i(t), t)$ tal que,

$$L`\left(q_i(t), \dot{q}^i(t) = g(q_i(t), t)\right) = 0. \tag{3.2}$$

2.- Para cualquier vecindad de $\dot{q}_i(t) = g(q_i(t), t)$

$$L`\left(q_i(t), \dot{q}^i(t) = g(q_i(t), t)\right) > 0, \tag{3.3}$$

estas dos condiciónes aseguran que existe un mínimo para $L`$ así como para L. Utilizando la primera propiedad y desarrollando la derivada total obtenemos,

$$0 = \left[L(q_i(t), \dot{q}^i(t)) - \frac{\partial F(q_i(t), t)}{\partial t} - \frac{\partial F(q_i(t), t)}{\partial q_i}\dot{q}^i\right]|_{\dot{q}^i = g}, \tag{3.4}$$

despejando el segundo término se tiene

$$\frac{\partial F(q_i(t),t)}{\partial t}|_{\dot{q}_i=g} = \left[L(q_i(t),\dot{q}_i(t)) - \frac{\partial F(q_i(t),t)}{\partial q_i}\dot{q}_i\right]|_{\dot{q}_i=g}. \tag{3.5}$$

Empleando ahora la segunda condición, y al haber un mínimo en $\dot{q}^i(t) = g\,(q_i(t),t)$, se llega a lo siguiente

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}|_{\dot{q}_i=g} = 0 = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial F(q_i(t),t)}{\partial q_i}\right]|_{\dot{q}_i=g}, \tag{3.6}$$

despejando,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}|_{\dot{q}_i=g} = \frac{\partial F(q_i(t),t)}{\partial q_i}|_{\dot{q}_i=g}. \tag{3.7}$$

En la mecánica elemental los momentos canónicos se definen como a continuación [19],

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}, \tag{3.8}$$

sustituyendo en la ecuación (3.7),

$$p_i = \frac{\partial F(q_i(t),t)}{\partial q_i}. \tag{3.9}$$

La Hamiltoniana canónica se construye comúnmente a partir de la lagrangiana, para esto se emplea la transformada de Legendre

$$H_0 \equiv \dot{q}^j p_j - L. \tag{3.10}$$

Usando las ecuaciones (3.9) y (3.10) en (3.5) se obtiene

$$\frac{\partial F(q_i(t),t)}{\partial t}|_{\dot{q}^i=g} = -H_0|_{\dot{q}_i=g}. \tag{3.11}$$

Esta última relación es conocida como la ecuación diferencial parcial de Hamilton-Jacobi (HJPDE sus siglas en ingles), (3.11) se utiliza para determinar las ecuaciones de movimiento en la mecánica elemental así como calcular a la función F, a continuación veremos su importancia en los sistemas singulares.

3.2. Ecuaciones características

Ya teniendo la ecuación diferencial de Hamilton-Jacobi para los sistemas elementales, su estructura será usada para establecer un sistema de ecuaciones diferenciales y poder determinar las ecuaciones de movimiento en los sistemas singulares, trabajamos ahora con los sistemas que son descritos por lagrangianas singulares, es decir, el determinante de su matriz Hessiana es cero $Det(H_{\rho\nu}) = 0$ ($H_{\rho\nu} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\rho \dot{q}^\nu}$ y la dimensión de la matriz Hessiana es M). Pero existe una submatriz H_{ab} tal que,

$$H_{ab} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \dot{q}^b}, \tag{3.12}$$

donde $Det(H_{ab}) \neq 0$, si el rango de esta matriz es $R = M - M'$, entonces R velocidades podrán ser determinadas de la siguiente manera,

$$\dot{q}^a = f^a(q_j, p_k), a = M'+1, M'+2, ..., M, \tag{3.13}$$

mientras que M' ($M' = M - R$) momentos dependerán de otras variables canónicas, por lo que algunos quedarán de la siguiente forma,

$$p_m = -H_m(q_j, p_m), m = 1, 2, ..., M'. \tag{3.14}$$

Este resultado coincide con las restricciones primarias encontradas en el algoritmo de Dirac $\phi_m = p_m + H_m(q_j, \dot{q}_i) \approx 0$. Con esta nueva información, el hamiltoniano canónico (3.10) se puede dividir en dos secciones la parte que puede ser encontrada a partir de la lagrangiana y la que no,

$$H_0 = [\dot{q}^a p_a + \dot{q}^m p_m - L(q_i, \dot{q}^i)]|_{\dot{q}^m = g} = f^a p_a - \dot{q}^m H_m - L(q_i, \dot{q}^j, \dot{q}^m = g). \tag{3.15}$$

Comprobamos si efectivamente el hamiltoniano canónico podría llegar a depender de las variables $\dot{q}^m$ empleando la derivada parcial,

$$\frac{\partial H_0}{\partial \dot{q}^m} = \frac{\partial f^a}{\partial \dot{q}^m} p_a + p_m - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\frac{\partial f^a}{\partial \dot{q}^m} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} = 0, \tag{3.16}$$

usando la definición de momento canónico y la ecuación (3.13) se obtiene (3.16), por lo que la hamiltoniana canónica no depende explícitamente de las velocidades $\dot{q}^m$.

Necesitamos establecer un conjunto de ecuaciones diferenciales, exactamente uno del tipo HJPDE. Para este propósito retomamos el resultado de la sección anterior (3.11), usando una función característica $F(t; q^i)$ $(i = 1, 2, ..., M)$ tal que los momentos $p_a = \frac{\partial F}{\partial q_a}$ $(a = M' + 1, M' + 2, ..., M)$ y redefiniendo $p_0 = \frac{\partial F}{\partial t}$, $q^0 = t$, reescribiendo la ecuación (3.11) y (3.14), establecemos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$H_0' \equiv p_0 + H_0(t, q^m, q^a, p_a = \frac{\partial F}{\partial q_a}) = 0, \tag{3.17}$$

$$H_m' \equiv p_m + H_m(t, q^m, q^a, p_a = \frac{\partial F}{\partial q_a}) = 0, \tag{3.18}$$

donde $m = 1, 2, .., M'$, pero si imponemos que m debe de empezar desde cero estas dos ecuaciones se pueden compactar,

$$H_{m'}' \equiv p_{m'} + H_{m'}(q^{m'}, q^a, p_a = \frac{\partial F}{\partial q_a}) = 0, \tag{3.19}$$

con $m' = 0, 1, 2, .., M'$, con esto ya formamos un sistema de HJPDE, ahora lo que sigue es encontrar la solución al conjunto de ecuaciones, o las curvas características asociadas a este sistema, suponiendo que la función F existe y soluciona al sistema HJDPE. Ahora queremos saber cómo son las variaciones de las variables canónicas del espacio fase. Empezamos por calcular la derivada parcial de H_0' con respecto de p_b,

$$\frac{\partial H_0'}{\partial p_b} \;=\; f^b + p_a \frac{\partial f^a}{\partial p_b} - \frac{\partial H_m}{\partial p_b}\dot{q}^m - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\frac{\partial f^a}{\partial p_b} = \dot{q}^b - \frac{\partial H_m}{\partial p_b}\dot{q}^m, \tag{3.20}$$

donde $b = M' + 1, M' + 2...M$, de la ecuación (3.18) se obtiene,

$$\frac{\partial H_m}{\partial p_b} = \frac{\partial H_m'}{\partial p_b}, \tag{3.21}$$

las ecuaciones de movimiento en el espacio fase son de la siguiente forma:

$$\dot{q}^\mu = \frac{\partial H_0}{\partial p_\mu}, \tag{3.22}$$

$$\dot{p}_\mu = -\frac{\partial H_0}{\partial q^\mu}, \tag{3.23}$$

sustituyendo (3.21)-(3.23) en la relación (3.20) y reescribiendo,

$$\dot{q}^b = \frac{\partial H_0'}{\partial p_b} + \frac{\partial H_m'}{\partial p_b}\dot{q}^m, \tag{3.24}$$

tomando en cuenta el concepto de derivada total con respecto a la variable t, se llega a lo siguiente,

$$dq^b = \frac{\partial H_0'}{\partial p_b}dt + \frac{\partial H_m'}{\partial p_b}dq^m. \tag{3.25}$$

Empleando de nueva cuenta que m' es un índice que empieza de cero obtenemos (notar que $q^0 = t$)

$$dq^b = \frac{\partial H_{m'}'}{\partial p_b}dq^{m'}. \tag{3.26}$$

Podemos ir más lejos y completarlo para las $q's$ que faltan, empleando identidades y las ecuaciones de movimiento anteriores,

$$\begin{aligned} dq^{m'} &= \delta_{l'}^{m'} dq^{l'} \\ &= \frac{\partial p_{l'}}{\partial p_{m'}}dq^{l'} \\ &= \frac{\partial H`_{l'}}{\partial p_{m'}}dq^{l'}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

combinando las expresiones para $dq^{m'}$ y dq^b, los expresamos de la siguiente manera

$$dq^\mu = \frac{\partial H_{m'}'}{\partial p_\mu}dq^{m'}, \tag{3.28}$$

con $\mu = 0, 1, ...M$, ahora ya tenemos una expresión para las $q's$, lo que sigue es determinar una para los momentos canónicos. Empezamos por calcular la derivada parcial de H_0' con respecto a q^μ,

$$\frac{\partial H_0'}{\partial q^\mu} = \frac{\partial H_0'}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial q^\mu} + \frac{\partial H_0'}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q^\mu}, \tag{3.29}$$

usando las ecuaciones de movimiento (3.22) y (3.23) se obtiene lo siguiente,

$$-\dot{p}_\mu = \frac{\partial p_l}{\partial q^\mu}\dot{q}^l + \frac{\partial p_b}{\partial q^\mu}\dot{q}^b, \tag{3.30}$$

aplicamos el concepto de derivada total a esta ecuación con respecto de la variable t, usando (3.28) y la regla de la cadena, llegamos a lo siguiente

$$\begin{aligned} -dp_\mu &= \frac{\partial p_l}{\partial q^\mu}dq^l + \frac{\partial p_b}{\partial q^\mu}dq^b \\ &= \frac{\partial p_l}{\partial q^\mu}\frac{\partial H_{m'}'}{\partial p_l}dq^{m'} + \frac{\partial p_b}{\partial q^\mu}\frac{\partial H_{m'}'}{\partial p_b}dq^{m'} \\ &= \frac{\partial H_{m'}'}{\partial q^\mu}dq^{m'}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

esta ecuación se reescribe como a continuación

$$dp_\mu = -\frac{\partial H_{m'}'}{\partial q^\mu}dq^{m'}. \tag{3.32}$$

Solo nos queda calcular la diferencial de la función $F(q^\mu)$, donde ésta es una solución al sistema de ecuaciones (3.19), quedando,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q^a}dq^a + \frac{\partial F}{\partial q^{m'}}dq^{m'}, \tag{3.33}$$

utilizando la condición $p_a = \frac{\partial F}{\partial q^a}$, (3.28), si además convenimos que $p_{m'} = \frac{\partial F}{\partial q^{m'}}$ y usamos (3.19), entonces (3.33) queda finalmente como,

$$dF = (p_a \frac{\partial H'_{m'}}{\partial p_a} - H_{m'})dq^{m'}, \tag{3.34}$$

las ecuaciones (3.28), (3.32) y (3.34) forman un conjunto de HJPDE para las curvas dadas por (3.19), si el sistema es integrable sus soluciones van a determinar a la función $F(q^m, q^a)$ dando las condiciones iniciales correspondientes.

3.3. Condiciones de integrabilidad

Como mencionamos al final de la sección anterior, después de obtener las HJPDE es necesario que sean integrables, por lo que daremos aquellas condiciones para que lo sean, para esto partimos de un conjunto de ecuaciones dados de la siguiente manera

$$dq^\rho = G^\rho_m(x^l.x^\nu)dx^m, \tag{3.35}$$

donde ρ, ν =0,1,...,M y l, m = 0,1,... $M' < M$, es posible relacionar las ecuaciones (3.35) con un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales [22], los X_m son campos vectoriales (operadores lineales) y f_0 es alguna función,

$$X_m f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial x^\rho} G^\rho_m = 0, \tag{3.36}$$

si existe una solución a f_0 de la forma (3.36) que sea al menos dos veces diferenciable, se va satisfacer la siguiente ecuación

$$[X_m, X_l]f_0 = 0, \tag{3.37}$$

la operación entre los corchetes está dada como $[X_m, X_l] \equiv (X_m X_l - X_l X_m)$ (el conmutador), pero si se cumple (3.37) entonces existirán funciones C^k_{ml} (constantes de estructura) tal que,

$$[X_m, X_l]f_0 = C^k_{ml} X_k f_0. \tag{3.38}$$

En este punto es importante notar que los operadores que no cumplan (3.38), es decir que si su conmutador no puede ser expresado de la forma (3.38), entonces serán igual a un operador diferente, que será agregado al conjunto inicial de operadores, este proceso se repetirá al nuevo conjunto de operadores hasta que todos los operadores que se obtengan cumplan (3.38). Cuando un conjunto de operadores X_ρ satisfacen (3.38) se dice que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales asociados a (3.35) es completo. Un sistema de ecuaciones diferenciales es integrable si y solo si es completo [2]. Se debe notar que si el sistema de ecuaciones (3.28) y (3.32) son integrables entonces la ecuación (3.34) lo será de inmediato usando cuadraturas. Por esto, nos centraremos solo en las dos primeras, aplicándolo a una función arbitraria del espacio fase $f(q^\mu, p_\mu)$,

$$\begin{aligned} X_m f &= \frac{\partial f}{\partial x^\mu} G^\mu_m \\ &= \frac{\partial f}{\partial q^\mu}\frac{\partial H'_m}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial H'_m}{\partial q^\mu} \\ &= \{f, H'_m\}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

donde μ =0,1,... M y m, l =0,1,... M' , a=$M'+1$,$M'+2$,...,M, se ha considerado que $q^0 = t$, por lo que el espacio fase ahora es de dimensión $2M + 2$. Aplicando la condición de integrabilidad a una función del espacio fase, se obtiene,

$$\begin{aligned} [X_m, X_l]f &= (X_m X_l - X_l X_m)f \\ &= X_m\{f, H'_l\} - X_l\{f, H'_m\} \\ &= \{\{f, H'_l\}, H'_m\} - \{\{f, H'_m\}, H'_l\} \\ &= \{f, \{H'_l, H'_m\}\} = 0, \end{aligned} \tag{3.40}$$

en el último paso se usó la identidad de Jacobi, la condición de integrabilidad de HJDPE se debe de cumplir para cualquier función del espacio fase, entonces esta condición es equivalente a

$$\{H'_l, H'_m\} = 0, \tag{3.41}$$

la condición de integrabilidad obtenida es equivalente a las condiciones de regularidad utilizadas en el algoritmo de Dirac [2]. Expresamos la diferencial total de una función del espacio fase f, y sustituimos (3.28) y (3.32) como sigue,

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial q^\mu} dq^\mu + \frac{\partial f}{\partial p_\mu} dp_\mu \\ &= \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \frac{\partial H'_m}{\partial p_\mu} dq^m - \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \frac{\partial H'_m}{\partial q^\mu} dq^m \\ &= \{f, H'_m\} dq^m, \end{aligned} \tag{3.42}$$

a (3.42) se le conoce como la diferencial fundamental, este resultado será de importancia para el formalismo, tomando como caso particular a $f = H'_l$, obtenemos que,

$$dH'_l = 0, \tag{3.43}$$

si estas ecuaciones no llegasen a cumplirse completamente, ocurrirán algunos de los siguientes casos:

1.-Se encontrarían nuevos hamiltonianos $H' = 0$ tal que satisfagan $dH' = 0$, es decir si a algún hamiltoniano se le aplica (3.43) y su resultado no es idénticamente cero, este resultado será identificado como un nuevo hamiltoniano al que se le impone que sea cero y además debe cumplir (3.38). De esta manera se procede con todos los hamiltonianos que aparezcan hasta formar un álgebra cerrada entre todos los hamiltonianos.

2.-Serán encontradas relaciones entre las dq^m, que son de importancia para el análisis, como veremos a continuación.

3.4. Hamiltonianos involutivos y no-involutivos

En la sección anterior dimos el criterio para que el sistema sea integrable, y se encontró que es indispensable que el conjunto de hamiltonianos sea completo, es decir que su paréntesis de Poisson sea cero con los demás, o que sea igual a otro hamiltoniano (formando un álgebra cerrada), pero, ¿qué pasa cuándo no lo es?. Para responder a esto, tenemos que hacer la distinción entre los hamiltonianos involutivos (es así como se le llama al conjunto de hamiltonianos que forman un álgebra cerrada) y a los que no lo sean (hamiltonianos no-involutivos) les impondremos la condición (3.43) para asegurar la integrabilidad del sistema (como hemos considerado en la sección anterior), obteniendo algunas relaciones entre las variables dq^m.

3.4.1. Paréntesis Generalizado

Lo que seguiría es estudiar los hamiltonianos no-involutivos, ya que la diferencial fundamental depende de todos los hamiltonianos y hasta ahora se han tratado sin distinción alguna. Los hamiltonianos no-involutivos son los que darán relaciones entre algunas variables.
Una vez teniendo todos los hamiltonianos no-involutivos calculados H'_J, $J < M$ (M es la dimensión del espacio fase y $J \neq m$ el índice usado en las secciones anteriores), imponemos la siguiente condición

$$dH'_J = 0, \tag{3.44}$$

desarrollando,

$$dH'_J = \{H'_J, H'_0\} dt + \{H`_J, H'_K\} dq^K = 0, \tag{3.45}$$

definimos $C_{JK} = \{H'_J, H'_K\}$ y suponemos que esta matriz es invertible, por lo que

$$dq^K = -C^{-1}_{JK}\{H'_J, H'_0\}dt, \tag{3.46}$$

este nuevo resultado relaciona algunas variables del espacio fase, usándolo reescribimos la diferencial fundamental (3.42)

$$df = [\{f, H'_0\} - \{f, H'_J\}C^{-1}_{JK}\{H`_K, H'_0\}]dt + ..., \tag{3.47}$$

nos fijamos en la estructura del primer término, y de esta manera introducimos el paréntesis generalizado de HJ para dos funciones del espacio fase F y G,

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, H'_J\}C^{-1}_{JK}\{H'_K, G\}. \tag{3.48}$$

Algunas de las propiedades del paréntesis generalizado; sean F, G y R funciones del espacio fase, H'_J algún hamiltoniano no-involutivo, H'_l algún hamiltoniano involutivo,

$$\{F, G\}^* = -\{G, F\}^*, \tag{3.49}$$

$$\{F, GR\}^* = \{F, G\}^*R + G\{F, R\}^*, \tag{3.50}$$

$$\{\{F, G\}^*, R\}^* + \{\{G, R\}^*, F\}^* + \{\{R, F\}^*, G\}^* = 0, \tag{3.51}$$

$$\{H'_J, F\}^* = 0, \forall F, \tag{3.52}$$

$$\{F, H'_l\}^* = \{F, H'_l\}. \tag{3.53}$$

Todas estas propiedades se pueden demostrar a partir de la definición (3.48). El paréntesis generalizado de HJ coincide con el paréntesis de Dirac, sin embargo, el cálculo del paréntesis generalizado es más rápido comparado con el de Dirac. Con todo lo anterior reescribimos a (3.42),

$$df = \{f, H'_m\}^* dq^m. \tag{3.54}$$

Hay que notar que en la ecuación (3.54) ya no aparecen explícitamente los hamiltonianos no-involutivos, ya su contribución está solamente dentro del paréntesis generalizado.

Como nota podemos agregar que los hamiltonianos no-involutivos vienen en pares, para elegirlos de manera adecuada nos fijamos en sus paréntesis de Poisson, puesto que no serán cero.

3.5. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento son obtenidas directamente de la diferencial fundamental (3.54), al ser una diferencial total, aplicándola a las variables canónicas del espacio fase y tomando a la variable t ($t = q^0$) como un parámetro de evolución, entonces la parte asociada a esta dará la dinámica de las variables. Más concretamente y de manera general, para una función del espacio fase

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H'_0\}^*, \tag{3.55}$$

cuando f es una variable canónica obtenemos la evolución dinámica del sistema. Este resultado coincide con la mecánica elemental cuando el sistema no es singular, por lo que el método es consistente. Las variables son elegidas como dinámicas si no son una combinación lineal de los hamiltonianos involutivos, recordar que estos últimos son directamente cero.

3.6. Transformaciones de norma

Ya hemos visto que en (3.54) la parte asociada a H_0' está relacionado con las ecuaciones de movimiento, entonces, lo que está asociado a los hamiltonianos involutivos puede entenderse como una transformación canónica. Si consideramos $dt = 0$ la transformación de alguna función del espacio fase quedaría como a continuación,

$$\delta f \equiv \{f, H_l'\}^* \delta q^l, \tag{3.56}$$

donde los hamiltonianos involutivos son tomados como los generadores, más aún, podemos definir a un generador de transformaciones como $G_1 = H_l' \delta q^l$.

Si consideramos que las ecuaciones de HJ son válidas $H_l' = 0$, entonces el espacio fase es reducido. Tomando en cuenta que las transformaciones son tomadas a un mismo t, podemos imponer que estas no puedan abandonar el espacio reducido. A este tipo de transformaciones se les conoce como transformaciones de norma donde su generador es G_1 [23].

3.7. Grados de libertad

El conteo de los grados de libertad se hará de acuerdo con la definición dada en la sección 2.11, teniendo en cuenta que existe la posibilidad que hayan transformaciones de norma en los sistemas singulares, donde los generadores de norma son los hamiltonianos involutivos, entonces el conteo de grados de libertad estará dado como:

$$GL = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \text{número total de} \\ \text{variables dinámicas)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{número total de} \\ \text{Hamiltonianos involutivos)} \end{pmatrix}\right]. \tag{3.57}$$

Las variables dinámicas son consideradas aquellas que tienen ecuaciones de movimiento diferente de cero y los hamiltonianos involutivos considerados son todos aquellos que son independientes entre sí, hay que tener cuidado al momento del conteo ya que se podría presentar reductibilidad entre algunas variables.

Podemos observar que el formalismo de HJ es mucho más corto comparado con el algoritmo de Dirac, sin embargo, en los dos se obtienen resultados equivalentes.

Capítulo 4

Análisis de Dirac y de Hamilton-Jacobi para gravedad tridimensional

Al estudiar gravedad surgen diferentes principios de acción para hacer el análisis de las simetrías del campo gravitacional. Entre los principios de acción más importantes podemos citar el modelo de Palatini [9], Ashtekar [10] y Holst [12]. Muchos modelos de gravedad se trabajan en tres dimensiones con la esperanza de obtener generalizaciones posteriores a cuatro dimensiones. En este capítulo se hará el análisis de una acción de gravedad tridimensional equivalente a la de Holst, dicha acción será escrita en términos de variables tipo Ashtekar. Se le aplicará el algoritmo de Dirac y HJ para identificar las simetrías, las ecuaciones de movimiento y los grados de libertad de la teoría.
Partimos de la siguiente Acción [16]

$$S = \int_M d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} x^I e^J_\mu F_{\nu\rho}{}^{KL} + \gamma^{-1} x_I e_{\mu J} F_{\nu\rho}{}^{IJ} \right), \tag{4.1}$$

donde $x^I \in R^4$, $F_{\nu\rho}{}^{IJ} = \partial_\mu A_\nu{}^{IJ} - \partial_\nu A_\mu{}^{IJ} + A_\mu{}^I{}_L A_\nu^{LJ} - A_\nu{}^I{}_L A_\mu^{LJ}$ es el tensor de curvatura de SO(4), e^J_μ es la triada, γ es un parámetro de acoplamiento equivalente al parámetro de Barbero-Immirzi y M es una variedad[1] de dimensión tres. Esta acción describe un modelo tridimensional de gravedad Euclidiana [17], y su estructura está estrechamente relacionada con la acción de Holst. Al variar la acción respecto a las variables dinámicas, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\rho} \left(\frac{1}{2} \epsilon^{IJ}{}_{KL} F_{\nu\rho}{}^{KL} + \gamma^{-1} F_{\nu\rho}{}^{IJ} \right) x_I &= 0, \\
\epsilon^{\mu\nu\rho} \left(\frac{1}{2} \epsilon^{IJ}{}_{KL} F_{\nu\rho}{}^{KL} + \gamma^{-1} F_{\nu\rho}{}^{IJ} \right) e_{\mu J} &= 0, \\
\epsilon^{\mu\nu\rho} \mathcal{D}_\rho \left(x_I e_{\nu J} \right) &= 0,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

con $\mathcal{D}_\rho (x_I e_{\nu J}) = \partial_\rho (x_I e_{\nu J}) + A_{\rho JL} e^L_\nu x_I$. Si se fija el valor de x_I usando la norma temporal $x^I = (1, 0, 0, 0)$ (tal como se hace en Holst en cuatro dimensiones), uno observa que las ecuaciones de movimiento (4.2) corresponden a las ecuaciones de movimiento de Palatini. Desde luego que se puede fijar la norma de otras maneras, sin embargo, al querer tener resultados similares a la acción de Holst en cuatro dimensiones, solo nos centraremos en la norma temporal. Ahora se realiza la

[1] Para una explicación más detallada de una variedad ver A.1

descomposición 2+1 y obtenemos

$$S = \int d^3x\epsilon^{ab}\left[\frac{1}{2}e_{0i}\left(\epsilon^i_{jk}F_{ab}{}^{jk} + \frac{2}{\gamma}F_{ab}{}^{0i}\right) - e_{ai}\left(\epsilon^i{}_{jk}F_{0b}{}^{jk} + \frac{2}{\gamma}F_{0b}{}^{0i}\right)\right], \tag{4.3}$$

los términos de la curvatura están dados por

$$\begin{aligned}
F_{ab}{}^{jk} &= \partial_a A_b{}^{jk} - \partial_b A_a{}^{jk} + A_a{}^j{}_0 A_b{}^{0k} - A_b{}^j{}_0 A_a^{0k} + A_a{}^j{}_l A_b^{lk} - A_b{}^j{}_l A_a^{lk},\\
F_{ab}{}^{0i} &= \partial_a A_b{}^{0i} - \partial_b A_a{}^{0i} + A_a{}^0{}_0 A_b{}^{0i} - A_b{}^0{}_0 A_a^{0i} + A_a{}^0{}_l A_b^{li} - A_b{}^0{}_l A_a^{li},\\
F_{0b}{}^{jk} &= \partial_0 A_b{}^{jk} - \partial_b A_0{}^{jk} + A_0{}^j{}_0 A_b{}^{0k} - A_b{}^j{}_0 A_0^{0k} + A_0{}^j{}_l A_b^{lk} - A_b{}^j{}_l A_0^{lk},\\
F_{0b}{}^{0i} &= \partial_0 A_b{}^{0i} - \partial_b A_0{}^{0i} + A_0{}^0{}_0 A_b{}^{0i} - A_b{}^0{}_0 A_0^{0i} + A_0{}^0{}_l A_b^{li} - A_b{}^0{}_l A_0^{li}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

La acción (4.3) es la que a continuación vamos a analizar, primero usando el formalismo de Dirac, posteriormente usaremos el de HJ.

4.1. Análisis de Dirac

Aplicaremos el formalismo de Dirac a la acción (4.3), de una manera alternativa a lo que se presenta en [16], con la diferencia que aquí hemos extendido el procedimiento. Introduciendo las siguientes variables en la acción (4.3)

$$\begin{aligned}
E_i^a &= 2\epsilon^{ab}e_{bi},\\
w_\mu^i &= \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}A_\mu{}^{jk} + \gamma^{-1}A_\mu{}^{0i},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

con $\mu = 0, a$, y $i = 1, 2, 3$ uno obtiene

$$\begin{aligned}
S &= \int d^3x\left[E_i^a\partial_0 w_a^i + w_0^i\left(\partial_a E_i^a - \epsilon_{ijk}w_a^j E^{ak}\right) + A_0{}^{0i}\left((\gamma^{-2}-1)\epsilon_{ij}{}^k A_a{}^{0j}E_k^a\right)\right]\\
&+ \int d^3x\epsilon^{ab}e_{0i}\left[\left(\partial_a w_b{}^i - \partial_b w_a{}^i - \epsilon^i{}_{jk}w_a{}^j w_b{}^k\right) + (\gamma^{-2}-1)\epsilon^i{}_{jk}A_a{}^{0j}A_b{}^{0k}\right],
\end{aligned} \tag{4.6}$$

si se elige a $\gamma = \pm 1$ entonces no habrá ninguna contribución de la variable $A_a{}^{0j}$, en lo que sigue trabajaremos con un parámetro arbitrario, para el siguiente conjunto de variables $(e_0^j, E_i^a, w_0^i, w_a^i, A_0{}^{0i}, A_a{}^{0i})$ les asociamos sus correspondientes momentos canónicos,

$$\begin{aligned}
p_i &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{e}_0^i} = 0,\\
P_a^i &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{E}_i^a} = 0,\\
\pi_i &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{w}_0{}^i} = 0,\\
\pi_i^a &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{w}_a{}^i} = E_i^a,\\
\Pi_i &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_0{}^{0i}} = 0,\\
\Pi_i^a &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_a{}^{0i}} = 0,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

de esta manera, las componentes de la matriz Hessiana en términos de las variables dinámicas tiene la forma

$$H_{\nu\mu} = \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\nu\partial\dot{q}^\mu} = 0, \tag{4.8}$$

donde $\dot{q}^{\mu} = (\dot{e}_0^i, \dot{E}_a^i, \dot{w}_0{}^i, \dot{w}_a{}^i, \dot{A}_0{}^{0i}, \dot{A}_a{}^{0i})$. Tomando en cuenta el resultado (4.7) es fácil notar que todos los elementos de la matriz Hessiana son cero, por lo que el determinante de ésta es cero, entonces el sistema es singular, esto también permite identificar a partir de los momentos canónicos las restricciones primarias, pero antes construiremos el hamiltoniano canónico. Al ya tener los momentos generalizados (4.7) calculamos el hamiltoniano canónico y encontramos que éste está dado por

$$H_0 = -\left[w_0^i G_i + A_0{}^{0i} S_i + \epsilon^{ab} e_{0i} \left[\mathcal{T}_{ab}{}^i + (\gamma^{-2} - 1)\epsilon^i{}_{jk} A_a{}^{0j} A_b{}^{0k}\right]\right], \tag{4.9}$$

donde hemos definido:

$$\begin{aligned} G_i &= \partial_a \pi_i^a - \epsilon_{ijk} w_a^j \pi^{ak}, \\ \mathcal{T}_{ab}{}^i &= \partial_a w_b{}^i - \partial_b w_a{}^i - \epsilon^i{}_{jk} w_a{}^j w_b{}^k, \\ S_i &= (\gamma^{-2} - 1)\epsilon_{ij}{}^k A_a{}^{0j} \pi_k^a. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Además, encontramos los paréntesis de Poisson fundamentales[2] de las variables canónicas.

$$\begin{aligned} \{e_0^i(x), p_j(y)\} &= \delta_j^i \delta^2(x-y), \\ \{E_i^a(x), P_b^j(y)\} &= \delta_b^a \delta_i^j \delta^2(x-y), \\ \{w_0{}^i(x), \pi_j(y)\} &= \delta_j^i \delta^2(x-y), \\ \{w_a^i(x), \pi_j^b(y)\} &= \delta_a^b \delta_j^i \delta^2(x-y), \\ \{A_0{}^{0i}(x), \Pi_j(y)\} &= \delta_j^i \delta^2(x-y), \\ \{A_a{}^{0i}(x), \Pi_j^b(y)\} &= \delta_a^b \delta_j^i \delta^2(x-y). \end{aligned} \tag{4.11}$$

A partir la definición de los momentos (4.7) se identifican las siguientes 27 restricciones primarias,

$$\begin{aligned} \phi_i &= p_i \approx 0, \\ \phi_i^a &= P_i^a \approx 0, \\ \underline{\phi}_i &= \pi_i \approx 0, \\ \underline{\phi}_i^a &= \pi_i^a - E_i^a \approx 0, \\ \phi_i' &= \Pi_i \approx 0, \\ \phi'^a_i &= \Pi_i^a \approx 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Ahora, aplicamos las condiciones de regularidad para estar seguros de haber encontrado adecuadamente las restricciones primarias,

$$\frac{\partial(\phi_i, \phi_i^a, \underline{\phi}_i, \underline{\phi}_i^a, \phi_i', \phi'^a_i)}{\partial(e_0^j, E_j^b, w_0^j, w_b^j, A_0{}^{0j}, A_b{}^{0j}, p_j^0, P_j^b, \pi_j, \pi_j^b, \Pi_j, \Pi_j^b)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \delta_i^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta_i^j \delta_b^a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \delta_i^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \delta_i^j & 0 & 0 \\ 0 & \delta_i^j \delta_b^a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_i^j \delta_b^a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_i^j \delta_b^a \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$

obteniendo una matriz con el rango constante (los puntos engloban 4 ceros), por lo que las restricciones han sido elegidas correctamente [1].

Con la identificación correcta de las restricciones primarias, construimos la hamiltoniana primaria (que incluye toda la información que se tiene hasta este punto), que está expresada por

$$H_1 = \int d^2 y \left[H_0 + u^i \phi_i + u_a^i \phi_i^a + \underline{u}^i \underline{\phi}_i + \underline{u}_a^i \underline{\phi}_i^a + u'^i \phi_i' + u'^i{}_a \phi'^a_i\right]. \tag{4.14}$$

[2]El corchete de Poisson entre funcionales F_1, F_2 se define por

$$\{F_1(x), F_2(y)\} = \int d^2 z \left[\frac{\delta F_1(x)}{\delta A_\mu(z)} \frac{\delta F_2(y)}{\delta \pi^\mu(z)} - \frac{\delta F_2(x)}{\delta A_\mu(z)} \frac{\delta F_1(y)}{\delta \pi^\mu(z)}\right].$$

Para que las ecuaciones de movimiento estén bien definidas en la subvariedad dada por las restricciones, es necesario que estas últimas cumplan la condición de consistencia. Para este punto definiremos una matriz $W_1^{mn} = \{\phi^m, \phi^n\}$, formada por los paréntesis de Poisson entre todas las restricciones primarias, donde sus componentes son de la forma:

$$W_1^{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^{ab}\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta^{ab}\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^2(x-y), \tag{4.15}$$

esta es una matriz de 27×27, se puede ver que su nulidad es 15 y su rango 12, por lo que se esperarían 15 restricciones secundarias, sus vectores nulos tienen una estructura similar a $(1,0,0,0,0,0), (0,0,1,0,0,0), (0,0,0,0,1,0), (0,0,0,0,0,1)$, entonces de las restricciones $(\phi_i, \underline{\phi}_i, \phi'_i, \phi'^a_i)$ se esperan un conjunto de restricciones secundarias, mientras que de las otras solo multiplicadores. Empleando la hamiltoniana primaria aplicamos las condiciones de consistencia a cada una de las restricciones primarias

$$\dot{\phi}^m = \{\phi^m, H_1\} \approx 0, \tag{4.16}$$

con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_l &= \{\phi_l, H_1\} = \int d^2y \{\phi_l, H_0 + u^i\phi_i + u^i_a\phi^a_i + \underline{u}^i\underline{\phi}_i + \underline{u}^i_a\underline{\phi}^a_i + u'^i\phi'_i + u'^i_a\phi'^a_i\} \\ &= \int d^2y \{p_l, -\left[w^i_0 G_i + A_0{}^{0i}S_i + \epsilon^{ab}e_{0i}\left[\mathcal{T}_{ab}{}^i + (\gamma^{-2}-1)\epsilon^i{}_{jk}A_a{}^{0j}A_b{}^{0k}\right]\right]\} \\ &= \epsilon^{ab}\left[\mathcal{T}_{abl} + (\gamma^{-2}-1)\epsilon_{ljk}A_a{}^{0j}A_b{}^{0k}\right] \approx 0, \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^c_l &= \{\phi^c_l, H_1\} = \int d^2y \{\phi^c_l, H_0 + u^i\phi_i + u^i_a\phi^a_i + \underline{u}^i\underline{\phi}_i + \underline{u}^i_a\underline{\phi}^a_i + u'^i\phi'_i + u'^i_a\phi'^a_i\} \\ &= \int d^2y \{P^c_l, -\left[w^i_0 G_i + A_0{}^{0i}S_i + \epsilon^{ab}e_{0i}\left[\mathcal{T}_{ab}{}^i + (\gamma^{-2}-1)\epsilon^i{}_{jk}A_a{}^{0j}A_b{}^{0k}\right]\right] + \underline{u}^i_a\underline{\phi}^a_i\} \\ &= \underline{u}^c_l \approx 0, \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\phi}}_l &= \{\phi'_l, H_1\} = \int d^2y \{\phi'_l, H_0 + u^i\phi_i + u^i_a\phi^a_i + \underline{u}^i\underline{\phi}_i + \underline{u}^i_a\underline{\phi}^a_i + u'^i\phi'_i + u'^i_a\phi'^a_i\} \\ &= \int d^2y \{\pi_l, -\left[w^i_0 G_i + A_0{}^{0i}S_i + \epsilon^{ab}e_{0i}\left[\mathcal{T}_{ab}{}^i + (\gamma^{-2}-1)\epsilon^i{}_{jk}A_a{}^{0j}A_b{}^{0k}\right]\right]\} \\ &= G_l = \tilde{D}_a\pi^a_l \approx 0, \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\phi}}^c_l &= \{\underline{\phi}^c_l, H_1\} = \int d^2y \{\underline{\phi}^c_l, H_0 + u^i\phi_i + u^i_a\phi^a_i + \underline{u}^i\underline{\phi}_i + \underline{u}^i_a\underline{\phi}^a_i + u'^i\phi'_i + u'^i_a\phi'^a_i\} \\ &= \int d^2y \{\pi^c_l - E^c_l, -\left[w^i_0 G_i + A_0{}^{0i}S_i + \epsilon^{ab}e_{0i}\left[\mathcal{T}_{ab}{}^i + (\gamma^{-2}-1)\epsilon^i{}_{jk}A_a{}^{0j}A_b{}^{0k}\right]\right] + u^i_a\phi^a_i\} \\ &= -\epsilon_{ljk}w^j_0\pi^{ck} - 2\epsilon^{ac}\tilde{D}_a e_{0l} - u^c_l \approx 0, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi'}_l &= \{\underline{\phi'}_l, H_1\} = \int d^2y \{\underline{\phi'}_l, H_0 + u^i\phi_i + u^i_a\phi^a_i + \underline{u}^i\underline{\phi}_i + \underline{u}^i_a\underline{\phi}^a_i + u'^i\phi'_i + u'^i_a\phi'^a_i\} \\ &= \int d^2y \{\Pi_l, -\left[w^i_0 G_i + A_0{}^{0i}S_i + \epsilon^{ab}e_{0i}\left[\mathcal{T}_{ab}{}^i + (\gamma^{-2}-1)\epsilon^i{}_{jk}A_a{}^{0j}A_b{}^{0k}\right]\right]\} \\ &= S_l = (\gamma^{-2}-1)\epsilon_{lj}{}^k A_a{}^{0j}\pi^a_k \approx 0, \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi'}^c_l &= \{\phi'^c_l, H_1\} = \int d^2y\{\phi'^c_l, H_0 + u^i\phi_i + u^i_a\phi^a_i + \underline{u}^i\underline{\phi}_i + \underline{u}^i_a\underline{\phi}^a_i + u'^i\phi'_i + u'^i_a\phi'^a_i\} \\
&= \int d^2y\{\Pi^c_l, -\left[w^i_0 G_i + A_0{}^{0i}S_i + \epsilon^{ab}e_{0i}\left[\mathcal{T}_{ab}{}^i + (\gamma^{-2}-1)\epsilon^i{}_{jk}A_a{}^{0j}A_b{}^{0k}\right]\right]\} \\
&= (\gamma^{-2}-1)\epsilon_{lj}{}^k\left[A_0{}^{0j}\pi^c_k + 2e_{0k}\epsilon^{cb}A_b{}^{0j}\right] \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

donde $\tilde{D}_a\pi^a_i \equiv \partial_a\pi^a_i - \epsilon^k{}_{ij}\pi^a_k w^j_a$. Apoyándonos de la información que proporciona W_1, contraemos sus vectores nulos con $(\dot{\phi}_i, \dot{\phi}^a_i, \dot{\underline{\phi}}_i, \dot{\underline{\phi}}^a_i, \dot{\phi'}_i, \dot{\phi'}^a_i)$ para obtener las restricciones secundarias adecuadas, entonces de $(\phi_i, \underline{\phi}_i, \phi'_i, \phi'^a_i)$ encontramos 15 restricciones secundarias,

$$
\begin{aligned}
\psi_{0i} &\equiv \epsilon^{ab}\left[\mathcal{T}_{abi} + (\gamma^{-2}-1)\epsilon_{ijk}A_a{}^{0j}A_b{}^{0k}\right] \approx 0, \\
\underline{\psi}_i &\equiv G_i = \tilde{D}_a\pi^a_i \approx 0, \\
\psi'_{0i} &\equiv S_i = (\gamma^{-2}-1)\epsilon_{ij}{}^k A_a{}^{0j}\pi^a_k \approx 0, \\
\psi'^a_i &\equiv (\gamma^{-2}-1)\epsilon_{ij}{}^k\left[A_0{}^{0j}\pi^a_k + 2e_{0k}\epsilon^{ab}A_b{}^{0j}\right] \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

mientras que de $(\phi^a_i, \underline{\phi}^a_i)$ se obtienen 12 multiplicadores,

$$
\begin{aligned}
\underline{u}^a_i &\approx 0, \\
u^a_i &\approx -2\epsilon^{ba}\tilde{D}_b e_{0i} - \epsilon_{ijk}w^j_0\pi^{ak}.
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

Con la identificación de las restricciones secundarias (4.23) y los multiplicadores (4.24) sustituidos en (4.14), volvemos a aplicar de nuevo las condiciones de consistencia, con lo cual las restricciones secundarias quedan de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\Psi_{0i} &\equiv \epsilon^{ab}\left[\mathcal{T}_{abi} + 2\tilde{D}_a P_{bi} + (\gamma^{-2}-1)\epsilon_{ijk}A_a{}^{0j}A_b{}^{0k}\right] \approx 0, \\
\underline{\Psi_i} &\equiv \tilde{D}_a\pi^a_i + \epsilon_{ij}{}^k P^j_a\pi^a_k \approx 0, \\
\Psi'_{0i} &\equiv (\gamma^{-2}-1)\epsilon_{ij}{}^k A_a{}^{0j}\pi^a_k \approx 0, \\
\Psi'^a_i &\equiv (\gamma^{-2}-1)\epsilon_{ij}{}^k\left[A_0{}^{0j}\pi^a_k + 2e_{0k}\epsilon^{ab}A_b{}^{0j}\right] \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

Multiplicamos la última restricción de (4.25) por π^{ci} y luego simetrizamos, para obtener las siguientes tres restricciones

$$
\Psi^{ac} \equiv (\gamma^{-2}-1)\epsilon_{ij}{}^k e_{0k}A_b{}^{0j}\left[\epsilon^{ab}\pi^{ci} + \epsilon^{cb}\pi^{ai}\right] \approx 0, \tag{4.26}
$$

este resultado sustituye la última restricción de (4.25), usándola junto con (4.12) y las otras restantes de (4.25) para calcular los paréntesis de Dirac, y de donde podemos encontrar que $A_a{}^{0i} = 0$, por lo que si sustituimos este resultado en la hamiltoniana (4.9) se eliminaría toda contribución del parámetro gamma, la hamiltoniana puede ser interpretada como una del tipo BF [17],

$$
H_0 = -\left[w^i_0 G_i + \epsilon^{ab}e_{0i}\mathcal{T}_{ab}{}^i\right], \tag{4.27}
$$

eliminando las últimas dos restricciones de (4.12) y usando (4.27) se vuelve a realizar la evolución de las restricciones, entonces se encuentran las siguientes restricciones secundarias,

$$
\begin{aligned}
\Psi_i &\equiv \epsilon^{ab}\left[\mathcal{T}_{abi} + 2\tilde{D}_a P_{bi}\right] \approx 0, \\
\underline{\Psi_i} &\equiv \tilde{D}_a\pi^a_i + \epsilon_{ij}{}^k P^j_a\pi^a_k \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

Como siguen apareciendo restricciones de segunda clase (4.28), construimos la hamiltoniana secundaria que incluye todas las restricciones identificadas hasta este punto,

$$
H_2 = \int d^2y\left[H_0 + u^i\phi_i + u^i_a\phi^a_i + \underline{u}^i\underline{\phi}_i + \underline{u}^i_a\underline{\phi}^a_i + \sigma^i\Psi_i + \underline{\sigma}^i\underline{\Psi}_i\right]. \tag{4.29}
$$

Al igual que se hizo con la hamiltoniana primaria, queremos saber qué saldrá de la condición de consistencia empleando H_2, para ello construimos una matriz $W_2^{mn} = \{\Phi^m, \Phi^n\}$ formada por el corchete de Poisson entre todas las restricciones que se tienen hasta este punto, obtenemos,

$$W_2^{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^{ab}\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta^{ab}\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_{ij}{}^k\Psi_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{ij}{}^k\Psi_k & \epsilon_{ij}{}^k\underline{\Psi}_k \end{bmatrix} \delta^2(x-y), \tag{4.30}$$

(las entradas en las que están presentes restricciones se toman débilmente igual a cero) W_2 es una matriz 24×24 que tiene rango 12 y nulidad 12, los vectores nulos de esta matriz solo dan relaciones entre multiplicadores y las restricciones ya encontradas, por lo que al volver aplicar las condiciones de consistencia se esperan solo multiplicadores y/o relaciones entre ellos, y así el proceso de encontrar nuevas restricciones termina hasta este punto ya que no aparecerá ninguna más.

La separación correcta de restricciones se da entre aquellas de primera y segunda clase, en W_2 ya hemos calculado el corchete de Poisson entre todas las restricciones, por lo que con ayuda de sus vectores nulos identificaremos las restricciones de primera clase, sus vectores nulos son:

$$\begin{aligned} \theta_{1n} &= (\delta_{ij}\delta^2(x-y), 0, 0, 0, 0, 0), \\ \theta_{2n} &= (0, 0, \delta_{ij}\delta^2(x-y), 0, 0, 0), \\ \theta_{3n} &= (0, 0, 0, 0, \delta_{ij}\delta^2(x-y), 0), \\ \theta_{4n} &= (0, 0, 0, 0, 0, \delta_{ij}\delta^2(x-y)), \end{aligned} \tag{4.31}$$

contraemos los vectores nulos θ_{rn} con todas las restricciones Φ^n para encontrar las restricciones de primera clase,

$$\gamma_r = \int d^2y \theta_{rn} \Phi^n, \tag{4.32}$$

de esta manera se obtienen 12 restricciones de primera clase

$$\begin{aligned} \gamma_{1i} &= p_i \approx 0, \\ \gamma_{2i} &= \pi_i \approx 0, \\ \gamma_{3i} &= \epsilon^{ab}\left[\mathcal{T}_{abi} + 2\tilde{D}_a P_{bi}\right] \approx 0, \\ \gamma_{4i} &= \tilde{D}_a \pi_i^a + \epsilon_{ij}{}^k P_a^j \pi_k^a \approx 0. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Además, encontramos 12 restricciones de segunda clase

$$\begin{aligned} \chi_{1i}^a &= P_i^a \approx 0, \\ \chi_{2i}^a &= \pi_i^a - E_i^a \approx 0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Para realizar el conteo de los grados de libertad, tenemos 18 variables canónicas, 12 restricciones de primera clase y 12 de segunda clase, entonces se tiene $\frac{1}{2}(36 - 12 - 2(12)) = 0$, por lo que no hay grados de libertad físicos.

La matriz formada por el corchete de Poisson entre las restricciones de segunda clase es,

$$Q_{lk} = \begin{bmatrix} 0 & \delta^{ab}\delta_{ij} \\ -\delta^{ab}\delta_{ij} & 0 \end{bmatrix} \delta^2(x-y), \tag{4.35}$$

y su inversa,

$$Q_{lk}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{ab}\delta^{ij} \\ \delta_{ab}\delta^{ij} & 0 \end{bmatrix} \delta^2(x-y), \tag{4.36}$$

usando Q^{-1}_{lk} construimos el paréntesis de Dirac (similar a la sección 2.13) para dos funcionales del espacio fase F_1, F_2, con χ_k las restricciones de segunda clase,

$$\{F_1, F_2\}_D = \{F_1, F_2\} - \{F_1, \chi_l\}Q^{-1}_{lk}\{\chi_k, F_2\}, \tag{4.37}$$

los paréntesis de Dirac de las variables canónicas quedan de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\{e^i_0(x), p_j(y)\}_D &= \delta^i_j \delta^2(x-y),\\
\{E^i_a(x), P^b_j(y)\}_D &= 0,\\
\{{w_0}^i(x), \pi_j(y)\}_D &= \delta^i_j \delta^2(x-y),\\
\{w^i_a(x), \pi^b_j(y)\}_D &= \delta^b_a \delta^i_j \delta^2(x-y).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Por otro lado el hamiltoniano (4.27) se puede reescribir, y queda como una combinación lineal de restricciones de primera clase,

$$H_0 = -\left[e^i_0 \gamma_{3i} + w^i_0 \gamma_{4i}\right]. \tag{4.39}$$

Construimos la hamiltoniana extendida, la cual usamos para obtener las ecuaciones de movimiento de las variables canónicas, éstas también se pueden obtener a partir de una variación de la acción extendida,

$$H_E = \int d^2y \left[H_0 + \lambda^i_1 \gamma_{1i} + \lambda^i_2 \gamma_{2i} + \lambda^i_3 \gamma_{3i} + \lambda^i_4 \gamma_{4i} + {\lambda'}^i_{1a} \chi^a_{1i} + {\lambda'}^i_{2a} \chi^a_{2i}\right]. \tag{4.40}$$

A partir de la ecuación $\dot{F} = \{F, H_E\}_D$ con F una funcional del espacio fase, se calculan las ecuaciones de movimiento de las variables canónicas (se hará uso el paréntesis de Dirac junto con sus propiedades [1]),

$$\begin{aligned}
\dot{e}^i_0 &= \lambda^i_1,\\
\dot{p}_i &= \gamma_{3i},\\
\dot{w}^i_0 &= \lambda^i_2,\\
\dot{\pi}_i &= \gamma_{4i},\\
\dot{w}^i_a &= \tilde{D}_a w^i_0 + \tilde{D}_a \lambda^i_4,\\
\dot{\pi}^a_i &= 2\epsilon^{ab} \tilde{D}_b e_{0i} - {\epsilon_{ij}}^k w^j_0 \pi^a_k - {\epsilon_{ij}}^k \lambda^j_4 \pi^a_k + \epsilon^{ab} \tilde{D}_b \lambda_{3i}.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Se puede observar que no hay ninguna contribución del parámetro γ a la dinámica del sistema tal y como en [16]. Como existen funciones de primera clase, entonces el sistema tiene transformaciones de norma, la transformación de norma para alguna funcional del espacio fase F está dada como $\delta F = \{F, G\}_D$, G es el generador de norma, definimos una función generadora como una combinación lineal de restricciones de primera clase acompañadas de funciones arbitrarias,

$$G = \int d^2y \left[\delta\tau^i_1 \gamma_{1i} + \delta\tau^i_2 \gamma_{2i} + \delta\tau^i_3 \gamma_{3i} + \delta\tau^i_4 \gamma_{4i}\right], \tag{4.42}$$

aplicándola a las variables canónicas encontramos las transformaciones de norma que no son idénticamente cero,

$$\begin{aligned}
\delta w^i_a &= \tilde{D}_a \delta\tau^i_4,\\
\delta \pi^a_i &= \epsilon^{ab} \tilde{D}_b \delta\tau_{3i} - {\epsilon_{ij}}^k \delta\tau^j_4 {\pi^a}_k,\\
\delta e^i_0 &= \delta\tau^i_1,\\
\delta w^i_0 &= \delta\tau^i_2.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Calculando el paréntesis de Dirac entre las restricciones $(\gamma_{3i}, \gamma_{4i})$, se encuentra que éstos forman un grupo, a γ_{3i} se le puede asociar con un grupo de traslaciones y a $-\gamma_{4i}$ un grupo de rotaciones,

$$\begin{aligned} \{\gamma_{3i}, \gamma_{3j}\}_D &= 0, \\ \{\gamma_{3i}, \gamma_{4j}\}_D &= -\epsilon_{ij}{}^{k}\gamma_{3k}, \\ \{\gamma_{4i}, \gamma_{4j}\}_D &= -\epsilon_{ij}{}^{k}\gamma_{4k}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

4.2. Análisis de Hamilton-Jacobi

Ahora aplicaremos el formalismo de Hamilton-Jacobi a la acción (4.3) para obtener las ecuaciones de movimiento y las simetrías de la teoría. Para nuestro objetivo, vamos a introducir variables tipo Ashtekar [10], que son de la forma

$$
{}^{\pm}\mathcal{A}_b{}^i = \epsilon^i{}_{jk} A_b{}^{jk} \pm \frac{2}{\gamma} A_b{}^{i0}, \tag{4.45}
$$

de donde es posible obtener la relación inversa, dada por

$$
\begin{aligned}
A_b{}^{i0} &= \frac{\gamma}{4}\left[{}^{+}\mathcal{A}_b{}^i - {}^{-}\mathcal{A}_b{}^i\right], \\
A_b{}^{jk} &= \frac{1}{4}\epsilon^{jk}{}_i\left[{}^{+}\mathcal{A}_b{}^i +{}^{-} \mathcal{A}_b{}^i\right].
\end{aligned} \tag{4.46}
$$

Si usamos las anteriores variables en la acción (4.3), obtenemos

$$
\begin{aligned}
S = \int d^3x \epsilon^{ab} e_{0i}&\left[\partial_a^{-}\mathcal{A}_b^i - \epsilon^i{}_{jk}\left[\left(\frac{\gamma^2-1}{16}\right){}^{+}\mathcal{A}_a^j{}^{+}\mathcal{A}_b^k + \left(\frac{\gamma^2+3}{16}\right){}^{-}\mathcal{A}_a^j{}^{-}\mathcal{A}_b^k - \left(\frac{\gamma^2-1}{8}\right){}^{+}\mathcal{A}_a^j{}^{-}\mathcal{A}_b^k\right]\right] \\
+ \int d^3x \epsilon^{ab} e_{ai}&\left[\partial_b\left(\epsilon^i{}_{jk} A_0{}^{jk} + \frac{2}{\gamma} A_0{}^{0i}\right) - \partial_0{}^{-}\mathcal{A}_b^i + \left(\frac{\gamma^2-1}{2\gamma}\right)\epsilon^i{}_{jk} A_0{}^{j0+}\mathcal{A}_b^k - \left[\left(\frac{\gamma^2+1}{2\gamma}\right)\epsilon^i{}_{jk} A_0{}^{j0} + A_0{}^i{}_k\right]{}^{-}\mathcal{A}_b^k\right].
\end{aligned} \tag{4.47}
$$

Si se elige a $\gamma = \pm 1$ entonces toda la contribución de la variable ${}^{+}\mathcal{A}_b{}^i$ será eliminada, aquí no haremos tal elección y trabajaremos con un parámetro arbitrario. Por otra parte, podemos observar una estrecha relación en la estructura de la acción (4.47) y la acción de Holst. Identificando a las variables dinámicas $(e_0^j, e_c^j, A_0{}^{j0}, A_0{}^{kl}, {}^{-}\mathcal{A}_b^j, {}^{+}\mathcal{A}_b^j)$ podemos calcular sus correspondientes momentos canónicos

$$
\begin{aligned}
p_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{e}_0^i} = 0, \\
p_i^a &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{e}_a^i} = 0, \\
\pi_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0{}^{i0}} = 0, \\
\pi_{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0{}^{ij}} = 0, \\
{}^{+}\pi_i^a &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial^{+}\dot{\mathcal{A}}_b^i} = 0, \\
{}^{-}\pi_i^a &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial^{-}\dot{\mathcal{A}}_b^i} = \epsilon^{ab} e_{bi},
\end{aligned} \tag{4.48}
$$

las componentes de la matriz Hessiana del sistema son,

$$
H_{\nu\mu} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\nu \partial \dot{q}^\mu} = 0, \tag{4.49}
$$

con $\dot{q}^\mu = (\dot{e}_0^i, \dot{e}_a^i, \dot{A}_0{}^{i0}, \dot{A}_0{}^{ij}, {}^{+}\dot{\mathcal{A}}_b^i, {}^{-}\dot{\mathcal{A}}_b^i)$, con base en el resultado (4.48) es fácil notar que todos los elementos de la matriz Hessiana son cero, por lo que el determinante de ésta es también cero, entonces se tiene un sistema singular, esto permite identificar a partir de los momentos canónicos los siguientes hamiltonianos

$$\begin{aligned} H' &= \pi + H_0 = 0, \\ \phi_i &= p_i^0 = 0, \\ \phi_i^a &= p_i^a = 0, \\ \underline{\phi}_i &= \pi_i = 0, \\ \phi_{ij} &= \pi_{ij} = 0, \\ {}^{+}\phi_i^a &= {}^{+}\pi_i^a = 0, \\ {}^{-}\phi_i^a &= {}^{-}\pi_i^a - \epsilon^{ab} e_{bi} = 0, \end{aligned} \tag{4.50}$$

donde $\pi = \partial_0 S$ y H_0 es el hamiltoniano canónico dado como

$$\begin{aligned} H_0 = &-\epsilon^{ab} e_{0i} \left[\partial_a^- \mathcal{A}_b^i - \epsilon^i{}_{jk} \left[\left(\frac{\gamma^2 - 1}{16} \right) {}^{+}\mathcal{A}_a^j {}^{+}\mathcal{A}_b^k + \left(\frac{\gamma^2 + 3}{16} \right) {}^{-}\mathcal{A}_a^j {}^{-}\mathcal{A}_b^k - \left(\frac{\gamma^2 - 1}{8} \right) {}^{+}\mathcal{A}_a^j {}^{-}\mathcal{A}_b^k \right] \right] \\ &+ {}^{-}\pi_i^b \left[\partial_b \left(\epsilon^i{}_{jk} A_0{}^{jk} + \frac{2}{\gamma} A_0{}^{0i} \right) + \left(\frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma} \right) \epsilon^i{}_{jk} A_0{}^{j0+} \mathcal{A}_b^k - \left[\left(\frac{\gamma^2 + 1}{2\gamma} \right) \epsilon^i{}_{jk} A_0{}^{j0} + A_0{}^i{}_k \right] {}^{-}\mathcal{A}_b^k \right]. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Los paréntesis de Poisson fundamentales para este sistema los identificamos por

$$\begin{aligned} \{e_\mu^i(x), p_j^\nu(y)\} &= \delta_\mu^\nu \delta_j^i \delta^2(x-y), \\ \{A_0{}^{i0}(x), \pi_j(y)\} &= \delta_j^i \delta^2(x-y), \\ \{A_0{}^{ij}(x), \pi_{kl}(y)\} &= \frac{1}{2} \delta_{kl}^{ij} \delta^2(x-y), \\ \{{}^{+}\mathcal{A}_a^i(x), {}^{+}\pi_j^b(y)\} &= \delta_a^b \delta_j^i \delta^2(x-y), \\ \{{}^{-}\mathcal{A}_a^i(x), {}^{-}\pi_j^b(y)\} &= \delta_a^b \delta_j^i \delta^2(x-y). \end{aligned} \tag{4.52}$$

Calculando el paréntesis de Poisson entre todos los hamiltonianos vemos que el único que no es cero es el siguiente

$$\{\phi_i^a, {}^{-}\phi_j^b\} = -\epsilon^{ab} \delta_{ij} \delta^2(x-y). \tag{4.53}$$

Por lo que ahora tenemos que $(\phi_i, \underline{\phi}_i, \phi_{ij}, {}^{+}\phi_i^a)$ son involutivos mientras que $(\phi_i^a, {}^{-}\phi_i^a)$ son no-involutivos, a partir de estos últimos construimos el paréntesis generalizado de HJ. Para ello, la matriz de los corchetes de Poisson entre los hamiltonianos no-involutivos está dada por

$$C_{JK} = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^{ab} \delta_{ij} \\ \epsilon^{ba} \delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y), \tag{4.54}$$

y su inversa,

$$C_{JK}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{ab} \delta^{ij} \\ -\epsilon_{ba} \delta^{ij} & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y), \tag{4.55}$$

usando C_{JK}^{-1} se construye el paréntesis generalizado para dos funcionales del espacio fase F, G, con $H`_J$ no-involutivos,

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, H`_J\} C_{JK}^{-1} \{H`_K, G\}. \tag{4.56}$$

Por lo que los paréntesis generalizados entre las variables canónicas quedarán como a continuación

$$\begin{aligned} \{e_0^i(x), p_j^0(y)\}^* &= \delta_j^i \delta^2(x-y), \\ \{e_a^i(x), p_j^b(y)\}^* &= 0, \\ \{A_0{}^{i0}(x), \pi_j(y)\}^* &= \delta_j^i \delta^2(x-y), \\ \{A_0{}^{ij}(x), \pi_{kl}(y)\}^* &= \frac{1}{2} \delta_{kl}^{ij} \delta^2(x-y), \\ \{{}^{+}\mathcal{A}_a^i(x), {}^{+}\pi_j^b(y)\}^* &= \delta_a^b \delta_j^i \delta^2(x-y), \\ \{{}^{-}\mathcal{A}_a^i(x), {}^{-}\pi_j^b(y)\}^* &= \delta_a^b \delta_j^i \delta^2(x-y). \end{aligned} \tag{4.57}$$

Ahora escribimos la diferencial fundamental usando todos los hamiltonianos, aunque solo aparezcan los involutivos, los demás están contenidos en el paréntesis generalizado. La diferencial fundamental será de la siguiente manera

$$df = \int d^2y \left(\{f, H'\}^* dt + \{f, \phi_i\}^* d\sigma^i + \{f, \underline{\phi_i}\}^* d\underline{\sigma}^i + \{f, \phi_{ij}\}^* d\sigma^{ij} + \{f, {}^+\phi_i^a\}^* d^+\sigma_a^i \right). \quad (4.58)$$

Aplicamos el criterio de integrabilidad a los hamiltonianos involutivos $(\phi_i, \underline{\phi}_i, \phi_{ij}, {}^+\phi_i^a)$, el criterio de integrabilidad es $dH'_J = 0$ con H'_J siendo algún hamiltoniano involutivo, en el caso de no cumplirse idénticamente vamos a encontrar nuevos hamiltonianos,

$$\begin{aligned} d\phi^i &= \int d^2y(\{\phi^i, H'\}^* dt + \{\phi^i, \phi_j\}^* d\sigma^j + \{\phi^i, \underline{\phi_i}\}^* d\underline{\sigma}^i + \{\phi^i, \phi_{jl}\}^* d\sigma^{jl} + \{\phi^i, {}^+\phi_j^a\}^* d^+\sigma_a^j) \quad (4.59) \\ &= \epsilon^{ab} \left[\partial_a^- \mathcal{A}_b^i - \epsilon^i{}_{jk} \left[\left(\frac{\gamma^2 - 1}{16} \right) {}^+\mathcal{A}_a^j {}^+\mathcal{A}_b^k + \left(\frac{\gamma^2 + 3}{16} \right) {}^-\mathcal{A}_a^j {}^-\mathcal{A}_b^k - \left(\frac{\gamma^2 - 1}{8} \right) {}^+\mathcal{A}_a^j {}^-\mathcal{A}_b^k \right] \right] dt = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\underline{\phi_i} &= \int d^2y(\{\underline{\phi_i}, H'\}^* dt + \{\underline{\phi_i}, \phi_j\}^* d\sigma^j + \{\underline{\phi_i}, \underline{\phi_j}\}^* d\underline{\sigma}^j + \{\underline{\phi_i}, \phi_{jl}\}^* d\sigma^{jl} + \{\underline{\phi_i}, {}^+\phi_j^a\}^* d^+\sigma_a^j) \\ &= \left[\frac{2}{\gamma} \partial_a^- \pi_i^a - \epsilon^j{}_{ik} {}^-\pi_j^a \left[\left(\frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma} \right) {}^+\mathcal{A}_a^k - \left(\frac{\gamma^2 + 1}{2\gamma} \right) {}^-\mathcal{A}_a^k \right] \right] dt = 0, \quad (4.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\phi_{il} &= \int d^2y(\{\phi_{il}, H'\}^* dt + \{\phi_{il}, \phi_j\}^* d\sigma^j + \{\phi_{il}, \underline{\phi_j}\}^* d\underline{\sigma}^j + \{\phi_{il}, \phi_{jk}\}^* d\sigma^{jk} + \{\phi_{il}, {}^+\phi_j^a\}^* d^+\sigma_a^j) \\ &= \left[\epsilon^k{}_{il} \partial_a^- \pi_k^a + \frac{1}{2} \left({}^-\pi_i^a {}^-\mathcal{A}_{al} - {}^- \pi_l^a {}^-\mathcal{A}_{ai} \right) \right] dt = 0, \quad (4.61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^+\phi_i^a &= \int d^2y(\{{}^+\phi_i^a, H'\}^* dt + \{{}^+\phi_i^a, \phi_j\}^* d\sigma^j + \{{}^+\phi_i^a, \underline{\phi_j}\}^* d\underline{\sigma}^j + \{{}^+\phi_i^a, \phi_{jl}\}^* d\sigma^{jl} + \{{}^+\phi_i^a, {}^+\phi_j^b\}^* d^+\sigma_b^j) \\ &= \left[\frac{1}{4} \epsilon^{ab} \epsilon^j{}_{ik} e_{oj} \left({}^+\mathcal{A}_b^k - {}^- \mathcal{A}_b^k \right) - \frac{1}{\gamma} \epsilon^j{}_{ik} {}^-\pi_j^a A_0^{k0} \right] dt = 0. \quad (4.62) \end{aligned}$$

De estas expresiones al exigir que sean cero por el criterio de integrabilidad y $dt \neq 0$ encontramos los siguientes hamiltonianos:

$$\begin{aligned} \Psi^i &\equiv \epsilon^{ab} \left[\partial_a {}^-\mathcal{A}_b^i - \epsilon^i{}_{jk} \left[\left(\frac{\gamma^2 - 1}{16} \right) {}^+\mathcal{A}_a^j {}^+\mathcal{A}_b^k + \left(\frac{\gamma^2 + 3}{16} \right) {}^-\mathcal{A}_a^j {}^-\mathcal{A}_b^k - \left(\frac{\gamma^2 - 1}{8} \right) {}^+\mathcal{A}_a^j {}^-\mathcal{A}_b^k \right] \right] = 0, \\ \underline{\Psi}_i &= \left[\frac{2}{\gamma} \partial_a {}^-\pi_i^a - \epsilon^j{}_{ik} {}^-\pi_j^a \left[\left(\frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma} \right) {}^+\mathcal{A}_a^k - \left(\frac{\gamma^2 + 1}{2\gamma} \right) {}^-\mathcal{A}_a^k \right] \right] = 0, \\ \Psi_{ij} &\equiv \epsilon_{ij}{}^l D_a^- \pi_l^a = 0, \\ {}^+\Psi_i^a &\equiv \frac{1}{4} \epsilon^{ab} \epsilon^j{}_{ik} e_{oj} \left({}^+\mathcal{A}_b^k - {}^-\mathcal{A}_b^k \right) - \frac{1}{\gamma} \epsilon^j{}_{ik} {}^-\pi_j^a A_0{}^{k0} = 0, \quad (4.63) \end{aligned}$$

con $D_a^- \pi_i^a = \partial_a^- \pi_i^a - \frac{1}{2} \epsilon_{ij}{}^{k-} \pi_k^{a-} \mathcal{A}_a^j$. Podemos observar que ${}^+\Psi_i^{a-} \pi^{ci} + {}^+\Psi_i^{c-} \pi^{ai} = 0$, inmediatamente de esto se encuentra que ${}^+\mathcal{A}_b^k - {}^-\mathcal{A}_b^k = 0$, por lo que las variables de Ashtekar para este modelo están dadas por la representación adjunta de SO(3), es decir $A_b{}^{jk} = \frac{1}{2} \epsilon_i{}^{jk-} \mathcal{A}_b^i$, por lo que los hamiltonianos (4.63) se reducen a lo siguiente (hacemos una convención en su elección, agregando un factor numérico, más adelante veremos su utilidad)

$$\begin{aligned} \xi^i &\equiv \frac{1}{2} \epsilon^{ab} \mathcal{F}_{ab}{}^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ab} \left[\partial_a^- \mathcal{A}_b{}^i - \partial_b^- \mathcal{A}_a{}^i - \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} {}^- \mathcal{A}_a{}^{j-} \mathcal{A}_b{}^k \right] = 0, \\ \underline{\xi}_l &\equiv -2 D_c^- \pi_l^c = 0, \\ \xi_{ij} &\equiv -2 \epsilon^l{}_{ij} D_a^- \pi_l^a = 0. \quad (4.64) \end{aligned}$$

Además, el hamiltoniano canónico (4.51) se puede reescribir,

$$H_0 = -\frac{1}{2}\epsilon^{ab}e_{0i}\mathcal{F}_{ab}{}^{i} - \Lambda^i D_c^- \pi_i^c, \tag{4.65}$$

donde hemos usado que $\Lambda^i = \epsilon^i{}_{jk}A_0{}^{jk} - \frac{2}{\gamma}A_0{}^{i0}$. Notar que hasta este punto que el parámetro γ solo está presente en el término Λ^i que puede ser identificado como un multiplicar de Lagrange, ésta es una diferencia con respecto a lo reportado en [16]. La hamiltoniana canónica reescrita es una combinación lineal de hamiltonianos involutivos. Los términos π_i y π_{ij} generan hamiltonianos equivalentes, sin embargo, no se quitarán ninguno de éstos en lo que sigue del análisis. Ahora calculamos el paréntesis generalizado entre los nuevos hamiltonianos encontrados,

$$\begin{aligned}
\{\xi^i, \xi^j\}^* &= 0,\\
\{\xi^i, \underline{\xi}_j\}^* &= \epsilon^i{}_{jk}\xi^k,\\
\{\underline{\xi}_i, \underline{\xi}_j\}^* &= \epsilon_{ij}{}^k\underline{\xi}_k,\\
\{\xi_{ij}, \xi^k\}^* &= \epsilon^l{}_{ij}\epsilon^k{}_{lr}\xi^r,\\
\{\xi_{ij}, \xi_{kl}\}^* &= \epsilon^r{}_{ij}\epsilon^s{}_{kl}\xi_{rs},\\
\{\xi_{ij}, \underline{\xi}_l\}^* &= \epsilon^s{}_{ij}\xi_{sl},
\end{aligned} \tag{4.66}$$

con esto vemos que el álgebra de los hamiltonianos es cerrada, por lo que los hamiltonianos son involutivos, con esto estamos seguros de ya no encontrar más hamiltonianos si volvemos a aplicar las condiciones de integrabilidad. Tomando en cuenta que el paréntesis generalizado y el de Poisson coinciden cuando una de las entradas es un hamiltoniano involutivo, los tres primeros corchetes de la ecuación (4.66) forman un grupo, donde ξ^i es asociado con traslaciones, mientras que $\underline{\xi_j}$ con rotaciones.

Con los nuevos hamiltonianos encontrados construimos la diferencial fundamental, siendo $(\phi_i, \underline{\phi}_j, \phi_{ij}, \xi_i, \underline{\xi}_k, \xi_{ij})$ los hamiltonianos involutivos. La diferencial fundamental está dada por,

$$\begin{aligned}
df \;&=\; \int d^2y(\{f, H'\}^*dt + \{f,\phi_i\}^*d\sigma^i + \{f,\underline{\phi_i}\}^*d\underline{\sigma}^i + \{f,\phi_{ij}\}^*d\sigma^{ij}\\
&+\; \{f,\xi_i\}^*dz^i + \{f,\underline{\xi_i}\}^*d\underline{z}^i + \{f,\xi_{ij}\}^*dz^{ij}),
\end{aligned} \tag{4.67}$$

a partir de esta diferencial fundamental identificaremos las ecuaciones características de las variables dinámicas, esto es,

$$\begin{aligned}
de_0^i &= d\sigma^i,\\
dp_i^0 &= \frac{1}{2}\epsilon^{ab}\mathcal{F}_{abi}dt = \xi_i dt = 0,\\
dA_0{}^{0i} &= d\underline{\sigma}^i,\\
d\pi_i &= \frac{2}{\gamma}D_c^-\pi_i^c dt = -\gamma^{-1}\underline{\xi}_i dt = 0,\\
dA_0{}^{ij} &= d\sigma^{ij},\\
d\pi_{ij} &= \epsilon_{ij}{}^k D_c^-\pi_k^c dt = -\frac{1}{2}\xi_{ij}dt = 0,\\
d^-\mathcal{A}_a^i &= D_a\Lambda^i dt - 2D_a d\underline{z}^i - 2\epsilon^i{}_{kj}D_a dz^{kj},\\
d^-\pi_i^a &= \left[\epsilon^{ab}D_b e_{0i} - \frac{\Lambda^j}{2}\epsilon_{ji}{}^{k-}\pi_k^a\right]dt + \epsilon^{ab}D_b dz_i + \epsilon_{ij}{}^{k-}\pi_k^a d\underline{z}^j + \epsilon_{ij}{}^{k-}\pi_k^a\epsilon^j{}_{js}dz^{js}.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

De estas ecuaciones podemos identificar las ecuaciones de movimiento para $({}^{-}\mathcal{A}^i_a, {}^{-}\pi^a_i)$

$$\begin{aligned}
\partial_0^{-}\mathcal{A}^i_a &= D_a\Lambda^i, \\
\partial_0^{-}\pi^a_i &= \epsilon^{ab}D_b e_{0i} - \frac{\Lambda^j}{2}\epsilon_{ji}{}^{k\,-}\pi^a_k.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Podemos observar que la evolución dinámica de (p^0_i, π_i, π_{ij}) son iguales a hamiltonianos involutivos, entonces, podemos elegir a las variables e^i_0, $A_0{}^{0i}$ y $A_0{}^{ij}$ como multiplicadores de Lagrange, por lo que Λ^i también será un multiplicador de Lagrange. De las ecuaciones (4.68) obtenemos las transformaciones de norma eligiendo dt=0,

$$\begin{aligned}
\delta^{-}\mathcal{A}^i_a &= -2D_a\delta\tilde{z}^i, \\
\delta^{-}\pi^a_i &= \epsilon^{ab}D_b\delta z_i + \epsilon_{ij}{}^{k\,-}\pi^a_k\delta\tilde{z}^j, \\
\delta e^i_0 &= \delta\sigma^i, \\
\delta A_0{}^{0i} &= \delta\underline{\sigma}^i, \\
\delta A_0{}^{ij} &= \delta\sigma^{ij},
\end{aligned} \tag{4.70}$$

donde $\tilde{z}^i = \underline{z}^i + \epsilon^i_{jk}z^{jk}$. Las transformaciones (4.70) corresponden a las transformaciones de norma de la teoría. Por otra lado, para realizar el conteo de los grados de libertad, consideramos que tenemos 12 variables dinámicas $({}^{-}\mathcal{A}^i_a, -\pi^a_i)$ y 12 hamiltonianos involutivos independientes $(\phi_i, \underline{\phi}_i, \xi^i, \underline{\xi}_j)$, de donde obtenemos que $\frac{1}{2}(12-12)=0$, por lo que el sistema no presenta grados de libertad físicos, tal como esperamos.

4.3. Conclusiones

En este trabajo se ha estudiando una acción que describe gravedad tridimensional Euclideana. Para nuestro análisis desarrollamos una forma alternativa del formalismo de Dirac que fue reportado en [16], en adición, también reportamos el análisis realizado en HJ. Podemos observar que los resultados obtenidos tanto en el formalismo de Dirac como en el de HJ son parcialmente equivalentes debido a que se han usado variables diferentes. En efecto, en el formalismo de HJ se usaron las variables tipo Ashtekar, se encontraron los hamiltonianos de la teoría y observamos que los hamiltonianos involutivos (4.64) son asociados a generadores de rotaciones y de traslaciones. También encontramos las correspondientes transformaciones de norma y se reportó el conteo del número de los grados de libertad del sistema, concluyendo que gravedad en tres dimensiones es una teoría topológica. Por otra parte, observamos que el parámetro γ tiene una contribución al sistema a nivel de los multiplicadores de Lagrange $\Lambda^i = \epsilon^i{}_{jk}A_0{}^{jk} - \frac{2}{\gamma}A_0{}^{i0}$, por lo que tenemos los siguientes escenarios: si fijamos $A_0{}^{jk}=0$, la acción se reduce a una acción BF pero con la presencia del parámetro γ. Por otro lado, si tomamos a $A_0{}^{i0}=0$ no habrá contribución alguna del parámetro γ y el sistema se reduce al caso reportado en [16], en este sentido, podemos decir que nuestros resultados extienden a los reportados en la literatura. Es de esperarse que bajo una elección adecuada de la fijación de norma se puedan obtener diferentes resultados, sin embargo, este punto está fuera de los objetivos del presente trabajo. También cabe mencionar, que nuestros resultados permiten analizar los aspectos de cuantización, y aunque es muy interesante este punto, lo dejaremos para un trabajo a futuro.

Finalmente, deseamos comentar que los resultados de este trabajo, en particular lo que se reporta en la sección del formalismo de HJ, han sido publicados en [24].

Apéndice A

Geometría diferencial

A continuación se presentará una breve descripción de algunos conceptos indispensables en la geometría diferencial, que son de importancia en diversas formulaciones y problemas, por ejemplo, para establecer formalmente la mecánica clásica.

A.1. Variedades diferenciables

Daremos en esta primera sección algunos de los conceptos y definiciones importantes para establecer de forma adecuada las variedades diferenciales.

Definición: Una variedad topólogica n-dimensional es un espacio topólogico Hausdorft M con la propiedad que cada punto en M tiene una vecindad abierta homeomorfa a una región abierta en $\mathbf{R}^n$.

Definición: Una carta n-dimensional en un espacio topólogico M es un par (U,ϕ) donde U es una región abierta de M y ϕ:U$\longrightarrow \mathbf{R}^n$ es un homeomorfismo.

La definición de una variedad M n-dimensional puede ser enriquecida con otra definición, en donde se incluyen características como la de una variedad diferenciable. Ya que es importante tener herramientas, que en principio provienen del cálculo de varias variables, ahora tenerlos para variedades.

Definición: Una variedad de dimensión n es un espacio topológico M con cartas n-dimensionales, que cubren M, teniendo un par de cartas, (U,ϕ) y (V,χ) sobre M, existen funciones de transición $\phi \circ \chi^{-1}$:$\chi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V)$ que son C^k diferenciales; si $k \geq$1, se dice que M es una variedad diferencial. Si k=0 M es una variedad topólogica.

Esta última definición puede ser sustituida por una equivalente, donde solo se necesita encontrar un atlas maximal (es una carta que está C^k relacionado con todas las demás cartas sobre M).

A.2. Campos vectoriales

Una de las motivaciones para dar la definición de un espacio tangente a la variedad diferenciable M, viene del hecho de querer encontrar una estructura más general que los vectores tangentes a una curva sobre la variedad, el cual de manera natural es generalizado a los campos vectoriales, por lo que será suficiente trabajar con este último. Muchas de las definiciones y conceptos dados a continuación son solo para variedades sobre el campo real.

Denotamos a $f \in C^\infty$(M), como aquellas funciones C^∞ diferenciables, tal que f:$M \longrightarrow \mathbb{R}$. También existen funciones C^k diferenciales, pero para los propósitos que queremos es suficiente que sea C^∞.

Definición: Sea $p \in M$. Un vector tangente a M en p es un mapeo v_p: C^∞(M) $\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que,

$$v_p(af + bg) = av_p(f) + bv_p(g), \tag{A.1}$$

$$v_p(fg) = f(p)v_p(g) + g(p)v_p(f), \tag{A.2}$$

para $f, g \in C^\infty$(M), a, b $\in \mathbb{R}$.

Se puede demostrar que cuando se aplica el mapeo v_p a alguna función constante c esta da cero. Estas dos propiedades, la linealidad y la regla de Leibniz, son características presentes en los campos vectoriales.

El espacio tangente a M en algún punto p se denota por T_pM, este último es el conjunto que contiene todos los vectores tangentes a M en p, T_pM es un espacio vectorial real con las operaciones definidas [25]:

$$(w_p + v_p)(f) = w_p(f) + v_p(f), \tag{A.3}$$

$$(av_p)(f) = a(v_p(f)), \tag{A.4}$$

con $f \in C^\infty$(M), a $\in \mathbb{R}$ y $w_p, v_p \in T_pM$, el vector cero de T_pM 0_p, satisface $0_p(f) = 0$.

Definición: Un campo vectorial $\mathbf{X}$ en M, es una función que a cada punto p en M asigna un vector tangente $\mathbf{X(p)} \in T_pM$. El vector tangente $\mathbf{X(p)}$ es también escrito como X_p.

Al ya tener un campo vectorial a un punto, de este se obtiene un vector tangente que puede ser aplicado a una función real obteniendo un número real.

Tomamos un campo vectorial $\mathbf{X}$ y $f \in C^\infty$(M), podemos formar una función $\mathbf{X}f$, definida como:

$$(\mathbf{X}f)(p) = X_p(f), \tag{A.5}$$

$X_p \in T_pM$ y además cumple las mismas propiedades de v_p dadas en (A.1)-(A.4).

Si (U, ϕ) es una carta en M (dim(M)=n), tenemos n campos vectoriales, de la forma; $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ (i=1,2...n) en U dados como $(\frac{\partial}{\partial x^i})(p)\equiv (\frac{\partial}{\partial x^i})_p$. Estos elementos forman una base para T_pM, así que cualquier campo vectorial $\mathbf{X}$ evaluado en algún punto "p" puede ser escrito como una combinación lineal de los vectores base $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ con coeficientes reales dependiente de p. Entonces,

$$(\mathbf{X})_p = X^i_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p. \tag{A.6}$$

A.3. Formas diferenciales

Para introducir las formas diferenciales, empezaremos por las 1-forma y los campos tensoriales. Uno de los objetos clásicos que existen en forma diferencial es la diferencial total, formada por un gradiente y una diferencial de longitud, inspirados en entidades como esta, se estudian los análogos sobre las variedades.

Sea $f \in C^\infty$(M); el gradiente de f en el punto p $\in$ M, denotado como ∇f_p, es definido:

$$\nabla f_p \cdot (v_p) \equiv v_p(f), \tag{A.7}$$

donde $v_p \in T_pM$. El mapeo ∇f_p es una transformación lineal de T_pM a $\mathbb{R}$, si a, b $\in \mathbb{R}$ y $w_p, v_p \in T_pM$, entonces,

$$\nabla f_p \cdot (av_p + bw_p) = a\nabla f_p \cdot (v_p) + b\nabla f_p \cdot (w_p). \tag{A.8}$$

Con base en estas propiedades ∇f_p es un objeto que vive en el espacio dual a T_pM, el cual representaremos como T^*_pM, a estos elementos normalmente se les nombra como covectores, además T^*_pM es llamado el espacio cotangente de M en p, esté es un espacio vectorial sobre el campo de los reales que contiene todos los covectores en algún punto p, incluyendo a ∇f_p.

Para $\alpha_p, \beta_p \in T_p^*M$, $v_p \in T_pM$, a $\in \mathbb{R}$, se cumple lo siguiente,

$$(\alpha_p + \beta_p) \cdot (v_p) = \alpha_p \cdot (v_p) + \beta_p \cdot (v_p), \tag{A.9}$$

$$\alpha_p \cdot (av_p) = a\alpha \cdot (v_p), \tag{A.10}$$

Al conjunto de todos los covectores diferenciales en M se les conoce como 1-formas. Se demuestra que dx_p^i (i=1,2... n) es una base para T_p^*M, por lo que cualquier covector puede ser escrito como una combinación lineal de estos,

$$\alpha_p = \alpha\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right) dx_p^i, \tag{A.11}$$

en algunas ocasiones es simplemente escrita como $\alpha = \alpha_i dx^i$.

A partir de las 1-formas se construye el álgebra exterior, obteniendo formas diferenciales de grado superior y además completamente antisimétricas.

Definición: Si w y η son 1-formas en M, el producto cuña de w y η, $w \wedge \eta$ es definido por [26]

$$w \wedge \eta = \frac{1}{2}(w \otimes \eta - \eta \otimes w). \tag{A.12}$$

Ya aplicados a X_1, X_2 campos vectoriales sobre M, obtenemos,

$$(\alpha \wedge \beta)(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}) = \frac{1}{2}[\alpha(\mathbf{X_1})\beta(\mathbf{X_2}) - \beta(\mathbf{X_1})\alpha(\mathbf{X_2})]. \tag{A.13}$$

Este nuevo objeto, además de ser un tensor es también una 2-forma, es decir el producto cuña toma 2 1-formas para construir una 2-forma. Podemos ver que la estructura del producto cuña es parecida al de un determínate acompañado por un factorial, teniendo esto en cuenta, se hace una generalización de esta operación para el producto cuña de una k-forma y una l-forma.

Sea w_k y w_l una k-forma y l-forma respectivamente, sgn σ el signo de las permutaciones de σ (sgn σ=1 si es par, sgnσ=-1 si es impar) y $\sigma \in S_{k+l}$. Tomado $(k+l)$ campos vectoriales $X_1, ..., X_{k+l}$, el producto cuña queda como a continuación,

$$w_k \wedge w_l(X_1, ..., X_{k+l}) \equiv \frac{1}{(k+l)!}\sum_{k,l}(sgn\sigma) w_k(X_{i_1}, ..., X_{i_k}) w_l(X_{j_i}, ..., X_{j_l}), \tag{A.14}$$

donde $i_1 < ... < i_k$ y $j_1 < ... < j_l$, tal que $(i_1, ..., i_{k,j_1,...,j_l}) \in S_{k+l}$, es una permutación de los números (1,2,3,...,$k+l$). Podemos comprobar fácilmente que esta generalización se reduce al caso del producto cuña de 1-formas.

En una carta una k-forma se escribe de la manera siguiente,

$$w = w_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}, \tag{A.15}$$

con base en la ecuación (A.14) se observa que el producto cuña toma una k-forma y una l-forma lleva a una $(k+l)$-forma, con esta definición se pueden demostrar las siguientes propiedades, sea w_1, w_2 una k-forma, η una l-forma, w una j-forma,

$$(aw_1 + bw_2) \wedge \eta = a(w_1) \wedge \eta + b(w_2) \wedge \eta, \tag{A.16}$$

$$w_1 \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge w_1, \tag{A.17}$$

$$(w_1 \wedge \eta) \wedge w = w_1 \wedge (\eta \wedge w). \tag{A.18}$$

Como comentario final, si se tiene una k-forma (en algunos casos) esta se puede escribir como el producto cuña de k 1-formas.

A.4. Derivada exterior

La derivada exterior está construida exclusivamente para formas diferenciales, con el propósito de preservar la antisimetría, este es un mapeo lineal (d) que lleva k-formas a (k+1)-formas, algunas de sus propiedades son las siguientes:

$$d(aw_1 + bw_2) = ad(w_1) + bd(w_2), \tag{A.19}$$

siendo w_1, w_2 k-formas, a y b $\in \mathbb{R}$,

$$d^2(w) = 0, \tag{A.20}$$

$$d(w \wedge \eta) = dw \wedge \eta + (-1)^k w \wedge d\eta, \tag{A.21}$$

w una k-forma, η una 1-forma.

Sobre una carta ya se vio que una k-forma se escribe como en (A.15), por lo que la derivada exterior de esta quedaría como

$$dw = dw_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right) w_{i_1 \ldots i_k} dx^l \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{A.22}$$

Bibliografía

[1] Henneaux, M., & Teitelboim, C. (1994). Quantization of gauge systems. Princeton University Press.

[2] Pimentel, B. M., Teixeira, R. G., & Tomazelli, J. L. (1998). Hamilton–Jacobi approach to Berezinian singular systems. Annals of Physics, 267(1), 75-96.

[3] Escalante, A., & Manuel-Cabrera, J. (2014). Hamiltonian dynamics of an exotic action for gravity in three dimensions. Annals of Physics, 343, 27-39.

[4] Escalante, A., & Zarate, M. (2015). Dirac and Faddeev–Jackiw quantization of a five-dimensional Stüeckelberg theory with a compact dimension. Annals of Physics, 353, 163-178.

[5] A. Escalante, J. Manuel-Cabrera, Annals of Physics, 361, 585-604, (2015).

[6] Escalante, A., & Tzompantzi, O. R. (2016). Dirac's and generalized Faddeev–Jackiw brackets for Einstein's theory in the G $\longrightarrow$ 0 limit. Annals of Physics, 364, 136-147.

[7] J. Barcelos-Neto, C. Wotzasek, Modern Phys. Lett. A 7 (19) (1992) 1737-1747; J. Barcelos-Neto, C. Wotzasek, Internat. J. Modern Phys. A 7 (20) (1992) 4981-5003.

[8] A. Escalante and C. Medel-Portugal, Annals of Physics, 39, 27-46, (2018).

[9] Palatini, A. (1919). Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940), 43(1), 203-212.

[10] Ashtekar, A. (1986). New variables for classical and quantum gravity. Physical Review Letters, 57(18), 2244.

[11] Ashtekar, A. (1987). New Hamiltonian formulation of general relativity. Physical Review D, 36(6), 1587.

[12] Holst, S. (1996). Barbero's Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action. Physical Review D, 53(10), 5966.

[13] Witten, E. (1988). 2+ 1 dimensional gravity as an exactly soluble system. Nuclear Physics B, 311(1), 46-78.

[14] Barcelos-Neto, J., & Dargam, T. G. (1995). Constrained analysis of topologically massive gravity. Zeitschrift für Physik C Particles and Fields, 67(4), 701-705.

[15] Perez, A., & Rovelli, C. (2006). Physical effects of the Immirzi parameter in loop quantum gravity. Physical Review D, 73(4), 044013.

[16] Geiller, M., & Noui, K. (2013). A note on the Holst action, the time gauge, and the Barbero–Immirzi parameter. General Relativity and Gravitation, 45(9), 1733-1760.

[17] Geiller, M., & Noui, K. (2012). Testing the imposition of the spin foam simplicity constraints. Classical and Quantum Gravity, 29(13), 135008.

[18] I. Rubalcava, Análisis hamiltoniano de teorías tipo BF, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Tesis de Maestría (2010).

[19] Goldstein, H. (2018). Mecánica clásica. Reverté.

[20] Y. Güler, Hamilton-Jacobi Theory of Discrete, Regular Constrained Systems, IL Nuovo Cimento, 100(2), 267 (1987).

[21] C. Caratheodory, Calculus of variations and partial diferential equations of the first order, American Mathematical Society, (1999).

[22] Whittaker, E. T. (1988). A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge University Press.

[23] Bertin, M. C., Pimentel, B. M., & Valcárcel, C. E. (2014). Involutive constrained systems and Hamilton-Jacobi formalism. Journal of Mathematical Physics, 55(11), 112901.

[24] Escalante, A. & Hernández-García, M. E. (2020). The Hamilton-Jacobi characteristic equations for three-dimensional Ashtekar gravity. The European Physical Journal Plus, 135(2), 245.

[25] Frankel, T. (2011). The geometry of physics: an introduction. Cambridge University Press.

[26] Baez, J., & Muniain, J. P. (1994). Gauge fields, knots and gravity (Vol. 4). World Scientific Publishing Company.