



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estudio teórico y numérico de los solitones ópticos
espaciales.

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física Aplicada

por

Aletvia Andrea Cuetlach Martinez

Asesorado por

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco

Puebla Pue.
Noviembre de 2019



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estudio teórico y numérico de los solitones ópticos
espaciales.

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física Aplicada

por

Aletvia Andrea Cuetlach Martinez

Asesorado por

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco

Puebla Pue.
Noviembre de 2019

Título: Estudio teórico y numérico de los solitones ópticos espaciales.
Estudiante: ALETVIA ANDREA CUETLACH MARTINEZ

COMITÉ

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero
Presidente

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez
Secretario

Dra. Emma Vianey García Ramírez
Vocal

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez
Vocal

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
Asesor

Agradecimientos

Es difícil expresar mi sentir por todo lo que he vivido en estos años, son tantas las horas invertidas, son muchas las personas a las que he conocido y que han contribuido a mi formación, la universidad ha dejado en mi una base no solo para mi vida académica y profesional, sino para mi vida personal.

Le agradezco a la universidad, a mi facultad, a cada uno de los profesores con los que tuve el placer de tomar clase, al mi comité de tesis y principalmente al Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco por sus esfuerzos para que finalmente pudiera graduarme.

También agradezco a cada miembro de mi familia por su apoyo, cariño y compañía, especialmente a mi abuelita Francisca que siempre creyó en mi, a mi papa, mi mama, mis hermanos, mis gatos y mis perros que me han hecho ser una mejor persona y alentado a siempre seguir adelante.

Gracias a todos mis amigos, sin ellos hubiera sido bastante complicado mi andar en especial a Miriam, Ivonne, Fernanda, Ivan y Estefany que aunque muy distintos siempre me alentaron para aceptar nuevos retos.

Gracias a todas las personas que han formado parte en este logro en mi vida .

Índice general

Resumen	XI
Introducción	XIII
1. Introducción a la Óptica	1
1.1. Óptica Lineal	1
1.1.1. Ecuación de Onda	2
1.1.2. Ecuación de Helmholtz	3
1.1.3. Ecuación Paraxial de Helmholtz	4
1.1.4. Difracción	6
1.1.5. Haz Gaussiano	9
1.2. Óptica no lineal	10
1.2.1. Efecto Kerr óptico	11
1.2.2. Autoefectos	12
1.3. La Ecuación No-Lineal de Schrödinger	14
1.3.1. Soluciones	16
2. Solitones Ópticos	17
2.1. Clasificación de solitones ópticos	18
2.2. Solitones ópticos espaciales	18
2.3. Solitones Ópticos Espaciales Kerr	19
2.3.1. Solitones brillantes	20
2.3.2. Solitones oscuros	24

2.4. Soluciones a la ENLS	27
2.4.1. Solitón brillante de primer orden	27
2.4.2. Solitón oscuro de primer orden	28
3. Estudio numérico	29
3.1. Método de Paso Dividido de Fourier	30
3.2. Algoritmo	31
3.3. Código para la aplicación del Método de Paso Dividido de Fourier en la ENLS	32
3.4. Simulación	35
4. Conclusiones	37
A. Método de Dispersión Inversa	39
Bibliografía	43

Índice de figuras

1.1. Función de onda de una onda paraxial propagándose en dirección z en función de la distancia axial.	5
1.2. Frentes de onda y las normales de una onda paraxial en el plano x - z	5
1.3. Visualización del principio de Huygens-Fresnel.	7
1.4. Representación de los parámetros de un Haz Gaussiano.	9
1.5. Autoenfocamiento.	13
1.6. Autodesenfocamiento.	14
2.1. Comportamiento del potencial en un medio con no linealidad Kerr positiva [32].	21
2.2. Perfil transversal del solitón brillante fundamental, E_c (2.22).	23
2.3. Comportamiento del potencial en un medio con no linealidad Kerr negativa [32].	25
2.4. Perfil transversal del solitón brillante fundamental.	26
3.1. Generación numérica de un solitón brillante fundamental propagándose $20 L_D$, (b) en azul se muestra el perfil transversal de intensidad a la entrada y (c) en rojo a la salida.	35
3.2. Generación numérica de un solitón oscuro fundamental propagándose $10 L_D$, b) en azul se muestra el perfil transversal de intensidad a la entrada y c) en rojo a la salida.	36
A.1. Métodos de solución para una ecuación evolutiva no lineal. [40]	40

Resumen

El presente trabajo de tesis estudia de forma teórica y numérica a solitones brillantes y oscuros que surgen de la compensación de efectos lineales (difracción) y no lineales (autoenfocamiento o autodesenfocamiento) durante la propagación de luz de alta potencia en un medio Kerr, denominados solitones ópticos espaciales.

En primer lugar, se estudia la propagación de la luz en un medio lineal y el fenómeno de difracción, posteriormente, se aborda un enfoque no lineal en donde se describen los efectos que sufre la luz al propagarse en un medio con no linealidad Kerr, lo cual permite plantear la ecuación que describe la interacción entre la difracción y el efecto no lineal al propagarse la luz en el medio, esta es la Ecuación No Lineal de Schrödinger.

Para finalizar la parte teórica, se presenta una solución que describe a los solitones propuesta por V. E. Zakharov y A. B. Shabat [31], se analizan los casos en los que la difracción se compensa con el autoenfocamiento o el autodesenfocamiento llegando a partir del método de dispersión inversa a las ecuaciones que describen al solitón brillante y al solitón oscuro obtenidas por A. Hasegawa y F. Tappert [32, 33], además, se demuestra que dichas ecuaciones son soluciones a la Ecuación No Lineal de Schrödinger.

Para concluir con el trabajo, se analiza la Ecuación No Lineal de Schrödinger a partir del Método numérico de Paso Dividido de Fourier (o Split Step Fourier Method), a partir del cual se simula la propagación de los solitones brillantes y oscuros en el lenguaje de programación MATLAB, ilustrando así que el perfil transversal de los solitones es invariante.

Palabras clave: *Difracción, Efecto Kerr, Solitón Espacial, Dispersión Inversa y Método de Paso Dividido de Fourier*

Introducción

La física, una de las ciencias con mayor impacto en la vida del ser humano, tiene como objetivo el estudio de las propiedades de la materia y sus interacciones a través del espacio y el tiempo, permitiendo dar explicaciones a múltiples fenómenos naturales basándose en observaciones experimentales y mediciones. El alcance de la física es extremadamente amplio por lo que existen numerosos campos encargados de investigar diferentes aspectos de la realidad.

La óptica, una de las primeras ramas de la física y, en general, de la ciencia, estudia el comportamiento, las propiedades y las interacciones de la luz [1]; los primeros en proponer teorías ópticas y, además, estudiar los efectos de reflexión y refracción fueron los griegos, sin embargo, con anterioridad se manejaban ideas superficiales que permitían aprovechar la luz en situaciones cotidianas. Los fenómenos ópticos han sido esenciales en el desarrollo e ilustración de conceptos importantes en matemáticas y física [2, 3].

La invención del láser (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) en 1960, por Maiman, revolucionó el entendimiento de la luz y abrió las puertas a nuevas áreas de investigación, entre las que destaca la óptica no lineal [4] que nace con la observación del fenómeno de segundo armónico por Franken en 1961 [5], suceso que motivó estudios sobre la interacción de la luz con la materia, los cuales permitieron la observación y generación de otros fenómenos no lineales como tercer armónico, efecto Raman, solitones, además de aplicaciones como la conversión de frecuencia láser y la conmutación óptica [6, 7].

Históricamente, la primera observación documentada de un solitón se atribuye al ingeniero escocés John Scott Russell en 1834, quien los observó en un canal de agua (en Germiston, Escocia) y que denominó “great waves of translation”, luego llamadas ondas solitarias [8]. Desde entonces, este fenómeno ha recibido creciente interés y es considerado como una clave para comprender el comportamiento no lineal en la naturaleza.

En 1870, Boussinesq y Rayleigh de manera independiente dieron explicaciones parciales, con expresiones matemáticas a la forma y velocidad de dichas ondas. Posteriormente en 1895, Diederik J. Korteweg y su estudiante Gustav De Vries obtuvieron una ecuación diferencial parcial que modelaba el fenómeno [9, 10], pero al ser no

lineal representaba un enorme reto de análisis. Con la llegada de las computadoras fue posible la obtención de soluciones numéricas a la ecuación KdV, en 1965 por Norman Zabusky y Martin Kruskal, demostrando la existencia de ondas solitarias, que se mantenían propagando permanentemente sin sufrir deformación alguna, a las que denominaron solitones, acuñando el término “solitón” con el fin de reflejar su naturaleza de partícula pues permanecen intactas incluso después de colisiones mutuas [11].

La idea del solitón se desarrolló matemáticamente, lo que permitió que en 1971 dos investigadores de la Academia de Ciencias de la URSS, Vladimir E. Zakharov y Aleksei B. Shabat, descubrieran que había otra ecuación interesante en el estudio de solitones: la hoy conocida Ecuación No Lineal de Schrödinger (ENLS) [9], que permite explicarlos como una solución a una ecuación de onda cuyo carácter no lineal lleva a soluciones en forma de paquetes de onda localizados, pero es la no linealidad lo que dificulta su análisis y da comienzo la búsqueda de métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas, actualmente existen un número considerable de estos, entre los cuales destacan: el explícito clásico, de rayuela, implícito-explícito, esquema implícito de Crank-Nicolson, el esquema Ablowitz-Ladik, de paso dividido de Fourier y el pseudospectral [12, 13].

De manera general, el término solitón hace referencia a un paquete de ondas unidas por la interacción de efectos lineales y no lineales mutuamente compensados [14]. Los solitones ópticos se clasifican en temporales y espaciales, dependiendo de si el confinamiento de la luz sucede en el tiempo o el espacio durante la propagación de la onda, y se presentan si el medio tiene una no linealidad. Los solitones generados por una susceptibilidad de tercer orden, es decir, cuando el índice de refracción se modifica con la intensidad de luz, son conocidos como Kerr y descritos por la ecuación no lineal de Schrödinger [5]. La dependencia del índice de refracción respecto a la intensidad conduce al autoenfocamiento (o autodesenfocamiento) o a auto-modulación de fase.

Los solitones temporales representan pulsos ópticos que mantienen su forma en el tiempo, se producen si el efecto no lineal de auto-modulación de fase logra contrarrestar la dispersión cromática (luz de diferentes longitudes de onda, viajando a distintas velocidades). En particular, los solitones temporales han eclipsado a los solitones espaciales, por su enorme importancia aplicativa como portadores de información y a su facultad de propagarse miles de kilómetros en fibra [15].

La física de los solitones espaciales es más rica [16], ya que el atrapamiento ocurre en una o dos dimensiones transversales e involucra distintos tipos de respuestas en el material, por lo que podemos definirlos como haces autoguiados que permanecen confinados en las direcciones transversales ortogonales a la dirección de propagación, y ocurren si la no linealidad óptica (autoenfocamiento o autodesenfocamiento) compensa la difracción típica que sufriría el haz en un medio lineal [17]. La difracción se supera porque las componentes de la onda plana son obligadas a viajar en fase,

con una constante de propagación común determinada por la respuesta no lineal.

En este trabajo de tesis nos enfocaremos en el estudio de solitones espaciales debido a que pueden producirse fenómenos fascinantes que están específicamente vinculados al mayor número de dimensiones, por ejemplo, autoenfoque e inestabilidades transversales, espiral e interacción híbrida dimensional solitón-solitón, la existencia de vórtices ópticos, la formación de patrones complejos y estructuras localizadas en cavidades [16-18].

El objetivo general de este trabajo de tesis es realizar un estudio numérico y analítico de las soluciones a la ecuación no lineal de Schrödinger en un medio Kerr. Para llevar a cabo este objetivo, se obtienen y comprueban analíticamente las soluciones a la Ecuación No Lineal de Schrödinger, es decir, la solución tipo solitones brillantes y oscuros y, posteriormente, se ilustra numéricamente que cumplen la ecuación utilizando el método de Paso Dividido de Fourier (Split Step Fourier Method).

En el primer capítulo realizamos una introducción general sobre el estudio de los solitones ópticos espaciales, partiendo de las ecuaciones y principios básicos de óptica y óptica no lineal para la comprensión del fenómeno, desarrollados brevemente con el objetivo de obtener la Ecuación No Lineal de Schrödinger. Se plantea la idea del solitón y se presenta la estructura de las soluciones.

En el segundo capítulo se definen a los solitones ópticos, se presentan las clasificaciones más relevantes de estos para posteriormente orientar el trabajo hacia los solitones ópticos espaciales por efecto Kerr y dar paso a la obtención analítica de las soluciones tipo solitón oscuro y solitón brillante a partir del método de dispersión inversa para posteriormente demostrar que son soluciones a la Ecuación No Lineal de Schrödinger.

En el tercer capítulo se introduce históricamente el uso de métodos numéricos, seguido del planteamiento del método de paso dividido de Fourier y su aplicación a la ecuación No Lineal de Schrödinger a partir de un algoritmo desarrollado en el lenguaje de programación MATLAB, lo cual permite ilustrar numéricamente que las ecuaciones obtenidas en el capítulo 2 cumplen con las condiciones para ser soluciones a la Ecuación No Lineal de Schrödinger. Finalmente se dan las conclusiones del trabajo desarrollado.

Capítulo 1

Introducción a la Óptica

La interacción de la luz con la materia permite de manera cotidiana la observación de un gran número de fenómenos ópticos, por ejemplo, el color del cielo, un arco iris, reflejos brillantes sobre el agua, espejismos, etc. [3]. Cuando luz de baja intensidad interactúa con un medio material se producen fenómenos ópticos lineales, tales como la reflexión, la absorción, la dispersión, la difracción de la luz, entre otros [1-3]. En cambio, cuando luz de alta intensidad interactúa con la materia algunas de sus propiedades ópticas son modificadas y la radiación incidente puede ser alterada en frecuencia, fase o amplitud, teniendo así fenómenos ópticos no lineales [5].

El capítulo tiene como objetivo presentar la Ecuación No Lineal de Schrödinger que describe a los solitones ópticos espaciales y la física presente en ella, por lo cual, se introducen conceptos fundamentales de óptica lineal y no lineal, centrándonos en difracción y autoenfoco (o autodesenfoco) de un haz.

1.1. Óptica Lineal

Las opiniones acerca de la luz han cambiado a lo largo del tiempo; Newton inspirado en la propagación rectilínea de la luz, la consideraba como un flujo de partículas luminosas que obedecían las leyes de la mecánica clásica (teoría corpuscular); sin embargo, no todos pensaban igual, Christian Huygens, presentó una teoría diferente de la luz en 1678, haciendo una analogía entre fenómenos acústicos y ópticos; fue capaz de explicar las leyes de la reflexión y refracción [19], dando los primeros pasos de la teoría ondulatoria.

A principios del siglo XIX se comenzó a formar la óptica ondulatoria. Los experimentos de Young y Fresnel probaron que los haces de luz pueden interferir, hecho que no podía explicarse con la teoría corpuscular. Fresnel (1815) detalló el principio de Huygens complementándolo con las ideas de Young respecto a la interferencia,

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LA ÓPTICA

1.1. ÓPTICA LINEAL

explicando el comportamiento rectilíneo y la distribución de intensidad de la luz al pasar cerca de algún obstáculo, es decir, difracción [1, 19].

Posteriores estudios de la polarización de la luz y la difracción de haces polarizados (Fresnel y Aragón) llevaron a definir a las ondas luminosas como ondas transversales, en otras palabras, que la dirección de las oscilaciones es perpendicular a la dirección de propagación. En 1846, Faraday descubrió el fenómeno de la rotación de planos de polarización con lo que se demostró que existen nexos entre los fenómenos ópticos y magnéticos. Por otra parte, se halló que la unidad electromagnética de la constante eléctrica y magnética, guardan una relación igual a

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

la velocidad de la luz, lo que llevo a Maxwell en 1873 a unificar su trabajo sobre los campos eléctricos y magnéticos en una única teoría denominada electromagnetismo [19].

1.1.1. Ecuación de Onda

La formación de una onda depende de la presencia de enlaces entre las diferentes partes del sistema, las ondas electromagnéticas tienen su expresión matemática en las ecuaciones de Maxwell [20]:

$$\text{r} \quad \vec{D} = \rho_{ext} \quad (1.1)$$

$$\text{r} \quad \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{r} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\text{r} \quad \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

donde $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ y $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$, ϵ_0 y μ_0 son respectivamente la permeabilidad eléctrica y magnética en el vacío.

Considerando el caso más sencillo de onda plana, donde $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})}$ y $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r})}$, en un medio isotrópico, no magnético $\vec{J} = 0$, no conductor $\rho_{ext} = 0$ y dieléctrico homogéneo con $\vec{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E}$, nos lleva a la ecuación de onda

$$\text{r}^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5)$$

con r^2 el operador Laplaciano ($\text{r}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ en coordenadas cartesianas) y $v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi^{(1)})}$ la velocidad en el medio. Cualquier función

que satisfaga la ecuación de onda representa una posible onda óptica y el principio de superposición es válido por la naturaleza lineal de la ecuación.

Un material transparente homogéneo como el vidrio se caracteriza por una constante única, su índice de refracción $n > 1$. En un medio de índice de refracción n , las ondas de luz viajan a menor velocidad que en el vacío y es justo la diferencia de velocidades lo que permite caracterizarlo:

$$v = \frac{c}{n} \quad (1.6)$$

Una onda óptica está descrita matemáticamente por una función de onda real de posición $\vec{r} = (x, y, z)$ y tiempo t , denotada de la forma $u(\vec{r}, t)$, la manera más simple es la onda armónica, generalmente representada como:

$$u(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \sin(k \vec{r} - \omega t) = a(\vec{r}) \sin(\phi(\vec{r}) - 2\pi\nu t) \quad (1.7)$$

donde $a(\vec{r})$ es la amplitud, $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda, λ es la longitud de onda, $\phi(\vec{r})$ es la fase y $\nu = v/\lambda$ es la frecuencia.

Estas ondas idealizadas disponen de una frecuencia constante definiendo a una onda monocromática que sirve para reproducir diversos fenómenos, pues a pesar de que las ondas verdaderas poseen una banda de frecuencia, toda onda puede ser representada como la suma de ondas armónicas. Cuando la banda de frecuencia de una onda es estrecha se denominan causimonocromática [1].

El análisis de fenómenos ondulatorios se simplifica al representar las ondas con funciones exponenciales en lugar de senos y cosenos, con base en la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (1.8)$$

Por lo que la función de onda puede ser escrita como

$$u(\vec{r}, t) = a e^{i(k \vec{r} - \omega t)} \quad (1.9)$$

donde se escoge la parte real o la imaginaria con el fin de expresar a la onda armónica.

1.1.2. Ecuación de Helmholtz

Las ondas monocromáticas que en general son representadas por una función de onda con dependencia temporal armónica:

$$u(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \cos[2\pi\nu t + \varphi(\vec{r})] \quad (1.10)$$

nos conducen hacia otra ecuación interesante en el estudio de la luz, para lo cual es conveniente representarla a modo de una función compleja, es decir:

$$U(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) e^{i\varphi(\vec{r})} e^{i2\pi\nu t} = U(\vec{r}) e^{i2\pi\nu t} \quad (1.11)$$

con lo que:

$$u(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ U(\vec{r}, t) \} = \frac{1}{2} [U(\vec{r}, t) + U^*(\vec{r}, t)] \quad (1.12)$$

donde $U(\vec{r})$ es la amplitud compleja, cuya magnitud $|U(\vec{r})| = a(\vec{r})$ es la amplitud de la onda y cuyo argumento $\arg U(\vec{r}) = \varphi(\vec{r})$ es la fase. La función de onda compleja $U(\vec{r}, t)$, describe la onda completamente y también satisface la ecuación de onda [4].

A partir de la sustitución de la Ec. (1.11) en la ecuación de onda (Ec. (1.5)) se obtiene una ecuación diferencial para la amplitud compleja $U(\vec{r})$, denominada Ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 U(\vec{r}) + k^2 U(\vec{r}) = 0 \quad (1.13)$$

donde el número de onda:

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c} = nk_0, \quad (1.14)$$

y k_0 es el número de onda en el vacío y n es el índice de refracción constante.

La ecuación de Helmholtz es válida en todas las ondas que satisfacen la ecuación de onda. Las soluciones más simples a esta ecuación en un medio homogéneo son las ondas planas y esféricas, pero no son las únicas, de forma particular, una onda paraxial también la satisface.

Si $U(\vec{r}, t)$ no es monocromático, puede representarse en términos de su transformada de Fourier [21] como

$$U(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_f(\vec{r}, f) e^{i2\pi ft} df \quad (1.15)$$

donde

$$U_f(\vec{r}, f) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\vec{r}, t) e^{i2\pi ft} dt \quad (1.16)$$

Si sustituimos la Ec. (1.16) en la ecuación de onda, obtendremos la ecuación de Helmholtz para $U_f(\vec{r}, f)$.

1.1.3. Ecuación Paraxial de Helmholtz

Una onda paraxial es una onda plana que viaja a lo largo de la dirección z , modulada por una envolvente compleja $A(\vec{r})$ que es una función de posición que varía lentamente, cuya amplitud compleja es:

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{ikz} \quad (1.17)$$

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LA ÓPTICA
1.1. ÓPTICA LINEAL

La variación de la envolvente $A(\vec{r})$ y $\partial A/\partial z$ debe ser lentas dentro de la distancia de una longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, es decir:

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA \quad (1.18)$$

y

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k^2 A \quad (1.19)$$

con la finalidad de que mantenga su comportamiento de onda plana.

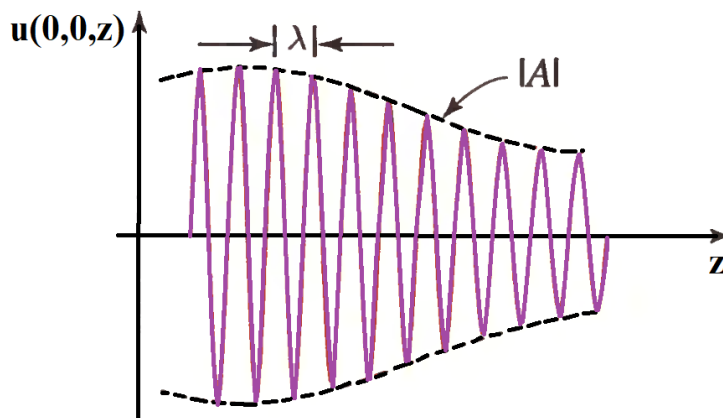


Figura 1.1: Función de onda de una onda paraxial propagándose en dirección z en función de la distancia axial.

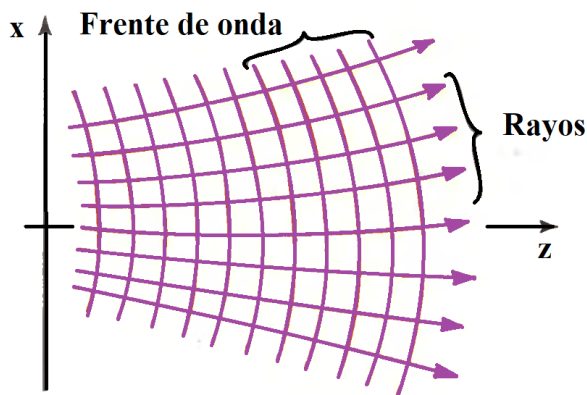


Figura 1.2: Frentes de onda y las normales de una onda paraxial en el plano x-z.

Buscando que la amplitud compleja $U(\vec{r})$ satisfaga la ecuación de Helmholtz, la envolvente compleja $A(\vec{r})$ debe satisfacer otra ecuación diferencial parcial, que se

obtiene al sustituir la Ec. (1.17) en la ecuación de Helmholtz y despreciar $\partial^2 A/\partial z^2$ en comparación a $\partial A/\partial z$ o $k^2 A$, conduciendo a

$$r_T^2 A - i2k \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (1.20)$$

donde $r_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ es el operador Laplaciano Transversal.

Esta es la Ecuación Paraxial de Helmholtz [4, 21] cuya solución más simple es la onda paraboloidal.

1.1.4. Difracción

Cuando las ondas atraviesan “obstáculos”, su comportamiento no se puede describir en términos de rayos, por ejemplo, si una onda plana pasa a través de un orificio, una parte se desvía de su dirección original de propagación y el campo resultante es diferente del incidente, en tamaño y forma. La propagación de la onda implica este fenómeno llamado difracción producido con todo tipo de ondas, incluidos los haces ópticos [1, 19, 21].

Si la longitud de onda de un campo es más grande que la apertura del dispositivo de difracción, se puede usar la teoría de difracción escalar, utilizable para analizar la mayoría de los fenómenos de difracción y sistemas de imagen, pues describe con bastante precisión la propagación de la onda resultante [21]. La teoría de la difracción escalar implica la conversión de la ecuación de onda en una ecuación integral. Esta teoría nos conduce a un postulado considerado como el principio fundamental que permitió la aceptación de la teoría ondulatoria de la luz sobre la teoría corpuscular, el principio de Huygens-Fresnel, cuya descripción matemática fue perfeccionada por Kirchoff, Rayleigh y Sommerfeld [19].

El principio de Huygens-Fresnel

El principio de Huygens-Fresnel, establece que cada punto sin obstrucción de un frente de onda, en un instante de tiempo determinado, sirve como fuente de trenes de onda secundarios esféricos, la envolvente de estas ondas secundarias forma un nuevo frente de onda, su superposición constituye la onda en otro plano [1, 21]. La función de respuesta al impulso del sistema para la propagación entre dos planos es

$$U(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda} \frac{z}{r_{01}^2} \iint U(x, y, 0) e^{ikr_{01}} dx dy \quad (1.21)$$

donde r_{10} es la distancia de \underline{P}_0 a P_1 , siendo \underline{P}_0 la imagen reflejada de P_0 con respecto al plano inicial, como se muestra en la siguiente Figura 1.1.

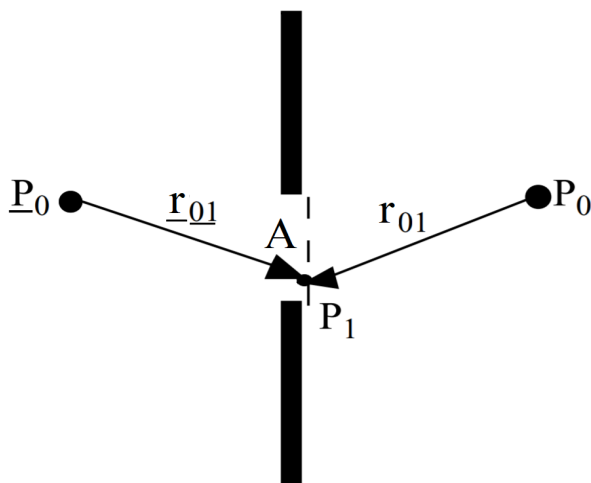


Figura 1.3: Visualización del principio de Huygens-Fresnel.

Se observa que $U(x_0, y_0, z)$ es una convolución lineal con respecto a x, y , es decir:

$$U(x_0, y_0, z) = U(x, y, 0) \quad h(x, y, z) \quad (1.22)$$

donde

$$h(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda z} \frac{\exp \left[ikr \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right)^{1/2} \right]}{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \quad (1.23)$$

Difracción en la Región de Fresnel

Limitando el campo de onda de entrada a una extensión radial L_1 :

$$U(x, y, 0) = 0 \quad \text{si} \quad \sqrt{x^2 + y^2} > L_1 \quad (1.24)$$

De forma similar, se limita la extensión radial del campo de onda observado $U(x, y, 0)$ en el plano de salida a una región L_2 tal que

$$U(x_0, y_0, z) = 0 \quad \text{si} \quad \sqrt{x^2 + y^2} > L_2 \quad (1.25)$$

r_{01} en la Ec. (1.17) es

$$r_{01} = z \left[1 + \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{z^2} \right]^{1/2} \quad (1.26)$$

donde $(x, y, 0)$ son las coordenadas de un punto en el plano de entrada y (x_0, y_0, z) en el plano de observación.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LA ÓPTICA
1.1. ÓPTICA LINEAL

Con las dos restricciones mencionadas, se cumple que

$$[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]_{max} = (L_1 + L_2)^2 \quad (1.27)$$

Utilizando el límite superior: Si

$$z \approx L_1 + L_2 \quad (1.28)$$

el término $(1/i\lambda)(z/r_{01}^2)$ en la Ec. (1.17) se puede aproximar a $1/i\lambda z$. Sin embargo, se requiere más cuidado con la fase kr_{10} , expandiendo en una serie binomial y restringiendo en $|z|$, la fase es aproximadamente:

$$kr_{01} = kz + \frac{k}{2z} [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2] \quad (1.29)$$

Las aproximaciones hechas anteriormente se conocen como aproximaciones de Fresnel y en esta región, la Ec. (1.17) se convierte en

$$U(x_0, y_0, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint U(x, y, 0) \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda z} [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]\right) dx dy \quad (1.30)$$

donde la respuesta al impulso viene dada por

$$h(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda z} [x^2 + y^2]\right) \quad (1.31)$$

La aproximación de Fresnel es en realidad una solución de la ecuación de onda paraxial [21]. Los términos cuadráticos en la Ec. (1.30) se pueden expandir de manera que se conviertan en

$$U(x_0, y_0, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}[x_0^2 + y_0^2]} \iint U^\theta(x, y, 0) \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda z} [x_0x + y_0y]\right) dx dy \quad (1.32)$$

donde

$$U^\theta(x, y, 0) = U(x, y, 0) \exp\left(i\frac{k}{2z} [x^2 + y^2]\right) \quad (1.33)$$

Difracción en la Región de Fraunhofer

Considerando la Ec. (1.33), si

$$z \approx \frac{k}{2} [x^2 + y^2] \quad (1.34)$$

entonces, $U^\theta(x, y, 0)$ es aproximadamente igual a $U(x, y, 0)$. Cuando esto sucede, la región de Fraunhofer es válida [21], y la Ec. (1.32) se convierte en

$$U(x_0, y_0, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}[x_0^2 + y_0^2]} \iint U(x, y, 0) \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda z} [x_0x + y_0y]\right) dx dy \quad (1.35)$$

1.1.5. Haz Gaussiano

El haz Gaussiano, el tipo de haz láser más común, es una solución de la ecuación de Helmholtz que se obtiene partiendo de la onda paraboloidal. Considerando que la onda se propaga en la dirección z positivo y se encuentra sobre un plano transversal, la expresión que define su amplitud compleja es:

$$U(\vec{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp \left[\frac{\rho^2}{W^2(z)} \right] \exp \left[ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z) \right] \quad (1.36)$$

La cual es descrita por dos parámetros independientes, $A_0 = A_1/iz$ y z_0 , que se determinan a partir de las condiciones de frontera, los demás están relacionados con el z_0 y la longitud de onda λ [4].

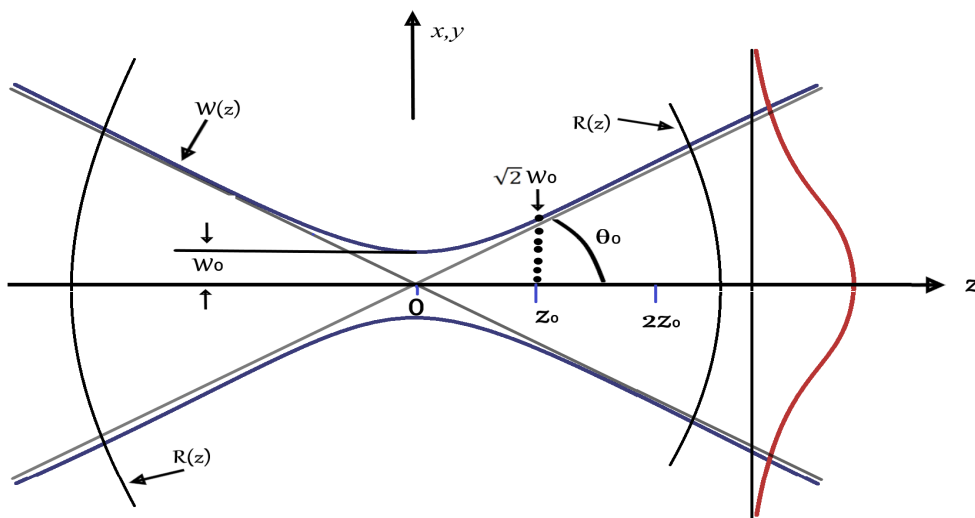


Figura 1.4: Representación de los parámetros de un Haz Gaussiano.

Los parámetros que definen al haz Gaussiano son el radio del haz en la posición z , este crece paulatinamente en ambos sentidos y es mínimo en $z=0$, dado por

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2}, \quad (1.37)$$

el radio en la cintura:

$$W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}}, \quad (1.38)$$

el radio de curvatura del frente de onda, estos son aproximadamente planos cerca de la cintura del haz, pero tienden a curvarse gradualmente y llegan a ser esférico para $z \gg z_0$:

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right], \quad (1.39)$$

el retardo de fase:

$$\zeta(z) = \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (1.40)$$

y el ángulo de divergencia; que describe la extensión del haz a campo lejano:

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi W_0} \quad (1.41)$$

Donde z_0 es la distancia o rango de Rayleigh definido como

$$z_0 = \frac{\pi W_0^2}{\lambda} \quad (1.42)$$

Su distribución de intensidad, en cualquier plano transversal a la dirección de propagación, tiene simetría circular centrada en el eje del haz y está descrita por una función Gaussiana:

$$I(\rho, z) = I_0 \left[\frac{W_0}{W(z)} \right]^2 \exp \left[-\frac{2\rho^2}{W_0^2} \right] \quad (1.43)$$

Con $I_0 = jA_0^2$. La intensidad en eje es:

$$I(0, z) = I_0 \left[\frac{W_0}{W(z)} \right]^2 = \frac{I_0}{1 + (z/z_0)^2} \quad (1.44)$$

La potencia total óptica que lleva el haz en una posición z es la integral de la intensidad óptica sobre el plano transversal:

$$P = \int_0^\infty I(\rho, z) 2\pi\rho d\rho \quad (1.45)$$

Integrando, obtenemos que:

$$P = \frac{1}{2} I_0 (\pi W_0^2) \quad (1.46)$$

Expresando a I_0 en términos de P la intensidad óptica total del haz es:

$$I(\rho, z) = \frac{2P}{\pi W^2(z)} \exp \left[-\frac{2\rho^2}{W_0^2} \right] \quad (1.47)$$

1.2. Óptica no lineal

La óptica no lineal nació después de la invención del láser, hecho que hizo posible estudiar fenómenos en los que la interacción entre la luz y la materia es muy fuerte, ocasionando que las propiedades del material se modifiquen y afecten la propagación de la luz [6, 7]. Al considerar que el medio óptico no lineal es homogéneo, isotrópico

y no conductor, se puede describir a partir de las ecuaciones de Maxwell [20], lo cual lleva a una ecuación de onda no lineal dada por:

$$r^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (1.48)$$

La respuesta del material a un campo electromagnético se explica a partir de la relación entre el vector de polarización $\vec{P}(\vec{r}, t)$ y el vector de campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$, dada por el vector de desplazamiento dieléctrico:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.49)$$

Al interactuar la luz con el material, los átomos entraran en resonancia; si la fuerza elástica restauradora es lineal, se representa usando el modelo del oscilador armónico simple; en cambio, si es no lineal el desplazamiento desde el punto de equilibrio, una función no lineal del campo eléctrico corresponderá a la polarización, por lo que el sistema estará descrito por el oscilador anarmónico [5].

La linealidad o no linealidad es una propiedad del medio en el cual viaja la luz. En óptica usualmente la dependencia al campo eléctrico es lineal:

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E}(t) \quad (1.50)$$

donde la constante de proporcionalidad $\chi^{(1)}$ es la susceptibilidad lineal y ϵ_0 es la permitividad en el espacio libre.

En óptica no lineal, la respuesta es descrita generalizando la ecuación anterior, expresando a la polarización $P(t)$ como una serie de potencias del campo eléctrico $E(t)$, es decir:

$$\begin{aligned} \vec{P}(t) &= \epsilon_0 [\chi^{(1)} \vec{E}(t) + \chi^{(2)} E^2 \vec{t}(t) + \chi^{(3)} E^3 \vec{t}(t) + \dots] \\ &= \vec{P}^{(1)}(t) + \vec{P}^{(2)}(t) + \vec{P}^{(3)}(t) + \dots = \vec{P}_L + \vec{P}_{NL} \end{aligned} \quad (1.51)$$

donde las cantidades $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$, ... $\chi^{(m)}$ son conocidas como las susceptibilidades ópticas no lineales de segundo, tercer, ... m orden respectivamente. El primer término es la polarización lineal \vec{P}_L y los términos de orden mayor forman la polarización no lineal \vec{P}_{NL} .

Dependiendo de las características del material y la amplitud del campo será el orden de la respuesta óptica no lineal. Por ejemplo, algunos materiales tienen una no linealidad de segundo orden; en este caso el efecto a tercer orden es débil y se desprecia, sin embargo, existen otros donde la no linealidad a tercer orden predomina, tal es el caso de los materiales centro simétricos.

1.2.1. Efecto Kerr óptico

El efecto Kerr, también llamado electro-óptico cuadrático, es un cambio en el índice de refracción de un material en respuesta a un campo eléctrico aplicado. La

observación del efecto Kerr-óptico es posible cuando se tienen campos eléctricos intensos del orden de los campos que mantienen a los electrones ligados a los átomos o moléculas [4, 5, 20].

Con el propósito de desarrollar teóricamente la variación del índice de refracción en un medio con no linealidad Kerr, se considera que el vector de polarización eléctrica es proporcional a

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0(\chi^{(1)} + \chi^{(3)}j\vec{E}j^2)\vec{E} \quad (1.52)$$

donde $\chi^{(3)}$ es la susceptibilidad eléctrica no lineal del medio. Remplazando $\vec{P}(t)$ en la ecuación de desplazamiento eléctrico, tenemos:

$$\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi^{(1)} + \chi^{(3)}j\vec{E}j^2)\vec{E} \quad (1.53)$$

a partir de esta expresión se define el índice de refracción total como:

$$n = \sqrt{(1 + \chi^{(1)} + \chi^{(3)}j\vec{E}j^2)} \quad (1.54)$$

Para pequeñas contribuciones no lineales $\left| \chi^{(3)}j\vec{E}j^2 \right| \ll 1 + \chi^{(1)}$, es válida la aproximación:

$$n = n_0 + \frac{1}{2} \frac{\chi^{(3)}j\vec{E}j^2}{n_0} \quad (1.55)$$

que representa el índice de refracción en medios con no linealidad de tercer orden.

Para la propagación de una onda monocromática, la intensidad local está relacionada a la amplitud del campo eléctrico conforme a $I = n_0 \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} j\vec{E}j^2$. Sustituyendo la relación anterior en la Ec. (1.55) se establece el coeficiente de índice de refracción no lineal del medio Kerr igual a

$$n_2 = \frac{1}{2} \frac{\chi^{(3)}}{n_0^2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\nu_0}} \quad (1.56)$$

Finalmente, el índice de refracción es:

$$n = n_0 + n_2 I = n_0 + n_2 j\vec{E}j^2 \quad (1.57)$$

El cambio del índice de refracción inducido por la intensidad de la luz es quizás el más observado y es el responsable de los efectos ópticos no lineales como el autoenfocamiento, autodesenfocamiento, modulación de fase, entre otros.

1.2.2. Autoefectos

Si el índice de refracción depende de la intensidad de la luz, siendo su amplitud lo suficientemente grande, y además la iluminación de la sección transversal del haz no es uniforme, el índice de refracción no será una magnitud constante, lo que equivale a la heterogeneidad del medio. En un material heterogéneo los rayos no son rectilíneos y se desvían hacia la parte donde el índice de refracción es mayor [5, 22].

Autoenfoque

El autoenfoque es uno de los efectos fundamentales de autoacción y de vital importancia en muchos fenómenos ópticos no lineales, como en el fenómeno Raman estimulado, la filamentación láser en medios transparentes y claramente en la formación de solitones [22, 23]. Sucede cuando el índice de refracción aumenta con la intensidad, por lo que el coeficiente de índice de refracción no linealidad es positivo $n_2 > 0$, presentándose en el medio un comportamiento de lente positiva, descrito por

$$n = n_0 + jn_2jj\vec{E}j^2. \quad (1.58)$$

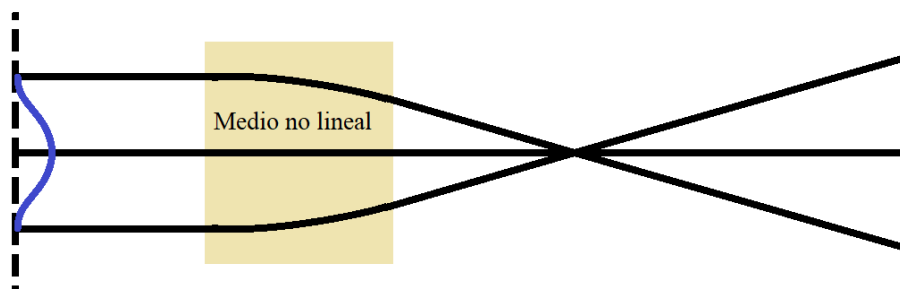


Figura 1.5: Autoenfocamiento.

El proceso de autoenfoque establece un límite superior en la potencia del láser a propagar en un medio con un índice de refracción dependiente de la intensidad. Para potencias por encima del umbral, el haz sufre un colapso y si es extremadamente alta, el material puede ser dañado [5]. Hay diversos estudios sobre el poder del autoenfoque catastrófico que han derivado en numerosas expresiones y valores mediante el uso de varios argumentos o cálculos numéricos. G. Fibich y A. L. Gaeta demostraron que la forma analítica de la expresión [24] es

$$P_c = \alpha \left(\frac{\lambda^2}{4\pi n_0 n_2} \right) \quad (1.59)$$

donde λ es la longitud de onda en el espacio libre y α es una constante que depende de los parámetros del material, si se considera que no hay absorción $\alpha = 1$ [5, 23, 24].

Autodesenfocamiento

El autodesenfoco es otro de los efectos que modifica el proceso de interacción entre la radiación láser y la materia. Este efecto ocurre si el coeficiente de índice de refracción no linealidad es negativo $n_2 < 0$ por lo que presenta la conducta de una lente negativa [22], con el índice de refracción dado por

$$n = n_0 - jn_2j\vec{E}^2 \quad (1.60)$$

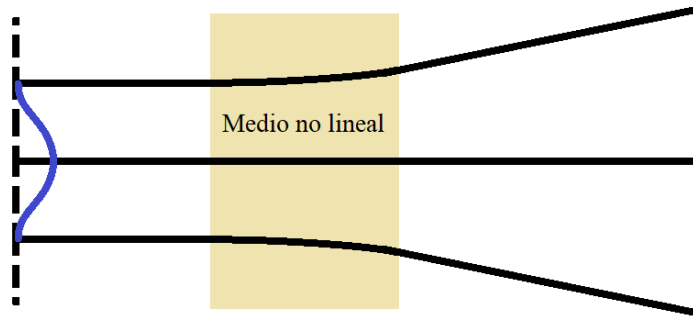


Figura 1.6: Autodesenfocamiento.

1.3. La Ecuación No-Lineal de Schrödinger

La Ecuación No-Lineal de Schrödinger (ENLS) es una ecuación diferencial parcial compleja que emerge en una gran cantidad de ámbitos de la naturaleza, razón por la que es considerada una ecuación universal [16, 25]. En el ámbito de la óptica no-lineal, la ENLS es usada para describir la propagación de ondas electromagnéticas en fibras ópticas y materiales no lineales [9, 15-18].

El interés en esta tesis se centra en los solitones espaciales, específicamente en los generados en materiales con una no linealidad Kerr. Con el fin de deducir la ENLS que describe a los solitones, se parte de un campo cuya componente temporal tiene un comportamiento armónico, tal que la propagación de un haz linealmente polarizado a través de un medio con índice de refracción $n(x,y,z)$, sea descrita por la ecuación de Helmholtz:

$$[\nabla^2 + n^2(x, y, z)k_0^2] U(x, y, z) = 0 \quad (1.61)$$

en la que $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ es el número de onda en el vacío, λ_0 la longitud de onda y $U(\vec{r})$ es la amplitud del campo eléctrico del haz. Si el medio posee una no linealidad Kerr, el índice de refracción es descrito por la Ec. (1.57).

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LA ÓPTICA
1.3. LA ECUACIÓN NO-LINEAL DE SCHRÖDINGER

Se considera un haz bidimensional $U = U(x, z)$, es decir, que se propaga en z y guarda una distribución espacial transversal sólo en x , esto porque bajo la no linealidad Kerr no han sido encontradas soluciones estacionarias tridimensionales [18], dicho de otro modo, la aproximación es válida cuando el haz es elíptico. En este caso suponemos que la envolvente transversal del haz varía lentamente sobre la dirección de propagación, y el campo eléctrico se escribe de la forma:

$$U(x, z) = A_0(x, z) \exp(-in_0k_0z) \quad (1.62)$$

Donde $A(x, z)$ es la envolvente transversal del haz. Sustituyendo la amplitud del campo eléctrico en la Ec. (1.61), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 A_0(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_0(x, z)}{\partial z^2} - 2in_0k_0 \frac{\partial A_0(x, z)}{\partial z} + (n^2 - n_0^2)k_0^2 A_0(x, z) = 0 \quad (1.63)$$

Al considerar nuevamente que $A(x, z)$ varía suavemente a lo largo de la dirección de propagación, la aproximación de la envolvente lenta dada por la Ec. (1.19), se alcanza la ecuación de onda paraxial:

$$\frac{\partial^2 A_0(x, z)}{\partial x^2} - 2in_0k_0 \frac{\partial A_0(x, z)}{\partial z} + (n^2 - n_0^2)k_0^2 A_0(x, z) = 0 \quad (1.64)$$

Debido a que el índice de refracción está dado por la Ec. (1.57), al sustituir en la Ec. (1.64) se llega a

$$\frac{\partial^2 A_0(x, z)}{\partial x^2} - 2in_0k_0 \frac{\partial A_0(x, z)}{\partial z} + (2n_0n_2jA_0(x, z)j^2 + n_2^2jA_0(x, z)j^4)k_0^2 A_0(x, z) = 0 \quad (1.65)$$

Ya que $n_2 \ll n_0$ solo se mantiene el término a primer orden de n_2 , con lo que:

$$in_0k_0 \frac{\partial A_0(x, z)}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_0(x, z)}{\partial x^2} + n_0n_2k_0^2jA_0(x, z)j^2 A_0(x, z) \quad (1.66)$$

La Ec. (1.66) es normalizada con los siguientes parámetros: $A_0 = \sqrt{P_0} \bar{A}$, $Z = z/L_D$ y $X = x/x_0$, donde P_0 es la intensidad pico (en W/cm^2), x_0 es definido como el ancho del haz inicial y $L_D = n_0k_0x_0^2$ es la longitud de difracción o distancia de Rayleigh, además $L_{NL} = 1/jn_2jk_0P_0$ es la distancia característica de la no-linealidad y $n_2 = jn_2j$. Aplicando la regla de la cadena y haciendo sustituciones:

$$i \frac{\partial A_0(x, z)}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{2n_0k_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_0(x, z)}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \right) - \frac{1}{L_{NL}P_0} jA_0(x, z)j^2 A_0(x, z) \quad (1.67)$$

$$i \frac{\partial A_0(x, z)}{\partial Z} = \frac{L_D}{2n_0k_0x_0} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \frac{\partial A_0(x, z)}{\partial X} - \frac{L_D}{L_{NL}P_0} jA_0(x, z)j^2 A_0(x, z) \quad (1.68)$$

Así, obtenemos la ecuación que rige la evolución del haz a través de un material con no linealidad Kerr:

$$i \frac{\partial A(X, Z)}{\partial Z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A(X, Z)}{\partial X^2} - \frac{L_D}{L_{NL}} jA(X, Z)j^2 A(X, Z) \quad (1.69)$$

conocida como la Ecuación no lineal de Schrödinger.

1.3.1. Soluciones

Encontrar una solución a la ENLS no es algo simple por lo cual es indispensable entender la relación entre los términos de dicha ecuación. La clave para la formación del solitón espacial radica en las constantes L_N y L_{NL} .

Si $L_D \ll L_{LN}$, el segundo término del lado derecho de la Ec. (1.69) puede ignorarse, describiendo solo la difracción del haz inicial. Bajo estas condiciones el haz se ensancha al propagarse, duplicando su anchura en el momento en que $z = L_D$, esto implica que n_2 es pequeño a potencias del haz débiles, tal que:

$$n_2(P_0 x_0^2) \approx \frac{1}{n_0 k_0^2} \quad (1.70)$$

En cambio, si $L_{LN} \ll L_D$, se ignora el término de difracción y el efecto Kerr domina, manifestándose como autoenfocamiento ($n_2 > 0$) o autodesenfocamiento ($n_2 < 0$). La anchura espectral del haz se duplica cuando $z = L_{LN}$, esta condición nos lleva a:

$$n_2(P_0 x_0^2) \approx \frac{1}{n_0 k_0^2} \quad (1.71)$$

Es de esperar que exista un valor en el que el efecto de ensanchamiento del haz por difracción se compense con el efecto no lineal Kerr. La existencia de la compensación da origen al solitón espacial en un material con no linealidad Kerr, la solución de tipo solitón [15-18] se espera de la forma:

$$A(X, Z) = V(X) \exp(-i\Upsilon(X, Z)) \quad (1.72)$$

propuesta como una analogía entre los modos de los sistemas lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos no lineales en 1971, por Vladimir E. Zakharov y Aleksei B. Shabat (Con base en su experiencia con la Ecuación de Schrödinger) [31]. La NLSE suele ser estudiada con el método de dispersión inversa admitiendo soluciones estacionarias del tipo solitón, tanto en el régimen de autoenfocamiento ($n_2 > 0$) como en el de autodesenfocamiento ($n_2 < 0$).

Capítulo 2

Solitones Ópticos

El solitón refiere a un fenómeno natural que ocurre bajo ciertos mecanismos de diversa naturaleza (mecánica [8], fluidica [11], óptica, entre otras [14]). Dar una definición precisa es complicado, pero generalmente el término se asocia con cualquier solución de una ecuación no lineal [26] que

1. Representa una onda cuya forma no se modifica.
2. Interactuar fuertemente con otros solitones y conservar su identidad.

Es decir, un solitón es un paquete de onda localizado, consecuencia de una cancelación de efectos no lineales y disipativos en un medio [15, 24]. Al hecho de que pueden interactuar fuertemente y continuar casi sin cambios, es lo que llevo al nombre solitón, acuñado por Zabusky y Kruskal [11]. En términos más estrictos si una onda se autoatrapa y además posee un comportamiento de tipo partícula, entonces se denomina solitón [16].

Hay una amplia gama de ecuaciones diferenciales parciales no lineales (alrededor de cien) que describen sistemas físicos las más importantes son:

- La ecuación de Korteweg-de Vries mejor conocida como ecuación KdV que explica ondas en superficies de aguas poco profundas [10, 26].
- La ecuación Sine-Gordon utilizada en la descripción de pulsos ultra cortos [27] y en la teoría cuántica de campos [28].
- La ecuación no lineal de Schrödinger que describe solitones ópticos [15-17, 29].

Existen muchas variedades de solitones ópticos que dependen de distintos efectos, aquí se mencionaran los más relevantes centrándose en los solitones ópticos espaciales por efecto Kerr.

2.1. Clasificación de solitones ópticos

Existe una amplia variedad de clasificación y subclasificación de solitones ópticos, pero se pueden definir tres clases principales, respecto a sus características físicas:

Solitones temporales

Los solitones ópticos temporales han sido ampliamente estudiados debido a su importancia en telecomunicaciones, son pulsos de luz en guías de ondas ópticas para los cuales los efectos no lineales y dispersivos se cancelan por lo que se propagan sin presentar distorsión en su perfil temporal y en su espectro de frecuencias sin importar la distancia [9, 15, 29], generalmente descritos por

$$i\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + ju^2u. \quad (2.1)$$

Solitones espaciales

Los solitones espaciales, son haces temporalmente continuos de luz cuyo perfil transversal de intensidad es invariante como consecuencia de la cancelación de la difracción con el efecto no lineal inducido en el material por un haz de luz láser, es decir haces autoguiados que se propagan sin presentar distorsión en ciertos medios ópticos. Pueden generarse en (1+1)D y en (1+2)D [14-16].

Solitones espacio-temporales

Los solitones espacio-temporales son estacionarios en espacio y en tiempo, donde contribuyen la dispersión, la difracción, pero el efecto no lineal no es el único que detiene la tendencia de las ondas al colapso, sino también otros procesos como la no linealidad cuadrática entre otros [30]. Actualmente sigue siendo un reto la generación de este tipo de solitones, la primera observación fue hecha por Liu et al. quienes observaron en (1+1+1)D.

2.2. Solitones ópticos espaciales

Como ya se comentó anteriormente los solitones ópticos espaciales son haces autoconfinados en medios volumétricos o en guías de onda plana, que se presentan cuando en un medio existe un efecto no lineal que es compensado por la difracción. Los solitones espaciales, al igual que los temporales tienen más subclasificaciones, aquí se mencionaran algunas que dependen del tipo de no linealidad:

■ *Solitones fotorrefractivos:*

Se producen en cristales fotorrefractivos que son dieléctricos electro-ópticos con impurezas fotosensibles en los cuales la propagación de la luz conduce a la generación de carga que, con el fin de alcanzar estabilidad, se redistribuye en todo el cristal, modificando el índice de refracción y cambiando la trayectoria de la luz ionizante.

La investigación de estos solitones comenzó con Segev et al. en 1992 y surgen si el mecanismo de retroalimentación carga-luz-espacio encuentra su punto de equilibrio dinámico, correspondiente a una distribución apropiada del índice de refracción similar a una guía de ondas [16].

■ *Solitones cuadráticos*

Estos consisten en ondas de múltiples frecuencias confinadas debido a no linealidades de segundo orden, pero a diferencia de otros solitones ópticos espaciales, el autoatrapamiento se debe a un rápido intercambio energético entre las ondas multifrecuencia que conserva la potencia y la amplitud espacial de los haces mutuamente estabilizados, una vez formado el solitón cesa el intercambio de energía y las envolventes de todas las ondas terminan enlazándose en fase [16].

■ *Solitones Kerr*

Para estos solitones el cambio del índice de refracción está relacionado linealmente con la intensidad del haz ($\Delta n = n_2 I$, donde I es la intensidad) y la respuesta del material es instantánea y local, su solución estable es en (1+1)D [16].

■ *Solitones tipo Kerr*

Son solitones que se basan básicamente en cualquier efecto físico que produzca un cambio en el índice de refracción pudiendo ser de origen electrónico, térmico u otro [16].

2.3. Solitones Ópticos Espaciales Kerr

Si bien los solitones Kerr son una clase muy restringida debido a los requisitos de geometría y no linealidad, el estudio de estos es importante para la comprensión de los solitones en general.

Los solitones ópticos espaciales Kerr son soluciones a la ecuación No Lineal de Schrödinger deducida en la sección 1.3.

$$i \frac{\partial A(X, Z)}{\partial Z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A(X, Z)}{\partial X^2} - \frac{L_D}{L_{NL}} j A(X, Z) j^2 A(X, Z). \quad (2.2)$$

CAPÍTULO 2. SOLITONES ÓPTICOS
2.3. SOLITONES ÓPTICOS ESPACIALES KERR

Para la formación de estos solitones hay varios puntos a considerar, pues si bien, es cierto que la compensación entre el efecto no lineal y la difracción es vital también hay que tomar en cuenta el signo del efecto Kerr, las condiciones iniciales y la relación que guarda la longitud de difracción L_D con la distancia característica de no linealidad L_{NL} , justo esta relación permite definir el parámetro:

$$N = \sqrt{\frac{L_D}{L_{NL}}} \quad (2.3)$$

Cuando $N=1$ se habla de solitones fundamentales en cambio si N es distinto de 1, pero es un entero, $N=2, 3, \dots$ las soluciones a la ecuación de Schrödinger son solitones de orden N , que constan de N solitones fundamentales que interactúan no linealmente en presencia de un potencial efectivo de atracción [18].

Dependiendo del signo de la no linealidad se define el tipo de solitón, es decir, si el efecto Kerr es positivo se obtienen solitones brillantes, pero si es negativo se tendrán solitones oscuros. En las siguientes secciones se muestra la obtención de las soluciones tipo solitón brillante y solitón oscuro a partir del método de dispersión inversa (Apéndice A), soluciones ideadas en base al trabajo de Vladimir E. Zakharov y Aleksei B. Shabat [31] en la década de los 70's y presentadas en [32, 33].

2.3.1. Solitones brillantes

Como ya se mencionó para generar solitones brillantes se necesita de un material Kerr positivo, para este tipo de materiales la Ec. (2.2) con $L_D/L_{NL} = 1$ es:

$$i \frac{\partial A(X, Z)}{\partial Z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A(X, Z)}{\partial X^2} + jA(X, Z)j^2 A(X, Z) \quad (2.4)$$

Primero se propone una solución, en este caso la ya mencionada en la sección 1.3.1, en la que se considera un perfil transversal de la forma:

$$A(X, Z) = V(X) \exp [i\Upsilon(X, Z)] \quad (2.5)$$

donde $V(X)$ y $\Upsilon(X, Z)$ son cantidades reales. Si se sustituye la solución propuesta (Ec. (2.5)) en la Ec. (2.4) (aquí se comienza a aplicar el método de dispersión inversa Apéndice A) se obtiene:

$$V(X) \frac{d\Upsilon(X, Z)}{dZ} - \frac{1}{2} \frac{d^2 V(X)}{dX^2} + i \frac{dV(X)}{dX} \frac{d\Upsilon(X, Z)}{dX} + i \frac{V(X)}{2} \frac{d^2 \Upsilon(X, Z)}{dX^2} + \frac{V(X)}{2} \left(\frac{d\Upsilon(X, Z)}{dX} \right)^2 - jV(X)j^2 V(X) = 0 \quad (2.6)$$

de la cual separando la parte real de la imaginaria se llega a dos ecuaciones diferenciales (estas nos permiten aplicar los datos de dispersión):

$$\frac{dV(X)}{dX} \frac{d\Upsilon(X, Z)}{dX} + \frac{V(X)}{2} \frac{d^2 \Upsilon(X, Z)}{dX^2} = 0 \quad (2.7)$$

$$V(X) \frac{d\Upsilon(X, Z)}{dZ} + \frac{V(X)}{2} \left(\frac{d\Upsilon(X, Z)}{dX} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2 V(X)}{dX^2} - jV(X)j^2 V(X) = 0 \quad (2.8)$$

Ahora analizamos la Ec. (2.7), la cual por ser una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden se espera que tenga una solución similar a:

$$\Upsilon(X, Z) = az + bx \quad (2.9)$$

donde a y b son números reales positivos, b representa el ángulo entre el eje z y la dirección de propagación, pero en este caso nos interesa que el haz se propague en z por lo que $b=0$, así que:

$$\Upsilon(X, Z) = az \quad (2.10)$$

Sin embargo, aún falta analizar la Ec. (2.8), pero como ya tenemos definido el comportamiento de $\Upsilon(X, Z)$ lo sustituimos y obtenemos:

$$\frac{d^2 V(X)}{dX^2} = 2aV(X) - 2jV(X)j^2 V(X) \quad (2.11)$$

Esta ecuación puede verse como la ecuación de movimiento de una partícula de masa unitaria, moviéndose en una dimensión bajo la acción del potencial:

$$U(V(X)) = \frac{1}{2} V^4(X) + aV^2(X) \quad (2.12)$$

Esta expresión muestra que si buscamos soluciones para $V(X)$ tipo “solitón”, es decir, soluciones localizadas y acotadas, y tales que $V(X) \neq 0$ cuando $X \rightarrow \pm\infty$, a debe ser positiva, ya que de lo contrario el potencial sería como en la Figura 2.1 (a) y $V(X)$ sería oscilatoria [32].

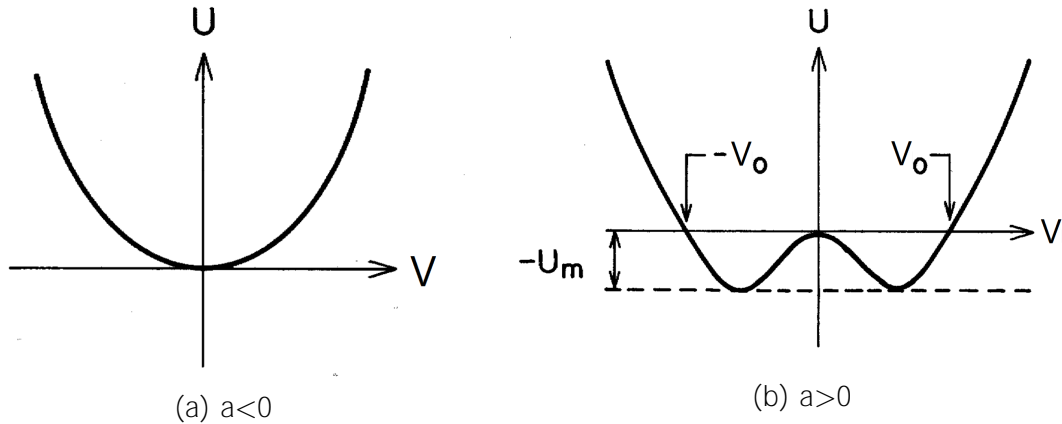


Figura 2.1: Comportamiento del potencial en un medio con no linealidad Kerr positiva [32].

Las características esenciales de la función $V(X)$ dependen de la energía total E de la partícula y solo en el caso en que $E = 0$, $V(X)$ ira desde $V = 0$ hasta un

CAPÍTULO 2. SOLITONES ÓPTICOS
2.3. SOLITONES ÓPTICOS ESPACIALES KERR

valor máximo V_0 o un valor mínimo $-V_0$ y luego regresara a $V = 0$. Para determinar la forma de la onda solitaria la Ec. (2.11) es multiplicada por $[dV(X)/dx]$ con lo que se puede ver como una ecuación de variables separable, la cual no conduce a la siguiente integral:

$$\int \frac{d^2V(X)}{dX^2} \frac{dV(X)}{dX} dX = 2 \int V(X) (a - V(X)^2) dV(X) \quad (2.13)$$

al integrar se llega a una ecuación de conservación de energía :

$$\left(\frac{dV(X)}{dX} \right)^2 - 2aV^2(X) + V^4(X) = E = 0 \quad (2.14)$$

Como $dV(X)/dX$ y $V(X)$ convergen cuando $|x| \rightarrow \infty$ tenemos que $V = \kappa$ y $dV(X)/dX=0$, condiciones que al sustituir en Ec. (2.14) nos llevan a definir:

$$a = \frac{\kappa^2}{2} \quad (2.15)$$

así la Ec. (2.10) que define el cambio de fase queda como:

$$\Upsilon(X, Z) = \frac{\kappa^2}{2} z \quad (2.16)$$

y la Ec. (2.14) ahora se puede escribir como:

$$\frac{dV(X)}{dX} = \sqrt{\kappa^2 V^2(X) - V^4(X)} \quad (2.17)$$

Lo que lleva a resolver la siguiente integral:

$$\int dX = \int \frac{dV(X)}{\sqrt{\kappa^2 V^2(X) - V^4(X)}} \quad (2.18)$$

Para lo cual consideramos $V = \kappa \sin \theta$, $dV = \kappa \cos \theta d\theta$

$$X = \frac{1}{\kappa} \int \csc \theta d\theta = \frac{1}{\kappa} \ln \left| \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right| = \frac{1}{\kappa} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - V^2(X)/\kappa^2}}{V(X)/\kappa} \right| \quad (2.19)$$

$$X = \frac{1}{\kappa} \operatorname{arcsech} \left(\frac{V(X)}{\kappa} \right) \quad (2.20)$$

Recordando que la función secante hiperbólica es par, es decir, $\operatorname{sech}(x) = \operatorname{sech}(-x)$, se concluye:

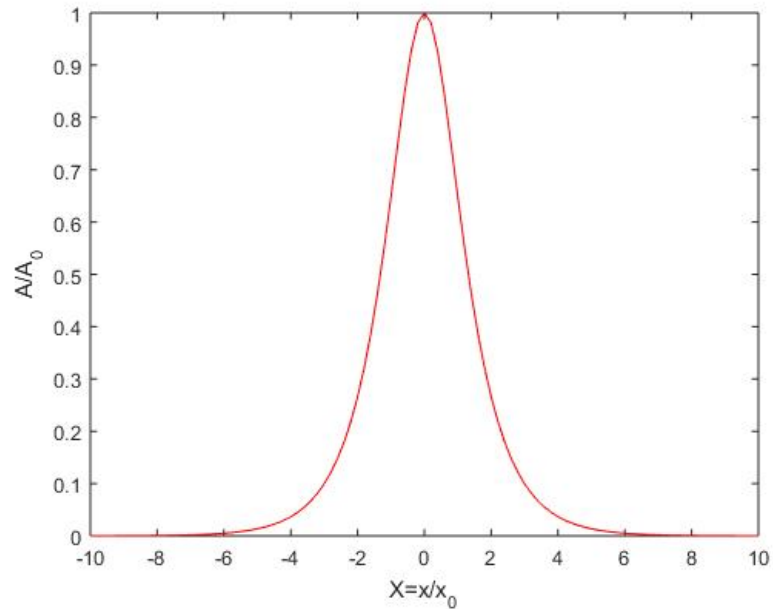
$$V(X) = \kappa \operatorname{sech}(\kappa X) \quad (2.21)$$

Con lo que finalmente se obtiene:

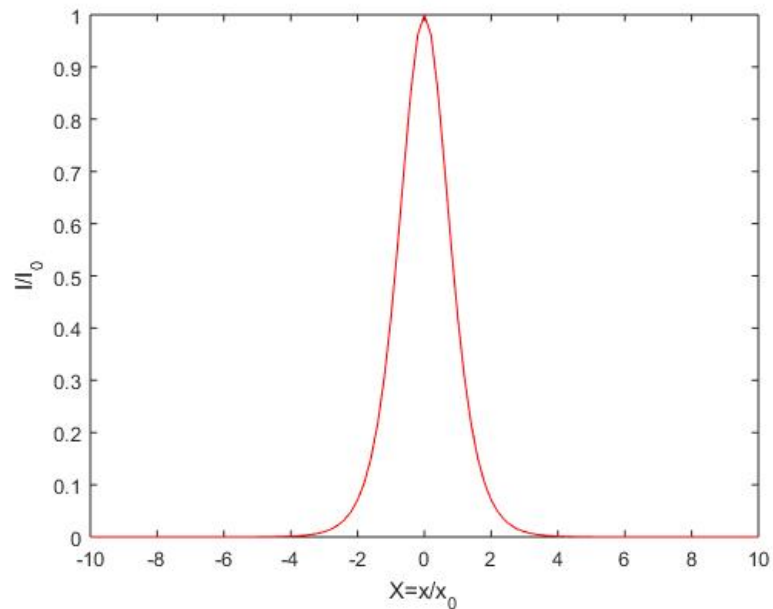
$$A(X, Z) = \kappa \operatorname{sech}(\kappa X) \exp(-i\kappa^2 Z/2) \quad (2.22)$$

CAPÍTULO 2. SOLITONES ÓPTICOS
2.3. SOLITONES ÓPTICOS ESPACIALES KERR

donde κ es un factor de escalamiento. Físicamente representa solitones espaciales brillantes que son haces cuya sección transversal no cambia con forma se propagan en el medio y las constantes requeridas experimentalmente para su generación satisfacen la ENLS [32, 34].



(a) Amplitud



(b) Intensidad

Figura 2.2: Perfil transversal del solitón brillante fundamental, Ec (2.22).

Para las soluciones de orden N el perfil transversal del haz evoluciona periódicamente a lo largo del eje de propagación, comprimiéndose, generando máximos locales y volviéndose a ensanchar, recuperando la forma $A(X, 0) = N\kappa \operatorname{sech}(\kappa X)$ cada $z = \pi L_D/2$ [18].

Cualquiera que sea su orden, los solitones que se generan en un medio Kerr positivo son llamados generalmente solitones espaciales brillantes.

2.3.2. Solitones oscuros

Para la generación de solitones oscuros fundamentales, también llamados solitones negros se requieren de un material con no linealidad Kerr negativa y que $L_D = L_{NL}$ ($N = 1$), para el cual la ENLS es:

$$i \frac{\partial A(X, Z)}{\partial Z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A(X, Z)}{\partial X^2} - \frac{L_D}{L_{NL}} j A(X, Z) j^2 A(X, Z) \quad (2.23)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que para solitones brillantes en lugar de la Ec. (2.11) se obtiene:

$$\frac{d^2 V(X)}{dX^2} = 2jV(X)j^2 V(X) - aV(X) \quad (2.24)$$

Y de manera análoga puede verse como la ecuación de movimiento de una partícula de masa unitaria, moviéndose en una dimensión bajo la acción del potencial:

$$U(V(X)) = \frac{1}{2} V^4(X) - aV^2(X) \quad (2.25)$$

Ecuación que nos dice que al igual que para los solitones brillantes a debe ser positiva, pues de no ser así el potencial sería como se muestra en la Figura 2.2 (a) y $V(X)$ crecería sin límite [32].

Las características esenciales de la función $V(X)$ también dependen de la energía total E y solo se describe a un solitón si $E = U_m$, con lo que $V(X)$ ira desde $-V_m$ hasta V_m , donde V_m son los valores en los que $U(V)$ es máxima. Para determinar la forma de la onda solitaria se toma la ecuación de conservación de energía a la cual se llega a partir de las Ecs. (2.23) y (2.24):

$$\left(\frac{dV(X)}{dX} \right)^2 + 2aV^2(X) - V^4(X) = E = \frac{a^2}{2} \quad (2.26)$$

Como $dV(X)/dX$ y $V(X)$ convergen cuando $x \rightarrow \pm \infty$ tenemos que $V = \pm \kappa$ en cambio cuando $x \rightarrow \pm \infty$ entonces $V = \pm \kappa e^{i\theta}$ y $dV(X)/dX=0$, condiciones que al sustituir en Ec. (2.25) nos llevan a definir:

$$a = \kappa^2 \quad (2.27)$$

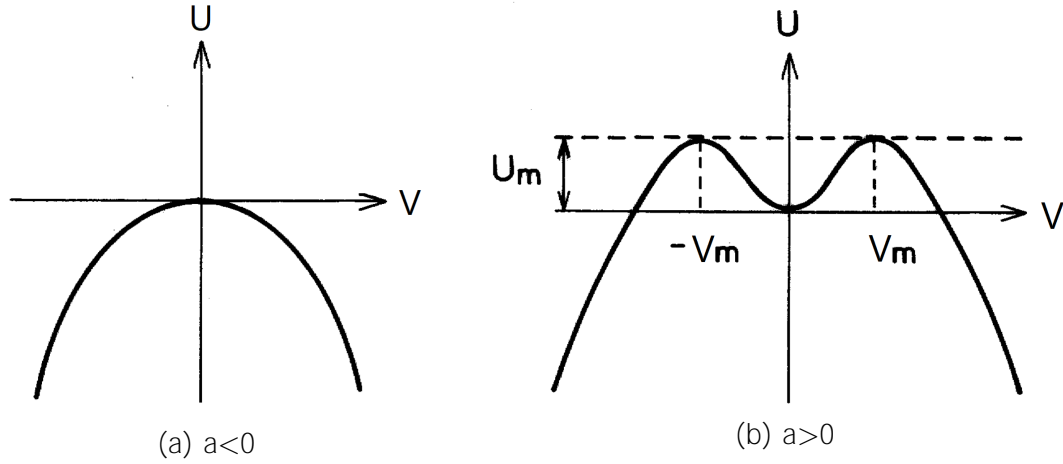


Figura 2.3: Comportamiento del potencial en un medio con no linealidad Kerr negativa [32].

así la ecuación que define el cambio de fase es:

$$\Upsilon(X, Z) = \kappa^2 z \quad (2.28)$$

y la Ec. (2.25) ahora se puede escribir como:

$$\frac{dV(X)}{dX} = (V^2(X) - \kappa^2) = (\kappa^2 - V^2(X)) \quad (2.29)$$

Que al resolver da:

$$V(X) = \kappa \tanh(\kappa X) \quad (2.30)$$

Sustituyendo la Ecs. (2.27) y (2.29) en la Ec. (2.5) se llega a:

$$A(X, Z) = \kappa \tanh(\kappa X) \exp(2i\kappa^2 Z/2) \quad (2.31)$$

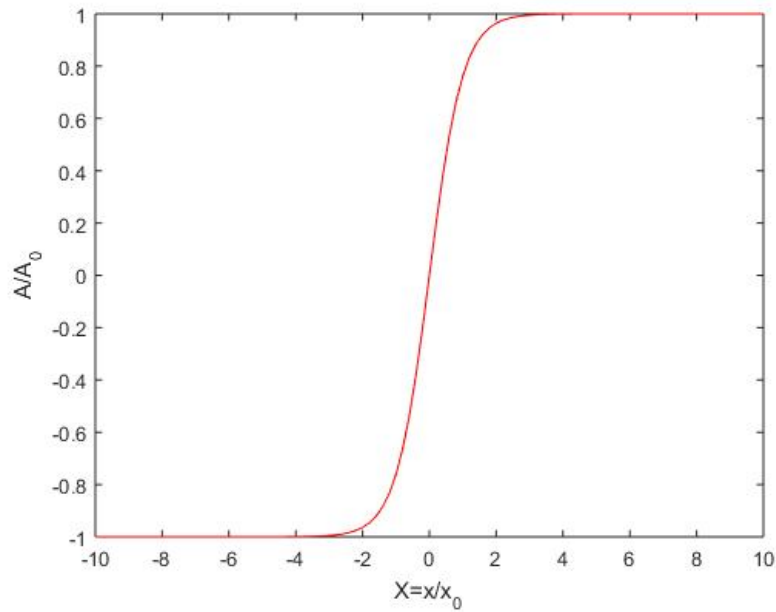
donde κ es el factor de escalamiento, esta expresión representa una región transversal oscura inmersa en un fondo uniforme [33, 34].

También existen solitones oscuros de órdenes mayores, pero, a diferencia del caso de los solitones brillantes, dos solitones fundamentales oscuros interfieren no linealmente entre sí bajo la influencia de un potencial efectivo de repulsión [34].

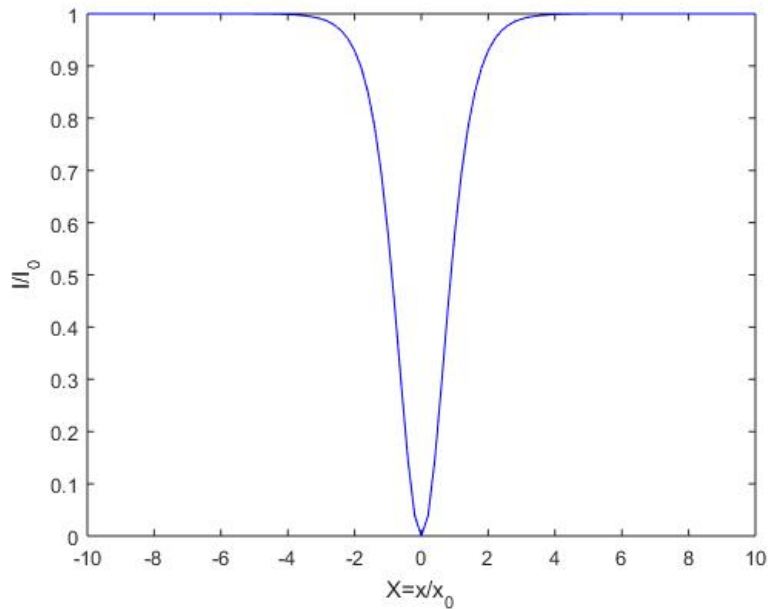
En consecuencia, cuando $L_D > L_{NL}$ se puede generar un solitón fundamental junto con solitones oscuros secundarios o solitones grises. Éstos se diferencian de los solitones negros en:

- El mínimo de intensidad: los solitones grises no alcanzan el cero.
- El cambio máximo de fase: a través de su centro el cambio máximo de fase no es de π radianes.

CAPÍTULO 2. SOLITONES ÓPTICOS
2.3. SOLITONES ÓPTICOS ESPACIALES KERR



(a) Amplitud



(b) Intensidad

Figura 2.4: Perfil transversal del solitón brillante fundamental.

- Propagación: los solitones grises no avanzan paralelamente al eje de propagación Z , sino formando un ángulo determinado con respecto a éste, a pesar de eso se mantiene inalterado su perfil transversal propio.

La expresión general para un solitón gris guarda la forma:

$$A(X, Z) = \kappa \frac{(\lambda + i\nu)^2 + \exp [2\nu\kappa(X + 2\lambda\kappa Z)]}{1 + \exp [2\nu\kappa(X + 2\lambda\kappa Z)]} \exp (2i\kappa^2 Z/2) \quad (2.32)$$

donde κ es el factor de forma, ν es el parámetro que caracteriza la anchura del solitón gris, además $1/\nu$, determina la profundidad de la región oscura y, por ende, su contraste, $\lambda^2 = 1 - \nu^2$.

El ángulo θ que el solitón gris forma con respecto al eje Z depende también del parámetro ν , relacionados por $\nu = \tan(\theta) = 2\lambda\kappa$. Con frecuencia, el parámetro ν de un solitón gris se llama en la literatura como su velocidad transversal [18].

2.4. Soluciones a la ENLS

Hasta ahora solo se ha hablado de cómo se obtuvieron las soluciones de solitón brillante y solitón oscuro ref. [32 y 33] pero no sé a demostrado que realmente cumplan la ENLS, por lo cual dedicamos esta sección a demostrar que son soluciones.

2.4.1. Solitón brillante de primer orden

Para demostrar que la ecuación de solitón brillante fundamental o de primer orden:

$$A(X, Z) = \kappa \operatorname{sech}(\kappa X) \exp(-i\kappa^2 Z/2) \quad (2.33)$$

es solución a la ENLS:

$$i \frac{\partial A(X, Z)}{\partial Z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A(X, Z)}{\partial X^2} - \frac{L_D}{L_{NL}} j A(X, Z) j^2 A(X, Z) \quad (2.34)$$

se sustituye en esta la Ec. (2.33), con lo que se obtiene la siguiente expresión:

$$i\kappa \operatorname{sech}(\kappa X) \frac{\partial \exp i\kappa^2 Z/2}{\partial Z} = \frac{1}{2} \kappa \exp i\kappa^2 Z/2 \frac{\partial^2 \operatorname{sech}(\kappa X)}{\partial X^2} - \frac{j\kappa \operatorname{sech}(\kappa X) j^2 \kappa \operatorname{sech}(\kappa X) \exp i\kappa^2 Z/2}{2} \quad (2.35)$$

que al ser derivada conduce a:

$$\operatorname{sech}(\kappa X) \exp i\kappa^2 Z/2 = \frac{1}{\kappa} \exp i\kappa^2 Z/2 \frac{\partial \operatorname{sech}(\kappa X) \tanh(\kappa X)}{\partial X} - \frac{2j \operatorname{sech}(\kappa X) j^2 \operatorname{sech}(\kappa X) \exp i\kappa^2 Z/2}{2} \quad (2.36)$$

$$\operatorname{sech}(\kappa X) = \tanh^2(\kappa X) \operatorname{sech}(\kappa X) - \frac{\operatorname{sech}^3(\kappa X)}{2 \operatorname{sech}^3(\kappa X)} \quad (2.37)$$

Analizando la Ec. (2.36) se puede notar que se tiene una solución solo si en la ENLS se considera el signo positivo (+), lo que lleva a

$$1 = \tanh^2(\kappa X) + \operatorname{sech}^2(\kappa X) \quad (2.38)$$

La cual es una identidad trigonométrica conocida, con lo cual se demuestra que la Ec. (2.32) es solución a la ENLS.

2.4.2. Solitón oscuro de primer orden

De forma análoga a lo hecho en la sección anterior se toma la ENLS (2.24) pero ahora se sustituye:

$$A(X, Z) = \kappa \tanh(\kappa X) \exp(2i\kappa^2 Z/2) \quad (2.39)$$

Así que ahora se obtiene la siguiente relación:

$$i\kappa \tanh(\kappa X) \frac{\partial \exp 2i\kappa^2 Z/2}{\partial Z} = \frac{1}{2} \kappa \exp 2i\kappa^2 Z/2 \frac{\partial^2 \tanh(\kappa X)}{\partial X^2} \quad (2.40)$$

$$j\kappa \tanh(\kappa X) \kappa \tanh(\kappa X) \exp 2i\kappa^2 Z/2$$

que al derivar:

$$2 \tanh(\kappa X) \exp 2i\kappa^2 Z/2 = \frac{1}{\kappa} \exp 2i\kappa^2 Z/2 \frac{\partial \operatorname{sech}^2(\kappa X)}{\partial X} \quad (2.41)$$

$$2j \tanh(\kappa X) \kappa \tanh(\kappa X) \exp 2i\kappa^2 Z/2$$

$$2 \tanh(\kappa X) = 2 \operatorname{sech}^2(\kappa X) \tanh(\kappa X) \quad 2 \tanh^3(\kappa X) \quad (2.42)$$

Al igual que en el caso para el solitón brillante hay dos casos a considerar, pero es solo cuando el signo es negativo (-) en la ENLS que se tiene una solución y obtenemos la misma identidad trigonométrica

$$1 = \tanh^2(\kappa X) + \operatorname{sech}^2(\kappa X) \quad (2.43)$$

Con lo cual se demuestra que la Ec. (2.30) es solución a la ENLS.

Capítulo 3

Estudio numérico

Muchos problemas en diversas áreas científicas son modelados matemáticamente en términos de ecuaciones en derivadas parciales, pero pocas poseen soluciones exactas; así que es natural pensar en el uso de métodos numéricos que lleven a soluciones aproximadas. Uno de los primeros problemas asignados a las computadoras fue la dinámica de la distribución de energía en un sistema mecánico ligeramente no lineal, por E. Fermi, S. Ulam y J. Pasta, el cual llevó a Norman Zabusky y Martin Kruskal a aproximarse al sistema resorte-masa no lineal mediante la ecuación KdV, redirigido para la propagación de ondas no lineales en un plasma sin colisión [25].

En 1965 informaron observaciones numéricas de que las ondas solitarias de KdV interaccionan sin cambios en la forma o velocidad, refiriendo a ellas con el término "solitón" [11]. Posteriormente cuando Vladimir Zakharov y Alexey Shabat demostraron que la Ecuación No Lineal de Schrödinger (ENLS) podía ser resuelta por el método de dispersión inversa presentando soluciones tipo solitón, el interés sobre los solitones aumentó y se comenzaron a buscar soluciones aproximadas a partir de métodos numéricos tales como el método explícito clásico, método de rayuela, método implícito-explícito, esquema implícito de Crank-Nicolson, el Ablowitz-Ladik esquema, el Método de Fourier de pasos divididos (F. Tappert), y Método pseudospectral (Fornberg y Whitham) [12].

El esquema numérico más utilizado para abordar la ENLS es el Método de Paso Dividido de Fourier, es empleado con el objetivo de mostrar como las soluciones analíticas presentadas en el capítulo anterior se propagan sin sufrir cambios en su perfil transversal, condición necesaria para que sean soluciones tipo solitón de la ENLS.

3.1. Método de Paso Dividido de Fourier

La técnica conocida como Paso Dividido de Fourier (o Split Step Fourier Method) fue el método numérico de análisis escogido en este trabajo para el estudio de la ENLS, debido a los antecedentes que tiene no solo en el área de las simulaciones de problemas de la óptica no-lineal [13] sino también en el análisis de diversos problemas de naturaleza ondulatoria [25].

Esa técnica es un método pseudoespectral debido a que representa la función por su valor en un conjunto discreto de puntos y además asume que la solución puede ser representada por un conjunto de funciones de prueba que forman un conjunto ortogonal que utiliza algoritmos altamente eficientes (Transformada Rápida de Fourier).

El método se basa en propagar una función a lo largo de una cierta distancia, la cual es dividida en n pasos. Cada paso es dividido en 2, en la primera mitad la función ve los efectos de difracción y en la segunda los efectos no lineales [26, 35-37]. Para esto, la ENLS se expresa en términos de operadores, es decir, como una ecuación general de evolución no lineal de forma:

$$i \frac{\partial A(X, Z)}{\partial Z} = (\hat{D} + \hat{N})A(X, Z) \quad (3.1)$$

Donde $\hat{D} = \partial^2/\partial X^2$ es el operador diferencial que describe la difracción y la absorción en el medio lineal, y $\hat{N} = L_D/L_{NL}jA^2$ es el operador no lineal. Para resolver el problema lo dividimos en dos partes.

La parte no lineal dada por:

$$i \frac{\partial A(X, Z)}{\partial Z} = \hat{N}A(X, Z) \quad (3.2)$$

El operador no lineal se toma como $\hat{N} = qjA(X, Z + \Delta Z)^2 - qjA(X, Z)^2$, donde $q = L_D/L_{NL}$, con lo que la solución está dada por

$$A(X, Z + \Delta Z) = \exp(i\Delta Z \hat{N})A(X, Z) = \exp(iq\Delta Z jA(X, Z)^2)A(X, Z) \quad (3.3)$$

De manera similar la parte lineal está dada por

$$i \frac{\partial A(X, Z)}{\partial Z} = \hat{D}A(X, Z) \quad (3.4)$$

con la diferencia de que no tiene coeficientes variables. Esta se resolverá en el intervalo $[Z, Z + \Delta Z]$ y usará a $u(x, Z + \Delta Z)$ como la condición inicial. Una solución analítica a esta ecuación puede ser tomando al aplicar la Transformada de Fourier:

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial Z} = iF\left(\frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial X^2}\right) = -ik^2 \hat{A} \quad (3.5)$$

Aquí se utilizan las siguientes definiciones de transformada y transformada inversa de Fourier:

$$\hat{h}(k) = F(h) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{2\pi i k x} dx \quad (3.6)$$

$$h(x) = F^{-1}(\hat{h}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(k) e^{-2\pi i k x} dk \quad (3.7)$$

Las derivadas parciales se han eliminado y la ecuación se convierte en una ecuación diferencial ordinaria, con lo que la solución analítica se puede calcular y el valor de $A(X, Z + \Delta Z)$ viene dado por

$$\hat{A}(k, Z + \Delta Z) = \exp(-ik^2 \Delta Z) \hat{A}(k, Z) \quad (3.8)$$

La solución en el dominio x se puede calcular con la Transformada inversa de Fourier:

$$A(X, Z + \Delta Z) = F^{-1} \left(\exp(-ik^2 \Delta Z) \hat{A}(k, Z + \Delta Z) \right) \quad (3.9)$$

El procedimiento completo se puede establecer en una sola ecuación que unifica la parte lineal y no lineal:

$$A(X, Z + \Delta Z) = F^{-1} \left[\exp(-i\Delta Z \hat{D}) F \left(\exp(-i\Delta Z \hat{N}) A(X, Z) \right) \right] \quad (3.10)$$

La esencia del Método de Paso Dividido de Fourier es avanzar en z aplicando a medio paso la parte no lineal y lineal (\hat{D} y \hat{N}) uno a la vez para completar cada paso de z [36].

3.2. Algoritmo

Ahora se discutirá la implementación del Método de Paso Dividido de Fourier. El lenguaje de programación utilizado para la implementación de este método es MATLAB, debido a la facilidad con la que se manipulan las operaciones de matrices, además del análogo discreto de la Transformada de Fourier y su inverso, es decir, la Transformada Discreta de Fourier (FDT) y la Transformada Discreta de Fourier Inversa (IFDT) con lo cual es posible resolver la ecuación de propagación de un campo óptico en un medio lineal y no lineal con respuesta Kerr.

Para resolver $A^{(n)}$ primero se multiplica por $\exp(i\Delta Z \hat{N})$ con lo cual la onda se ha sufrido el efecto no lineal, considera que se ha dado medio paso por lo cual se representa $A^{(n+1/2)}$, luego se toma su Transformadas de Fourier, por lo que ahora tenemos $\hat{A}^{(n+1/2)}$, para que la onda sufra el efecto lineal que es aplicado al multiplicar por $\exp(-i\Delta Z \hat{L}) \hat{A}^{(n+1/2)}$ con lo que ahora se ha completado el paso pero en el espacio de Fourier por lo cual se representa como $\hat{A}^{(n+1)}$ y finalmente para regresar al

3.3. CÓDIGO PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE PASO DIVIDIDO DE FOURIER EN LA ENLS

espacio físico se aplica la Inversa de su Transformada de Fourier obteniendo $A^{(n+1)}$. En el lenguaje de una computadora, $A^{(n)}$ es un vector que se actualiza primero multiplicándolo por el exponencial. El algoritmo siguiente muestra cómo irá este procedimiento:

```

A(n) = A0
k = 2π/L (-N/2 : 1 : N/2 - 1)
for n = 1 to M do
    A(n+1/2) = exp(iΔZŇ)A(n)
    Â(n+1/2) = F(A(n+1/2))
    Â(n+1) = exp(-iΔZĤ)Â(n+1/2)
    A(n+1) = F-1Â(n+1)
    A(n) = A(n+1)
end
return A(n)

```

Algorithm 1: Método de Paso Dividido de Fourier para la Ecuación No Lineal de Schrödinger

3.3. Código para la aplicación del Método de Paso Dividido de Fourier en la ENLS

Parámetros generales

Aquí se definen todos los parámetros necesarios de la ENLS, mencionados en la sección 1.3:

```

%% Parámetros generales
x= 10:0.1:10; % Eje x
x0=0.5; % Ancho inicial
X=x/x0; % Eje x respecto al ancho inicial
n0=1.2; % Índice de refracción lineal
pi=3.14159265;
lamda=633d 9; % Longitud de onda
k0=2 pi/lamda; % Numero de onda en el vacío
LD=n0 k0 x0^2; % Distancia de difracción
zfinal=10 LD; % Distancia total en el eje z
z=zfinal/LD; % Distancia total normalizada
kappa=1;
Z=1; % Punto inicial en el eje Z normalizado
m=1;

```

CAPÍTULO 3. ESTUDIO NUMÉRICO
3.3. CÓDIGO PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE PASO DIVIDIDO
DE FOURIER EN LA ENLS

κ se define igual a 1 con el objetivo de obtener una intensidad normalizada ($\frac{I}{I_0}$) respecto a la intensidad máxima (I_0), la longitud de no linealidad L_{NL} no es definida debido a que estamos considerando solitones fundamentales por lo que $L_{NL} = L_D$ con lo que $N=1$, los parámetros definidos tal como la longitud de onda, el ancho inicial del haz y el índice de refracción lineal son arbitrarios.

Función inicial

Esta parte del programa es donde se define la función a propagar, y en este trabajo de tesis son de interés los dos casos fundamentales:

- Solitón Brillante

```
u = sech(x) exp(1i Z/2); % Condición inicial
subplot(3,2,1); % Gráfica del perfil inicial
plot(X, abs(u).^2, 'b'); % Intensidad respecto a
                        % posición
xlabel('X=x/x0');
ylabel('I/I0');
grid on;
hold on;
```

La condición inicial es establecida a partir de la Ec. (2.22) que describe la envolvente compleja del solitón brillante.

- Solitón Oscuro

```
u = tanh(x) exp(1i Z); % Condición inicial
subplot(3,2,1); % Gráfica del perfil inicial
plot(X, abs(u).^2, 'b'); % Intensidad respecto a
                        % posición
xlabel('X=x/x0');
ylabel('I/I0');
grid on;
hold on;
```

La envolvente compleja del solitón oscuro es definida por la Ec. (2.31) a partir de la cual se establece la condición inicial para este caso.

CAPÍTULO 3. ESTUDIO NUMÉRICO
3.3. CÓDIGO PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE PASO DIVIDIDO
DE FOURIER EN LA ENLS

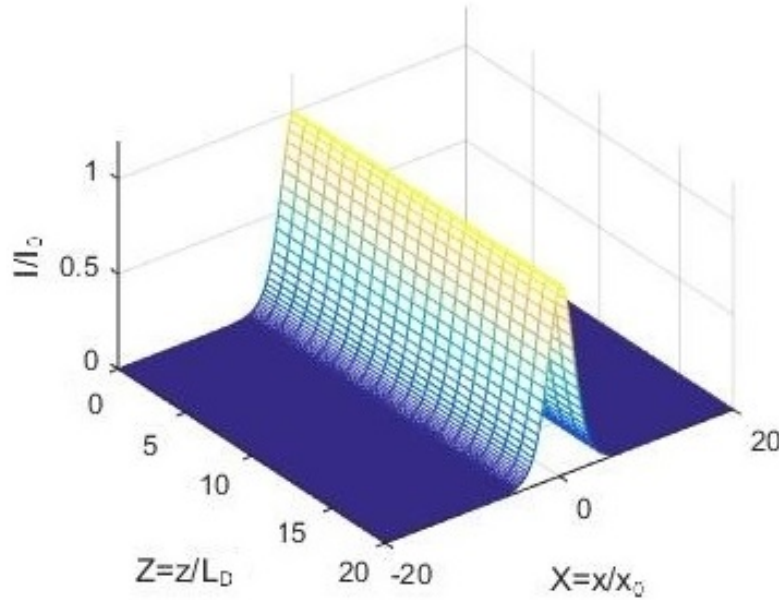
Aplicación del algoritmo

Está es la parte central del código pues es justo dónde se aplica el método de Paso Dividido de Fourier, tal como se explicó en la sección anterior

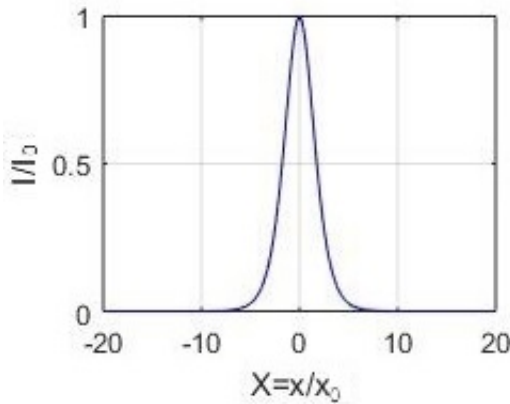
```
%% Ecuación de No Lineal Schrödinger
for Z=1:1:z % Define 3l número de veces que se aplicará la
           % ENLS mediante el método de paso Dividido de
           % Fourier
    u = exp( LD 1i (abs(u). abs(u))). u; % Resuelve la
                                       % parte no lineal
                                       % de NLSE
    c = fftshift(fft(u)); % Transformada de
                          % Fourier
    c = exp(LD 1i k0 k0/2). c; % Avanza en el espacio de
                              % Fourier
    u = ifft(fftshift(c)); % Regresa al espacio físico
    au(m,:)=abs(u).^2; % Guarda cada paso de la propagación
                     % de u en Z
    m=m+1;
end
% La última parte del código es graficar lo obtenido
subplot(3,2,2); % Gráfica del perfil transversal de
                % intensidad después de la propagación
plot(X, abs(u).^2, 'r');
xlabel('X=x/x0');
ylabel('I/I0');
grid on;
hold on;
subplot(3,1,3); % Grafica de la propagación de u en Z
mesh(au(1:1:m 1,:));
set(gca, 'DataAspectRatio', [100 3 0.7]);
xlabel('X=x/x0');
zlabel('I/I0');
grid on;
hold on;
```

3.4. Simulación

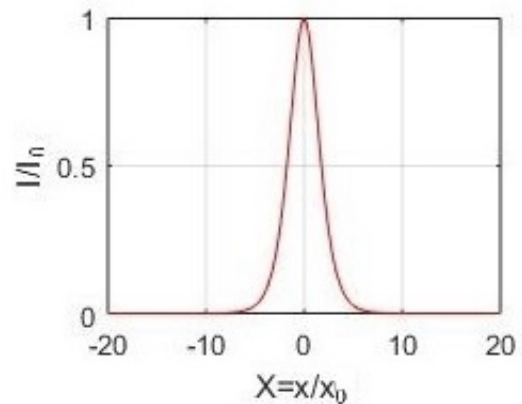
Las siguientes gráficas muestran que las ecuaciones de solitón brillante y oscuro obtenidas en el Capítulo 2 se propagan si sufrir cambios en su perfil transversal.



(a) Propagación del solitón brillante



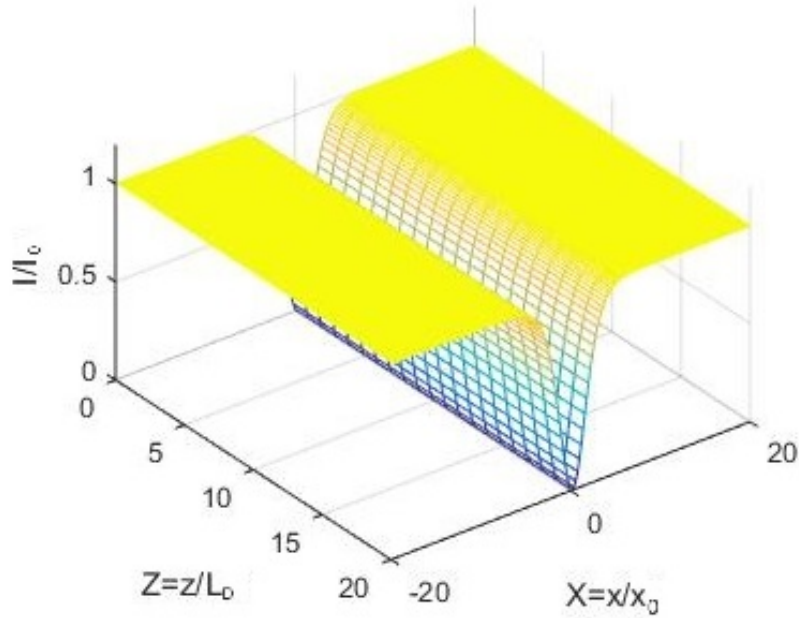
(b) $Z=0$



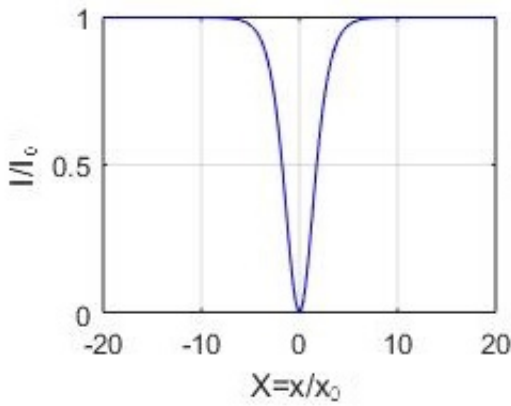
(c) $Z = 20L_D$

Figura 3.1: Generación numérica de un solitón brillante fundamental propagándose $20 L_D$, (b) en azul se muestra el perfil transversal de intensidad a la entrada y (c) en rojo a la salida.

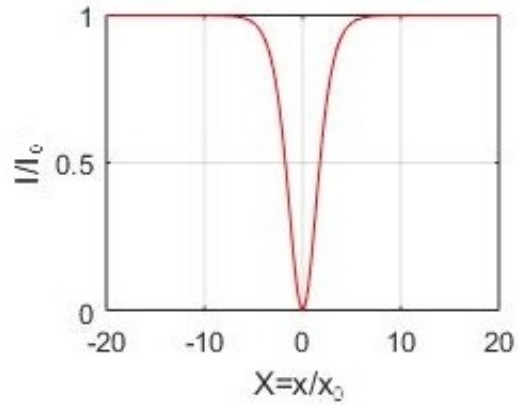
En el caso para el solitón brillante cuya amplitud compleja es $A(X, Z) = \kappa \operatorname{sech}(\kappa X) \exp(-i\kappa^2 Z/2)$ la difracción y el efecto no lineal de autoenfoco se compensan por lo que no se presenta difracción ni autoenfocamiento.



(a) Propagación del solitón oscuro.



(b) $Z=0$



(c) $Z = 20L_D$

Figura 3.2: Generación numérica de un solitón oscuro fundamental propagándose $10 L_D$, b) en azul se muestra el perfil transversal de intensidad a la entrada y c) en rojo a la salida.

De forma similar en el caso de solitón oscuro con amplitud compleja $A(X, Z) = \kappa \tanh(\kappa X) \exp(2i\kappa^2 Z/2)$ se observa en la gráfica de propagación que el perfil transversal de intensidad no sufre modificación, pero aquí se debe a la compensación entre la difracción y el autodesenfocamiento.

Capítulo 4

Conclusiones

Los solitones ópticos debido a sus características físicas son clasificados, principalmente, en solitones temporales, solitones espaciales y solitones espacio-temporales. Los solitones ópticos espaciales son haces autoguiados confinados en las direcciones transversales ortogonales a la dirección de propagación consecuencia de la compensación del efecto de difracción con un efecto no lineal (efecto Kerr).

Los efectos no lineales son consecuencia de la interacción entre luz de alta intensidad y el medio en el que se propaga, específicamente el efecto Kerr consiste en la modificación del índice de refracción como consecuencia de la intensidad y el cambio puede ser negativo o positivo induciendo autoenfocamiento a autodesenfocamiento.

La ecuación de Helmholtz describe la propagación de ondas electromagnéticas en un medio cuya componente temporal es armónica, mientras que la ecuación Paraxial de Helmholtz describe una onda modulada cuya envolvente varía lentamente y además es temporalmente armónica.

La Ecuación No Lineal de Schrödinger y la Ecuación Lineal de Schrödinger representa ecuaciones diferenciales complejas cuya única diferencia es presente en el término fuente, en la ecuación lineal es un potencial definido por algo externo mientras que en la ecuación no lineal este término fuente es dado por la excitación del material debido a la presencia de la onda, para el caso de no linealidad Kerr la Ecuación No Lineal de Schrödinger tiene un comportamiento similar al caso dispersivo en la ecuación lineal y es debido al parecido que V. E. Zakharov y A. B. Shabat [31] propusieron una solución.

La solución a la Ecuación No Lineal de Schrödinger es la envolvente compleja, una función de posición que varía lentamente, de una onda modulada que se propaga a lo largo de la dirección z y cuya componente temporal es armónica.

La Ecuación No Lineal de Schrödinger describe el comportamiento de la luz en un medio Kerr, representando el efecto de difracción natural en la luz, el efecto no

lineal y la relación que guardan ambos efectos a partir de la longitud de difracción (L_D) y la distancia característica de no linealidad (L_{NL}).

El método de dispersión inversa es un método de descomposición que proporciona una analogía entre los modos de los sistemas lineales no homogéneos y los de los sistemas homogéneos no lineales.

El método de dispersión inversa permite la obtención de soluciones a la ENLS, para el caso espacial que describe haces temporalmente continuos cuyo perfil transversal de intensidad es invariante, obtenidas por A. Hasegawa y F. Tappert [32, 33] para el caso temporal.

Los solitones ópticos espaciales se clasifican en solitones brillantes y solitones oscuros, aunque hay variaciones de estos de orden N y para el caso de los solitones oscuros se denominan solitones grises.

Para el caso del solitón brillante, la difracción se compensa con el efecto no lineal de autoenfocamiento teniendo el índice de refracción menor en las orillas por lo que se tiene un haz con mayor intensidad en el centro y representado por la función secante hiperbólico.

Para el caso del solitón oscuro la difracción se compensa con el efecto de auto-desenfocamiento obteniendo un menor índice de refracción en el centro por lo que se tiene un haz con menor o nula intensidad en este punto, representado por la función tangente hiperbólica.

El Método de Paso Dividido de Fourier (o Split Step Fourier Method) permite el análisis seccional de la Ecuación No Lineal de Schrödinger y debido a la utilización de la transformada de Fourier y su inversa el procedimiento es sencillo.

La implementación numéricamente de la ecuación de Schrödinger No Lineal empleando el método de Paso Dividido de Fourier en el lenguaje de programación MATLAB permite ilustrar el comportamiento de los solitones brillantes y oscuros de orden $N=1$ al propagarse en un medio Kerr, entre mayor sea Z (mayor cantidad de pasos) se tendrá una mejor aproximación a lo que sucede en un medio.

Apéndice A

Método de Dispersión Inversa

El método de Dispersión Inversa es el más general (el único que permite en principio hallar la solución a partir de datos iniciales arbitrarios), que da información sobre las propiedades de las ecuaciones a las que es aplicable [38, 39]. El método puede verse desde perspectivas diferentes:

Como generalización no lineal de la transformación de Fourier:

En esta interpretación se hace corresponder la solución inicial con determinados "datos de dispersión" (estados ligados y coeficiente de reflexión) de una ecuación lineal asociada, para posteriormente evolucionar en el tiempo dichos datos de acuerdo con otra ecuación y finalmente reconstruir la función para un valor de t arbitrario a partir de esos datos (de ahí el nombre del método).

Es esta perspectiva la que se utiliza en este trabajo de tesis, donde la idea fundamental es usar el hecho de que es posible asociar con la ecuación no lineal a resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales lineales de primer orden con las cuales una solución de la ecuación se conecta directamente como un potencial, esto es establecer una analogía con la Ecuación de Schrödinger, en la que un potencial refleja las ondas:

$$i \frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} + V(x)u \quad (\text{A.1})$$

Cuando se conoce el potencial, podemos, utilizando métodos conocidos, calcular el número de estados localizados y sus energías, y los coeficientes de reflexión y transmisión, datos a los que llamamos de dispersión.

El método inverso de dispersión se basa en cálculos de un potencial que está contenido en la Ecuación de Schrödinger a partir de los datos de dispersión conocidos. Conociendo la ecuación a resolver y la condición inicial, conocemos el potencial en $t = 0$ en el problema lineal asociado. Utilizando el método directo de dispersión

APÉNDICE A. MÉTODO DE DISPERSIÓN INVERSA

encontramos los datos de dispersión correspondientes al potencial en $t = 0$. Encontraremos ecuaciones que determinan el desarrollo de la variable t de los datos de dispersión, y posteriormente los datos de dispersión para t arbitrario $t > 0$ [36, 37].

Conociendo los datos de dispersión en $t > 0$ encontraremos el potencial, que es como un problema lineal directamente conectado con una solución de la ecuación, de esta manera, la solución de un problema de valor inicial no lineal se reduce a cálculos lineales. [25]

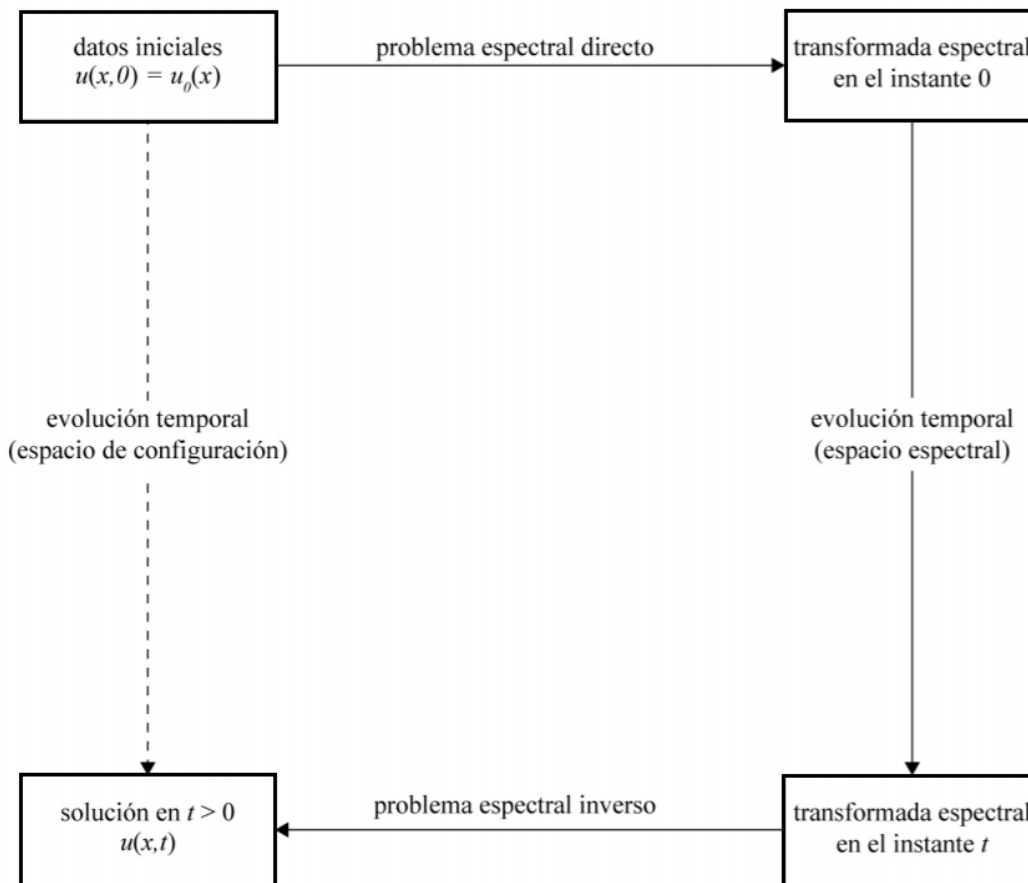


Figura A.1: Métodos de solución para una ecuación evolutiva no lineal. [40]

Como aplicación canónica de la solución general de una ecuación en un conjunto de variables de tipo acción-ángulo, hecha posible por ser la ecuación de un sistema Hamiltoniano completamente integrable [38]:

Esta interpretación es la debida a Zakharov y Fadeev [41], la correspondencia entre solución y datos de scattering es considerada como una transformación canónica desde el Hamiltoniano inicial (no lineal) a una forma del tipo acción-ángulo trivialmente integrable. Donde se espera que los sistemas más generales puedan manejarse mediante el mismo mapa canónico siempre que las relaciones correspondientes sean aún integrables [39].

Como problema de invariancia del espectro de un operador bajo transformaciones unitarias [38]:

Esta última interpretación debida a Lax [42], dado una pareja de operador L y M funciones de $u(x, t)$ (una solución a la ecuación diferencial parcial no lineal bajo investigación) y de los operadores de derivación, tales que la igualdad

$$L_t = [M, L] = ML - LM \tag{A.2}$$

sea precisamente la ecuación diferencial investigada, con lo cual dicha ecuación puede ser considerada como una condición para la equivalencia unitaria de los operadores $L(0)$ y $L(t)$.

Para tener un panorama general, supongamos que tenemos un operador de este tipo, relacionado con la ecuación no lineal

$$u_t = N(u) \tag{A.3}$$

que debe resolverse para la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x). \tag{A.4}$$

Para ello, se puede proceder de la siguiente manera:

1. Calcule los datos de dispersión para el operador L en $t = 0$ desde $u(x, 0)$.
2. Utilice el operador M para determinar la evolución en el tiempo de estos datos de dispersión.
3. A partir del conocimiento de los datos de dispersión en $t > 0$, encuentre $u(x, t)$, utilizando un cálculo de dispersión inverso para el operador L .

Con lo que la solución de un problema de valor inicial no lineal se reduce a los tres cálculos lineales enumerados anteriormente [39].

Bibliografía

- [1] Hecht , E. (2000). *Óptica*. Madrid: Addison Wesley Iberoamericana.
- [2] Cetto, A. M. (1996). *La Luz en la Naturaleza y en el Laboratorio*. México, D. F.: Fondo de Cultura Económica.
- [3] Berry, M. V. (2015). Nature's optics and our understanding of light. *Contemporary Physics*, Vol. 56, No. 1, pp. 2–16.
- [4] Saleh, B. E. A. & Teich, M. C. (2007). *Fundamentals of Photonics*. Hoboken, New Jersey: John Wiley Amp; Sons, Inc.
- [5] Boyd, R. W. (2008). *Nonlinear Optics*. Florida, USA: Academic Press.
- [6] Chávez, S., Ibarra, B., Iturbe, M. D., Kuzin, E., Korneev, N., Ramos, R. & Treviño, C. G. (octubre-diciembre 2003). Controlando luz con luz. *Ciencia*, Vol. 54, No. 4, pp. 56-65
- [7] Giordmaine, J. A. (1969). Nonlinear optics. *Physics Today*, Vol. 22, pp. 38-44.
- [8] Russell, J.S. 1844. *Report on Waves*, 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London: BAAS
- [9] Agüero, M., Fujioka, J. & Ceciliano, L. (2002, julio). La antisolidad de la onda solitaria. *Ciencia Ergo Sum*, Vol. 9, No. 2, pp. 197-201.
- [10] Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal M. D. & Miura, R. M. (1974). The Korteweg-de Vries equations and generalizations VI. Methods for exact solution. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. Vol. 27, pp. 97-133.
- [11] Zabusky, N. J. & Kruskal, M. D. (1965, Agosto). Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, Vol. 15, No. 6, pp. 240-243.
- [12] Taha, H. R., & Ablowitz, M. J. (1984). Analytical and Numerical Aspects of Certain Nonlinear Evolution Equations. II. Numerical, Nonlinear Schrödinger Equation. *Journal of Computational Physics*, Vol. 55, pp. 203-230.

- [13] Balac, S. & Mahé, F. (2015). An Embedded Split-Step method for solving the nonlinear Schrodinger equation in optics. *Submitted to Journal of Computational Physics*. Vol. 280 pp. 295-305.
- [14] López, S., Esparza, M., Lem-Carrillo, G. & Gutiérrez, J. C. (2014). Ondas solitarias no lineales: una introducción a los solitones ópticos espaciales. *Revista Mexicana de Física*. Vol. 60 pp. 39–50.
- [15] Kivshar, Y. S., & Agrawal G. (2003). *Optical Solitons from Fibers to Photonic Crystals*. Academic Press: California, USA.
- [16] Trillo, S., & Torruellas, W. (2001). *Spatial solitons*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg: New York.
- [17] Snyder, A. W. & Mitchell, D. J. (1997, Junio). Accessible Solitons. *Science*, Vol. 276, pp. 1538-1541.
- [18] Torres, G. E., Sánchez, J.J., Iturbe, M.D., García, G.S., Torres, M., & Treviño, C. (1995). Guías de onda generadas por solitones ópticos espaciales, *Revista Mexicana de Física*, Vol. 41. No. 5, pp. 662-694.
- [19] Landsberg, G. S. (1983). *Óptica 1*. Moscú: MIR.
- [20] Mohebi, Mehrdad (1994). *Nonlinear optics*. Edición de Notas de Curso. Comunicaciones académicas, Serie Óptica: CICESE.
- [21] Ersoy, Okan K. (2007). *Diffraction, Fourier Optics and Imaging*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- [22] Landsberg, G. (1976). *Óptica II*. Moscú: MIR.
- [23] Qi, P., Zhang, L., Lin, L., Zhang, N., Wang, Y. & Liu, W. (2018). Critical power for self-focusing of optical beam in absorbing media. *Laser Physics*, Vol. 28 , pp. 6.
- [24] Fibich, G. & Gaeta, A. L. (2000, Marzo). Critical power for self-focusing in bulk media and in hollow waveguides. *Optics Letters*, Vol. 25, No. 5, pp 335- 337.
- [25] Scott, Alwyn (2003). *Nonlinear Science Emergence and Dynamics of Coherent Structures*. New York, USA: Oxford University Press.
- [26] Drazin, P. G. & Johnson, R. S. (1989). *Solitons: an introduction*. New York, USA: Cambridge University Press.
- [27] Soto-Crespo, J. M. & Mejía-Cortés, C. (2011). Solitones ópticos en medios disipativos. *Óptica Pura y Aplicada*, Vol. 44 No. 3, pp. 425-431.

- [28] Hernández Palmero, I. & De la Torre Mayado, M. (2014). *La Ecuación de Sine-Gordon en la Teoría Cuántica de Campos: Teoría de Perturbaciones* (Tesis de Doctorado). Universidad de Salamanca, España.
- [29] Mollenauer, L. F. & Gordon, J. P. (2006). *Solitons in Optical Fibers Fundamentals and Applications*. USA: Elsevier Academic Press.
- [30] Liu, X., Qian, L. & Wise F. (1999). Generation of optical spatiotemporal solitons. *Physical Review Letters* Vol. 82, pp. 4631.
- [31] Zakharov, V. E. & Shabat, A. B. (1971, julio). Exact theory of two dimensional self-focusing and onedimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, Vol. 61, pp. 118-134.
- [32] Hasegawa A. & Tappert, F. (1973). Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. *Applied Physics Letter*, Vol. 23, pp. 124.
- [33] Hasegawa, A. & Tappert, F. (1973, Agosto 15). Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion. *Applied Physics Letter*, Vol. 23 No. 4, pp 171.
- [34] Fujioka Rojas, J. (2003). *NLS: Una introducción a la ecuación no lineal de Schrödinger*. UNAM: Serie FENOMECC.
- [35] Wartak, Marek S. (2013). *Computational Photonics an Introduction with MATLAB*. United States of America: Cambridge University Press.
- [36] Suarez, P. U. (2013). *An introduction to the Split Step Fourier Method using MATLAB*. Enero 23, 2019, de Delaware State University Sitio web: https://www.researchgate.net/publication/281441538_An_introduction_to_the_Split_Step_Fourier_Method_using_MATLAB
- [37] Ping Shum, Siu Fung Yu, & Chao Lu. (2000, julio). Nonlinear soliton propagation by use of the split-step reconstruction technique. *Applied Optics*, Vol. 39, No. 21 , pp. 3632-3637.
- [38] Álvarez-Estrada, R. F. & al. (1978). *Ecuaciones de onda no lineales: Técnicas Matemáticas*. Madrid: Cátedra de Física Teórica de la Facultad de Ciencias Físicas de la U.C.M.
- [39] Moser, J. (1975). *Lecture Notes in Physics: Dynamical Systems, Theory and Applications*. Berlín, Heidelberg, New York : Springer-Verlag.
- [40] Fuentes Aguilar, J. (2016). *Soluciones Exactas y Numéricas del Sistema Schrödinger-Poisson* (Tesis de Maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México.

- [41] Zakharov, V. E. & Faddeev, L. D. (1971, June 14). Korteweg-De Vries Equation: A Completely Integrable Hamiltonian System. *Funktsionalnyi Analiz i Ego Prilozheniya*, Vol. 5, No. 4, pp. 18-27.
- [42] Lax, Peter D. . (1968). Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves*. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. XXI, pp. 467-490 .