Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Corrimiento al rojo y al azul de fotones en gravedad arcoíris.

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Rosales Augusto Montes Pérez

Asesorado por

Dr. Alfredo Herrera Aguilar

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Puebla, Pue.
Mayo de 2024

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Corrimiento al rojo y al azul de fotones en gravedad arcoíris.

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Rosales Augusto Montes Pérez

Asesorado por

Dr. Alfredo Herrera Aguilar

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Puebla, Pue.
Mayo de 2024

Título: Corrimiento al rojo y al azul de fotones en gravedad arcoíris.
Estudiante: Rosales Augusto Montes Pérez

COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Presidente

Dra. Iraís Rubalcava García
Secretario

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Vocal

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Vocal

Dr. Alfredo Herrera Aguilar
Asesor

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Asesor

Agradecimientos

El cierre de este capítulo excepcional en mi vida ha sido posible gracias al apoyo incondicional de mi familia. Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi padre, Alejandro Pedro Montes Lopez, y a mi madre, Albina Pérez Vazquez, por confiar en mi decisión de estudiar física y por alentar mis sueños. Agradezco los años de orientación y las valiosas lecciones de vida que me han brindado. Estoy comprometido a estar siempre presente para ustedes, de la misma manera en que siempre lo han estado para mí. A mis queridos hermanos, Guadalupe, Isaac, Felix, Cristal y José, por su cariño y compañía.

Este logro no habría sido posible sin el apoyo y la colaboración de aquellos que generosamente compartieron su tiempo y conocimientos a lo largo de este proceso.

Quiero agradecer al Dr. Alfredo Herrera Aguilar y al Dr. Mehrab Momennia por su orientación experta y apoyo constante. Sus conocimientos, paciencia y dedicación fueron fundamentales para dar forma a esta investigación. Cada consejo y sugerencia han sido invaluables y han enriquecido enormemente mi experiencia académica.

A todos mis amigos y compañeros que hicieron de la facultad mi segunda casa y a quienes tendré siempre en mi memoria.

A todos ustedes, muchas gracias.

Índice general

Resumen IX

1. Introducción 1
1.1. Objetivos . . . 2
1.1.1. Objetivo general . . . 2
1.1.2. Objetivos específicos . . . 2
1.1.3. Marco teórico . . . 2
1.1.4. Metodología . . . 3
1.1.5. Estructura de la tesis . . . 3

2. Nociones de relatividad general 5
2.1. El principio de equivalencia . . . 5
2.2. La gravedad como curvatura del espacio-tiempo . . . 5
2.3. Tensor de curvatura . . . 5
2.4. El tensor de Ricci y la curvatura escalar . . . 6
2.5. Las ecuaciones de Einstein . . . 6

3. Agujeros negros 9
3.1. La métrica isótropa estática general . . . 9
3.2. Solución de las ecuaciones de campo de espacio vacío . . . 10

4. Gravedad arcoíris 13
4.1. Relatividad doblemente especial . . . 13
4.2. Generalización de la relatividad doblemente especial . . . 14
4.3. El arcoíris de los agujeros negros . . . 15
4.3.1. Solución modificada de Schwarzschild . . . 15
4.4. Investigación relacionada con la métrica de Schwarzschild modificada . . . 16

5. Método relativista general para estimar parámetros de agujeros negros 17
5.1. Métrica esféricamente simétrica . . . 17
5.2. Las órbitas circulares estables más internas en la métrica de Schwarzschild ordinaria 20
5.3. Geodésicas para los fotones emitidos . . . 20
5.4. Análisis cualitativo de las órbitas de un fotón en la geometría de Schwarzschild ordinaria . . . 21
5.5. Corrimiento al rojo/azul de los fotones emitidos . . . 23
5.5.1. Parámetro de deflexión de la luz para cualquier punto arbitrario de la órbita en el plano ecuatorial . . . 24
5.5.2. Corrimiento de frecuencia máximo y mínimo de los fotones emitidos . . . 26
5.6. Uso del método en la métrica de Schwarzschild . . . 27

6. Aplicación del método a la métrica de Schwarzschild modificada **29**
6.1. Componentes de la métrica 29
6.2. Condición de órbitas circulares para la partículas masivas 29
6.3. Ubicación de las órbitas circulares estables de partículas masivas en el potencial efectivo 30
6.4. Las órbitas circulares estables más internas 31
6.5. Corrimiento al rojo y al azul de los fotones emitidos 32

7. Análisis **35**
7.1. Análisis comparativo 35
7.2. Expresión de los parámetros en función de los corrimientos 37

Conclusiones **38**

Bibliografía **41**

Resumen

En este trabajo se presenta el estudio de los corrimientos al rojo y al azul de fotones emitidos por una partícula masiva que orbita circularmente alrededor de un agujero negro descrito por una métrica de Schwarzschild modificada en el contexto de la gravedad arcoíris (*gravity's rainbow*), también conocida como *relatividad doblemente general*.

Al considerar este nuevo contexto, no podemos ocupar la misma métrica para la descripción del movimiento de la partícula masiva que orbita el agujero negro modificado y del fotón emitido por la misma partícula masiva, debido a que la métrica de Schwarzschild modificada considera la energía de las partículas; esto conduce a que obtengamos una expresión para los corrimientos que va a depender en general de 5 parámetros métricos $z_{GA_{1,2}} = z_{GA_{1,2}}(f(\epsilon_m), f(\epsilon_\gamma), g(\epsilon_m), g(\epsilon_\gamma), M)$. Las funciones generales $f(\epsilon)$ y $g(\epsilon)$ dependientes de la energía, también conocidas como *funciones arcoíris*, surgen en el contexto de la relatividad doblemente especial al considerar la energía de Planck ($E_{Pl} = \sqrt{\hbar c^5/G}$) como una cantidad invariante además de la constancia de la velocidad de la luz; dichas funciones están asociadas con una modificación en la relación de dispersión de energía-momento [4] y son las que evidencian de manera teórica la existencia de una escala de energía invariante del orden de la energía de Planck. Posteriormente se consideran las funciones arcoíris obtenidas por Magueijo y Smolin en [10] a partir de una relación de dispersión modificada que simplifica considerablemente el número de parámetros y finalmente se obtiene que $z_{GA_{1,2}} = z_{GA_{1,2}}(f(\epsilon_m), M)$, siendo M la masa del agujero negro y $f(\epsilon_m)$ la función arcoíris relacionada con la partícula masiva.

Para comprender el efecto de estas funciones en los corrimientos al rojo y al azul de fotones obtenidos analíticamente al usar la métrica de Schwarzschild modificada, se emplea la propuesta de Magueijo y Smolin [10] y se hace un análisis comparativo con los corrimientos al rojo y al azul de fotones emitidos que se obtienen al usar la métrica de Schwarzschild ordinaria.

Por último, el análisis teórico de los fotones emitidos nos permite obtener una relación para la masa del agujero negro de Schwarzschild modificado y la función $f(\epsilon_m)$ totalmente en términos de los corrimientos al rojo (*redshifts*) y al azul (*blueshifts*) y de los parámetros orbitales de la partícula emisora.

Palabras clave: *Agujeros negros, corrimiento al rojo, Gravedad Arcoíris, Relatividad General.*

Capítulo 1

Introducción

En 1915 Albert Einstein publicó su teoría general de la relatividad. Esta teoría generaliza tanto la relatividad especial como la gravitación Newtoniana. Es la que mejor describe los fenómenos gravitacionales y extiende el principio de relatividad para sistemas de referencia no inerciales, cuyo fundamento matemático es la geometría de Riemann.

En el marco de la teoría de la relatividad general, la gravedad es consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo, la cual es generada por la presencia de cuerpos, distribuciones de materia o por la energía existente allí. Para la construcción de la teoría general de la relatividad, Einstein utilizó el principio de equivalencia: una analogía entre sistemas de referencia no inerciales y campos gravitacionales; Einstein concluyó que allí no hay una diferencia fundamental entre un sistema de referencia con un campo gravitacional y un sistema de referencia acelerado sin campo gravitacional. A partir de esta conclusión, Einstein dedujo, además, que la luz emitida por una estrella debía tener un espectro desplazado al rojo a medida que atraviesa su campo gravitacional; y que la luz debe curvarse bajo la influencia de la gravedad. Einstein trató de formular su teoría de la gravedad en términos puramente geométricos. Esto lo llevó hacia el principio de covarianza general, es decir, la invariancia de las leyes de la física bajo transformaciones de coordenadas o difeomorfismos. Aunque abandonó temporalmente este principio, fue la idea clave que lo llevó al descubrimiento de sus famosas ecuaciones de campo gravitacional. La ecuación del campo gravitacional de Einstein consta de una serie de ecuaciones diferenciales parciales, no-lineales acopladas entre ellas y presentan cierta dificultad para su solución, de modo que el mismo Einstein creyó, inicialmente, que nunca se encontraría una solución exacta a sus ecuaciones. Sin embargo, pocos meses después de la publicación de la teoría general de la relatividad, Karl Schwarzschild halló una solución exacta en el vacío para un objeto estático con simetría esférica [2]. Este resultado nos permite definir el concepto de agujero negro.

Un éxito inmediato de la teoría de Einstein fue la descripción correcta de la precesión del perihelio de la órbita del planeta Mercurio. Sin embargo, la relatividad general ganó mucha más popularidad cuando la predicción de la deflexión de la luz se confirmó durante el eclipse solar de 1919 por Eddington. Actualmente, la teoría de la relatividad general ha visto reforzada su veracidad cuando el 11 de febrero de 2016, se anunció la primera detección directa de ondas gravitacionales provenientes de la colisión de dos agujeros negros [3].

Por otro lado, en el contexto de la caracterización de agujeros negros astrofísicos, Herrera-Aguilar y Nucamendi [13] mostraron cómo los parámetros de masa y rotación de un agujero negro de Kerr, así como la distancia que separa al agujero negro de la Tierra, pueden estimarse de manera relativista en términos de i) el corrimiento al rojo y al azul de fotones que son emitidos por partículas masivas geodésicas (estrellas y gas galáctico) que viajan a lo largo de geodésicas nulas

hacia un observador distante, y ii) el radio de estas órbitas. Mientras que, en [14] encontraron expresiones que vinculan la masa y el espín del agujero negro con cantidades observables, es decir, el corrimiento al rojo de los fotones emitidos por las partículas que lo orbitan. En [15], Nucamendi y colaboradores utilizan el modelo mencionado considerando la métrica de Schwarzschild para estimar la razón masa-distancia del agujero negro hospedado en el núcleo activo galáctico NGC4258.

Por otra parte, la relatividad doblemente especial es un formalismo que extiende la relatividad especial añadiendo una escala de energía invariante que es del orden de la energía de Planck, nombrada como una constante universal para todos los observadores inerciales. Magueijo y Smolin [9] argumentaron que este formalismo puede ser generalizado para incorporar la curvatura del espacio-tiempo. En este enfoque, la geometría del espacio-tiempo depende de la energía total E de la partícula de prueba que mide un observador en caída libre, es decir, que la geometría del espacio-tiempo no es fija, sino que varía según la energía de la partícula que se esté estudiando. La versión modificada de la solución de Schwarzschild para esta teoría se ha presentado también en [9].

Entonces, con la motivación de aplicar el método desarrollado en [13] en el contexto de la gravedad arcoíris, se amplia dicho método a métricas que son esféricamente simétricas y se aplica a la solución de Schwarzschild modificada en el marco de la gravedad arcoíris.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo general

En este trabajo nos interesa determinar los parámetros de un agujero negro modificado de Schwarzschild, totalmente en términos de los corrimientos al rojo y al azul de fotones emitidos por una partícula de prueba masiva, y sus parámetros orbitales en el contexto de la gravedad arcoíris. Los parámetros de interés son la masa del agujero negro y las funciones arcoíris (son funciones generales dependientes de la energía) que surgen en la teoría de gravedad arcoíris.

1.1.2. Objetivos específicos

1. Aplicar el método de los corrimientos al rojo y al azul de fotones en la métrica de Schwarzschild modificada.

2. Analizar el comportamiento de los corrimientos al rojo y al azul en función de r_s (radio de Schwarzschild) para el caso de la métrica de Schwarzschild ordinaria.

3. Comprender las implicaciones de las funciones $f(\epsilon_n)$ y $g(\epsilon_n)$ en los corrimientos al rojo y al azul de fotones en la métrica de Schwarzschild modificada al considerar un caso particular de estas funciones introducido en [10]. Esto se realiza mediante un análisis comparativo con los corrimientos al rojo y al azul de fotones en la métrica de Schwarzschild ordinaria.

4. Expresar la masa M del agujero negro de Schwarzschild modificado totalmente en términos de los corrimientos y los parámetros orbitales de la partícula de prueba.

5. Expresar la función $f(\epsilon_n)$ totalmente en términos de los corrimientos al rojo y al azul de fotones y los parámetros orbitales de la partícula de prueba.

1.1.3. Marco teórico

Para el desarrollo de este trabajo, la descripción física de los fenómenos involucrados fue realizada en el contexto de la Relatividad General y la Gravedad arcoíris.

1.1.4. Metodología

La metodología que se ha seguido en la realización de este trabajo es esencialmente teórica y la podemos resumir en los siguientes puntos:

1. Se ha usado la relatividad general para desarrollar un método que nos permita encontrar relaciones que involucren los corrimientos al rojo y al azul de fotones con los parámetros de los agujeros negros involucrados en las métricas de Relatividad General y Gravedad Arcoíris.
2. Se ha introducido la teoría de la gravedad arcoíris para aplicar el modelo en este contexto.
3. Se ha realizado un análisis comparativo entre los corrimientos obtenidos en la métrica de Schwarzschild ordinaria y la modificada.

1.1.5. Estructura de la tesis

La presente investigación esta estructurada en los siguientes capítulos:

Capítulo 1. En este capítulo, se hace una introducción general al trabajo de tesis, en el cual se esbozan algunos antecedentes generales.

Capítulo 2. Se da una breve introducción a algunos conceptos de relatividad general. Se menciona el principio de equivalencia como base de la relatividad general y el resultado fundamental que son las ecuaciones de campo de Einstein.

Capítulo 3. Aquí se comienza con el estudio de los agujeros negros, se brindan algunos antecedentes y se discute la solución más sencilla de las ecuaciones de campo de Einstein, es decir, la solución de Schwarzschild.

Capítulo 4. En este capítulo se discuten los fundamentos de la gravedad arcoíris (gravity's rainbow) y se expone la solución modificada de Schwarzschild en este contexto.

Capítulo 5. En este capítulo procederemos a la exposición del método relativista general para calcular los corrimientos al rojo y al azul de fotones en términos de los componente métricos y los parámetros orbitales de la partícula emisora.

Capítulo 6. A partir del importante resultado del capítulo 4 junto con el método del capítulo 5, procederemos a obtener los corrimientos al rojo y al azul de fotones emitidos por una partícula masiva que orbita un agujero negro en la teoría de la gravedad arcoíris.

Capítulo 7. Se realiza el análisis comparativo entre los corrimientos (al rojo y al azul) de fotones emitidos al usar la métrica de Schwarzschild ordinaria y la métrica de Schwarzschild modificada. También se obtienen los parámetros de la métrica de Schwarzschild modificada totalmente en términos de los corrimientos y los parámetros orbitales de la partícula de prueba.

En las conclusiones de este trabajo se resumen los resultados obtenidos en los capítulos 6 y 7. En el marco de la gravedad arcoíris estos resultados son nuevos en el contexto de la caracterización de agujero negros astrofísicos.

Capítulo 2

Nociones de relatividad general

2.1. El principio de equivalencia

En 1907, Einstein se dio cuenta de que la gravedad, tal como la entendemos en el marco newtoniano, no podía ser simplemente incorporada a la relatividad especial debido a su naturaleza de acción a distancia. El principio de equivalencia (para campos gravitatorios constantes) propuesto más tarde, establece que un observador en caída libre en un campo gravitatorio constante es equivalente a un observador inercial en ausencia de gravedad. En otras palabras, localmente, un observador en caída libre no puede distinguir entre estar inmerso en un campo gravitatorio y estar en un estado de aceleración uniforme.

El **Principio de equivalencia** en su formulación general se puede enunciar de la siguiente manera: *Observadores en caída libre en un campo gravitatorio general son localmente equivalentes a observadores inerciales. No hay experimentos locales que puedan distinguir entre estas dos situaciones.*

2.2. La gravedad como curvatura del espacio-tiempo

Estas observaciones llevaron a Einstein a hacer una propuesta profunda que simultáneamente proporciona una descripción relativista de la gravedad e incorpora de forma natural el principio de equivalencia. La propuesta de Einstein era que la gravedad ya no debería ser considerada como una fuerza en el sentido convencional, sino más bien como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, siendo esta curvatura inducida por la presencia de la materia. Esta es la idea central que sustenta la teoría de la relatividad general.

2.3. Tensor de curvatura

En el contexto de la geometría diferencial, el tensor de curvatura (o tensor de Riemann) es una herramienta fundamental para entender las propiedades geométricas de una variedad. Denotado comúnmente como $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$, este tensor captura la información sobre la curvatura del espacio-tiempo. Su expresión es:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}. \tag{2.1}$$

Como el tensor (2.1) está relacionado con la curvatura del espacio-tiempo. En una región plana, la conexión y sus derivadas son cero, y por lo tanto

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = 0. \tag{2.2}$$

Esta relación se mantiene en cualquier sistemas de coordenadas.

El tensor de curvatura nulo es una condición necesaria y suficiente para que una región del espacio tiempo sea plano.

2.4. El tensor de Ricci y la curvatura escalar

La contracción de los índices primero y tercero conduce a un nuevo tensor, el tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}. \tag{2.3}$$

Una contracción adicional da el escalar de curvatura o escalar de Ricci

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{2.4}$$

Esta es una cantidad escalar definida en cada punto del espacio-tiempo.

2.5. Las ecuaciones de Einstein

Por un lado sabemos del principio de equivalencia que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, es decir, de una propiedad geométrica del espacio-tiempo. Por otro lado, sabemos que la fuente de esta curvatura es la materia de la cual tenemos una descripción tensorial, el tensor de energía-momento. Pero todavía no sabemos exactamente cómo la materia interacciona con el espacio-tiempo. Esta interacción viene dada por las ecuaciones de Einstein.

El principio de covariancia nos dice que la ecuación debe ser válida en todos los sistemas de referencia, y que por lo tanto debe tener una forma tensorial. Concretamente las ecuaciones de Einstein tienen que ser de la forma:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{2.5}$$

donde $G_{\mu\nu}$ es un tensor que describe la curvatura del espacio tiempo, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento y κ una constante de proporcionalidad.

El tensor de Einstein se define como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \tag{2.6}$$

De modo que las ecuaciones de Einstein vienen dadas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{2.7}$$

Las ecuaciones de Einstein forman un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales no-lineales acopladas de segundo orden, lo que hace que sean muy difíciles de resolver analíticamente.

A veces es útil reescribir las ecuaciones de Einstein sin la traza. Tomando la traza de (2.7), es decir contrayendo con $g_{\mu\nu}$, encontramos:

$$R = -\kappa T, \tag{2.8}$$

donde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ y hemos utilizado que $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$. Sustituyendo esto en (2.7) vemos que las ecuaciones de Einstein sin traza son de la forma

$$R_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right). \tag{2.9}$$

Esta ecuación es completamente equivalente a (2.7), pero es un poco más fácil a la hora de buscar soluciones, ya que no hace falta calcular el escalar de Ricci. Una de las ventajas de (2.9) es que en el vacío, donde $T_{\mu\nu} = 0$, las ecuaciones se reducen a

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{2.10}$$

las cuales admiten soluciones no triviales, como la solución de Schwarzschild cuya deducción resumiremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Agujeros negros

Los agujeros negros son regiones del espacio-tiempo en las cuales el campo gravitatorio es sumamente intenso. Se forman cuando la masa de un cuerpo se contrae a un tamaño menor que el llamado radio de Schwarzschild. El concepto de agujero negro aparece aun en el marco de la física clásica. Fue el reverendo y geólogo John Michell quien estudió en 1783 la acción del campo gravitacional de una estrella masiva y su efecto cuando la velocidad de escape se iguala a la velocidad de la luz. En aquella época, una de las teorías sobre la luz consideraba que estaba formada por pequeños corpúsculos. Michel concluyó que cualquier luz emitida se redireccionaría hacia el interior de la estrella y denominó a estos objetos *estrellas oscuras*. Por esa misma fecha, a finales del siglo XVIII, Laplace consideró por primera vez la posibilidad de que existiera un cuerpo totalmente oscuro que no dejaría escapar la luz de su superficie. Durante más de un siglo, nadie se interesó por los efectos gravitacionales sobre la luz ni por las posibles estrellas oscuras. El 25 de noviembre de 1915, Albert Einstein presentaba, ante la Academia de Ciencias de Prusia en Berlín, sus ecuaciones de la relatividad [1]. El 15 de diciembre del 1915, el físico alemán Karl Schwarzschild enviaba a Einstein la primera solución no trivial a las ecuaciones de la relatividad general [2]. Einstein la presentó ante la Academia Prusiana de Berlín el 13 de enero de 1916. Los agujeros negros de Schwarzschild son los más simples que pueden ser encontrados en el universo. La solución de Schwarzschild describe el espacio tiempo alrededor de un centro de atracción esféricamente simétrico, sin rotación y en el vacío. En esta sección, vamos a analizar brevemente las propiedades de la solución de Schwarzschild.

3.1. La métrica isótropa estática general

Schwarzschild buscó la métrica g que representa el campo gravitatorio esférico estático simétrico en el espacio vacío que rodea a algún objeto esférico masivo como una estrella. Así, un buen punto de partida para nosotros es construir la forma más general de la métrica para un espacio-tiempo estático isótropo.

Consideremos un espacio-tiempo con un sistema de coordenadas arbitrario, $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, donde x^0 es la componente temporal. Un espacio-tiempo estático satisface las siguientes propiedades:

1. Todas las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ son independientes de x^0.

2. El elemento de línea ds^2 es invariante bajo la transformación $x^0 \to -x^0$.

Note que la propiedad (1) no necesariamente implica la propiedad (2), como queda claro en el ejemplo de una estrella giratoria: la inversión del tiempo cambia el sentido de rotación, pero los

componentes métricos son constantes en el tiempo. Un espacio-tiempo que satisface la propiedad (1) pero no la propiedad (2) se llama estacionario.

Por lo tanto, a partir de la expresión general para el elemento de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\nu, \tag{3.1}$$

deseamos encontrar un conjunto de coordenadas x^μ en la que $g_{\mu\nu}$ no dependa en la coordenada temporal x^0 y el elemento de línea ds^2 sea invariante bajo $x^0 \to -x^0$, es decir, la métrica sea estática y en el que ds^2 depende solamente de invariantes rotacionales de las coordenadas espaciales x^i y de sus diferenciales, es decir, que la métrica sea isótropa.

Podemos escribir la métrica isótropa general que se especifica mediante dos funciones que dependen de t y r, llamadas $A(t,r)$ y $B(t,r)$ como

$$ds^2 = -A(t,r)c^2dt^2 + B(t,r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\varphi^2). \tag{3.2}$$

La métrica estática e isótropa general se obtiene requiriendo que $g_{\mu\nu}$ sea independiente de la coordenada temporal, esto implica que las funciones A y B deben ser solo funciones de r. Entonces tenemos

$$ds^2 = -A(r)c^2dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta^2\varphi). \tag{3.3}$$

3.2. Solución de las ecuaciones de campo de espacio vacío

Las funciones $A(r)$ y $B(r)$ en la métrica isótropa y estática general se determinan resolviendo las ecuaciones de campo de Einstein. Estamos interesados en la geometría del espacio-tiempo fuera de una distribución de masa esférica, por lo que debemos resolver las ecuaciones de campo para un espacio vacío, por lo que simplemente requerimos que el tensor de Ricci se anule.

Las ecuaciones de campo en el vacío (2.10) se obtienen estableciendo cada una de las expresiones igual a cero.

En este caso, el tensor de Ricci resulta ser diagonal. Obtenemos cuatro ecuaciones cuya solución es

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \quad y \quad B(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}, \tag{3.4}$$

donde M representa la masa del objeto que produce el campo gravitacional.

Por lo tanto, la métrica de Schwarzschild para el espacio-tiempo vacío fuera de un cuerpo esférico de masa M es

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}. \tag{3.5}$$

Notemos que hay dos puntos en los que la métrica diverge: $r = 0$ y $r = \frac{2GM}{c^2}$; el primero corresponde a una singularidad física y el segundo define un horizonte de eventos que actúa como membrana de atrapamiento unidireccional que permite la entrada de señales, pero que no les deja escapar al infinito espacial. Puesto que ni la luz puede escapar del horizonte de eventos, de ahí

se deriva el nombre de agujero negro para la métrica del espacio-tiempo dado por (3.5). Como estamos interesados en estudiar el campo gravitatorio fuera de un objeto compacto con simetría esférica, la región que lo describe se encuentra en $r > \frac{2GM}{c^2}$.

Para futuros cálculos a partir de aquí consideraremos $c = 1$.

Capítulo 4

Gravedad arcoíris

Desarrollar una teoría cuántica de la gravedad es actualmente uno de los principales desafíos en la física teórica. Varias aproximaciones a la gravedad cuántica sugieren una modificación en la relación de dispersión estándar de energía-momento, $E^2 - p^2 = m^2$.

La existencia del límite Greisen–Zatsepin–Kuzmin (límite GZK), como un límite superior en la energía de los rayos cósmicos, ha sido considerada como clave en la búsqueda de exploraciones de la física en las regiones de energía que requieren nuevas teorías de la gravedad cuántica, las cuales predicen eventos a la escala de Planck. Este límite está en el mismo orden de magnitud que el límite superior de energía hasta el cual experimentalmente se han detectado rayos cósmicos desde fuentes *distantes*. El límite es de 5×10^{19} eV [16]. En 2010, la Colaboración Pierre Auger y el experimento High Resolution Fly's Eye (HiRes) reconfirmaron resultados anteriores del límite GZK [18]. Estas observaciones predicen la existencia de un límite natural de energía y, por lo tanto, una modificación en la relación de dispersión para expresar la existencia de dicho límite.

4.1. Relatividad doblemente especial

Una teoría que predice naturalmente una modificación en la relación de dispersión es conocida como relatividad doblemente especial [4]. La relatividad especial deformada o doblemente especial es una clase de teorías que implementan un conjunto modificado en los postulados de la relatividad especial, como se propone en [5], [6], [7], [8]. Las cantidades E y E_{pl} que se presentan en todo este capítulo hacen referencia a la energía total de la partícula y a la energía de Planck respectivamente. Los postulados de la relatividad doblemente especial se pueden formular como:

1. La relatividad de los marcos inerciales: Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.

2. En el límite $E/E_{pl} \to 0$ la velocidad de un fotón o cuanto sin masa tiende a una constante universal, c, que es la misma para todos los observadores inerciales.

3. La energía de Planck E_{pl} también es una constante universal para todos los observadores inerciales.

Como resultado la invariante de energía-momento es modificada como:

$$E^2 f(E/E_{pl})^2 - p^2 g(E/E_{pl})^2 = m^2 \tag{4.1}$$

donde E_{pl} es la energía de Planck, m es la masa en reposo de la partícula de prueba, p es la magnitud del momento lineal, f y g son conocidas comúnmente en la literatura como funciones arcoíris, ellas satisfacen $\lim_{E/E_{pl}\to 0} f(E/E_{pl}) = 1$ y $\lim_{E/E_{pl}\to 0} g(E/E_{pl}) = 1$. En dicho límite se recupera la invariante de energía-momento ordinaria.

Entre las diversas elecciones que podemos encontrar en la literatura [19], [20] destacan las funciones arcoíris de una relación de dispersión modificada (RDM) introducida por Magueijo y Smolin [10]:

$$f(E/E_{pl}) = g(E/E_{pl}) = \frac{1}{1-\lambda E/E_{pl}}, \tag{4.2}$$

que mantiene la invariancia de la velocidad de la luz. Aquí λ es un parámetro adimensional que introduce una escala de energía en relación a la energía de Planck (usualmente este parámetro se fija igual a la unidad).

4.2. Generalización de la relatividad doblemente especial

En [9] Magueijo y Smolin argumentaron que el formalismo de la relatividad doblemente especial puede ser generalizado para incorporar la curvatura del espacio-tiempo. Propusieron una extensión de la relatividad doblemente especial que incluye la curvatura, es decir, la relatividad doblemente general. En este enfoque, la geometría del espacio-tiempo depende de la energía E de la partícula de prueba que mide un observador en caída libre, es decir, que la geometría del espacio-tiempo no es fija, sino que varía según la energía de la partícula que se esté estudiando.

Para cuantificar esta variación en la geometría del espacio-tiempo, se introduce la noción de *familia de métricas* de un parámetro, parametrizadas por la razón E/E_{Pl}, creando así un conjunto diverso de métricas conocido como el *arcoíris de la gravedad*.

La métrica modificada en el arcoíris de la gravedad está descrita mediante

$$\mathscr{G}(E) = \eta^{ab} e_a(E) \otimes e_b(E), \tag{4.3}$$

donde la dependencia de la energía de los campos de referencia ortonormales está dada por

$$e_0 = \frac{1}{f(E/E_{Pl})}\tilde{e_0}, \quad e_i = \frac{1}{g(E/E_{Pl})}\tilde{e_i}, \tag{4.4}$$

donde las cantidades con tilde se refieren a los campos de referencia ortonormales independientes de la energía. El argumento E en la métrica $\mathscr{G}(E)$ representa la escala a la cual se explora la geometría del espacio-tiempo. Es decir, si un observador inercial en caída libre utiliza el movimiento de una partícula, para medir la geometría del espacio-tiempo, E es la energía total de esa partícula, tal como la mide dicho observador.

Por lo tanto, la métrica en el espacio-tiempo plano toma la forma

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{f(E/E_{Pl})^2} + \frac{dx_i dx^i}{g(E/E_{Pl})^2}. \tag{4.5}$$

El principio de correspondencia requiere que

$$\lim_{E/E_{Pl}\to 0} f(E/E_{Pl}) \to 1, \tag{4.6}$$

y del mismo modo para $g(E/E_{Pl})$.

Esto conduce a que la conexión y la curvatura dependan de la energía de tal manera que las ecuaciones habituales de Einstein son reemplazadas por una familia de ecuaciones de un parámetro E y se escriben de la siguiente manera:

$$G_{\mu\nu}(E) = 8\pi G(E) T_{\mu\nu}(E). \tag{4.7}$$

4.3. El arcoíris de los agujeros negros

La versión modificada de la solución de Schwarzschild para estas ecuaciones se ha presentado también en [9].

4.3.1. Solución modificada de Schwarzschild

Comencemos nuestro análisis con la métrica general esféricamente simétrica. Dado que la métrica es dependiente de la energía; cuando lo ponemos en coordenadas esféricas, podemos escribir la métrica en coordenadas dependientes de la energía, o coordenadas independientes de la energía. Las coordenadas independientes de la energía serán denotadas como $\tilde{r}, \tilde{t}, \theta, \varphi$.

Las coordenadas temporales y radiales también pueden incorporar la dependencia de la energía, dando lugar a coordenadas que dependen de la energía, las cuales serán indicadas como $r(E), t(E)$. Las coordenadas angulares θ, φ son siempre independientes de la energía. Las coordenadas independientes de la energía coincidirán con las coordenadas dependientes de la energía en el límite $E/E_{pl} \to 0$.

En términos de coordenadas independientes de la energía la forma más general para una métrica esféricamente simétrica es:

$$ds^2 = -\frac{\tilde{F}}{f^2(E)} d\tilde{t}^{\,2} + \frac{\tilde{H}}{g^2(E)} d\tilde{r}^{\,2} + \frac{\tilde{r}^2}{g^2(E)} d\Omega^2. \tag{4.8}$$

Introduciendo las siguientes coordenadas dependientes de la energía

$$r(E) = \frac{\tilde{r}}{g(E)}, \quad t(E) = \frac{\tilde{t}}{f(E)}, \tag{4.9}$$

podemos definir unas nuevas funciones dependientes de la energía

$$F(r(E), E) = \tilde{F}(\tilde{r}), \quad H(r(E), E) = \tilde{H}(\tilde{r}). \tag{4.10}$$

Entonces la métrica (4.8) toma la forma

$$ds^2 = -F(r(E), E) dt(E)^2 + H(r(E), E) dr(E)^2 + r(E)^2 d\Omega^2. \tag{4.11}$$

Esta es entonces una familia de métricas dependientes de la energía, cada una en la forma estándar. Por el teorema de Birkoff, debemos tener, para cada E

$$F(r(E), E) = H^{-1}(r(E), E) = \left(1 - \frac{C(E)}{r(E)}\right), \tag{4.12}$$

donde la constante de integración $C(E)$ es ahora dependiente de la energía.

Sin embargo, recordamos que según la ecuación (4.10), toda la dependencia de la energía en las coordenadas independientes de la energía debe estar en las funciones f y g en la forma original (4.8). Por lo tanto, tenemos que

$$F(r(E), E) = \left(1 - \frac{C(E)g(E)}{\tilde{r}(E)}\right) = \tilde{F}(\tilde{r}). \tag{4.13}$$

Entonces, usando el hecho de que en $E = 0$ debemos tener $C = 2G(0)M$,

$$C(E) = \frac{2G(0)M}{g(E)} \tag{4.14}$$

donde la masa M es independiente de la energía. Por lo tanto, en las coordenadas independientes de la energía la métrica de Schwarzschild modificada debe tomar la forma

$$\boxed{ds^2 = -\frac{1}{f(E/E_{pl})^2}\left(1 - \frac{2MG}{\tilde{r}}\right)d\tilde{t}^{\,2} + \frac{1}{g(E/E_{pl})^2}\left(1 - \frac{2MG}{\tilde{r}}\right)^{-1} d\tilde{r}^{\,2} + \frac{\tilde{r}^{\,2}}{g(E/E_{pl})^2}d\Omega^2}, \tag{4.15}$$

donde $d\Omega^2 = sen^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2$. El resultado (4.15) es la métrica que analizaremos con detalle más adelante mediante el uso del método relativista general para estimar parámetros de agujeros negros que discutiremos en el siguiente capítulo.

4.4. Investigación relacionada con la métrica de Schwarzschild modificada

En [21], se investigó la métrica (4.15) y las funciones arcoíris de tres relaciones de dispersión, incluida la propuesta de Magueijo y Smolin [10]. Los autores estudiaron la métrica de Schwarzschild modificada (junto con las funciones arcoíris) en el corrimiento al rojo gravitacional. El problema se plantea de la siguiente manera: Supongamos que la luz fue emitida desde el radio r_1 y recibida en r_2, ¿en qué medida experimentará la luz un corrimiento al rojo?

Por un lado, la expresión deducida del corrimiento al rojo gravitacional conduce a correcciones significativas para fotones de alta energía. Por otro lado, el experimento Pound-Snider [17] es un experimento que mide el corrimiento al rojo de la luz al moverse en un campo gravitatorio. En este experimento se utilizaron rayos gamma con una energía de 14.4×10^{-6} GeV, la cual resulta ser muy pequeña en comparación con la energía de Planck, que es de $E_{pl} = 1.221\ times10^{19}$ GeV. Quizás experimentos similares al de Pound-Snider, utilizando rayos gamma de energías más altas, puedan revelar diferencias observables.

Capítulo 5

Método relativista general para estimar parámetros de agujeros negros

En este capítulo, explicaremos detalladamente el modelo introducido en [13] por Herrera-Aguilar y Nucamendi, aplicado a una métrica general estática y esféricamente simétrica. Este procedimiento nos permite analizar el cambio de frecuencia de los fotones emitidos por partículas masivas geodésicas que orbitan circularmente alrededor de un objeto compacto con simetría esférica. El análisis nos permitirá obtener expresiones para los parámetros de alguna métrica (estática y esféricamente simétrica) en términos de cantidades observacionales. Durante la explicación, justificaremos algunos pasos considerando la métrica de Schwarzschild ordinaria, de la cual sabemos que se trata de una métrica estática y esféricamente simétrica.

Al final de este capítulo, también se presenta la expresión del corrimiento al rojo y al azul de los fotones emitidos por partículas masivas geodésicas que orbitan circularmente alrededor del espacio-tiempo de Schwarzschild ordinario, descrito por (3.5). Más adelante, en el siguiente capítulo, aplicaremos el modelo a la métrica de Schwarzschild modificada.

5.1. Métrica esféricamente simétrica

Aquí consideramos una métrica general estática y esféricamente simétrica, con la propiedad de que sea un espacio-tiempo asistóticamente plano. El elemento de línea tiene la siguiente forma

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + \frac{1}{B(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2). \tag{5.1}$$

La trayectoria de las partículas alrededor del espacio-tiempo (5.1) generado por un objeto compacto con simetría esférica está gobernada por la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \kappa, \tag{5.2}$$

para partículas masivas ($\kappa = -1$) y para partículas no masivas ($\kappa = 0$). Además, $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\lambda$ denota la derivada de la posición de la partícula donde λ es el parámetro afín para los fotones y

en el caso de partículas masivas representa el tiempo propio $\lambda = \tau$.

La partícula de prueba masiva, que emite fotones, se moverá alrededor del espacio-tiempo (5.1) generado por un cuerpo compacto con simetría esférica, cuya cuadrivelocidad es:

$$U_e^\mu = \left(U^t, U^r, U^\theta, U^\varphi\right), \tag{5.3}$$

al ser una partícula masiva, la cuadrivelocidad está normalizada $U_\mu U^\mu = -1$, expandiendo:

$$-1 = g_{tt}(U^t)^2 + g_{rr}(U^r)^2 + g_{\theta\theta}(U^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}(U^\varphi)^2. \tag{5.4}$$

Al tener simetría esférica, se sabe que hay invariancia bajo traslaciones temporales e invariancia bajo rotaciones con respecto a los tres ejes espaciales, lo cual conduce a la conservación de la energía y de las tres componentes del momento angular. La conservación de la dirección del momento angular significa que la partícula se moverá en un plano; entonces se puede escoger a conveniencia el plano ecuatorial, y si la partícula no estuviese en ese plano se puede aprovechar la simetría esférica para rotar las coordenadas y así el movimiento se sitúe en el plano ecuatorial. Por lo tanto, los dos vectores de Killing que conducen a la conservación de la dirección del momento angular implican que $\theta = \pi/2$.

Al haber escogido el plano ecuatorial como el plano de movimiento de la partícula de prueba únicamente se obtienen dos vectores de Killing, los cuales se relacionan con las simetrías temporal y rotacional restantes. Dichos vectores son los que satisfacen la ecuación de Killing. Los vectores de Killing resultantes son:

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0), \tag{5.5}$$

$$\psi^\mu = (0, 0, 0, 1). \tag{5.6}$$

Los anteriores campos vectoriales inducen las siguientes cantidades conservadas:

$$E = \frac{\bar{E}}{m} = -\xi_\mu U^\mu = -g_{\mu\nu}\xi^\nu U^\mu = -g_{tt}\xi^t U^t = -g_{tt}U^t, \tag{5.7}$$

$$L = \frac{\bar{L}}{m} = \psi_\mu U^\mu = g_{\mu\nu}\psi^\nu U^\mu = g_{\varphi\varphi}\psi^\varphi U^\varphi = g_{\varphi\varphi}U^\varphi, \tag{5.8}$$

lo que da expresiones para dos componentes de la cuadrivelocidad:

$$U^t = -\frac{E}{g_{tt}}, \tag{5.9}$$

$$U^\varphi = \frac{L}{g_{\varphi\varphi}}. \tag{5.10}$$

Al sustituir los valores anteriores de la cuadrivelocidad y sumados al hecho de que se pueda considerar el movimiento en un plano ecuatorial $\theta = \pi/2$:

$$g_{rr}(U^r)^2 + 1 + \frac{E^2}{g_{tt}} + \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}} = g_{rr}(U^r)^2 + V_{eff} = 0, \tag{5.11}$$

donde la anterior ecuación tiene la forma de una ley de conservación de energía para una partícula no relativista bajo la influencia de un potencial efectivo $V_{eff} = 1 + \frac{E^2}{g_{tt}} + \frac{L2}{g_{\varphi\varphi}}$.

A partir de este potencial efectivo se obtiene la condición de órbitas circulares estables, cuando se cumple que se tenga un mínimo estable [cuando $U^r = 0$ en (5.11)]

$$V_{eff} = 0, \quad V'_{eff} = 0, \quad V''_{eff} > 0. \tag{5.12}$$

Considerando un caso de órbitas circulares, primero hay que pensar en la definición que hicimos en (5.11) de nuestro potencial efectivo, por lo que las cantidades que aparecen en (5.12) son:

$$V_{eff} = 1 + \frac{E^2}{g_{tt}} + \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}}, \quad V'_{eff} = -\frac{E^2}{g_{tt}^2}\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} - \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}^2}\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r},$$
$$V''_{eff} = \frac{2E^2}{g_{tt}^3}\left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r}\right)^2 - \frac{E^2}{g_{tt}^2}\frac{\partial^2 g_{tt}}{\partial r^2} + \frac{2L^2}{g_{\varphi\varphi}^3}\left(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}\right)^2 - \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}^2}\frac{\partial^2 g_{\varphi\varphi}}{\partial r^2}.$$

Al hacer uso de los valores de la métrica (5.1) y $\theta = \pi/2$, las anteriores cantidades se escriben de la siguiente manera:

$$V_{eff} = 1 - \frac{E^2}{A} + \frac{L^2}{r^2}, \quad V'_{eff} = \frac{E^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{2L^2}{r^3}, \tag{5.13}$$
$$V''_{eff} = \frac{E^2}{A^2}\left[\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{2}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2\right] + \frac{6L^2}{r^4}. \tag{5.14}$$

Aplicando las condiciones (5.12), se pueden obtener E, L en términos de r y A, así como la condición de estabilidad:

$$E = A\sqrt{\frac{2}{2A - \frac{\partial A}{\partial r}}}, \quad L = (\pm)r\sqrt{\frac{r\frac{\partial A}{\partial r}}{2A - r\frac{\partial A}{\partial r}}}, \tag{5.15}$$

donde el signo ($\pm$) se debe a la dirección del momento angular de la partícula (en el sentido de las manecillas del reloj o contrario a este), y

$$\frac{2}{2A - r\frac{\partial A}{\partial r}}\left[\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{2}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2 + \frac{3}{r}\frac{\partial A}{\partial r}\right] > 0. \tag{5.16}$$

Dadas las expresiones para E, L, se reescriben (5.9) y (5.10):

$$U^t = \sqrt{\frac{2}{2A - r\frac{\partial A}{\partial r}}}, \tag{5.17}$$

$$U^\varphi = (\pm)\frac{1}{r}\sqrt{\frac{r\frac{\partial A}{\partial r}}{2A - r\frac{\partial A}{\partial r}}}, \tag{5.18}$$

donde el signo ($\pm$) se asocia a la dirección del momento angular de la partícula masiva.

5.2. Las órbitas circulares estables más internas en la métrica de Schwarzschild ordinaria

Las condiciones (5.12) garantizan el caso particular de órbitas circulares estables. No obstante, cuando V''_{eff}=0 se obtiene un punto de inflexión donde r_{ISCO} determina la distancia a la que se encuentra la *órbita circular estable más interna* (ISCO por sus siglas en inglés). Este nuevo parámetro representa la frontera entre partículas de prueba orbitando al agujero negro y partículas de prueba cayendo directamente hacia él.

Para determinar r_{ISCO} en la métrica de Schwarzschild ordinaria, hacemos uso de la expresión (5.16) y la igualamos a cero:

$$V''_{eff} = \frac{E^2}{A^2}\left[\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{2}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2\right] + \frac{6L^2}{r^4} = 0, \tag{5.19}$$

al sustituir los valores de E y L en la expresión y después de simplificar, obtenemos

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{2}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2 + \frac{3}{r}\frac{\partial A}{\partial r} = 0 \tag{5.20}$$

Ahora, al sustituir $A = (1 - 2M/r)$ y realizar las operaciones correspondientes, obtenemos la siguiente solución:

$$\boxed{r_{ISCO} = 6M}. \tag{5.21}$$

5.3. Geodésicas para los fotones emitidos

En el caso de los fotones, que siguen geodésicas nulas, la ecuación de movimiento (5.2) se escribe como

$$g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0, \tag{5.22}$$

donde $k^\mu = (k^t, k^r, k^\theta, k^\varphi)$ es el cuadrivector de onda de los fotones. Estos fotones se mueven a través de geodésicas nulas, $k^\mu k_\mu = 0$, fuera del horizonte de eventos que llegase a existir en la métrica. Al considerar el movimiento de los fotones en el plano ecuatorial, la componente k^θ del cuadrivector de onda se anula, por lo tanto, la ecuación (5.22) se reduce a

$$g_{tt}(k^t)^2 + g_{rr}(k^r)^2 + g_{\varphi\varphi}(k^\varphi)^2 = 0. \tag{5.23}$$

El movimiento de estos fotones tiene las siguientes cantidades conservadas:

$$E_\gamma = -\xi_\mu k^\mu = -g_{\mu\nu}\xi^\nu k^\mu = -g_{tt}\xi^t k^t = -g_{tt}k^t, \tag{5.24}$$

$$L_\gamma = \psi_\mu k^\mu = g_{\mu\nu}\psi^\nu k^\mu = g_{\varphi\varphi}\psi^\varphi k^\varphi = g_{\varphi\varphi}k^\varphi. \tag{5.25}$$

Las expresiones para las componentes del cuadrimomento son:

$$k^t = -\frac{E_\gamma}{g_{tt}} = \frac{E_\gamma}{A}, \tag{5.26}$$

$$k^{\varphi} = \frac{L_\gamma}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{L_\gamma}{r^2}, \tag{5.27}$$

mientras que la condición de geodésicas nulas está dada por:

$$g_{rr}(k^r)^2 + \frac{E_\gamma^2}{g_{tt}} + \frac{L_\gamma^2}{g_{\varphi\varphi}} = 0. \tag{5.28}$$

5.4. Análisis cualitativo de las órbitas de un fotón en la geometría de Schwarzschild ordinaria

A partir de la expresión (5.28) podemos obtener el potencial efectivo de un fotón en el espacio-tiempo de Schwarzschild ordinario. Al sustituir los componentes métricos

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad g_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad \text{y} \quad g_{\varphi\varphi} = r^2, \tag{5.29}$$

en la ecuación (5.28), recordando que $k^r \equiv \frac{dr}{d\lambda}$, obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{E_\gamma^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{L_\gamma^2}{r^2} = 0, \tag{5.30}$$

podemos reacomodar los términos en (5.30) de tal manera que quede como

$$\left(\frac{1}{L_\gamma}\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_\gamma(r) = \frac{1}{b_\gamma^2}, \tag{5.31}$$

donde

$$V_\gamma(r) = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \tag{5.32}$$

y

$$b_\gamma = \frac{L_\gamma}{E_\gamma}. \tag{5.33}$$

De hecho, al reescalar el parámetro afín a lo largo de la geodésica del fotón de tal manera que $\lambda \to L_\gamma \lambda$, se puede eliminar la dependencia explícita de L_γ en la ecuación (5.31). Entonces, podemos notar que esta ecuación tiene la forma de una ley de conservación para una partícula no relativista bajo la influencia de un potencial efectivo unidimensional $V_\gamma(r)$. La cantidad b_γ puede interpretarse como el parámetro de impacto, semejante al que se tiene en el enfoque newtoniano.

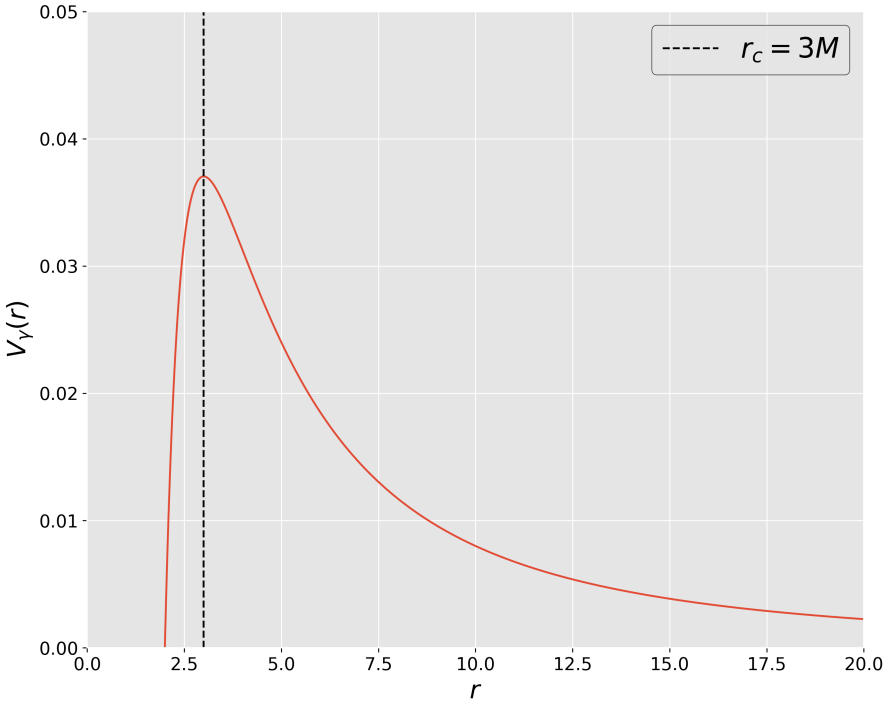


Figura 5.1: Potencial efectivo para un fotón en la métrica de Schwarzschild ordinaria.

El potencial efectivo se grafica en la Fig. 5.1, donde observamos que $V_\gamma(r)$ tiene un máximo cuyo valor es $\frac{1}{27M^2}$. En el máximo del potencial se encuentran las órbitas circulares inestables de fotones a un radio constante r_c. Esta órbita se puede identificar fácilmente en

$$r_c = 3M. \tag{5.34}$$

Lo anterior se confirma al tomar en cuenta la condición $\frac{dV_\gamma}{dr} = 0$. Se halla que r_c corresponde al valor crítico de la función (5.32). Esto significa que un fotón puede orbitar eternamente en un círculo a este radio, pero cualquier perturbación hará que se salga de su órbita y se aleje hacia el infinito espacial $r = \infty$ o hacia $r = 0$.

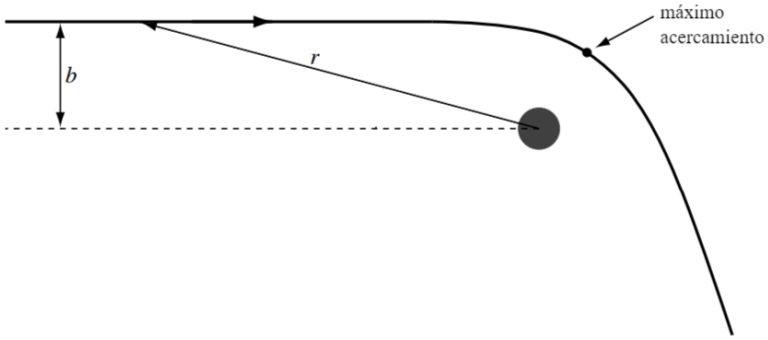


Figura 5.2: La forma de una óbita de un fotón que pasa por una masa esférica si $b > 3\sqrt{3}M$.

La naturaleza de las órbitas depende en gran medida del parámetro de impacto b_γ. Los fotones que se mueven en la órbita circular inestable de acuerdo a la expresión (5.31), en $r_c = 3M$ (donde $\frac{dr}{d\lambda} = 0$), tendrán un parámetro de impacto $b_{\gamma_c} = 3\sqrt{3}M$. Este valor extremo del parámetro de impacto separa las órbitas de los fotones que se alejan de los que son atrapados.

Haciendo un análisis cualitativo como se hace en [11, 22, 23]. Si consideramos fotones que se mueven hacia adentro, es decir, fotones para los cuales r inicialmente está disminuyendo, de la ecuación (5.32) y la Fig. 5.1, vemos que si $\frac{1}{b_\gamma^2} < \frac{1}{27M^2}$, de modo que $b_\gamma > 3\sqrt{3}M$, entonces, la órbita tendrá un único punto de retorno de máximo acercamiento y luego escapará nuevamente hacia el infinito espacial. Esta situación se ilustra en la Fig. 5.2. Sin embargo, si $b_\gamma < 3\sqrt{3}M$, el rayo de luz será capturado por el cuerpo masivo y caerá en espiral hacia el origen. Consideraciones similares se aplican a trayectorias que comienzan a radios pequeños. Si $b_\gamma > 3\sqrt{3}M$, entonces el fotón escapará y, en el infinito, su trayectoria recta tendrá un parámetro de impacto b_γ. Si $b < 3\sqrt{3}M$, entonces la trayectoria del fotón tendrá un punto de retorno y caerá de nuevo hacia el origen.

Esta sección se introdujo con el objetivo de enfatizar lo siguiente: en el caso del espacio-tiempo de Schwarzschild ordinario, consideramos partículas masivas que orbitan circularmente a radios mayores que la órbita circular estable más interna $r > 6M$. Los fotones son emitidos en todas las direcciones por estas partículas masivas y, de acuerdo con el análisis cualitativo que hicimos, algunos de ellos llegarán al infinito espacial.

5.5. Corrimiento al rojo/azul de los fotones emitidos

Una forma de detectar a los objetos estelares es a través de los fotones que emiten. La información que obtenemos de los fotones está dada por su longitud de onda o frecuencia detectada. La frecuencia medida de un fotón que mide un observador con cuadrivelocidad U_C^μ en el punto P_C [12] es

$$\omega_C = -k_\mu U^\mu|_C, \tag{5.35}$$

donde el subíndice C se refiere al punto de emisión (e) o detección (d), en el punto del espacio-tiempo P_C correspondiente. Para la cuadrivelocidad también tenemos:

$$U_e^\mu = \left(U^t, U^r, U^\theta, U^\varphi\right)|_e,$$

$$U_d^\mu = \left(U^t, U^r, U^\theta, U^\varphi\right)|_d.$$

En el caso límite donde el observador se encuentra muy lejos de la fuente ($r_d \to \infty$), la cuadrivelocidad del detector es:

$$U_d^\mu = (1, 0, 0, 0). \tag{5.36}$$

Además ya se ha argumentado que el movimiento puede ser visto siempre en algún plano ecuatorial, por lo que tanto el emisor como el detector van a tener $\theta = \pi/2$, $U^\theta = 0$.

Ahora para los fotones emitidos y detectados vamos a tener que:

$$k_C^\mu = (k^t, k^r, 0, k^\varphi)|_C, \tag{5.37}$$

donde una vez más el cero es consecuencia de la simetría esférica.

El cambio de frecuencia o corrimiento de frecuencia, está dado por la siguiente relación:

$$1 + z = \frac{\omega_e}{\omega_d} \tag{5.38}$$

$$= \frac{-(g_{tt}k^tU^t + g_{rr}k^rU^r + g_{\varphi\varphi}k^\varphi U^\varphi)\Big|_e}{-(g_{tt}k^tU^t + g_{rr}k^rU^r + g_{\varphi\varphi}k^\varphi U^\varphi)\Big|_d}. \tag{5.39}$$

Para el caso de órbitas circulares, donde se han encontrado expresiones para E, L en función de r y A, se tiene que $U^r = 0$ que se ve reflejado en la relación del corrimiento como:

$$1 + z = \frac{(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi)\Big|_e}{(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi)\Big|_d}, \tag{5.40}$$

donde se han tomado en cuenta las relaciones (5.26) y (5.27) para las constantes de movimiento E_γ y L_γ.

Al introducir el parámetro de deflexión de la luz $b_\gamma \equiv \frac{L_\gamma}{E_\gamma}$, donde E_γ y L_γ están definidos por (5.26) y (5.27) respectivamente, podemos reescribir (5.33) como

$$1 + z = \frac{(U^t - b_\gamma U^\varphi)\Big|_e}{(U^t - b_\gamma U^\varphi)\Big|_d}. \tag{5.41}$$

Dado que las constantes de movimiento E_γ y L_γ se conservan a lo largo de las geodésicas nulas seguidas por los fotones desde el punto de emisión hasta el punto de detección, por lo tanto, $b_e = b_d$, es decir, está cantidad también es constante a lo largo de todo el camino de los fotones.

5.5.1. Parámetro de deflexión de la luz para cualquier punto arbitrario de la órbita en el plano ecuatorial

En [25] obtienen una expresión para el parámetro de deflexión para un punto general de la órbita circular en el plano ecuatorial. En ese trabajo consideran la distancia angular δ, que se trata de un parámetro medible. Desarrollan dicha expresión con el objetivo de mostrar una relación matemática entre la distancia angular observable δ y el ángulo azimutal φ no observable.

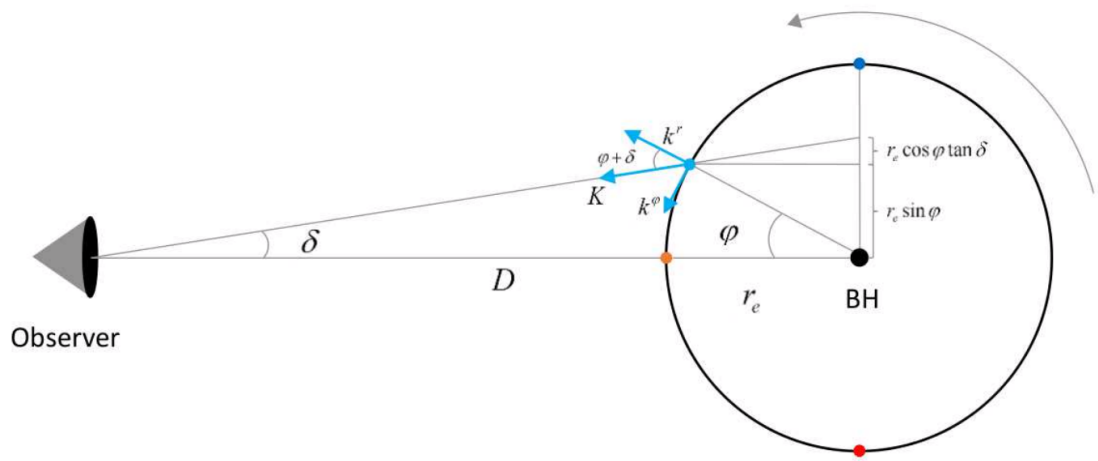


Figura 5.3: Ilustración geométrica del vector bidimensional K y la relación entre el ángulo azimutal φ y la distancia angular δ. Se ilustra la emisión de los fotones debida a la materia que orbita alrededor de un objeto compacto. El observador posicionado muy lejos de la fuente está viendo esta descripción de canto.

Para obtener el parámetro de deflexión de la luz de fotones provenientes de un punto general de la órbita circular en el plano ecuatorial (ver Fig. 5.2), tomamos en cuenta la ecuación (5.28) para expresar k^r en términos de las constantes de movimiento y las componentes de la métrica como se muestra a continuación

$$(k^r)^2 = -\frac{1}{g_{rr}}\left(\frac{E_\gamma^2}{g_{tt}} + \frac{L_\gamma^2}{g_{\varphi\varphi}}\right). \tag{5.42}$$

En [25], al considerar la distancia angular no nula $\delta \neq 0$, introducen el vector auxiliar K definido por la siguiente descomposición (ver Fig. 5.2 para más detalles)

$$k^r = K cos(\varphi + \delta), \tag{5.43}$$

$$r_e k^\varphi = K sen(\varphi + \delta), \tag{5.44}$$

con

$$K^2 = (k^r)^2 + r_e^2 (k^\varphi)^2. \tag{5.45}$$

Al considerar las ecuaciones (5.26) y (5.27), (5.45) se puede reescribir como

$$K^2 = -\frac{1}{g_{rr}}\left(\frac{E_\gamma^2}{g_{tt}} + \frac{L_\gamma^2}{g_{\varphi\varphi}}\right) + r_e^2 \frac{L_\gamma^2}{g_{\varphi\varphi}^2}. \tag{5.46}$$

Mientras que, si introducimos (5.43) en (5.42), podemos encontrar una relación similar para K^2

$$K^2 = -\frac{1}{g_{rr}cos^2(\varphi+\delta)}\left(\frac{E_\gamma^2}{g_{tt}} + \frac{L_\gamma^2}{g_{\varphi\varphi}}\right). \tag{5.47}$$

La igualdad de las relaciones (5.46) y (5.47) proporciona una ecuación para el parámetro de deflexión de la luz dependiente de $(\varphi+\delta)$, como sigue

$$(g_{tt}b_\gamma^2 + g_{\varphi\varphi})g_{\varphi\varphi}tan^2(\varphi+\delta) + r_e^2 g_{rr}g_{tt}b_\gamma^2 = 0, \tag{5.48}$$

que conduce a la siguiente solución para b_γ

$$b_\gamma = \frac{-g_{\varphi\varphi}sen(\varphi+\delta)}{\sqrt{-g_{tt}}\sqrt{g_{\varphi\varphi}sen^2(\varphi+\delta) + r_e^2 cos^2(\varphi+\delta)}}, \tag{5.49}$$

que es el parámetro de deflexión de la luz para un punto arbitrario de la órbita en el plano ecuatorial, donde el ángulo azimutal φ varía de 0 a 2π y δ es el ángulo de apertura del telescopio (distancia angular) que es una cantidad medible.

5.5.2. Corrimiento de frecuencia máximo y mínimo de los fotones emitidos

En este trabajo, nos interesa determinar en qué puntos de la órbita circular de las partículas masivas se encuentran los valores máximos y mínimos del corrimiento de frecuencia de los fotones emitidos, ya que es más fácil identificarlos observacionalmente.

Por un lado, bajo la suposición de que el detector se encuentra en el infinito espacial, el denominador en (5.41) se simplifica de acuerdo con (5.36). Entonces, la expresión del cambio de frecuencia de los fotones emitidos se reduce a

$$1 + z = U_e^t - b_\gamma U_e^\varphi. \tag{5.50}$$

Por otro lado, hemos supuesto que la ubicación del detector se encuentra muy lejos de la fuente, es decir, donde $D \gg r_e$ y $\delta \to 0$. Entonces, la ecuación (5.49) se reduce a

$$b_\gamma = \frac{-g_{\varphi\varphi}sen(\varphi)}{\sqrt{-g_{tt}}\sqrt{g_{\varphi\varphi}sen^2(\varphi) + r_e^2 cos^2(\varphi)}}. \tag{5.51}$$

Al maximizar la ecuación (5.51) se halla que el valor máximo y mínimo del parámetro de deflexión de la luz se encuentra en $\varphi = +\pi/2$ y $\varphi = -\pi/2$, respectivamente. En otras palabras, el valor máximo y mínimo del parámetro de deflexión de la luz se alcanza para cuerpos cuyo vector de posición con respecto al centro del agujero negro es ortogonal a lo largo de la línea de visión del detector. Al sustituir $\varphi = \pm\pi/2$ en la expresión (5.51), obtenemos el valor máximo y mínimo del parámetro de deflexión de la luz:

$$b_{\gamma_\mp} = \mp\sqrt{-\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}} = \mp\frac{r}{\sqrt{A}}. \tag{5.52}$$

Por lo tanto, al sustituir (5.52) en la formula del cambio de frecuencia (5.50), encontramos los fotones altamente desplazados al rojo ($\varphi = +\pi/2$) y al azul ($\varphi = -\pi/2$):

$$1 + z_{\pm} = U_e^t - b_{\gamma_{\mp}} U_e^{\varphi}. \tag{5.53}$$

Esta última relación evidencia la contribución del corrimiento debido al efecto gravitacional, ya que en el enfoque newtoniano únicamente hay contribución cinemática (el segundo término del segundo miembro de la igualdad). Ahora se tiene un término extra que aparece debido al enfoque relativista.

Finalmente, cuando las partículas masivas siguen trayectorias circulares, las relaciones (5.17), (5.18) son válidas. Entonces, al sustituirlas en (5.53), obtenemos la expresión para el corrimiento de frecuencia total

$$1 + z_{\pm} = \sqrt{\frac{2}{2A - r\frac{\partial A}{\partial r}}} \pm \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{\frac{r\frac{\partial A}{\partial r}}{2A - r\frac{\partial A}{\partial r}}}, \tag{5.54}$$

en esta última expresión, el primer término tiene la interpretación de corrimiento gravitacional, mientras que el segundo es el corrimiento cinemático.

5.6. Uso del método en la métrica de Schwarzschild

Haciendo uso de las expresiones encontradas y al aplicarlas en la métrica de Schwarzschild (considerando a partir de aquí $G = 1$) que tiene las siguientes características

$$\text{Sea} \quad A(r) = 1 - \frac{2M}{r} \quad \text{y} \quad \frac{dA}{dr} = \frac{2M}{r^2}, \tag{5.55}$$

entonces

$$1 + z_g = \sqrt{\frac{2}{2A - r\frac{\partial A}{\partial r}}}, \tag{5.56}$$

$$z_{kin_{\pm}} = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{\frac{r\frac{\partial A}{\partial r}}{2A - r\frac{\partial A}{\partial r}}}. \tag{5.57}$$

Por lo tanto

$$\boxed{1 + z_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3M}{r}}} \pm \sqrt{\frac{\frac{M}{r}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 - \frac{3M}{r}\right)}}}. \tag{5.58}$$

Este resultado es importante porque será la base para un análisis comparativo con el resultado que obtendremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 6

Aplicación del método a la métrica de Schwarzschild modificada

Hasta ahora, todo lo que hemos hecho ha sido exponer los elementos que utilizaremos para aplicar el método descrito en el capítulo anterior a la métrica de Schwarzschild modificada. Recordemos que el objetivo general es obtener los parámetros de esta métrica en función de los corrimientos al rojo y al azul de fotones emitidos por partículas que orbitan el agujero negro modificado.

A partir de la relación que obtendremos en este capítulo veremos si es posible obtener dichos parámetros totalmente en función de los corrimientos.

6.1. Componentes de la métrica

Dada la métrica (4.15) todos los argumentos empleados en la explicación del método en el capítulo precedente se satisfacen. Identificando las componentes de la métrica

$$g_{tt_n} = -\frac{\tilde{F}}{f^2(\epsilon_n)}, \quad g_{rr_n} = \frac{\tilde{F}^{-1}}{g^2(\epsilon_n)}, \quad g_{\theta\theta_n} = \frac{\tilde{r}^2}{g^2(\epsilon_n)} \quad y \quad g_{\varphi\varphi_n} = \frac{\tilde{r}^2 \sin^2\theta}{g^2(\epsilon_n)}, \tag{6.1}$$

siendo $\epsilon_n = E_n/E_{pl}$, el subíndice n hace referencia a la partícula que queremos analizar (m denotará a la partícula masiva y γ al fotón) y $\tilde{F} = (1 - 2M/\tilde{r})$.

6.2. Condición de órbitas circulares para la partículas masivas

Entonces, considerando el caso cuando las partículas masivas siguen órbitas circulares, de la definición que hicimos en (5.11) del potencial efectivo, las condiciones que aparecen en (5.12) son:

$$V_{eff} = 1 - \frac{E^2 f^2(\epsilon_m)}{\tilde{F}} + \frac{L^2 g^2(\epsilon_m)}{\tilde{r}^2} = 0, \tag{6.2}$$

$$V'_{eff} = \frac{E^2 f^2(\epsilon_m)}{\tilde{F}^2}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{r}} - \frac{2L^2 g^2(\epsilon_m)}{\tilde{r}^3} = 0, \tag{6.3}$$

$$V''_{eff} = \frac{E^2 f^2(\epsilon_m)}{\tilde{F}^2}\left[\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{2}{\tilde{F}}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{r}}\right)^2\right] + \frac{6L^2 g^2(\epsilon_m)}{\tilde{r}^4} > 0. \tag{6.4}$$

De las condiciones (6.2) y (6.3) obtenemos L y E en términos de $\tilde{r}$, $\tilde{F}$

$$L = \pm\frac{\tilde{r}}{g(\epsilon_m)}\sqrt{\frac{\tilde{r}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{r}}}{2\tilde{F} - \tilde{r}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{r}}}}, \quad E = \frac{\tilde{F}}{f(\epsilon_m)}\sqrt{\frac{2}{2\tilde{F} - \tilde{r}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{r}}}}, \tag{6.5}$$

nuevamente el signo $\pm$ se asocia a la dirección del momento angular de la partícula masiva.

Dadas las expresiones para E y L obtenemos las componentes de la cuadrivelocidad

$$U^t = f(\epsilon_m)\sqrt{\frac{2}{2\tilde{F} - \tilde{r}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{r}}}}, \tag{6.6}$$

$$U^\varphi = \pm\frac{g(\epsilon_m)}{\tilde{r}}\sqrt{\frac{\tilde{r}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{r}}}{2\tilde{F} - \tilde{r}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{r}}}}. \tag{6.7}$$

6.3. Ubicación de las órbitas circulares estables de partículas masivas en el potencial efectivo

Podemos definir un potencial efectivo equivalente al que definimos en (5.11). Para expresar el potencial efectivo de una partícula masiva en el espacio-tiempo de Schwarzschild modificado, hay que considerar la expresión (5.11) reescrita de la siguiente manera:

$$g_{rr_m}(U^r)^2 + 1 + \frac{E^2}{g_{tt_m}} + \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi_m}} = 0. \tag{6.8}$$

Al sustituir los componentes métricos:

$$g_{rr_m} = -\frac{\left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right)}{f^2(\epsilon_m)}, \quad g_{tt_m} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right)^{-1}}{g^2(\epsilon_m)} \quad \text{y} \quad g_{\varphi\varphi_m} = \frac{\tilde{r}^2}{g^2(\epsilon_m)}, \tag{6.9}$$

en la expresión (6.8), recordando que $U^r \equiv \frac{d\tilde{r}}{d\tau}$, obtenemos como resultado:

$$-\frac{\left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right)}{f^2(\epsilon_m)}\left(\frac{d\tilde{r}}{d\tau}\right)^2 + 1 + \frac{E^2}{\frac{\left(1-\frac{2M}{\tilde{r}}\right)^{-1}}{g^2(\epsilon_m)}} + \frac{L^2}{\frac{\tilde{r}^2}{g^2(\epsilon_m)}} = 0, \tag{6.10}$$

al ordenar los términos en (6.10), obtenemos la estructura siguiente deducida en [26]:

$$\frac{\mathbb{E} + 1}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{g(\epsilon_m)}\frac{d\tilde{r}}{d\tau}\right]^2 + V_m(r), \tag{6.11}$$

donde

$$V_m(r) = -\frac{M}{\tilde{r}} + \frac{\mathbb{L}^2}{2\tilde{r}^2} - \frac{M\mathbb{L}^2}{\tilde{r}^3}, \tag{6.12}$$

$$\mathbb{E} = Ef(\epsilon_m) \tag{6.13}$$

y

$$\mathbb{L} = Lf(\epsilon_m). \tag{6.14}$$

Por lo tanto, hemos obtenido una expresión que adopta la forma de una ley de conservación de la energía para una partícula no relativista bajo la influencia de un potencial efectivo unidimensional $V_m(\tilde{r})$. El primer término del segundo miembro de la ecuación (6.11) se puede interpretar como la energía cinética, el segundo término como la energía potencial, mientras que el miembro izquierdo constante como la energía mecánica total.

Para ubicar las posiciones de las órbitas circulares estables en la gráfica del potencial efectivo de una partícula masiva en el espacio-tiempo de Schwarzschild modificado, seguiremos el procedimiento estándar que consiste en graficar $V_m(\tilde{r})$ como función de $\tilde{r}$ para varios valores de L, manteniendo $M = 1$ y utilizando las funciones arcoíris (4.29) con $g(\epsilon_m)$ =1.1. La gráfica correspondiente se muestra en la Figura 6.1.

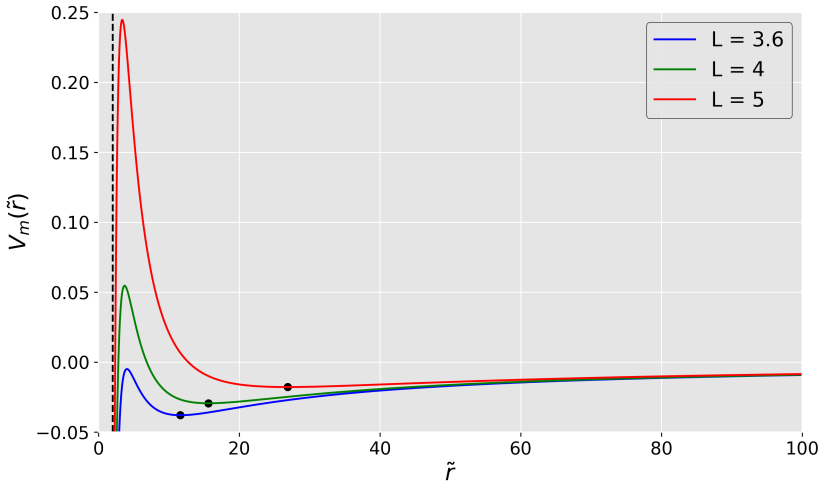


Figura 6.1: Gráfica del potencial efectivo para una partícula masiva en el espacio-tiempo de Schwarzschild modificado. Los puntos negros representan las órbitas circulares estables.

6.4. Las órbitas circulares estables más internas

Las condiciones (6.2), (6.3) y (6.4) garantizan el caso particular de órbitas circulares estables. No obstante, cuando V''_{eff}=0 se obtiene un punto de inflexión donde $\tilde{r}_{ISCO}$ determina la

distancia a la que se encuentra la *órbita circular estable más interna* (ISCO por sus siglas en inglés).

Para determinar r_{ISCO} en la métrica de Schwarzschild modificada, hacemos uso de la expresión (6.4) y la igualamos a cero:

$$V''_{eff} = \frac{E^2 f^2(\epsilon_m)}{\tilde{F}^2}\left[\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{2}{\tilde{F}}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{r}}\right)^2\right] + \frac{6L^2 g^2(\epsilon_m)}{\tilde{r}^4} = 0, \tag{6.15}$$

al sustituir los valores de E y L en la expresión y después de simplificar, obtenemos

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{2}{\tilde{F}}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{r}}\right)^2 + \frac{3}{\tilde{r}}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{r}} = 0. \tag{6.16}$$

Ahora, al sustituir $\tilde{F} = (1 - 2M/\tilde{r})$ y realizar las operaciones correspondientes, obtenemos la siguiente solución:

$$\boxed{\tilde{r}_{ISCO} = 6M}. \tag{6.17}$$

Este parámetro representa la frontera entre partículas de prueba orbitando al agujero negro y partículas de prueba cayendo directamente hacia él.

6.5. Corrimiento al rojo y al azul de los fotones emitidos

El cambio de frecuencia o corrimiento de frecuencia, está dado por la siguiente relación

$$1 + z = \frac{\left.(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi - g_{rr_\gamma} k^r U^r)\right|_e}{\left.(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi - g_{rr_\gamma} k^r U^r)\right|_d}. \tag{6.18}$$

$$\tag{6.19}$$

Para el caso de órbitas circulares

$$1 + z = \frac{\left.(U^t - b_\gamma U^\varphi)\right|_e}{\left.(U^t - b_\gamma U^\varphi)\right|_d}. \tag{6.20}$$

De acuerdo con lo que ya se mencionó en el capítulo anterior, el valor máximo y mínimo del parámetro de deflexión de la luz se alcanzan para partículas masivas ubicadas en la linea media, es decir, para partículas masivas cuyo vector de posición con respecto al centro del agujero negro es ortogonal a la línea de visión. Entonces, (5.52) se escribe como

$$b_\gamma = \mp\sqrt{-\frac{g_{\varphi\varphi_\gamma}}{g_{tt_\gamma}}} = \mp\frac{f(\epsilon_\gamma)\tilde{r}}{g(\epsilon_\gamma)\sqrt{\tilde{F}}}. \tag{6.21}$$

En el límite del observador en el infinito

$$1 + z_{\pm} = U_e^t - b_{\mp} U_e^{\varphi}, \tag{6.22}$$

esto es

$$1 + z_{\pm} = f(\epsilon_m)\sqrt{\frac{2}{2\tilde{F} - \tilde{r}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{r}}}} \pm \frac{f(\epsilon_\gamma)g(\epsilon_m)}{g(\epsilon_\gamma)\sqrt{\tilde{F}}}\sqrt{\frac{\tilde{r}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{r}}}{2\tilde{F} - \tilde{r}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{r}}}}. \tag{6.23}$$

A partir de la métrica (4.15) identificamos que

$$\tilde{F}(\tilde{r}) = 1 - \frac{2M}{\tilde{r}} \tag{6.24}$$

y

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{r}} = \frac{2M}{\tilde{r}^2}. \tag{6.25}$$

Al sustituir (6.24) y (6.25) en (6.23) obtenemos

$$1 + z_g = \frac{f(\epsilon_m)}{\sqrt{1 - \frac{3M}{\tilde{r}}}}, \tag{6.26}$$

$$z_{kin_{\pm}} = \pm \frac{f(\epsilon_\gamma)g(\epsilon_m)}{g(\epsilon_\gamma)}\sqrt{\frac{\frac{M}{\tilde{r}}}{\left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right)\left(1 - \frac{3M}{\tilde{r}}\right)}}. \tag{6.27}$$

Por lo tanto

$$\boxed{1 + z_{GA_{1,2}} = \frac{f(\epsilon_m)}{\sqrt{1 - \frac{3M}{\tilde{r}}}} \pm \frac{f(\epsilon_\gamma)g(\epsilon_m)}{g(\epsilon_\gamma)}\sqrt{\frac{\frac{M}{\tilde{r}}}{\left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right)\left(1 - \frac{3M}{\tilde{r}}\right)}}}. \tag{6.28}$$

Hemos obtenido una expresión para los corrimientos de fotones emitidos por una partícula masiva que orbita circularmente un agujero negro de Schwarzschild en el contexto de la gravedad arcoíris. Este resultado general depende de 5 parámetros, es decir, $z_{GA_{1,2}} = z_{GA_{1,2}}(f(\epsilon_m), f(\epsilon_\gamma), g(\epsilon_m), g(\epsilon_\gamma), M)$. Está claro que la forma de las funciones $f(\epsilon_n)$ y $g(\epsilon_n)$ tendrán un efecto en los corrimientos.

Capítulo 7

Análisis

7.1. Análisis comparativo

Investigaremos las implicaciones de las funciones $f(\epsilon_n)$ y $g(\epsilon_n)$ en los corrimientos de fotones emitidos por una partícula masiva que sigue una órbita circular alrededor de un agujero negro de Schwarzschild modificado en el contexto de la gravedad arcoíris. Destacamos la importancia de que la elección de las funciones arcoíris esté basada en motivaciones fenomenológicas. Esto significa que la elección no debería de ser arbitraria, sino que debería tener fundamento en observaciones, asegurando que la teoría propuesta sea consistente con las observaciones experimentales. Así que, vamos a considerar la expresión general (6.28) y restringirnos a la propuesta de las funciones (4.2) de Magueijo y Smolin ya introducida en el capítulo 4 que son las siguientes:

$$f(\epsilon_n) = g(\epsilon_n) = \frac{1}{1 - \lambda E_n/E_{pl}}. \tag{7.1}$$

Vamos a suponer que el parámetro adimensional λ es del orden de la unidad. Si esta condición no se impone *a priori*, entonces podría indicar la existencia de una nueva escala física del orden de λ/E_{pl}, donde esta nueva escala no debe superar cierto límite como lo han investigado en [21].

Al considerar la expresión (7.1), (6.28) se reduce a

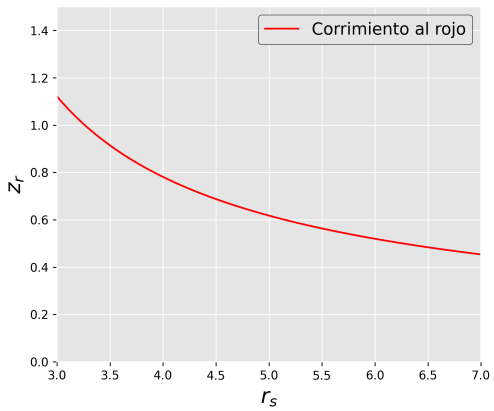
$$\boxed{1 + z_{GA_{1,2}} = f(\epsilon_m)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3M}{\tilde{r}}}} \pm \sqrt{\frac{\frac{M}{\tilde{r}}}{\left(1-\frac{2M}{\tilde{r}}\right)\left(1-\frac{3M}{\tilde{r}}\right)}}\right)}. \tag{7.2}$$

Notemos la similitud de (7.2) con (5.58). La única diferencia es que en (7.2) está multiplicada por la función $f(\epsilon_m)$ que está relacionada con la energía total de la partícula masiva. Entonces, para nuestro análisis comparativo aprovecharemos esta similitud; primero vamos a considerar la gráfica de los corrimientos al rojo y al azul de fotones emitidos por una partícula masiva que sigue una órbita circular alrededor de un agujero negro de Schwarzschild estándar. Luego, vamos a tomar en cuenta lo mismo para el caso de la métrica de Schwarzschild modificada para algún valor de la función $f(\epsilon_m)$ y también mostraremos el caso límite $\lim_{\epsilon_m \to 0} f(\epsilon_m) = 1$. A partir de estas gráficas haremos algunos comentarios del efecto de la función $f(\epsilon_m)$ en los corrimientos de las frecuencias emitidas.

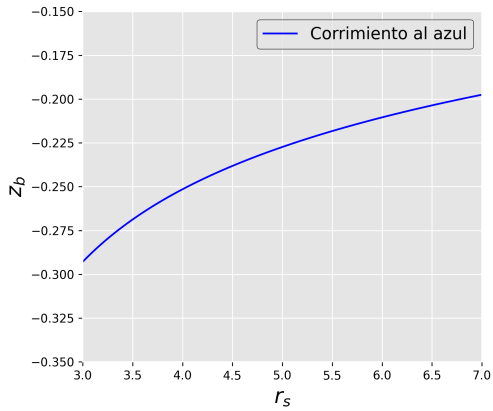
Para el análisis gráfico haremos las siguientes consideraciones en la métrica de Schwarzschild ordinaria y que serán análogas para la métrica de Schwarzschild modificada:

1. La partícula de prueba masiva que orbita el agujero negro estará a distancias mayores a partir de la órbita circular estable más interna, es decir, $r_e > r_{ISCO}$.
2. Se tomará en cuenta el radio de Schwarzschild ($r_s = 2M$), esto conduce a que $r_{ISCO} = 3r_s$.

Al usar la expresión (5.58) y suponer $M = 1$, graficaremos los corrimientos al rojo y al azul de fotones para el caso de la métrica de Schwarzschild ordinaria en función de r_s. Las gráficas que obtenemos son las siguientes:



(a) Gráfica de z_r en función de r_s

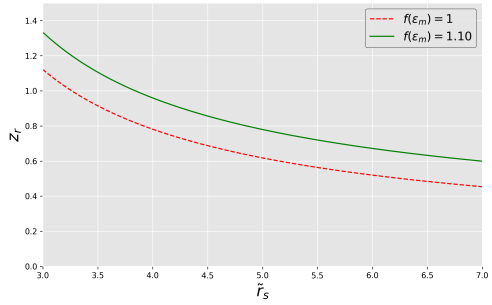


(b) Gráfica de z_b en función de r_s

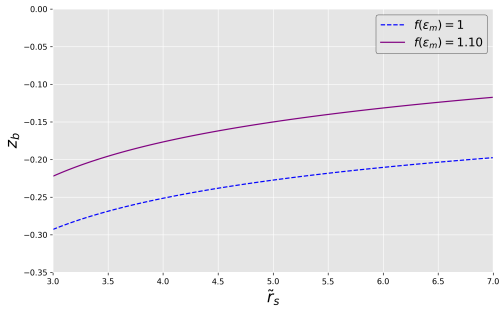
Figura 7.1: Corrimiento al rojo y al azul para la métrica de Schwarzchild ordinaria.

A grandes rasgos, cada gráfica ilustra cómo varían los corrimientos al rojo y al azul en función de la posición de la partícula en las cercanías de un agujero negro.

Las gráficas de los corrimientos al rojo y al azul para la métrica de Schwarszchild modificada tendrían el mismo comportamiento, pero serían multiplicadas por los diferentes valores que pueda tomar la función $f(\epsilon_m)$, así como ya lo indicaba la ecuación (7.2) y obtendríamos Schwarzschild estándar cuando $\lim_{E_m/E_{pl}\to 0} f(E_m/E_{pl}) = 1$. Las correspondientes gráficas en este contexto para algún valor de $f(\epsilon_m)$ son las siguientes:



(a) Gráfica de z_r en función de $\tilde{r}_s$



(b) Gráfica de z_b en función de $\tilde{r}_s$

Figura 7.2: Corrimiento al rojo y al azul para la métrica de Schwarzchild modificada.

Vemos que el efecto de la función $f(\epsilon_m)$ presenta un aumento en los corrimientos al rojo y al azul de los fotones emitidos.

7.2. Expresión de los parámetros en función de los corrimientos

Ahora bien, el principal objetivo es determinar los parámetros de la métrica (6.28) que queden después de considerar la RDM (7.1) en función de cantidades observables. Así pues, nuevamente (7.2) se reduce a

$$\boxed{1+z_{GA_{1,2}} = f(\epsilon_m)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3M}{\tilde{r}}}} \pm \sqrt{\frac{\frac{M}{\tilde{r}}}{\left(1-\frac{2M}{\tilde{r}}\right)\left(1-\frac{3M}{\tilde{r}}\right)}}\right)}. \tag{7.3}$$

Para simplificar los cálculos, definamos

$$\tilde{M} = \frac{M}{\tilde{r}}. \tag{7.4}$$

De esta manera (7.3) toma la forma siguiente

$$1+z_{GR_{1,2}} = f(\epsilon_m)\left(\frac{1}{\sqrt{1-3\tilde{M}}} \pm \sqrt{\frac{\tilde{M}}{\left(1-2\tilde{M}\right)\left(1-3\tilde{M}\right)}}\right). \tag{7.5}$$

Para eliminar la dependencia con $f(\epsilon_m)$, dividamos la expresión del corrimiento al rojo entre el corrimiento al azul, entonces

$$\frac{1+z_1}{1+z_2} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-3\tilde{M}}} + \sqrt{\frac{\tilde{M}}{(1-2\tilde{M})(1-3\tilde{M})}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-3\tilde{M}}} - \sqrt{\frac{\tilde{M}}{(1-2\tilde{M})(1-3\tilde{M})}}\right)} = \frac{\left(1+\sqrt{\frac{\tilde{M}}{1-2\tilde{M}}}\right)}{\left(1-\sqrt{\frac{\tilde{M}}{1-2\tilde{M}}}\right)}.$$

Definamos

$$Q = \frac{1+z_1}{1+z_2}, \tag{7.6}$$

entonces

$$Q = \frac{\left(1+\sqrt{\frac{\tilde{M}}{1-2\tilde{M}}}\right)}{\left(1-\sqrt{\frac{\tilde{M}}{1-2\tilde{M}}}\right)},$$

y realizando algunas operaciones obtenemos

$$\tilde{M} = (1-2\tilde{M})\left(\frac{Q-1}{Q+1}\right)^2. \tag{7.7}$$

Ahora denotemos

$$P = \frac{Q-1}{Q+1}, \tag{7.8}$$

así

$$\tilde{M} = P^2 - 2\tilde{M}P^2; \tag{7.9}$$

al despejar $\tilde{M}$

$$\tilde{M} = \frac{P^2}{1+2P^2}, \tag{7.10}$$

regresar a las variables originales y realizar ciertas operaciones obtenemos

$$\boxed{\tilde{M} = \frac{[(1+z_2)-(1+z_1)]^2}{3(1+z_2)^2 - 2(1+z_1)(1+z_2) + 3(1+z_1)^2}}. \tag{7.11}$$

Por otro lado, para la función $f(\epsilon_m)$ al despejarla

$$f(\epsilon_m)^2 = (1+z_1)(1+z_2)(1-2\tilde{M}). \tag{7.12}$$

Por lo tanto, al sustituir (7.11) en (7.12)

$$\boxed{f(\epsilon_m)^2 = \frac{(1+z_1)(1+z_2)\left[2(1+z_1)^2 + 2(1+z_2)^2\right]}{3(1+z_2)^2 - 2(1+z_1)(1+z_2) + 3(1+z_1)^2}}. \tag{7.13}$$

Conclusiones

Mediante el método relativista general para estimar parámetros de agujeros negros que presentamos, logramos obtener una expresión general para los corrimientos al rojo y al azul de fotones emitidos por una partícula de prueba masiva que se mueve en una órbita circular alrededor de un agujero negro de Schwarzschild en el contexto de la teoría de la gravedad arcoíris. Esta expresión ,en general, depende de cinco parámetros $z_{GA_{1,2}} = z_{GA_{1,2}}(f(\epsilon_m), f(\epsilon_\gamma), g(\epsilon_m), g(\epsilon_\gamma), M)$, es decir, que es válida para cualquier RDM propuesta en la literatura con la restricción de que las funciones $f(\epsilon_n)$ y $g(\epsilon_n)$ cumplan que $\lim_{E_n/E_{pl}\to 0} f(E_n/E_{pl}) = 1$ y $\lim_{E_n/E_{pl}\to 0} g(E_n/E_{pl}) = 1$.

Por otro lado, al haber considerado el caso particular de la relación de dispersión modificada introducida por Magueijo y Smolin, donde $f(\epsilon_n) = g(\epsilon_n) = 1/(1 - \lambda E_n/E_{pl})$ (suponiendo $\lambda = 1$). Pudimos ver el impacto de la función $f(\epsilon_m)$ en los corrimientos al rojo y al azul de fotones emitidos en la metrica de Schwazchild modificada al compararlo con las obtenidas en la métrica de Schwarzschild ordinaria. Esto se hizo mediante sus correspondientes expresiones analíticas y sus respectivas gráficas. El resultado encontrado fue un aumento en los corrimientos al rojo y al azul de las frecuencias emitidas.

Finalmente mostramos que, al tomar en cuenta las consideraciones anteriores logramos obtener los parámetros de la métrica de Schwarzschild modificada totalmente en términos de los corrimientos al rojo y al azul de fotones que fue el objetivo principal de esta investigación. Dichos parámetros que quedaron son la masa M y la función arcoíris relacionada con la energía total de la partícula masiva $f(\epsilon_m)$.

Se espera que el resultado general obtenido de los corrimientos al rojo y al azul de fotones en la métrica de Schwarzschild modificada sirva de base para la exploración del efecto en los corrimientos de fotones de otras relaciones de dispersión (diferentes funciones arcoíris), por ejemplo [19, 20] que tienen otras motivaciones.

Bibliografía

[1] Einstein, A. (1915) *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Die Feldgleichungun der Gravitation.* p844-847.

[2] Schwarzschild, K. (1999) *On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory.* Phys. Lett. B **510**, 255 [arXiv:physics/9905030 [physics.hist-ph]].

[3] LIGO. (2016) *Observation of gravitational waves from binary black hole merger.* Phys. Lett. **116**, 061102.

[4] Magueijo, J. and Smolin, L. (2003) *Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale.* Phys. Lett. D **67**, 044017.

[5] Amelino-Camelia, G. (2001) *Testable scenario for relativity with minimum-length.* Phys. Lett. B **510**, 255 [arXiv:hep-th/0012238].

[6] Amelino-Camelia, G. (2002) *Relativity in space-times with short-distance structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale.* Int. J. Mod. Phys. D **11**, 35 [arXiv:gr-qc/0012051].

[7] Kowalski-Glikman. J. (2001) *Observer independent quantum of mass.* Phys. Lett. A **286**, 391 (2001) [arXiv:hep-th/0102098].

[8] Bruno, N. R., Amelino-Camelia, G. and Kowalski-Glikman, J. (2001) *Deformed boost transformations that saturate at the Planck scale.* Phys. Lett. B **522**, 133 [arXiv:hep-th/0107039].

[9] Magueijo, J. and Smolin, L. (2004) *Gravity's Rainbow.* Class. Quant. Grav. **21**, 1725 [arXiv:gr-qc/0305055].

[10] Magueijo, J. and Smolin, L. (2002) *Lorentz invariance with an invariant energy scale.* Phys.Rev.Lett. **88**, (190403) [arXiv:hep-th/0112090].

[11] P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby. (2006) *General Relativity An Introduction for Physicists.* Cambridge University Press.

[12] M. Blau. (2022) *Lecture Notes on General Relativity.* www.blau.itp.unibe.ch/GRLecturenotes.html.

[13] Herrera-Aguilar A. and Nucamendi U. (2015) *Kerr black hole parameters in terms of red/blue shifts of photons emitted by geodesic particles.* Phys. Rev. D 92(4), 045024.

[14] Banerjee P., Herrera-Aguilar A., Momennia M. and Nucamendi U. (2022) *Mass and spin of Kerr black holes in terms of observational quantities: The dragging effect on the redshift.* Phys. Rev. D, **105**, 124037.

[15] Nucamendi U., Herrera-Aguilar A., Lizardo-Castro R. and López-Cruz O. (2021) *Toward the Gravitational Redshift Detection in NGC 4258 and the Estimation of its Black Hole Mass-to-Distance Ratio.* ApJ, 917, L14 [arXiv:2012.05487].

[16] Greisen, K. (1966) *End to the Cosmic-Ray Spectrum?.* Phys.Rev.Lett. **16**, 748.

[17] R. V. Pound and J. L. Snider. (1965) *Effect of gravity on gamma radiation.* Phys.Rev. **140**, B788.

[18] Abraham, J. (2010) *Measurement of the energy spectrum of cosmic rays above* 10^{18} *eV using the Pierre Auger Observatory.* (Pierre Auger Collaboration), Phys.Lett.B685:239-246.

[19] Amelino-Camelia, G., Ellis, J. R., Mavromatos, N. and Nanopoulos, D. V. (1997) *Distance Measurement and Wave Dispersion in a Liouville-String Approach to Quantum Gravity.* Int.J.Mod.Phys. A12, 607, hep-th/9605211.

[20] Amelino-Camelia, G. (2013) *Quantum Spacetime Phenomenology.* Living Rev. Rel. **16**, 5, 0806.0339.

[21] Ali, A. F. and Khalil, M. M. (2015) *A Proposal for Testing Gravity's Rainbow.* [arXiv:1408.5843].

[22] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler. (1973) *Gravitation.* Macmillan.

[23] E. Gourgoulhom. (2024) *Geometry and physics of black holes.* https://relativite.obspm.fr/blackholes/.

[24] S. Carrol. (2003) *An introduction to general relativity spacetime and geometry.* Chicago University Press.

[25] Momennia M., Benerjee P., Herrera-Aguilar A. and Nucamendi U. (2023) *Schwarzschild black hole and redshift rapidity: A new approach towards measuring cosmic distances.* [arXiv:2312.07426v1].

[26] Leiva C., Saavedra J. and Villanueva J. (2008) *Geodesic structure of the schwarzschild black hole in rainbow gravity.* [arXiv:0808.2601v3].