

BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA



**Facultad de ingeniería
Colegio de ingeniería geofísica**

Análisis 2D vs 3D para estudios de premonitores estadísticos: Dimensión Fractal y Entropía

Tesis para obtener el título de:

Ingeniero Geofísico

Presenta

Albérico Rodríguez Carredano

Director

Dr. Fidencio Alejandro Nava Pichardo

Codirector

M.C Yleana Claudia Martínez Mirón

Puebla, México marzo 2021

Dedicatoria

A MIS PADRES.....

Agradecimientos

Tabla de contenido

Contenido

Dedicatoria	2
Agradecimientos	3
Tabla de contenido.....	4
CAPITULO 1. INTRODUCCIÓN, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS	8
1.1. Introducción	8
1.2 Justificación	9
1.2.1 Objetivos generales.....	10
1.2.2 Objetivos particulares.....	10
CAPITULO 2. DOS MEDIDAS DE LA DISTRIBUCIÓN ESPACIAL DE SISMICIDAD Y SU ANÁLISIS 2D (EPICENTROS) VS 3D (HIPOCENTROS).	10
2.1 Dimensión fractal	10
2.1.1 Dimensión generalizada por conteo de cajas.....	11
2.1.2 Dimensión por el método de correlación.....	15
2.1.3 Aplicación.....	17
2.1.4 Coeficiente de Correlación de Pearson.	17
2.1.5 Dimensión fractal como observable precursora.....	18
2.2 Entropía	19
2.2.1 Información y entropía.....	20
2.2.2 Entropía y sismicidad.....	22
2.2.3 Entropía de incidencia	23
2.2.4 La entropía uniforme.....	25
2.2.5 Entropía Poissoniana.....	26
2.2.6 Estimación de entropía.....	28
2.2.7 Hipótesis nula y otras distribuciones	28
2.2.8 Distribuciones regulares.....	29
2.2.9 Celdas y Medidas.....	31
CAPITULO 3. TECTÓNICA DE LA REGIÓN DE ESTUDIO	33
3.1 Catálogo sísmico.....	35
3.2 Región analizada	36
3.3.1 Sismicidad previa a la ocurrencia del sismo del 11 de marzo de 2011, $M = 9.0$	37
CAPÍTULO 4. APLICACIÓN Y RESULTADOS.....	38
4.1 Dimensiones fractales D_0, D_1 y D_2 para las distribuciones espaciales.	39
4.2 Medida AUP de la distribución espacial de la sismicidad previa a la ocurrencia del sismo M_9.....	58
4.3 Distribución fractal teórica	61
CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN	67
Referencias	69

Lista de figuras

Figura 1. A la izquierda se observa una baja entropía, a la derecha se observa un gran desorden en los puntos del sistema por lo que la entropía aumenta.....	19
Figura 2: Para un dado con las mismas caras, pero con números repetidos podemos obtener diferentes probabilidades como se muestra en la figura:.....	21
Figura 3: Información y entropía para distintos valores de probabilidades. Arriba: Información, $I = -\log_2 p$ en función de p ; la punta de la flecha indica que la información es infinita para $p = 0$. Abajo: Contribución a la entropía de cada termino de (14) en función de p ; la función tiene un máximo para $p = 0.3679$ y es cero para ambos $p = 0$ y $p = 1$. El máximo para $p = 0.3679$ es el máximo para $p \log p$ y no depende de la distribución de p	22
Figura 4. Algunos ejemplos de probabilidades de Poisson para varios valores de λ	27
Figura 5: Entropías medidas para una distribución en 2D.	30
Figura 6 Esponja de Menjer $D = 2.7268$	31
Figura 7: Sierpinsky $D = 1.8928$	31
Figura 8: Cantor $D = 1.2618$	31
Figura 9: Área entre entropía uniforme y entropía Poissoniana (A_{up}).	33
Figura 10: Tectónica de Japón, (Fuente: Nuclear Waste Management Organization of Japan)...	34
Figura 11. Sismicidad de Japón, 1960 - 2016. Los rectángulos en color amarillo, son las áreas seleccionadas para el estudio y las estrellas los epicentros con magnitud mayor e igual a 7.5...	36
Figura 12. Hipocentros en volumen M9 con un total de 1000 eventos sísmicos.	37
Figura 13: Ventanas de tiempo para M9. Arriba: Número acumulativo de sismos. Abajo: el logaritmo del momento sísmico acumulativo liberado para la sismicidad del volumen alrededor del sismo, 1960-2016. Las líneas verticales continuas y discontinuas indican el final de cada ventana.....	38
Figura 14. Distribución de puntos equiespaciados no aleatorios en un conjunto. Análisis 2D y análisis 3D respectivamente.....	40
Figura 15. Distribución fractal teórica polvo de cantor de orden 5 con $N=1024$ puntos. Análisis 2D y 3D respectivamente. Rotado 25°	41
Figura 16. Distribución fractal teórica 3D esponja de Menger de orden 3. Análisis 2D y 3D respectivamente.....	42
Figura 17. Distribución fractal teórica 2D (no aleatoria) carpeta de Sierpinski de orden 4. Análisis 2D (arriba) y 3D inclinado 25° (abajo).....	43
Figura 18: Catalogo sierp2D4-25 $N = 4096$ 3D rotado a 25°	43
Figura 19. Distribución fractal teórica 3D (no aleatoria carpeta de Sierpinski de orden 3. Análisis 2D y 3D respectivamente.	44
Figura 20. Distribución fractal teórica 2D (aleatorio) carpeta de Sierpinski de orden 4. Análisis 2D y 3D inclinado 25° respectivamente.	45
Figura 21: Catalogo sierp2Dr4-25 $N = 4096$ 3D rotado a 25°	45
Figura 22. Distribución fractal teórica 3D (no aleatorio) conocida como carpeta de Sierpinski de orden 3 y recortado del lado $z = 14$. Análisis 2D y 3D respectivamente.....	46
Figura 23. Distribución aleatoria hipocentral ($x = 10, y = 7, z = 3$ $N = 1000$). Análisis 2D y 3D respectivamente. Los catálogos randun son distribuidos de manera aleatoria con lados x, y, z y con n eventos.	47
Figura 24. Distribución uniforme de epicentros e hipocentros (hipótesis nula). Análisis 2D y 3D respectivamente.....	48
Figura 25. Distribución uniforme de epicentros e hipocentros (hipótesis nula). Análisis 2D y 3D respectivamente.....	49

Figura 26. Distribución hipocentral para el catalogo sísmico de Honshu Japón. Análisis 2D y 3D respectivamente.....	50
Figura 27. A la Izquierda: distribución de puntos equiespaciados. A la derecha: entropías 2D normalizadas por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$	51
Figura 28. A la Izquierda: distribución fractal teórica $D = 1.2618$ conocida como polvo cantor, de orden 5, y $N = 1024$ puntos. A la derecha: entropías 2D normalizada por $SSxI$ vs $\log_{10}(k/N)$	52
Figura 29. A la Izquierda: distribución fractal teórica $D = \log_{10}(20), \log_{10}(3) = 2.7268$ conocida como esponja de Menger, de orden 3, y $N = 8000$ puntos. A la derecha: entropías 2D normalizada por $SSxI$ vs $\log_{10}(k/N)$	52
Figura 30. A la Izquierda: distribución fractal teórica (no aleatorio) $D = 1.8928$ conocida como carpeta de Sierpinski, de orden 4, y $N = 4096$ puntos. A la derecha: entropías 2D normalizada por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$	53
Figura 31. A la Izquierda: distribución fractal teórica (aleatorio) $D = 1.8928$ conocida como carpeta de Sierpinski, de orden 4, y $N = 4096$ puntos. A la derecha: entropías 2D normalizada por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$	53
Figura 32. A la Izquierda: distribución fractal teórica (no aleatorio) $D = (\log 26)(\log 3) = 2.7268$ conocida como esponja de Sierpinski, de orden 3, y $N = 17576$ puntos. A la derecha: entropías 2D normalizada por $SSxI$ vs $\log_{10}(k/N)$	54
Figura 33. A la Izquierda: distribución fractal teórica (no aleatorio) $D = (\log 26)(\log 3) = 2.7268$ conocida como esponja de Sierpinski, de orden 3 con z cortado a -14, y $N = 17576$ puntos. A la derecha: entropías 2D normalizada por $SSxI$ vs $\log_{10}(k/N)$	55
Figura 34. A la Izquierda: distribución aleatoria epicentral ($x = 10$ $y = 7$ $z = 3$ $N = 500$). A la derecha: entropías 2D normalizadas por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$	55
Figura 35. A la Izquierda: distribución aleatoria epicentral ($x = 10$ $y = 7$ $z = 3$ $N = 1000$). A la derecha: entropías 2D normalizadas por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$	56
Figura 36. Entropía y AUP de la sismicidad previa al sismo M9, ventana #1. A la Izquierda: distribución uniforme de epicentros (hipótesis nula).	57
Figura 37. Entropía y AUP de la sismicidad previa al sismo M9, ventana #2. A la Izquierda: distribución uniforme de epicentros (hipótesis nula). A la derecha: entropías 2D normalizadas por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$	57
Figura 38. Derecha: entropías 2D normalizada como S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$ para la distribución epicentral como se muestra a la izquierda.	58
Figura 39. A la Izquierda: distribución uniforme hipocentral (hipótesis nula) vista desde azimut 27° y elevación 35° . A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$	59
Figura 40 A la Izquierda: distribución uniforme hipocentral (hipótesis nula) vista desde azimut 27° y elevación 35° . A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$	59
Figura 41. A la Izquierda: distribución aleatoria hipocentral ($x = 10$ $y = 7$ $z = 3$ $N = 500$) vista desde azimut 54° y elevación 32° . A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$	60
Figura 42. A la Izquierda: distribución aleatoria hipocentral ($x = 10$ $y = 7$ $z = 3$ $N = 1000$) vista desde azimut 54° y elevación 32° . A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$	60
Figura 43. A la Izquierda: distribución fractal teórica rotada 50° vista desde azimut 37° y elevación 23° . A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$	61
Figura 44 A la Izquierda: distribución fractal teórica vista desde azimut 27° y elevación 35° . A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$	61

Figura 45 A la Izquierda: distribución fractal teórica (no aleatoria) rotada 50° vista desde
azimut 65° y elevación 28°. A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$
..... 62

Figura 46 A la Izquierda: distribución fractal teórica (aleatorio) rotado 50° vista desde azimut 107°
y elevación 27°. A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$ 62

Figura 47. A la Izquierda: distribución fractal teórica (no aleatorio) vista desde azimut 27° y
elevación 35°. A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$ 63

Figura 48. A la Izquierda: distribución fractal teórica con z cortado a -14 (no aleatorio) vista desde
azimut 27° y elevación 35°. A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/SxI vs $\log_{10}(k/N)$
..... 63

Figura 49. A la izquierda: distribución hipocentral vista desde azimut 27° y elevación 35°. A la
derecha: entropías y AUP 64

CAPITULO 1. INTRODUCCIÓN, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

1.1. Introducción

Los terremotos, sismos de gran magnitud (M_w mayor o del orden de 7), causan daños y muerte. Como es imposible evitar este fenómeno, se necesita estar preparado para enfrentarlo. Para la preparación adecuada, es importante y conveniente saber cuándo ocurrirá un gran sismo.

Hacer *predicciones* sísmicas deterministas es imposible porque un modelo físico determinista busca comprender y predecir el proceso completa y exactamente. Dicho modelo no es posible, debido a que los sismos ocurren a varios kilómetros de profundidad por lo tanto se desconoce cómo ocurrirá la ruptura sísmica y no se puede conocer con suficiente detalle el esfuerzo ni la resistencia de cada punto de la región; en general se desconocen las características del medio, las composiciones geológica y química, zonas de debilidad, zonas de fortaleza, micro fracturas, dislocaciones, presencia de agua, etc.

En cambio, un *pronóstico sísmico* basado en un modelo estocástico o con componentes estocásticas, acepta que en el proceso físico influyen factores imponderables (cuya participación es imposible evaluar) cuyos efectos deben ser considerados aleatorios.

La presencia de muchos factores imponderables en el medio hace que el proceso sísmico sea un proceso estocástico críticamente auto organizado (autorregulado) (Turcotte, D. 1997) y, por tanto, tiene comportamiento no lineal. Por lo tanto, se recurre a la modelación del proceso sísmico por métodos probabilístico-estadísticos.

Por ser estocástico el proceso sísmico, sólo es posible determinar la actividad futura en forma probabilística, como pronóstico sísmico: la declaración del *peligro sísmico*, que es la probabilidad de ocurrencia de uno o más terremotos en ventanas espacio-temporales, junto con la estimación de la incertidumbre que se tiene en dicha probabilidad.

El pronóstico basado solamente en estudios estadísticos de la ocurrencia de grandes sismos no tiene suficiente precisión en tiempo. Por lo tanto, para hacer pronósticos a mediano y corto plazo,

es necesario recurrir a *premonitores sísmicos*, ya sea para basar el pronóstico en éstos o para complementar pronósticos puramente estadísticos.

Los premonitores sísmicos son fenómenos que están asociados con la ocurrencia de grandes sismos y ocurren antes de éstos; el gran sismo que ocurre tras la ocurrencia de premonitores es llamado *evento principal*. Los premonitores pueden ser sismológicos, geodésicos, geoquímicos, geofísicos, comportamiento animal, etc.

En este trabajo serán considerados dos premonitores sismológicos: cambios en la dimensión fractal generalizada y en la entropía poissoniana, que cuantifican variaciones en el tiempo de la distribución espacial de la sismicidad de fondo (magnitudes pequeñas y medianas) que ocurre antes del evento principal, ambos premonitores están relacionados con el nivel de agrupamiento en las distribuciones espaciales de la sismicidad (Kagan y Knoppof, 1980; Hirata et al., 1987).

En una distribución espacial es importante que los sismos estén bien localizados, ya que la mala localización altera los resultados e introduce error en los cálculos que causa incertidumbre en las mediciones.

La mayor incertidumbre en la localización hipocentral es la determinación de sus profundidades; por tanto, es importante determinar qué tanto cambian algunas medidas que caracterizan las distribuciones espaciales, en 3D, de hipocentros (ubicación original) que si son hechas en 2D con base en epicentros (proyección del hipocentro o foco), para estimar la utilidad de éstas.

1.2 Justificación

La sismicidad es un fenómeno que ocurre, esencialmente, en 3 dimensiones, por lo que los estudios de dimensión fractal y de entropía de la sismicidad deberían hacerse en 3D para caracterizar correctamente las distribuciones hipocentrales. Sin embargo, en muchos casos la cobertura de estaciones sísmicas no es lo suficientemente buena para determinar correctamente la profundidad hipocentral, y errores en dicha profundidad pueden causar errores considerables en los resultados de los análisis mencionados en este trabajo. Exploramos la posibilidad de llevar a cabo los análisis de dimensión fractal y entropía en 2D, esto es, utilizar solamente los epicentros.

1.2.1 Objetivos generales

Estudiar los efectos de utilizar análisis epicentral en vez de hipocentral en el estudio de los premonitores de dimensión fractal generalizada y entropía poissoniana.

1.2.2 Objetivos particulares

Para los premonitores mencionados y distribuciones sintéticas (regulares, fractales, y aleatorias) y observadas:

1. Aplicar el concepto de fractalidad a catálogos sísmicos para estudiar efectos del echado para distribuciones bidimensionales.
2. Comparar mediciones 2D vs 3D

CAPITULO 2. DOS MEDIDAS DE LA DISTRIBUCIÓN ESPACIAL DE SISMICIDAD Y SU ANÁLISIS 2D (EPICENTROS) VS 3D (HIPOCENTROS).

2.1 Dimensión fractal

El término fractal fue introducido por Mandelbrot (1967), y el concepto de fractalidad ha sido ampliamente utilizado en muchos campos de la ciencia, incluida la sismología (Turcotte, 1997; Goltz, 1997).

Los conjuntos fractales se caracterizan por cumplir una ley de potencias, ser autosemejantes (que se construye a partir de copias semejantes) y tener dimensión usualmente fraccional. Es conocido que la distribución hipocentral y/o epicentral presenta comportamiento fractal (Mandelbrot, 1983; Goltz, 1997).

La ley de potencias mencionada puede escribirse como

$$N(r) \propto r^{-D}, \quad (1)$$

donde $N(r)$ es el numero de objetos auto-similares (cajas) de tamaño r necesarios para cubrir el objeto de estudio completo, esto es, contener los eventos sísmicos dentro de las cajas. El exponente D es la dimensión fractal, llamada *dimensión de capacidad* (Turcotte, 1997), se determina de la pendiente en la relación

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log \frac{1}{r}} \quad (2)$$

La dimensión de una distribución fractal es menor que el espacio Euclidiano que la contiene y usualmente es fraccionaria. Mientras más uniformemente estén distribuidos los eventos en el espacio, la dimensión se acerca más a la del volumen euclidiano que los contiene.

Las concentraciones de esfuerzo hacen que se agrupe la sismicidad, i.e., ocurren más sismos en los sitios donde el esfuerzo es más alto, por lo que la dimensión fractal disminuye, por lo que disminuciones de dimensión fractal en tiempo y/o en espacio son indicativas de altos niveles de esfuerzo y señalan la posible futura ocurrencia de un sismo grande.

En este estudio utilizaremos a la ecuación (1) de tal manera que r corresponde al tamaño de las cajas en las que se ha dividido la zona de estudio, N es el numero de sismos o cajas que contienen sismos y D es la dimensión de capacidad para calcular el número de cajas vacías u ocupadas que representan sismos dentro de la misma región de estudio.

2.1.1 Dimensión generalizada por conteo de cajas

Con base en las entropías generalizadas de Rényi (1959), Hentschel y Procaccia (1983) y Grassberger y Procaccia (1983) proponen un número infinito de *dimensiones fractales generalizadas* D_q , donde q es un número entero que determina el énfasis o peso dado a los agrupamientos de los sismos:

$$D_q = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{l_q(r)}{\log \left(\frac{1}{r} \right)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum_{i=1}^M p_i^q(r)}{\log r} \quad (3)$$

donde $p_i(r)$, es la probabilidad asociada con la i 'ésima caja (la probabilidad de que ocurra un sismo) y M es el número de cajas o estados discretos en el que se divide la zona de estudio. Usualmente, la probabilidad es calculada como $p_i = p_i(r) = n_i/N$, donde n_i es el número de elementos en la i 'ésima caja (número de sismos) y N es el número total de sismos en la región.

Los fractales matemáticos son *monofractales*, es decir que todas sus dimensiones generalizadas tienen el mismo valor (Mandelbrot, 1989), pero la mayor parte de los fenómenos fractales en la naturaleza, incluyendo distribuciones de sismicidad, son *multifractales*, i.e. sus dimensiones generalizadas no son iguales y

$$\dots > D_0 > D_1 > D_2 > \dots$$

Las diferencias entre dimensiones para distintos valores de q son importantes para la interpretación de los resultados; las tres dimensiones más usadas, D_0, D_1 y D_2 tienen nombres que describen sus características.

Para la dimensión D_0 la sumatoria del numerador de (3) se hace sobre las celdas con probabilidades no nulas, y éstas elevadas a cero valen uno para cada caja ocupada; por lo tanto, dicho numerador cuenta solamente el número de cajas ocupadas, es decir, aquellas donde han ocurrido eventos sísmicos. Esta dimensión es la que corresponde a la definición original y es conocida como *dimensión de capacidad*. La dimensión D_1 suma logaritmos de probabilidad y, recordando la definición de Shannon (1948) de información como $I(p) = -\log p$, se le asigna el nombre de *dimensión de información*. La dimensión D_2 puede ser relacionada con una integral de correlación, por lo que es conocida como *dimensión de correlación*.

2.1.1.1 Dimensión de capacidad D_0

Para la dimensión D_0 la sumatoria del numerador de (3) se hace sobre las celdas con probabilidades no nulas, y éstas elevadas a cero valen uno para cada caja ocupada; por lo tanto, dicho numerador cuenta solamente el número de cajas ocupadas, es decir, aquellas donde han ocurrido eventos sísmicos. Esta dimensión es la que corresponde a la definición original y es

conocida como *dimensión de capacidad*, corresponde un poco pero no exactamente a lo que se obtendría contando simplemente el número de cajas ocupadas por eventos sísmicos. Como la fórmula (3) presenta una singularidad cuando $q = 0$, obtenemos la dimensión de capacidad.

Donde $N(r)$ es el número de cajas de tamaño r necesarios para cubrir o contener al objeto de estudio donde han ocurrido eventos sísmicos. Esto corresponde a la definición básica de dimensión fractal de Mandelbrot 1984.

$$D_0 = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log r} \quad (4)$$

2.1.1.2 Dimensión de información

Para modificar a (3) reescribiremos a p_i^q de la siguiente forma:

$$p_i^q = p_i p_i^{(q-1)} = p_i e^{(q-1)\ln p_i}, \quad (5)$$

Y recordando que

$$e^x \cong 1 + x; \quad x \ll 1,$$

Podemos escribir

$$p_i^q = p_i [1 + (q - 1)\ln p_i]; \quad q \rightarrow 1,$$

Quedando de la siguiente manera

$$\begin{aligned} I_q(r) &= \frac{1}{1-q} \log \sum_i p_i^q = \frac{1}{1-q} \log \sum_i p_i [1 + (q-1)\ln p_i] \\ &= \frac{1}{1-q} \log \left[\sum_i p_i + \sum_i p_i (q-1)\ln p_i \right] \\ &= \frac{1}{1-q} \frac{1}{\ln 10} \ln \left[1 + \sum_i p_i (q-1)\ln p_i \right] \end{aligned}$$

Y recordando que

$$\ln(1+x) \cong x; \quad x \ll 1$$

Entonces

$$I_q(r) = \frac{1}{1-q} \frac{1}{\ln 10} \sum_i p_i (q-1) \ln p_i; \quad q \rightarrow 1$$

$$I_1(r) = - \sum p_i \log p_i = S(r) \tag{6}$$

donde $S(r)$ es la estadística de entropía o la información de deficiencia.

Como la fórmula (3) presenta una singularidad cuando $q = 1$, en este caso es necesario expresar la fórmula de otra manera y la información resultante es:

$$D_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{I_1(r)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N_b} p_i \log p_i(r)}{\log r} \tag{7}$$

(Turcotte, 1992).

Donde r es el tamaño de la caja, N_b es el número de cajas ocupadas con sismos y $p_i = p_i(r) = n_i/N$ es la probabilidad de ocupación de la caja i , donde n_i es el número de eventos sísmicos en la caja y N es el número total de sismos y I_1 es la estadística de la entropía. Como puede verse en el numerador de (7), D_1 está relacionada con la entropía del sistema.

Nota: p_i es diferente de $p_i(r)$ porque este término depende del tamaño de las cajas.

2.1.1.3 Dimensión de correlación

La *dimensión de correlación* D_2 toma en cuenta el cuadrado de la probabilidad de ocurrencia de cada caja, es decir, se le da mayor peso o fuerza a las cajas que tienen más elementos (sismos), entonces este es más sensible generalmente a las agrupaciones de los sismos:

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{N_b} p_i^2(r)}{\log r} \tag{8}$$

lo que tiene por efecto acentuar las diferencias de probabilidad entre las cajas.

Para todas las distribuciones, estimamos la dimensión de capacidad D_0 , la dimensión de información D_1 y la dimensión de correlación D_2 (Mandelbrot, 1983; Hirata y Imoto, 1991; Hirabayashi et al., 1992), no estimamos otras dimensiones pues estas tres dimensiones son suficientes para caracterizar el comportamiento multifractal mediante la dimensión generalizada por conteo de cajas.

2.1.2 Dimensión por el método de correlación

Dado que para el método de cajas el número de éstas debe ser entero, hay tamaños que no pueden ser utilizados, cuando el número de celdas es mayor al número de eventos existen celdas vacías con nula probabilidad y puede haber brincos en la distribución de probabilidades debidos a las posiciones relativas entre datos y cajas, por tanto, es común utilizar otro método, conocido como *método de correlación*, para evaluar dimensiones fractales.

El método de correlación tiene mayor estabilidad y sensibilidad ante pequeños cambios en las propiedades de agrupamientos o cúmulos (Kagan y Knopoff, 1980; Hirata, 1989).

Hentschel y Procaccia (1983) proponen un algoritmo para calcular dimensiones fractales a partir de la *función de correlación*

$$C_q(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{(N-1)} \sum_{j \neq i} H(r - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \right]^{q-1}, \quad (9)$$

donde N es el número total de eventos, \vec{x}_i es el vector de posición del punto i , $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|$ es la distancia entre los pares de eventos x_i y x_j , $i \neq j$, r es el radio de una esfera centrada en el punto \vec{x}_i , H es la función de Heavyside y q el orden de la dimensión (disminuido por -1 para que la interpretación de cada dimensión corresponda con la correspondiente de cajas. Para cada elemento x_i , (9) cuenta cuántos x_j están a menor distancia de r , la fracción del número total de vecinos posibles; después obtiene el valor promedio del número de puntos vecinos para toda la distribución.

La *dimensión generalizada de orden D_q* es

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C_q(r)}{\log r} \approx \frac{\phi_q}{q-1}, \quad (10)$$

donde ϕ_q es la pendiente del ajuste lineal al histograma $\log C_q(r)$ vs. $\log r$. El exponente q se utiliza de manera que la interpretación de las dimensiones por el método de correlación coincida con las correspondientes dimensiones por el método de conteo de cajas. A continuación, se describirán las diferentes dimensiones.

Dimensión de capacidad por el método de correlación

Cuando $q = 0$ (ecuación 10) la dimensión es la *dimensión de capacidad* (dimensión original). Vale cero para un sistema para el cual un único estado tiene probabilidad no nula y toma su valor máximo, que depende del número de estados, para una distribución equiprobable.

Dimensión de información

Como la fórmula (10) presenta una singularidad cuando $q = 1$, es necesario expresar (10) de otra manera y la dimensión resultante, conocida como *dimensión de información*, es:

$$D_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \left[\frac{1}{(N-1) \sum_{j \neq i} H(r - |X_i - X_j|)} \right]}{\log r} \quad (11)$$

(Turcotte, 1997). Con cada número de eventos que hay en cada caja dividido entre el número total de eventos se obtiene un conteo de probabilidades conocido como dimensión de probabilidades.

Dimensión de correlación

Cuando $q = 2$ la dimensión es la *dimensión de capacidad* que le da más fuerza o peso a las agrupaciones que tienen más elementos, es decir, exagera un poco las asociaciones de los sismos.

El exponente q se utiliza de manera que la interpretación de las dimensiones por el método de correlación coincida con las correspondientes dimensiones por el método de conteo de cajas.

2.1.3 Aplicación

Conforme aumenta q , se le da más peso a las agrupaciones que tienen más elementos.

En este trabajo se estimará solamente D_0, D_1, D_2 , considerados como suficientes para determinar comportamiento multifractal en las distribuciones de sismicidad y sus variaciones en el tiempo.

2.1.3.1 Tamaños, intervalo de linealidad y bondad de ajuste

Las ecuaciones (9) y (10) serán aplicadas para tamaños de las cajas r que van desde la mitad del tamaño característico de la región de estudio, hasta el tamaño más pequeño que permita $C_q(r) > 0$, pues la correlación nula indica que no hay suficientes elementos para el análisis.

Para una distribución local de sismos, las r van a ser pequeñas porque los eventos están cerca, en cambio para una región grande ésta aumenta porque los eventos son más lejanos, por lo tanto, para comparar los resultados se normaliza dicha r para poder ser utilizado en distribuciones diferentes.

Usualmente las correlaciones no se alinean para todo el intervalo r_{min}, r_{max} por lo que para lograr un buen ajuste puede ser necesario eliminar algunos puntos de los extremos, pero como es importante que el intervalo de ajuste sea lo más grande posible, el ajuste se hace maximizando una medida, f (fractalidad), que cuantifica el balance ponderado entre bondad de ajuste (cuantificado por $(r - 0.999) \times 1000$, donde r es el coeficiente de correlación lineal de Pearson) y la fracción de la extensión total ajustada. Al momento de darle pesos distintos a las agrupaciones para un fractal perfecto el valor es de 1 y si este no lo es entonces la f nos indica la diferencia de que tan imperfecto es el conjunto de puntos.

2.1.4 Coeficiente de Correlación de Pearson.

Para un conjunto de puntos $(X_i, Y_i; i = 1, \dots, N)$ el coeficiente de correlación de Pearson (Edwin L. Crow et al., 1960) es

$$r = r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (12)$$

donde \bar{x} y \bar{y} son las medias de $\{x\}$ y $\{y\}$, respectivamente.

El coeficiente de Pearson varía desde $r = 0$ para una nube de puntos hasta 1 para puntos perfectamente alineados a lo largo de una línea recta. La ponderación se hizo empíricamente, de manera que f valga 1 para alineación perfecta sobre todo el intervalo.

Los catálogos sísmicos vienen en latitud, longitud, profundidad, tiempo y magnitud, para poder trabajar con la dimensión fractal, tenemos que obtener distancias que podamos manejar entonces necesitamos cambiar la latitud y longitud a kilómetros X, Y. Generalmente si se está estudiando un sismo se utiliza como referencia el epicentro del mismo.

2.1.5 Dimensión fractal como observable precursora

La variabilidad espacio-temporal de los eventos sísmicos y los efectos de agrupamiento heterogéneo son consistentes con estructuras fractales (Geilikman et al., 1990; Telesca y Lapenna, 2006). La estructura fractal de las series de tiempos entre eventos es evidente en varias secuencias de terremotos (Godano y Caruso, 1995; Telesca et al., 2006; Telesca y Lapenna, 2006; Márquez et al., 2012).

Varios trabajos han mostrado variaciones en el comportamiento relativo de las diferentes dimensiones antes de la ocurrencia de sismos grandes (Hirata, 1987; Henderson y Main, 1992; De Rubeis et. al, 1993; Henderson et. al, 1994; Enescu et. al, 2001; Bayrak et al, 2017; Hirabayashi et al., 1992; Nakaya y Hashimoto, 2002; Kiyashchenko et al., 2003; Patiño, 2009; Márquez et al., 2012 y otros).

Hay estudios respecto a posibles cambios temporales en la dimensión fractal antes de grandes terremotos (Hirabayashi et al., 1992; Nakaya y Hashimoto, 2002; Kiyashchenko et al., 2003; Patiño, 2009). La distribución Gutenberg-Richter, como distribución invariante de escala, sugiere

que la distribución de los tamaños de ruptura es fractal (Aki, 1981; Hirata,1989; Turcotte, 1997; Enescu, 2001).

En muchos de estos estudios, la búsqueda de precursores se ha limitado a encontrar y aplicar individualmente estos precursores; pero como cada uno por separado, no es cien por ciento exacto, hace que los pronósticos no sean muy precisos. Los resultados que se presentan van encaminados a la identificación de un posible precursor sísmico, que combinado con otros precursores puede contribuir a realizar pronósticos más precisos. En este trabajo el precursor sísmico a utilizar es la entropía poissoniana.

2.2 Entropía

La entropía es una medida que cuantifica el desorden en un sistema, donde el sistema está constituido por un número finito de estados como en la imagen siguiente:

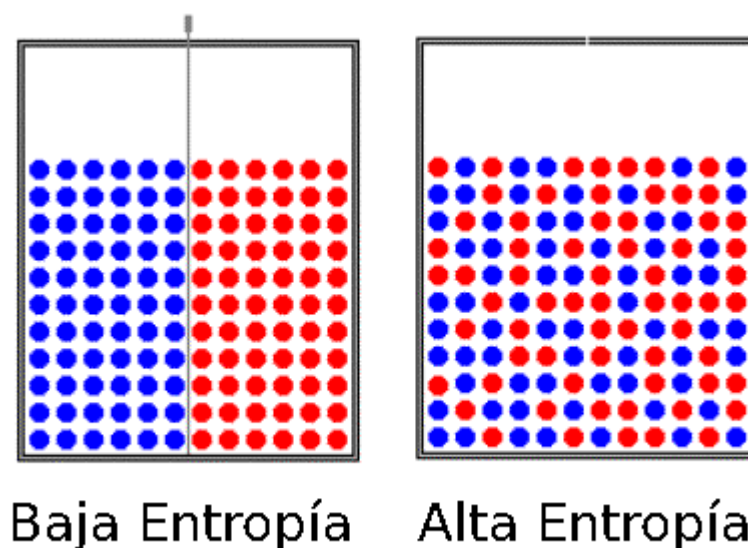


Figura 1. A la izquierda se observa una baja entropía y a la derecha se observa un gran desorden en los puntos del sistema por lo que la entropía aumenta.

El agrupamiento de los eventos sísmicos antes de un evento principal aumenta la entropía del sistema, por lo que es posible utilizar las variaciones de entropía como precursor. En este trabajo se utiliza una nueva definición de entropía, la *entropía renormalizada de Poisson* (Despaigne, 2017) debido a que tiene mayor sensibilidad que las medidas usuales de entropía. A continuación, serán descritos los diferentes tipos de entropía.

2.2.1 Información y entropía

La entropía de información caracteriza la distribución de probabilidades en un sistema constituido por un número finito de estados correspondientes a los distintos valores que puede tomar, y es el valor esperado de la información en el sistema; vale cero para un sistema para el cual un único estado tiene probabilidad no nula y toma su valor máximo, que depende del número de estados K , para una distribución uniforme.

El concepto básico de entropía de información tiene mucho que ver con la incertidumbre que existe en cualquier experimento o señal aleatoria. Es también la cantidad de ruido o desorden que contiene o libera un sistema. De esta forma, podremos hablar de la cantidad de información que lleva una señal.

Sea un sistema constituido por un conjunto de K estados discretos, sea p_j la probabilidad del estado j , tal que

$$\sum_{j=1}^K p_j = 1 . \quad (13)$$

La entropía de Shannon del sistema está definida como

$$S = -h \sum_{j=1}^K p_j \log_2(p_j) , \quad (14)$$

donde h es una constante convencional positiva que relaciona las entropías calculadas usando logaritmos con diferentes bases; asumiremos $h = 1$. Por lo tanto, la entropía es el valor esperado de la información en el sistema. Dado que la información de Shannon del estado j es

$$I_j = -\log_2 p_j \quad (15)$$

donde el uso del logaritmo de base 2 resulta en información en unidades de bits, entonces

$$S = \langle I \rangle = \langle -\log_2 p \rangle. \quad (16)$$

Por ejemplo, al tirar un dado, la probabilidad de obtener un número determinado es la misma y vale $\frac{1}{6}$, esto es P_j es igual $\frac{1}{6}$ por tanto S es igual a

$$S = -\left[\frac{1}{6}\log_2\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6}\log_2\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6}\log_2\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6}\log_2\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6}\log_2\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6}\log_2\left(\frac{1}{6}\right)\right] = 6\left[\frac{1}{6}\log_2\left(\frac{1}{6}\right)\right] = 2.58 \text{ bits.}$$

Sin embargo, de manera general las probabilidades de cada estado j no son las mismas como en el caso del dado, por lo tanto, la información de Shannon varía con cada estado. Si la probabilidad no fuera uniforme por ejemplo $P_1 = \frac{1}{6}, P_2 = \frac{1}{6}, P_3 = \frac{1}{12}, P_4 = \frac{1}{12}, P_5 = \frac{3}{12}, P_6 = \frac{3}{12} \Rightarrow S = -\left[2\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} + 2\frac{1}{12}\log_2\frac{1}{12} + 2\frac{3}{12}\log_2\frac{3}{12} = 2.45\right] < 2.58$. La Figura 1 ilustra la contribución de cada p_j a la suma en (14), y muestra que las probabilidades muy altas y muy bajas son las que contribuyen menos a la suma. En particular, a pesar de tener información infinita, un estado con $p_j = 0$ no contribuye a la entropía.

Para un dado con las mismas caras, pero con números repetidos podemos obtener diferentes probabilidades como se muestra a continuación en la figura 2:

$$S = -\left(2\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} + 2\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6}\right) = -(1.0566 - 0.8616) S = 1.9182$$



Figura 2: Para un dado con las mismas caras, pero con números repetidos podemos obtener diferentes probabilidades como se muestra a continuación:

P1	P2	P3	P4
$\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$P1 + P2 + P3 + P4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

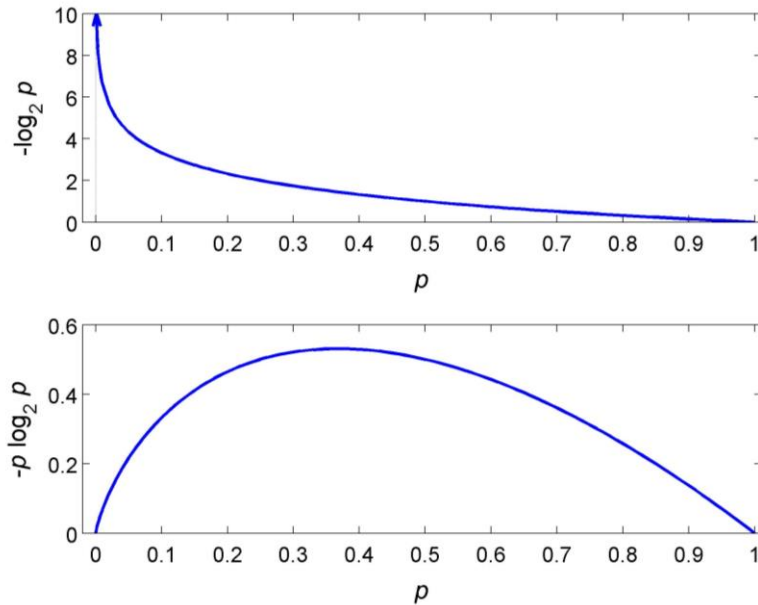


Figura 3: Información y entropía para distintos valores de probabilidades. Arriba: Información, $I = -\log_2 p$ en función de p ; la punta de la flecha indica que la información es infinita para $p = 0$. Abajo: Contribución a la entropía de cada término de (14) en función de p ; la función tiene un máximo para $p = 0.3679$ y es cero para ambos $p = 0$ y $p = 1$. El máximo para $p = 0.3679$ es el máximo para $p \log p$ y no depende de la distribución de p .

Ahora aplicaremos el concepto de entropía a la caracterización de la sismicidad.

2.2.2 Entropía y sismicidad

Sea el sistema una región sísmica y sean los estados las celdas en 2D o 3D definidas por una cuadrícula (grid) que cubra la zona de sismos observada (zona donde ocurrieron sismos). La probabilidad de cada estado está relacionada con la cantidad de eventos sísmicos, epicentros o hipocentros, que se ubican dentro de la celda correspondiente, tratar de hallar con la menor incertidumbre la localización donde ocurrieron los *eventos sísmicos*.

Los *eventos* sísmicos son una muestra de un catálogo sísmico para la región de Honshu Japón, que generalmente enumera el tiempo, la ubicación hipocentral y la magnitud de los eventos. Una muestra consiste en eventos que ocurren dentro de ventanas de espacio y tiempo dados (eventos que ocurrieron en un tiempo determinado). Aquí, nos ocupamos de la distribución espacial de eventos en una ventana de tiempo dada; estos eventos constituyen un proceso puntual en el espacio, y el problema es relacionarlo con una distribución de probabilidad, de modo que se pueda evaluar la entropía del sistema.

Como se mostrará a continuación, la entropía medida para la muestra determinada dependerá del número de celdas (o, equivalentemente, del tamaño de éstas), y surge el problema de saber qué valores de entropía se usarán para caracterizar el sistema.

2.2.3 Entropía de incidencia

Es práctica común (Goltz, 1997) considerar que las probabilidades asociadas con las celdas son

$$p_j^I = \frac{n_j}{N}, \quad (17)$$

donde p_j^I es la probabilidad de incidencia en la celda j , n_j es el número de sismos en j y N es el número total de terremotos en la zona de estudio; nótese que esta definición corresponde con la definición frecuentista de probabilidad cuando $N \rightarrow \infty$, pero para catálogos sísmicos reales y ventanas de tiempo suficientemente cortas para ser útiles, los valores típicos de N no son lo suficientemente grandes como para dar como resultado estimaciones de probabilidad confiables.

Continuando con el ejemplo del dado, para la entropía de incidencia la ecuación (17) considera el número total de puntos (n_j) en cada una de las caras del dado entre el número total de puntos en el dado (N), es decir, considera tanto caras vacías como caras llenas de puntos distribuidos aleatoriamente, por lo tanto, la probabilidad de incidencia del dado (p_j^I) será igual a:

$$p_j^I = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{21}{21} = 1$$

para un dado normal con todas sus caras ocupadas.

$$p_j^I = \frac{2}{6} + \frac{0}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{0}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

O para un dado anormal con caras desocupadas y con datos aleatorios.

Llamaremos a (14) probabilidades *de incidencia*, y la entropía correspondiente será la *entropía de incidencia*.

$$S^I = - \sum_{j=1}^K p_j^I \log_2 p_j^I \quad (18)$$

De acuerdo con (17), una celda vacía tiene probabilidad $p_j^I = 0$, y no contribuye a la entropía. Por lo tanto, la suma en (18) se puede restringir a las celdas ocupadas.

A medida que K crece, las celdas se hacen más pequeñas, de modo que, en promedio, el contenido de cada celda disminuye y la información de las celdas no vacías crece, de manera que la entropía de incidencia aumenta.

Sin embargo, para un número finito de eventos, la entropía de incidencia no puede aumentar indefinidamente, porque cuando las celdas son lo suficientemente pequeñas solo habrá un evento por celda (suponiendo que ninguna ubicación sea exactamente igual), y la entropía de incidencia tendrá un valor máximo de

$$S_{max}^I \equiv S_x^I = - \sum_m \frac{1}{N} \log_2 \frac{1}{N} = \log_2 N, ; \quad (19)$$

donde m se extiende sobre los índices de las celdas ocupadas N . Si los eventos se espacian más o menos regularmente, S_x^I se obtendrá poco después de $k \geq N$ (mostraremos algunos ejemplos de esto), pero si algunos eventos están muy juntos S^I tenderá asintóticamente a S_{max}^I .

2.2.4 La entropía uniforme

La probabilidad uniforme es una probabilidad teórica en donde las celdas tienen las mismas probabilidades de ocurrencia (tienen la misma oportunidad de aparecer) y que va ser igual a $\frac{1}{K}$ de esta probabilidad uniforme se asocia la entropía uniforme, es decir, dependen del número de celdas y no del número de eventos. A medida que K crece, la entropía uniforme aumenta indefinidamente de contenido dentro del espacio euclidiano donde se encuentra. Es bien conocido que, para cualquier número dado de celdas y eventos, la distribución uniforme es la distribución que tiene la máxima entropía.

Si suponemos que la entropía de la distribución epicentral (o hipocentral) observada proporciona información sobre el sistema (agrupaciones de eventos sísmicos), entonces debe compararse con la entropía correspondiente a la hipótesis nula, que es la hipótesis de que la distribución no tiene significado y que los eventos se distribuyen al azar con probabilidad uniforme en el espacio.

Para celdas K con probabilidad uniforme

$$p_j^U = \frac{1}{K}, \forall j \quad (20)$$

la entropía uniforme es

$$S^U = - \sum_{j=1}^K \frac{1}{K} \log_2 \frac{1}{K} = \log_2 K, \quad (21)$$

de modo que a medida que K crece, la entropía uniforme aumenta indefinidamente.

Nótese que, mientras S^U sólo depende de K (hay una suposición implícita de un número infinito de eventos para que siempre haya un número igual de eventos en cada celda), S^I depende tanto de N como de K , pero su valor límite depende únicamente de N .

La diferencia entre S^P y S^U es la evidencia de que la distribución hipocentral no corresponde a una distribución uniforme, esto es que los agrupamientos de hipocentros no son mero producto del azar (figura 2).

2.2.5 Entropía Poissoniana

Aquí proponemos una medida de entropía basada en cómo el número y la distribución de eventos difieren de la hipótesis nula de una distribución uniforme, es decir, que los hipocentros no se agrupan aleatoriamente por casualidad. Para un total de N eventos distribuidos en K celdas, el promedio de eventos por celda es:

$$\lambda = \frac{N}{k} ; \quad (22)$$

$\lambda =$ Promedio de eventos por celda

sí asumimos que los eventos están distribuidos de manera uniforme en toda la región, la probabilidad de encontrar n_j eventos en la celda j está dada por la distribución de Poisson (Figura 2).

$$Pr(n_j) = \frac{\lambda^{n_j} e^{-\lambda}}{n_j!} = P_j^P . \quad (23)$$

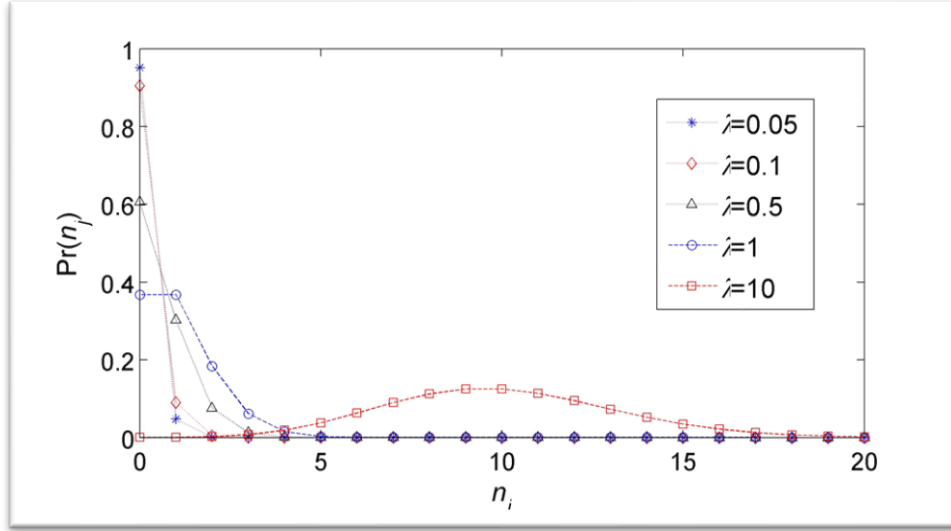


Figura 4. Algunos ejemplos de probabilidades de Poisson para varios valores de λ .

Por lo tanto, para un K dado, después de determinar n_j , la probabilidad de cada celda será calculada de acuerdo con (23) en lugar de con (17) o (20). Para satisfacer (1), la probabilidad de un evento en cada celda es renormalizada como:

$$p_j^P = \frac{P_j^P}{\sum_{j=1}^K P_j^P} . \quad (24)$$

nos referiremos a estas probabilidades como *probabilidades renormalizadas de Poisson*.

La entropía poissoniana se calcula a partir de (24) como

$$S^P = - \sum_{j=1}^K p_j^P \log_2 p_j^P . \quad (25)$$

Para $K \ll N$, las celdas vacías tienen baja probabilidad y las mayores probabilidades son para celdas con $n_j \approx \lambda$, mientras que para $K > N$, las celdas vacías tienen las probabilidades más altas y los valores grandes n_j tienen bajas probabilidades (Figura 2), un comportamiento opuesto al de las probabilidades de incidencia. Nótese que las probabilidades de Poisson son siempre distintas de cero, de modo que tanto las celdas vacías como las ocupadas contribuyen a la entropía de Poisson.

Sin embargo, para $K \gg N$, es decir, λ extremadamente pequeña, las celdas vacías tendrán probabilidades $P_j^P \cong 1$, mientras que las celdas ocupadas tendrán probabilidades $P_j^P \cong 0$; y si K es lo suficientemente grande para que no haya más de un evento en cualquier celda ocupada, entonces $P_j^P \cong 1/(M - N)$ para las $M - N$ celdas vacías y $P_j^P \approx 0$ para las N celdas ocupadas. Por lo tanto, para K muy grande

$$S^P \cong - \sum_m \frac{1}{M - N} \log_2 \frac{1}{M - N} = \log_2 (M - N), \quad (26)$$

donde m se extiende sobre los índices $M - N$ de celdas desocupadas ($m = j \forall n_j = 0$), de modo que cuando $K \rightarrow \infty$, $S^P \rightarrow S^u$.

2.2.6 Estimación de entropía.

Tenga la región de estudio longitudes X y Y para 2D o X, Y y Z para 3D, y cada longitud se divide en k segmentos (celdas) para que haya $K = K^2$ o $K = K^3$ celdas, cada celda con área $a = XY / K^2$ o volumen $v = XYZ / K^3$ respectivamente.

Calculamos las entropías mencionadas anteriormente para K que va desde 2 (el valor significativo más pequeño) hasta $K = \lceil \sqrt{3N} \rceil$ para que el mayor valor de K sea 3 y los efectos de la saturación sean apreciados claramente.

2.2.7 Hipótesis nula y otras distribuciones

Dado que la medida de entropía se hace sobre una variable aleatoria (que, a su vez, es combinación de dos o tres variables aleatorias) que es la posición espacial de las fuentes sísmicas o su localización en el espacio, es de primordial importancia determinar si las medidas que caracterizan la distribución espacial son capaces de extraer información de las agrupaciones sísmicas o si éstas son resultado fortuito de alguna distribución con probabilidad uniforme que, por definición, no contiene información con valor premonitor. Por tanto, recurrimos a los métodos de Monte Carlo; para cada distribución observada generamos realizaciones de distribuciones que tienen las mismas dimensiones espaciales y el mismo número de datos que la observada, pero con los datos distribuidos pseudoaleatoriamente con probabilidades uniformes

a lo largo de los tres ejes. Llamamos a estas distribuciones sintéticas *distribuciones de hipótesis nula o catálogos HO*.

Nuestra hipótesis es que los procesos sismogénicos (el campo de esfuerzos y la geología involucrada) provocan que la sismicidad se distribuya de manera fractal; por lo tanto, la hipótesis nula es que la misma fractalidad pueda resultar de una distribución de puntos no fractal, particularmente de la distribución espacial aleatoria con probabilidad uniforme, que es la que tiene mayor entropía y mínimo de información.

Las figuras para el cálculo de entropías para diferentes distribuciones ilustran una distribución HO correspondiente a la observada en la figura 2, que es típica de distribuciones HO. El resultado mostrado en dichas figuras es muy importante, porque muestra que, si la distribución espacial estudiada es realmente uniforme, S^P la reconoce como tal y coincide (dentro de los límites numéricos de error) todo el camino con S^U . Por lo tanto, las diferencias entre S^P y S^U miden las desviaciones de la distribución uniforme observada en la hipótesis nula.

Por otro lado, para las distribuciones de hipótesis nulas, existen diferencias entre S^I y S^U , pero solo miden la saturación de S^I . Que esto sea una advertencia para las personas que usan la entropía de incidencia para caracterizar las distribuciones de sismicidad.

2.2.8 Distribuciones regulares

Para determinar si el tratamiento 2D contra 3D funciona, aplicamos los distintos tratamientos a distribuciones conocidas: distribuciones regulares y distribuciones fractales.

La Figura 3 a continuación muestra un ejemplo de las entropías medidas para una distribución 2D cuadrada regular. Está claro que todas las entropías medidas concuerdan con las teóricas uniformes para pequeñas K/N . Para valores K/N ligeramente más grandes S^I comienza a mostrar la saturación y luego alcanza S_x^I y se queda allí; para la distribución cuadrada, S^I coincide con S^U todo el camino hacia $\frac{K}{N} = 1$ y $S^I = S_x^I$ y luego se mantiene en este valor máximo.

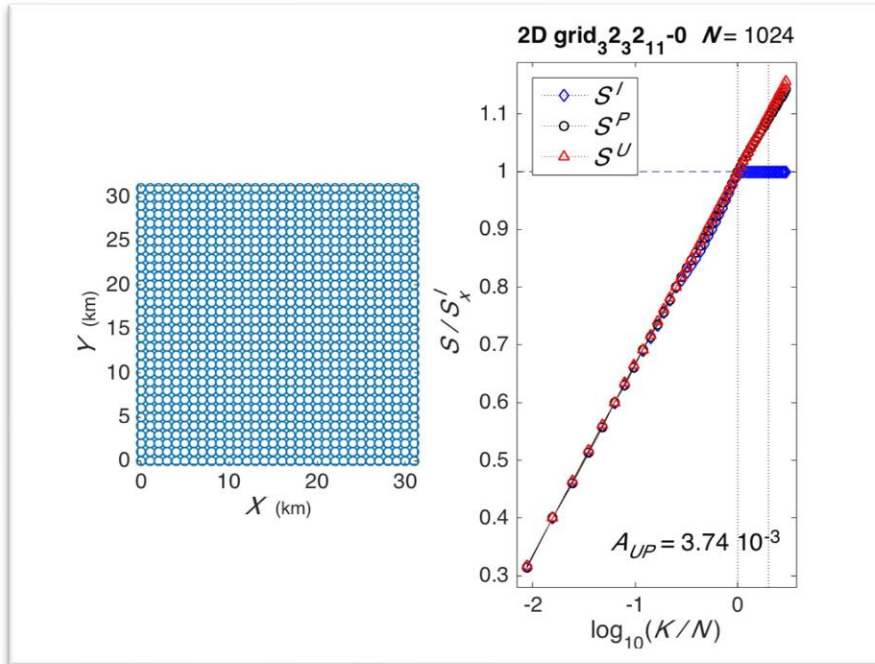


Figura 5: Entropías medidas para una distribución en 2D.

Las distribuciones usadas, para este análisis y los nombres que usaremos para referirnos a ellas son (Schroeder, M. 1991): Cantor, Esponja de Menjer y Sierpinsky.

Con el objetivo de explorar qué tanto afecta el número limitado de puntos, tanto al valor de la dimensión fractal como la variabilidad de la determinación, calculamos la dimensión para: diferentes tamaños de muestra de algunas distribuciones monofractales matemáticas inmersas en espacios con diferentes dimensiones euclidianas; un par de distribuciones no fractales y una distribución de sismicidad real. El orden de las distribuciones monofractales fue escogido de manera que el número de puntos estuviera lo más cerca posible del número de sismos de los catálogos reales utilizados.

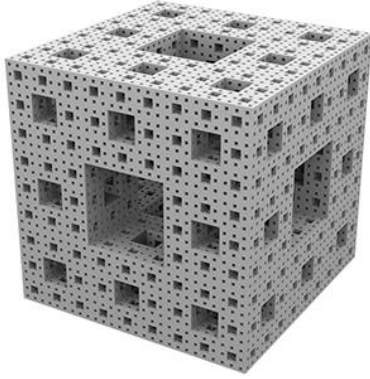


Figura 6 Esponja de Menjer D= 2.7268

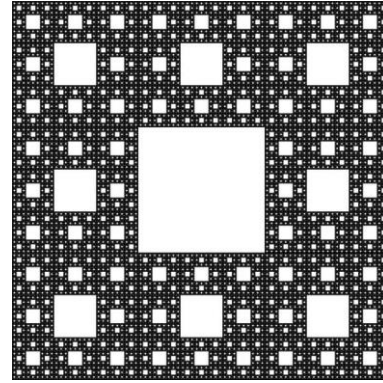


Figura 7: Sierpinsky D= 1.8928



Figura 8: Cantor D = 1.2618

Fractales teóricos utilizados en el presente trabajo (Márquez. 2012), donde la D nos indica que dichos fractales están dentro de su dimensión euclidiana original, la Esponja y Sierpinsky están cerca de su dimensión 3D y 2D respectivamente mientras Cantor se aleja de su dimensión 2D por falta de puntos.

2.2.9 Celdas y Medidas

Trabajar con conjuntos de celdas establece limitaciones en el número de posibles observaciones de entropía, ya que el número de particiones en las celdas, K , en cada lado de la región de estudio debe ser entero. $K = 1$ no da ninguna información, de modo que $K = 2$ es el número más pequeño utilizable. Por otro lado, para K tal que K es mayor que N , S^I está saturado y S^P se aproxima a S^U , de modo que la diferencia entre estas dos últimas medidas no lleva información significativa.

Por lo tanto, en lo que sigue mostraremos las entropías de $K = 2$ a $K = \text{round}[(3N)^{1/2}]$ o $K = \text{round}[(3N)^{1/3}]$ para mostrar claramente las saturaciones mencionadas anteriormente.

En todos los casos S^I es menos sensible que S^P y se satura muy temprano, por lo que utilizaremos solo la entropía de Poisson, S^P , para caracterizar las distribuciones epicentrales o hipocentrales observadas, y utilizar S_x^I solo con fines de referencia.

Ahora abordamos el problema de cuantificar la información dada por S^P , y lo mediremos en comparación con S^U , de modo que la medida debería cuantificar la diferencia entre estas entropías para todo K .

Para medir la diferencia entre S^U y S^P consideraremos el área mostrada en amarillo en las figuras (6), entre

$$K_1 = 2^2 \text{ o } K_1 = 2^3$$

y

$$K_{max} = [\text{round}(\sqrt{N})]^2 \text{ o } K_{max} = [\text{round}(\sqrt[3]{N})]^3 \quad (27)$$

Usaremos como medida el área entre las líneas S^U y S^P en el rango de K_1 a K_2 . Entre estos límites, el área entre las líneas desde K_j a K_{j+1} (Figura 6) es

$$A_j = \frac{(K_{j+1} - K_j)(S_j^U - S_j^P + S_{j+1}^U - S_{j+1}^P)}{2},$$

y el área total, dividida entre el rango de K , de manera que se minimiza el efecto de la dependencia del número de eventos, es

$$A_{UP} = \frac{1}{K_2 - K_1} \sum_{j=1}^{K_2-1} A_j, \quad (28)$$

la que se usará como medida para cuantificar la diferencia entre S^U y S^P .

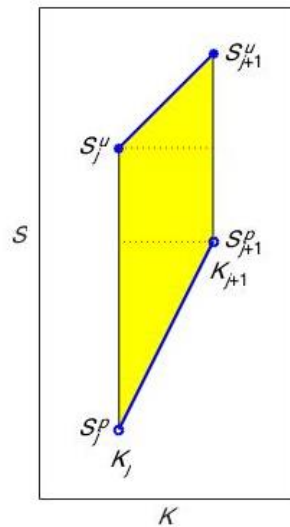


Figura 9: Área entre entropía uniforme y entropía Poissoniana (A_{up}).

Donde S_j^U y S_{j+1}^U son la entropía uniforme, S_j^P y S_{j+1}^P son la entropía Poissoniana y K y K_{j+1} son número de elementos. El área se indica en color amarillo y las líneas punteadas son líneas auxiliares.

CAPITULO 3. TECTÓNICA DE LA REGIÓN DE ESTUDIO

Las islas japonesas se encuentran en la conjunción de cuatro grandes placas tectónicas: las placas Pacífico, la placa Filipina, la de Norteamérica (o Okhotsk) y la de Eurasia (o Amuriana). La Placa Pacífico se mueve hacia el WNW aproximadamente 8 cm / año y subduce bajo el arco de las Kuriles y el arco Izu-Bonin o Izu-Ogasawara (Wei y Seno, 1998). Las trincheras de las Kuriles, la de Japón y la Izu-Bonin son las más profundas (6000 m) en la región donde la placa Pacífico subduce. En el norte, la subducción de la placa Pacífico es oblicua a la trinchera de las Kuriles, y causa movimiento de deslizamiento de rumbo a lo largo del arco de las Kuriles, que da como resultado una zona de colisión local dentro de la Placa de Okhotsk en Hokkaido central (Figura 7).

La Placa Filipina se mueve hacia el NW a una velocidad de aproximadamente 5 cm/año (Wei y Seno, 1998) y subduce debajo del SW de Japón y el arco de Ryukyu. En el SW de Japón, el frente

volcánico se encuentra paralelo a la trinchera Ryukyu y el canal Nankai. El frente volcánico se vuelve menos significativo en la parte central de Honshu y en Shikoku. En el sur, la placa Filipina subduce oblicuamente hacia el canal Nankai.

El sistema de arco volcánico causado por la subducción de las placas Pacífico y Filipinas es evidente en las cadenas de volcanes en el norte de Honshu, a lo largo de los arcos Kuril e Izu-Bonin, en Kyushu y a lo largo de las islas Tokara. En el norte de Honshu, el arco volcánico forma la columna vertebral principal de la isla, las montañas del centro de Honshu están formadas en parte por la colisión del arco de Izu-Bonin con la Placa Eurasiática (Amuriana) y la interacción entre las placas de Norteamérica (Okhotsk) y la Eurasiática (Editorial Group for Computer Graphics, Geology of Japanese Islands, MARUZEN Co., Ltd., 1996).” (Despaigne. 2017).

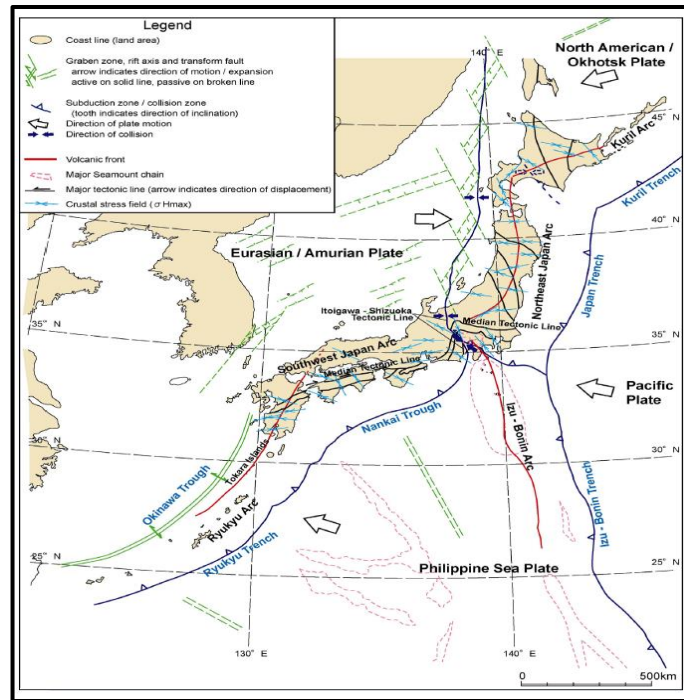


Figura 10: Tectónica de Japón, (Fuente: Nuclear Waste Management Organization of Japan).

Honshu, la región de estudio, se encuentra ubicada en $34.00^{\circ}N - 45.00^{\circ}N$ y $135.00^{\circ}E - 146.00^{\circ}E$. En esta región ocurrió el sismo de marzo del 2011 $M = 9.0$, asociado a una falla inversa en la zona de subducción entre las placas Pacífico y Norteamérica (Tensor Momento Sísmico-Centroide, USGS).

3.1 Catálogo sísmico

El catálogo preliminar, contiene 632,777 sismos de $M \geq 1.5$ ocurridos en la región de Honshu entre 1960 y 2016, fue elaborado por Despaigne (2017) a partir de datos de los catálogos sísmicos publicados por el Centro Sismológico Internacional (ISC) y la Agencia Meteorológica de Japón (JMA), este catálogo fue revisado minuciosamente con la finalidad de eliminar sismos repetidos y recuperar sismos omitidos.

Para homogeneizar las magnitudes del catálogo se les dio prioridad a las magnitudes reportadas por la JMA, esta agencia calcula la magnitud de sus eventos a partir de las fórmulas:

Fórmula de Tsuboi (Tsuboi, 1954) para sismos con profundidad menor que 60.0 km:

$$M_{JMA} = \log_{10} A + 1.73 \log_{10} \Delta - 0.83, \quad (29)$$

donde Δ es distancia epicentral (km) y A es la amplitud máxima (μm) calculada como $A = \sqrt{A_{NS}^2 + A_{EW}^2}$, donde A_{NS}^2 y A_{EW}^2 son la mitad de la máxima amplitud pico a pico de las componentes horizontales.

Fórmula de Katsumata (Katsumata, 1964) para sismos con profundidad mayor que 60.0 km:

$$M_{JMA} = \log_{10} A + K, \quad (30)$$

donde K es función tabulada de la distancia epicentral Δ y de la profundidad del foco, H .

Según Despaigne (2017), de acuerdo con Katsumata (1996), estas magnitudes no presentan diferencias significativas con respecto a la magnitud de momento (M_W), para sismos con magnitudes entre 4.5 y 7.5 y localizados a profundidades menores de 60 km, de donde $M_{JMA} \approx M_W$. Para sismos con magnitudes mayores que 7.5, M_{JMA} es menor que M_W , por lo que JMA reporta estos eventos con la M_W del catálogo Centroid Moment Tensor (CMT). Las magnitudes en el catálogo que se confeccionó, denominadas M , corresponden a los reportados por JMA.

Los otros parámetros que caracterizan el catálogo preliminar son: fecha y tiempo de ocurrencia de los sismos (convertida a años en formato decimal), coordenadas latitud y longitud, convertidas a coordenadas x, y, referidas a la ubicación del sismo principal, y la profundidad (z) en kilómetros.

3.2 Región analizada

Despaigne (2017) seleccionó dos volúmenes de la región de Honshu (Figura 8), para evaluar el comportamiento temporal de la distribución espacial de la sismicidad mediante la aplicación en 3D de las medidas de entropía poissoniana y dimensión fractal generalizada. Las áreas fueron escogidas de manera que contaran con un número suficiente de eventos, que fueran áreas relativamente pequeñas dentro de un mismo régimen tectónico y cuya sismicidad no estuviera influenciada por otros sismos fuertes previos. Se estudiará, por tanto, la sismicidad contenida en volúmenes definidos por las áreas mencionadas y extensiones de profundidad correspondientes. Aquí consideraremos los mismos volúmenes para comparar los resultados de Despaigne (2017) con los obtenidos mediante análisis 2D y determinar si este análisis es de utilidad práctica.

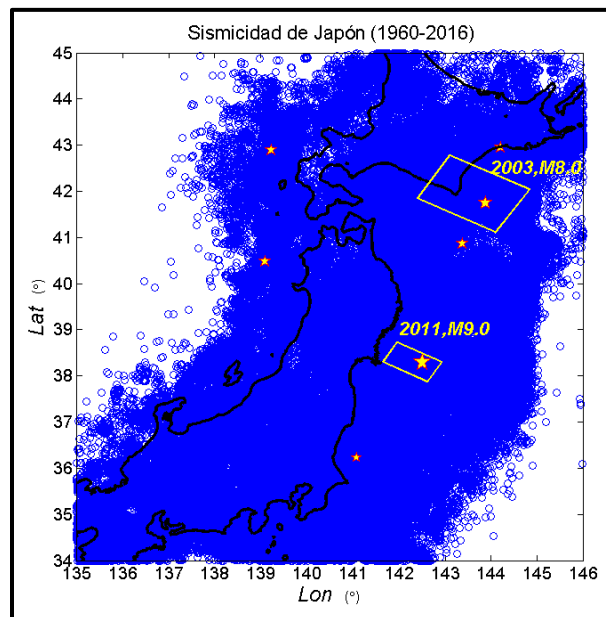


Figura 11. Sismicidad de Japón, 1960 - 2016. Los rectángulos en color amarillo, son las áreas seleccionadas para el estudio y las estrellas los epicentros con magnitud mayor e igual a 7.5.

3.3.1 Sismicidad previa a la ocurrencia del sismo del 11 de marzo de 2011, $M = 9.0$

La extensión en profundidad correspondiente al volumen del sismo $M = 9$ de 2011, al que se llamará de ahora en adelante M9, va de 0 a 65 km de profundidad (Figura 9); la sismicidad más profunda es muy escasa.

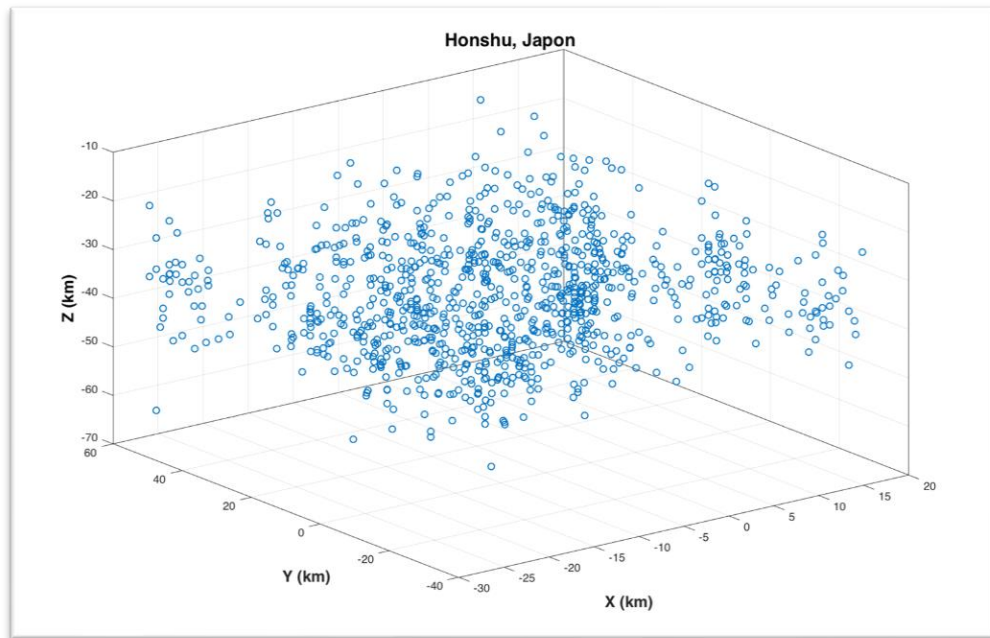


Figura 12. Hipocentros en volumen M9 con un total de 1000 eventos sísmicos.

Con objeto de contar con cobertura más o menos homogénea a lo largo del tiempo, se graficó la sismicidad acumulativa como función del tiempo (Figura 10) y se fue incrementando la magnitud mínima de los datos hasta que la pendiente de la sismicidad de fondo fuera aproximadamente la misma en intervalos sin grandes sismos. Según este criterio, se determinó que $M \geq 2.0$ es, a partir de 1978, la magnitud mínima para la cual los datos cumplen con la condición de homogeneidad. La sismicidad del volumen escogido quedó constituida por 12,838 eventos. En la figura 10 también se grafica la liberación de momento sísmico acumulativo para $M \geq 2.0$, donde se ve que una gran parte de la energía sísmica fue liberada durante el terremoto de marzo del 2011.

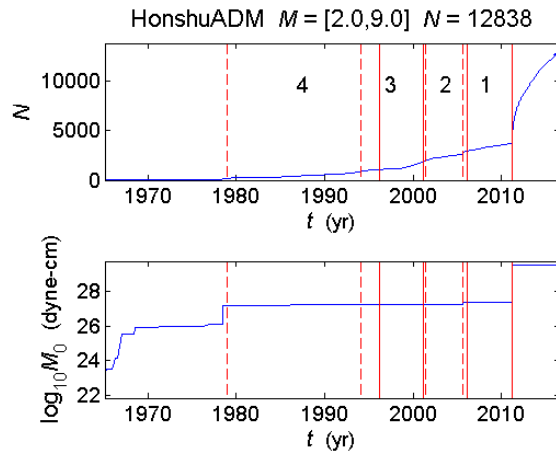


Figura 13: Ventanas de tiempo para M9. Arriba: Número cumulativo de sismos. Abajo: el logaritmo del momento sísmico cumulativo liberado para la sismicidad del volumen alrededor del sismo, 1960-2016. Las líneas verticales continuas y discontinuas indican el final de cada ventana.

El tiempo cubierto por el catálogo fue dividido en 4 ventanas temporales, para observar la variación en tiempo de las medidas de distribución de la sismicidad en el período de 1978 a 2011, hasta justamente antes de la ocurrencia del gran sismo M9. Para que la dependencia que experimentan estas medidas con el número de eventos no afectara los resultados, se definió cada ventana temporal tomando en consideración que tuvieran igual cantidad de sismos (1000).

CAPÍTULO 4. APLICACIÓN Y RESULTADOS

Como ejemplo de aplicación, aplicaremos la medida a un gran terremoto de la región de Honshu Japón, debido a su alta sismicidad (aproximadamente 5000 sismos al año, de magnitud igual o mayor que 3.0) cuenta con muy buena cobertura sismográfica que ofrece datos con alta calidad y fiabilidad.

Haremos un análisis hipocentral 3D porque, dado que la sismicidad ocurre dentro de un volumen, es preferible al análisis epicentral 2D que funciona como una proyección de la verdadera sismicidad 3D ya que la muestra en 2 dimensiones es más fácil visualizarla que una en 3 dimensiones.

El método consiste en tomar diferentes arreglos (sintéticos o reales), con varias inclinaciones (coordenadas latitud y longitud, convertidas a coordenadas x e y, referidas a las coordenadas del sismo principal, inclinadas bajo el eje x e y, profundidad (z) en kilómetros) y observar

numéricamente las diferencias entre los resultados de un análisis tridimensional y uno bidimensional.

Con base en la suposición que la sismicidad está relacionada con la concentración de esfuerzos cerca del futuro plano de falla, y que la inclinación del plano de subducción, en la región, es de $\sim 20^\circ$ (Yagi et al., 2004), exploramos el efecto de la inclinación sobre la estimación de la dimensión a partir de la correspondiente proyección horizontal para las distribuciones sintéticas o reales. El efecto de inclinar el plano de la distribución es similar al de comprimir la distribución epicentral en la dirección del echado. Los resultados son mostrados más adelante.

4.1 Dimensiones fractales D_0 , D_1 y D_2 para las distribuciones espaciales.

Las siguientes figuras muestran que para que una distribución puntual pueda ser considerada fractal tiene que cumplir una ley de potencias (ecuación 1), por tanto, la calidad del ajuste lineal del histograma $\log_{10} C_q(r)$ vs $\log r$ da información sobre qué tan fractal es dicha distribución. Donde \emptyset son los parámetros de la recta ajustada (fractalidad), normalizado por el valor medio de $\log C_q(r)$ en $[r_{min}, r_{max}]$ da información sobre qué tan fractal es dicha distribución y donde f (afractalidad) evalúa la calidad del ajuste, junto con la dimensión fractal, para caracterizar la fractalidad de las distribuciones de sismicidad utilizadas en el presente trabajo como función del tiempo

Los otros parámetros que caracterizan a los catálogos preliminares son: fecha y tiempo de ocurrencia de los sismos (convertida a años en formato decimal), coordenadas latitud y longitud, convertidas a coordenadas x e y, referidas a las coordenadas del sismo principal, y profundidad (z) en kilómetros. En el siguiente ejemplo grid 19-19-31-0 las coordenadas están distribuidas de la siguiente manera grid x, y, z-0 donde el ultimo dígito corresponde al número de grados de inclinación al que los catálogos son rotados.

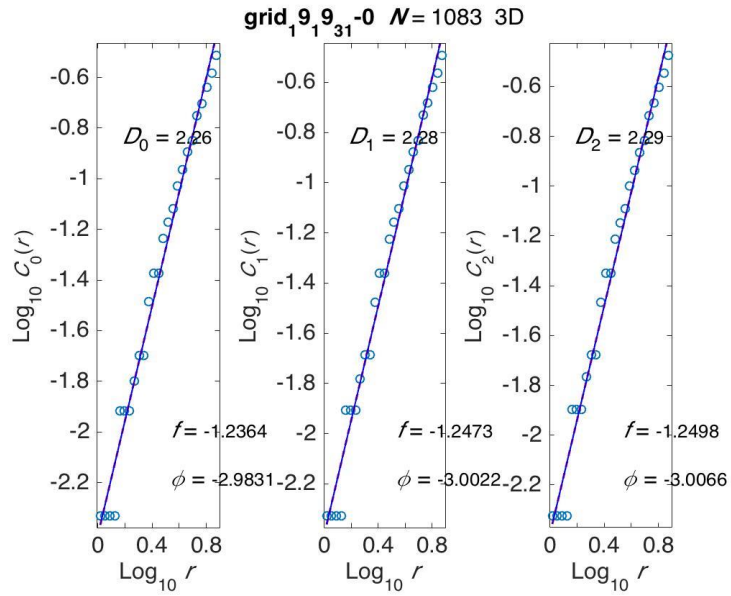
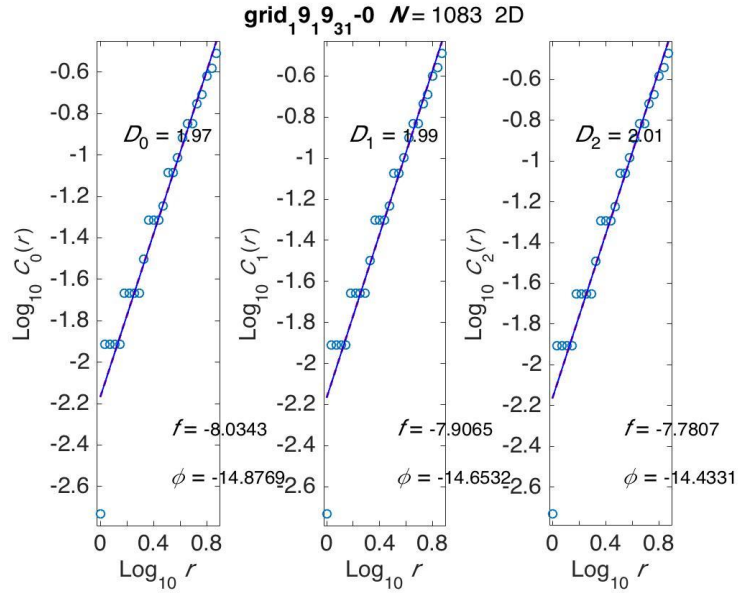


Figura 14. Distribución de puntos equiespaciados no aleatorios en un conjunto. Análisis 2D y análisis 3D respectivamente.

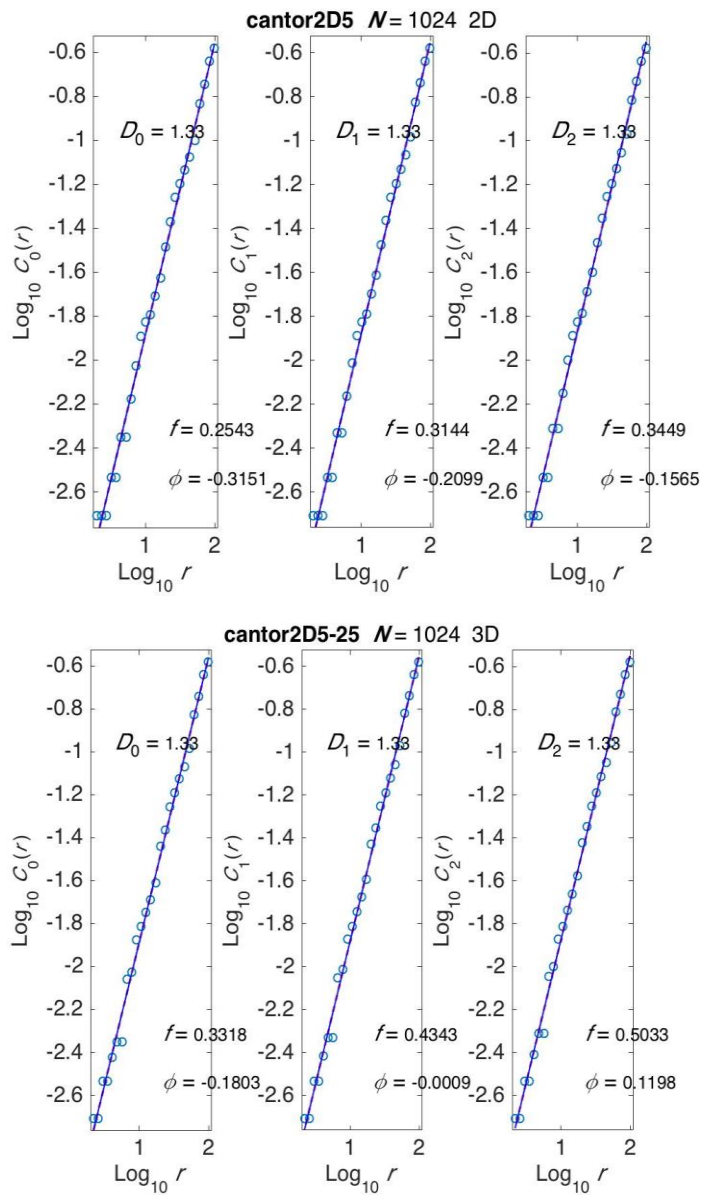


Figura 15. Distribución fractal teórica polvo de cantor de orden 5 con 1024 puntos. Análisis 2D y 3D respectivamente. Rotado 25°.

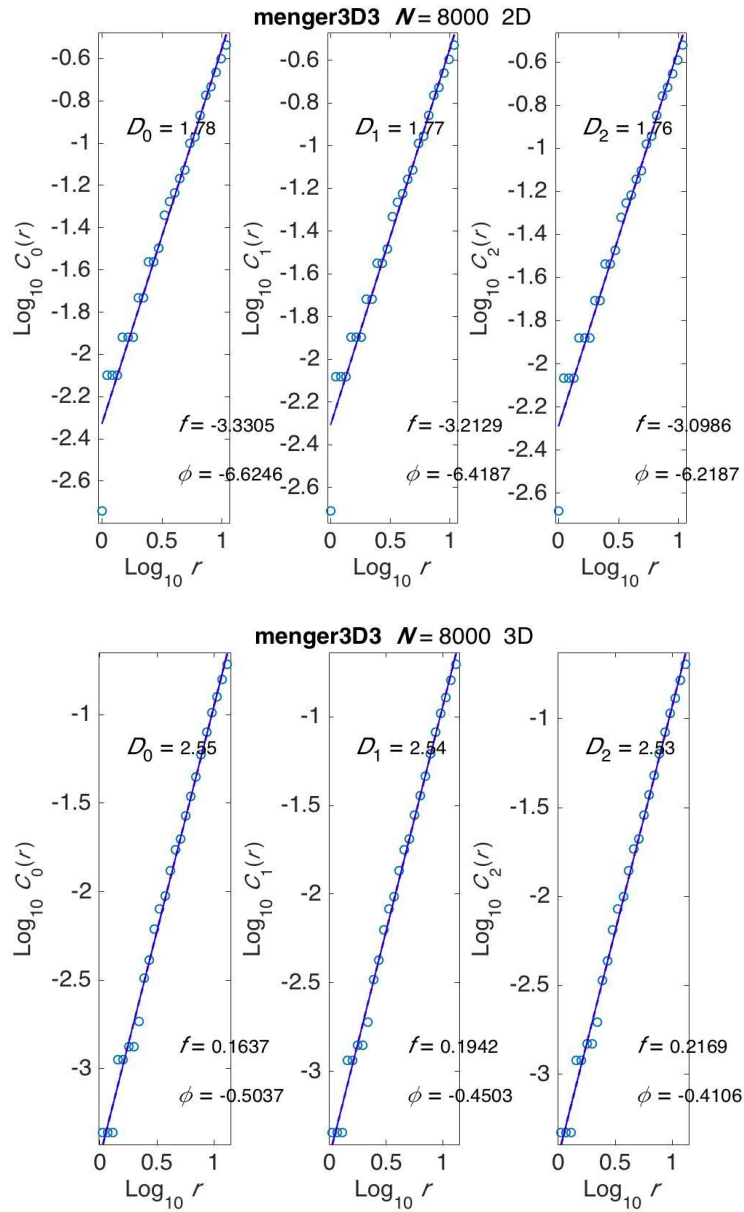


Figura 16. Distribución fractal teórica 3D esponja de Menger de orden 3. Análisis 2D y 3D respectivamente.

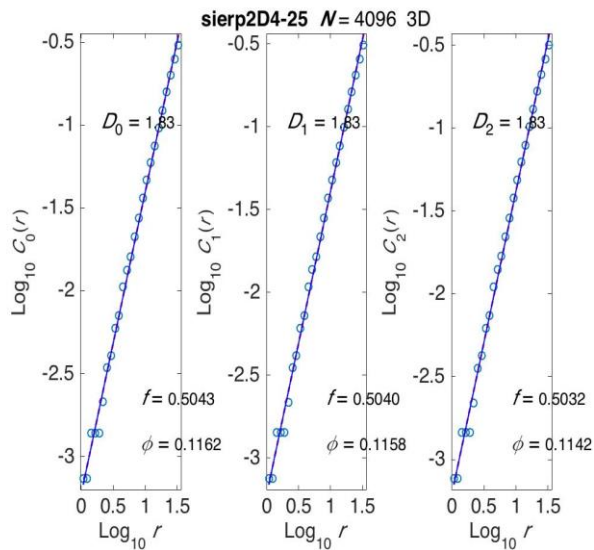
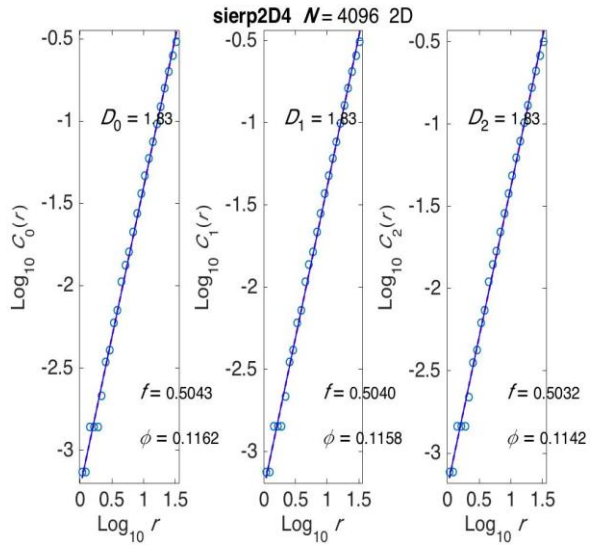


Figura 17. Distribución fractal teórica 2D (no aleatoria) carpeta de Sierpinski de orden 4. Análisis 2D (arriba) y 3D inclinado 25° (abajo).

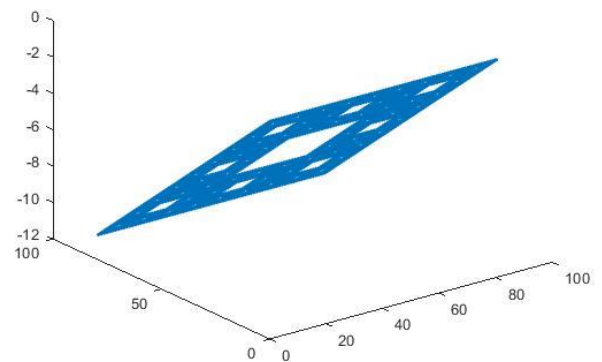


Figura 18: Catalogo sierp2D4-25 N = 4096 3D rotado a 25°.

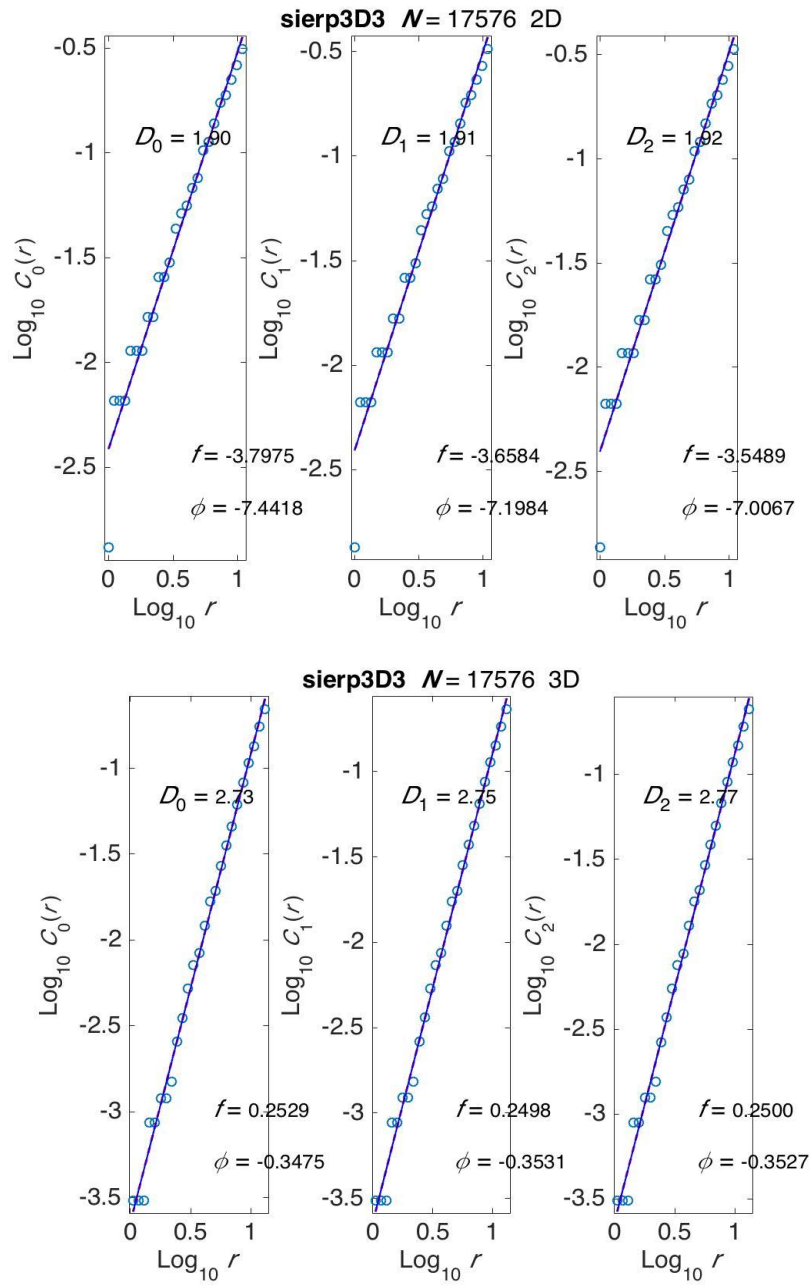


Figura 19. Distribución fractal teórica 3D (no aleatoria carpeta de Sierpinski de orden 3. Análisis 2D y 3D respectivamente).

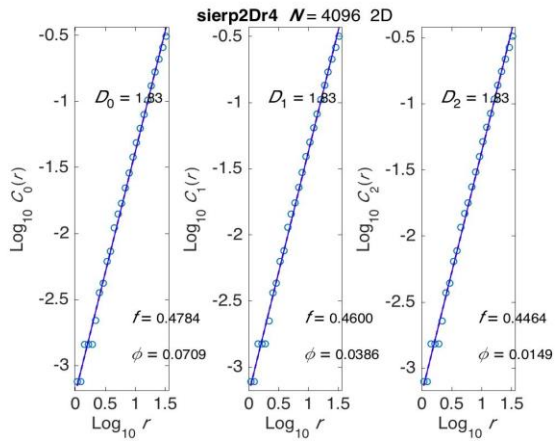


Figura 20. Distribución fractal teórica 2D (aleatorio) carpeta de Sierpinski de orden 4. Análisis 2D y 3D inclinado 25° respectivamente.

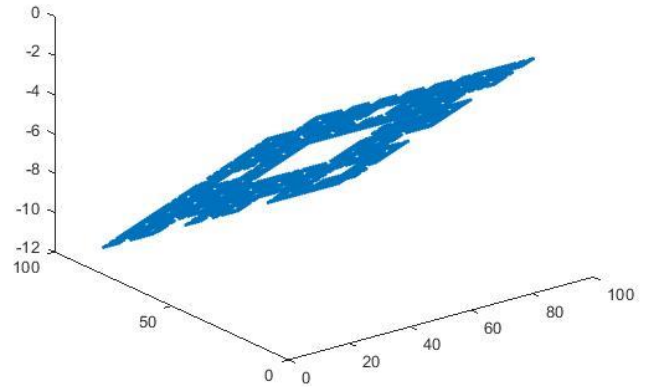
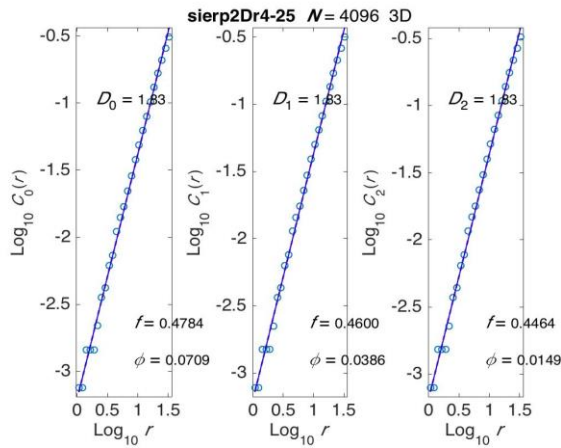


Figura 21: Catalogo sierp2Dr4-25 N = 4096 3D rotado a 25°.

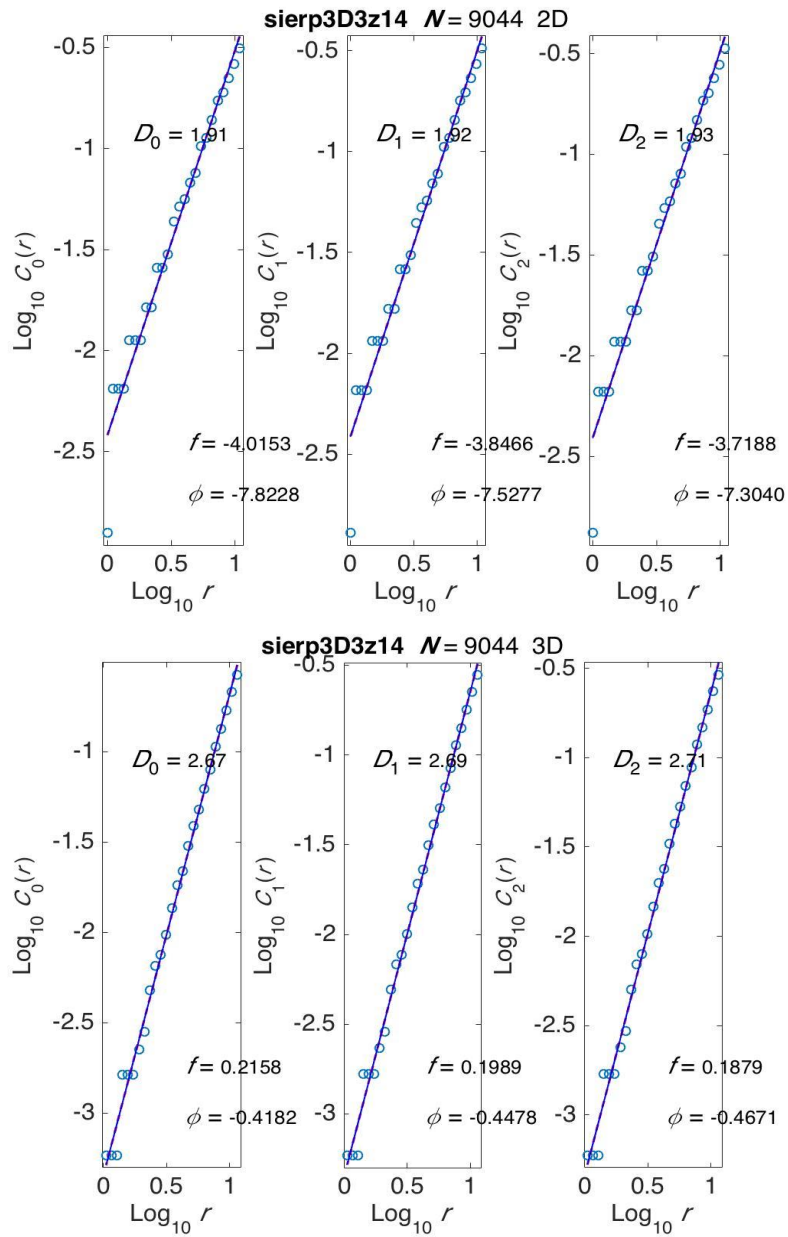


Figura 22. Distribución fractal teórica 3D (no aleatorio) conocida como carpeta de Sierpinski de orden 3 y recortado del lado $z = 14$. Análisis 2D y 3D respectivamente.

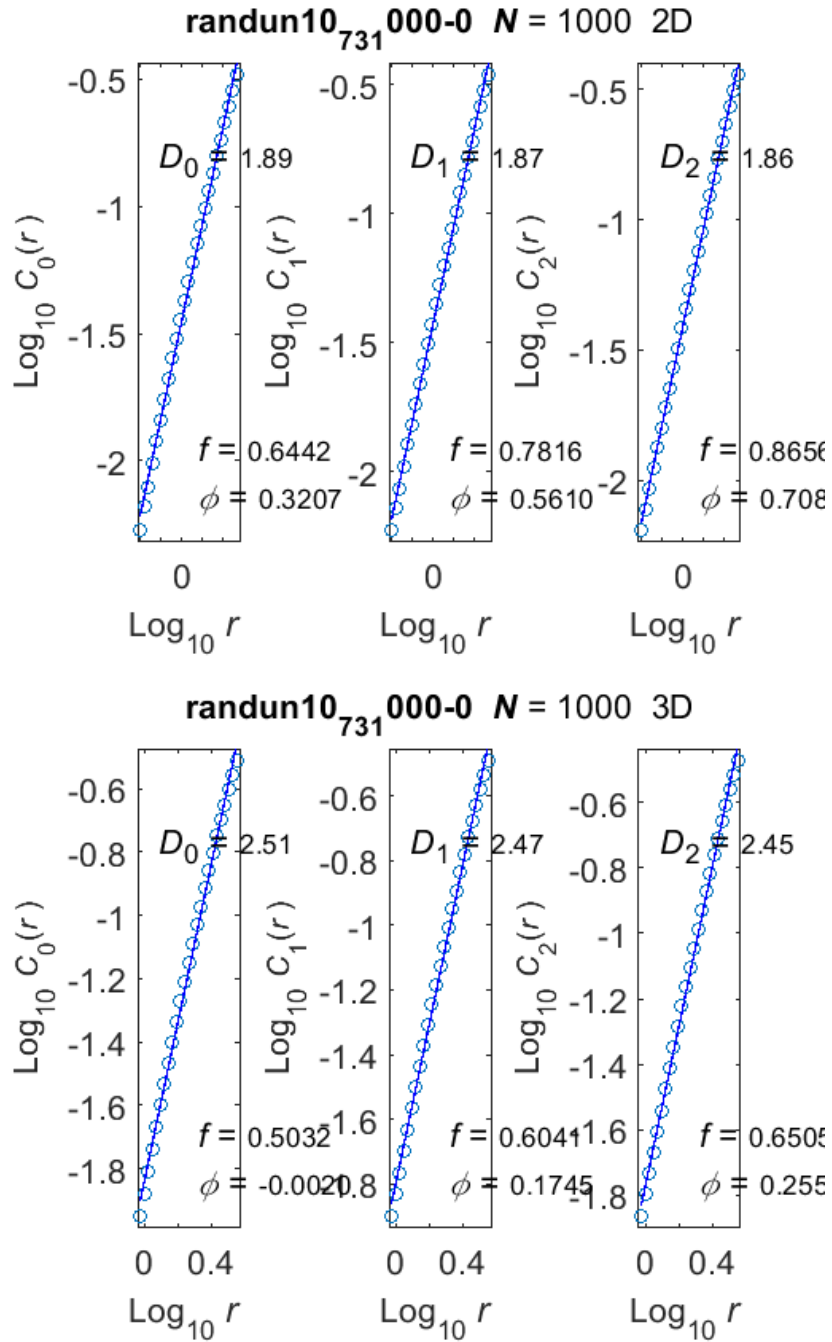


Figura 23. Distribución aleatoria hipocentral ($x = 10, y = 7, z = 3$ $N = 1000$). Análisis 2D y 3D respectivamente. Los catálogos randun son distribuidos de manera aleatoria con lados x, y, z y con n eventos.

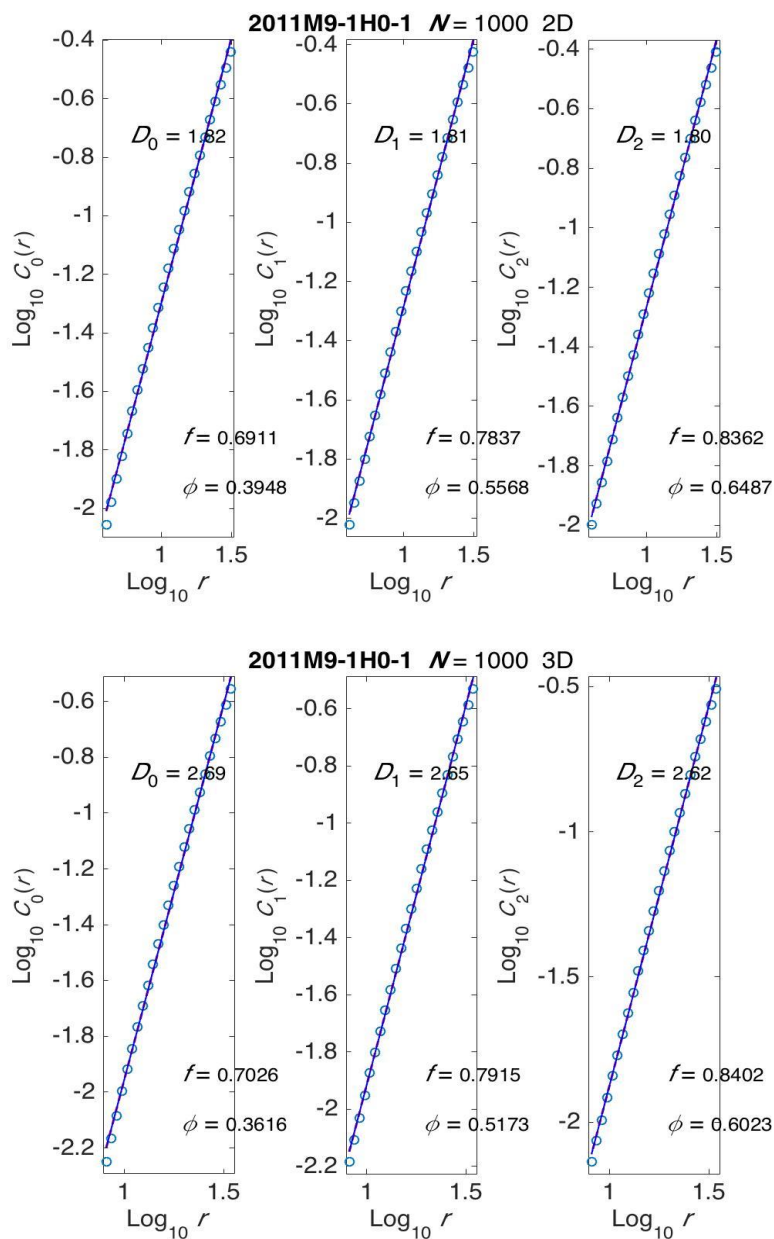


Figura 24. Distribución uniforme de epicentros e hipocentros (hipótesis nula). Análisis 2D y 3D respectivamente.

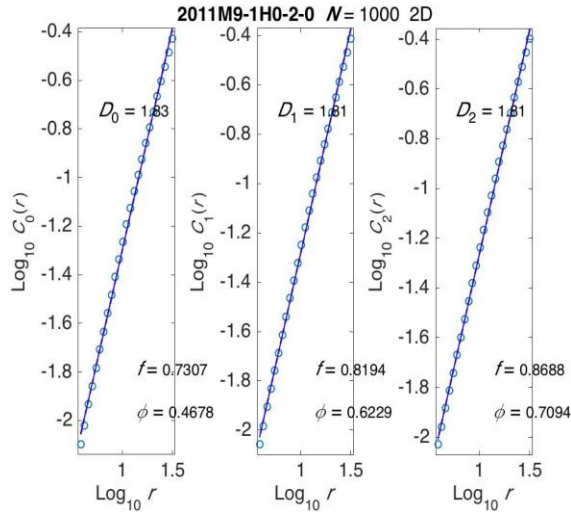
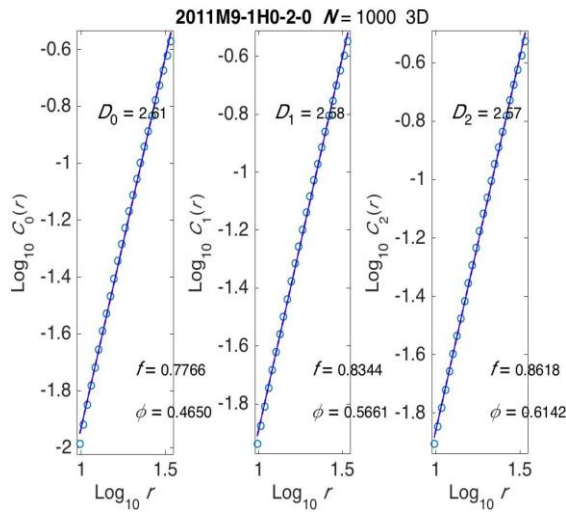


Figura 25. Distribución uniforme de epicentros e hipocentros (hipótesis nula). Análisis 2D y 3D respectivamente.



El método consistió en estudiar distribuciones bidimensionales y ver si los resultados cambian dependiendo de la inclinación, se observó que los resultados en 3D no cambian, pero los resultados en 2D si lo hacen (no es lo mismo tener un archivo de 2 dimensiones en 3D que tener un archivo 3D original).

Para ambos casos se debe contrastar los resultados con catálogos H0; un catálogo H0 (de hipótesis nula) es un catálogo sintético que se construye tomando las mismas dimensiones que un catálogo real y el mismo número de eventos y distribuyendo éstos aleatoriamente con probabilidad uniforme en el espacio, de manera que los huecos y agrupaciones que presenta son los que ocurren naturalmente al azar y no contienen información sobre la física o los procesos de lo que se esté modelando.

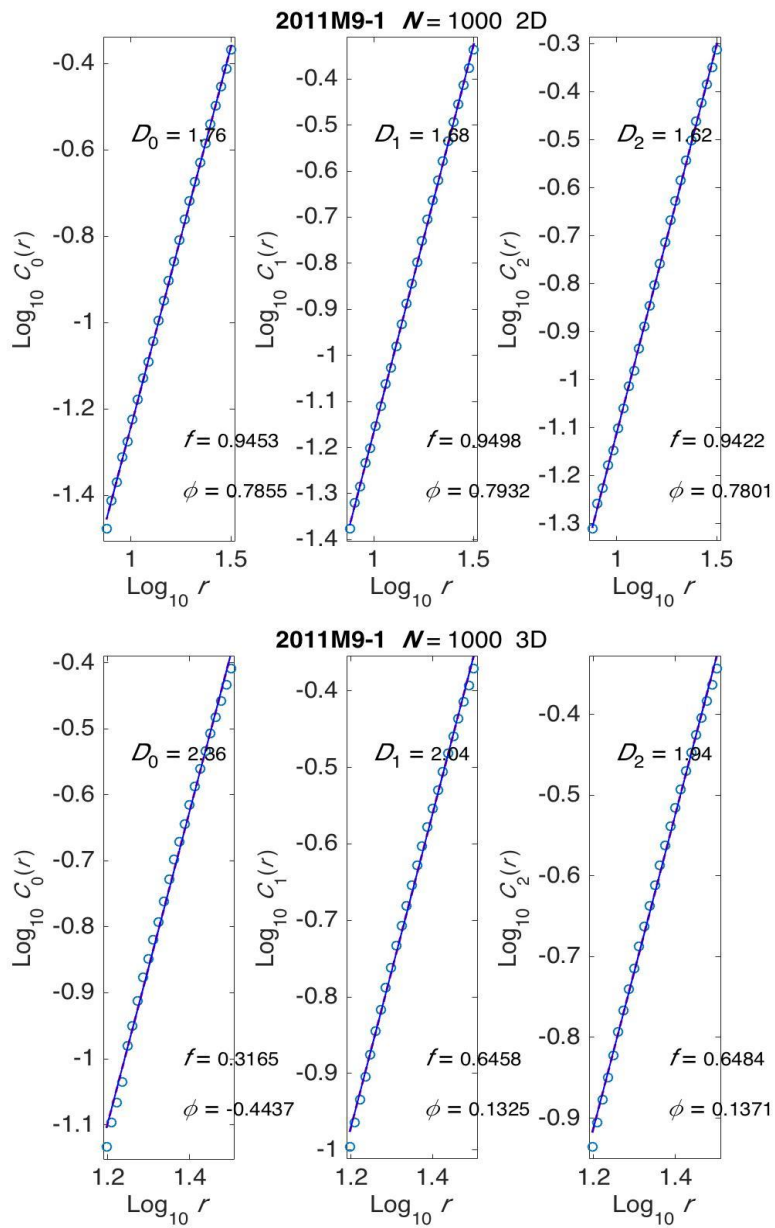


Figura 26. Distribución hipocentral para el catalogo sísmico de Honshu Japón. Análisis 2D y 3D respectivamente.

Con el objetivo de observar qué tanto cambian las dimensiones fractales con un número limitado de puntos, calculamos la dimensión para diferentes distribuciones como se mostró en las figuras anteriores. El orden de las distribuciones monofractales fue escogido para obtener un valor más cercano al número de puntos de los catálogos utilizados.

Ahora ilustraremos el cálculo de las entropías descritas anteriormente, para una muestra de 1000 eventos que ocurrieron previamente al $M = 9.0$ en el gran terremoto que ocurrió en 2011 en el área de Honshu en Japón (2011M9-1). Ilustraremos el proceso para 2D, porque es fácil de visualizar solo en dos dimensiones, y solo se mostrarán pocos pasos en el proceso por razones de espacio. Todas estas figuras están normalizadas y tienen los mismos límites.

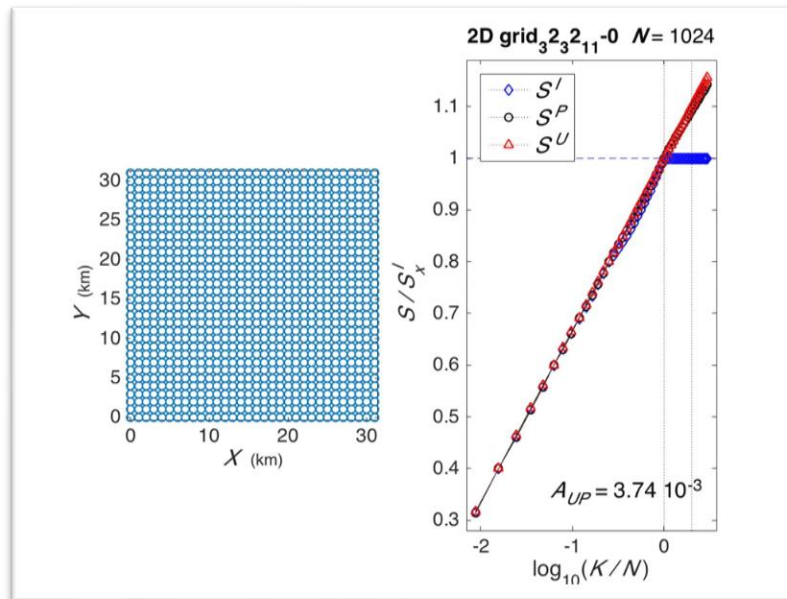


Figura 27. A la izquierda: distribución de puntos equiespaciados. A la derecha: entropías 2D normalizadas por S/S_x^I vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N . Esta distribución cuadrada S^I forma una línea recta todo el camino hasta S_x^I y luego se vuelve horizontal.

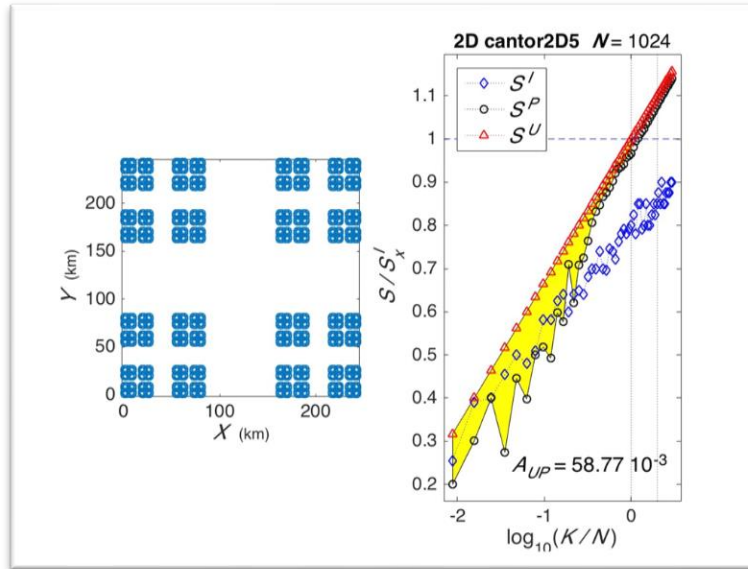


Figura 28 . A la izquierda: distribución fractal teórica $D = 1.2618$ conocida como polvo cantor, de orden 5, y $N = 1024$ puntos. A la derecha: entropías 2D normalizada por $\frac{S}{S_x}$ vs $\log_{10}\left(\frac{k}{N}\right)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

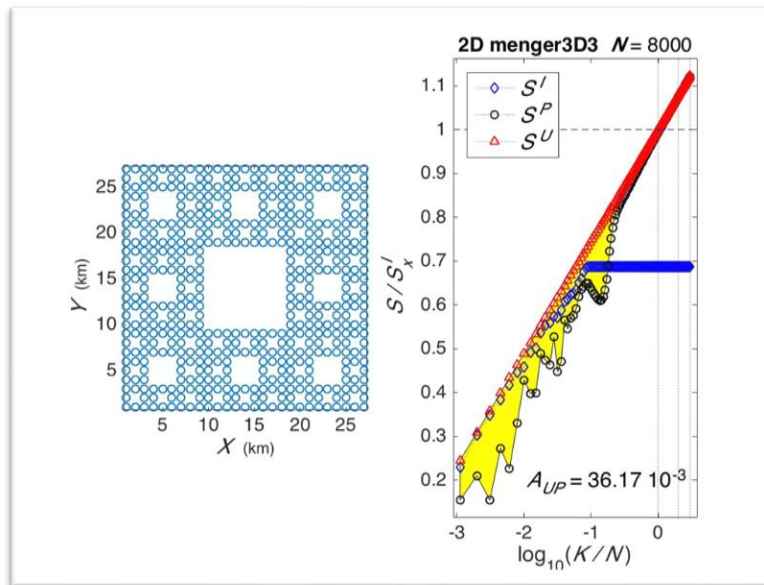


Figura 29. A la izquierda: distribución fractal teórica $D = \frac{\log(20)}{\log(3)} = 2.7268$ conocida como esponja de Menger, de orden 3, y $N = 8000$ puntos. A la derecha: entropías 2D normalizada por $\frac{S}{S_x}$ vs $\log_{10}\left(\frac{k}{N}\right)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

Para la Alfombra de Sierpinski (figura 27), la diferencia entre S^U y S^P es significativa, debido a que la distribución de este fractal es regular, pero no uniforme.

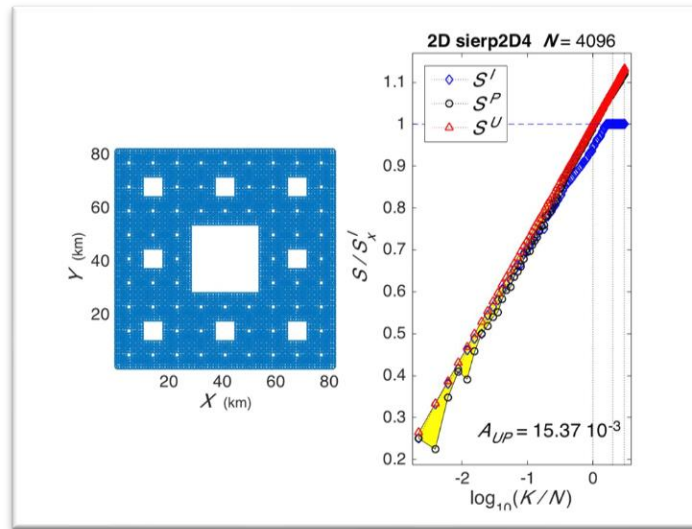


Figura 30. A la Izquierda: distribución fractal teórica (no aleatorio) $D = 1.8928$ conocida como carpeta de Sierpinski, de orden 4, y $N = 4096$ puntos. A la derecha: entropías 2D normalizada por S/S_x^I vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

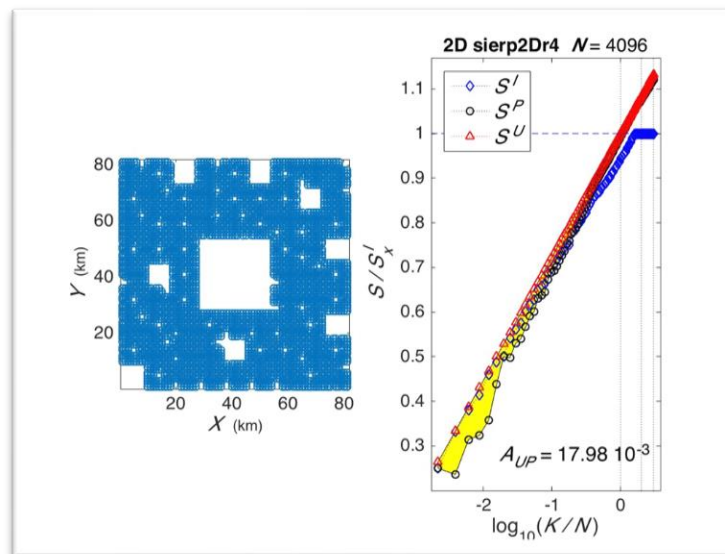


Figura 31. A la Izquierda: distribución fractal teórica (aleatorio) $D = 1.8928$ conocida como carpeta de Sierpinski, de orden 4, y $N = 4096$ puntos. A la derecha: entropías 2D normalizada por S/S_x^I vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

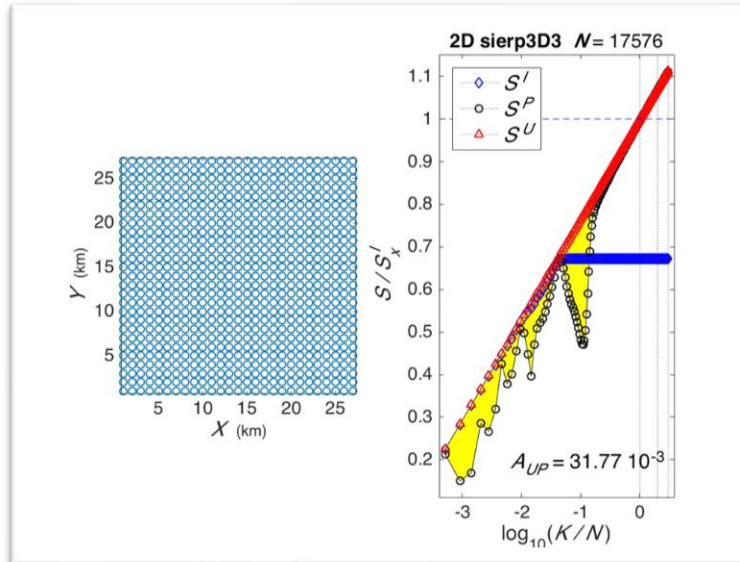


Figura 32. A la izquierda: distribución fractal teórica (no aleatorio) $D = \frac{\log(26)}{\log(3)} = 2.7268$ conocida como esponja de Sierpinski, de orden 3, y $N = 17576$ puntos. A la derecha: entropías 2D normalizada por $\frac{S}{S_x^I}$ vs $\log_{10}\left(\frac{k}{N}\right)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

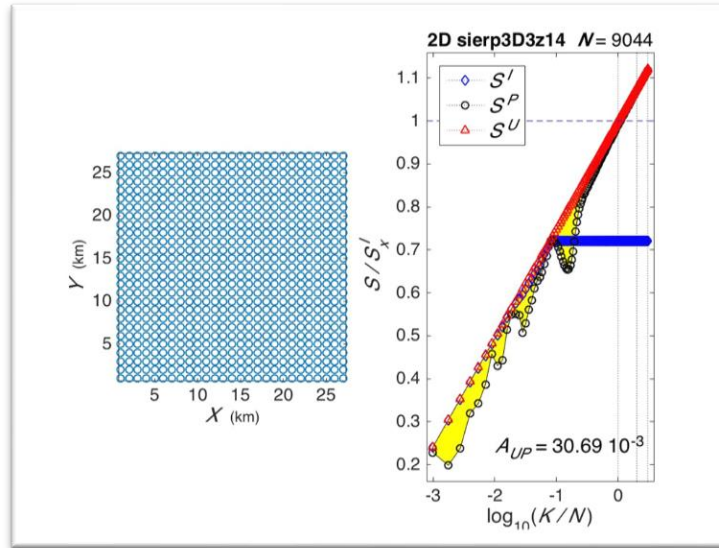


Figura 33. A la Izquierda: distribución fractal teórica (no aleatorio) $D = \frac{\log(26)}{\log(3)} = 2.7268$ conocida como esponja de Sierpinski, de orden 3 con z cortado a -14 , y $N = 17576$ puntos. A la derecha: entropías 2D normalizada por $\frac{S}{S_x^I}$ vs $\log_{10}\left(\frac{k}{N}\right)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I . La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

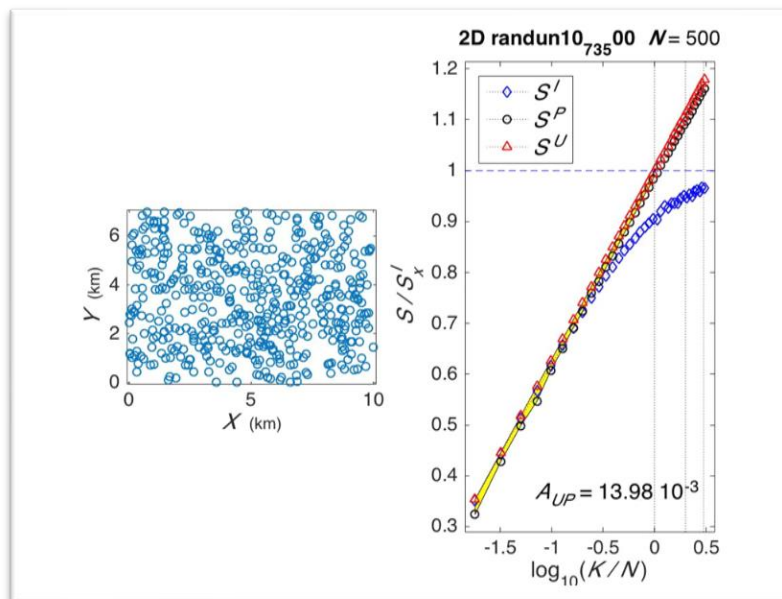


Figura 34. A la Izquierda: distribución aleatoria epicentral ($x = 10$ $y = 7$ $z = 3$ $N = 500$). A la derecha: entropías 2D normalizadas por S/S_x^I vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima SxI La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

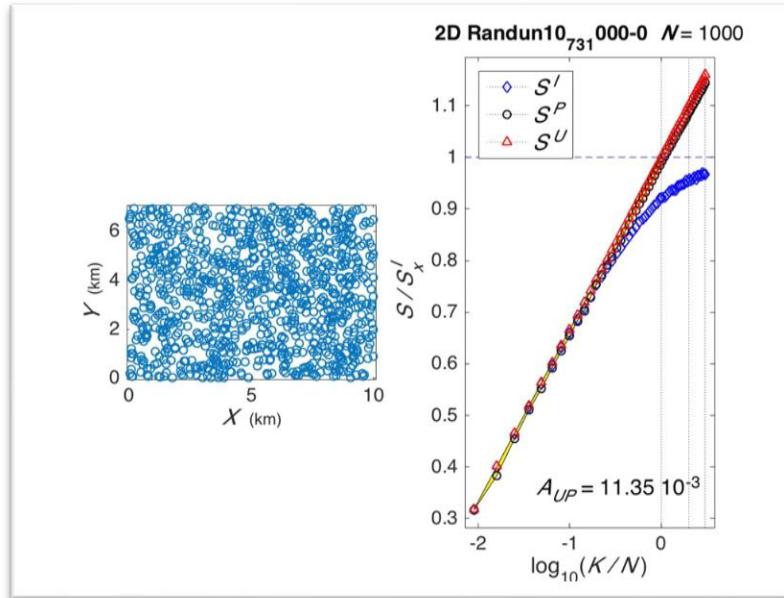


Figura 35. A la izquierda: distribución aleatoria epicentral ($x = 10$ $y = 7$ $z = 3$ $N = 1000$). A la derecha: entropías 2D normalizadas por S/S_x^I vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima SxI La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

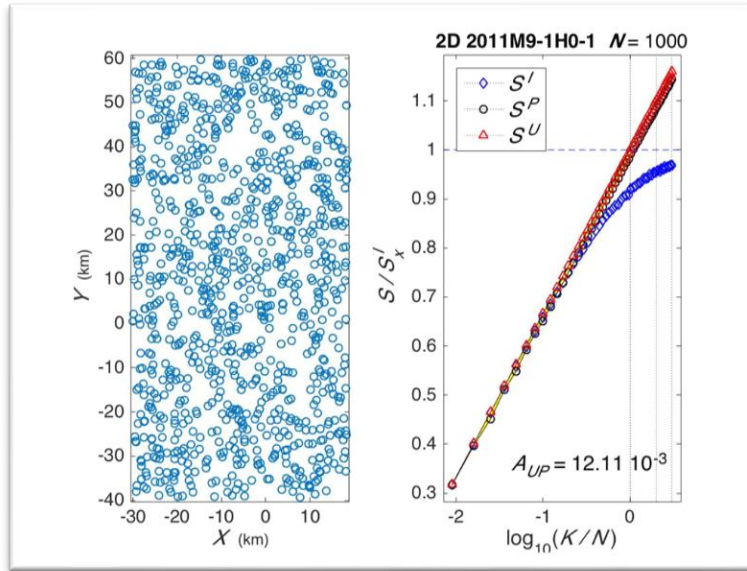


Figura 36. Entropía y A_{UP} de la sismicidad previa al sismo M9, ventana #1. A la Izquierda: distribución uniforme de epicentros (hipótesis nula).

A la derecha: entropías 2D normalizadas por S/S_x^I vs $\log_{10}(k/N)$. La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

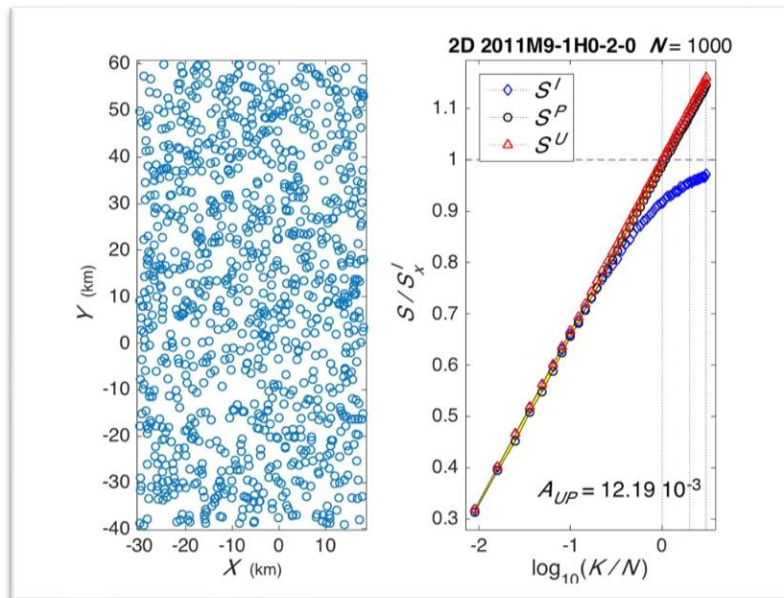


Figura 37. Entropía y A_{UP} de la sismicidad previa al sismo M9, ventana #2. A la Izquierda: distribución uniforme de epicentros (hipótesis nula). A la derecha: entropías 2D normalizadas por S/S_x^I vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

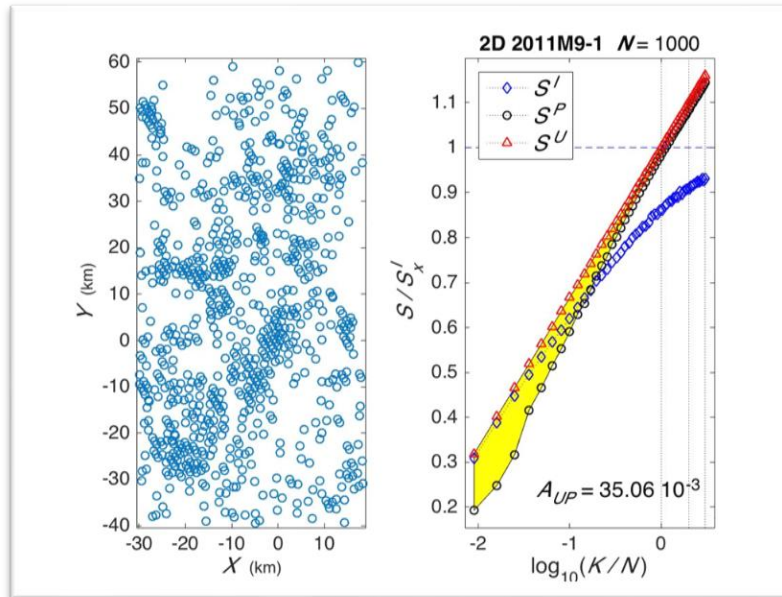


Figura 38. Derecha: entropías 2D normalizada como S/S_x^I vs $\log_{10}(k/N)$ para la distribución epicentral como se muestra a la izquierda.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

La diferencia entre S^P y S^U es la evidencia de que la distribución hipocentral no corresponde a una distribución uniforme, esto es que los agrupamientos de hipocentros no son mero producto del azar (se distribuyen naturalmente).

4.2 Medida A_{UP} de la distribución espacial de la sismicidad previa a la ocurrencia del sismo M9

Las figuras 36 y 37 (siguientes) muestran un ejemplo de un catálogo sintético H0, con el mismo volumen y número de sismos, para hipocentros distribuidos dentro del volumen con probabilidad uniforme. Puede verse que la entropía S^P distingue perfectamente entre la distribución de hipocentros del catálogo real y de la hipótesis nula que coincide para valores bajos de k/N con S^U .

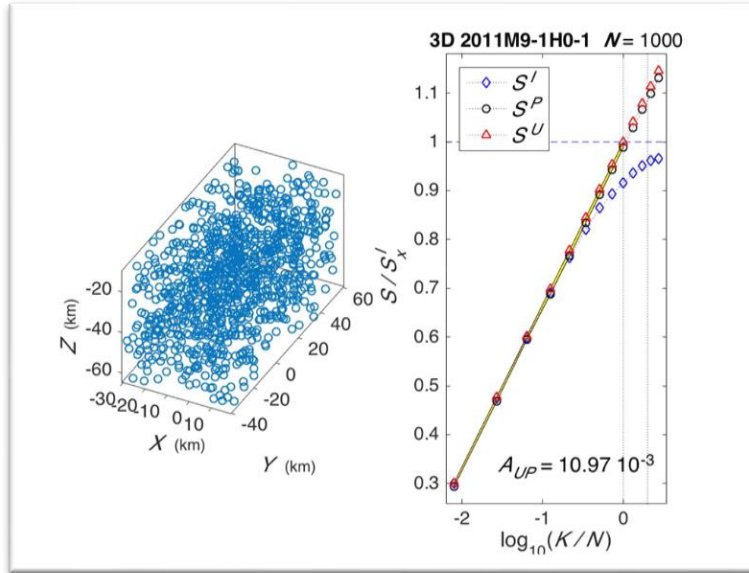


Figura 39. A la izquierda: distribución uniforme hipocentral (hipótesis nula) vista desde azimut 27° y elevación 35° . A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/S'_x vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S'_x y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

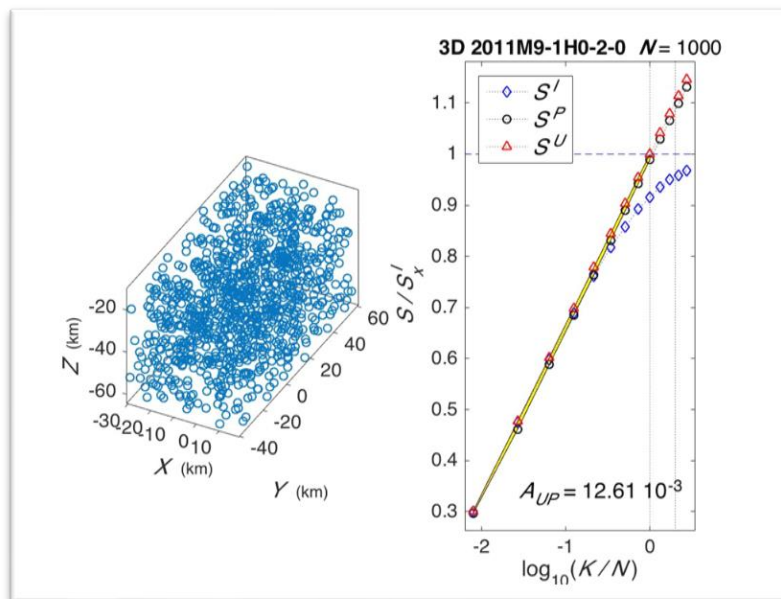


Figura 40 A la izquierda: distribución uniforme hipocentral (hipótesis nula) vista desde azimut 27° y elevación 35° . A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/S'_x vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S'_x y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

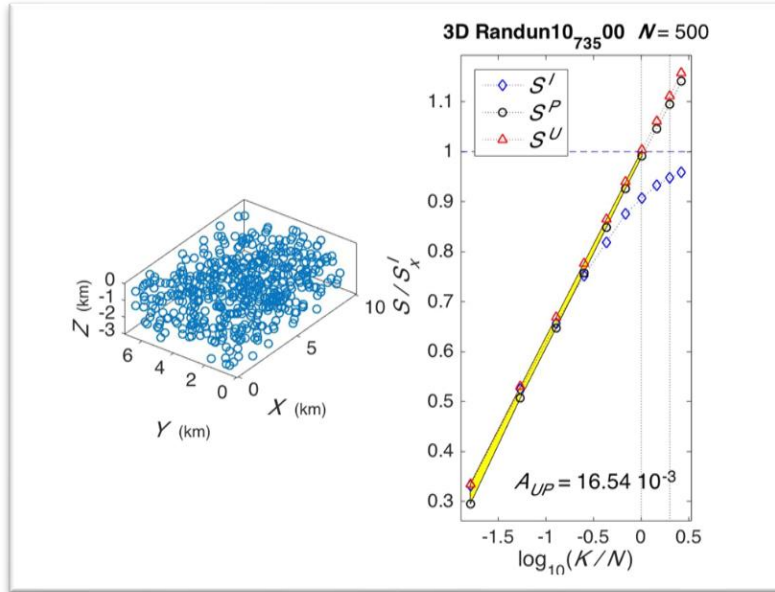


Figura 41. A la Izquierda: distribución aleatoria hipocentral ($x = 10$ $y = 7$ $z = 3$ $N = 500$) vista desde azimut 54° y elevación 32° . A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/S_x^I vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

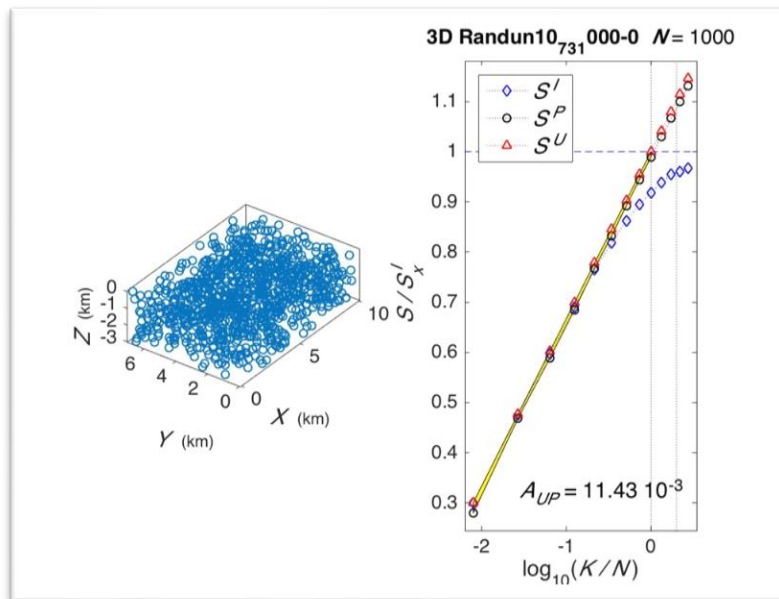


Figura 42. A la Izquierda: distribución aleatoria hipocentral ($x = 10$ $y = 7$ $z = 3$ $N = 1000$) vista desde azimut 54° y elevación 32° . A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/S_x^I vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

4.3 Distribución fractal teórica

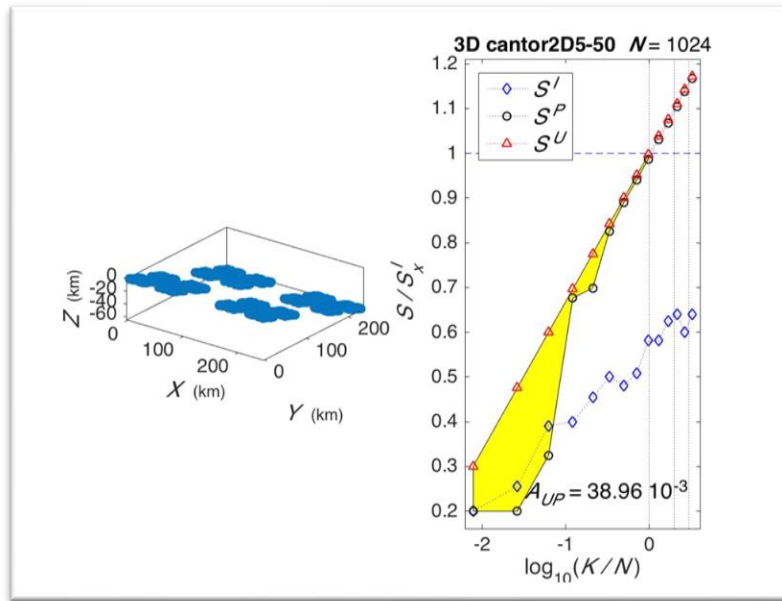


Figura 43. A la Izquierda: distribución fractal teórica rotada 50° vista desde azimuth 37° y elevación 23°. A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/S_x^I vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

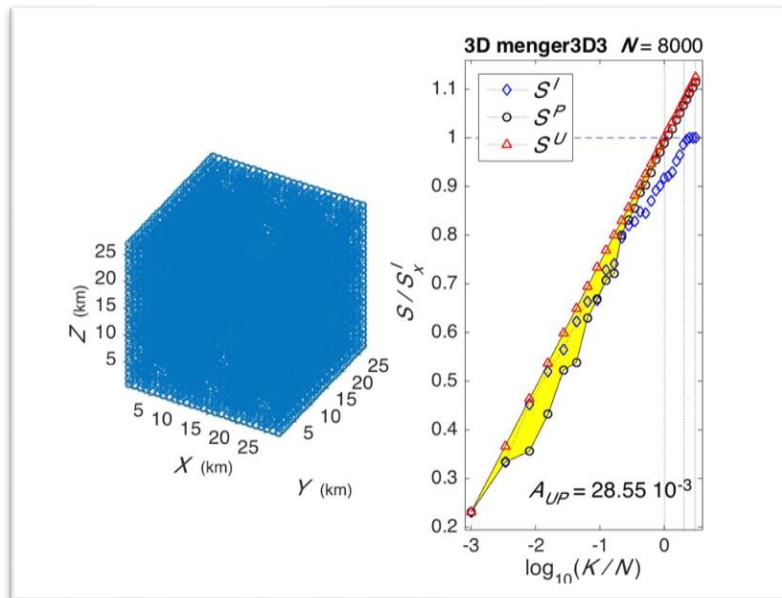


Figura 44 A la Izquierda: distribución fractal teórica vista desde azimuth 27° y elevación 35°. A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/S_x^I vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

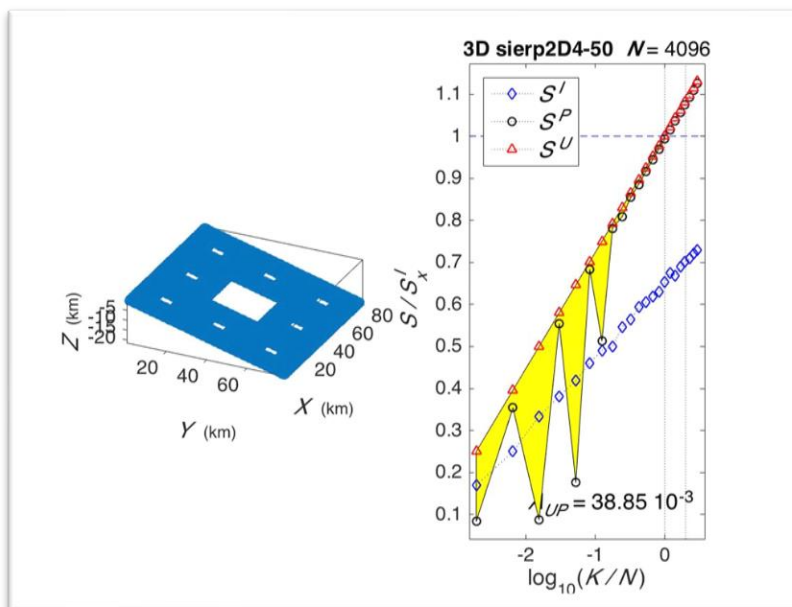


Figura 45 A la izquierda: distribución fractal teórica (no aleatoria) rotada 50° vista desde azimuth 65° y elevación 28° . A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/S^I_x vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S^I_x y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

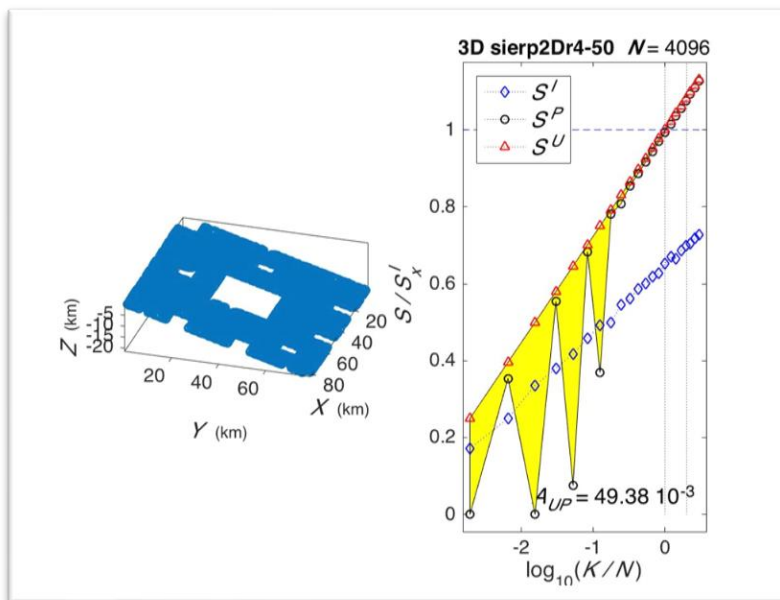


Figura 46 A la izquierda: distribución fractal teórica (aleatoria) rotado 50° vista desde azimuth 107° y elevación 27° . A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/S^I_x vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S^I_x y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

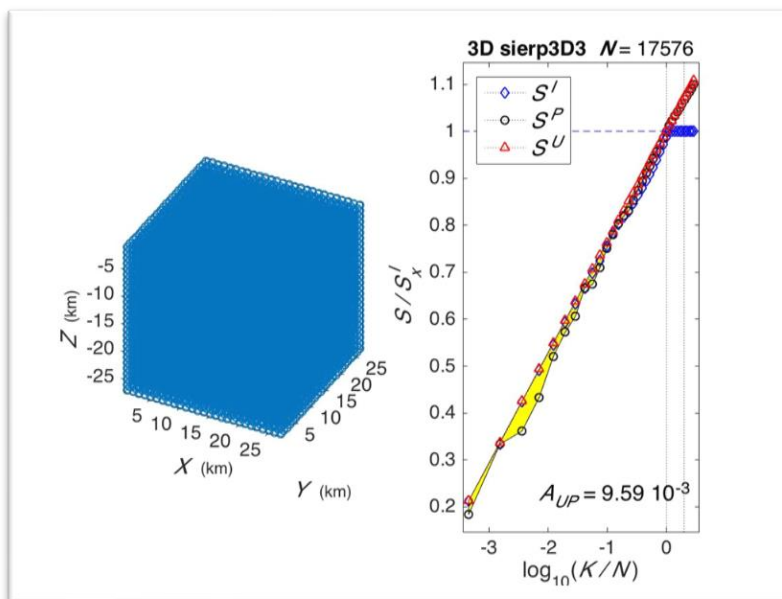


Figura 47. A la izquierda: distribución fractal teórica (no aleatorio) vista desde azimuth 27° y elevación 35° . A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/S_x^I vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

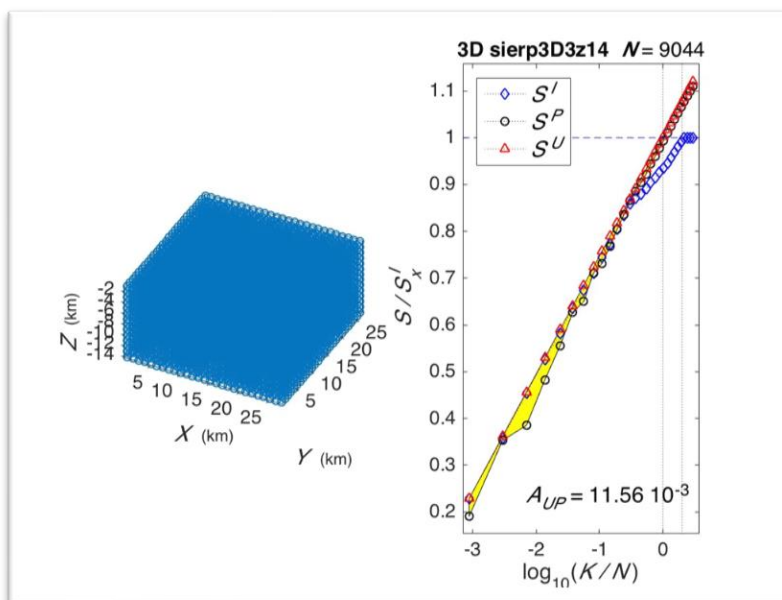


Figura 48. A la izquierda: distribución fractal teórica con z cortado a -14 (no aleatorio) vista desde azimuth 27° y elevación 35° . A la derecha: entropías 3D normalizadas por S/S_x^I vs $\log_{10}(k/N)$.

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

La siguiente figura muestra la entropía de la distribución espacial de la sismicidad en el volumen de ocurrencia del sismo M9.

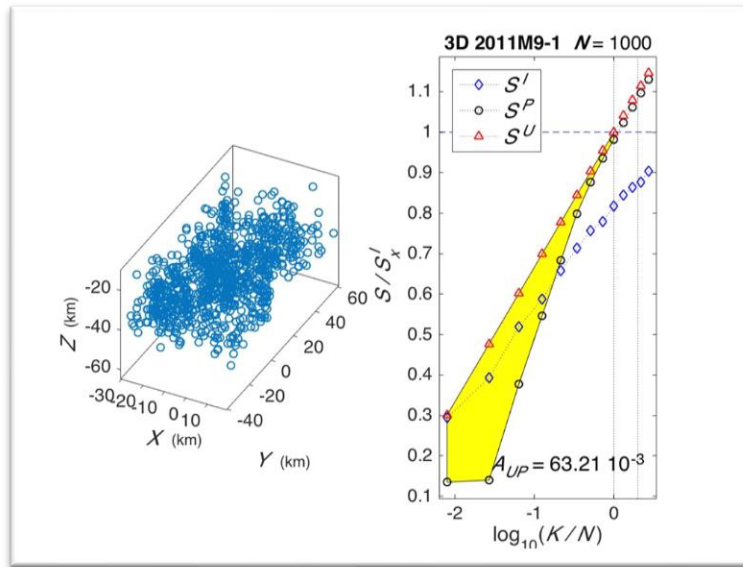


Figura 49. A la izquierda: distribución hipocentral vista desde azimut 27° y elevación 35° . A la derecha: entropías y A_{UP} .

La línea horizontal punteada representa la entropía máxima S_x^I y las verticales indican múltiplos del número de eventos normalizados por N .

El aumento de A_{UP} concuerda con agrupamientos que pueden ser debidos a concentraciones de esfuerzos relacionados con la ocurrencia del sismo principal.

Los resultados de las figuras de dimensiones fractales y de entropía se resumen en las siguientes tablas para mostrar cuantitativamente sus principales diferencias o similitudes entre los resultados de los catálogos 2D y 3D utilizados en este trabajo.

2D

Catálogo	Dip	$A_{up} 10^{-3}$	D_0	D_1	D_2
Malla_32_32_1_1	0°	3.74	1.88	1.90	1.91
	25°	3.74	1.88	1.90	1.91
	50°	3.74	1.88	1.90	1.91
	75°	3.74	1.88	1.90	1.91
Malla_19_19_3_1	0°	10.69	1.97	1.99	2.01
	25°	10.69	1.97	1.99	2.01
	50°	10.69	1.97	1.99	2.01
	75°	10.69	1.97	1.99	2.01

Malla_10_10_10	0°	28.19	1.86	1.89	1.92
	25°	28.19	1.86	1.89	1.92
	50°	28.19	1.86	1.89	1.92
	75°	28.19	1.86	1.89	1.92
Cantor2D5	0°	58.77	1.33	1.33	1.33
	25°	58.77	1.32	1.32	1.32
	50°	58.77	1.32	1.32	1.33
	75°	58.77	1.36	1.36	1.36
Menger3D3	0°	36.17	1.78	1.77	1.76
	25°	39.32	1.81	1.74	1.69
	50°	39.04	1.93	1.85	1.80
	75°	38.67	1.93	1.86	1.82
Sierp2D4	0°	15.37	1.83	1.83	1.83
	25°	15.37	1.82	1.83	1.83
	50°	15.37	1.85	1.85	1.85
	75°	15.37	1.82	1.83	1.83
Sierp3D3	0°	31.77	1.90	1.91	1.92
	25°	43.44	1.67	1.66	1.66
	50°	46.83	1.85	1.83	1.82
	75°	47.99	1.93	1.89	1.89
Sierp2Dr4	0°	17.98	1.83	1.83	1.83
	25°	17.98	1.83	1.83	1.83
	50°	17.98	1.85	1.86	1.86
	75°	17.98	1.83	1.83	1.83
Sierp3D3z14	0°	30.69	1.91	1.92	1.93
	25°	28.76	1.75	1.74	1.74
	50°	31.27	1.84	1.83	1.83
	75°	34.38	1.93	1.90	1.90
Randun10_7_3_500	0°	13.98	1.90	1.86	1.84
	25°	15.51	1.90	1.85	1.83
	50°	17.21	1.91	1.86	1.83
	75°	13.98	1.90	1.86	1.84
2011M9-1	0°	35.06	1.76	1.68	1.62
	25°	14.53	1.81	1.80	1.79
	50°	34.58	1.81	1.70	1.64
	75°	35.33	1.81	1.71	1.65
2011M9-1HO-1	0°	12.11	1.82	1.81	1.80
	25°	14.53	1.81	1.80	1.79
	50°	17.08	1.82	1.80	1.79
	75°	20.87	1.84	1.81	1.80

2011M9-1HO-2	0°	12.19	1.83	1.81	1.81
	25°	14.75	1.78	1.77	1.78
	50°	17.72	1.80	1.77	1.77
	75°	20.25	1.84	1.79	1.79

3D

Catalogo	Dip	$A_{up} 10^{-3}$	D_0	D_1	D_2
Malla_32_32_1_1	0°	-	-	-	-
	25°	-	-	-	-
	50°	-	-	-	-
	75°	-	-	-	-
Malla_19_19_3_1	0°	-	2.26	2.28	2.29
	25°	-	2.26	2.28	2.29
	50°	-	2.26	2.28	2.29
	75°	-	2.26	2.26	2.29
Malla_10_10_10_1	0°	9.12	2.68	2.73	2.76
	25°	9.12	2.68	2.73	2.76
	50°	9.12	2.68	2.73	2.76
	75°	9.12	2.68	2.73	2.76
Cantor2D5	0°	-	-	-	-
	25°	-	1.33	1.33	1.33
	50°	38.96	1.33	1.33	1.33
	75°	38.96	1.33	1.33	1.33
Menger3D3	0°	28.55	2.55	2.54	2.53
	25°	31.37	2.55	2.54	2.53
	50°	39.97	2.55	2.54	2.53
	75°	45.94	2.55	2.54	2.53
Sierp2D4	0°	-	-	-	-
	25°	-	1.83	1.83	1.83
	50°	38.85	1.83	1.83	1.83
	75°	38.85	1.83	1.83	1.83
Sierp3D3	0°	9.59	2.73	2.75	2.77
	25°	16.08	2.73	2.75	2.77
	50°	26.64	2.73	2.75	2.77
	75°	34.22	2.73	2.75	2.77
Sierp2Dr4	0°	-	-	-	-
	25°	-	1.83	1.83	1.83
	50°	49.38	1.83	1.83	1.83
	75°	49.38	1.83	1.83	1.83
Sierp3D3z14	0°	11.56	2.67	2.69	2.71
	25°	18.35	2.67	2.69	2.71
	50°	31.37	2.67	2.69	2.71
	75°	41.59	2.67	2.69	2.71

Randun10_7_3_500	0°	16.54	2.61	2.51	2.45
	25°	19.77	2.61	2.51	2.45
	50°	33.86	2.61	2.51	2.45
	75°	16.84	2.61	2.51	2.45
2011M9-1	0°	63.21	2.36	2.04	1.94
	25°	31.45	2.69	2.65	2.62
	50°	64.66	2.36	2.04	1.94
	75°	68.93	2.36	2.04	1.94
2011M9-1HO-1	0°	10.97	2.69	2.65	2.62
	25°	31.45	2.69	2.65	2.62
	50°	39.79	2.69	2.65	2.62
	75°	46.36	2.69	2.65	2.62
2011M9-1HO-2	0°	12.61	2.61	2.58	2.57
	25°	31.25	2.62	2.60	2.59
	50°	40.42	2.62	2.60	2.59
	75°	45.95	2.62	2.60	2.59

El cuadro azul muestra las diferencias de A_{up} de un catálogo sísmico con datos reales y el cuadro rojo muestra las dimensiones fractales; éstas casi no cambian, pero los valores de la entropía sí son sensitivos a los cambios de inclinación.

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

Entre las características premonitoras de la sismicidad de fondo, están la dimensión multifractal y la entropía de Shannon, evaluada aquí como entropía poissoniana renormalizada, introducidas en capítulos anteriores. Dado que el uso de premonitores es un factor importante para el pronóstico de grandes sismos, es importante que las características mencionadas sean estimadas adecuadamente.

Dado que la sismicidad es un fenómeno esencialmente en 3D, los estudios de dimensión fractal y de entropía aplicados a ésta necesitan funcionar en 3D para caracterizar correctamente las distribuciones espaciales. Sin embargo, dado que, en muchos casos, la cobertura de estaciones no es lo suficientemente buena para determinar correctamente la profundidad hipocentral y como el uso de profundidades erróneas puede introducir errores considerables en los resultados

de los análisis mencionados, consideramos adecuado explorar la posibilidad de llevar a cabo los análisis de dimensión fractal y entropía en 2D, esto es, utilizar solamente los epicentros.

Nuestros resultados indican que los análisis en 2D también dan estimaciones útiles, si bien menos precisas que las obtenidas en 3D, dado que los análisis 2D son estudios hechos sobre una proyección horizontal que deshecha la información de la profundidad.

Con la ayuda de los fractales sabemos cómo cambian los resultados de los análisis en 2D y 3D, al rotar los catálogos sintéticos, lo que sirve para estimar qué tanto varían los análisis epicentrales de un catálogo real con respecto a análisis hipocentrales.

De la discusión de los resultados, expuestos anteriormente, se concluye que:

-El uso de la entropía Poissoniana mediante la medida A_{UP} , muestra la posibilidad de diferenciar entre distribuciones epicentrales reales que aportan información sobre el proceso sísmico y distribuciones sin información al respecto, así como detectar y cuantificar cambios precursores en la distribución epicentral de la sismicidad.

-La medida A_{UP} , se consideró adecuada para cuantificar la diferencia entre la entropía de la distribución observada y la de la hipótesis nula (distribución uniforme).

-El aumento de A_{UP} concuerda con agrupamientos que pueden ser debidos a concentraciones de esfuerzos que ocurren antes del sismo principal.

-Para distribuciones intrínsecamente 2D, al inclinar éstas de manera que quedan contenidas en un espacio tridimensional, las medidas de dimensión fractal y de entropía no cambian significativamente al hacer el análisis en 3D.

-Para distribuciones intrínsecamente 3D, rotarlas no tiene mayor efecto sobre los análisis, pero la rotación sí es importante al hacer análisis 2D. Como era de esperarse, reducir un sistema de 3D a 2D introduce cambios importantes, ya que se está desechando parte de la información. Tanto entropía como dimensiones fractales disminuyen.

-Un fractal mientras más puntos posee este estará mejor definido, es decir, la dimensión no cambiará, y en la distribución uniforme al agregar más puntos va aumentando la dimensión, si aumenta hasta tener infinitud de puntos la dimensión final va ser la del volumen o el plano en el que están contenidos los puntos.

-Si la dimensión fractal tiende a 2D cuando se encuentra en 3D quiere decir que los puntos se están acumulando en un plano. El método de cajas está distribuido poco más que un plano, cuando se le da más fuerza a donde más se concentra eso tiende a ser plano (D2).

-Para agrupamientos en el espacio a la hora de reducir una dimensión, se espera que estos quedan menos dispersos, por lo tanto, aumento en la entropía. Sin embargo, el principal interés no es cuánto vale en realidad dicha entropía, sino observar los cambios al momento de que lo vemos de 3D a 2D. Indicando si los catálogos en 2D pueden ser utilizados en lugar de catálogos 3D ya que pueden existir errores en las mediciones de profundidad.

-Debido a que hay un número infinito de dimensiones fractales, en este trabajo se realizaron algunas pruebas con un número finito de datos, incluso cuando se da el tipo de dimensión fractal utilizado, el método y los detalles deben mencionarse. De lo contrario, los resultados no son comparables y por lo tanto sin sentido.

Referencias

Goltz, C. (1997) *Fractal and chaotic properties of earthquakes*. Springer-Verlag, Lecture notes in Earth sciences. ISSN: 0930-0317, DOI: 10.1007/BFb0028315, ISBN: 978-3-540-64893-2.

Goltz, C. (1996) Multifractal and entropic properties of landslides in Japan. *Geol. Rundsch.* **85**.

Grassberger, P., Procaccia, I. (1983) Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D* **9**, 189-208.

Hentschel, H., Procaccia, I. (1983) The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. *Physica* **8D**, 435-444.

- Hirata, et al. 1987. Fractal structure of spatial distribution of microfracturing in rock. *Geophys. J. R. astr. SOC.*, 1987, (90),369-374.
- Hirata, T. 1989. A correlation between the "b value" and the fractal dimension of earthquakes. *J. Geophys. Res.*, 94, 7507-7514.
- Hirata, T. e Imoto, M. 1991. Multifractal analysis of spatial distribution of microearthquakes in the Kanto region. *Geophys. J. Int.*, 107, 155-162.
- Hirabayashi, et al. 1992. Multifractal Analysis of Earthquakes. *Pure and Applied Geophysics*, 138(4), 591-610.
- Kagan, Y.Y.; Knopoff, L. 1980. Spatial distribution of Earthquakes: The Two-point Moment Function. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 62, 697-717.
- Mandelbrot, B. (1967) How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science* **156**, 636-638.
- Mandelbrot, B. (1983) Fractals and the geometry of nature. *Enciclopedia Britannica*
- Márquez, V., Nava, F., Reyes, G. (2012) Multifractality in seismicity spatial distributions: Significance and possible precursory applications as found for two cases in different tectonic environments. *Pageoph* **169** (12), 2091-2105, DOI 10.1007/s00024-012-0473-9.
- Rényi, A. (1959) On the dimension and entropy of probability distributions. *Acta Mathematica* **10**, 193-215.
- Shannon, C. (1948) A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal* **27**, 379-423, 623-656.
- Turcotte, D. (1997) *Fractals and chaos in geology and geophysics*. Cambridge Univ. Press, C.