Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN ACTUARÍA

Simulación Monte Carlo aplicada al cálculo actuarial.

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN ACTUARÍA

PRESENTA
JESÚS GABRIEL MONFIL BONILLA

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ RAÚL CASTRO ESPARZA

PUEBLA, PUE. NOVIEMBRE 2018

¿De cuántas infamias
se compone un éxito?

- *Honoré de Balzac*

A Gabriel y Agustina.

Agradecimientos

Gracias al azar y a la vida misma por situarme en el perfecto tiempo.

Gracias a mi padre por su amor sincero, furioso, apasionado y loco; es a ti a quien debo lo que soy o lo que un día seré. Has sido mi figura devota desde mi primer y última memoria. Tú has sido mi vida, mi anhelo, mi mañana y mis ganas.

Gracias a mi madre por el eterno cobijo, gracias por aquellas duras exigencias, gracias por formarme como estudiante, hijo y ser humano. Gracias por enseñarme lo dura que es la vida, pero especialmente, gracias por ser mi crítica más dura, gracias por esa paciencia digna de la divinidad; gracias por amarme.

Gracias a aquellas tres niñas que hoy son mujeres de bien. Gabriela, Fabiola y Cynthia; debo a ustedes todo ese alborozo de mi niñez. Tienen una parte mía, las amo.

Gracias Catalina, una casualidad hermosa, colmada de amor. Gracias por reconstruir mi fe, mi virtud y mi esencia. Gracias por ser un hogar, el mío. Te amo infinitamente.

Gracias a Ángel Escalante por ser mi mentor, por enseñarme un mejor camino, por esa lealtad hermana y amiga, gracias por ser honesto, amigo.

Gracias al Doctor Raúl por todas las enseñanzas y aportaciones académicas que han cimentado mi formación como futuro profesionista, sobre todo, gracias por las enseñanzas invaluables de vida. Mi eterna gratitud por la ayuda, el soporte y apoyo en la construcción de este trabajo. Asimismo, expreso mi admiración hacia su profesionalismo y humanidad.

Gracias a al jurado por tomarse el tiempo de contemplar mi humilde tesis.

Gracias a Rafa, Jorge y Ara, no aportaron nada a este trabajo, pero fue la familia que yo elegí. Siempre están conmigo, hermanos.

Gracias a la existencia que me brinda la oportunidad de presenciar este pobre pero apoteósico momento de mi vida.

ÍNDICE GENERAL

1. **Introducción**……………………………………..……………………………….……1
2. **Antecedentes Técnicos**……………………………….……………….………6
   2.1. Teoría del Interés………………………………..………………….……..6
      2.1.1. Tasa Efectiva de Interés…………………………………...…6
      2.1.2. Modelo de Interés Simple…………………..……..……….7
      2.1.3. Modelo de Interés Compuesto………………..…….……….7
      2.1.4. Valor Presente y Factor de Descuento……......……………8
      2.1.5. Tasa Efectiva de Descuento…………………...…….……8
      2.1.6. Fuerza de Interés……………………………….…..………9
      2.1.7. Anualidades…………………………………….……….…10
         2.1.7.1. Anualidades Inmediatas……………………........10
         2.1.7.2. Anualidades Anticipadas…………….……….....11
   2.2. Teoría de Probabilidad……………………………………........12
      2.2.1. Probabilidad……………………………….……...….....12
      2.2.2. Variables Aleatorias……………………………………...13
      2.2.3. Variables Aleatorias Discretas……………………........14
      2.2.4. Distribuciones de Probabilidad Discretas……………..….14
      2.2.5. Variables Aleatorias Continuas……………………….....15
      2.2.6. Distribuciones de Probabilidad Continuas………………16
      2.2.7. Valor Esperado de una Variable Aleatoria……….......…18
      2.2.8. Varianza de una variable Aleatoria……………….……..…19
      2.2.9. Algunas Distribuciones de Probabilidad………...….......20
         2.2.9.1 Distribución Bernoulli……………….…….…......20
         2.2.9.2. Distribución Binomial……………..………...….21
         2.2.9.3. Distribución de Poisson………..……….....….21
         2.2.9.4. Distribución Uniforme Continua……………......22
         2.2.9.5. Distribución Normal………………..….……......22
         2.2.9.6. Distribución Exponencial………...…...…….22
   2.3. Matemáticas Actuariales…………………………………...…...…23
      2.3.1. Función de Supervivencia……………………...........23
      2.3.2. Tiempo Transcurrido Hasta el Fallecimiento……….….24
      2.3.3. Fuerza de Mortalidad…………………………….…....26
      2.3.4. Tablas de Mortalidad……………………......……....27
         2.3.4.1. Algunas Leyes de Mortalidad…….…………......30
      2.3.5. Seguros de Vida…………………………..………….....31
      2.3.6. Seguros de Vida de Tipo Continuo……….………..……31
         2.3.6.1. Seguro Temporal a n años……….……….…..32
         2.3.6.2. Seguro de Vida Vitalicio………….…………......34
         2.3.6.3. Seguro Dotal Puro…………………..…………..35
         2.3.6.4. Seguro Dotal Mixto………………..……………35

2.3.7. Seguros de Vida de Tipo Discreto……………..……..…….37
2.3.7.1. Seguro Temporal Discreto a n años…...……....37
2.3.7.2 Seguro de Vida Vitalicio Discreto……..…………37
2.3.7.3 Seguro Dotal Mixto Discreto…………..……..….38
2.3.6. Anualidades……………………………………………….38
2.3.6.1. Anualidades Vitalicias Continuas…...……..…...39
2.3.6.2. Anualidades Vitalicias Discretas…...……………40
2.3.7. Primas…………………………………..……………41
2.3.8. Reservas………………………………………..…....43
2.4. Simulación Monte Carlo……………………………...………..45
2.4.1. Generador de Números Aleatorios…………..………..…46
2.4.2. Generador de Variables Aleatorias………………...……47
2.4.2.1. Método de la Transformación Inversa…..……47
2.4.2.2. Método de Aceptación-Rechazo…………...…47
2.4.3 @RISK………………………………………………..…..48
2.4.4 Uso de @RISK………………………………………………48
3. Caso de Estudio……………………..…………………………..…..….53
3.1. Problema de Suficiencia de un Fondo…………………….…..…..53
3.1.1. Aplicación de Simulación Monte Carlo……………..…..55
3.2. Problema de Seguro Dotal Mixto……………………………......66
3.2.1. Aplicación de Simulación Monte Carlo…………..……...67
3.3 Calculo de Auto Seguro………………………………...……...71
3.3.1. Desarrollo del Modelo de Simulación……………72
3.3.2. Resultados de la Simulación……………………..82
Conclusiones……………………………………………………………………..86
A. Anexo I: Cálculo de Seguro Dotal Mixto…………………..………….……..88
B. Anexo II: Base de Datos de Siniestralidad…………………………..…….89
Bibliografía…………………………………………………………...…....103

INTRODUCCIÓN

El cálculo actuarial es el conjunto de técnicas matemáticas, probabilísticas, estadísticas y financieras, que tiene como finalidad contabilizar, mitigar y administrar riesgos.

La principal aplicación del cálculo actuarial se da en el sector asegurador. Dicho sector se encarga de disminuir, cubrir y administrar los riesgos financieros inmiscuidos en la posible ocurrencia de un siniestro o contingencia.

El objetivo básico del cálculo actuarial es la determinación de los montos a pagar por un contrato de seguro, usualmente celebrado entre el asegurador y el asegurado, en el cual se compromete al asegurador, a cambio de un pago (prima), o bien, diversos pagos a lo largo de un tiempo previamente establecido, a hacer efectiva la entrega de una cierta suma de dinero al beneficiario del seguro en caso de que el siniestro, estipulado en el contrato, llegara a ocurrir.

Es cierto que la mayoría de los cálculos actuariales son de índole aleatoria, por lo tanto, la mayoría de los cálculos son no deterministas y su desarrollo analítico-matemático, resulta una tarea ardua, larga y compleja. No sólo las cantidades pagaderas que los contratos señalan son difíciles de computar, sino que también determinar la frecuencia con que los reclamos ocurren hacia la aseguradora, es una tarea laboriosa y difícil debido a lo imprevisible que son las entradas de datos.

La aplicación del método de Simulación Monte Carlo al cálculo actuarial brinda un enfoque totalmente diferente al tradicional y una posible solución práctica, sencilla y útil. Primeramente, la simulación de Monte Carlo se auxilia del poder computacional; por medio de un modelo aleatorio busca indagar y aseverar sobre el sistema de interés. El modelo, se construye a partir de las características significativas del sistema. La técnica de Monte Carlo permite llevar a cabo un ejercicio de simulación en donde la realidad es suplantada por una escena teórica, respaldada por evidencia estadística, que es válida gracias al principio de generación de números aleatorios con el que trabaja.

Cabe destacar que el principal beneficio de la aplicación de la simulación Monte Carlo en el cálculo actuarial, sin lugar a dudas, es que simplifica los cálculos que por inercia ya son complejos, seguido de la generación de escenarios teóricos, dando un plus al análisis de riesgo. Así mismo, brinda información fundamental, útil y crucial con vista en la correcta administración del riesgo financiero.

El propósito de esta investigación es demostrar que la aplicación de la simulación Monte Carlo al cálculo actuarial simplifica los cálculos de esta índole, además, de que es capaz de proporcionar información de máxima utilidad como una aproximación a las distribuciones de frecuencia en los reclamos de seguro, el riesgo de impago y la facultad de generar primas económicamente sólidas por medio del análisis de escenarios teóricos.

ANTECEDENTES

Antecedentes Generales

La ciencia actuarial trata de explicar fenómenos que desde que son de tipo no determinista poseen una marcada complejidad de inicio. La exposición al riesgo por parte del hombre también es una característica innata a él. El cálculo actuarial ha tenido como finalidad reducir la incertidumbre que rodea a la atmósfera del ser humano; mediante técnicas matemáticas, estadísticas y financieras se ha tratado de modelar principalmente el riesgo de fenecimiento.

La exposición de una vida al riesgo de muerte es un tema real y explorado por el cálculo actuarial, pero, a lo largo del tiempo se han presentado dificultades considerables. Resulta complicado dar un aproximado sobre la frecuencia con que las muertes ocurren, aunado a esto y como consecuencia, el sector asegurador se ve afectado dado que es complicado saber también la frecuencia de los costos de reclamación de sus asegurados.

El problema básico es cómo poder determinar una distribución de frecuencia de muertes, o bien, una distribución de costos. Otro problema es la denominación de las primas, el estimar el costo de éstas. Es cierto que se presentan dichas complicaciones debido a que el desarrollo analítico-matemático es sumamente difícil, en muchas ocasionas se requiere elaborar supuestos que simplificaran la problemática, sin embargo, estos supuestos plantearían cuestionamientos significativos en relación a la veracidad de las conclusiones.

La computación ha ayudado al cálculo actuarial a desarrollar técnicas y aproximaciones para dar solución a los cuestionamientos expuestos previamente. Los cálculos en una computadora, generalmente son llevados a cabo con prontitud, permitiendo así, nuevos enfoques para el ramo actuarial, el desarrollo de supuestos que sean respaldados y validados estadísticamente, para así, trabajar en conjunto por una modelación más precisa.

Antecedentes Específicos

El avance en el campo de la informática y su adhesión en el desarrollo de diferentes métodos de análisis de riesgo ha favorecido al cálculo actuarial; los modelos de simulación presentan un enfoque diferente al tradicional. Es admisible la exploración de diversas soluciones alternativas a los problemas analíticos actuariales, en su mayoría mediante estimaciones realizadas a través de simulaciones computacionales.

El método de Monte Carlo es un modelo de simulación desarrollado a mediado de los años 40, trabaja con el principio de generación de números aleatorios. La simulación de Monte Carlo es un conjunto de técnicas estadísticas que permiten, con mayor precisión, estimar los parámetros en los que se está interesado sin la exigencia de recurrir al uso de métodos abstractos de poca practicidad, baja eficacia y de alta complejidad matemática.

El cálculo actuarial, fundamentalmente pretende resolver el problema de crear una prima que sea económicamente sólida (dejando detrás los costos administrativos) para ambas partes: asegurado y asegurador. Los cálculos aleatorios, hacen que las entradas de datos sean también estocásticas, por lo que los resultados en cada ensayo, serán diferentes. Sucede lo mismo con la estimación de la frecuencia de los reclamos. Se ha tratado de modelar el comportamiento de la vida humana, primordialmente, el momento en que una persona fallece, aproximaciones estadísticas han sido las encargadas de modelar dicho fenómeno, sin llegar a un método absoluto. Los cálculos analítico-matemáticos presentan una gran dificultad y algunos al hacer uso de diversos supuestos, plantean dudas significativas en las conclusiones que se obtienen. Este trabajo tiene como propósito dar un enfoque diferente a estos problemas, haciendo uso del método de Simulación de Monte Carlo.

Planteamiento del Problema

En general existe un problema en abordar la dificultad del cálculo sobre operaciones de tono no determinista. En el ramo actuarial es complicado el cómputo de los fenómenos estocásticos que normalmente se estudian. Las soluciones analíticas son rigurosas, complejas y en ocasiones ambiguas, por lo que, los resultados son dudosos o de baja confiabilidad.

Con el ejercicio de simulación Monte Carlo se facilita la resolución de estos cálculos y se obtienen mejores aproximaciones sobre los parámetros de interés, así como también es posible simplificar los procesos de análisis de riesgo y toma de decisiones; el empleo del poderío computacional es crucial en la resolución de la problemática.

Pregunta de Investigación

¿Es posible simplificar los cálculos actuariales al aplicar la técnica de simulación Monte Carlo?

Justificación

El enfoque del cálculo actuarial desde una perspectiva de simulación Monte Carlo permitirá generar escenarios teóricos sobre la ocurrencia de los fenómenos de interés, en específico, este trabajo de investigación se centra en el cálculo de una prima que sea económicamente sólida y la estimación de la frecuencia en los reclamos hacia una aseguradora. De la mano, la modelación del fenecimiento de la población de estudio, está implícita. El modelo proveerá información útil en donde se visualizarán todos los posibles escenarios, por medio de estos constantes ensayos de realidad, se pretende acercarse a la prima ideal, al cálculo de una reserva y a una modelación de fallecimiento de la población estudiada.

Lo más importante es demostrar que los cálculos actuariales, por medio de un proceso de simulación de estilo Monte Carlo, son significativamente sencillos en comparación con las técnicas tradicionales analíticas, así, la información que el modelo proporcionará, debido a la agilidad y rapidez del procesamiento de los cómputos.

Se espera que los resultados faciliten el diseño de una prima sólida, así mismo, la generación de escenarios es una gran ventaja ya que permite el análisis del mejor escenario teórico, el peor de ellos y es posible manipular los niveles de fiabilidad del estudio al hacer uso del software especializado @Risk, a la espera de facilitar la toma de decisiones con base en el análisis de los resultados del modelo.

Con el uso de la simulación de Monte Carlo en el cálculo actuarial, se pretende demostrar la factibilidad de la aplicación de la técnica en la ciencia actuarial. Se espera despertar un interés para fomentar e incentivar el uso de esta técnica en el entorno actuarial, tomando como estandarte la simplicidad en los cálculos analítico-matemáticos.

OBJETIVOS

Objetivo General

Simplificar los cálculos actuariales mediante la aplicación de simulación Monte Carlo.

Objetivos Específicos

- Determinar una prima económicamente sólida.
- Generar escenarios teóricos para la correcta administración de riesgo.
- Dar una aproximación confiable sobre la frecuencia de los reclamos esperados.
- Evitar el desarrollo matemático-analítico en el cálculo de la prima neta única.
- Exponer el uso de la simulación Monte Carlo mediante @Risk en la resolución de problemas actuariales.
- Construir un modelo de simulación que sea capaz de sugerir un nivel de confiabilidad en la ocurrencia de las contingencias.

ALCANCES

- Los cálculos como el de segura de vida, primas y reservas se agilizarán con la ayuda de un software especializado.
- La investigación centra la aplicación del método Monte Carlo en el cálculo actuarial, profundizando en la construcción de primas.
- El estudio explorará la generación de diversos escenarios en donde una prima única de riesgo puede ser suficiente o viceversa.
- Los fallecimientos de los individuos serán generados a través de aproximaciones aleatorias.
- La aplicación de la simulación Monte Carlo en este trabajo es capaz de generar información valiosa para la correcta administración del riesgo de una aseguradora.

LIMITACIONES

- El cálculo de la prima no toma en cuenta los gastos administrativos que en la práctica real una aseguradora toma en consideración.
- Las tasas de costo de oportunidad y de rendimientos de un fondo en específico, son ficticias.

Capítulo 2

2. ANTECEDENTES TÉCNICOS

En el presente capítulo, se expondrán los conceptos básicos que serán necesarios para desarrollar el cálculo de seguros, anualidades, primas y reservas mediante el método de simulación Monte Carlo. Así como también se proveerá el respectivo sustento teórico de dichas definiciones.

Primeramente, se abordarán antecedentes de teoría del interés, probabilidad y cálculo actuarial, donde únicamente se tratarán los temas relevantes que, más adelante, serán utilizados de manera manifiesta, o bien, generalizados.

La culminación de este capítulo está a cargo de la presentación formal de la simulación Monte Carlo; haciendo énfasis en su metodología, brindando un concepto claro y específico de dicha técnica. No restando importancia, se surtirá una breve presentación del software @Risk, debido al papel fundamental que representa en el desarrollo de los cálculos en este trabajo.

2.1 TEORÍA DEL INTERÉS

Se puede definir al interés como la compensación que un prestatario de capital paga a un prestamista de capital por su uso. De esta manera, el interés puede ser visto como una especie de renta que el prestatario paga a dicho prestamista con la finalidad de compensar la "pérdida" de uso del capital por parte del prestamista mientras se lo presta al prestatario, S. G. Kellison (2009) [1].

2.1.1. Tasa Efectiva de Interés

S. G. Kellison (2009) señala que la tasa efectiva de interés i se puede definir como la "cantidad de dinero que una unidad monetaria invertida al principio de un periodo genera durante dicho periodo, donde el interés es pagado al final del periodo."

2.1.2. Modelo de Interés Simple

El interés simple se calcula con base en el capital inicial invertido, que se mantiene invariable, por lo tanto, el interés que se obtiene en cada intervalo de tiempo, es siempre el mismo.

Se considera la inversión de una unidad monetaria de tal manera que la cantidad de interés generado durante cada periodo sea constante. El valor acumulado de 1 unidad monetaria al final del primer periodo es $1+i$, al final del segundo periodo es $2+i$, etc. De esta manera se tiene una función de acumulación lineal

$a(t)=1+it$ para todo entero $t \geq 0$

La acumulación de interés de acuerdo a este modelo es conocido como interés simple, S. G. Kellison (2009) [1].

2.1.3. Modelo de Interés Compuesto

En el modelo de interés compuesto, los intereses de cada periodo se acumulan al capital.

El interés compuesto asume que el interés generado se reinvierte automáticamente para así ganar interés adicional. Gracias a este, la inversión total de capital principal y el interés generado a cierto momento en el tiempo se mantienen invertidos en cualquier instante de tiempo.

Al buscar una función de acumulación para este tipo de interés se considera la inversión de 1 unidad monetaria, la cual acumulará $1+i$ al final del primer periodo. Este saldo de $1+i$ se puede considerar como el capital principal para el inicio del segundo periodo y generará un interés de $i(1+i)$ durante dicho lapso. Así, el saldo final del segundo periodo es $(1+i)+i(1+i)=(1+i)^2$. De igual manera, el saldo de $(1+i)^2$ se considera como capital principal al inicio del tercer periodo que genera un interés de $i(1+i)^2$ a lo largo del tercer periodo. El saldo al final del tercer periodo es $(1+i)^2+i(1+i)^2=(1+i)^3$. Continuando con este proceso de forma indefinida, se obtiene que

$a(t)=(1+i)^t$ para todo entero $t \geq 0$

Dicha función corresponde al modelo de interés compuesto únicamente para valores enteros $t \geq 0$, S. G. Kellison (2009) [1].

2.1.4. Valor Presente y Factor de Descuento

Se expuso que una inversión de 1 unidad monetaria acumula $1+i$ al final del primer periodo. $1+i$ es conocido como el factor de acumulación, dado que este acumula el valor de una inversión desde el principio de un periodo hasta su valor al final del periodo.

Se usa $(1+i)^{-1}$ cuando se desea determinar cuánto se debe invertir inicialmente de forma que el saldo sea de 1 unidad monetaria al final del primer periodo. Se define el símbolo v tal que:

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Al término anterior, se le conoce como factor de descuento debido a que "descuenta" el valor de una inversión desde el final de un periodo hasta su valor al principio del periodo.

Se puede generalizar el resultado anterior a periodos mayores a uno y así poder encontrar la cantidad que se debe invertir para acumular la cantidad de 1 unidad monetaria al final de t periodos usando el recíproco de la función de acumulación $a^{-1}(t)$, en virtud de que el valor acumulado de esta cantidad al final de t periodos es $a^{-1}(t)\cdot a(t) = 1$. A la expresión $a^{-1}(t)$ se le denomina función de acumulación. En consecuencia, se obtienen los resultados subsecuentes:

Interés simple: $a^{-1}(t) = \dfrac{1}{1+it}$

Interés compuesto: $a^{-1}(t) = \dfrac{1}{(1+i)^t} = v^t$

para $t \geq 0$, S. G. Kellison (2009) [1].

2.1.5. Tasa Efectiva de Descuento

Se establece que la tasa efectiva de descuento es una medida de interés que se paga al principio de cada periodo.

La tase efectiva de descuento d, es el monto de dinero que se descuenta al inicio del periodo, de 1 unidad monetaria con el fin de obtener 1 unidad monetaria al final del periodo. De esta forma, el descuento es la cantidad pagada anticipadamente por utilizar el capital durante ese lapso.

S. G. Kellison (2009), dice que “La tasa efectiva de descuento d es la relación entre la cantidad de interés ganado durante el periodo y el monto invertido al final del periodo”.

Al asumir prestada 1 unidad monetaria a una tasa efectiva de descuento d, el capital principal original es $1-d$ y el monto de interés (descuento) es d. No obstante, de la definición básica de i como el cociente de la cantidad de interés (descuento) entre el capital principal, se tiene:

$$i = \frac{d}{1-d}$$

Esta fórmula expresa a i en función de d.

La expresión también puede expresar a d en función de i. Al aplicar simple álgebra:

$$i = \frac{d}{1-d}$$

$$i - id = d$$

$$d(1+i) = i$$

$$d = \frac{i}{1+i}$$

Así, i se expresa en términos de d.

El descuento simple es análogo al interés simple, se considera la situación donde la cantidad de descuento generado durante cada periodo es constante, entonces el capital principal original que producirá un valor acumulado de 1 unidad monetaria al final de t periodos es:

$a^{-1}(t) = 1 - dt$ para $0 \le t \le 1/d$

la segunda parte de la desigualdad es necesaria para mantener $a^{-1}(t) > 0$. Esto contrasta con el descuento compuesto, en cuyo caso el valor presente es:

$a^{-1}(t) = v^t = (1-d)^t$ para $t \ge 0$

Así, queda definido el descuento compuesto, S. G. Kellison (2009) [1].

2.1.6. Fuerza de Interés

En algunas ocasiones es importante poder medir la intensidad con la cual opera el interés en cada momento del tiempo, es decir, sobre intervalos de tiempo infinitesimalmente pequeños. A esta medida de momentos individuales de tiempo se le conoce como fuerza de interés.

La fuerza de interés al tiempo t, denotada por δ_t, se define como:

$$\delta_t = \frac{a'(t)}{a(t)}$$

También es posible escribir a la fuerza de interés en términos de $a(t)$:

$$e^{\int_0^t \delta_r dr} = \frac{a(t)}{a(0)} = a(t)$$

Lo anterior es propuesto por S. G. Kellison (2009) [1].

2.1.7. Anualidades

Las anualidades son una serie de pagos, o bien, cobros (dependiendo del enfoque) iguales realizados en periodos de tiempo sucesivos; por lo general equidistantes.

2.1.7.1. Anualidades Inmediatas

A las anualidades inmediatas se les conoce comúnmente como anualidades ordinarias y son las más usadas en la práctica. El cálculo de estas, es relativamente sencillo.

Suponga un conjunto de n pagos de 1 unidad monetaria cada uno y que son realizados al final de cada periodo durante n periodos (equidistantes), $n > 0$. Dicha anualidad es llamada anualidad inmediata. La tasa de interés implicada será i, manteniéndose igual por periodo, con $i > 0$. Seguido, el valor presente de la anualidad, se calcula un periodo antes de que el primer pago se realice y se denotará actuarialmente por $a_{\overline{n|}}$ y estará formada por la suma de todos los pagos descontados hasta el tiempo de la fecha focal, que en este caso es 0.

Entonces el valor presente de los n pagos en 0 es igual a:

$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + v^3 + ... + v^n$$

Es posible ver a la expresión anterior como una progresión geométrica:

$$
\begin{aligned}
a_{\overline{n}|} &= v + v^2 + \ldots + v^n \\
&= v \cdot \frac{1-v^n}{1-v} \\
&= v \frac{1-v^n}{iv} \\
&= \frac{1-v^n}{i}
\end{aligned}
$$

Así, se dice que $a_{\overline{n}|} = \dfrac{1-v^n}{i}$ es el valor presente de una anualidad unitaria inmediata.

Por otro lado, el valor futuro de una anualidad inmediata es la suma de todos los pagos de 1 unidad monetaria acumulados hasta el tiempo n, (también se contempla el último pago, que es ubicado al tiempo n) que en este caso, es la fecha focal y se denota por $s_{\overline{n}|}$ y está dada por la siguiente expresión:

$$
s_{\overline{n}|} = 1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}
$$

Al verlo como una progresión geométrica tenemos:

$$
\begin{aligned}
s_{\overline{n}|} &= 1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \\
&= \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \\
&= \frac{(1+i)^n - 1}{i}
\end{aligned}
$$

De esta forma, $s_{\overline{n}|} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$, es el valor futuro de una anualidad unitaria inmediata, S. G. Kellison (2009) [1].

2.1.7.2. Anualidades Anticipadas

En este tipo de anualidades, los pagos se realizan al inicio del periodo. El valor presente de una anualidad anticipada se calcula al momento del primer pago, dicho pago se incluye junto a la suma de todos los pagos descontados. Se denotará por $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. El valor futuro de una anualidad unitaria valuada un periodo después de efectuar el último pago se llama valor futuro de una anualidad anticipada. Se expresa con $\ddot{s}_{\overline{n}|}$. Es bien sabido que el valor futuro de una anualidad anticipada no contempla, para su cálculo, el último pago.

El valor presente de una anualidad anticipada lo define la siguiente ecuación:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + ... + v^{n-1}$$

Asumiendo la progresión geométrica:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n|}} &= 1 + v + v^2 + ... + v^{n-1} \\ &= \frac{1-v^n}{1-v} \\ &= \frac{1-v^n}{iv} \\ &= \frac{1-v^n}{d}\end{aligned}$$

Similarmente, para $\ddot{s}_{\overline{n|}}$, la expresión que la define es la siguiente:

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{\overline{n|}} &= (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n \\ &= (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{iv} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{d}\end{aligned}$$

De esta manera, quedan definidos $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ y $\ddot{s}_{\overline{n|}}$, S. G. Kellison (2009) [1].

2.2. TEORÍA DE PROBABILIDAD

La teoría de probabilidad permite evaluar la confiabilidad de conclusiones acerca de un determinado fenómeno de estudio. De esta manera, se toman decisiones con base en esta teoría, así como también permite elaborar estrategias para toma de decisiones.

2.2.1. Probabilidad

La probabilidad es una rama de las matemáticas que se ocupa de medir o determinar cuantitativamente la posibilidad de que un suceso o experimento produzca un determinado resultado, por ejemplo:

Cuando se lanza al aire una moneda, existen dos posibles resultados: cara o cruz. Si se lanza una moneda varias veces al aire, se genera un número grande de caras o cruces, es decir, la población. ¿Cómo está conformada la población? Si la moneda lanzada es legal, la población debe contener exactamente la mitad de caras y la otra mitad de la población deben ser cruces. Ahora, se lanza la moneda una vez más. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una cruz? Intuitivamente se dice que la "probabilidad" es $\frac{1}{2}$, [2].

2.2.2. Variables Aleatorias

Una variable cuantitativa genera datos numéricos, las variables cualitativas generan datos categóricos. Sin embargo, las variables cualitativas pueden generar datos numéricos si las categorías son codificadas numéricamente y de esta manera, formar una escala. Por ejemplo, si se lanza al aire una moneda, el resultado cualitativo podría registrarse como 0 si es cara o como 1 si es cruz, [2].

A menudo es importante asignar una descripción numérica al resultado que se obtiene en un experimento probabilístico. Por ejemplo, Cuando se prueban tres componentes electrónicos y se está interesado en saber cuántos componentes defectuosos se presentan.
N denota "no defectuoso" y D "defectuoso", el espacio muestral, que ofrece detalladamente cada posible resultado, está dado por $S = \{NNN, NND, NDN, DNN, NDD, DND, DDN, DDD\}$, a cada punto en el espacio muestral se le asignará un valor numérico de $0,1,2$ o 3. Estos valores son cantidades aleatorias determinadas por el resultado del experimento. Se pueden ver como valores que toma la variable aleatoria X, es decir, el número de artículos defectuosos cuando se prueban tres componentes electrónicos, [4].

Definición 1 *Variable Aleatoria*
Una variable aleatoria es una función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral.
Se denota con X a una variable aleatoria y se usa la correspondiente letra minúscula x ,en este caso, para uno de sus valores.

Ejemplo 2.2.2: De una urna que contiene 4 bolas negras y 3 blancas se sacan 2 bolas de manera sucesiva, sin reemplazo. Los posibles resultados de la variable aleatoria Z, donde Z es el número de bolas negras, son:

Espacio muestral	z
NN	2
NB	1
BN	1
BB	0

2.2.3. Variables Aleatorias Discretas

Si un espacio muestral posee un número finito de posibilidades, o ya sea una serie interminable con tantos elementos como números existentes, se le denomina espacio muestral discreto. Una variable aleatoria se llama variable aleatoria discreta si se puede contar su conjunto de resultados posibles. En el ejemplo 2.2.2 la variable aleatoria es discreta.

2.2.4. Distribuciones de Probabilidad Discretas

Una variable aleatoria discreta toma cada uno de sus valores con cierta probabilidad. Por ejemplo, una moneda legal es lanzada tres veces, la variable X, que representa el número de caras, toma el valor de 1 (una sola cara en los tres lanzamientos) con $\frac{3}{8}$ de probabilidad, debido a que tres de los ocho puntos muestrales igualmente probables tienen como resultado una cara y dos cruces. Es importante señalar que la suma de las probabilidades de los eventos posibles es igual a 1.

Para fines prácticos, es conveniente representar todas las probabilidades de una variable aleatoria X usando una fórmula, la cual es una función de los valores numéricos x que se denotan con $f(x)$. Por lo tanto $f(x) = P(X = x)$. Al conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ se le llama *función de probabilidad, función de masa de probabilidad* o *distribución de probabilidad*, [4].

Definición 2 *Función de masa de probabilidad*
El conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ es una función de probabilidad o una función de masa de probabilidad de la variable aleatoria discreta X si, para cada resultado x posible:

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\sum_{x} f(x) = 1$,
3. $P(X = x) = f(x)$.

Por ejemplo, considere un pedido para una tienda minorista de electrónica de 20 computadoras, 3 de ellas están defectuosas. Un cliente acude a la tienda y compra 2 computadoras. Se define X como una variable aleatoria cuyos valores x son los números posibles de computadoras defectuosas compradas por el cliente, x sólo puede asumir los valores $0, 1$ y 2, así:

$$f(0)=P(X=0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{17}{2}}{\binom{20}{2}}=\frac{68}{95},\quad f(1)=P(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{17}{1}}{\binom{20}{2}}=\frac{51}{190}$$

$$f(3)=P(X=3)=\frac{\binom{3}{2}\binom{17}{0}}{\binom{20}{2}}=\frac{3}{190}.$$

Definición 3 *Función de distribución acumulativa*
La función de distribución acumulativa $F(x)$ de una variable aleatoria discreta X con distribución de probabilidad $f(x)$ es

$$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{t\leq x} f(t),\ \text{para } -\infty<x<\infty$$

Ejemplo 2.2.4 Una moneda legal es lanzada dos veces, X representa el número de caras, entonces $P(X=0)=\frac{1}{4},\ P(X=1)=\frac{1}{2},\ P(X=2)=\frac{1}{4}$, así para $F(1)$ se tiene:

$$F(1)=P(X\leq 1)=f(0)+f(1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

La función de la distribución acumulativa de X es:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{para } x<0 \\ \frac{1}{4}, & \text{para } 0\leq x<1 \\ \frac{3}{4}, & \text{para } 1\leq x<2 \\ 1, & \text{para } x\geq 2. \end{cases}$$

La función acumulativa es una función no decreciente monótona, no sólo está definida para los valores que toma la variable aleatoria en cuestión sino para todos los números reales, [4].

2.2.5. Variables Aleatorias Continuas

Si un espacio muestral posee un número infinito de posibilidades, igual al número de puntos en un segmento de recta, se le denomina espacio muestral continuo. Cuando una variable aleatoria puede tomar valores en una escala continua, se le denomina, variable aleatoria continua. Por ejemplo, X representa la variable definida como el tiempo que pasa en horas, para que un radar fotografíe a un automovilista que excede el límite de velocidad permitido. La variable aleatoria X toma todos los valores de x para los que $x \geq 0$. Claramente se trata de una variable aleatoria continua, [4].

2.2.6. Distribuciones de Probabilidad Continuas

Dado que una variable aleatoria continua tiene probabilidad 0 de adquirir exactamente cualquiera de sus valores, su distribución de probabilidad no se puede presentar de forma tabular. Por ejemplo, al considerar una variable aleatoria cuyos valores son las estaturas de todas las personas mayores de 18 años de edad, entre una estatura y otra, existe un número infinito de estaturas, ya sea entre 170 y 172 centímetros e inclusive entre 170.99 y 171 centímetros hay un número incontable de estaturas. La probabilidad de seleccionar al azar a una persona que tenga exactamente 170 centímetros de estatura es sumamente baja. No obstante, esto no sucede si se busca la probabilidad de elegir a una persona que al menos mida 170 centímetros, pero no más de 172 centímetros de estatura. En este caso se hace referencia a un intervalo.

En el caso continua, el cálculo de probabilidades se realiza para varios intervalos de variables aleatorias continuas como $P(a < X < b), P(Z \geq C)$, etc. Cuando X es continua, $P(a < X \leq b) = P(a < X < b) + P(X = b) = P(a < X < b)$. Es decir, no importa si es incluido o no el extremo del intervalo.

Es posible plantear la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua como una fórmula, que necesariamente será función de los valores numéricos de la variable aleatoria continua X la cual se representa mediante $f(x)$ y se le llama función de densidad de probabilidad o simplemente función de densidad de X.

Una función de densidad de probabilidad se construye de forma que el área bajo su curva sea igual a 1, limitada por el eje x, cuando se calcula en el rango de X para el que se define $f(x)$. Como dicho rango de X es un intervalo finito, es realizable extender el intervalo para que incluya a todo el conjunto de números reales definiendo $f(x)$ como cero en todos los puntos de las partes extendidas del intervalo.

Figura 1.

La probabilidad de que X tome un valor entre a y b, es representada por el área sombreada bajo la función de densidad, entre el intervalo $x=a$ y $x=b$. El área sombreada bajo la curva es $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx$, [4].

Definición 4 *Función de densidad de probabilidad*
La función $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad (fdp) para la variable aleatoria continua X, definida en los números reales si,

1. $f(x)\geq 0,$ para toda $x\in\mathbb{R}$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1.$
3. $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx.$

Ejemplo 2.2.6 El error en la temperatura de reacción en °C, en un experimento de laboratorio controlado, está dado por X que tiene una función de densidad de probabilidad:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}, & -1<x<2\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Se quiere calcular $P(0<X\leq 1)$.

Primero se verídica si $f(x)$ es una función de densidad: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-1}^{2}\frac{x^2}{3}dx=1$.

Ahora se calcula $P(0<X\leq 1)=\int_0^1\frac{x^2}{3}\,dx=\frac{1}{9}$.

Definición 5 *Función de distribución acumulativa*
La función de distribución acumulativa $F(x)$, de una variable aleatoria continua X con función de densidad $f(x)$ es

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt,\ \text{para}\ -\infty<x<\infty.$$

Como consecuencia inmediata de la definición anterior, se puede escribir lo siguiente:

$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$ y $\dfrac{dF(x)}{dx}$, si existe la derivada.

Es posible calcular $F(x)$ para el ejemplo 2.2.6 como sigue, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dt = \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3} dt = \frac{x^3+1}{9}$, por lo tanto:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \dfrac{x^3+1}{9}, & -1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

Finalmente, $P(0 < X \le 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$. [4].

2.2.7. Valor Esperado de una Variable Aleatoria

Si don monedas son lanzadas 10 veces y X es el número de caras obtenidas en cada lanzamiento, entonces los valores de X pueden ser $0, 1$ y 2. Suponga que los resultados del experimento son cero caras, una cara y dos caras un total de $1, 6$ y 3 veces respectivamente. El número promedio de caras por lanzamiento de las dos monedas es: $\frac{0(1)+1(6)+2(3)}{10} = 1.2$. A pesar de que este es un número promedio de los datos no es un resultado posible de $\{0,1,2\}$. Por lo tanto, un promedio no es necesariamente un resultado posible del experimento. Los números $\frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{3}{10}$, son las fracciones de los lanzamientos totales que arrojan como resultado $0, 1$ y 2 caras respectivamente. También son las frecuencias relativas de los diferentes valores de X en el experimento. Así, si se conocen los diferentes valores que ocurren y sus frecuencias relativas aún sin tener conocimiento del número total de observaciones en el conjunto de datos se puede calcular el promedio o la media del conjunto de datos en cuestión. Este método de frecuencias relativas se puede utilizar para calcular el número promedio de caras que se esperan obtener a largo plazo por el lanzamiento de monedas, es decir, el valor promedio de 1.2 puede ser válido para 10 lanzamientos o bien, $10,000$ lanzamientos. Este valor promedio es conocido como media de la variable aleatoria X, se denota como μ_x o sencillamente μ cuando es evidente a qué variable aleatoria se hace referencia, en tanto, a la esperanza matemática o valor esperado de la variable aleatoria X se le denota como $E[X]$.

En el ejemplo del lanzamiento de las dos monedas se sugiere que el valor esperado de cualquier variable aleatoria discreta, se puede obtener multiplicando cada uno de los valores $x_1, ..., x_n$ de la variable aleatoria X por su correspondiente probabilidad $f(x_1), ..., f(x_n)$ y finalmente sumar sus productos. Lo anterior es cierto para variables aleatorias discretas. Para variables aleatorias continuas, la definición es la misma, pero las sumatorias son reemplazadas por integrales. Es cierto que es una medida de tendencia central.

Definición 6 *Valor Esperado*
Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$, la media o valor esperado de X es

$$\mu = E[X] = \sum_x x\, f(x)$$

Si X es discreta, y

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$$

Si X es continua.

Ejemplo 2.2.7 X denota la variable aleatoria que representa la vida útil en horas de un teléfono celular. Si a función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2,000,000}{x^3}, & x > 100, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La vida esperada para el teléfono celular es:

$\mu = E[X] = \int_{100}^{\infty} x \dfrac{2,000,000}{x^3} dx = \int_{100}^{\infty} \dfrac{2,000,000}{x^2} dx = 20,000.$ Se espera que el teléfono celular, en promedio, tenga una vida útil de $20,000$ horas.

2.2.8. Varianza de una variable Aleatoria

La medida de variabilidad más importante de una variable aleatoria X es conocida como varianza de una variable aleatoria X y se denota como $Var(X)$ o con el símbolo σ^2 .

Teorema 1
La varianza de una variable aleatoria X es $\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2$.

Demostración:

$$\sigma^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) = \sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x x\, f(x) + \mu^2 \sum_x f(x).$$

Como $\mu = \sum_x x f(x)$ por definición, y $\sum_x f(x) = 1$ para cualquier distribución de probabilidad discreta, se deduce que

$$\sigma^2 = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2 = E[X^2] - \mu^2.$$

Para el caso continuo la demostración es la misma paso a paso, sustituyendo las sumatoria por integrales.

Ejemplo 2.2.8 X representa el número de partes defectuosas de un auto cuando de una línea de producción se obtiene una muestra de tres partes y se somete a prueba. La siguiente es la distribución de probabilidad de X

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.51	0.38	0.10	0.01

Se calcula $\mu = (0)(0.51) + (1)(0.38) + (2)(0.10) + (3)(0.01) = 0.61$, posteriormente $E\ (X^2) = (0)(0.51) + (1)(0.38) + (4)(0.10) + (9)(0.01) = 0.87.$

Finalmente $\sigma^2 = 0.87 - (0.61)^2 = 0.4979$.

La varianza, tiene significado cuando se comparan dos o más distribuciones que poseen las mismas unidades de medida.

2.2.9. Algunas Distribuciones de Probabilidad

Las distribuciones de Probabilidad describen el comportamiento de una variable aleatoria. El siguiente conjunto de distribuciones que se presentará es de tipo discreto, así como también del tipo continuo, lo anterior dependiendo del fenómeno aleatorio a estudiar.

2.2.9.1. Distribución Bernoulli

En esta distribución de tipo discreto se supone que se lleva a cabo una prueba o un experimento y su resultado se puede clasificar como éxito o fracaso.

Comúnmente $X = 1$ cuando el resultado es éxito y naturalmente se asume que $X = 0$ cuando se trata de un fracaso. Así, la función de masa está dada por:

$$p(0) = P\{X = 0\} = 1 - p$$
$$p(1) = P\{X = 1\} = p.$$

Donde $p,\ 0 \leq p \leq 1,$ representa la probabilidad de éxito en cada ensayo.

Su distribución de probabilidad es $p(x) = p^x (1-p)^{1-x}$, para $x = 0,1.$

2.2.9.2. Distribución Binomial

EL número de X éxitos en n experimentos Bernoulli se llama variable aleatoria binomial. La distribución de probabilidad de esta variable aleatoria discreta se llama distribución binomial. Sus parámetros son el número de ensayos y la probabilidad de éxito en un ensayo dado, se representan como $b(n, p)$.

Un experimento Bernoulli como se enuncia en la sección anterior, puede tener como resultado un éxito con probabilidad p y un fracaso de probabilidad $q = p - 1$. De esta manera, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria binomial X con n ensayos independientes es

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0,1,\ldots,n.$$

El valor esperado y la varianza de la distribución binomial son $E[X] = np,\ Var(X) = np(1-p)$ respectivamente.

2.2.9.3. Distribución de Poisson

La distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta. Sus principales aplicaciones se manifiestan en la modelación de fenómenos aleatorios en los que se interesa determinar el número de ocurrencias de algún evento de cierto tipo, que puede darse en un intervalo de tiempo.

Su función de probabilidad es

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

para $x = 0,1,\ldots,\quad donde\ \lambda > 0$. El valor esperado de la varianza de la distribución de Poisson es

$E[X] = \lambda$ y $Var(X) = \lambda$ respectivamente.

2.2.9.4. Distribución Uniforme Continua

Sin lugar a dudas es una de las más sencillas distribuciones de probabilidad. Como su nombre lo sugiere, la distribución uniforme se caracteriza por una densidad de probabilidad constante en todos los puntos de su dominio. Si la variable aleatoria es definida en el intervalo $a < X < b,$ y la función de densidad es constante, entonces la función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{b-a},$$

para $a < x < b$. Es decir, la función de densidad constante es el recíproco de la longitud del intervalo en el que se define la variable aleatoria y la función de distribución acumulada es $F(x) = \frac{x-a}{b-a},$ para $a < x < b$. La media de la distribución uniforme es $E[X] = \frac{a+b}{2}$, mientras que su varianza es $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

2.2.9.5. Distribución Normal

La distribución normal es de las más usadas en el campo de la probabilidad y estadística. La función de densidad para esta distribución se basa en los dos parámetros μ y σ , donde $\sigma > 0$ que también son la media y la desviación estándar, respectivamente, de la distribución. Específicamente,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Como ya se ha mencionado $E[X] = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$.

2.2.9.6. Distribución Exponencial

La distribución exponencial, es sumamente usada en la modelación probabilística y estadística, cuenta con un solo parámetro y está definida sobre todos los valores positivos de X por la función de densidad

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}$$

para $x > 0$ y $\beta > 0$. El valor esperado y la varianza de la distribución exponencial son $E[X] = \frac{1}{\beta}, Var(X) = \frac{1}{\beta^2}$ respectivamente.

2.3. MATEMÁTICAS ACTUARIALES

La ciencia actuarial es el conjunto de conocimientos matemáticos, probabilísticos, estadísticos y financieros destinados al análisis de contingencias con la finalidad de mitigar y administrar el riesgo que estas conllevan, así como también aminorar el impacto (emocional o financiero) que un siniestro puede ocasionar.

Una de las aplicaciones más importantes del cálculo actuarial se da en el sector asegurador. Históricamente, el ser humano ha buscado atenuar su inquietud ante el riesgo, en consecuencia, ha desarrollado instrumentos económicos para su protección y la de sus seres amados. El seguro es el mejor ejemplo, se trata de una de las herramientas financieras más antiguas que ha ayudado al hombre a disminuir incertidumbre de forma efectiva.

Newton Bowers (1997) señala que "un sistema de seguro es un mecanismo para reducir el efecto financiero adverso de los eventos aleatorios que impiden el cumplimiento de expectativas razonables".

El objetivo primordial del cálculo actuarial es la determinación de los pagos que están sujetos a la supervivencia o a la muerte de una o varias personas. Por lo que es de suma importancia el análisis y medida de las contingencias en la vida humana.

El ramo asegurador ha evolucionado a través del tiempo a partir de las necesidades de la población. Es cierto que los cálculos son complejos, debido a la naturaleza del mismo. A continuación, se presentarán los conceptos básicos de cálculo actuarial, así como también se expondrán seguros, anualidades, primas y reservas.

2.3.1. Función de Supervivencia

La función de supervivencia tiene la capacidad de describir la probabilidad de que un recién nacido alcance cierta edad x.

Considere a un recién nacido, sea X una variable aleatoria de tipo continuo que representa la edad de muerte de dicho recién nacido, $F_X(X)$ representa la función de distribución de la variable aleatoria, así $F_X(X) = \Pr(X \leq x)$, con $x > 0$, es la expresión que refiere a la probabilidad de que un recién nacido muera antes de alcanzar la edad x.

La función de supervivencia se representa por $s(x)$ y está dada por la expresión $s(x) = 1 - F_X(X) = \Pr(X > x)$, para $x \geq 0$ y es la probabilidad de que un recién nacido sobreviva a la edad x.

Las características más importantes de la función $s(x)$ son las siguientes: Es una función estrictamente decreciente; al igual que continua en el intervalo $(0, w]$, donde w representa el número máximo de años que una persona puede llegar a vivir, se da por sentado que la edad es de cien años, es decir $w = 100$, que resulta muy difícil de lograr, a w, se le llama edad límite. La siguiente característica que cabe señalar es que $s(0) = 1$ y finalmente, debido a que es prácticamente imposible que un individuo viva más de cien años, $s(w) = 0$.

La distribución de X se define ya sea en términos de la función $F_X(X)$ o de la función $s(x)$.

Es posible escribir una expresión para una persona que muera entre la edad x y la edad z, con $x < z$, y es la ecuación $\Pr(x < X \leq z) = F_X(z) - F_X(x) = s(x) - s(z)$.

2.3.2. Tiempo Transcurrido Hasta el Fallecimiento

La probabilidad de que una persona muera entre las edades x y z, dado que sobrevivió a la edad x, es

$$\begin{aligned}\Pr(x < X \leq z \mid X > x) &= \frac{F_X(z) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \\ &= \frac{s(x) - s(z)}{s(x)}.\end{aligned}$$

El símbolo (x) se usará para denotar a una vida de x años. El tiempo futuro de vida de (x), se denota como $T(x)$, es decir, es el tiempo que transcurre desde que una persona tiene x años hasta que muere.

La función de distribución de $T(x)$ es ${}_tq_x$ y representa la probabilidad de que (x) muera dentro de t años. Se define por la ecuación ${}_tq_x = \Pr(T(x) \leq t), t > 0.$ Por otra parte la probabilidad de que (x) alcance la edad $x+t$, es decir, la función de supervivencia se escribe con el símbolo ${}_tp_x$ y está dada por la expresión ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = \Pr[T(x) > t], t > 0.$ Para el caso en el que una vida tiene edad 0, se tiene que $T(0) = X$ y que ${}_tp_0 = s(x), x \geq 0$.

El evento en donde (x) sobrevive t años y muere dentro de los siguientes u años, es decir, que muera entre las edades $(x+t)$ y $(x+t+u)$, es:

$$\begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= \Pr[t < T(x) \le t+u] \\ &= {}_{t|u}q_x - {}_{t}q_x \\ &= {}_{t}p_x - {}_{t+u}p_x. \end{aligned}$$

Es posible establecer las siguientes relaciones partiendo del hecho de que un recién nacido sobrevive a la edad x, es decir

$$ {}_{t}p_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_{x}p_0} = \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

$$ {}_{t}q_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

Bajo el mismo enfoque ${}_{t|u}q_x$ también puede expresarse como

$$\begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)} \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x+t)} \\ &= {}_{t}p_x \, {}_{u}q_{x+t}. \end{aligned}$$

Una variable aleatoria discreta asociada con el tiempo de vida futuro es el número de años futuros completados por (x) antes de su muerte o el tiempo de vida futuro truncado de (x). Se representa por la variable aleatoria $K(x)$, con función de probabilidad

$$\begin{aligned} \Pr[K(x) = k] &= \Pr[k \le T(x) < k+1] \\ &= \Pr[k < T(x) \le k+1] \\ &= {}_{k}p_x - {}_{k+1}p_x \\ &= {}_{k}p_x q_{x+k} = {}_{k|}q_x, \qquad k = 0,1,... \end{aligned}$$

El cambio de desigualdad es posible debido al supuesto de que $T(x)$ es una variable aleatoria continua, $\Pr[T(x) = k] = \Pr[T(x) = k+1] = 0$. La función de distribución de $K(x)$ es la función escalonada $F_{K(x)}(y) = \sum_{h=0}^{k} {}_{h|}q_x = {}_{k+1}q_x$, $y \ge 0$, y k es el mayor entero en y.

2.3.3. Fuerza de Mortalidad

La fuerza de mortalidad se expresa en forma de una tasa anual para proyecciones a corto plazo. Es una medida de mortalidad en el instante preciso de que se alcanza la edad x, es decir $\Pr[x < X \leq x + \Delta_x \mid X > x] = \frac{F_X(x+\Delta_x) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{f_X(x)\Delta_x}{1 - F_X(x)}$, en esta expresión $F_X(x)' = f_X(X)$, es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua a la edad de muerte.

La función $\frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}$ en la expresión anterior, tiene una interpretación condicional de la densidad de probabilidad. Para cada edad x, proporciona el valor de la función de densidad condicional de X a la edad exacta de x, dada la sobrevivencia de esa edad.

Se denota por $\mu(x)$. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} \\ &= \frac{-s'(x)}{s(x)}.\end{aligned}$$

Debido a las propiedades de $1 - F_X$ y de $f_X(x)$, $\mu(x) \geq 0$.

La fuerza de mortalidad también puede usarse para especificar la función de distribución de X

$$_x p_0 = s(x) = \exp(-\int_0^x \mu(s) ds) .$$

Además $F_X(x) = 1 - s(x) = 1 - \exp(-\int_0^x \mu_s ds)$.

El número esperado de defunciones entre las edades x y $x+t$, es decir, el tiempo futuro de vida de (x), o bien $T(x)$, se puede expresar de la siguiente manera

$$f_T(t) = {}_t p_x \mu_{x+t}, \ t \in (0, w-x) .$$

2.3.4. Tablas de Mortalidad

La mortalidad para un grupo de personas. Esta tabla se construye a partir de datos de mortalidad de generaciones previas. Cada columna que la integra suministra información útil sobre probabilidades de mortandad, probabilidades de sobrevivencia, el número que se espera que haya de sobrevivientes por periodo y defunciones a cierta edad.

Las tablas de mortalidad están compuestas por funciones conocidas como biométricas. Tal es el caso de l_x, representa el número de personas que alcanzan la edad x, por consiguiente l_0, es la población inicial y se le conoce como radix, en contra parte, l_w será la edad en donde no habrá un individuo con vida (recordar que la edad límite está dada por w) , es decir, el último miembro del grupo que representa la tabla de mortalidad fallece en l_{w-1}.

Cada edad al fallecimiento de uno de los integrantes del grupo inicial de l_0 individuos, recién nacidos, tiene una distribución de supervivencia definida por $s(x)$. Además , se define $\mathrm{L}(x)$ como el número de sobrevivientes del grupo a edad x, es fácil ver que el rango de esta variable aleatoria es de $(1,2,3...,l_0)$, también se supone que las variables aleatorias que representan el tiempo futuro de vida de este grupo de recién nacidos, son independientes y que $\mathrm{L}(x)$ tiene una distribución binomial con parámetros $n = l_0$ y $p = s(x)$, así $E[\mathrm{L}(x)] = l_0\, s(x)$ se representa con l_x ; esto es, $l_x = l_0\, s(x)$ describe el número esperado de personas que llegarán con vida a la edad x, del grupo inicial de recién nacidos l_0.

La función d_x es el número de fallecimientos ocurridos entre las edades x y $x+1$. Se define a ${}_nD_x$ como el número esperado de personas que fallecen entre las edades x y $x+n$, provenientes del grupo inicial l_0 y la esperanza de dicha variable aleatoria se denota por ${}_nd_x$. Para encontrar dicho valor, se sigue que ${}_nD_x$ sigue una distribución binomial, con parámetros $n = l_0$ y $s(x) - s(x+n)$, donde el segundo parámetro corresponde a la probabilidad de que recién nacido tiene de morir entre las edades x y $x+n$, así, como se hizo similarmente para l_x , la esperanza de ${}_nD_x$ es igual a la expresión $E[{}_nD_x] = {}_n d_x = l_0(s(x) - s(x+n))$.

Entonces $d_x = l_x - l_{x+1}$.

Ahora, de $l_x = l_0\, s(x)$, se tiene que $-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} = -\frac{1}{s(x)}\frac{ds(x)}{dx} = \mu_x$ y $-dl_x = l_x \mu_x dx$, dado que $l_x \mu_x = l_0 p_0 \mu_x = l_0 f(x)$, el factor $l_x \mu_x$, puede ser interpretado como la densidad esperada en el intervalo de edades $(x, x+dx)$.

Adicionalmente:

$$l_x = l_0 e^{(-\int_0^x \mu_y dy)}$$

$$l_{x+n} = 1 - e^{(-\int_x^{x+n} \mu_y dy)}$$

$$l_x - l_{x+n} = \int_x^{x+n} l_y \mu_y dy$$

Al grupo l_0, que denota un número de recién nacidos, cada uno con función de sobrevivencia $s(x)$, se denomina grupo aleatorio de supervivencia, [6].

La probabilidad de que una persona muera entre las edades x y $x+1$ se expresa como q_x, que es una relación entre d_x y l_x, o bien, los fallecimientos a la edad x exacta y el total de sobrevivientes que alcanzan la edad x, $q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$.

Se propone una expresión que describe la edad en donde (x) muere exactamente n años después, a la edad $x+n$, y es $_n q_x = \frac{d_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x}$.

Así mismo, se puede determinar la expresión en donde (x) llega a la edad n y que (x) muera en los siguientes m años: $_{n|m}\, q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x}$.

Por otro lado, la probabilidad de que (x) llegue con vida al siguiente periodo es $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$, o dicho de otra manera, es la probabilidad de que una persona sobreviva entre las edades x y $x+1$. También se puede describir la probabilidad de que (x) se mantenga con vida entre las edades x y $x+n$, se denota por $_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$.

Es concebible que a partir de las probabilidades q_x y $_nq_x$ se expresen las probabilidades de supervivencia para (x), debido a que estos son complementos de p_x y $_np_x$, respectivamente, dicho de otro modo, se cumplen que $p_x+q_x=1$ y también $_np_x+{}_nq_x=1$, por lo tanto es cierto que $p_x=1-q_x$ y también se cumple $_np_x=1-{}_nq_x$.

La función L_x se presenta de manera general, es el tiempo vivido por las personas que llegaron a edad x durante el siguiente año, es decir, antes de alcanzar la edad $x+1$. Se sigue la suposición de que el número de muertes se distribuye igualmente en todo el año, así, la aproximación aceptada es $l_{x+\frac{1}{2}}$, o bien, las personas logran exactamente la edad $x+\frac{1}{2}$ y se representa por la expresión $L_X = \int_x^{x+1} l_y dy = \int_0^1 l_{x+1} dt \approx \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$.

La tasa central de mortalidad m_x es el porcentaje de muertes sobre las personas expuestas a fallecer entre las edades x y $x+1$, $m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x}$.

Ahora, el tiempo que a la población le queda por vivir, es la función $T(x)$ y está dada por la ecuación $T(x) = \int_0^{\infty} l_{x+t} dt = \sum_{t=x}^{w-1} L_x = \frac{1}{2} l_x + \sum_{t=1}^{w-1} l_{x+t}$, donde se puede deducir de la expresión que el tiempo de vida restante se puede apreciar como la suma de la aportación en años, año por año, a partir de edad x y hasta que no queda ningún individuo con vida.

La esperanza de vida a la edad x o también conocida como vida media es el número promedio de años que a (x) le restan por vivir.

La esperanza de vida completa es el número de años que le restan por vivir a la población a la edad x, entre el número de sobrevivientes a dicha edad, $e^o{}_x = \frac{T(x)}{l_x} = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{w-1} {}_tp_x$. Se asume el concepto de uniformidad de muertes (UDD).

En el caso continuo la fórmula de la esperanza de vida completa está representada por la expresión $e^o{}_{\overline{x:n}|} = \frac{T(x)}{l_x} = \frac{\int_0^{\infty} l_{x+t}}{l_x} = \int_0^{\infty} {}_xp_t dt$.

La esperanza de vida abreviada asume que las muertes ocurren al principio del periodo, entonces la expresión que la representa es $e_x = \sum_{t=1}^{w-1} {}_t p_x$, o de otra forma, $e_x = e^o - \frac{1}{2}$.

El siguiente ejemplo ilustra a una tabla de mortalidad con las columnas descritas en este apartado.

Ejemplo 2.3.4 Tabla de Mortalidad

$x-x+t$	${}_t q_x$	l_x	${}_t d_x$	${}_t L_x$	T_x	$e^o{}_x$
30–31	0.00133	96 477	127	96 414	4 449 812	46.12
31–32	0.00134	96 350	130	96 284	4 353 398	45.18
32–33	0.00137	96 220	132	96 155	4 257 114	44.24
33–34	0.00142	96 088	137	96 019	4 160 959	43.30
34–35	0.00150	95 951	143	95 880	4 064 940	42.36
35–36	0.00159	95 808	153	95 731	3 969 060	41.43
36–37	0.00170	95 655	163	95 574	3 873 329	40.49
37–38	0.00183	95 492	175	95 404	3 777 755	39.56
38–39	0.00197	95 317	188	95 224	3 682 351	38.63
39–40	0.00213	95 129	203	95 027	3 587 127	37.71
40–41	0.00232	94 926	220	94 817	3 492 100	36.79
41–42	0.00254	94 706	241	94 585	3 397 283	35.87
42–43	0.00279	94 465	264	94 334	3 302 698	34.96
43–44	0.00306	94 201	288	94 057	3 208 364	34.06
44–45	0.00335	93 913	314	93 756	3 114 307	33.16
45–46	0.00366	93 599	343	93 427	3 020 551	32.27
46–47	0.00401	93 256	374	93 069	2 927 124	31.39
47–48	0.00442	92 882	410	92 677	2 834 055	30.51
48–49	0.00488	92 472	451	92 246	2 741 378	29.65
49–50	0.00538	92 021	495	91 773	2 649 132	28.79

2.3.4.1. Algunas Leyes de Mortalidad

Es inverosímil pensar que puedan existir leyes de mortalidad, ya que, desde el punto de vista filosófico hasta el matemático, se cree ingenuo el hecho de que la mortalidad se rija específicamente por ciertas leyes. A través del tiempo, diversos matemáticos han modelado las funciones de mortalidad y supervivencia, buscando facilitar la creación de tablas de vida.

A continuación, se enuncian funciones analíticas simples de mortalidad y supervivencia, correspondiendo a varios postulados de leyes, también se incluyen los nombres de los creadores de dichas leyes, así como el año de su publicación.

Creador	μ_x	$s(x)$	Restricciones
De Moivre (1729)	$\frac{1}{w-x}$	$1-\frac{x}{w}$	$0 \le x < w$
Gompertz (1825)	Bc^x	$e^{[-m(c^x-1)]}$	$B>0, c>1, x \ge 0$
Makeham (1860)	$A+Bc^x$	$e^{[-Ax-m(c^x-1)]}$	$B>0, A \ge -B, c>1, x \ge 0$
Weibull (1939)	kx^n	$e^{(-ux^{n+1})}$	$k>0, n>0, x \ge 0$

2.3.5. Seguros de Vida

Los sistemas de seguros, se establecieron con la finalidad de reducir el impacto financiero adverso a consecuencia de eventos de naturaleza aleatoria.

El seguro de vida es un contrato en donde el asegurador, a cambio de una prima neta única o bien periódica, está obligado con el contratante de una póliza, o al individuo que se designe como beneficiario, a pagar una suma de dinero (monto o suma asegurada) cuando la persona asegurada muera, de esta manera, el beneficio entregado por el asegurador ayudará emocional y financieramente a los seres queridos o cercanos de la persona fallecida y así dar certeza económica en un futuro.

Se han desarrollado modelos cuyo objetivo es el efecto financiero del evento aleatoria de muerte prematura. Es por eso que los modelos se construyen a partir de la variable aleatoria del tiempo de vida futura del asegurado.

En las siguientes secciones se describen los seguros más importantes de tipo continuo y de tipo discreto respectivamente.

2.3.6. Seguros de Vida de Tipo Continuo

El monto y las fechas de pago de las indemnizaciones de un seguro de vida dependen de la amplitud del intervalo que comprende de la expedición del seguro, hasta la muerte del asegurado. Así, se puede definir un modelo con a b_t como la función de indemnización y a v_t como el factor de descuento del interés desde el tiempo de pago hasta el tiempo de expedición de la póliza, además, t es la amplitud de tiempo desde la expedición del seguro hasta la ocurrencia del siniestro. Ahora, se puede definir a la función de valor presente z_t , mediante $z_t = b_t v_t$.

El tiempo transcurrido desde la expedición de la póliza hasta la muerte del asegurado es la variable aleatoria del tiempo futuro de vida del asegurado, $T = T(x)$. Por lo tanto, el valor presente que ahora se busca, es una variable aleatoria, que se denomina Z y es el valor presente actuarial de la expedición de la póliza, en otras palabras, Z representa el valor presente del beneficio que se paga al beneficiado del asegurado al momento de la muerte. Así, el modelo aleatorio está dado por $Z = b_T v_T$.

El modelo anterior busca encontrar la esperanza del valor presente de los pagos, es decir, $E[Z]$, también conocido como prima neta única. Esta suma representará la cantidad que en promedio debería cobrarse por el seguro. Asimismo, se puede hacer uso de propiedades estadísticas para conocer el riesgo de que una prima pueda ser insuficiente, en otras palabras, el riesgo de que el valor presente de los beneficios pactados, resulte mayor al de las primas obtenidas y será medido mediante la variabilidad de Z, escrito de otro modo $Var(Z)$.

2.3.6.1. Seguro Temporal a n años

El seguro temporal efectúa el pago del beneficio solamente si la persona asegurada muere dentro de un periodo específico de tiempo, que comprende desde la fecha de expedición del seguro hasta n años, es decir, el beneficio se paga si la muerte sucede dentro de dicho lapso.

Si se sigue el esquema de que una unidad monetaria se pagará al momento de la muerte de (x), se tiene

$$b_t = \begin{cases} 1 & t \le n \\ 0 & t > n, \end{cases}$$

$$v_t = v^t \qquad t \ge 0,$$

$$Z = \begin{cases} v^T & T \le n \\ 0 & T > n. \end{cases}$$

Es claro que b_t, v_t y Z son no negativos, debido a que el tiempo de vida futuro es una variable estrictamente positiva.

La prima neta única para un seguro temporal a n años con una unidad pagadera al momento de la muerte de (x), se denota como

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E[Z] = E[z_T] = \int_0^{\infty} z_t f_T(t)\,dt = \int_0^{0} v^t {}_t p_x \mu_x(t)\,dt.$$

El momento $j-ésimo$ de la distribución Z se encuentra de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E[Z^j] &= \int_0^n (v^t)^j \, {}_t p_x \mu_{x+t} \, dt \\ &= \int_0^n e^{-(\delta j)t} \, {}_t p_x \mu_x(t) \, dt. \end{aligned}$$

La segunda integral, muestra que el momento $j-ésimo$ de Z es igual a la prima neta única de un seguro temporal a n años para un monto de una unidad pagadera al momento de la muerte de (x), calculada a una fuerza de interés que es $j-veces$ la fuerza de interés determinada, o δj, [6].

Esta propiedad de los momentos de orden superior, es válida generalmente para seguros que pagan una unidad cuando la fuerza de interés es determinística, constante o no.

Teorema 2

Para un seguro sobre (x), la fuerza de interés en el tiempo t (desde la expedición de la póliza) sea t, la función de beneficio b_t y la función de descuento v_t. Si $b_t^j = b_t$ para toda t, entonces $E[Z^j]$ calculada a la fuerza de interés δ_t es igual a $E[Z]$ calculada a la fuerza de interés $j\delta_t$, para $j > 0$. Es decir $E[Z^j]@\delta_t = E[Z]@ j\delta_t$.

Demostración:

$$\begin{aligned} E[Z^j] &= E[(b_T v_T)^j] \\ &= E[b_T^j v_T^j] \\ &= E[b_T v_T^j] \end{aligned}$$

En general se tiene que

$$v_t = e^{(-\int_0^t \delta_s ds)}$$

En donde t es el tiempo que transcurre desde la expedición de la póliza hasta la muerte de (x), elevando ambos lados de la expresión anterior a la potencia j, se tiene que

$$v_t^j = e^{(-\int_0^t j\delta_s ds)}.$$

Es decir, v_t a la fuerza de interés $j\delta_t$.

Debido a la propiedad de momentos de orden superior, la $Var(Z)$ se expresa como:

$$Var(Z) = {}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})^2$$

${}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ es el valor presente actuarial para un seguro a temporal a n años para una unidad monetaria calculado a fuerza de interés 2δ.

2.3.6.2. Seguro de Vida Vitalicio

Este tipo de seguro paga inmediatamente después de la muerte de (x). Cubre específicamente la contingencia en donde la persona fallece en cualquier tiempo en el futuro, claro está, a partir de la expedición de la póliza de dicho seguro.

Si una unidad monetaria es el monto de pago al monto de la muerte de una persona de edad x, entonces,

$$\begin{aligned} b_t &= 1 \quad t \geq 0 \\ v_t &= v^t \quad t \geq 0 \\ Z &= v^T \quad T \geq 0 \end{aligned}$$

La prima neta única está dada por

$$\bar{A}_x = E[Z] = \int_0^\infty v^t{}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

Una alternativa más para poder expresar a la prima única neta del seguro de vida vitalicio es derivada del teorema 2 y es la expresión $\bar{A}_x = E[Z] = \int_0^\infty e^{-(\delta)t}{}_t p_x \mu_{x+t} dt.$

Es posible deducir la varianza a partir del segundo momento de la esperanza de la variable aleatoria Z, que está dado por $E[Z^2] = \int_0^\infty e^{-(2\delta)t}{}_t p_x \mu_{x+t} dt$. Así, el segundo momento de Z es igual al primero, pero con el doble de la fuerza de mortalidad original, es decir, $E[Z^2] = {}^2\bar{A}_x$. Entonces, la varianza de la variable aleatoria Z es $Var(Z) = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2$.

2.3.6.3. Seguro Dotal Puro

En este tipo de seguro otorga un beneficio al final de n años si y sólo si la persona asegurada sobrevive al menos n años desde la expedición de la póliza. Es claro que en un seguro dotal puro lo que se espera no es la muerte, sino que es visto como una forma de ahorro, ya que lo que el beneficiario, tanto como el asegurado esperan es una suma de dinero una vez cumplidos n años pactados en la póliza.

Si se asume el pago de una unidad monetaria, entonces

$$b_t = \begin{cases} 0 & t \leq n \\ 1 & t > n, \end{cases}$$

$$v_t = v^n \qquad t \geq 0,$$

$$Z = \begin{cases} 0 & T \leq n \\ v^n & T > n. \end{cases}$$

La prima neta única es

$$A_{\overset{\,1}{x:\overline{n|}}} = E[Z] = v^n {}_n p_x \cdot$$

Y la Varianza de Z es:

$$Var(Z) = v^{2n} {}_n p_x \, {}_n q_x = {}^2A_{\overset{\,1}{x:\overline{n|}}} - (A_{\overset{\,1}{x:\overline{n|}}})^2.$$

2.3.6.4. Seguro Dotal Mixto

El seguro dotal mixto otorga el beneficio ya sea después de la muerte del asegurado o bien si dicho asegurado sobrevive al final de un periodo de n años pactado en la póliza, es decir, el seguro dotal mixto paga por cualquiera de los dos casos, el que primero ocurra.

Si se tiene una unidad monetaria que será pagadera al momento de la muerte, se tiene

$$b_t = 1 \qquad t \geq 0,$$

$$v_t = \begin{cases} v^t & t \leq n \\ v^n & t > n, \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ v^n & T > n. \end{cases}$$

Este seguro puede ser interpretado como una unión entre el seguro dotal puro a n años y un seguro temporal a n años, ambos por el monto de una unidad monetaria.

Sea Z_1 el valor presente de la variable aleatoria correspondiente a un seguro temporal a n años, sea Z_2 la variable aleatoria que describe el valor presente de un seguro dotal puro y sea Z_3 el valor presente aleatorio de un seguro dotal mixto, se tiene que,

$$Z_1 = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ 0 & T > n, \end{cases}$$

$$Z_2 = \begin{cases} 0 & T \leq n \\ v^n & T > n, \end{cases}$$

$$Z_3 = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ v^n & T > n. \end{cases}$$

Entonces, $Z_3 = Z_1 + Z_2$, así, tomando esperanzas en ambos lados de la ecuación, la prima neta única es $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$.

Para encontrar la varianza, se parte de la ecuación $Z_3 = Z_1 + Z_2$, así

$$Var(Z_3) = Var(Z_1) + Var(Z_2) + 2Cov(Z_1, Z_2).$$

Donde:

$$Cov(Z_1, Z_2) = E[Z_1 Z_2] - E[Z_1]E[Z_2]$$

Es claro que $E[Z_1 Z_2] = 0$, así, para toda T,

$$Cov(Z_1, Z_2) = -E[Z_1]E[Z_2] = -\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\, A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}.$$

Finalmente, la varianza para un seguro dotal mixto está representada por la expresión siguiente,

$$Var(Z) = ({}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}^1_{x:\overline{n}|})^2) + ({}^2A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} - (A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1})^2) - 2(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\, A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}).$$

Es importante señalar que las primas netas únicas son positivas, por lo tanto, la covarianza entre Z_1 y Z_2 es negativa. El coeficiente de correlación Z_1 y Z_2, no es -1 debido a que no son funciones lineales una de la otra, [6].

2.3.7. Seguros de Vida de Tipo Discreto

Los seguros de vida de tipo discreto se calculan a partir del número completo de años vividos por el asegurado desde la expedición de la póliza, hasta el momento de la muerte. O bien, el pago de beneficio del seguro se realiza al final del periodo donde acurre la muerte

El modelo asociado es $Z = Z_{k+1} = b_{k+1}v_{k+1}$, donde b_{k+1} es el monto asegurado y v_{k+1} es el factor de descuento asociado al momento de pago cuando el tiempo futuro de vida truncado de la persona asegurada es k, es decir, donde (x) muere en el año $k+1$ del seguro. La variable aleatoria del valor presente Z_{k+1}, se denota con Z .

2.3.7.1. Seguro Temporal Discreto a n años

Suponiendo que se paga una unidad monetaria al final del año de la muerte, se tiene que

$$b_{k+1} = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & o.\ c. \end{cases}$$

$$v_{k+1} = v^{k+1},$$

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & K = 0, 1, \\ 0 & o.\ c. \end{cases}$$

La prima neta única está dada por

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = E[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_k p_x q_{x+k}.$$

La varianza de este seguro temporal a n años es $Var(Z) = {}^2A^{1}_{x:\overline{n}|} - (A^{1}_{x:\overline{n}|})^2$, donde

$${}^2A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\delta(k+1)}\, {}_k p_x q_{x+k}.$$

2.3.7.2. Seguro Vitalicio Discreto

Si se paga una unidad monetaria al final del año de la muerte, se tiene que $b_{k+1} = 1$ y $v_{k+1} = v^{k+1}$ entonces la prima neta única es $A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_k p_x q_{x+k.}$ y la varianza del seguro está dada por la expresión,

$$Var(Z) = {}^2A_x - (A_x)^2,$$

Donde $E[Z^2] = E[(v^{k+1})^2] = E[(e^{-(\delta(k+1))})^2] = E[(e^{-2\delta(k+1)})] = {}^2A_x$.

2.3.7.3. Seguro Dotal Mixto Discreto

Similarmente al caso continuo el seguro dotal mixto paga el beneficio ya sea después de la muerte de la persona o bien, si (x) sobrevive al final de un periodo de n años pactado en la póliza,

Si se paga una unidad monetaria,

$$b_{k+1} = 1 \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

$$v_{k+1} = \begin{cases} v^{k+1} & k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ v^n & k = n, n+1, \ldots, \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ v^n & K = n, n+1, \ldots. \end{cases}$$

La prima neta única es $A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_k p_x q_{x+k} + v^n\, {}_n p_x$. La varianza del seguro es análoga al caso continuo.

2.3.6. Anualidades

Una anualidad vitalicia es una serie de pagos que exclusivamente dependen de la sobrevivencia de una persona. Existen diversas clasificaciones, puede ser temporal, es decir, condicionada a determinado plazo de tiempo o puede ser pagadera hasta que se viva. Así mismo, los intervalos de pago pueden iniciar inmediatamente o pueden diferirse. Los pagos se pueden cobrar al principio de los periodos de pago o al final de estos.

Las anualidades vitalicias en su estudio, son sumamente similares a las que se vieron en el apartado de teoría del interés, las anualidades ciertas. La diferencia entre ellas es que la anualidad vitalicia está condicionada a la sobrevivencia de un individuo para que se efectúe el pago, lo que agrega un grado de relativa complejidad al cálculo éstas.

Las anualidades vitalicias son cruciales en las operaciones de seguros de vida, usualmente, en la práctica, los seguros de vida son adquiridos por una anualidad vitalicia de primas en lugar de una prima única. Su principal aplicación en el campo actuarial destaca en los sistemas de pensiones.

2.3.6.1. Anualidades Vitalicias Continuas

El valor presente actuarial de una anualidad vitalicia total por un monto de una unidad monetaria al año que se paga continuamente mientras (x) sobrevive se denota por $\bar{a}_x$. $T(x)$ es la variable aleatoria que refiere al tiempo futuro de vida de una persona de edad x. El valor presente de los pagos anuales hechos hasta que (x) fallece es $Y = \bar{a}_{\overline{T}|}$.

Así, el valor presente actuarial agregado de la anualidad es $\overline{a_x} = E[Y] = E[\bar{a}_{\overline{T}|}]$.

Como la función de densidad de probabilidad de T es ${}_t p_x \mu_{x+t}$, entonces $\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T}|}\, {}_t p_x \mu_{x+t} dt$. Al integrar por partes, finalmente se obtiene la expresión,

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x dt.$$

En el caso de una anualidad temporal a n años,

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} & 0 \le T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & T \ge n \end{cases}$$

El valor presente actuarial de una anualidad temporal a n años de vida por una unidad monetaria al año, que es pagadera siempre y cuando una persona de edad x sobreviva durante los próximos n años se calcula como $\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\, {}_t p_x dt$.

Para una anualidad vitalicia diferida a n años,

$$Y = \begin{cases} 0 & 0 \le T < n \\ \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{n}|} & T \ge n \end{cases}$$

Supóngase una unidad monetaria al año pagadera continuamente en tanto (x) sobreviva más allá de la edad $x+n$, el valor presente actuarial de la anualidad es

$${}_{n|}\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t\, {}_t p_x dt .$$

Un caso peculiar es el de la anualidad vitalicia con periodo de garantía de n años, ya que asegura el pago si se fallece antes o bien después de la temporada acordada. Se sigue una unidad monetaria al año que es pagadera si la persona de edad x sigue con vida un periodo de n años y los años posteriores al periodo pactado.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} & 0 \le T < n \\ \bar{a}_{\overline{T}|} & T \ge n \end{cases}$$

El valor presente actuarial de una anualidad vitalicia con periodo de garantía de n años, al suponer una unidad monetaria pagadera continua, se calcula como $\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \bar{a}_{\overline{n}|} + \int_{n}^{\infty} v^t \, {}_t p_x dt$.

2.3.6.2. Anualidades Vitalicias Discretas

Las anualidades contingentes en el caso discreto, se pueden clasificar por la manera de pago. Las anualidades pagaderas al inicio del periodo se llaman anualidades anticipadas y se representan con el símbolo $\ddot{a}_x$, en cambio, las anualidades pagaderas al final del periodo se conocen con el nombre de anualidades vencidas y se representan como a_x.

El caso discreto presenta una gran semejanza al continuo en el desarrollo de la teoría. En seguida se presentan las formas de determinar el cálculo de este tipo de anualidades, con base en sus dos vertientes de pago, anticipadas y vencidas.

Una anualidad vitalicia es una serie de pagos de una unidad monetaria, que se realizan mientras (x) sobrevive. Cuando se paga al principio del periodo, es una anualidad vitalicia anticipada y el valor presente actuarial se calcula como $\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_x$. Por otro lado, si los pagos son realizados al final de cada periodo, se trata del caso de una anualidad vitalicia vencida y la expresión para la determinación de su valor presente actuarial es $a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \, {}_k p_x$.

Las anualidades del tipo temporal corresponden a una secuencia de pagos de una unidad monetaria que se realizan durante un periodo de n años de (x). Si los pagos son llevados a cabo al principio del periodo, se trata de una anualidad temporal a n años de tipo anticipado y su valor presente actuarial es proporcionado por la expresión $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_k p_x$. En el caso de tratarse de una anualidad temporal a n años de tipo vencido, es decir, que los pagos se realicen al final de cada periodo, el valor presente actuarial está dado por $a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k \, {}_k p_x$.

Para anualidades vitalicia diferidas n años, se sigue una sucesión de pagos de una unidad monetaria durante todo el lapso de vida de (x), con la condición de que el primer pago se realiza después de n años, es decir, (x) debe sobrevivir a la edad

$x+n$. Si una anualidad de este tipo es anticipada, se tiene que ${}_{n|}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k \, {}_k p_x$. Ahora, si la anualidad es vencida y diferida n años el valor presente actuarial está dado por la expresión ${}_{n|}a_x = \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k \, {}_k p_x$.

Una anualidad con periodo de garantía de n años, asegura a (x) una serie de pagos de una unidad monetaria por lo menos n años y en caso de sobrevivir a ese periodo, el pago se sigue hasta el fallecimiento. Es una anualidad de vida entera. El valor presente actuarial para el caso de pago anticipado es $\ddot{a}_{\overline{\overline{x:n}|}} = \ddot{a}_{\overline{n}|} + \sum_{k=n}^{\infty} v^k \, {}_k p_x$ y para el enfoque vencido, el valor presente actuarial es $a_{\overline{\overline{x:n}|}} = a_{\overline{n}|} + \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k \, {}_k p_x$.

2.3.7. Primas

Uno de los principales objetivos de una prima, es cubrir el valor presente esperado de las indemnizaciones del seguro. Las primas netas anuales, cubren los pagos de indemnizaciones; en el presente apartado, las primas netas anuales asumen la forma de una anualidad vitalicia que inicia una vez que el seguro es emitido.

La intención de una empresa aseguradora es que, al momento de la expedición de la póliza para un seguro de vida, la pérdida que ésta pueda presentar, sea nula; a esta condición, también se le conoce como principio de equivalencia. Se determina la pérdida del asegurador por L, que representa la diferencia entre la variable aleatoria relacionada al valor presente de las indemnizaciones a pagarse por el asegurador y la variable aleatoria correspondiente al valor presente de la anualidad de las primas a pagarse por la persona asegurada. La condición del principio de equivalencia es $E[L]=0$.

Las primas netas son aquellas que cumplen el requisito de que la esperanza de la pérdida sea igual a cero, $E[L]=0$. Las primas netas son tales que:

$$E[\text{valor presente de los beneficios}]=\text{E}[\text{valor presente de las primas netas}]$$

Es decir, las primas netas son aquellas en donde el valor presente actuarial de los beneficios iguala el valor presente actuarial de las primas netas.

La prima neta nivelada consiste en realizar una serie de pagos secuenciados de prima, sin embargo, la prima permanece constante durante todo el periodo de pago de primas y para determinar dicha prima se debe emplear el principio de equivalencia.

Cuando se utiliza el principio de equivalencia para determinar la prima neta única, en donde la obligación del asegurado se cubre en un solo pago, ya sea para un seguro de vida o una anualidad vitalicia, la prima es igual al valor presente actuarial (VPA) de los pagos.

Ahora bien, para el caso continuo, sea una prima neta anual uniforme totalmente continua para una unidad monetaria de seguro de vida entera que se paga inmediatamente a la muerte del asegurado. Para cualquier prima que se paga continuamente, $\bar{P}$, se considera, $l(x) = v^t - \bar{P}\bar{a}_{\overline{t|}}$, que es el valor presente de la pérdida del asegurador si el fallecimiento llega a ocurrir en el tiempo t.

Ahora, se considera la variable de pérdida aleatoria $L = l(T) = v^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T|}}$ y el asegurador hace uso del principio de equivalencia, donde la prima $\bar{P}(\bar{A}_x)$, es tal que $E[L] = 0$, se sigue que,

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}.$$

Primas netas anuales totalmente continuas de acuerdo al tipo de seguro:

- Seguro de vida entera: $\bar{P}(\bar{A}_x) = \dfrac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$
- Seguro temporal a n años: $\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}) = \dfrac{\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}}{\bar{a}_{x:\overline{n|}}}$
- Seguro dotal a n años: $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n|}}) = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\bar{a}_{x:\overline{n|}}}$
- Seguro dotal puro a n años: $\bar{P}(A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}) = \dfrac{A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}}{\bar{a}_{x:\overline{n|}}}$
- Anualidad vitalicia diferida a n años: $\bar{P}({}_{n|}\bar{a}_x) = \dfrac{A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}\,\bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_{x:\overline{n|}}}$.

El caso discreto es análogo al caso continuo. Así, Primas netas anuales totalmente discretas de acuerdo al tipo de seguro:

- Seguro de vida entera: $P_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$
- Seguro temporal a n años: $P^1_{x:\overline{n|}} = \dfrac{A^1_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$

- Seguro dotal a n años: $P_{x:\overline{n}|} = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$
- Seguro dotal puro a n años: $P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$
- Anualidad vitalicia diferida a n años: $P({}_{n|}\ddot{a}_x) = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$.

2.3.8. Reservas

La reserva matemática o también conocida como reserva técnica de vida, son aquellos intereses acumulados que se generan al momento en que periódicamente un asegurado hace el pago de las primas que le corresponden en obligación con una compañía aseguradora a cambio de la entrega de una cantidad de dinero garantizada con base en la ocurrencia de algún siniestro. Cabe señalar que la acumulación de disco intereses no pertenecen a la aseguradora, en consecuencia, si una persona asegurada decide no continuar con el plan pactado, puede obtener la devolución de la reserva generada hasta ese momento.

La compañía aseguradora asume el riesgo que implica el aseguramiento de una persona, a cambio, ésta recibe el pago de una serie de primas. Dado que la aseguradora toma la responsabilidad de realizar un pago en un tiempo futuro, las primas que le son pagadas se convierten en un pasivo para dicha organización. Para el asegurado, resulta lo contrario, ya que sus pagos se tornan en un activo desde su perspectiva.

Una reserva matemática también se puede definir como la diferencia entre el valor presente actuarial de las obligaciones pendientes del asegurador y el valor presente actuarial de las primas por pago del asegurado; o bien, el método retrospectivo.

Se consideran las reservas para un seguro de vida entera de una unidad monetaria para una persona de edad x, de tipo continuo, con una prima anual por $\overline{P}(\overline{A}_{[x]})$. La reserva concerniente a una persona que sobrevive al final de t años está definida sobre el principio de equivalencia de la esperanza condicional de la pérdida prospectiva al año t, dado que la persona de edad x, ha sobrevivido al tiempo t, o bien, para $T(x) > t$, la pérdida prospectiva es,

$$ {}_tL = v^{T(x)-t} - \overline{P}(\overline{A}_{[x]})\overline{a}_{\overline{T(x)-t}|}. $$

La reserva, es la esperanza condicional, calculada bajo la condición de la condición del tiempo futuro para t, para una persona de edad selecta x. Esto es,

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_{[x]}) = \bar{A}_{[x]+t} - \bar{P}(\bar{A}_{[x]})\bar{a}_{[x]+t}. $$

Si la edad alcanzada es la única información dada en cuestión del seguro de edad x y la mortalidad agregada es utilizada para la distribución de vida futura, entonces la distribución condicional de $T(x)-t$ es la misma distribución de $T(x+t)$ y se representa como,

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}. $$

Es decir, la reserva matemática de una persona de edad x luego de t años es igual a el valor presente actuarial de la cobertura del seguro de vida durante el periodo que resta menos el valor presente actuarial de beneficio futuro de las primas pagaderas después de edad $x+t$ a una tasa anual de $\bar{P}(\bar{A}_x)$.

A continuación, se presentan las formas de calcular las reservas de primas netas continuas, para una edad x a la fecha de expedición, con duración t y una cantidad unitaria. Se sigue el modelo prospectivo.

- Plan de seguro de vida entera: ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}$.
- Plan de seguro temporal a n años: ${}_t\bar{V}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} - \bar{P}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$, $t<n$ y 0 cuando $t=n$.

- Plan de seguro dotal a n años: ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$, $t<n$ y 1 cuando $t=n$.

- Plan de seguro dotal puro a n años: ${}_t\bar{V}(A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}) = A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\ \ \ \ 1} - \bar{P}(A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1})\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$, $t<n$ y 1 cuando $t=n$.

- Plan de anualidad vitalicia diferida a n años: ${}_t\bar{V}({}_{n|}\bar{a}_x) = {}_{n-t|}\bar{a}_{x+t} - \bar{P}({}_{n|}\bar{a}_x)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$, $t \le n$ y $\bar{a}_{x+t}$ cuando $t>n$.

El caso discreto es análogo al caso continuo. Así, las formas de calcular las reservas de primas netas discretas, para una edad x a la fecha de expedición, con duración t y una cantidad unitaria siguiendo el modelo prospectivo:

- Plan de seguro de vida entera: ${}_kV_x = A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k}$.
- Plan de seguro temporal a n años: ${}_kV^{1}_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x+k:\overline{n-k}|} - P^{1}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$, $k<n$ y 0 cuando $k=n$.

- Plan de seguro dotal a n años: ${}_kV_{x:\overline{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$, $k<n$ y 1 cuando $k=n$.

- Plan de seguro dotal puro a n años: ${}_kV_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = A_{x+k:\overset{1}{\overline{n-k}|}} - P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$, $k<n$ y 1 cuando $k=n$.

- Plan de anualidad vitalicia diferida a n años: ${}_kV({}_{n|}\ddot{a}_x) = {}_{n-k|}\ddot{a}_{x+k} - P({}_{n|}\ddot{a}_x)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}$, $k<n$ y $\ddot{a}_{x+t}$ cuando $k \geq n$.

2.4. SIMULACIÓN MONTE CARLO

La Simulación Monte Carlo sin lugar a dudas es un método en donde se hace posible, de una manera más clara, la identificación del riesgo, ya que ésta se utiliza para decir, describir y aseverar sobre algún sistema que no es posible conocer a fondo debido a la complejidad implícita en él, y que, para tratar de conocerlo, se seleccionan datos particulares y específicos con base en técnicas especializadas en extracción de este tipo de información.

Así, dicha colección de técnicas estadísticas, dan paso a un modelo matemático que representa sólo una pequeña parte del sistema que trata de describir; debido al alto grado de abstracción y complejidad matemática inmersa en dichos modelos, la resolución analítica es extremadamente complicada. Por lo tanto, se ha optado por utilizar la simulación Monte Carlo; un ejercicio de simulación de la realidad. Desarrolla la simulación de varios escenarios del fenómeno a estudiar, sustituyendo la realidad por una escena teórica y se apoya en la generación de números aleatorios. En el caso de este trabajo, un ejemplo claro, es la simulación de ocurrencia de fallecimientos en una población específica.

Una simulación es una representación alternativa de lo que pudiera o no pudiera suceder realmente; es estrictamente necesario el uso de herramientas computacionales para abordar los cálculos complejos que de esta se pueden desprender. Los avances tecnológicos han dado paso a una mayor certeza cuando se hace uso de este tipo de métodos, reduciendo el riesgo y entregando mejores resultados. Es importante señalar que la simulación de Monte Carlo es un método no determinístico, es decir, no incluye parámetros ni variables totalmente fijas, sino que asigna distribuciones de probabilidad a los parámetros o bien a las variables inmersas en el estudio. De ahí la complejidad en sus cálculos analíticos tradicionales.

La técnica de Monte Carlo, al ser una aproximación estadística, puede garantizar un cierto grado de precisión estadística; es también un conjunto de técnicas que permiten, de una manera más precisa, la estimación de los parámetros en los que se enfoca el estudio, sin la necesidad de recurrir a una muestra demasiado grande; la simulación Monte Carlo generará tantos escenarios como sean necesarios, cabe mencionar, que entre mayor es el número de ensayos, los resultados tienden a ser mayormente certeros.

En el método de simulación Monte Carlo, el sistema es descrito por una distribución de probabilidad, también es basada en la aplicación de una sucesión de números aleatorios; así, se da paso a la generación de los posibles escenarios con el uso de los números aleatorios de la distribución de probabilidad. La simulación se realiza mediante un muestreo (un muestreo es la selección de elementos de un conjunto que son considerados representativos de un grupo y así poder determinar características de este) de la función de distribución, y esencialmente requiere la generación efectiva de números aleatorios que son distribuidos en el intervalo $(0,1)$.

La principal cuestión a resolver al aplicar Simulación Monte Carlo es el cómo obtener una fuente confiable de números aleatorios, ya que este es el principio fundamental con el que trabaja, de otra manera, los resultados son poco fiables. En resumen, se debe estar seguro de la aleatoriedad de los números a utilizar en el proceso.

Finalmente, la simulación Monte Carlo, a través de un modelo matemático, con el uso del poderío computacional, escenificará cada una de los posibles panoramas a ocurrir en el sistema estudiado, también mostrará el más probable de todos los escenarios e inclusive el peor de ellos, lo que permite a los analistas abordar el problema, elaborar estrategias con la finalidad de comprender dicho sistema y así brindar soluciones óptimas, viables y confiables.

Esencialmente, los experimentos de simulación Monte Carlo, son estimaciones estadísticas, en la presente sección, se describe la metodología para el desarrollo de esta y la forma en que se discrimina sobre la elección de los números aleatorios.

2.4.1. Generador de Números Aleatorios

Dado que los números son concebidos a través de algoritmos deterministas, realmente no son números aleatorios. No obstante, en las aplicaciones, lo que realmente se necesita es que dichos números pseudoaleatorios sean estadísticamente indistinguibles de los números aleatorios legítimos y que cumplen una serie de requerimientos estadísticos para ser elegibles, además se distribuyen uniformemente en el intervalo $(0,1)$ y son independientes entre sí.

En toda simulación Monte Carlo, existe un generador de números aleatorios uniforme. Es una técnica que genera una secuencia infinita $U_1, U_2, \ldots$ de números aleatorios en el intervalo $(0,1)$.

2.4.2. Generador de Variables Aleatorias

Generar una variable aleatoria X a partir de una distribución arbitraria implica el siguiente procedimiento:

- Generar números aleatorios uniformes $U_{1,} U_2, \ldots, U_k$ sobre el intervalo $(0,1)$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$
- Así, $X = g(U_{1,} U_2, U_3, \ldots, U_k)$, donde g es alguna función de valor real.

Los métodos más comunes para la generación de variables aleatorias son el método de la transformación inversa y el método de aceptación-rechazo.

2.4.2.1. Método de la Transformación Inversa

Para lograr un número aleatorio con la función de distribución conocida se aplica el método de la transformación inversa, que hace uso de la inversa de la distribución asignando un número aleatorio a esta, o bien como sigue.

Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada F. Sea F^{-1} la inversa de F y sea U un número aleatorio uniforme sobre el intervalo $(0,1)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\Pr(F^{-1}(U) \le x) &= \Pr(F(F^{-1}(U)) \le F(x)) \\
&= \Pr(U \le F(x)) \\
&= F(x)
\end{aligned}$$

Para generar una variable aleatoria X con función de distribución acumulada F, el método de la transformación inversa extrae $U \sim \mathrm{U}(0,1)$ y devuelve $X = F^{-1}(U)$.

2.4.2.2. Método de Aceptación-Rechazo

Este método de aceptación-rechazo es especialmente utilizado para muestrear funciones de densidad que son sumamente complicadas o presentan demasiadas complejidades al tratar de abordarlas con el método de la transformación inversa.

El muestreo de una función de densidad de probabilidad “difícil” $f(x)$ se lleva a cabo al generar una función de densidad de probabilidad “accesible” $g(x)$ que satisface $f(x) \le C(g)$ para alguna constante $C \ge 1$, después aceptar o rechazar la muestra arrojada con una cierta probabilidad. A continuación, se describe el algoritmo que muestra con claridad cómo funciona el método.

Algoritmo Aceptación-Rechazo:

1. Generar un valor aleatorio $X \sim g$; tomar X de la función de probabilidad g
2. Generar $U \sim \mathrm{U}(0,1)$, independiente de X.
3. Si $U \le f(X)/(C\,g(X))$, X se acepta, en otro caso se rechaza y se retorna al paso 1.

La eficiencia del método de aceptación-rechazo se define como la probabilidad de aceptación, que es $1/C$, [9].

2.4.3 @RISK

@RISK es un software desarrollado por la compañía Palisade que realiza análisis de riesgo haciendo uso de la simulación para presentar múltiples resultados probables en un modelo desarrollado dentro de Excel.

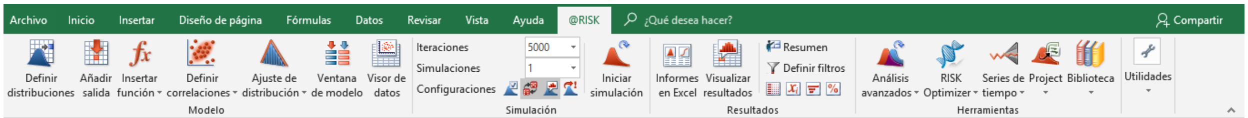
Cabe destacar que @RISK tiene la capacidad de computar y controlar matemática y objetivamente un sinfín de posibles escenarios; al mismo tiempo, le asigna a cada escenario probabilidades de ocurrencia y los riesgos asociados a cada uno de ellos, [13].

El desarrollo de la problemática estudiada en este trabajo es posible gracias al uso de @RISK, la principal ventaja de esta herramienta es que permite tomar el control del caso a estudiar al analizar los posibles eventos a ocurrir, desde las pérdidas económicas a las que una aseguradora está expuesta, el riesgo de que una prima sea insuficiente, o bien, el momento en el que el último integrante de una población fallece.

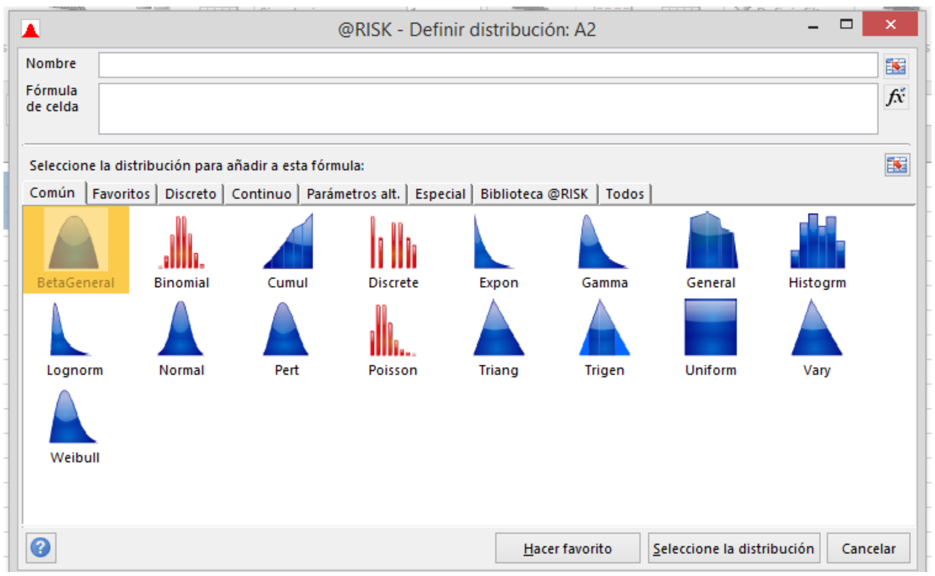
2.4.3.1 Uso de @RISK

Este software cuenta con una interfaz que es muy amable a la vista, ya que al ser complemento de Excel, muestra una barra de herramientas que son exclusivas de @RISK, donde a cada uno de los íconos contenidos, se le es asignada una tarea específica; se puede apreciar “Ajuste de Distribución”, “Definir Distribución”, “Iniciar Simulación” y de más.

A continuación, se anexa una imagen con dicha barra de herramientas.



“Definir Distribución” permite seleccionar al usuario una amplia gama de funciones de probabilidad, discretas y continuas, que pueden ser manipuladas a conveniencia del mismo.

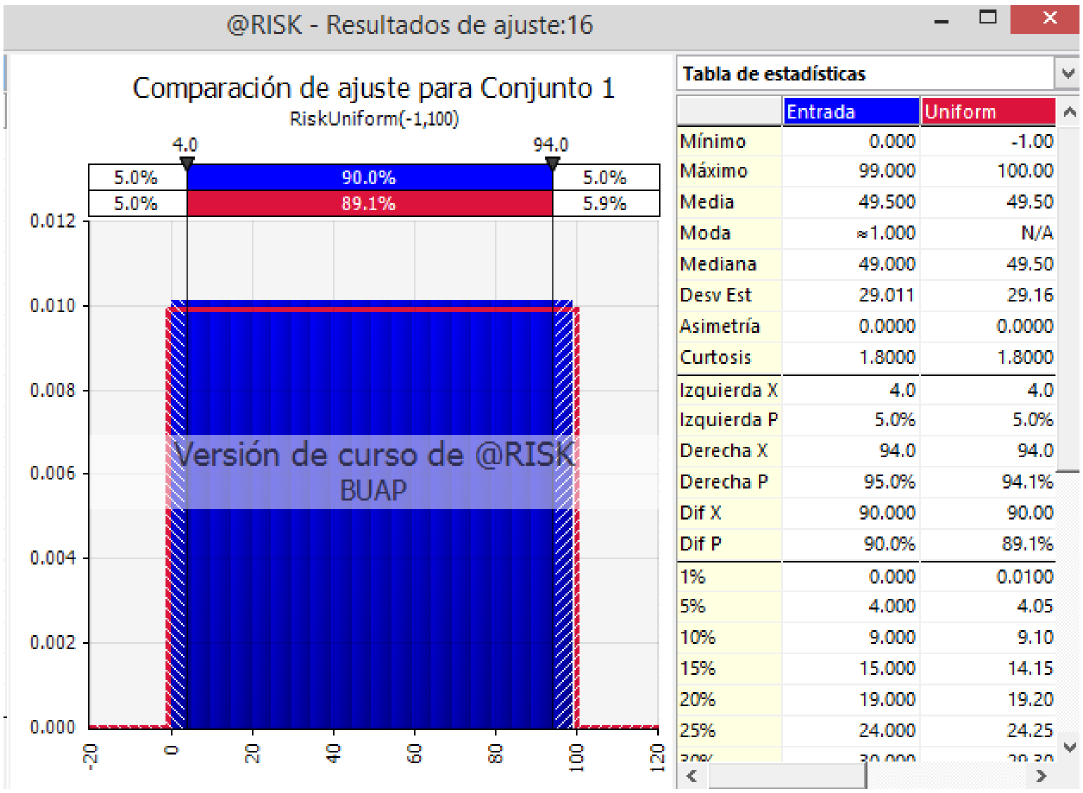


El botón relativo a “Ajuste de Distribución” ayuda a modelar un conjunto de datos, lo que hace específicamente es analizar la forma en que se distribuyen. Primeramente, analiza los datos y en seguida arroja un aproximado de la distribución que verdaderamente siguen.

El siguiente conjunto de datos está dado por una serie de números que van de 0 a 99.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Es posible deducir, por la naturaleza de los datos, que se trata de una distribución uniforme. Al llevar a cabo el proceso de ajuste de distribución, arroja la siguiente ventana con la distribución de probabilidad recomendada, el histograma de frecuencias, datos estadísticos de importancia, como percentiles, mínimo, máximo, etc. y así facilitando el análisis de los datos.

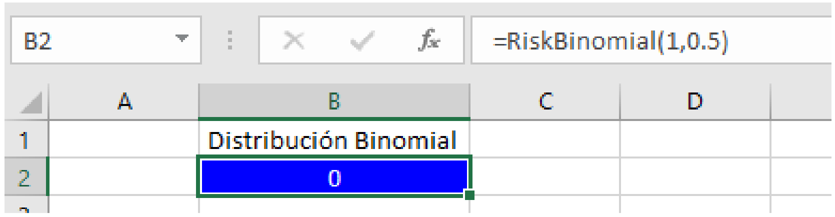


Las variables de salida, o bien, el resultado de interés en un proceso de modelación, pueden ser sencillamente calculadas. El programa permite inmediatamente, gracias al botón “Definir salida”, asignar una celda en Excel donde los cálculos posteriores se llevarán a cabo, específicamente, la simulación, a partir de dichas variables; se podrán elegir innumerables repeticiones de simulación y se culmina al desplegar un cuadro con la información necesaria para la toma de decisiones, análisis estadístico, etc.

Ejemplo 2.4.3

En la interfaz de @Risk se elige el botón correspondiente a definir distribución, se selecciona una distribución binomial con parámetros $n=1$ y $p=.05$.

En la celda de Excel, aparece la siguiente fórmula: RiskBinomial(1,0.5).



Es posible realizar el experimento $n-veces$, simplemente se reproduce la fórmula, tantas veces sea necesario. El procedimiento es idéntico al “recorrer” una fórmula para Excel. Con el fin de ilustrar correctamente el ejemplo, se repetirá 10 ocasiones el experimento binomial, asignando una celda independiente a cada una de las diez distribuciones.

	Distribución Binomial
	1
	0
	0
	1
	0
	1
	1
	1
	1
	1
Suma	7

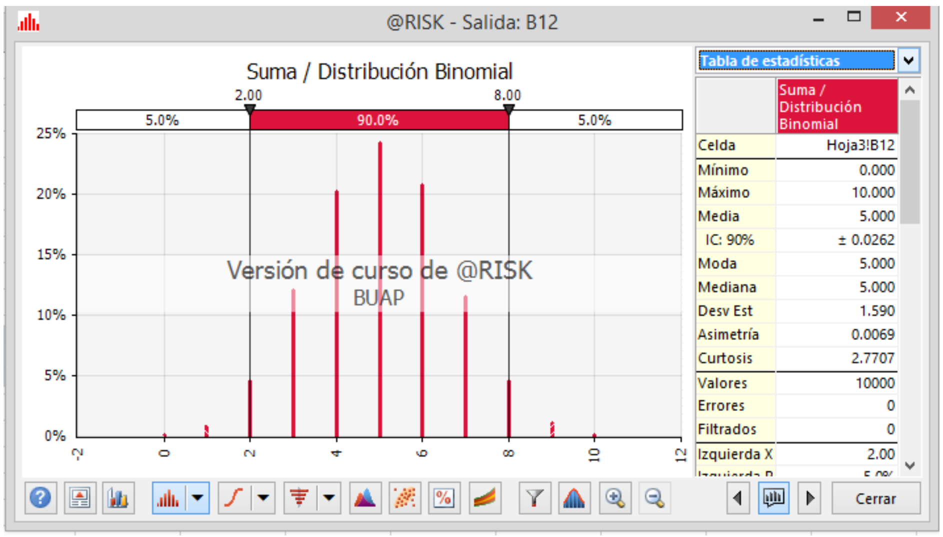
Es destacable que @Risk realiza de forma independiente el cálculo de cada uno de los ensayos.

@Risk, asigna 1 para éxito y 0 en el caso de fracasar. Al suponer que el experimento está compuesto por 10 observaciones, es de interés conocer la suma final de las distribuciones. La suma indicará el número de éxitos en 10 ensayos. Para este caso, la suma es igual a 7; se obtuvo éxito en el 70% de los casos.

Es claro que este experimento, que consta de 10 ensayos, se ha llevado a cabo una sola vez; la celda que contiene al número 7, será asignada como la “salida”, de esta forma, el resultado final, es decir, la suma de las distribuciones de probabilidad, se someterá al proceso de simulación.

La computadora, generará hasta $100,000$ iteraciones y producirá el mismo número de posibles escenarios. También es realizable el proceso de simulación hasta cien veces. Finalmente, se despliega un recuadro con el resumen de la simulación que se realizó, contiene datos como: mínimo, máximo, media, moda, etc.

Para este ejemplo, se correrán un total de $10,000$ escenarios y se realizará una sola simulación. Los resultados son los siguientes:



La suma de las distribuciones binomiales se aproxima a una distribución de probabilidad normal.

El resumen de la simulación, permite ver que el valor mínimo alcanzado es de 0, o bien, existe la posibilidad de que en un ensayo no se obtenga ningún éxito, y según la simulación, sucedería en menos del 1% de los casos ; también cabe el escenario en donde los 10 ensayos fueron éxito.

Sin lugar a dudas, @Risk, es una gran herramienta que brinda un análisis amplio, profundo, completo y minucioso de los modelos a estudiar.

Capítulo 3

3. CASO DE ESTUDIO

El cálculo actuarial es una colección de técnicas matemáticas, estadísticas y financieras que tienen como fin mitigar, prevenir y administrar riesgo. El desarrollo analítico de éste, frecuentemente es un problema debido a su complejidad.

Gran parte de los cálculos actuariales son de índole aleatoria, a menudo, es necesario proponer o establecer supuestos para hacer aproximaciones sobre los parámetros que se desean estimar. Dichos supuestos normalmente plantean ciertas dudas en las conclusiones de los experimentos debido a la complejidad de las pruebas matemáticas o bien, los desarrollos analíticos son limitados.

En el presente capítulo, se presenta el enfoque de la Simulación de Monte Carlo aplicada a los cálculos actuariales. Esta perspectiva permite simplificar los desarrollos matemáticos y brinda un mejor análisis de datos, así como también la generación de escenarios teóricos con sustento estadístico. En consecuencia, la administración del riesgo tiende a optimizarse y la toma de decisiones reduce su grado de complejidad.

En esta sección, se resolverán tres problemas actuariales mediante la Simulación de Monte Carlo, así mismo, se contrastan resultados desde el punto analítico-matemático con el enfoque de Simulación que el software @Risk brinda.

3.1. PROBLEMA DE SUFICIENCIA DE FONDO

El problema actuarial de la suficiencia de un fondo plantea que un grupo de personas contrata un seguro de vida por cierta cantidad monetaria. Cada integrante del grupo adquiere su seguro de manera independiente, la aseguradora debe aproximar la ocurrencia de muerte de cada individuo para poder calcular un fondo que sea suficiente hasta que el último integrante fallezca.

Las características del problema son las siguientes:

- Un grupo de 100 vidas independientes, cada una de ellas con la misma edad χ, están sujetas a una fuerza de mortalidad de $\mu = .04$.
- El monto de indemnización por fallecimiento es de $\$10$, pagadero al momento de la muerte.

Si los pagos al momento de la muerte serán retirados de un fondo que gana $\delta = .06$, calcular el monto mínimo cuando $t = 0$ de tal manera que la probabilidad de que habrá suficientes fondos a la mano para retirar el pago de indemnizaciones a la muerte de cada individuo, sea del 95%, [6].

En resumen, en el 95% de los casos se debe tener el valor presente de las sumas aseguradas.

Solución:

Analíticamente, para cada asegurado se tiene la función $Z_T = b_T v^T = 10v^T$ para $T \geq 0$.

El valor presente de todos los pagos que se harán es $S = \sum_{1}^{100} Z_j$, en donde Z_j es el valor presente para el pago a realizarse a la muerte del $j-ésimo$ asegurado y S es la suma de todos los pagos.

Así, el valor presente actuarial para cada Z_j es $Monto\ después\ del\ beneficio E[v^T] = E[e^{-.06T}] = \bar{A}_x$

Bajo fuerza de mortalidad constante y de acuerdo a los datos del problema:

1. $\mu(x+t) = -\ln p_x = .04$
2. ${}_t p_x = (p_x)^t$

De lo anterior, $p_x = e^{-.04}$, entonces, ${}_t p_x = e^{-.04t}$.

Para obtener la función de densidad que describa la edad de muerte de una persona, es necesario realizar el siguiente procedimiento:

Recordar que $\mu(x) = .04 = \dfrac{f_X(x)}{S_X(x)}$, donde $S_X(x) = e^{-\int_0^x .04dy} = e^{-.04x}$. Así, la función de densidad es $f_X(x) = .04e^{-.04x},\ \ para\ x > 0$.

La función exponencial no está acotada, por lo tanto $W = \infty$. Entonces, la prima individual es:

$$E[Z_j] = 10\bar{A}_x = 10\int_0^{\infty} e^{-.06t}(e^{-.04t}(.04))dt = 4$$

Así, $E[Z^2] = 10^2\ {}^2\bar{A}_x = 25$ y la varianza es $Var[Z] = 9$.

Ahora, para calcular la esperanza y la varianza de la suma de los valores presentes actuariales, se siguen las expresiones $E[S]=100(4)=400$ y $Var[S]=100(9)=900$.

El problema pide encontrar un número k tal que $P(S\leq k)=.95$, mediante una aproximación normal, debido a la independencia de las vidas, se tiene:

$$\Pr\left(\frac{S-E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\leq\frac{k-400}{30}\right)=.95$$

$$k=449.35$$

El promedio, o la esperanza del valor presente actuarial, es de 400 unidades, el recargo adicional por riesgo es de 49.35, o bien, de $.4935$ por vida. Se dice que el recargo de $.4935$ garantizaría la suficiencia del fondo en un 95% de los casos.

Este incremento se puede ver como un factor de seguridad que permite cubrir el 95% de los compromisos.

3.1.1. Aplicación de Simulación Monte Carlo

Por otra parte, el método de simulación de Monte Carlo aplicado a este problema permitiría generar escenarios que podrían mostrar el momento en el que las personas del grupo van muriendo, así como también cuál es el monto acumulado del fondo a consecuencia de cada fallecimiento. Fundamentalmente se pretende llegar al escenario teórico donde la población fenece y calificar la suficiencia del fondo. La simulación generará escenarios en los cuales el monto alcanza para cubrir los reclamos y también en los que el fondo será insuficiente. El modelo se diseñará para que en el 95% de los casos el fondo sea suficiente.

La principal ventaja de la aplicación de este método es que se puede generar una simulación de hasta 100,000 escenarios; debe tomarse en cuenta también que se simulará el tiempo de vida que le resta a cada individuo de la población mediante una función especial de @Risk, de este modo, las aproximaciones serán más precisas.

Primeramente, para calcular el tiempo de vida transcurrido hasta el fallecimiento, es decir, $T(x)$, es necesario conocer cuál es la función de densidad. Recordar que las vidas son independientes, por lo tanto, las funciones de densidad serán generadas de manera independiente. El problema plantea fuerza de mortalidad constante, la función de densidad está dada por la expresión:

$$
\begin{aligned}
f_T &= {}_t p_x \mu_{x+t} \\
&= (p_x)^t (.04) \\
&= (.04)(p_x)^t \\
&= (.04)(e^{-.04})^t \\
&= .04e^{-.04t} \quad para\, t \in (0,\infty)
\end{aligned}
$$

La función será simulada dentro de @Risk, a través de una tabulación, para generar variables aleatorias con base en una función de densidad. Así, se generarán valores aleatorizados del tiempo que le queda por vivir a una persona.

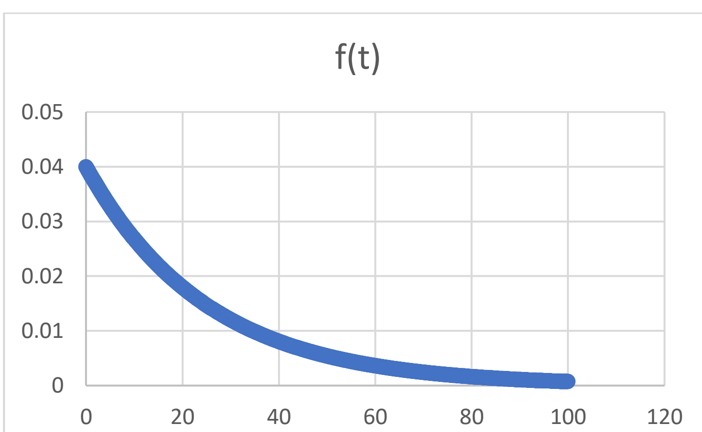
La celda B2, contiene el valor de la función de densidad asociada a $t=0$. Se graficará la función siguiendo intervalos de .1 hasta llegar a $t=100$, así, se cuenta con un mayor número de variables aleatorias.

B2 =0.04*EXP(-0.04*A2)

	A	B	C	D
1	t	f(t)		
2	0	0.04		
3	0.1	0.0398403		
4	0.2	0.0396813		
5	0.3	0.0395229		
6	0.4	0.0393651		
7	0.5	0.0392079		
8	0.6	0.0390514		

Tabla 3.1

Al graficar la tabla, se aproxima a una distribución exponencial.

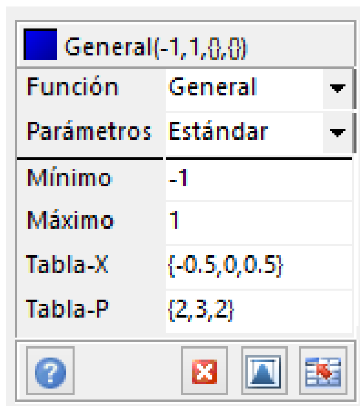


Gráfica 3.1

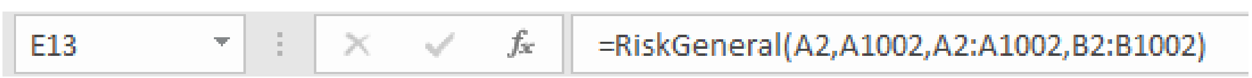
Para “aleatorizar” a los valores, es factible generar un valor aletorio $"T"$, que estará en función de la tabla, debido a que se buscan valores en el intervalo de $(0,\infty)$, esto mediante una función de @Risk llamada “Risk General”.

La función “Risk General” es una especie de polígono que es capaz de “dibujar” a la función. Es por eso que la tabla contiene una gran cantidad de valores, para que dicho polígono asemeje a una curva suavizada.

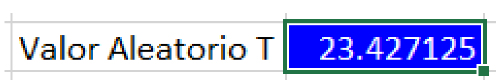
Los parámetros que maneja, son: el valor mínimo de x, el valor máximo de x, ambos parámetros correspondientes a la función que se está a punto de construir. Los parámetros restantes son un par de tablas asociadas entre sí, la tabla de x y la tabla de las alturas de la función de densidad, es decir, y.



Al insertar la información de los parámetros requeridos, con la información de la tabulación 3.1, la fórmula en la celda de Excel E13 es:

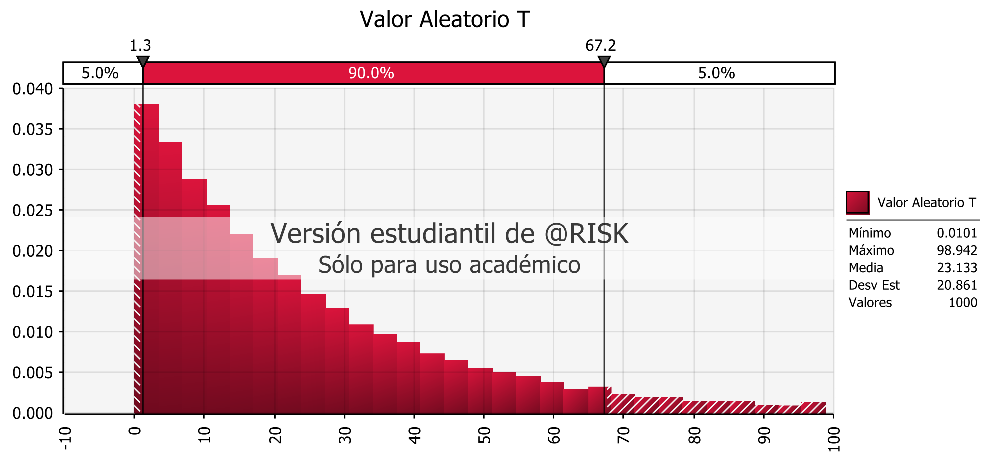


El resultado que arroja para el valor aleatorio de la función T es el siguiente:



Recordar que el resultado es un número aleatorio.

Para corroborar que los resultados de la fórmula Risk General son adecuados y similares a los de la gráfica 3.1, se procede a simular la celda E13 para obtener su gráfica.



Gráfica 3.1.1

Las gráficas 3.1 y 3.2 son sumamente parecidas, lo que significa que los parámetros ingresados son los adecuados y la aleatoriedad de los números generados para la variable aleatoria de tiempo restante de vida es correcta.

El "Valor aleatorio T" es un estimado del tiempo de vida que le resta por vivir a una persona de edad x , construido a partir de la función de densidad de t. Así, para cada persona perteneciente al grupo, se le asignará una aproximación del tiempo de vida que le queda por vivir, cada uno de los valores aleatorios asignados a cada individuo son independientes.

No. Persona	T_x
1	83.5449741
2	1.51930335
3	31.2263392
4	34.6137277
5	26.8941895
6	34.5177986
7	2.31395071
8	5.02093766
9	16.1150503
10	8.64450282
11	25.53228
12	38.0731841
13	50.2443277
14	10.1661663
15	5.58391453

16	66.5807766
17	5.94013585
18	21.2906541
19	27.6258813
20	10.1744867
21	4.02384422
22	27.1068986
23	4.41241028
24	21.6440982
25	65.0664438
26	21.1747757
27	13.2230385
28	12.6985383
29	30.5369081
30	3.05824918
31	1.46207265
32	56.6166112
33	82.3590209
34	23.6032377
35	64.9534497
36	3.188109
37	14.5962102
38	0.41733404
39	20.116273
40	48.6801081
41	56.9952065
42	1.99279093
43	24.1417741
44	74.9588412
45	33.3055405
46	27.2382228
47	4.47798656
48	29.2786922
49	22.5335183
50	34.1309588
51	5.79835778
52	23.2895696
53	2.32321109
54	32.5133836
55	62.0501318
56	8.50252216

57	4.05855661
58	65.8490123
59	27.6620162
60	0.89026606
61	25.4615595
62	13.4448228
63	31.3641618
64	32.7148957
65	55.281793
66	3.58289969
67	38.0791836
68	11.4125395
69	54.8326012
70	8.23737829
71	4.8062717
72	54.1848281
73	66.3729804
74	79.1748459
75	0.12843879
76	12.8472466
77	19.2798805
78	42.1631586
79	11.1276727
80	21.7977123
81	49.6928604
82	37.823869
83	40.7572209
84	6.00711494
85	26.7340735
86	65.469268
87	5.987808
88	0.50270363
89	3.35649718
90	27.1423833
91	5.38499767
92	5.05765729
93	3.01547935
94	52.0017006
95	26.6562229
96	35.6893979
97	19.3616052

98	25.4113242
99	4.39056068
100	37.9725194

Cabe destacar, que el número nunca será el mismo, debido a que el software recalcula el resultado constantemente, esta es una ventaja más que ofrece la simulación: la simplificación de los procesos.

Es importante recordar, que un supuesto es que todos los individuos pertenecientes al grupo, cuentan con la misma edad x.

De la solución analítica se sabe que el costo de la prima neta única de grupo es de $E[S]=400$. También se encontró mediante una aproximación normal que la cantidad mínima que el fondo debe poseer como reserva para que sea solvente en un 95% de los casos, es decir, $P(S \leq k)=.95$, es de $k=449.35$.

La solución analítica sólo es capaz de generar un solo escenario teórico; es tiempo de aplicar la simulación de Monte Carlo para generar n-posibles escenarios y exponer la baraja de posibilidades.

El monto del fondo depende de la ocurrencia de reclamaciones, esto es, la muerte de los asegurados, Cada vez que un individuo fallece, el monto es recalculado. El tiempo de vida restante es el punto clave en el cómputo del monto.

El modelo de simulación continúa con la siguiente tabla:

No. De Persona (Fallecida)	t	Monto después de pagar el beneficio
0	0	\$449.3500
1	0.128438789	\$442.8262
2	0.288895253	\$440.5690
3	0.085369587	\$432.8314
4	0.38756243	\$433.0143
5	0.571806591	\$438.1281
6	0.057230699	\$429.6352
7	0.473487576	\$432.0158
8	0.321159787	\$430.4213
9	0.009260373	\$420.6605
10	0.692268263	\$428.5011
11	0.042769834	\$419.6021

12	0.129859822	$412.8842
13	0.168388175	$407.0769
14	0.226402511	$402.6444
15	0.440944535	$403.4392
16	0.034712389	$394.2803
17	0.33200407	$392.2132
18	0.021849594	$382.7277
19	0.065576278	$374.2366
20	0.328285141	$371.6810
21	0.214665961	$366.4992
22	0.036719632	$357.3076
23	0.327340385	$354.3946
24	0.198916859	$348.6497
25	0.214443245	$343.1646
26	0.141778075	$336.0962
27	0.047672149	$327.0590
28	0.019306942	$317.4380
29	2.230263347	$352.8895
30	0.26514387	$348.5484
31	0.141980653	$341.5303
32	1.521663466	$364.1797
33	0.008320377	$354.3616
34	0.953186026	$365.2187
35	0.284866804	$361.5147
36	1.285998849	$380.5135
37	0.148708296	$373.9238
38	0.375791884	$372.4506
39	0.221784316	$367.4400
40	1.151387335	$383.7213
41	1.518840175	$410.3328
42	3.164830126	$486.1401
43	0.081724746	$478.5298
44	0.754667762	$490.6957
45	1.05850277	$512.8707
46	0.115878391	$506.4490
47	0.353444047	$507.3038
48	0.153614066	$502.0011
49	0.735806054	$514.6602
50	0.756051268	$528.5444
51	0.313668152	$528.5858
52	0.538536343	$535.9445

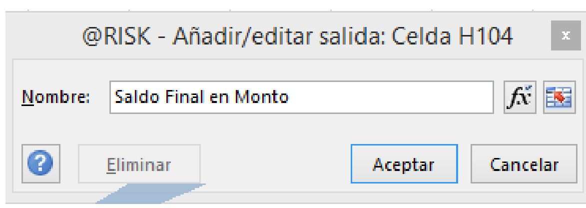
53	1.269550121	$568.3641
54	0.050235359	$560.0798
55	0.070720489	$552.4614
56	1.123942892	$581.0024
57	0.077850586	$573.7227
58	0.160116021	$569.2610
59	0.212709076	$566.5727
60	0.035484717	$557.7803
61	0.095839473	$550.9970
62	0.387658546	$553.9631
63	0.036134814	$545.1655
64	1.616676067	$590.6966
65	1.258215882	$627.0164
66	0.689431115	$643.4974
67	0.137822623	$638.8408
68	1.149221799	$674.4452
69	0.201512037	$672.6492
70	0.590644826	$686.9145
71	0.825418272	$711.7904
72	0.386839821	$718.5046
73	0.095929126	$712.6521
74	1.075670146	$750.1635
75	2.134471137	$842.6588
76	0.148650405	$840.2081
77	0.100664733	$835.2982
78	0.005999403	$825.5989
79	2.678037371	$959.5105
80	1.4059377	$1,033.9632
81	6.516949512	$1,518.6977
82	1.012752251	$1,603.8430
83	0.55146727	$1,647.7988
84	1.757372898	$1,821.0374
85	2.183127543	$2,065.8983
86	0.647773066	$2,137.7731
87	0.449191811	$2,186.1728
88	1.334818185	$2,358.4637
89	0.378595336	$2,402.6510
90	5.054925325	$3,243.9454
91	2.903317832	$3,851.2439
92	0.112994137	$3,867.4427
93	0.402824236	$3,952.0554

94	0.379744237	$4,033.1353
95	0.523968094	$4,151.9435
96	0.207796254	$4,194.0330
97	8.378064564	$6,923.3748
98	4.216004683	$8,906.1445
99	3.184175048	$10,771.0712
100	1.185953155	$11,555.4376

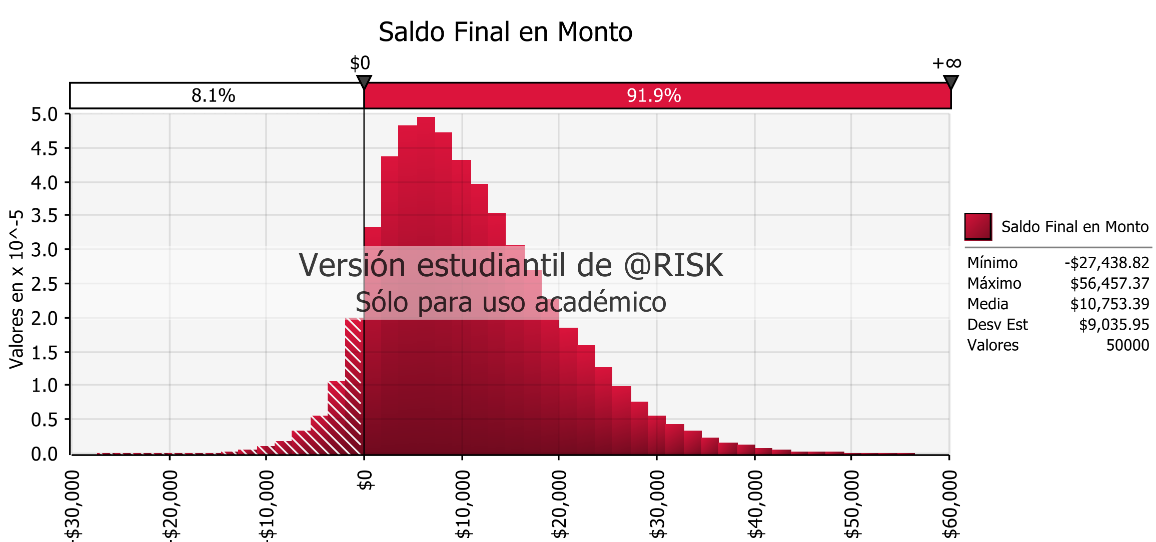
La columna “t” mide el tiempo que transcurre entre cada fallecimiento de cada persona, está directamente ligada a la función generada en Risk $T(x)$, que da una aproximación del tiempo de vida restante de cada individuo.

La columna “Monto después de pagar el beneficio” (MDPB) es el valor presente del monto en el momento que ocurre la muerte de un integrante y el beneficio se paga inmediatamente, por lo tanto, también es descontado del fondo. De esta manera, al darse el siguiente fallecimiento, el fondo es recalculado hasta llegar al fenecimiento de la población.

La última celda de la columna “Monto después de pagar el beneficio” representa el saldo final del monto, por ende, será la salida en la simulación.



Al correr 50,000 escenarios, se obtienen los siguientes resultados:

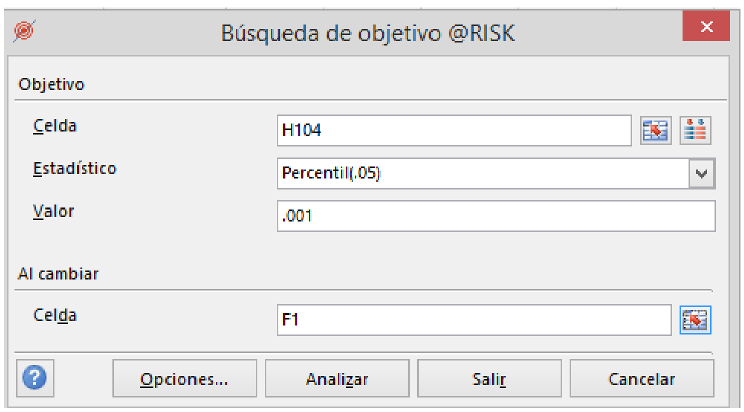


La prima $P = 449.35$ que se obtuvo mediante una aproximación normal, es decir, la carga adicional a la prima original de 400 unidades, no cubre al fondo en un 95% de los casos, sino que es insuficiente en 8.1%, es decir, solamente es suficiente el 91.9% de los casos de acuerdo a una simulación que genera 50,000 posibles escenarios teóricos.

@Risk ofrece la opción de análisis avanzados, entre ellos se encuentra “búsqueda de objetivo”, funciona mediante simulación Monte Carlo. Es posible señalar que se pretende reducir el riesgo del fondo a un 5%, como lo dicta el problema original. Así, @Risk arrojará una prima que sea sólida económicamente un 95% de los casos, utilizando simulación de Monte Carlo.

Búsqueda de objetivo despliega un menú con las siguientes características:

El objetivo es encontrar una carga adicional que cubra al fondo en un 95% de los casos. El estadístico será el percentil cinco. En el apartado de valor, se coloca un número cercano al cero ya que el valor sobre el que se apunta la carga será de cero, y así, dicho número se volverá el 5% acumulado sobre la celda de salida (Saldo Final en Monto).

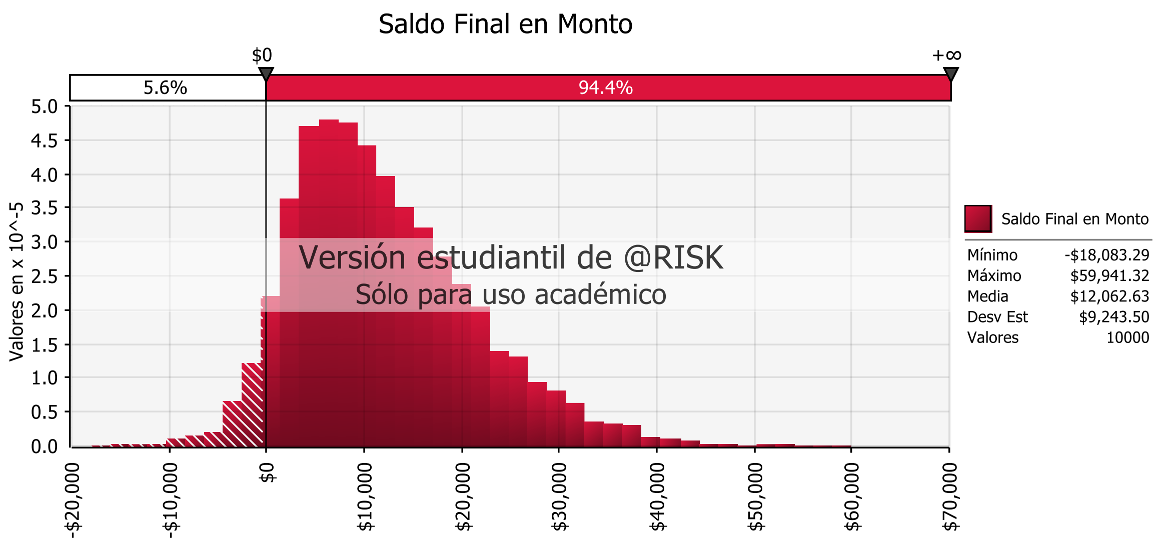


El programa, no acepta al cero como tal, por lo tanto, se hace uso de un número cercano a éste.

El resultado de la simulación para obtener la carga adicional para asegurar un 95% de solidez económica del fondo es:

Carga adicional	54.74490064

Se procede a realizar otra simulación para corroborar la suficiencia del fondo, pero, la nueva carga adicional de 54.74490064, será evaluada.



La nueva simulación es corrida 10,00 veces, con una prima neta única para el grupo de $P = 454.74490064$. El resultado final sugiere que se mantendrá la suficiencia del fondo en el 94.4% de los casos.

La simulación de Monte Carlo permitió dar una mejor aproximación al problema de suficiencia de fondo, proporcionó una prima mayormente adecuada en comparación con la que se obtuvo en la resolución analítica-matemática del problema. Sin lugar a dudas, los cálculos se simplificaron considerablemente.

3.2. PROBLEMA DE SEGURO DOTAL MIXTO

En la presente sección se da solución a un problema de seguro dotal mixto de tipo continuo que cuenta con características específicas. La solución analítica del problema se desarrolla en el apéndice A, en el anexo 1. El objetivo principal es desarrollarlo a través del método de simulación de Monte Carlo, de esta forma será posible simplificar los cálculos analítico-matemáticos y brindar una mejor aproximación al precio de la prima solicitada.

Se trata de un tipo especial de seguro dotal mixto a 35 años. Es pagadero al momento en que la persona fallece, se emite a un individuo de 30 años de edad. Las características específicas son las siguientes:

- El asegurado de 30 años de edad tiene 2 hijos, la edad de éstos al momento de la contratación del seguro es de 3 años y 6 años respectivamente.
- El beneficio por muerte es de $3000 si ambos hijos menos de 11 años a la muerte del padre.
- El beneficio a la muerte es de $2000 en caso de que solo un hijo sea menor de 11 años cuando el padre muera.

- Si los dos hijos cuentan con 11 años o más al momento de la muerte del padre, el beneficio será pagadero por $1000.
- $\mu_{30+t} = .04 \ \ para \ t \geq 0$
- $\delta = .06$
- ${}_{35}E_{30} = .0302$

Solución:

El seguro dotal mixto se puede ver como la suma de un seguro temporal a n años y un seguro dotal puro. El resultado de la prima buscada es obtenido mediante el desarrollo matemático y analítico del problema.

$$P = \bar{A}^{1}_{30:\overline{35}|} + A_{30:\overline{35}|}^{\ \ \ \ \ 1}$$

$$= \bar{A}^{1}_{30:\overline{35}|} + .0302$$

$$= 796$$

El desarrollo de los cálculos actuariales, así como de las equivalencias e integrales se encuentra en el apéndice A.

El costo de la prima es de $796 a través de una solución "tradicional".

3.2.1. Aplicación de Simulación Monte Carlo

Mediante el uso de @Risk es posible aplicar el método de simulación Monte Carlo al problema del seguro dotal especial. Además de que se puede estimar la probabilidad de insuficiencia, es decir, la probabilidad de que al asegurador no le alcance el dinero para cubrir el siniestro. También, a través del uso computacional y de simulación, se puede hacer una mejora en la prima para que sea sólida económicamente en la mayor parte de los posibles escenarios.

Sin lugar a dudas, la mayor ventaja es la simplificación de la mayoría de los cálculos inmiscuidos.

El problema indica que se sigue una fuerza de mortalidad constante. El modelo generará variables aleatorias para simular el tiempo restante de vida de (30) y así se podrá medir la probabilidad que la prima, obtenida en la sección 3.1, tiene de ser suficiente.

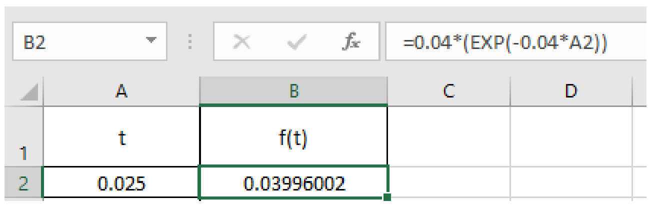
Para generar las variables aleatorias, se introduce la función de densidad asociada a t y se tabulará con la mayor cantidad de valores posibles para así poder generar un gran número de variables aleatorias. Lo anterior con vista en generar una fórmula aleatoria que calcule el tiempo restante de vida de la persona de edad 30.

La función de densidad asociada es

$$
\begin{aligned}
f_T &= {}_t p_x \mu_{x+t} \\
&= {}_{30} p_x \mu_{30+t} \\
&= (p_x)^t (.04) \\
&= (e^{-.04})^t (.04) \\
&= .04 e^{-.04t} \quad para\, t \in (0, \infty)
\end{aligned}
$$

Ahora, se da paso a la tabulación para generar variables aleatorias a partir de la función de densidad.

La celda B2 contiene a la función de densidad evaluada en t.


B2 =0.04*(EXP(-0.04*A2))

	A	B	C	D
1	t	f(t)		
2	0.025	0.03996002		

La tabla está tabulada hasta el número 150, con el fin de acercarse al cero, debido a la función exponencial. Aquí una muestra de los valores generados:

t	f(t)
0.025	0.03996002
0.05	0.03992008
0.075	0.03988018
0.1	0.03984032
0.125	0.039800499
0.15	0.039760719
0.175	0.039720978
0.2	0.039681277
0.225	0.039641615
0.25	0.039601993
0.275	0.039562411
0.3	0.039522869
0.325	0.039483365
0.35	0.039443902
0.375	0.039404478
0.4	0.039365093
0.425	0.039325747
0.45	0.039286441
0.475	0.039247174
0.5	0.039207947

Ahora, A través del uso de la función "Risk General" (ya explicada en la sección 3.1.1) se insertan los parámetros solicitados (dependientes de la tabla generada a partir de t) y así se genera un tiempo restante de vida para la persona de edad 30.

=RiskGeneral(A2,A6001,A2:A6001,B2:B6001)

C	D	E	F
Variable aleatoria T			
38.8435439			

El monto del pago de beneficio depende en su totalidad de la edad que los hijos del asegurado tengan al tiempo de la muerte de éste, por lo tanto, se usa la siguiente fórmula para determinar la cantidad pagadera:

E1 =SI(C2<5,3000,SI(C2<8,2000,1000))

Es claro que la fórmula está en función del tiempo de vida restante. El mejor de los casos es que se cumplan los 35 años del plazo de seguro, el tiempo de vida restante está acotado a dicha edad.

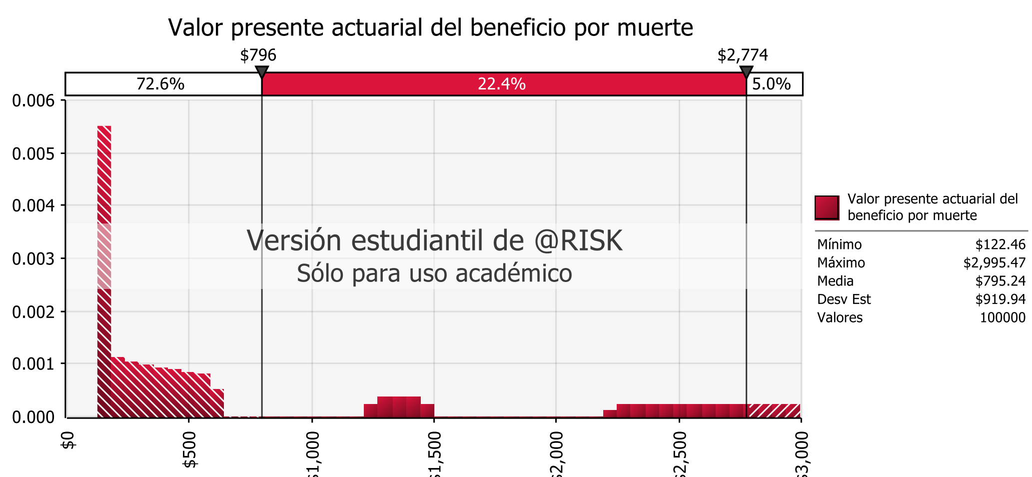
Monto b_T (condicionado)	$ 3,000.00

Finalmente, la salida del modelo es el valor presente actuarial del beneficio. Con $\delta = .06$, se procede a hacer el cálculo y la simulación.

La fórmula de la celda de salida es:

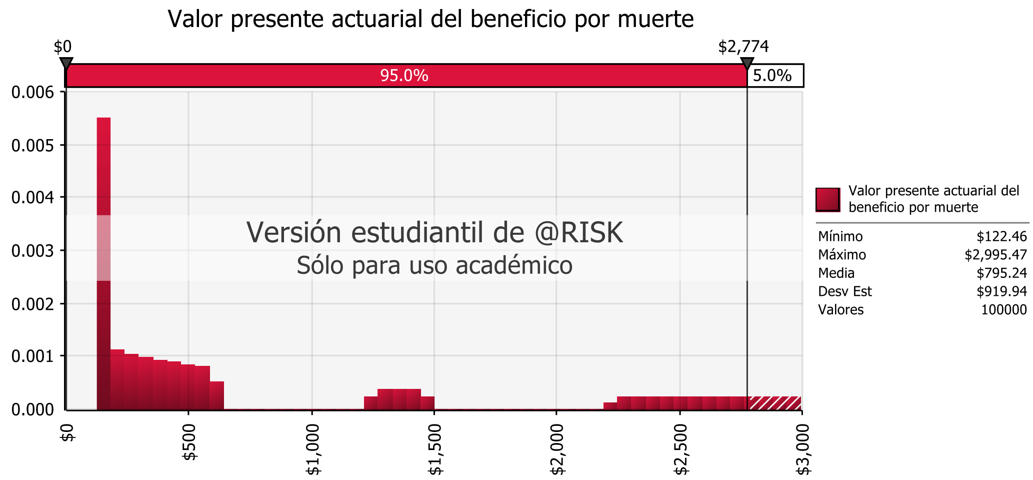
E6 =RiskOutput("Valor presente actuarial del beneficio por muerte")+E1*EXP(-0.06*E2)

Al correr 50,000 escenarios, se obtienen los siguientes resultados:



La prima obtenida mediante la solución analítica “tradicional” plantea que solamente en un 72.6% de los casos, $796 es suficiente. El riesgo que se corre es considerable.

Basta con manipular la tabla de estadísticas arrojada para dar una prima sólida; para estar cubiertos al 95% de las veces, se cobraría un saldo adicional de $1978. Así, la prima es sólida.



Claramente, los cálculos son mucho más sencillos y simplificados. La simulación de Monte Carlo permitió dar una mejor aproximación del costo de la prima para el seguro dotal mixto en donde el riesgo está cubierto a un 95%.

3.3 CÁLCULO DE AUTO SEGURO

En la presente sección, mediante el uso del método de simulación de Monte Carlo, serán evaluadas dos alternativas de seguro: la adquisición de un seguro tradicional por siniestros laborales y el auto seguro por siniestros laborales. El modelo permitirá simular los seis años siguientes de la implementación de una u otra opción de cobertura a través de una proyección que simulará los diversos escenarios teóricos en busca de la mejor decisión posible para la empresa. Se pretende reducir los costos de seguro sin sacrificar una cobertura completa.

Se tiene una base de datos de aproximadamente 500 registros para siniestros que cierta organización presenta. El siniestro no se especifica; en general, se trata de algún tipo de accidente laboral, es decir, son eventos que generan gastos inesperados para una empresa. Normalmente las corporaciones se aseguran para cubrir la ocurrencia de dichos sucesos.

Surgen diversas desventajas para la empresa que busca cobertura, por ejemplo: las aseguradoras cuentan con paquetes de seguros que tienen un tope de pago o bien, las primas pueden ser demasiado altas.

Se desarrollará un modelo con la finalidad de proponer un instrumento de cobertura alternativo al que naturalmente una aseguradora ofrece.

El modelo de auto seguro consiste en que la empresa, por sí misma, genera un fondo propio, llamado “fondo revolvente” que específicamente está destinado a cubrir determinadas necesidades, en este caso, se busca la cobertura de la empresa por cualquier tipo de siniestralidad.

El fondo recibe un depósito de manera periódica con el propósito de ser suficiente para enfrentar alguna clase de contingencia. Es crucial determinar el monto del fondo en busca de certidumbre financiera, el objetivo es mitigar el riesgo de que el fondo se agote. De igual forma es de extrema importancia definir el monto periódico a depositar para que el fondo no sea insuficiente en la mayoría de los casos de reclamación.

El modelo busca una proyección, a diez años en periodos mensuales, de cada una de las diferentes alternativas, como el pago de un seguro tradicional o la absorción de dicho gasto por la misma empresa a través de la creación de un fondo propio.

Los parámetros que se van a manejar son hipotéticos. Ambos modelos serán manipulados en una misma hoja de cálculo para ser comparados y calificar la viabilidad de las opciones y tomar una decisión que optimice costos.

3.3.1. Desarrollo del Modelo de Simulación

La base de datos, cuenta con el histórico de diez años correspondiente a siniestralidad. Se muestra la fecha de ocurrencia y el respectivo monto pagado por dicho siniestro. Los datos completos se encuentran en el apéndice B de este trabajo.

Al manipular la base datos, la información queda resumida de tal manera que cada año está dividido por meses, cada mes tiene designado el monto promedio por costo de siniestro y el número de siniestros ocurridos en dicho periodo:

Etiquetas de fila	Monto Promedio por Siniestro	Número de Siniestros
2000		
ene	$ 3,128.50	2
feb	$ 34,751.40	5
mar	$ 23,995.20	5
abr	$ 4,626.00	5
may	$ 24,922.00	5
jun	$ 6,705.67	6
jul	$ 9,516.60	10
ago	$ 24,145.00	3
sep	$ 2,000.50	2
oct	$ 22,494.00	4
nov	$ 14,293.56	9
dic	$ 12,780.60	5
2001		
ene	$ 20,083.00	4
feb	$ 69,163.25	4
mar	$ 9,821.44	9
abr	$ 18,744.00	3
may	$ 6,941.33	6
jun	$ 55,020.00	4
jul	$ 31,325.20	5
ago	$ 11,366.50	6
sep	$ 5,440.75	4
oct	$ 29,832.00	5
nov	$ 25,203.67	3
dic	$ 17,931.14	7
2002		
ene	$ 20,606.60	5
feb	$ 2,704.00	1

mar	$ 7,732.50	2
abr	$ 3,350.00	3
may	$ 9,133.50	2
jun	$ 16,592.00	4
jul	$ 27,422.40	5
ago	$ 10,167.33	3
sep	$ 35,324.00	1
oct	$ 7,395.80	5
nov	$ 15,151.50	2
dic	$ 10,244.25	4
2003		
ene	$ 34,749.25	4
feb	$ 3,753.00	1
mar	$ 56,297.80	5
abr	$ 3,280.00	1
may	$ 12,826.60	5
jun	$ 1,612.00	4
jul	$ 18,484.17	6
ago	$ 30,437.89	9
sep	$ 6,468.83	6
oct	$ 6,793.75	4
nov	$ 46,571.25	4
dic	$ 24,488.17	6
2004		
ene	$ 21,494.50	4
feb	$ 15,408.25	4
mar	$ 4,225.33	3
abr	$ 10,424.00	2
may	$ 9,031.67	3
jun	$ 22,859.00	3
jul	$ 771.00	2
ago	$ 53,732.33	6
sep	$ 5,087.00	3
oct	$ 11,402.00	1
nov	$ 7,185.83	6
dic	$ 30,121.40	5
2005		
ene	$ 7,243.00	1
feb	$ 8,577.50	2
mar	$ 14,981.75	4
abr	$ 12,246.50	2

may	$ 3,047.50	2
jun	$ 4,889.33	3
jul	$ 4,715.00	2
ago	$ 13,182.33	3
sep	$ 8,247.25	4
oct	$ 14,416.00	3
nov	$ 8,260.00	2
dic	$ 7,964.80	5
2006		
ene	$ 3,658.00	2
feb	$ 30,240.50	2
mar	$ 11,492.00	5
abr	$ 32,832.00	1
may	$ 21,601.83	6
jun	$ 16,375.50	12
ago	$ 33,231.75	4
sep	$ 38,207.17	6
oct	$ 69,484.33	6
nov	$ 8,388.50	2
dic	$ 17,821.86	7
2007		
ene	$ 39,449.50	4
feb	$ 34,416.50	4
mar	$ 16,114.33	3
abr	$ 112,579.88	8
may	$ 37,910.60	5
jun	$ 5,807.25	4
jul	$ 6,211.33	3
ago	$ 11,465.00	3
sep	$ 15,196.25	4
oct	$ 148,204.50	6
nov	$ 21,887.50	4
dic	$ 10,022.50	4
2008		
ene	$ 14,150.57	7
feb	$ 101,626.00	3
mar	$ 14,129.44	9
abr	$ 17,464.29	7
may	$ 6,616.00	2
jun	$ 10,905.43	7
jul	$ 21,591.67	3

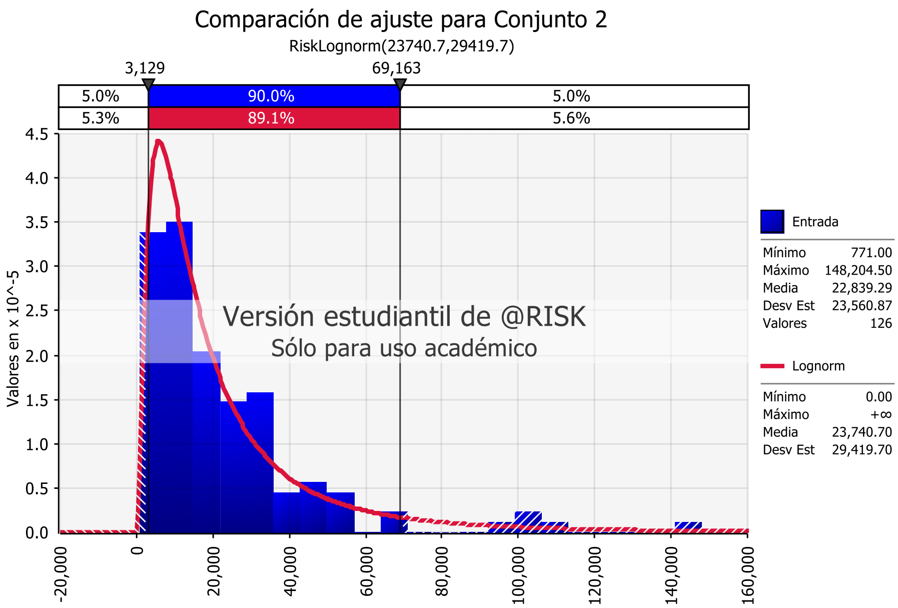
ago	$ 34,097.80	5
sep	$ 34,575.00	1
oct	$ 24,341.67	3
nov	$ 43,598.00	6
dic	$ 33,854.00	3
2009		
ene	$ 18,986.33	6
feb	$ 36,408.50	4
may	$ 48,716.75	4
jun	$ 43,356.50	2
jul	$ 8,393.40	5
ago	$ 23,821.33	3
sep	$ 12,213.75	4
oct	$ 55,383.00	6
nov	$ 3,880.50	6
dic	$ 23,847.00	4
2010		
ene	$ 25,828.20	5
feb	$ 99,474.67	3
mar	$ 14,275.33	3
abr	$ 44,787.67	6
may	$ 11,903.25	4
jun	$ 94,526.67	3
jul	$ 10,180.50	4
ago	$ 5,968.00	4
sep	$ 919.00	1

El número promedio de siniestros por mes es de 4.174603175.

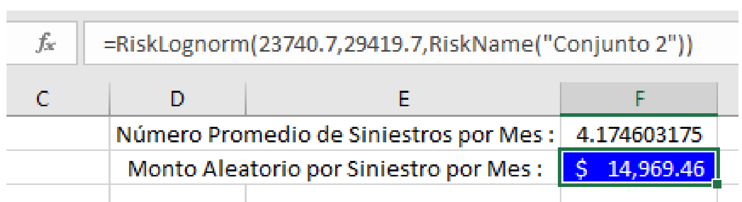
Es posible aleatorizar el monto por siniestro de cada mes. Para esto, es necesario definir la distribución que siguen los montos de reclamación. A través de @Risk se realiza un ajuste de distribución para los montos, esta opción arroja la distribución que mejor se adecúe a los datos.

Mediante una prueba de bondad de ajuste realizada por el software, se tiene evidencia estadística para proponer que los datos correspondientes al monto por siniestro de cada mes, siguen una distribución Lognormal.

A continuación, se muestra el gráfico que @Risk arroja con el ajuste de distribución para el conjunto de datos.



Para tener la función dentro de la hoja de cálculo y con sus respectivos parámetros, se escribe en una celda que contiene la fórmula que acontece:



Así, la celda aleatoria, representará un monto de siniestro por mes, diferente que es denotado por la función. Es decir, se generó la variable aleatoria del monto por siniestro por mes, de tal formo que cualquier siniestro teórico que ocurra, deberá tomar alguno de los valores delimitados por la función.

Es momento de definir los parámetros de entrada para la construcción del modelo. Cabe señalar que son supuestos.

La propuesta de seguro que ofrece la aseguradora a la empresa, es la siguiente:

- La aseguradora cobra una prima de seguro mensual de $85,000 pesos.
- El monto deducible por siniestro es de $20,000 pesos.
- El pago máximo por siniestro es de $200,000 pesos.

Por otra parte, la empresa define las características del fondo que tiene disponible para desarrollar su propio seguro.

- El monto inicial del fondo es de $3,200,000 pesos.
- La contribución mensual al fondo es de $100,000 pesos.

- La tasa de costo de oportunidad del fondo es de 14% anual nominal.
- La tasa activa del fondo es de 4% anual nominal.

La tasa activa del fondo consiste en dinero que se puede obtener a través del fondo ya que es visto como un instrumento de inversión. Ya sea que el dinero esté invertido en diversos proyectos o demás, el propósito es no dejar inactivo el capital. Los rendimientos del fondo son pequeños debido que se contemplan los retiros de efectivo a causa de las reclamaciones.

La tasa de costo de oportunidad es aquella que describe el rendimiento del dinero del fondo si éste estuviera invertido en otro instrumento de largo plazo. Es una tasa de referencia para saber cuánto dinero se pudo haber obtenido en el caso de no haber emitido el fondo. Está definida con base en parámetros que no son especificados puntualmente. Es un supuesto.

PARÁMETROS DE ENTRADA		
Prima de Seguro Mensual	$ 85,000.00	
Monto Deducible x Siniestro	$ 20,000.00	
Pago Máximo x Siniestro	$ 200,000.00	
Monto inicial del Fondo	$3,200,000.00	
Contribución Mensual al Fondo	$ 100,000.00	
Tasa de Costo de Oportunidad	14%	(Anual Nominal)
Tasa Activa del Fondo	4%	(Anual Nominal)
Horizonte del Análisis	10 Años	

El interés ganado cada mes se define por la tasa activa del fondo mensual, multiplicada por el monto inicial.

Mes	Balance en el Fondo (Inicio de Mes)	Interés Ganado
1	$ 3,200,000.00	$ 10,666.67

Para modelar el número de siniestros que se esperan por mes, es necesario utilizar una distribución de Poisson. El parámetro es el promedio de accidentes que se dieron por mes. @Risk, posee la función "Risk Poisson" donde se ingresa el parámetro de interés y enseguida genera un número aleatorio, que, a su vez, es dinámico, ya que el software constantemente genera un nuevo número. Así, la fórmula para la columna de "Número de siniestros" (mensuales), es la siguiente

```
D16    fx  =RiskPoisson(Resumen!$F$141)
```

La celda F141, es el parámetro de interés, es decir, el número promedio de accidentes mensuales (4.174603175).

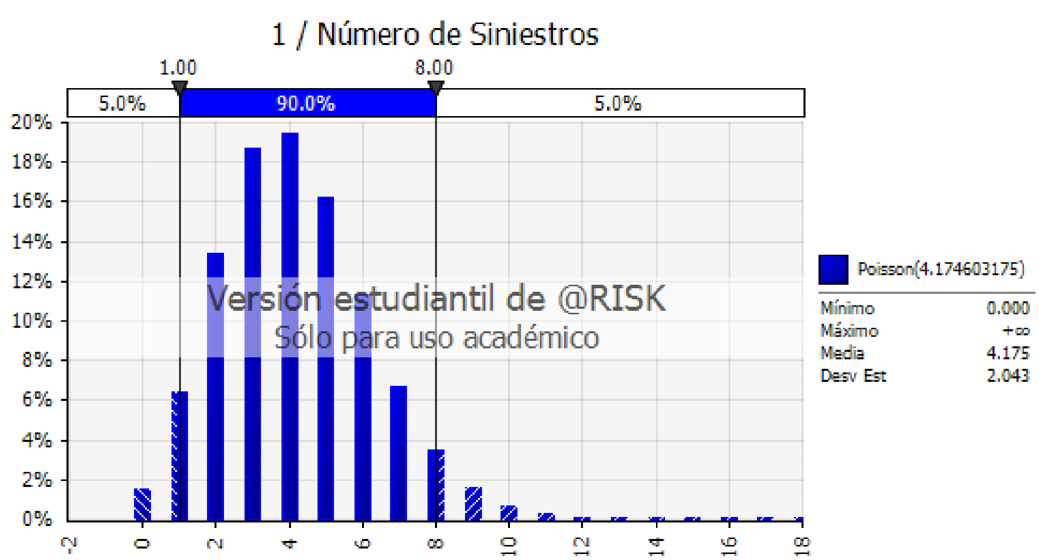
La proyección tiene un horizonte de análisis de diez años, por lo tanto, habrá 120 periodos mensuales. El modelo generará el número de siniestros de acuerdo a la cantidad aleatoria arrojada por la función Poisson. A cada siniestro se le asigna una cantidad de “Monto Aleatorio por Siniestro por Mes” con base en la función Lognormal que previamente fue establecida y definida para dicho apartado.

A continuación, se muestra un ejemplo del primer y segundo mes:

				Siniestros				
Mes	Balance en el Fondo (Inicio de Mes)	Interés Ganado	Número de Siniestros	1	2	Pérdida Total	Contribución al Fondo	Balance en el Fondo
1	$3,200,000.00	$10,666.67	2	$ 14,787.38	$ 37,267.42	$ 52,054.80	$ 50,000.00	$3,208,611.87
2	$3,208,611.87	$10,695.37	2	$ 41,631.92	$ 12,207.09	$ 53,839.00	$ 50,000.00	$3,215,468.24

Según la simulación, para los dos primeros meses, ocurrieron cuatro siniestros, dos por mes. La columna “Pérdida Total” es la suma de las cantidades aleatorias pagadas por siniestro. “Contribución al fondo” es una cantidad constante, previamente establecida y “Balance en el Fondo” es la suma del balance en el fondo al inicio del mes, el interés ganado por mes y la contribución al fondo, además, se resta la pérdida total por mes. De esta manera se obtiene el balance en el fondo al inicio del mes.

@Risk puede aproximar el número máximo de siniestros que pueden ocurrir por mes. Al definir la distribución del número de siniestros, se despliega una gráfica de la distribución de Poisson con los parámetros previamente elegidos. Así como también una gráfica con un resumen estadístico.



El 90% de los casos está entre uno u ocho siniestros. Al analizar la tabla de estadísticas, en el apartado de percentiles, se observa que en el 99% de los casos ocurren a lo más, diez siniestros:

Tabla de estadísticas

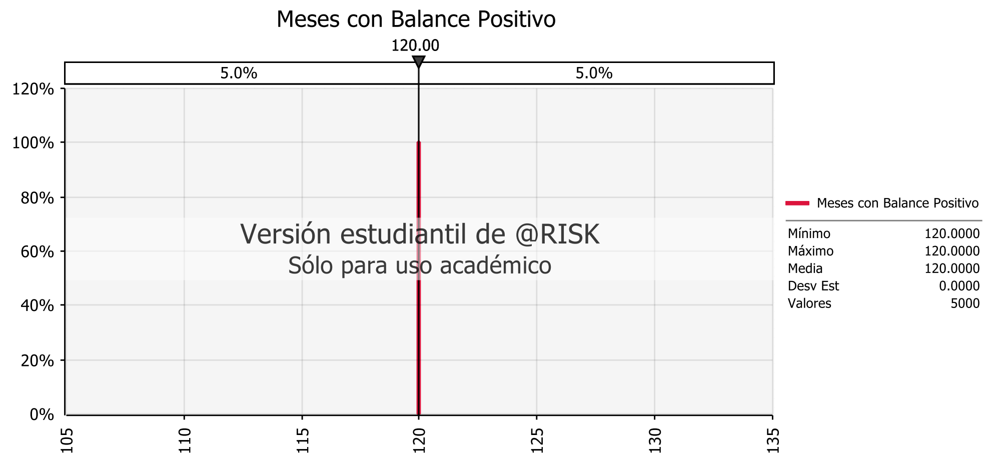
	Poisson (4.174603175)
35%	3.000
40%	3.000
45%	4.000
50%	4.000
55%	4.000
60%	5.000
65%	5.000
70%	5.000
75%	5.000
80%	6.000
85%	6.000
90%	7.000
95%	8.000
99%	10.000

Es posible que ocurran más de 10 siniestros por mes en un 1% de los casos.

La tabla es completada para los 118 periodos restantes.

El modelo continúa con el cálculo del valor presente de los intereses ganados. Se calcula con la tasa de costo de oportunidad, así, es posible hacer la comparación de cuánto dinero podría estar haciendo la empresa en dado caso que el dinero no estuviera en el fondo. Se sigue un proceso análogo para calcular el valor presente de la pérdida total. Más adelante, dichos indicadores serán utilizados para realizar la toma de decisión.

Es tiempo de determinar si el fondo tiene un balance positivo o negativo al final del horizonte de tiempo. Para esto se realiza una simulación, en donde se buscará el periodo en el que el balance del fondo comienza a ser negativo.



La simulación constó de 5000 iteraciones. El fondo, siempre mantuvo un balance positivo. Sin duda alguna, la contribución mensual al fondo es un factor fundamental en la obtención del resultado de suficiencia.

Es momento de evaluar la opción de la contratación de un seguro.

Se hará uso de la misma distribución de Poisson, con el mismo parámetro. También, el monto del siniestro está dado por la distribución Lognormal utilizada en la sección anterior. Se debe tomar en cuenta que la aseguradora solamente pagará un máximo por siniestro de $200,000 pesos. Recordar que el monto deducible por siniestro es de $20,000 pesos.

Para desarrollar el nuevo modelo de simulación del contrato del seguro, es importante definir que si el monto por siniestro es superior al deducible entonces se paga el monto reclamado menos el deducible, en caso contrario, no se realiza pago alguno. Al final de cada mes, existe un monto total pagado por la aseguradora. Habrá meses en que pueden ocurrir siniestros que son menores al pago del deducible y por lo tanto la aseguradora no realizará pago alguno, pero eso no significa que la empresa asegurada no pierda dinero debido a la ocurrencia de los siniestros.

¿Cuáles son las pérdidas que no fueron cubiertas por la empresa aseguradora?

El monto no cubierto por la aseguradora es igual a la diferencia entre la pérdida total mensual y el monto que la aseguradora cubrió en el mes. Para obtener el costo total mensual por el contrato de seguro se toma en cuenta la prima mensual de $85,000 pesos y los montos no cubiertos por ésta.

$$Total\ por\ seguro = monto\ no\ cubierto + prima$$

Monto Total Cubierto X Aseguradora	Montos no Cubiertos x la Aseguradora	Costo de Prima de Seguro	Costo Total X Contratar Seguro
$ 10,287.71	$ 51,536.34	$ 85,000.00	$ 136,536.34
$ 15,720.52	$ 98,877.12	$ 85,000.00	$ 183,877.12
$ 7,851.54	$ 117,480.61	$ 85,000.00	$ 202,480.61
$ 83,460.82	$ 20,000.00	$ 85,000.00	$ 105,000.00

Se puede ver que en los primero cuatro meses desde que se contrata el seguro, los gastos por contrato inclusive son mayores que el costo de la prima. Hay escenarios, como en el tercer mes, en donde los montos cubiertos por la aseguradora son mínimos en comparación con el dinero que la empresa tiene que invertir para la reparación de los daños.

Es de primer interés contrastar el costo del seguro contra el modelo de Auto Seguro para que la empresa obtenga la menor pérdida posible.

Se puede calcular el valor presente del costo total mensual por contrato de seguro. Será un indicador relevante para la toma de decisión. Recordar que el cálculo se realiza con la tasa de costo de oportunidad. Es viable calcular el costo de oportunidad por el manejo de fondo, es decir, qué pasaría si la empresa no tuviera el dinero invertido en el fondo, ¿cuánto dinero habría generado? El balance del fondo al inicio de mes, es multiplicado por la tasa de costo de oportunidad mensual.

Finalmente, el costo total por el auto seguro es igual a la pérdida total mensual menos el interés ganado por el fondo de cada más el costo de oportunidad por el manejo de fondo.

$$Total\ del\ Auto\ Seguro = Pérdida\ total\ mensual - Interés\ ganado + oportunidad\ por\ manejo\ de\ fondo$$

El valor presente del costo total del auto seguro se convertirá en una de las salidas del modelo, así mismo, será una salida el valor presente del costo total por contratar el seguro, Ambas salidas, se someterán a simulación. Así se llevará a cabo el contraste entre las opciones.

Para elaborar un análisis completo es necesario definir las variables de salida que son cruciales para la confrontación del costo de cada una de las alternativas. Las variables son:

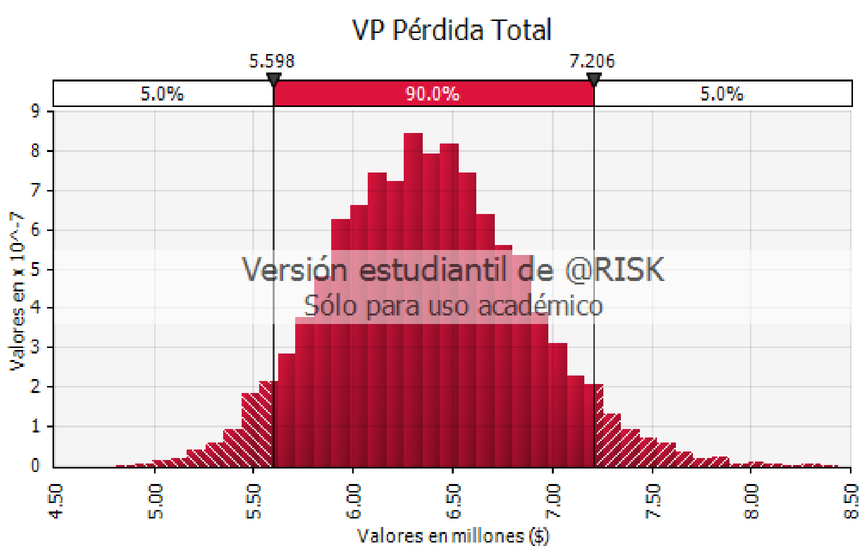
- Valor presente de la pérdida total.
- Número de meses en suficiencia.
- Valor presente del costo total por seguro.
- Valor presente del costo total por el Auto Seguro.
- Probabilidad de que el fondo sea autosuficiente.
- Probabilidad de que el fondo sea insuficiente.

Las variables de salida son sometidas a proceso de simulación de Monte Carlo.

3.3.2 Resultados de la Simulación

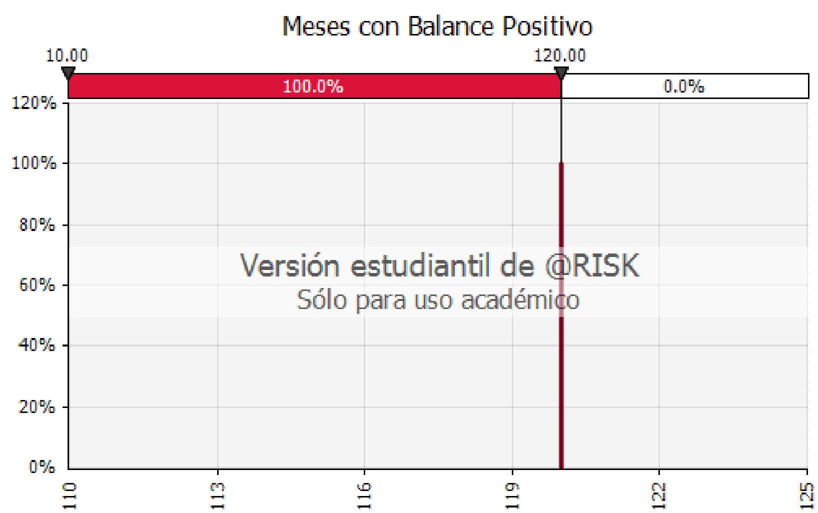
Valor Presente de la Pérdida Total

El gráfico arrojado por la simulación del valor presente de la pérdida total, indica que en el 95% de los casos el valor presente de la pérdida total, no rebasa los $7,205,759.09 pesos. Hubo una generación total de 10,000 escenarios teóricos.



	VP Pérdida Total
30%	$6,112,853.15
35%	$6,179,141.41
40%	$6,244,793.05
45%	$6,308,770.30
50%	$6,368,864.84
55%	$6,431,925.06
60%	$6,494,346.72
65%	$6,554,717.82
70%	$6,624,957.65
75%	$6,702,291.50
80%	$6,789,257.21
85%	$6,883,627.41
90%	$7,013,443.82
95%	$7,205,759.09
99%	$7,585,442.21

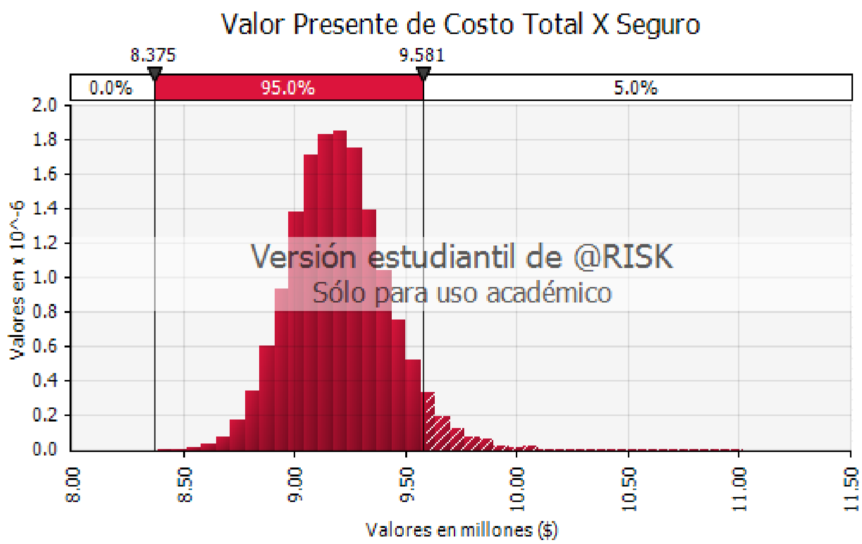
Número de Meses en Suficiencia



	Meses con Balance Positivo
30%	120.0000
35%	120.0000
40%	120.0000
45%	120.0000
50%	120.0000
55%	120.0000
60%	120.0000
65%	120.0000
70%	120.0000
75%	120.0000
80%	120.0000
85%	120.0000
90%	120.0000
95%	120.0000
99%	120.0000

Con la contribución al fondo de $100,000 pesos, el fondo mantiene 120 meses de suficiencia en un 95% de los casos.

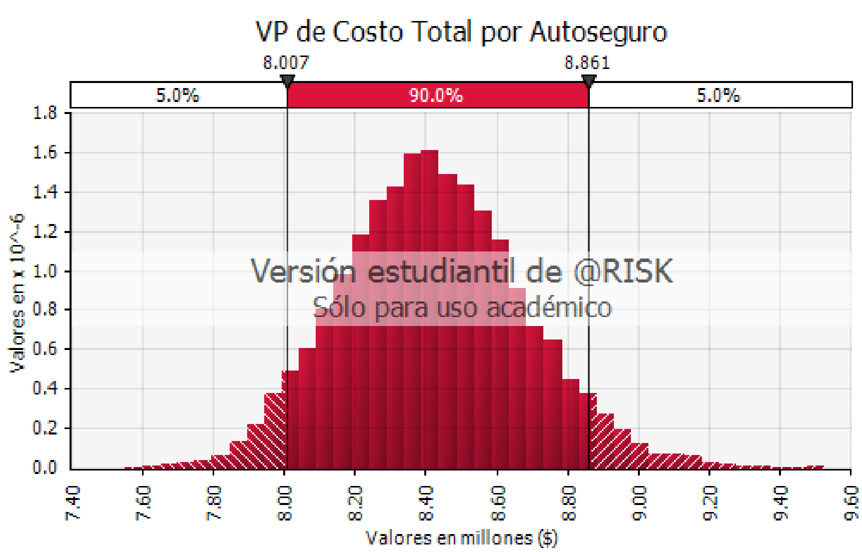
Valor Presente del Costo Total por Seguro



	Valor Presente de Costo Total X Seguro
35%	$9,111,679.87
40%	$9,140,411.77
45%	$9,167,345.00
50%	$9,194,109.96
55%	$9,221,023.15
60%	$9,248,402.32
65%	$9,276,523.62
70%	$9,305,725.06
75%	$9,339,428.94
80%	$9,379,460.49
85%	$9,423,981.71
90%	$9,486,501.88
95%	$9,580,812.88
99%	$9,799,396.10

El valor presente del costo total por contratar un seguro es de $9,580,812.88 pesos en el 95% de los casos. La simulación se llevó a cabo con 10,000 iteraciones.

Valor Presente del Costo Total por Auto Seguro

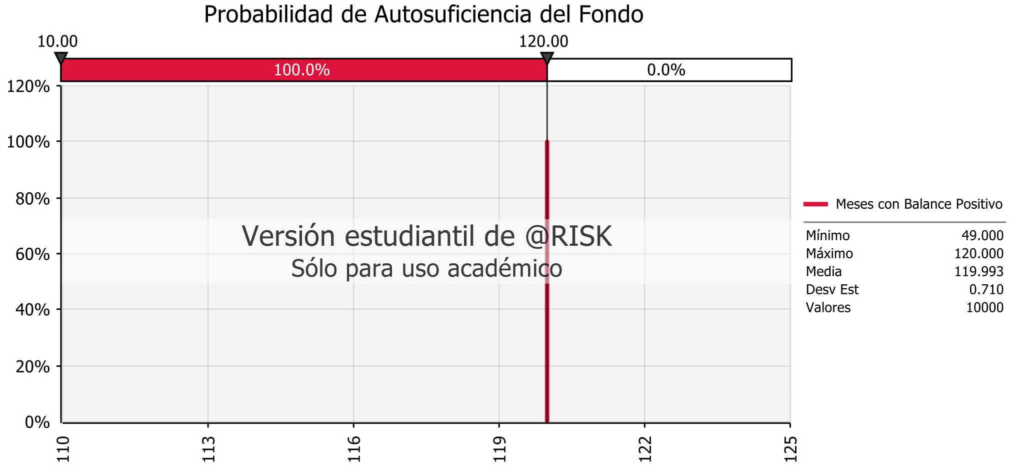


	VP de Costo Total por Autoseguro
35%	$8,317,636.20
40%	$8,350,868.68
45%	$8,382,888.55
50%	$8,412,133.45
55%	$8,444,742.28
60%	$8,478,881.35
65%	$8,514,214.47
70%	$8,550,407.19
75%	$8,588,949.50
80%	$8,632,301.25
85%	$8,686,180.02
90%	$8,757,226.74
95%	$8,861,045.76
99%	$9,079,099.47

El valor presente del costo total por el Auto Seguro es de $8,861,045.76 en el 95% de los 10,000 escenarios teóricos desarrollados mediante la simulación de Monte Carlo.

Probabilidad de que el Fondo sea Autosuficiente

La probabilidad de que el fondo sea autosuficiente por los 120 periodos es de 1. Por lo tanto, la probabilidad de insuficiencia es de cero.



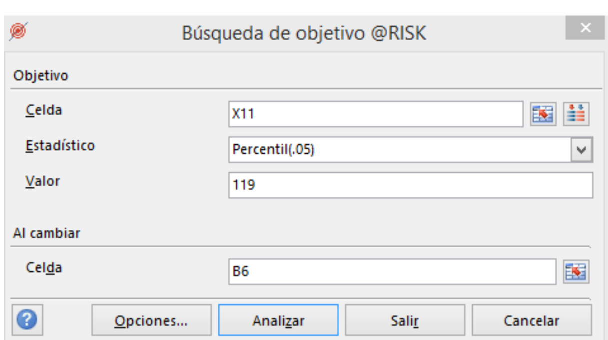
Finalmente, la probabilidad de que el valor presente del costo por el seguro sea mayor que el valor presente del costo por Auto Seguro es de 1. Es decir, representa un gasto mayor para la empresa contratar un seguro. La opción idónea es crear el fondo para Auto Seguro.

¿De qué monto debería ser la contribución mensual al fondo para garantizar una probabilidad del 95% de suficiencia del fondo?

Debido a que los saldos siempre fueron positivos, se levanta la sospecha de que las contribuciones al fondo podrían ser menores a los cien mil pesos y así detonar en un mayor ahorro para la empresa.

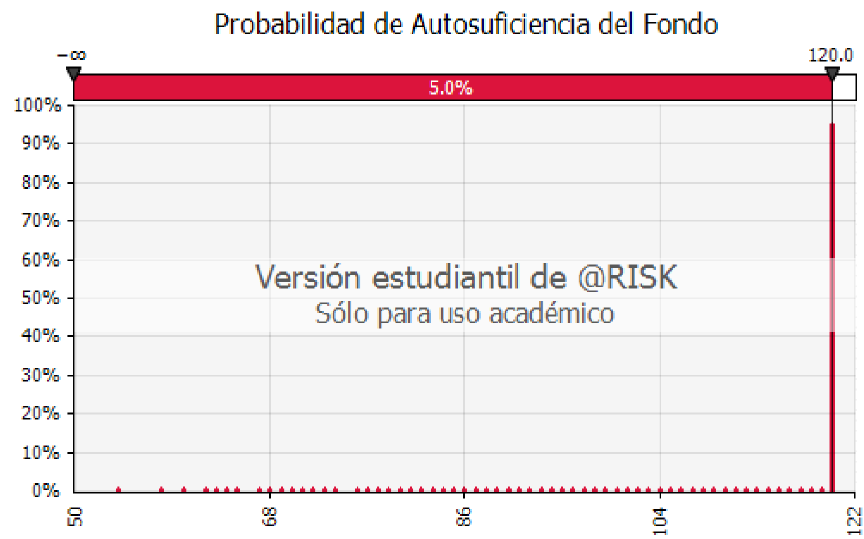
Con la ayuda de @Risk se puede encontrar una aproximación para que el aporte mensual al fondo sea óptimo y el fondo mantenga un balance positivo en un 95% de los casos. La función “Buscar Objetivo” es la encargada de realizar dicha tarea. Así, se tratará de encontrar la aportación mensual ideal al fondo.

Las entradas de búsqueda de objetivo son:



La celda X11 contiene el número de meses en suficiencia. Se busca el percentil 95 para el valor de 119 meses. La celda B6 alberga al monto de contribución mensual, el objetivo.

El monto óptimo de contribución mensual al fondo es de $79,000 pesos. Cubriendo un 95% de suficiencia.



	Meses con Balance Positivo
Celda	Modelo!X11
Mínimo	54.000
Máximo	120.000
Media	119.115
IC: 90%	± 0.0823
Moda	120.000
Mediana	120.000
Desv Est	5.004
Asimetría	-7.0504
Curtosis	58.9673
Valores	10000
Errores	0
Filtrados	0
Izquierda X	−∞
Izquierda P	0.0%

La tabla muestra que en el 5% de los casos no fue suficiente el fondo. La tabla de estadísticas plantea el peor escenario de los 10,000 simulados, en donde al mes 54 el fondo fenece.

Es claro que la mejor opción es diseñar un plan de Auto Seguro.

CONCLUSIONES

El objetivo principal de la presente tesis fue aplicar el método de simulación Monte Carlo al cálculo actuarial, con el fin de simplificar las soluciones analíticas tradicionales, además de proporcionar mejores aproximaciones para la determinación de las primas, frecuencia de las reclamaciones y la suficiencia de los fondos destinados a la administración del riesgo.

Además, el uso del software @Risk, para emplear la simulación de Monte Carlo, permitió un análisis más a fondo de los diferentes casos de estudio; la generación de miles de escenarios teóricos, representa una gran ventaja para lograr mitigar riesgos.

Particularmente, en el primer caso de estudio, la simulación fue de gran ayuda para aproximar la frecuencia de las reclamaciones en un seguro de grupo. El software logró generar para cada individuo, un tiempo de vida restante que fue aleatorio y simulado miles de veces para ser certero, así, se logró dar un monto mínimo de fondo que fue suficiente para pagar a todos los beneficiarios de los asegurados en un 95% de los escenarios. Sin lugar a dudas, los cálculos fueron simplificados y los resultados de cada uno de ellos significativos para la determinación de la cantidad adicional a cobrar por asegurado para que el fondo fuera suficiente.

El seguro dotal mixto en el segundo caso de estudio representa un problema significativo ya que plantea diferentes condicionamientos para el pago del seguro. La solución mediante simulación fue rápida y sencilla; @Risk generó variables aleatorias con base en una función de densidad (al igual que en el primer caso) para dar un estimado aleatorio del tiempo restante de vida del asegurado. La construcción del modelo de simulación incluyó las condiciones de pago y pudo dar una prima económicamente sólida a través del proceso de simulación.

En ambos casos se contrastan las soluciones analítico-matemáticas tradicionales contra las soluciones obtenidas por modelos de simulación; las conclusiones de las soluciones analítico-matemáticas planteaban dudas significativas en las conclusiones. Las primas no eran sólidas ni suficientes sino hasta ser modeladas mediante el método de Monte Carlo. Lo anterior se debe a que dicho método obedece la generación de miles de escenarios, así, con mayor información, se obtienen mejores conclusiones y resultados suficientes y sólidos.

El modelo más complejo de todos es el de Auto Seguro. Los cálculos además de complejos, son demasiado meticulosos; el software permite armonizar todo el modelo y concluir adecuadamente. Sin una simulación, sería muy atrevido aseverar sobre el modelo. No se contaría con suficiente evidencia estadística.

Las ventajas de usar simulación de Monte Carlo es que los análisis pueden ser tan extensos como uno mismo decida. Los cálculos actuariales, sin lugar a dudas, se hacen más simples. Los parámetros son más precisos. Las aproximaciones para las frecuencias de ocurrencia de los siniestros son más confiables.

Finalmente, otra de las grandes ventajas que la simulación de Monte Carlo brinda, es la generación de iteraciones, escenarios y simulaciones teóricas del suceso aleatorio de interés. Son ensayos de realidad que sirven para facilitar la toma de decisiones.

La simulación de Monte Carlo aplicada al cálculo actuarial simplifica los cálculos tradicionales, ofrece alternativas importantes para la administración de riesgos y plantea mejores aproximaciones de los parámetros de interés.

APÉNDICE A

Anexo I: Cálculo de Seguro Dotal Mixto (Sección 3.2)

El seguro dotal mixto se puede ver como:

$$P = \bar{A}^{1}_{30:\overline{35}|} + A_{30:\overline{35}|}^{\ \ \ \ 1}$$

Se sabe que $A_{30:\overline{35}|}^{\ \ \ \ 1} = .0302$, entonces $P = \bar{A}^{1}_{30:\overline{35}|} + .0302$.

Ahora, procede el cálculo de la prima para el seguro temporal

$$\bar{A}^{1}_{30:\overline{35}|} = \int_0^{35} e^{-.06t}\,.04e^{-.04t}dt = .04\int_0^{35} e^{-.1t}dt$$

Al considerar el condicionamiento sobre el beneficio, se tiene que la prima para el seguro temporal es

$$P = .04\left(3000\int_0^{5} e^{-.1t}dt + 2000\int_5^{8} e^{-.1t}dt + 1000\int_8^{30} e^{-.1t}dt\right) \approx 765$$

Finalmente

$$P_{final} \approx 765 + 1000(.0302) \approx 796\,.$$

APÉNDICE B

Anexo II: Base de Datos de Siniestralidad

La tabla contiene dos columnas. La columna “Fecha” corresponde a la fecha en que el siniestro ocurrió. La columna “Siniestralidad” muestra el monto pagado por la ocurrencia del suceso.

FECHA	SINIESTRALIDAD
13-ene.-00	1,260
20-ene.-00	4,997
9-feb.-00	42,915
17-feb.-00	6,022
21-feb.-00	64,837
22-feb.-00	2,290
24-feb.-00	57,693
3-mar.-00	16,851
14-mar.-00	2,331
16-mar.-00	71,868
21-mar.-00	1,263
22-mar.-00	27,663
7-abr.-00	1,672
7-abr.-00	1,537
11-abr.-00	4,074
12-abr.-00	5,809
13-abr.-00	10,038
2-may.-00	28,632
2-may.-00	16,019
18-may.-00	78,405
24-may.-00	235
24-may.-00	1,319
3-jun.-00	10,948
7-jun.-00	1,440
8-jun.-00	14,579
8-jun.-00	5,230
22-jun.-00	4,233
30-jun.-00	3,804
1-jul.-00	13,785

3-jul.-00	10,436
6-jul.-00	8,342
18-jul.-00	1,333
21-jul.-00	3,592
22-jul.-00	827
26-jul.-00	10,292
26-jul.-00	2,681
27-jul.-00	43,151
31-jul.-00	727
11-ago.-00	385
20-ago.-00	52,783
23-ago.-00	19,267
18-sep.-00	3,080
23-sep.-00	921
2-oct.-00	43,577
16-oct.-00	9,281
22-oct.-00	27,406
31-oct.-00	9,712
2-nov.-00	6,536
3-nov.-00	13,209
4-nov.-00	7,112
10-nov.-00	16,984
18-nov.-00	55,528
18-nov.-00	9,857
20-nov.-00	1,949
25-nov.-00	5,269
28-nov.-00	12,198
1-dic.-00	9,812
7-dic.-00	9,790
16-dic.-00	27,572
24-dic.-00	9,804
26-dic.-00	6,925
13-ene.-01	2,200
16-ene.-01	3,502
27-ene.-01	3,106
29-ene.-01	71,524
2-feb.-01	4,596
15-feb.-01	11,925
25-feb.-01	204,085
28-feb.-01	56,047
2-mar.-01	9,383

4-mar.-01	34,773
9-mar.-01	3,293
12-mar.-01	14,423
18-mar.-01	12,635
18-mar.-01	3,722
24-mar.-01	6,042
28-mar.-01	2,275
30-mar.-01	1,847
3-abr.-01	29,220
7-abr.-01	7,442
27-abr.-01	19,570
5-may.-01	8,147
11-may.-01	14,376
27-may.-01	668
28-may.-01	7,670
31-may.-01	3,176
31-may.-01	7,611
3-jun.-01	3,548
3-jun.-01	143,801
6-jun.-01	1,857
23-jun.-01	70,874
2-jul.-01	38,620
4-jul.-01	43,828
10-jul.-01	11,243
10-jul.-01	16,144
17-jul.-01	46,791
18-ago.-01	32,987
21-ago.-01	4,437
25-ago.-01	6,045
27-ago.-01	3,729
29-ago.-01	1,694
31-ago.-01	19,307
1-sep.-01	5,851
2-sep.-01	2,526
12-sep.-01	9,032
16-sep.-01	4,354
3-oct.-01	20,274
4-oct.-01	27,792
16-oct.-01	40,263
20-oct.-01	50,775
25-oct.-01	10,056

8-nov.-01	48,974
13-nov.-01	19,145
15-nov.-01	7,492
2-dic.-01	23,129
8-dic.-01	63,259
10-dic.-01	1,209
13-dic.-01	2,330
22-dic.-01	7,554
22-dic.-01	18,724
26-dic.-01	9,313
11-ene.-02	9,763
14-ene.-02	2,545
19-ene.-02	4,082
25-ene.-02	57,723
28-ene.-02	28,920
4-feb.-02	2,704
10-mar.-02	13,366
17-mar.-02	2,099
12-abr.-02	2,311
24-abr.-02	7,367
29-abr.-02	372
13-may.-02	2,393
22-may.-02	15,874
2-jun.-02	3,511
3-jun.-02	44,456
16-jun.-02	16,843
20-jun.-02	1,558
4-jul.-02	66,434
10-jul.-02	11,690
19-jul.-02	46,743
21-jul.-02	12,000
22-jul.-02	245
4-ago.-02	12,079
19-ago.-02	16,324
19-ago.-02	2,099
23-sep.-02	35,324
19-oct.-02	14,994
20-oct.-02	7,648
25-oct.-02	7,689
27-oct.-02	5,524
30-oct.-02	1,124

1-nov.-02	20,811
10-nov.-02	9,492
7-dic.-02	613
11-dic.-02	36,232
23-dic.-02	1,085
23-dic.-02	3,047
3-ene.-03	5,009
10-ene.-03	11,802
23-ene.-03	836
27-ene.-03	121,350
25-feb.-03	3,753
2-mar.-03	219,700
13-mar.-03	1,235
13-mar.-03	414
24-mar.-03	52,470
30-mar.-03	7,670
2-abr.-03	3,280
1-may.-03	28,558
19-may.-03	3,386
22-may.-03	22,246
24-may.-03	3,975
30-may.-03	5,968
9-jun.-03	1,063
26-jun.-03	843
28-jun.-03	1,044
29-jun.-03	3,498
3-jul.-03	5,154
6-jul.-03	54,984
7-jul.-03	10,797
8-jul.-03	31,129
18-jul.-03	3,974
23-jul.-03	4,867
1-ago.-03	5,580
3-ago.-03	970
4-ago.-03	3,260
9-ago.-03	224,359
13-ago.-03	7,284
19-ago.-03	9,069
24-ago.-03	8,719
29-ago.-03	6,967
31-ago.-03	7,733

2-sep.-03	1,159
9-sep.-03	6,579
13-sep.-03	835
24-sep.-03	9,662
25-sep.-03	6,590
30-sep.-03	13,988
10-oct.-03	10,880
11-oct.-03	7,333
27-oct.-03	8,416
28-oct.-03	546
8-nov.-03	11,433
14-nov.-03	3,282
19-nov.-03	170,756
28-nov.-03	814
9-dic.-03	37,416
9-dic.-03	4,637
20-dic.-03	14,110
22-dic.-03	14,007
29-dic.-03	53,470
30-dic.-03	23,289
13-ene.-04	6,395
14-ene.-04	32,973
18-ene.-04	21,599
31-ene.-04	25,011
14-feb.-04	3,688
17-feb.-04	3,515
19-feb.-04	823
29-feb.-04	53,607
19-mar.-04	10,148
24-mar.-04	323
29-mar.-04	2,205
7-abr.-04	17,563
29-abr.-04	3,285
14-may.-04	2,569
19-may.-04	9,411
29-may.-04	15,115
6-jun.-04	21,913
16-jun.-04	9,615
16-jun.-04	37,049
12-jul.-04	289
24-jul.-04	1,253

14-ago.-04	23,020
19-ago.-04	58,961
23-ago.-04	13,497
25-ago.-04	159,004
26-ago.-04	40,662
31-ago.-04	27,250
9-sep.-04	11,910
15-sep.-04	642
15-sep.-04	2,709
8-oct.-04	11,402
7-nov.-04	8,758
9-nov.-04	4,738
17-nov.-04	837
20-nov.-04	1,607
21-nov.-04	26,075
26-nov.-04	1,100
12-dic.-04	1,874
14-dic.-04	3,951
16-dic.-04	108,440
17-dic.-04	21,852
27-dic.-04	14,490
13-ene.-05	7,243
12-feb.-05	9,496
15-feb.-05	7,659
4-mar.-05	45,027
11-mar.-05	10,331
12-mar.-05	1,210
16-mar.-05	3,359
3-abr.-05	24,054
12-abr.-05	439
17-may.-05	3,169
30-may.-05	2,926
22-jun.-05	8,112
28-jun.-05	4,883
29-jun.-05	1,673
6-jul.-05	5,910
15-jul.-05	3,520
6-ago.-05	14,555
20-ago.-05	14,675
31-ago.-05	10,317
1-sep.-05	6,210

9-sep.-05	7,642
22-sep.-05	2,945
24-sep.-05	16,192
5-oct.-05	1,524
14-oct.-05	35,688
16-oct.-05	6,036
26-nov.-05	7,143
30-nov.-05	9,377
4-dic.-05	3,963
7-dic.-05	445
13-dic.-05	6,481
15-dic.-05	13,596
27-dic.-05	15,339
1-ene.-06	6,878
30-ene.-06	438
11-feb.-06	55,675
25-feb.-06	4,806
1-mar.-06	17,238
2-mar.-06	15,374
16-mar.-06	15,676
17-mar.-06	7,974
21-mar.-06	1,198
23-abr.-06	32,832
6-may.-06	10,458
6-may.-06	12,040
16-may.-06	5,433
19-may.-06	58,312
24-may.-06	19,880
25-may.-06	23,488
2-jun.-06	12,005
13-jun.-06	19,692
14-jun.-06	65,211
15-jun.-06	8,292
16-jun.-06	3,521
16-jun.-06	1,549
18-jun.-06	15,557
22-jun.-06	2,692
22-jun.-06	1,718
22-jun.-06	5,115
23-jun.-06	7,121
27-jun.-06	54,033

5-ago.-06	9,134
10-ago.-06	5,645
10-ago.-06	117,599
12-ago.-06	549
6-sep.-06	34,824
7-sep.-06	37,204
14-sep.-06	2,424
19-sep.-06	6,265
25-sep.-06	5,390
29-sep.-06	143,136
1-oct.-06	382,214
13-oct.-06	7,858
15-oct.-06	3,567
15-oct.-06	824
18-oct.-06	13,751
19-oct.-06	8,692
3-nov.-06	6,212
21-nov.-06	10,565
6-dic.-06	11,705
8-dic.-06	41,697
10-dic.-06	48,584
12-dic.-06	897
14-dic.-06	4,144
18-dic.-06	15,033
21-dic.-06	2,693
22-ene.-07	126,390
23-ene.-07	17,018
25-ene.-07	13,178
31-ene.-07	1,212
9-feb.-07	15,356
10-feb.-07	30,280
26-feb.-07	7,648
26-feb.-07	84,382
8-mar.-07	10,056
16-mar.-07	4,624
23-mar.-07	33,663
2-abr.-07	701,044
3-abr.-07	20,552
11-abr.-07	47,660
17-abr.-07	24,272
17-abr.-07	23,318

23-abr.-07	20,281
24-abr.-07	41,676
26-abr.-07	21,836
1-may.-07	7,583
10-may.-07	7,271
10-may.-07	1,984
12-may.-07	1,677
27-may.-07	171,038
10-jun.-07	3,245
15-jun.-07	5,527
23-jun.-07	10,971
26-jun.-07	3,486
12-jul.-07	647
17-jul.-07	5,529
18-jul.-07	12,458
17-ago.-07	22,117
22-ago.-07	9,812
28-ago.-07	2,466
14-sep.-07	7,376
16-sep.-07	6,192
22-sep.-07	13,331
24-sep.-07	33,886
3-oct.-07	804,650
11-oct.-07	55,000
15-oct.-07	4,760
21-oct.-07	5,672
21-oct.-07	11,944
27-oct.-07	7,201
2-nov.-07	24,747
26-nov.-07	10,067
30-nov.-07	38,574
30-nov.-07	14,162
2-dic.-07	6,813
4-dic.-07	12,285
9-dic.-07	12,300
11-dic.-07	8,692
1-ene.-08	3,156
2-ene.-08	6,274
4-ene.-08	4,547
8-ene.-08	25,510
14-ene.-08	23,765

25-ene.-08	27,766
31-ene.-08	8,036
8-feb.-08	9,432
17-feb.-08	90,860
19-feb.-08	204,586
3-mar.-08	5,467
5-mar.-08	13,283
9-mar.-08	20,885
13-mar.-08	1,624
16-mar.-08	1,919
18-mar.-08	3,053
19-mar.-08	16,755
31-mar.-08	60,909
31-mar.-08	3,270
1-abr.-08	38,072
6-abr.-08	45,772
13-abr.-08	9,276
13-abr.-08	7,558
17-abr.-08	12,146
25-abr.-08	547
28-abr.-08	8,879
5-may.-08	3,856
23-may.-08	9,376
4-jun.-08	11,368
14-jun.-08	19,278
16-jun.-08	5,958
23-jun.-08	3,607
24-jun.-08	2,162
25-jun.-08	31,256
25-jun.-08	2,709
3-jul.-08	60,441
4-jul.-08	2,850
30-jul.-08	1,484
3-ago.-08	20,097
4-ago.-08	7,649
5-ago.-08	16,658
21-ago.-08	123,821
31-ago.-08	2,264
24-sep.-08	34,575
5-oct.-08	21,829
5-oct.-08	44,552

6-oct.-08	6,644
8-nov.-08	113,979
8-nov.-08	91,456
12-nov.-08	8,027
12-nov.-08	28,673
23-nov.-08	14,664
26-nov.-08	4,789
6-dic.-08	6,047
9-dic.-08	47,717
23-dic.-08	47,798
4-ene.-09	1,775
10-ene.-09	5,447
15-ene.-09	7,564
18-ene.-09	27,947
28-ene.-09	48,054
29-ene.-09	23,131
3-feb.-09	17,316
5-feb.-09	33,610
24-feb.-09	13,090
25-feb.-09	81,618
17-may.-09	51,172
17-may.-09	4,136
22-may.-09	138,550
31-may.-09	1,009
4-jun.-09	38,172
8-jun.-09	48,541
3-jul.-09	13,017
4-jul.-09	9,829
21-jul.-09	561
22-jul.-09	7,465
31-jul.-09	11,095
6-ago.-09	29,714
9-ago.-09	1,644
13-ago.-09	40,106
6-sep.-09	12,923
16-sep.-09	919
22-sep.-09	15,645
24-sep.-09	19,368
14-oct.-09	6,511
15-oct.-09	115,147
17-oct.-09	39,229

23-oct.-09	165,652
26-oct.-09	3,852
29-oct.-09	1,907
8-nov.-09	9,528
8-nov.-09	1,036
13-nov.-09	5,468
24-nov.-09	4,334
24-nov.-09	768
28-nov.-09	2,149
4-dic.-09	7,015
27-dic.-09	1,938
27-dic.-09	1,947
30-dic.-09	84,488
7-ene.-10	26,194
8-ene.-10	4,489
11-ene.-10	41,945
17-ene.-10	50,438
26-ene.-10	6,075
2-feb.-10	2,964
11-feb.-10	23,712
28-feb.-10	271,748
8-mar.-10	24,290
12-mar.-10	8,827
31-mar.-10	9,709
4-abr.-10	6,492
6-abr.-10	32,816
8-abr.-10	2,312
20-abr.-10	169,422
20-abr.-10	15,674
25-abr.-10	42,010
4-may.-10	9,619
10-may.-10	11,932
15-may.-10	15,787
25-may.-10	10,275
9-jun.-10	4,567
10-jun.-10	264,875
25-jun.-10	14,138
5-jul.-10	5,165
10-jul.-10	5,745
12-jul.-10	20,996
26-jul.-10	8,816

1-ago.-10	2,652
13-ago.-10	14,614
16-ago.-10	2,282
18-ago.-10	4,324
13-sep.-10	919

BIBLIOGRAFÍA

[1] S. G. Kellison. (2009). *The Theory of Interest*. McGraw-Hill.

[2] W. Mendenhall, et. al. (2010). *Introducción a la probabilidad y estadística.* Cengage Learning.

[3] S. M. Ross. (2010). *A first course in probability.* Pearson.

[4] R. Walpole, et al. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias.* Pearson.

[5] R. J. Cunningham, et al. (2012). *Models for Quantifying Risk.* Actex Publications.

[6] N. L. Bowers, et al. (1997). *Actuarial Mathematics.* Society of Actuaries.

[7] Fundación MAPFRE, *Diccionario MAPFRE de Seguros.*
https://www.fundacionmapfre.org/fundacion/es_es/publicaciones/diccionario-mapfre-seguros/
Agosto 2018.

[8] G. S. Fishman. (1996) *Monte Carlo: Concepts, Algorithms and Applications*. Springer Verlag.

[9] R. Y. Rubinstein, et al. (2007). *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons.

[10] Adam M. Johansen. (2007). *Monte Carlo Methods.* Lecture Notes. University of Bristol.

[11] N. Metropolis. (1987) *The beginning of the Monte Carlo method*. Los Alamos Science,
15:125–130.

[12] P. Glasserman. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer Verlag.

[13] Palisade. *El futuro en una hoja de trabajo*. http://www.palisade-lta.com/risk/. Septiembre 2018.