BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Teorías de torsión en categorías trianguladas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS:

PRESENTA:

García Pérez Fernando

TUTORES:

Dr. Vilchis Montalvo Ivan Fernando

Dr. Medina Bárcenas Mauricio Gabriel

Puebla, Puebla. 2021

Agradecimientos

Para empezar, me gustaría agradecer extensivamente a mi familia, especialmente a mis padres, así como mis amigos, por apoyarme y alentarme durante la realización de este trabajo y mis estudios de maestría.

Un agradecimiento singular a mis asesores; a Fernando Vilchis Montalvo por su amistad, la libertad en la elección y aproximación al tema. Así como su valiosa revisión, la cual enriqueció sustancialmente la versión final de este trabajo, debido a sus comentarios y sugerencias. De la misma manera, a Mauricio Medina Bárcenas por su amistad, su accesibilidad para dudas concernientes a este trabajo y otros cursos, así como sus valiosas revisiones y sugerencias, que se ven reflejadas en la versión final de este trabajo.

A todos mis sinodales, por el tiempo invertido en la revisión de este trabajo.

Introducción

Las categorías trianguladas surgen del estudio de la categoría derivada $D(\mathscr{C})$ construida a partir de una categoría abeliana $\mathscr{C}$. Según Keller [18], las categorías derivadas fueron un formalismo introducido por Grothendieck a inicios de los años sesenta del siglo anterior. Estas fueron necesarias para formular y probar las extensiones del Teorema de Dualidad de Serre [37]. La categoría derivada $D(\mathscr{C})$ de una categoría abeliana $\mathscr{C}$ no es necesariamente abeliana, pero si tiene una estructura "*derivada*" de la estructura abeliana de $\mathscr{C}$. Pocos años después, en 1967 las categorías trianguladas fueron introducidas en la tesis doctoral de Verdier [38], supervisada por Grothendieck. La estructura de una categoría derivada fue lo que Verdier estudió, axiomatizo y definió como la estructura "*triangulada*" de una categoría [38]. De manera independiente en la misma década Puppe [29], motivado por el estudio de la categoría estable de homotopía describió los mismos axiomas que Verdier para una categoría triangulada salvo el axioma del octaedro.

El uso de las categorías trianguladas iniciado en la escuela de geometría algebraica de Grothendieck, y en la topología algebraica por Puppe, se ha incrementado a lo largo de los años en otras áreas de la matemática, hasta nuestra actualidad. En el álgebra, los anillos son estudiados comúnmente a través de sus categorías de módulos, es decir, estudiamos un anillo R a través de la categoría de módulos sobre ese anillo, denotada $Mod(R)$. Es en el contexto de la teoría de módulos que Morita [25] en 1958, establece que dos anillos R y S son Morita equivalentes si existe una equivalencia entre las categorías $Mod(R)$ y $Mod(S)$. Un ejemplo de esto es que un anillo R es Morita equivalente al anillo de matrices de tamaño $n \times n$, denotado $M_n(R)$. La importancia de las equivalencias de Morita radica en la investigación de las propiedades invariantes bajo equivalencias de Morita. Esto es, una propiedad $\mathscr{P}$ en un anillo R es Morita invariante si todos los anillos que son Morita equivalentes a R también tienen la propiedad $\mathscr{P}$. Algunos ejemplos de propiedades Morita invariantes para un anillo son ser *simple, semisimple, Neteriano izquierdo (derecho), Artiniano izquierdo (derecho), primo*, entre otras ([20], [2]). Un ejemplo práctico de este enfoque es que puede no ser tan fácil demostrar que para un campo K el anillo de matrices $M_n(K)$ con $n \in \mathbb{N}$ es simple, es decir, demostrar que $M_n(K)$ no tiene ideales bilaterales. Pero al saber que $M_n(K)$ es Morita equivalente al campo K y ser simple es una propiedad Morita invariante con K simple, se sigue que $M_n(K)$ es un anillo simple.

En esta línea de investigación, Happel [11], Cline, Parshall y Scott [7], así como Rickard [30], generalizan la teoría de equivalencias de Morita para estudiar álgebras, estableciendo que dos anillos R y S son equivalentes de manera derivada si las categorías derivadas acotadas $D^b(Mod(R))$ y $D^b(Mod(S))$, son equivalentes como categorías trianguladas. Este enfoque permite que hablemos de propiedades invariantes bajo equivalencias derivadas. A continuación una breve lista de algunas propiedades invariantes bajo equivalencias derivadas:

(1) *El número de módulos simples no isomorfos en $Mod(R)$, en el caso que R sea una álgebra de Artin* ([40]).

(2) *La dimensión global finita* ([35], [17], [27]).

(3) *Ser una álgebra mansa dimensionalmente finita sobre un campo* ([36]).

(4) *Ser una álgebra simétrica sobre un campo* ([1]).

(5) *Ser una álgebra auto-inyectiva sobre un campo algebraicamente cerrado* ([30]).

(6) *(Co-)Homología de Hochschild y Homología ciclica* ([31], [19]).

En general, las equivalencias derivadas se establecen para dos categorías abelianas $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, esto es $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son equivalentes de manera derivada si las categorías derivadas acotadas, $D^b(\mathscr{A})$ y $D^b(\mathscr{B})$, son equivalentes como categorías trianguladas. Lo que motiva a estudiar propiedades que son invariantes bajo equivalencias derivadas cuando la propiedad en cuestión tenga sentido entre ambas categorías. De esta manera, en la tónica de la teoría de categorías, para entender alguna propiedad en en cierta álgebra o categoría abeliana uno podría pasar a otra álgebra o categoría abeliana equivalente de manera derivada, que sea más manejable. Por ejemplo, para estudiar la categoría de gavillas coherentes sobre una línea proyectiva $\mathbb{X}$, Geigle y Lenzig, utilizaron las álgebras tubulares de Ringel ([22] [9], [32]), ya que la categoría derivada de haces coherentes sobre $\mathbb{X}$ y la categoría derivada de módulos sobre una álgebra tubular son equivalentes como categorías trianguladas. Otro ejemplo fue el trabajo de Beilinson [5], quien redujo el estudio de la categoría derivada de gavillas coherentes sobre $\mathbb{P}^n$ al de una álgebra de matrices triangulares.

Lo anterior no solo busca inspirar la curiosidad en el lector, hacia el estudio de las categorías trianguladas o esclarecer hasta cierto punto la importancia de estas. Sino también ilustrar un caso fructífero, no único, de la generalización de una teoría matemática desarrollada de manera beneficiosa en cierto contexto a otro contexto. Otros ejemplos de este enfoque que son de nuestro interés son la generalización de la teoría inclinante de módulos al contexto de la teoría inclinante en categorías trianguladas [14] o la teoría de torsión en módulos y categorías abelianas estudiadas originalmente en [8] al contexto de la teoría de torsión en categorías trianguladas [6].

Dicho esto, uno de los objetivos de este trabajo es presentar una introducción a las teorías de torsión trianguladas, basándonos en el trabajo de Reiten y Beligiannis [6]. El otro objetivo de este trabajo es allanar el camino al estudio de las categorías trianguladas, pues si bien existen excelentes fuentes para su estudio como la obra de Neeman [26], su contenido puede resultar enciclopédico y se asume que el lector ya tiene cierto conocimiento del tema. O bien, algunas otras fuentes son muy buenas referencias [16], pero no desarrollan todos los detalles de las pruebas. Esto puede hacer que una primera aproximación a las categorías trianguladas resulte un tanto apabullante al lector neófito pero interesado en el tema. Es por eso que este trabajo aspira a hacer más comprensible un primer acercamiento al tema, así como servir de suplemento a otra literatura en la vertiente de las categorías trianguladas.

A lo largo de este trabajo asumimos que el lector está familiarizado con el lenguaje de la teoría de las categorías, así como el tener un conocimiento básico del álgebra homológica. De este modo, *sin que sea exhaustiva la siguiente lista, los conceptos y propiedades básicas de una categoría aditiva y abeliana, sucesión exacta corta y larga, kernel, cokernel, pull-back, push-out, productos, coproductos, Lema del Quinto, Lema de la Serpiente*; así como los de *categoria, funtor, Lema de Yoneda, adjunciones, unidades y counidades respectivas a una adjuncion*, no deben de resultar del todo desconocidas al lector. Referencias para estos temas son [21], [23], [24], [33] y [39].

Esperamos lograr nuestra empresa con éxito, despertando en el lector la curiosidad por el tema y al mismo tiempo servir de ayuda. Ofreciendo al lector el conocimiento suficiente para iniciar estudios en áreas del conocimiento más sofisticadas en el lenguaje, aparentemente *vernáculo* entre matemáticos de distintas áreas, de las categorías trianguladas.

Índice general

Agradecimientos I

Introducción III

1. Categorías trianguladas 1

1.1. Propiedades básicas de las categorías trianguladas 4

2. Localización en categorías 13

2.1. Localización en categorías aditivas 14

2.2. Localización en una categoría triangulada 46

3. Categorías Derivadas 57

4. Teorías de torsión trianguladas 77

Capítulo 1

Categorías trianguladas

Este capítulo comienza introduciendo la noción de categoría triangulada y desarrollando la teoría básica en la que se asienta el contenido de los capítulos posteriores de este trabajo. El capítulo está basado en [13] y en [15].

Empezamos con la siguiente definición:

Definición 1.0.1. *Decimos que un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ con $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías aditivas, es* ***aditivo*** *si para todo $X, Y \in \mathscr{C}$ se tiene que la asignación*

$$\phi : Hom_{\mathscr{C}}(X,Y) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(F(X),F(Y))$$

es un morfismo en la categoría de grupos abelianos, denotada Ab.

Ejemplo 1.0.2. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva y $X \in \mathscr{C}$ arbitrario, entonces el funtor covariante $Hom_{\mathscr{C}}(X,-) : \mathscr{C} \to Ab$ es aditivo. En efecto, sean $f, g : A \to B$ y $\lambda : X \to A$ morfismos en $\mathscr{C}$ entonces:*

$$Hom_{\mathscr{C}}(X, f+g)(\lambda) = (f+g)\lambda = f\lambda + g\lambda = Hom_{\mathscr{C}}(X,f)(\lambda) + Hom_{\mathscr{C}}(X,g)(\lambda).$$

Definición 1.0.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva, decimos que un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ es* ***autofuntor*** *o* ***funtor de traslación*** *si F es aditivo y existe un funtor $F^{-1} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ aditivo tal que*

$$F \circ F^{-1} = 1_{\mathscr{C}} \qquad y \qquad F^{-1} \circ F = 1_{\mathscr{C}}.$$

Definición 1.0.4. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva y $\Sigma : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ un autofuntor, un* ***triángulo*** *en $\mathscr{C}$ es una sucesión de morfismos en $\mathscr{C}$ de la siguiente forma*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X.$$

Definición 1.0.5. *Para una categoría aditiva $\mathscr{C}$ con autofuntor $\Sigma : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, se define un* ***morfismo de triágulos*** *como una terna de morfismos $\alpha := (f, g, h)$ en $\mathscr{C}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo en $\mathscr{C}$;*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & \Sigma X'.
\end{tikzcd}$$

En el caso que f, g y h fueran isomorfismos, entonces decimos que α es un ***isomorfismo de triángulos***.

Definición 1.0.6. *Una* ***categoría triangulada*** *consiste en una terna $(\mathscr{T}, \Sigma, \triangle)$ donde:*

(i) *$\mathscr{T}$ es una categoría aditiva,*

(ii) *$\Sigma : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ es un autofuntor,*

(iii) *$\triangle$ es una clase de triángulos distinguidos en $\mathscr{T}$ que satisface los siguientes axiomas:*

TR1 *(a) La clase $\triangle$ es cerrada bajo isomorfismos de triángulos,*

(b) Para cada $X \in \mathscr{T}$ se tiene que

$$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$$

pertenece a $\triangle$,

(c) Para cada morfismo $f : X \to Y$ en $\mathscr{T}$ existe algún triángulo

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

en $\triangle$,

TR2 *Si*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

pertenece a $\triangle$, entonces

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma Y.$$

pertence a $\triangle$ y viceversa,

TR3 *Dados dos triángulos en $\triangle$,*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

y

$$X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} \Sigma X',$$

tal que en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & \Sigma X'.
\end{tikzcd}$$

se tiene que $gu = u'f$*, entonces existe un morfismo* $h : Z \to Z'$ *no necesariamente único tal que* $\alpha := (f, g, h)$ *es un morfismo de triangulos,*

TR4 *Si*

$$T_1 := X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow \Sigma X,$$

$$T_2 := Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow X' \longrightarrow \Sigma Y,$$

y

$$T_3 := X \xrightarrow{vu} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow \Sigma X$$

son triángulos en $\triangle$*, entonces existe un triángulo*

$$T4 := Z' \dashrightarrow Y' \dashrightarrow X' \dashrightarrow \Sigma Z'$$

en $\triangle$ *que hace el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "1_{\Sigma X}"] \\
X \arrow[r, "vu"'] \arrow[d, "u"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma u"] \\
Y \arrow[r, "v"'] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"] & \Sigma Y \arrow[d] \\
Z' \arrow[r, dashed] & Y' \arrow[r, dashed] & X' \arrow[r, dashed] & \Sigma Z'.
\end{tikzcd}$$

El axioma ***TR4*** *es llamado usualmente el axioma del octaedro debido a que si visualizamos a un triángulo distinguido*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X,$$

como un diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[dl, "v"] \\
& Z. \arrow[ul, "w"] &
\end{tikzcd}$$

*Entonces el diagrama conmutativo en **TR4** puede ser visualizado como un octaedro, donde la parte inferior y superior de un octaedro están representadas respectivamente por los siguientes diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "vu"'] & & Z' \arrow[ll] \arrow[dl, dashed] \\
\arrow[r, phantom, "T_3"] & Y' \arrow[ul] \arrow[dr, dashed] \arrow[r, phantom, "T_4"] & \\
Z \arrow[ur] \arrow[rr] & & X', \arrow[uu, dashed]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "vu"'] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "T_1", shift right=3ex] & & Z' \arrow[ll] \\
& Y \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
Z \arrow[rr] \arrow[rr, phantom, "T_2", shift left=3ex] & & X'. \arrow[ul] \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

Observación 1.0.7. *En muchas ocasiones en la literatura de categorías trianguladas así como en este trabajo cuando ya es clara la estructura triangulada de una categoría triangulada $(\mathscr{T}, \Sigma, \triangle)$, sólo nos referiremos a dicha categoría triangulada como $\mathscr{T}$.*

Observación 1.0.8. *Ejemplificar algunas categorías trianguladas requiere que hayamos desarrollado un poco más el contenido de este trabajo. Los ejemplos que hemos desarrollado en este trabajo se encuentran en el tercer capítulo.*

1.1. Propiedades básicas de las categorías trianguladas

Observación 1.1.1. *Sea $(\mathscr{T}, \Sigma, \triangle)$ una categoría triangulada, se puede dotar a la categoría opuesta $\mathscr{T}^{op}$ de una estructura triangulada como:*

(a) El funtor $\Sigma' : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{T}^{op}$ de traslación de $\mathscr{T}^{op}$ se define como $\Sigma' = \Sigma^{-1}$,

(b) Se tiene que

$$X \xrightarrow{u^{op}} Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} \Sigma' X$$

está en $\triangle'$ si y sólo si

$$\Sigma^{-1} X \xrightarrow{w} Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{u} X$$

está en $\triangle$.

*A la terna $(\mathscr{T}^{op}, \Sigma', \triangle')$ la llamaremos **categoría triangulada opuesta**.*

Observación 1.1.2. *Sean $\mathscr{C}$ una categoría aditiva y $\Sigma : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ un funtor de traslación. Si $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathscr{C}$ tal que $F(f) = 0$, entonces $f = 0$.*

Demostración. Si $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathscr{C}$ tal que $F(f) = 0$, al tener que F es funtor de traslación se tiene la existencia de un funtor aditivo $F^{-1} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ tal que $F^{-1}F = 1_C$. De esta manera, se tiene que

$$f = 1_C(f) = (F^{-1}F^{-1})(f) = F^{-1}(F(f)) = F^{-1}(0) = 0.$$

□

Proposición 1.1.3. *Sean $(\mathscr{T}, \Sigma, \triangle)$ una categoría triangulada y*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X,$$

un triángulo en $\triangle$. Entonces $vu = 0 = wv$.

Demostración. Por **TR2**, basta ver que $vu = 0$. En efecto, por **TR1**(b), tenemos el siguiente triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X,$$

en $\mathscr{T}$. Luego, por **TR3**, podemos sumergir el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"'] & X \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y, \end{tikzcd}$$

en el siguiente morfismo de triángulos distinguidos en $\mathscr{T}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_x"'] & X \arrow[r, "0"] \arrow[d, "u"'] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, dashed, "0"] & \Sigma X \arrow[d, "1_{\Sigma X}"] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & \Sigma X. \end{tikzcd}$$

Así de la conmutatividad del diagrama anterior, se tiene que $vu = 0$.

□

Definición 1.1.4. *Sea $H : \mathscr{T} \to \mathscr{A}$ un funtor aditivo con $\mathscr{T}$ categoría triangulada y $\mathscr{A}$ categoría abeliana, decimos que H es un* ***funtor homológico*** *(para $\mathscr{T}$) si para todo triángulo distinguido*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X,$$

en $\mathscr{T}$, se tiene que

$$H(X) \xrightarrow{u^*} H(Y) \xrightarrow{v^*} H(Z)$$

es una sucesión exacta en $\mathscr{A}$, donde $H(u) = u^*$ y $H(v) = v^*$. De manera dual se define un ***funtor cohomológico*** *$H : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{A}$ (para $\mathscr{T}$) si H es funtor homológico para $\mathscr{T}^{op}$.*

Observación 1.1.5. *Sean $H : \mathscr{T} \to \mathscr{A}$ un funtor homológico y*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

un triángulo distinguido en $\mathscr{T}$. Entonces en virtud de ***TR2*** *obtenemos un sucesión de morfismos*

$$\dots \longrightarrow \Sigma^{-1}Z \xrightarrow{\Sigma^{-1}w} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma Y \longrightarrow \dots$$

Luego, al ser $H : \mathscr{T} \to \mathscr{A}$ un funtor homológico se obtiene la siguiente sucesión exacta larga

$$\dots \longrightarrow H(\Sigma^{-1}Z) \xrightarrow{(\Sigma^{-1}w)^*} H(X) \xrightarrow{u^*} H(Y) \xrightarrow{v^*} H(Z) \xrightarrow{(-\Sigma u)^*} H(\Sigma X) \longrightarrow \dots$$

Proposición 1.1.6. *Sea $\mathscr{T}$ una categoría triangulada. Para todo objeto $T \in \mathscr{T}$, se tiene que:*

(a) El funtor $Hom_{\mathscr{T}}(T, -) : \mathscr{T} \to Ab$ es homológico,

(b) El funtor $Hom_{\mathscr{T}}(-, T) : \mathscr{T}^{op} \to Ab$ es cohomológico.

Demostración. *(a)* Sea

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X,$$

un triángulo distinguido en $\mathscr{T}$ y $T \in \mathscr{T}$ arbitrario, veamos que la sucesión larga

$$Hom_{\mathscr{T}}(T, X) \xrightarrow{u^*} Hom_{\mathscr{T}}(T, Y) \xrightarrow{v^*} Hom_{\mathscr{T}}(T, Z) \longrightarrow \dots$$

es exacta. Para esto, basta ver que $Im(u^*) = Ker(v^*)$. Primero veamos que $Im(u^*) \subseteq Ker(v^*)$. En efecto, por la Proposición 1.1.3, tenemos que $vu = 0$ y como $Hom_{\mathscr{T}}(T,-)$ es un funtor se tiene que $v^*u^* = (vu)^* = 0$. Por lo tanto, $Im(u^*) \subseteq Ker(v^*)$. Ahora veamos que $Ker(v^*) \subseteq Im(u^*)$, para esto se toma $f \in Ker(v^*)$, esto es, $f \in Hom_{\mathscr{T}}(T,Y)$ y $v^*(f) = vf = 0$. Luego, por **TR2**, **TR3** Y **TR1**(b) tenemos que existe un morfismo $h' : \Sigma T \to \Sigma X$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma T \arrow[r, "-1_{\Sigma T}"] \arrow[d, dashed, "h'"'] & \Sigma T \arrow[d, "\Sigma f"] \\
Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & \Sigma X \arrow[r, "-\Sigma u"'] & \Sigma Y.
\end{tikzcd}$$

Como $\Sigma : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ es autofuntor, entonces existe un único $h \in Hom_{\mathscr{T}}(T,X)$ tal que $\Sigma(h) = h'$, y así $\Sigma(f) = \Sigma(u)\Sigma(h) = \Sigma(uh)$. En consecuencia, $f = uh$ con $h \in Hom_{\mathscr{T}}(T,X)$. Por lo tanto, $f \in Im(u*)$.

(b) Análoga a la prueba de *(a)* en la categoría triangulada opuesta $\mathscr{T}^{op}$.

□

Proposición 1.1.7. *Sean $\mathscr{T}$ una categoría triangulada y un morfismo de triángulos distinguidos*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma f"] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & \Sigma X',
\end{tikzcd}$$

en $\mathscr{T}$, tal que dos de los morfismo verticales, f, g y h son isomorfismos. Entonces el tercer morfismo también es isomorfismo.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supóngase que f y g son isomorfismos. Luego por la Proposición 1.1.6 se tiene para $Z' \in \mathscr{T}$, el siguiente morfismo de sucesiones exactas largas

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & Hom_{\mathscr{T}}(Z',X) \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "f^*"'] & Hom_{\mathscr{T}}(Z',Y) \arrow[r, "v^*"] \arrow[d, "g^*"'] & Hom_{\mathscr{T}}(Z',Z) \arrow[r, "w^*"] \arrow[d, "h^*"'] & Hom_{\mathscr{T}}(Z',\Sigma X) \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma f^*"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & Hom_{\mathscr{T}}(Z',X') \arrow[r, "(u')^*"'] & Hom_{\mathscr{T}}(Z',Y') \arrow[r, "(v')^*"'] & Hom_{\mathscr{T}}(Z',Z') \arrow[r, "(w')^*"'] & Hom_{\mathscr{T}}(Z,\Sigma X') \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

De esta manera, al tener que $f^*, g^*, \Sigma f^*$ y Σg^* son isomorfismos en *Ab*, se obtiene por el Lema del Quinto (veáse Proposición 2.72 en [33]) que h^* es isomorfismo. Entonces para $1_{Z'}$ tenemos que existe un morfismo $q \in Hom_{\mathscr{T}}(Z', Z)$ tal que $hq = 1_{Z'}$. De manera análoga, ocupando el funtor $Hom_{\mathscr{T}}(-, Z')$ se construye un inverso izquierdo de h, probándose que h es un isomorfismo.

□

Proposición 1.1.8. *Sean $\mathscr{T}$ una categoría triangulada,*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

un triángulo distinguido en $\mathscr{T}$ y $f : A \to Y$, $g : Y \to A'$, dos morfismos en $\mathscr{T}$. Entonces se satisface lo siguiente:

(a) Si $vf = 0$, entonces existe un morfismo $\tau : A \to X$ tal que $f = u\tau$,

(b) Si $gu = 0$, entonces existe un morfismo $\tau' : Z \to A'$ tal que $g = \tau' v$.

Demostración. (a) Aplicando el funtor homólogico $Hom_{\mathscr{T}}(A, -) : \mathscr{T} \to Ab$ al triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$$

se obtiene por la Proposición 1.1.6 la siguiente sucesión exacta larga

$$\ldots \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(A, X) \xrightarrow{u^*} Hom_{\mathscr{T}}(A, Y) \xrightarrow{v^*} Hom_{\mathscr{T}}(A, Z) \xrightarrow{w^*} Hom_{\mathscr{T}}(A, \Sigma X) \longrightarrow \ldots$$

Luego, como $vf = 0$ por hipótesis, se tiene que $f \in Ker(v^*)$. Pero $Ker(v^*) = Im(u^*)$, entonces $f \in Im(u^*)$ y, por tanto existe $\tau \in Hom_{\tau}(A, X)$ tal que $u\tau = f$.

(b) La prueba es dual a la del inciso (a).

□

Es interesante mencionar que la Proposición 1.1.8 establece una analogía a la propiedad universal del kernel y el cokernel en una categoría abeliana. Pues si pensamos a la pareja (X, u) como el kernel del morfismo v, al tener que $fv = 0$, obtenemos la existencia de un morfismo f, no necesariamente único tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \\
A \arrow[u, "\tau"] \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

La siguiente definición nos permite describir una asignación funtorial entre dos categorías trianguladas que preserve la estructura abeliana entre ellas.

Definición 1.1.9. *Sean $(\mathscr{T}_1,\Sigma_1,\triangle_1)$ y $(\mathscr{T}_2,\Sigma_2,\triangle_2)$ categorías trianguladas, un* ***funtor triangulado*** *$F:\mathscr{T}_1\to\mathscr{T}_2$ es un funtor que satisface:*

(a) *$F:\mathscr{T}_1\to\mathscr{T}_2$ es aditivo,*

(b) *hay un isomorfismo natural*

$$\eta := \{\eta_X : F(\Sigma_1(X)) \to \Sigma_2(F(X))\}_{X\in Obj(\mathscr{T}_1)},$$

tal que para todo

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma_1 X$$

en $\triangle_1$, se tiene que

$$FX \xrightarrow{F(u)} FY \xrightarrow{F(v)} FZ \xrightarrow{\eta_X\circ F(w)} \Sigma_2 FX$$

es un triángulo en $\triangle_2$.

Observación 1.1.10. *Al igual que las categorías trianguladas, los ejemplos de funtores triangulados no son triviales. En el capítulo 3 y 5 se encuentran algunos ejemplos.*

Proposición 1.1.11. *Sean $\mathscr{T}_1 := (\mathscr{T}_1,\Sigma_1,\triangle_1)$ y $\mathscr{T}_2 := (\mathscr{T}_2,\Sigma_2,\triangle_2)$ categorías trianguladas y $F:\mathscr{T}_1\to\mathscr{T}_2$ funtor triangulado. Si $G:\mathscr{T}_2\to\mathscr{T}_1$ es un funtor tal que G es funtor adjunto derecho a F, es decir $F\dashv G$, entonces G es un funtor triangulado.*

Demostración. Primero veamos que hay un isomorfismo natural $G\Sigma_2\cong\Sigma_1 G$. Como F es funtor triangulado existen isomorfismos naturales $F\Sigma_1\cong\Sigma_2 F$ y $F\Sigma_1^{-1}\cong\Sigma_2^{-1}F$.

De esta manera para todo $X,Y\in\mathscr{T}_1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
Hom_{\mathscr{T}_1}(X,G(\Sigma_2(Y))) &\cong Hom_{\mathscr{T}_2}(F(X),\Sigma_2(Y))\\
&\cong Hom_{\mathscr{T}_2}(\Sigma_2^{-1}(F(X)),Y)\\
&\cong Hom_{\mathscr{T}_2}(F(\Sigma_1^{-1}(X)),Y)\\
&\cong Hom_{\mathscr{T}_1}(\Sigma_1^{-1}(X),G(Y))\\
&\cong Hom_{\mathscr{T}_1}(X,\Sigma_1(G(Y))).
\end{aligned}$$

Luego, por la funtorialidad de $Hom_{\mathscr{T}_1}(X,-)$ se sigue por el Lema de Yoneda que $G\Sigma_2\cong\Sigma_1 G$.

Ahora veamos que el funtor $G:\mathscr{T}_2\to\mathscr{T}_1$ asigna a cualquier triángulo en $\triangle_2$ un triángulo en $\triangle_1$. Sea

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma_2 A, \tag{1}$$

un triángulo distinguido en $\mathscr{T}_2$. Por otro lado, el morfismo $G(A) \to G(B)$ puede ser completado por **TR1**(c) a un triángulo distinguido

$$G(A) \longrightarrow G(B) \longrightarrow C_0 \longrightarrow G(\Sigma_2(A)) \cong \Sigma_1(G(A)). \tag{2}$$

Luego, consideramos la counidad de la adjunción $F \dashv G$, a saber $\varepsilon : FG \to 1_{\mathscr{T}_2}$ y consideramos las siguientes componentes de la counidad $\varepsilon_A : FG(A) \to A$ y $\varepsilon_B : FG(B) \to B$. Luego, por la naturalidad de ε tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} FG(A) \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ FG(B) \arrow[r, "\varepsilon_B"'] & B. \end{tikzcd}$$

Así, aplicando el funtor triangulado F al triángulo (2) se obtiene un morfismo de triángulos distinguidos

$$\begin{tikzcd} FG(A) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_A"'] & FG(B) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_B"] & F(C_0) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\xi"] & \Sigma_2(FG(A)) \arrow[d, "\Sigma_2(\varepsilon_A)"] \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & \Sigma_2(A), \end{tikzcd}$$

donde el morfismo ξ se obtiene mediante **TR3**. Aplicando el funtor G a todo el diagrama anterior y ocupando la unidad de la adjunción, $\eta : 1_{\mathscr{T}_1} \to GF$, en la parte superior del diagrama anterior obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G(A) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{G(A)}"] \arrow[dd, bend right, equal] & G(B) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{G(B)}"] \arrow[dd, bend right, equal] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{C_0}"] & \Sigma_2(G(A)) \arrow[d, "\eta_{\Sigma_2(G(A))}"] \\
GFG(A) \arrow[r] \arrow[d, "G(\varepsilon_A)"] & GFG(B) \arrow[r] \arrow[d, "G(\varepsilon_B)"] & GF(C_0) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "G(\xi)"] & \Sigma_2(GFG(A)) \arrow[d, "\Sigma_2(G(\varepsilon_A))"] \\
G(A) \arrow[r] & G(B) \arrow[r] & G(C) \arrow[r] & \Sigma_2(G(A)),
\end{tikzcd} \tag{2}$$

donde los morfismos verticales curveados son identidades debido a que la equivalencia de adjunción ($F \dashv G$) mediante la unidad y counidad establece que se satisfacen las identidades triangulares:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "1_F"'] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\
& F,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "1_G"'] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\
& G.
\end{tikzcd}$$

Ahora, para un objeto arbitrario X_0 en $\mathscr{T}_2$, aplicamos el funtor $Hom_{\mathscr{T}_2}(X_0,-)$ al diagrama en (2) se obtiene el siguiente diagrama conmutativo en **Ab**

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & Hom_{\mathscr{T}_2}(X_0,G(A)) \arrow[r] \arrow[d, "{1_{G(A)}}^*"'] & Hom_{\mathscr{T}_2}(X_0,G(B)) \arrow[r] \arrow[d, "{1_{G(B)}}^*"'] & Hom_{\mathscr{T}_2}(X_0,C_0) \arrow[r] \arrow[d, "h^*"'] & Hom_{\mathscr{T}_2}(X_0,\Sigma(G(A))) \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma({1_{G(A)}}^*)"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & Hom_{\mathscr{T}_2}(X_0,G(A)) \arrow[r] & Hom_{\mathscr{T}_2}(X_0,G(B)) \arrow[r] & Hom_{\mathscr{T}_2}(X_0,G(C)) \arrow[r] & Hom_{\mathscr{T}_2}(X_0,\Sigma(G(A))) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

De esta manera, por el Lema del Quinto en Ab se obtiene un isomorfismo $Hom_{\mathscr{T}_2}(X_0,C_0) \cong Hom_{\mathscr{T}_2}(X_0,G(C))$, concluyendo que $G(\xi)\eta_{C_0} : C_0 \to GF(C_0) \to G_C$ en (2) es un isomorfismo. Mostrando que

$$G(A) \longrightarrow G(B) \longrightarrow G(C) \longrightarrow \Sigma_2 G(A),$$

es un triángulo distinguido $\mathscr{T}_1$, probándose que $G : \mathscr{T}_2 \to \mathscr{T}_1$ es un funtor triangulado.

$\square$

Capítulo 2

Localización en categorías

Sean $\mathscr{C}$ una categoría y W una clase de morfismos en $\mathscr{C}$. El objetivo de una *localización* en $\mathscr{C}$ es construir una categoría $\mathscr{C}_W$ donde los morfismos en W sean isomorfismos. Podemos formalizar esta idea mediante la siguiente definición:

Definición 2.0.1. *La localización de una categoría $\mathscr{C}$ mediante una clase de morfismos W, es una pareja $(\mathscr{C}_W, T)$, donde $\mathscr{C}_W$ es una categoría y $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_W$ un funtor, que satisfacen lo siguiente:*

- *Para todo morfismo $w \in W$, se tiene que $T(w)$ es un isomorfismo en $\mathscr{C}_W$.*
- *El funtor $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_W$ es universal, esto es, si existe otra categoría $\mathscr{D}$ y un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, tal que $F(w)$ es isomorfismo en $\mathscr{D}$ para todo $w \in W$. Entonces, existe un único funtor $G : \mathscr{C}_W \to \mathscr{D}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F"'] & \mathscr{C}_W \arrow[dl, dashed, "G"] \\ \mathscr{D}. & \end{tikzcd}$$

Si $\mathscr{C}$ es una categoría pequeña, esto es $Obj(\mathscr{C})$ es un conjunto y en consecuencia

$$Morf(\mathscr{C}) = \bigcup_{(A,B) \in Obj(\mathscr{C}) \times Obj(\mathscr{C})} Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$$

es un conjunto, existe un proceso de localización de $\mathscr{C}$ mediante una clase de morfismos W, conocido como la *Localización de Gabriel-Zisman*. El lector interesado puede encontrar en [10] p.145, un esbozo del proceso de esta localización.

La sección siguiente y el primer objetivo de este capítulo es responder la siguiente pregunta: ¿Podemos dar una localización de $\mathscr{C}$, en el caso que $\mathscr{C}$ no sea una categoría pequeña?. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, sin embargo deberemos pedirle a la clase de morfismos W ciertas condiciones.

También es natural preguntarse si para una categoría $\mathscr{C}$ con cierta estructura, nuestra localización $(\mathscr{C}_W, T)$ es tal que $\mathscr{C}_W$ preserva la estructura de $\mathscr{C}$. Es de nuestro particular interés, y el segundo objetivo de este capítulo formular un proceso de localización que preserve la estructura aditiva y triangulada de una categoría.

2.1. Localización en categorías aditivas

Definición 2.1.1. *Sean $\mathscr{C}$ una categoría y W una clase de morfismos en $\mathscr{C}$. Decimos que W es un* ***sistema multiplicativo*** *si:*

(a) el morfismo $1_X \in W$ para todo $X \in Obj(W)$.

(b) para cualquier par de morfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ en W, se tiene que $gf \in W$.

Definición 2.1.2. *Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $W \subseteq Mor(\mathscr{C})$ un sistema multiplicativo. Se dice que la subclase W satisface las condiciones* ***Ore a izquierda****, o simplemente que W* ***es de Ore a izquierda*** *si:*

(a) Todo diagrama en $\mathscr{C}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & X' \\ Y & \end{tikzcd}$$

con $w \in W$ puede ser completado a un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & X' \arrow[d, "w'"] \\ Y \arrow[r] & Y' \end{tikzcd}$$

con $w' \in W$.

(b) Para cada par de morfismos $f, g : X \to Y$ para los cuales existe $v : X' \to X$ con $v \in W$ tal que $fv = gv$, existe $v' : Y \to Y'$ en W tal que $v'f = v'g$.

De manera dual, podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.1.3. *Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $W \subseteq Mor(\mathscr{C})$ un sistema multiplicativo. Se dice que la clase W satisface las condiciones de **Ore a derecha** o simplemente que W **es de Ore a derecha** si:*

(a) Todo diagrama en $\mathscr{C}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "w"'] & Y \end{tikzcd}$$

con $w \in W$ puede ser completado a un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "w'"] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "w"'] & Y \end{tikzcd}$$

con $w' \in W$.

(b) Para cada par de morfismos $f, g : X \to Y$ para los cuales existe $v : Y \to Y'$ con $v \in W$ tal que $vf = vg$, existe $v' : X' \to X$ tal que $fv' = gv'$.

Diremos que un sistema multiplicativo $W \subseteq Mor(\mathscr{C})$ satisface las **Condiciones de Ore**, o bien W es de Ore, si se satisfacen las condiciones 2.1.2 y 2.1.3 de manera simultánea.

La siguiente proposición nos ayudará a proporcionar una caracterización para la segunda condición de Ore en caso de que la categoría $\mathscr{C}$ sea aditiva.

Proposición 2.1.4. *Sean $\mathscr{C}$ una categoría aditiva, $f, g \in Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$ y W un sistema multiplicativo. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

Propiedad 1.-

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Existe un morfismo $w : Y \to Y'$ en W tal que $wf = wg$.

(b) Existe un morfismo $v : X' \to X$ en W tal que $fv = gv$.

Propiedad 2.-

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) *Si* $wf = 0$ *para algún* $w : Y \to Y'$*, entonces existe un morfismo* $v : X' \to X$ *en* W *tal que* $fv = 0$.

(ii) *Si* $fv = 0$ *para algún* $v : X' \to X$*, entonces existe un morfismo* $w : Y \to Y'$ *en* W *tal que* $wf = 0$.

Demostración. Veamos primero que $(i) \implies [(a) \implies (b)]$, por lo que supondremos que hay un morfismo $w : Y \to Y'$ en W tal que $wf = wg$ y por la aditividad de $\mathscr{C}$ se tiene que $w(f-g) = 0$. De esta manera, usando (i) se obtiene la existencia de un morfismo $v : X' \to X$ en W tal que $(f-g)v = 0$ y por tanto $fv = gv$.

Ahora veamos que $[(a) \implies (b)] \implies (i)$, para esto supongamos que $wf = 0$ con $w : Y \to Y'$, luego $wf = w0$ que al satisfacer (a) implica la existencia de un morfismo $v : X' \to X$ en W tal que $fv = 0v = 0$.

Acabamos de demostrar $[(a) \implies (b)] \iff (i)$. De forma análoga se puede demostrar que $[(b) \implies (a)] \iff (ii)$. Por lo que $[(a) \iff (b)] \iff [(i) \iff (ii)]$.

□

Ejemplo 2.1.5. *Sea* R *un anillo conmutativo con* 1*, podemos pensar a* R *como una categoría de la siguiente manera:*

(1) *Obj(R):=*$\{\bullet\}$.

(2) *Mor(R)=R.*

Donde la ley de composición para cualesquiera $r, s \in Mor(R) = R$ *está dada por la operación multiplicación del anillo R. Es decir,* $r \circ s = rs$ *para cualesquiera* $r, s \in R$.

Si $S \subset R$ *es un subconjunto multiplicativo del anillo R (veáse [3], p.36), entonces para la categoría R se tiene que* $S \subset Mor(R) = R$ *es un sistema multiplicativo que satisface las condiciones de Ore.*

Demostración. No es difícil ver que $S \subset Mor(R) = R$ satisface la definición 2.1.1.

Veamos que $S \subset Mor(R) = R$ satisface las condiciones de Ore. Para esto, consideramos un diagrama en la categoría R

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "r"] \arrow[d, "s"'] & \bullet \\ \bullet, & \end{tikzcd}$$

con $s \in S$. Buscamos morfismos $s', r' \in Mor(R)$ tal que $r' \circ s = s' \circ r$ con $s' \in S \subset Mor(R) = R$, para esto tomamos $s = s'$ y $r' = r$. Luego, por la conmutatividad del anillo R y la composición en la categoría R obtenemos:

$$r' \circ s = r's = sr' = s'r = s' \circ r.$$

Ahora, si r_1 y r_2 son morfismos en R, para los cuales existe un morfismo $s \in S \subset Mor(R) = R$ tal que $r_1 \circ s = r_2 \circ s$. Luego, tomando $s' = s$ tenemos por la conmutatividad del anillo R y la composición en la categoría R que:

$$s' \circ r_1 = s'r_1 = r_1s' = r_1s = r_2s = r_2s' = s'r_2 = s' \circ r_2.$$

Hemos probado que $S \subset Mor(R) = R$ satisface las condiciones de Ore a izquierda. La prueba de que $S \subset Mor(R) = R$ satisface las condiciones de Ore a derecha es análoga.

$\square$

Definición 2.1.6. *Decimos que una subcategoría plena $\mathscr{D}$ de una categoría abeliana $\mathscr{C}$ es de **Serre** si para toda sucesión exacta en $\mathscr{C}$:*

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$$

$X \in \mathscr{D}$ si y sólo si $X', X'' \in \mathscr{C}$.

No es difícil probar lo siguiente:

Observación 2.1.7. *Una subcategoría $\mathscr{D}$ de Serre, de una categoría abeliana $\mathscr{C}$ satisface lo siguiente:*

(P1) Si $X \cong X'$ con $X \in \mathscr{D}$, entonces $X' \in \mathscr{D}$;

(P2) si $X, Y \in \mathscr{D}$, entonces $X \oplus Y \in \mathscr{D}$;

(P3) si $X \in \mathscr{D}$, entonces cualquier subobjeto u objeto cociente de X también está en $\mathscr{D}$.

Para nuestro siguiente ejemplo de un sistema multiplicativo que satisface las condiciones de Ore, necesitamos la siguiente dualización de de la Proposición 13.1 de [24] :

Proposición 2.1.8. *Sea $\mathscr{C}$ es una categoría abeliana. Y consideramos el siguiente diagrma conmutativo de un push-out (f, g):*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g'"] \\ Z \arrow[r, "f'"'] & P. \end{tikzcd}$$

Entonces, el diagrama anterior se puede extender a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "g'"] & Coker(f) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ Z \arrow[r, "f'"'] & P \arrow[r, "\pi_2"'] & Coker(f') \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

con filas exactas.

También necesitaremos la siguiente dualización del Lema 5.3 de la sección 2.5 de [28]:

Lema 2.1.9. *Sea $\mathscr{C}$ es una categoría abeliana. Y consideramos el siguiente diagrma conmutativo de un push-out (f,g):*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g'"] \\ Z \arrow[r, "f'"'] & P. \end{tikzcd}$$

Entonces, el diagrama anterior se puede extender a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Ker(f) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "s"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g'"] \\ 0 \arrow[r] & Ker(f') \arrow[r, "j"'] & Z \arrow[r, "f'"'] & P. \end{tikzcd}$$

Donde las filas son exactas y $s : Ker(f) \to Ker(f')$ es un epimorfismo.

Ejemplo 2.1.10. *Si $\mathscr{D}$ es una subcategoría de Serre en una categoría abeliana $\mathscr{C}$, podemos definir la siguiente clase de morfismos:*

$$W := \{f \in Mor(\mathscr{C}) \,|\, Ker(f), Coker(f) \in \mathscr{D}\}.$$

Entonces, $W \subset Mor(\mathscr{C})$ es un sistema multiplicativo que satisface las condiciones de Ore.

Demostración. Veamos primero que W es un sistema multiplicativo. Para esto, vamos a verificar que se satisfacen las condiciones de la Definición 2.1.1.

(a) Sea $X \in \mathscr{D}$, entonces para el isomorfismo $1_X : X \to X$ se tiene que

$$Ker(1_X) = Coker(1_X) = 0.$$

Pero $0 \in \mathscr{D}$, por (P1) Y (P3) de la Observación 2.1.7, probándose que $1_X \in W$ para todo $X \in \mathscr{D}$.

(b) Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ morfismos en W, luego por el Lema de la Serpiente (véase [39], p.11), se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & Ker(gf) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, hook] & Ker(g) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, hook] & Coker(f) \arrow[d, equal] \arrow[dddll, squiggly] & \\
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "gf"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Coker(f) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & Coker(gf) \arrow[r, "\eta"] & Coker(g) \arrow[r] & 0, &
\end{tikzcd}$$

con un morfismo de conexión $\delta : Coker(f) \to Coker(gf)$. Además, del hecho que $Ker(f)$ es un subobjeto de $Ker(gf)$, se dispone de una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow Ker(f) \xrightarrow{\alpha} Ker(gf) \xrightarrow{\beta} Ker(g) \xrightarrow{\gamma} Coker(f) \overset{\delta}{\rightsquigarrow} Coker(gf) \xrightarrow{\eta} Coker(g) \longrightarrow 0.$$

Así, truncando en dos la sucesión exacta anterior, se obtienen las siguientes sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow Ker(f) \xrightarrow{\alpha} Ker(gf) \xrightarrow{\beta} Ker(g) \tag{1}$$

y

$$Coker(f) \xrightarrow{\delta} Coker(gf) \xrightarrow{\eta} Coker(g) \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Veamos que $Ker(gf)$ y $Coker(gf)$ están en $\mathscr{D}$. Por un lado, de (1) obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow Im(\beta) \longrightarrow Ker(g) \longrightarrow \frac{Ker(g)}{Im(\beta)} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

Con $Ker(g) \in \mathscr{D}$ y por tanto $Im(\beta) \in \mathscr{D}$ al ser $\mathscr{D}$ una subcategoría de Serre.

Por otro lado, de (2) obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow Ker(\delta) \longrightarrow Coker(f) \xrightarrow{\delta} Coker(gf) \longrightarrow 0 \tag{4}$$

Con $Coker(f) \in \mathscr{D}$ y por tanto $Coker(gf) \in \mathscr{D}$ al ser $\mathscr{D}$ una subcategoría de Serre.

Finalmente, al tener una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow Ker(f) \longrightarrow Ker(gf) \xrightarrow{\beta} Im(\beta) \longrightarrow 0. \tag{5}$$

Por tanto, $Ker(gf) \in \mathscr{D}$. Lo que prueba que $gf \in W$.

Ahora veamos que el sistema multiplicativo W satisface las condiciones de Ore, para esto demostraremos las condiciones de Ore únicamente a izquierda pues la prueba a derecha es análoga.

(a) Sean

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ Z, & \end{tikzcd}$$

morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $f \in W$. Luego, al considerar el push-Out de la pareja (f,g) obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g'"] \\ Z \arrow[r, "f'"'] & P. \end{tikzcd}$$

Veamos que $f' \in W$, es decir, $Ker(f'), Coker(f') \in \mathscr{D}$. Por un lado, tenemos por la Proposición 2.1.8, el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "g'"] & Coker(f) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ Z \arrow[r, "f'"'] & P \arrow[r, "\pi_2"'] & Coker(f') \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $Coker(f') \in \mathscr{D}$. Por otro lado, tenemos por el Lema 2.1.9, el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Ker(f) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "s"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g'"] \\ 0 \arrow[r] & Ker(f') \arrow[r, "j"'] & Z \arrow[r, "f'"'] & P \end{tikzcd}$$

Donde las filas son exactas y $s : Ker(f) \to Ker(f')$ es un epimorfismo. Así, considerando la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Ker(s) \xrightarrow{k} Ker(f) \xrightarrow{s} Ker(f') \longrightarrow 0,$$

tenemos que $Ker(f') \in \mathscr{D}$, pues $Ker(f) \in \mathscr{D}$ con $\mathscr{D}$ subcategoría de Serre en $\mathscr{C}$.

(b) Como $\mathscr{C}$ es aditiva al ser abeliana, veremos que se satisface (ii) de la Proposición 2.1.4. Esto es demostrar que si la composición de morfismos en $\mathscr{C}$,

$$X' \xrightarrow{v} X \xrightarrow{f} Y,$$

es tal que $fv = 0$ con $v \in W$, entonces existe un morfismo $w \in W$ tal que $wf = 0$. Consideremos el cokernel de f, entonces la composición de los morfismos

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{w} Coker(f)$$

es tal que $wf = 0$. Veamos que $w : Y \to Coker(f) \in W$. En efecto, como w es epimorfismo se sigue que $Coker(w) = 0 \in \mathscr{D}$. Por otro lado, como $wf = 0$, se tiene que $Coim(f) \subset Coker(w)$ con $Coker(w) \in \mathscr{D}$. Así, de (P3) en la Observación 2.1.7, se sigue que $Coim(f) \in \mathscr{D}$. Luego, al ser $\mathscr{C}$ abeliana tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Ker(f) \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k'"'] & Y \arrow[r, "w"] \arrow[d, "w'"] & Coker(f) \arrow[r] & 0 \\ & & Coker(k) \arrow[r, "\overline{f}"'] & Ker(w), & & \end{tikzcd}$$

con $\overline{f}$ un isomorfismo y donde $Coim(f) := Coker(k)$ e $Im(f) := Ker(w)$. (véase sección 2.2 y 2.3 de [28]) Así, $Ker(w) \cong Coim(f) \in \mathscr{D}$. Probándose que $w \in W$.

$\square$

A partir de ahora para hacer más fácil la lectura de este trabajo al lector, cuando tengamos diagramas en una categoría $\mathscr{C}$ con una subclase $W \subset Mor(\mathscr{C})$ que es de Ore a izquierda, o a derecha o ambas; una flecha ondulada $\rightsquigarrow$ denotará un morfismo en W mientras que una flecha recta $\longrightarrow$ denotará cualquier morfismo en $\mathscr{C}$.

Definición 2.1.11. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría arbitraria y $W \subset Mor(\mathscr{C})$ que satisface las condiciones de Ore a izquierda. Un $W-$techo a izquierda de objetos X a Y en $\mathscr{C}$ es un diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w"] \\ & Z, & \end{tikzcd}$$

con $w \in W,\ f \in Mor(\mathscr{C})$ y el codominio de ambos morfismos coincide. Denotaremos a este $W-$techo como la pareja (f,w).

La manera en la que podemos pensar a un $W-$techo a izquierda (f,w) de objetos X a Y en $\mathscr{C}$ es como una "fracción izquierda" $w^{-1}f$.

De manera análoga para una categoría $\mathscr{C}$ arbitraria y una subclase $W \subset Mor(\mathscr{C})$ que satisface las condiciones de de Ore a derecha, se puede definir un $W-$techo a derecha de los objetos X y Y en $\mathscr{C}$ como un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} X & & Y \\ & Z, \arrow[ul, squiggly, "w"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

con $w \in W$, $f \in Mor(\mathscr{C})$ y el dominio de ambos morfismos coincide. El diagrama anterior será denotado como la pareja (w,f).

Cabe mencionar que el nombre "techo" para los diagramas anteriores se debe a que en la mayor parte de la literatura especializada en el tema como [10], los diagramas para los $W-$ techos tanto a izquierda como derecha están invertidos asemejando techos o tejados.

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ \bullet & & \bullet. \end{tikzcd}$$

También es importante mencionar que en una buena parte de la literatura sobre el tema como [3], donde se asume que las pruebas se desarrollan trabajando con $W-$techos a derecha para una categoría arbitraria $\mathscr{C}$ y $W \subset Mor(\mathscr{C})$ satisface las condiciones de Ore a izquierda y derecha. Sin embargo, en esta sección desarollaremos la teoría de categoría de fracciones cuando $W \subset Mor(\mathscr{C})$ satisface las condiciones de Ore a izquierda. Es decir, en las demostraciones siguientes vamos a dar por hecho que estamos trabajando con una categoría $\mathscr{C}$ arbitraria y una subclase $W \subset Mor(\mathscr{C})$ satisface las condiciones de Ore a izquierda. Aunque trabajaremos con $W-$techos a izquierda las pruebas siguientes se pueden dualizar a $W-$techos a derecha. Esta sección está basada principalmente en [10] y [28].

Definición 2.1.12. *Diremos que dos $W-$techos izquierdos (f,w) y (f',w') están relacionados si y sólo si existen morfismos $u : Z \to Z''$ y $v : Z' \to Z''$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "f'"] & & & & Y \arrow[dlll, squiggly, "w"'] \arrow[dl, squiggly, "w'"] \\
& Z \arrow[dr, "u"'] & & Z' \arrow[dl, "v"] & \\
& & Z''. & &
\end{tikzcd}$$

Y además, $uw = vw' \in W$. En el caso de que (f,w) y (f',w') estén relacionados, lo denotaremos como $(f,w) \sim (f',w')$.

Lema 2.1.13. *La relación entre $W-$techos izquierdos definida anteriormente es una relación de equivalencia en la colección de $W-$techos a izquierda de objetos X a Y en $\mathscr{C}$.*

Demostración. (a) **Reflexividad.-** Sea (f,w) un $W-$techo de X a Y,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w"] \\
& Z. &
\end{tikzcd}$$

Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "1_Z"'] & & Z \arrow[dl, squiggly, "1_Z"] \\
& Z, &
\end{tikzcd}$$

se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "f"] & & & & Y \arrow[dlll, squiggly, "w"'] \arrow[dl, squiggly, "w"] \\
& Z \arrow[dr, "1_Z"'] & & Z \arrow[dl, "1_Z"] & \\
& & Z. & &
\end{tikzcd}$$

Por tanto, $(f,w) \sim (f,w)$.

(b) **Simetría.-** Sean (f,w) y (g,w') $W-$techos de X a Y tales que $(f,w) \sim (g,w')$. Esto es, para el $W-$techo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w"] \\ & Z', & \end{tikzcd}$$

y el $W-$techo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "g"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w'"] \\ & Z', & \end{tikzcd}$$

existen morfismos, $u : Z \to Z''$ y $v : Z' \to Z''$, tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "g" near start] & & & & Y \arrow[dlll, squiggly, "w"' near start] \arrow[dl, squiggly, "w'"] \\ & Z \arrow[dr, "u"'] & & Z' \arrow[dl, "v"] & \\ & & Z'', & & \end{tikzcd}$$

con $uw = vw' \in W$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "g"'] \arrow[drrr, "f" near start] & & & & Y \arrow[dlll, squiggly, "w'"' near start] \arrow[dl, squiggly, "w"] \\ & Z' \arrow[dr, "v"'] & & Z'' \arrow[dl, "u"] & \\ & & Z''. & & \end{tikzcd}$$

Probándose que $(g,w') \sim (f,w)$.

(b) **Transitividad.-** Sean $(f,w),(g,u)$ y $(h,v,)$ $W-$techos de X a Y tales que $(f,w) \sim (g,u)$ y $(g,u) \sim (h,v)$. Por un lado, al tener que $(f,w) \sim (g,u)$ se obtiene la existencia de dos morfismos, $a : Z \to K$ y $b : Z' \to K$, tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "g" near start] & & & & Y \arrow[dlll, squiggly, "w"' near start] \arrow[dl, squiggly, "u"] \\ & Z \arrow[dr, "a"'] & & Z' \arrow[dl, "b"] & \\ & & K, & & \end{tikzcd} \tag{1}$$

con $aw = bu \in W$. Por otro lado, del hecho que $(g,u) \sim (h,v)$ se obtiene la existencia de dos morfismos $c : Z' \to Q$ y $d : Z'' \to Q$, tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "g"'] \arrow[rrrd, "h"] & & & & Y \arrow[llld, squiggly, "u"'] \arrow[dl, squiggly, "v"] \\
 & Z' \arrow[dr, "c"'] & & Z'' \arrow[dl, "d"] & \\
 & & Q, & &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

con $cu = dv \in W$. Concatenando el diagrama (2) sobre el diagrama (1) se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & Q & & \\
 & Z' \arrow[ur, "c"] & & Z'' \arrow[ul, "d"'] & \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[rrru, "h"'] \arrow[dr, "f"'] \arrow[rrrd, "g"] & & & & Y \arrow[lllu, squiggly, "u"] \arrow[ul, squiggly, "v"'] \arrow[llld, squiggly, "w"'] \arrow[dl, squiggly, "u"] \\
 & Z \arrow[dr, "a"'] & & Z' \arrow[dl, "b"] & \\
 & & K. & &
\end{tikzcd}$$

Considerando el diagrama formado por los morfismos $dv : Y \to Q$ y $bu : Y \to K \in W$, y ser W de Ore a izquierda por hipótesis se tiene la existencia de dos morfismos $\alpha : Q \to L$ y $\beta : K \to L$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "bu"] \arrow[d, "dv"'] & K \arrow[d, dashed, "\beta"] \\
Q \arrow[r, dashed, "\alpha"'] & L.
\end{tikzcd}$$

Luego, tenemos que $(\alpha c)u = \alpha(cu) = \alpha(dv) = \beta(bu) = (\beta b)u$, esto significa que existe un morfismo $\phi : L \to T$ en W tal que $\phi(\alpha c) = \phi(\beta b)$. Finalmente, veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "h" near start] & & & & Y \arrow[dlll, squiggly, "w"' near start] \arrow[dl, squiggly, "v"] \\
& Z \arrow[dr, "\phi\beta a"'] & & Z'' \arrow[dl, "\phi\alpha d"] & \\
& & T, & &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por un lado tenemos que

$$(\phi\beta a)f = \phi\beta(af) = (\phi\beta)(bg) = (\phi\beta b)g = (\phi\alpha c)g = (\phi\alpha)cg = (\phi\alpha)dh = (\phi\alpha d)h.$$

Por otro lado, tenemos que

$$(\phi\beta a)w = \phi\beta(aw) = \phi\beta(bu) = (\phi\beta b)u = (\phi\alpha c)u = (\phi\alpha)(cu) = (\phi\alpha)dv = (\phi\alpha d)v.$$

Es claro que $(\phi\beta a)w = (\phi\alpha d)v \in W$, probándose que $(f,w) \sim (h,v)$.

□

Observación 2.1.14. *Por el lema anterior podemos hablar de la clase de equivalencia para cualquier $W-$techo a izquierda (f,w) de X a Y. Podemos visualizar a dicha clase de equivalencia como*

$$\left[\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w"] \\
& Z &
\end{tikzcd}\right].$$

Lema 2.1.15. *Si*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, squiggly, "w"'] & X' \\
Y &
\end{tikzcd}$$

es un diagrama, tal que

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, squiggly, "w"'] & X' \arrow[d, squiggly, "w_1"] \\
Y \arrow[r, "v_1"'] & Y',
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, squiggly, "w"'] & X' \arrow[d, squiggly, "w_2"] \\
Y \arrow[r, "v_2"'] & Y'',
\end{tikzcd}
$$

son diagramas conmutativos obtenidos por la Definición 2.1.2 (a). Entonces, $(v_1, w_1) \sim (v_2, w_2)$.

Demostración. Para ver que $(v_1, w_1) \sim (v_2, w_2)$, consideramos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dll, squiggly, "w"'] \arrow[drr, "f"] & & \\
Y \arrow[dr, "v_1"'] \arrow[drrr, "v_2"] & & & & X' \arrow[dlll, squiggly, "w_1"'] \arrow[dl, squiggly, "w_2"] \\
 & Y' \arrow[dr, "g"'] & & Y'' \arrow[dl, "\hat{w}"] & \\
 & & Z, & &
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

donde los morfismos g y $\hat{w}$ fueron obtenidos al completar mediante (a) de la Definición 2.1.2 al diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "w_2"] \arrow[d, squiggly, "w_1"'] & Y'' \\
Y'. &
\end{tikzcd}
$$

De esta manera, tenemos en (1) que $gw_1 = \hat{w}w_2$ pero no garantizamos que $gv_1 = \hat{w}v_2$. Sin embargo, tenemos que

$$(gv_1)w = gw_1f = \hat{w}w_2f = (\hat{w}v_2)w.$$

Y así, por (b) de la Definición 2.1.2 se obtiene un morfismo $\overline{w} : Z \to Z'$ en W tal que $\overline{w}gv_1 = \bar{w}\hat{w}v_2$. En consecuencia, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "v_1"'] \arrow[drrr, "v_2" near start] & & & & X' \arrow[dlll, squiggly, "w_1"' near start] \arrow[dl, squiggly, "w_2"] \\
& Y' \arrow[dr, "\bar{w}g"'] & & Y'' \arrow[dl, "\bar{w}\hat{w}"] & \\
& & Z', & &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

ya que $(\overline{w}g)w_1 = \overline{w}(gw_1) = \overline{w}(\hat{w}w_2) \in W$. Probándose que $(v_1, w_1) \sim (v_2, w_2)$.

□

Definición 2.1.16. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría arbritraria y $W \subseteq Mor(\mathscr{C})$ que satisface las condiciones Ore a izquierda. La* ***categoría de fracciones a izquierda****, denotada $\mathscr{C}^l_W$, queda establecida de la siguiente manera:*

(a) Obj($\mathscr{C}^l_W$)= Obj($\mathscr{C}$).

(b) Un morfismo $\alpha : X \to Y$ en $\mathscr{C}^l_W$ es una clase de equivalencia de $W-$techos $[(f,w)]$ de X a Y.

$$\left[\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w"] \\
& Z &
\end{tikzcd}\right].$$

(c) La composición entre dos morfismos $[(f,w_1)] : X \to Y$ y $[(g,w_2)] : Y \to Z$ en $Mor(\mathscr{C}^l_W)$ consiste en completar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w_1"'] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, squiggly, "w_2"] \\
& K & & K' &
\end{tikzcd}$$

a

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w_1"'] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, squiggly, "w_2"] \\
& K \arrow[dr, "r"'] & & K' \arrow[dl, squiggly, "r'"] & \\
& & K'' & &
\end{tikzcd}$$

mediante las condiciones de la Definición 2.1.2 (a) y tomar la clase de equivalencia de la composición, es decir,

$$[(g,w_2)]\circ[(f,w_1)] = [(rf, r'w_2)].$$

Observación 2.1.17. *(a) La composición de morfismos dada en la definición 2.1.16 (c) no depende de como se completó el diagrama*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, squiggly, "w_1"'] & K' \\ K. & \end{tikzcd}$$

(b) Sean $[(f,w_1)] : X \to Y$ y $[(g,w_2)],[(h,w_3)] : Y \to Z$ morfismos en $\mathscr{C}^l_W$ tal que $[(g,w_2)] = [(h,w_3)]$, entonces

$$[(g,w_2)]\circ[(f,w_1)] = [(h,w_3)]\circ[(f,w_1)].$$

(c) Sean $[(f,w_1)] : X \to Y$, $[(g,w_2)] : Y \to Z$ y $[(h,w_3)] : Z \to W$ morfismos en $\mathscr{C}^l_W$, entonces

$$[(h,w_3)]\circ\big([(g,w_2)]\circ[(f,w_1)]\big) = \big([(h,w_3)]\circ[(g,w_2)]\big)\circ[(f,w_1)].$$

(d) Sea $[(f,w)] : X \to Y$ un morfismo en $\mathscr{C}^l_W$, con $f : X \to Z$ morfismo en $\mathscr{C}$ y $w : Y \to Z$ morfismo en $W \subset \mathscr{C}$. Entonces, $[(f,w)]\circ[(1_Y,1_Y)] = [(f,w)]$ y $[(1_X,1_X)]\circ[(f,w)] = [(f,w)]$.

Demostración. (a) Supóngase que podemos completar el diagrama como en la Definición 2.1.16 inciso (c)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w_1"'] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, squiggly, "w_2"] \\ & K \arrow[dr, "r"'] & & K' \arrow[dl, squiggly, "r'"] & \\ & & R, & & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Y también como

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w_1"'] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, squiggly, "w_2"] \\ & K \arrow[dr, "s"'] & & K' \arrow[dl, squiggly, "s'"] & \\ & & S. & & \end{tikzcd} \tag{2}$$

Luego, por ser W de Ore a izquierda podemos completar el diagrama

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "r'"'] & S \\ R, & \end{tikzcd}$$

al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "r'"'] & S \arrow[d, squiggly, "v"] \\ R, \arrow[r, "u"'] & T \end{tikzcd} \tag{3}$$

con $v \in W$. De esta manera, tenemos que $(ur')g = (vs')g$ y por tanto

$$(vs)w_1 = v(sw_1) = v(s'g) = (vs')g = (ur')g = u(r'g) = u(rw_1) = (ur)w_1.$$

En consecuencia, al ser W de Ore a izquierda tenemos la existencia de un morfismo $l : T \to L$ en W tal que $l(vs) = l(ur)$. Así, obtenemos que

$$(lv)(sf) = l(vs)f = l(ur)f = (lu)(rf)$$

y además por (3) tenemos que

$$(lv)(s'w_2) = l(vs')w_2 = l(ur')w_2 = (lu)(r'w_2).$$

Estas dos últimas nos garantizan la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "rf"'] \arrow[drrr, "sf"] & & & & Z \arrow[dlll, squiggly, "r'w_2"'] \arrow[dl, squiggly, "s'w_2"] \\ & R \arrow[dr, "lu"'] & & S \arrow[dl, "lv"] & \\ & & L, & & \end{tikzcd}$$

con $(lu)(r'w_2) \in W$ pues $l, u, r', w_2 \in W$. Probándose que las completaciones (1) y (2) son equivalencias de $W-$techos a izquierda.

(b) Consideremos los siguientes $W-$techos a izquierda

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "w_1"] \\ & W, & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "g"'] & & Z \arrow[dl, "w_2"] \\ & W', & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "h"'] & & Z \arrow[dl, "w_3"] \\ & W''. & \end{tikzcd}$$

Donde los dos últimos son equivalentes, es decir, existen morfismos $\delta : W'' \to W^* \in W$ y $\varepsilon : W' \to W^*$ no necesariamente en W tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "g"'] \arrow[drrr, "h"] & & & & Z \arrow[dlll, squiggly, "w_2"'] \arrow[dl, squiggly, "w_3"] \\
& W' \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & W'' \arrow[dl, "\delta"] & \\
& & W^*, & &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

con $\varepsilon g = \delta h$ y $\varepsilon w_2 = \delta w_3 \in W$. Luego, componemos $[(f, w_1)]$ con $[(\varepsilon g, \varepsilon w_2)]$, obteniendo el siguente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w_1"'] \arrow[dr, "\varepsilon g"] & & Z \arrow[dl, squiggly, "\varepsilon w_2"] \\
& W \arrow[dr, "q"'] & & W^* \arrow[dl, squiggly, "r"] & \\
& & U & &
\end{tikzcd}$$

con $r \in W$. De esta manera, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w_1"'] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, squiggly, "w_2"] \\
& W \arrow[dr, "q"'] & & W' \arrow[dl, squiggly, "r\varepsilon"] & \\
& & U & &
\end{tikzcd}$$

con $r\varepsilon w_2 \in W$. Entonces por inciso (a) tenemos que

$$[(g, w_2)] \circ [(f, w_1)] = [(qf, r\varepsilon w_2)].$$

Por otro lado, obtenemos de la composición $[(h, w_3)] \circ [(f, w_1)]$ el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w_1"'] \arrow[dr, "h"] & & Z \arrow[dl, squiggly, "w_3"] \\
& W \arrow[dr, "q"'] & & W'' \arrow[dl, squiggly, "r\delta"] & \\
& & U & &
\end{tikzcd}$$

con $r\delta w_3 \in W$. Por lo tanto, por inciso (a) tenemos que

$$[(h,w_3)]\circ[(f,w_1)] = [(qf, r\delta w_3)].$$

Así, al tener que $r\delta w_3 = r\varepsilon w_2$ se sigue que

$$[(qf, r\delta w_2)] = [(qf, r\varepsilon w_2)].$$

Por lo tanto,

$$[(h,w_3)]\circ[(f,w_1)] = [(g,w_2)]\circ[(f,w_1)].$$

(c) Por un lado, desarrollando $[(h,w_3)]\circ\big([(g,w_2)]\circ[(f,w_1)]\big)$ se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w_1"'] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, squiggly, "w_2"'] \arrow[dr, "h"] & & W \arrow[dl, squiggly, "w_3"] \\
& Y' \arrow[dr, "g'"'] & & Z' \arrow[dl, squiggly, "w_1'"] & & W' \arrow[ddll, squiggly, "q"] & \\
& & R \arrow[dr, "p"'] & & & & \\
& & & R', & & &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

donde $q, w_1' \in W$. Por otro lado, desarrollando $\big([(h,w_3)]\circ[(g,w_2)]\big)\circ[(f,w_1)]$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w_1"'] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, squiggly, "w_2"'] \arrow[dr, "h"] & & W \arrow[dl, squiggly, "w_3"] \\
& Y' \arrow[ddrr, "r"'] & & Z' \arrow[dr, "h'"'] & & W' \arrow[dl, squiggly, "w_2'"] & \\
& & & & S \arrow[dl, squiggly, "s"] & & \\
& & & S', & & &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

con $s, w_2' \in W$. Luego, por ser W de Ore a izquierda podemos completar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, squiggly, "sw_2'"] \arrow[d, "q"'] & S' \\
R'. &
\end{tikzcd}$$

Obteniendo un par de morfismos $t : R' \to Q$ y $v : S' \to Q$, tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[r, squiggly, "sw'_2"] \arrow[d, "q"'] & S' \arrow[d, "v"] \\ R' \arrow[r, squiggly, "t"'] & Q, \end{tikzcd} \tag{3}$$

con $t \in W$. De esta manera, por (3) obtenemos que $(tq)h = (vsw'_2)h$ y así, tenemos que

$$(vsh')w_2 = (vs)(h'w_2) = (vs)(w'_2h) = (vsw'_2)h = tqh = (tpw'_1)w_2. \tag{4}$$

Entonces, al ser W de Ore por izquierda obtenemos un morfismo $w : Q \to Q'$ tal que $w(vsh') = w(tpw'_1)$ con $w \in W$. Luego, obtenemos que $(wvsh')g = (wtpw'_1)g$ y por tanto

$$(wvr)w_1 = w(vrw_1) = (wvsh')g = wtpw'_1g = (wtpg')w_1 \tag{5}$$

entonces al ser W de Ore a izquierda obtenemos un morfismo $l : Q' \to K$ en W tal que $l(wvr) = l(wtpg')$. Por tanto, al componer esta última igualdad con $f : X \to Y'$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "rf"] \arrow[d, "pg'f"'] & S' \arrow[d, "lwv"] \\ R' \arrow[r, "lwt"'] & K. \end{tikzcd} \tag{6}$$

Por tanto, obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "rf"'] \arrow[drrr, "pg'f"] & & & & W \arrow[dlll, squiggly, "sw'_2w_3"'] \arrow[dl, squiggly, "qw_3"] \\ & S' \arrow[dr, "lwv"'] & & R' \arrow[dl, "lwt"] & \\ & & K. & & \end{tikzcd} \tag{7}$$

Donde la conmutatividad del diagrama (7) se sigue de (6) y que

$$(lwv)(sw'_2w_3) = lw(vsw'_2)w_3 = lw(tq)w_3 = (lwt)(qw_3) \in W$$

pues $l, w, t, q, w_3 \in W$. Lo cual implica que los siguientes diagramas son equivalentes

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "rf"'] & & W \arrow[dl, squiggly, "sw'_2w_3"] \\ & S', & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[dr, "pg'f"'] & & W \arrow[dl, squiggly, "qw_3"] \\ & R'. & \end{tikzcd}$$

Probándose que

$$[(h,w_3)] \circ \big([(g,w_2)] \circ [(f,w_1)]\big) = \big([(h,w_3)] \circ [(g,w_2)]\big) \circ [(f,w_1)].$$

(d) La prueba es directa.

$\square$

Definición 2.1.18. *Se establece una asignación $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_W^l$ como:*

(i) $T(X) = X$ *para todo* $X \in Obj(\mathscr{C})$.

(ii) Sea $f : X \to Y$ *en* $Mor(\mathscr{C})$*, entonces* $T(f) = [(f, 1_Y)]$. *Lo cual podemos visualizar como:*

$$T(f) = \left[\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "1_Y"] \\ & Y & \end{tikzcd} \right].$$

Observación 2.1.19. *(1) La asignación $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_W^l$ definida anteriormente es funtorial.*

(2) Para todo $w \in W$ se tiene que $T(w)$ es isomorfismo en $\mathscr{C}_W^l$. Donde

$$T(w)^{-1} := \left[\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "1_Y"'] & & X \arrow[dl, squiggly, "w"] \\ & Y & \end{tikzcd} \right].$$

Demostración. (a) Es directo probar que la asignación $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_W^l$ es funtorial.

(b) Veamos que si $w : X \to Y$ es un morfismo en W, entonces $T(w)$ es un isomorfismo en $\mathscr{C}_W^l$. Sabemos que $T(w) = [(w, 1_Y)]$ está representado por la clase de equivalencia del $W-$techo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "w"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "1_Y"] \\
& Y. &
\end{tikzcd}$$

Entonces se afirma que $T(w)^{-1}$ está dado por la clase de equivalencia del $W-$techo

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "1_Y"'] & & X \arrow[dl, squiggly, "w"] \\
& Y. &
\end{tikzcd}$$

Veamos primero que $T(w)^{-1}T(w) = [(1_X, 1_X)]$. Primero debemos notar que $(w,w) \sim (1_X, 1_X)$, por la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "1_X"'] \arrow[drrr, "w"] & & & & X \arrow[dlll, squiggly, "1_X"'] \arrow[dl, squiggly, "w"] \\
& X \arrow[dr, "w"'] & & Y \arrow[dl, "1_X"] & \\
& & Y. & &
\end{tikzcd}$$

Luego, consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "w"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "1_Y"'] \arrow[dr, "1_Y"] & & X \arrow[dl, squiggly, "w"] \\
& Y \arrow[dr, "1_Y"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "1_Y"] & \\
& & Y, & &
\end{tikzcd}$$

dado por la definición de la composición $T(w)^{-1}T(w)$, en $\mathscr{C}_W^l$. Lo que implica que

$$[(w,w)] = [(1_Y, w)(w, 1_Y)].$$

Por lo tanto, la composición $T(w)^{-1}T(w)$ está dada por la clase de equivalecia de $(1_X, 1_X)$ como se afirmó. La prueba de que $T(w)T(w)^{-1}$ está dada por la clase de equivalencia de $(1_Y, 1_Y)$ es directa y será omitida. Por tanto, $T(w)$ es un isomorfismo en $\mathscr{C}_W^l$.

A lo largo de esta sección, nos referiremos con T al funtor $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_W^l$ definido en 2.1.18.

□

La siguiente Proposición viene a responder la siguiente pregunta planteada al inicio de este capítulo: ¿Podemos dar una localización de $\mathscr{C}$, en el caso que $\mathscr{C}$ no sea una categoría pequeña?

Proposición 2.1.20. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $W \subset Mor(\mathscr{C})$ satisface las condiciones de Ore a izquierda. Entonces $(\mathscr{C}^l_W, T)$ es una localización de $\mathscr{C}$ mediante la clase de morfismos W.*

Demostración. Basta demostrar que el funtor $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^l_W$ es universal. Esto es, si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor tal que $F(w)$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}$ para todo $w \in W$. Entonces existe un unico funtor $G : \mathscr{C}^l_W \to \mathscr{D}$ tal que $G \circ T = F$.

Como $F(w)$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}$ para todo $w \in W$, podemos definir una asignación $G : \mathscr{C}^l_W \to \mathscr{D}$ como $G(X) = F(X)$ para todo $X \in \mathscr{C}$ y para cualquier morfismo $[(f,w)] : X \to Y$ en $\mathscr{C}^l_W$

$$G([(f,w)]) = F(w)^{-1}F(f).$$

.

Veamos primero que esta asignación está bien definida. En efecto, si $(f,w) \sim (f',w')$ tenemos la existencia de dos morfismos $u : Y' \to Y'''$ y $v : Y'' \to Y'''$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "f'"] & & & & Y \arrow[dlll, squiggly, "w"'] \arrow[dl, squiggly, "w'"] \\
& Y' \arrow[dr, "u"'] & & Y'' \arrow[dl, squiggly, "v"] & \\
& & Y'''. & &
\end{tikzcd}$$

Con $v : Y'' \to Y'''$ en W y $uw = vw' \in W$. Por un lado, del hecho que $F(w'), F(v)$ son isomorfismos se sigue que $F(v) = F(vw')F(w')^{-1}$ y así $F(v)^{-1} = F(w)F(vw)^{-1}$.

Por otro lado, al tener que v, w' y $vw' = uw' \in W$, se sigue que $F(v), F(w')$ y $F(vw') = F(uw')$ son isomorfismos en $\mathscr{D}$. Consecuentemente, $F(u) = F(uw)F(w)^{-1}$ es también un isomorfismo con $F(u)^{-1} = F(w)F(uw)^{-1}$.

Así, obtenemos que

$$\begin{aligned}
G([(f,w)]) &= F(w)^{-1}F(f) \\
&= F(w)^{-1}F(u)^{-1}F(u)F(f) \\
&= F(uw)^{-1}F(uf) \\
&= F(vw')^{-1}F(vf') \\
&= F(w')^{-1}F(v)^{-1}F(v)F(f') \\
&= F(w')^{-1}F(f') \\
&= G([(f',w')]).
\end{aligned}$$

Por tanto la asignación $G : \mathscr{C}_W^l \to \mathscr{D}$ está bien definida. Ahora veamos que dicha asignación es funtorial, notemos primero que

$$G([(1_X, 1_X)]) = F(1_X)^{-1}F(1_X) = (1_{F(X)})^{-1}1_{F(X)} = 1_{F(X).}$$

Ahora, consideremos dos morfismos $[(f, w_1)] : X \to Y$ y $[(g, w_2)] : Y \to Z$ en $\mathscr{C}_W^l$. Así, componiendo estos morfismos obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w_1"'] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, squiggly, "w_2"] \\
& Y' \arrow[dr, "g'"'] & & Z' \arrow[dl, squiggly, "w_1'"] & \\
& & S, & &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

con $w_1' \in W$ y por tanto,

$$[(g, w_2)] \circ [(f, w_1)] = [(g'f, w_1'w_2)].$$

De esta manera, tenemos que

$$\begin{aligned}
G([(g, w_2)] \circ [(f, w_1)]) &= G([(g'f, w_1'w_2)]) \\
&= F(w_1'w_2)^{-1}F(g'f) \\
&= F(w_2)^{-1}F(w_1')^{-1}F(g')F(f).
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$G([(g, w_2)])G([(f, w_1)]) = F(w_2)^{-1}F(g)F(w_1)^{-1}F(f).$$

Así, como $g'w_1 = w_1'g$ por (1), se tiene que $F(g')F(w_1) = F(w_1')F(g)$ junto al hecho de que $F(w_1)$ y $F(w_1')$ isomorfismos, se sigue que $F(w_1')^{-1}F(g') = F(g)F(w_1)^{-1}$. Esto último implica que

$$\begin{aligned}
G([(g, w_2)])G([(f, w_1)]) &= F(w_2)^{-1}F(g)F(w_1)^{-1}F(f) \\
&= F(w_2)^{-1}F(w_1')^{-1}F(g')F(f).
\end{aligned}$$

Acabamos de probar que la asignación $G : \mathscr{C}_W^l \to \mathscr{D}$ es funtorial. Ahora veamos que $GT = F$. En efecto,

$$(GT)(X) = G(T(X)) = G(X) = F(X)$$

para cualquier objeto $X \in \mathscr{C}$. Luego, si $f : X \to Y$ es un morfismo en $\mathscr{C}$ se sigue que

$$(GT)(f) = G(T(f)) = G([(f, 1_Y)]) = F(1_Y)^{-1} F(f) = 1_{F(Y)} F(f) = F(f).$$

Finalmente, verifiquemos la unicidad. Si existe otro funtor $G' : \mathscr{C}_W^l \to \mathscr{D}$ tal que $F = G'T$, entonces

$$G(X) = F(X) = G'T(X) = G'(X)$$

para cualquier $X \in \mathscr{C}$. Ahora veamos que

$$G([(f, w)]) = G'([(f, w)])$$

para cualesquiera morfismos $f : X \to Y'$ en $\mathscr{C}$ y $w : Y \to Y'$ en W. Por suponer que $F = G'T$ tenemos que

$$F(f) = G'T(f) = G'([(f, 1_{Y'})]).$$

Luego, por otro lado tenemos que

$$[(f, w)] = [(1_{Y'}, w)(f, 1_{Y'})],$$

es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y' \arrow[dl, squiggly, "1_{Y'}"'] \arrow[dr, "1_{Y'}"] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w"] \\
& Y' \arrow[dr, "1_{Y'}"'] & & Y' \arrow[dl, squiggly, "1_{Y'}"] & \\
& & Y'. & &
\end{tikzcd}$$

Así, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
G'([(f,w)]) &= G([(1_{Y'},w)][(f,1_{Y'})]) \\
&= G([(1_{Y'},w)])G([(f,1_{Y'})]) \\
&= G([(1_{Y'},w)])F(f).
\end{aligned}
$$

Luego, podemos ver que fácilmente que

$$[(1_{Y'},w)(1_{Y'},w)] = [(w,w)] = [(1_X,1_X)],$$

por la conmutatividad del siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "w"'] & & Y' \arrow[dl, squiggly, "1_{Y'}"'] \arrow[dr, "1_{Y'}"] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w"] \\
& Y' \arrow[dr, "1_{Y'}"'] & & Y' \arrow[dl, squiggly, "1_{Y'}"] & \\
& & Y'. & &
\end{tikzcd}
$$

Por otro lado, podemos ver que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "w"'] & & Y' \arrow[dl, squiggly, "1_{Y'}"'] \arrow[dr, "1_{Y'}"] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w"] \\
& Y' \arrow[dr, "1_{Y'}"'] & & Y' \arrow[dl, squiggly, "1_{Y'}"] & \\
& & Y'. & &
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo, entonces $[(1_{Y'},1_{Y'})] = [(w,1_{Y'})(1_{Y'},w)]$. Por lo tanto, $[(1_{Y'},w)] = [(w,1_{Y'})]^{-1} : Y' \to Y$ en $\mathscr{C}_W^l$ y así

$$
\begin{aligned}
G'([(1_{Y'},w)]) &= G'([(w,1_{Y'})^{-1}]) \\
&= G'([(w,1_{Y'})])^{-1} \\
&= (G'T(w))^{-1} \\
&= (F(w))^{-1}.
\end{aligned}
$$

Concluyendo que $G[(f,w)] = F(w)^{-1}F(f) = G'([(f,w)])$.

$\square$

Proposición 2.1.21. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva y $(\mathscr{C}^l_W, T)$ la localización de $\mathscr{C}$ mediante la clase de morfismos W. Entonces $\mathscr{C}^l_W$ es una categoría aditiva y el funtor $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^l_W$ es aditivo.*

Demostración. Para demostrar esto necesitamos definir una operación suma en $\mathscr{C}^l_W$ de tal modo que para todo $f, g \in Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$ se satisfaga que $T(f+g) = T(f) + T(g)$, es decir, se satisfaga que

$$[(f, 1_Y)] + [(g, 1_Y)] = [(f+g, 1_Y)].$$

Para definir la operación suma que necesitamos, primero vamos a extender lo anterior a dos morfismos $[(f_1, w_1)], [(f_2, w_2)] \in Hom_{\mathscr{C}^l_W}(X,Y)$, para esto consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f_1"'] \arrow[drrr, "f_2"] & & & & Y \arrow[dlll, squiggly, "w_1"'] \arrow[dl, squiggly, "w_2"] \\
& Z \arrow[dr, "g"'] & & Z' \arrow[dl, squiggly, "w'"] & \\
& & Z'', & &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

tal que $gw_1 = w'w_2$, donde g y w' con $w' \in W$ fueron obtenidos de completar el diagrama formado por w_1 y w_2 mediante 2.1.2 (a). Luego, podemos ver directamente que $(f_1, w_1) \sim (gf_1, w'w_2)$ pues el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f_1"'] \arrow[drrr, "gf_1"] & & & & Y \arrow[dlll, squiggly, "w_1"'] \arrow[dl, squiggly, "w'w_2"] \\
& Z \arrow[dr, "g"'] & & Z'' \arrow[dl, "1_{Z''}"] & \\
& & Z'', & &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. De la misma manera, se puede ver que $(f_2, w_2) \sim (w'f_2, w'w_2)$, por lo que ambos $W-$techos tienen un "denominador" común, a saber, $w'w_2$. Lo que nos motiva a definir

$$[(f_1, w_1)] + [(f_2, w_2)] := [(gf_1 + w'f_2, w'w_2)]. \tag{2}$$

Esta definición la podemos visualizar en diagramas como:

$$\left[\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f_1"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w_1"] \\ & Z & \end{tikzcd}\right] + \left[\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f_2"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w_2"] \\ & Z' & \end{tikzcd}\right] = \left[\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "gf_1+w'f_2"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w'w_2"] \\ & Z'' & \end{tikzcd}\right].$$

Ahora veamos que esta operación suma está bien definida, para esto veamos primero que la clase de equivalencia definida en (2) no depende de cómo se tomaron g y $w' \in W$ en (1). En efecto, por el Lema 2.1.15, si (g', w'') es otra completación en (1), entonces $(g', w'') \sim (g, w')$. Por lo que obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f_1"'] \arrow[drrrrr, "f_2"] & & & & & & Y \arrow[dlllll, squiggly, "w_1"'] \arrow[dl, squiggly, "w_2"] \\
& Z \arrow[dr, "g"'] \arrow[drrr, "g'"] & & & & Z' \arrow[dlll, squiggly, "w'"'] \arrow[dl, squiggly, "w''"] & \\
& & Z'' \arrow[dr, "h"'] & & U \arrow[dl, squiggly, "v"] & & \\
& & & V. & & &
\end{tikzcd}$$

En particular, $gw_1 = w'w_2$ y $g'w_1 = w''w_2 \in W$. De esta manera, se tiene que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "gf_1+w'f_2"'] \arrow[drrr, "g'f_1+w''f_2"] & & & & Y \arrow[dlll, squiggly, "w'w_2"'] \arrow[dl, squiggly, "w''w_2"] \\
& Z'' \arrow[dr, "h"'] & & U \arrow[dl, "v"] & \\
& & V, & &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo pues claramente $hw'w_2 = vw''w_2 \in W$. Por otro lado, por tener que la categoría $\mathscr{C}$ es aditiva se obtiene que

$$\begin{aligned} h(gf_1 + w'f_2) &= hgf_1 + hw'f_2 \\ &= vg'f_1 + vw''f_2 \\ &= v(g'f_1 + w''f_2). \end{aligned}$$

Por tanto, $(gf_1 + w'f_2, w'w_2) \sim (g'f_1 + w''f_2, w''w_2)$. Finalmente, veamos que si $(f_1, w_1) \sim (f_1', w_1')$ entonces

$$[(f_1,w_1)+(f_2,w_2)] = [(f_1',w_1')+(f_2,w_2)].$$

Como $(f_1,w_1)\sim(f_1',w_1')$, tenemos por simetría el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f_1'"'] \arrow[drrr, "f_1"] & & & & Y \arrow[dlll, squiggly, "w_1'"'] \arrow[dl, squiggly, "w_1"] \\
& Z \arrow[dr, "a"'] & & Z'' \arrow[dl, "b"] & \\
& & W. & &
\end{tikzcd}$$

Después, obteniendo el "denominador" común de (f_1,w_1) y (f_2,w_2) obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f_1'"'] \arrow[drrr, "f_1"] \arrow[drrrrr, "f_2"] & & & & & & Y \arrow[dlllll, squiggly, "w_1'"'] \arrow[dlll, squiggly, "w_1"] \arrow[dl, squiggly, "w_2"] \\
& Z \arrow[dr, "a"'] & & Z' \arrow[dl, squiggly, "b"] & & Z'' \arrow[ddll, squiggly, "\overline{w}"] & \\
& & W \arrow[dr, "v'"'] & & & & \\
& & & V, & & &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

donde v' y $\overline{w}$ fueron obtenidos de completar el diagrama formado por bw_1 y w_2 mediante el inciso (b) de la Definición 2.1.2.

La suma $[(f_1,w_1)]+[(f_2,w_2)]$ está dada por la clase de

$$[(v'bf_1+\overline{w}f_2,\overline{w}w_2)]. \tag{4}$$

Por otro lado, la suma $(f_1',w_1')+(f_2,w_2)$ está dada por la clase

$$[(v'af_1'+\overline{w}f_2,\overline{w}w_2)],$$

que es igual a (4) por la conmutatividad de (3). Probándose que

$$[(f_1,w_1)]+[(f_2,w_2)] = [(f_1',w_1')]+[(f_2,w_2)].$$

Se puede verificar de manera directa que la definición dimos de suma en la categoría $\mathscr{C}_W^l$ en (2), satisface que $[(f,1_Y)]+[(g,1_Y)] = [(f+g,1_Y)]$. Verificar que $Hom_{\mathscr{C}_W^l}(X,Y)$ tiene estructura de grupo abeliano para cualquier par de objetos en $\mathscr{C}_W^l$ no es muy complicado. Para cualquier $[(f,w)] \in Hom_{\mathscr{C}_W^l}(X,Y)$, el elemento neutro está dado por la clase $[(0,1_Y)]$, y el elemento inverso está dado por la clase $[(-f,w)]$.

Para terminar de verificar que la categoría $\mathscr{C}_W^l$ es aditiva, falta ver que la categoría $\mathscr{C}_W$ tiene coproductos finitos. Sean $X,Y \in Obj(\mathscr{C})$, entonces al ser $\mathscr{C}$ una categoría aditiva se tiene la existencia del producto dado por un objeto $X\times Y$ junto con dos proyecciones $\rho_X : X\times Y \to X$ y $\rho_Y : X\times Y \to Y$. En base a esto, el producto de X y Y en $\mathscr{C}_W^l$, está dado por el objeto $X\times Y \in Obj(\mathscr{C}) = Obj(\mathscr{C}_W^l)$ junto con dos morfismos

$$F(\rho_X) = \left[\begin{tikzcd} X\times Y \arrow[dr, "\rho_X"'] & & X \arrow[dl, squiggly, "1_X"] \\ & X & \end{tikzcd}\right] \quad , \quad F(\rho_Y) = \left[\begin{tikzcd} X\times Y \arrow[dr, "\rho_Y"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "1_Y"] \\ & Y & \end{tikzcd}\right].$$

Verifiquemos nuestra afirmación, para esto consideramos dos morfismos arbitrarios en $\mathscr{C}_{\mathscr{W}}^l$ de Z a los objetos X e Y como:

$$f_X^* := \left[\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "f_X"'] & & X \arrow[dl, squiggly, "w_1"] \\ & X^* & \end{tikzcd}\right] \quad , \quad f_Y^* := \left[\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "f_Y"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w_2"] \\ & Y^*. & \end{tikzcd}\right].$$

Luego, por la existencia del producto de X e Y en $\mathscr{C}$ se tiene la existencia de un único morfismo $\phi : Z \to X^*\times Y^*$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f_X"'] \arrow[d, dashed, "\phi"'] \arrow[dr, "f_Y"] & \\ X^* & X^*\times Y^* \arrow[l, "\rho_X^*"] \arrow[r, "\rho_Y^*"'] & Y^*. \end{tikzcd}$$

Así, el morfismo requerido de Z a $X\times Y$ en la categoría $\mathscr{C}_W^l$ está dado por

$$\phi^* := \left[\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "\phi"'] & & X\times Y \arrow[dl, squiggly, "w_1\times w_2"] \\ & X^*\times Y^* & \end{tikzcd}\right],$$

donde $w_1 \times w_2 := \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}$. De esta manera, se tiene que la composición del morfismo ϕ^* con el morfismo $F(\rho_X)$ en $\mathscr{C}_W^l$ es el $W-$techo dado por f_X^* como se ve en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "\phi"'] & & X\times Y \arrow[dl, squiggly, "w_1\times w_2"'] \arrow[dr, "\rho_X"] & & X \arrow[dl, squiggly, "1_X"] \\ & X^*\times Y^* \arrow[dr, "\rho_X^*"'] & & X \arrow[dl, squiggly, "w_1"] & \\ & & X^*. & & \end{tikzcd}$$

En efecto, el diagrama anterior es conmutativo, pues al considerar las proyecciones del diagrama, $\rho_X := \begin{pmatrix} 1_X & 0 \end{pmatrix}$ y $\rho_X^* := \begin{pmatrix} 1_{X^*} & 0 \end{pmatrix}$, tenemos que:

$$\rho_X^*(w_1 \times w_2) = \begin{pmatrix} 1_{X^*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 1_X & 0 \end{pmatrix} = w_1 \rho_X.$$

De manera análoga se puede ver la composición del morfismo ϕ^* con el morfismo $F(\rho_Y)$ en $\mathscr{C}_W^l$ es el $W-$techo dado por f_Y^*. La unicidad del $W-$techo $\phi^* : Z \to X \times Y$ se sigue de la de unicidad de ϕ. Por lo tanto, $\mathscr{C}_W^l$ tiene productos finitos.

□

La teoría que hemos desarrollado hasta ahora a partir de la Definición 2.1.12, puede ser dualizada para el caso en que la categoría $\mathscr{C}$ en cuestión tenga una subclase $W \subset Mor(\mathscr{C})$ que satisface las condiciones de Ore a derecha. En particular, el dual de la Definición 2.1.16 nos permite definir la **categoría de fracciones a derecha**, denotada $\mathscr{C}_W^r$. El siguiente resultado nos permitirá establacer una relación entre las categorías $\mathscr{C}_W^l$ y $\mathscr{C}_W^r$.

Proposición 2.1.22. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $W \subset Mor(\mathscr{C})$ que satisface las condiciones de Ore. Entonces las categorías $\mathscr{C}_W^l$ y $\mathscr{C}_W^r$ son isomorfas.*

Demostración. Al ser $W \subset \mathscr{C}$ de Ore a izquierda y derecha, tenemos por la Proposición 2.1.20 y su dualización dos funtores $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_W^l$ y $T' : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_W^r$, tal que $T(w)$ y $T'(w)$ son isomorfismos en

$\mathscr{C}_W^l$ y $\mathscr{C}_W^r$ respectivamente, para todo $w \in W$. De esta manera, por la misma Proposición obtenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T'"'] & \mathscr{C}_W^l \arrow[dl, dashed, "G"] \\ \mathscr{C}_W^l, & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "T'"] \arrow[d, "T"'] & \mathscr{C}_W^r \arrow[dl, dashed, "H"] \\ \mathscr{C}_W^r. & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Donde los funtores H y G son únicos respecto la conmutatividad de los diagramas anteriores. Veamos que $GH = 1_{\mathscr{C}_W^r}$ y $HG = 1_{\mathscr{C}_W^l}$. En efecto, por (1) obtenemos que $T' = GT$ y $T = HT'$ y por tanto tenemos las siguientes igualdades:

$$T' = GT = GHT' = (GH)T'$$

y

$$T = HT' = H(GT) = (HG)T.$$

Por esta última desigualdad, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T"'] & \mathscr{C}_W^l \arrow[dl, bend right, "1_{\mathscr{C}_W^l}"'] \arrow[dl, bend left, "HG"] \\ \mathscr{C}_W^l. & \end{tikzcd}$$

Así, por la propiedad universal del funtor $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_W^l$, tenemos que $HG = 1_{\mathscr{C}_W^l}$. Análogamente, tenemos que $GH = 1_{\mathscr{C}_W^r}$. Lo cual prueba que las categorías $\mathscr{C}_W^l$ y $\mathscr{C}_W^r$ son isomorfas.

$\square$

Se concluye esta subsección con un breve ejemplo de una categoría de fracciones.

Ejemplo 2.1.23. *Sea R un anillo conmutativo con 1 y $S \subseteq R$ un conjunto multiplicativo. Podemos pensar a R como una categoría de la siguiente manera:*

(1) Obj(R):=$\{\bullet\}$.

(2) Mor(R):=R.

*Entonces resulta ser que R visto como una categoría es **Ore** y por tanto tenemos la categoría de fracciones a izquierda de R, denotada R_S^l, donde:*

(a) $Obj(R_S) = \{\bullet\}$,

(b) $Mor(R_S) = [(r,s)]$. *con* $r \in R$ *y* $s \in S \subset R$.

$$[(r,s)] := \left[\begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr, "r"'] & & \bullet \arrow[dl, squiggly, "s"] \\ & \bullet & \end{tikzcd} \right].$$

2.2. Localización en una categoría triangulada

Hasta ahora hemos introducido el concepto de localización tanto en categorías arbitrarias y aditivas. De esta manera, en el contexto de una categoría triangulada $\mathscr{T}$ nos gustaría responder la siguiente pregunta: ¿ Cómo podemos obtener una localización $\mathscr{T}$ mediante una clase de morfismos $W \subset \mathscr{T}$, tal que $\mathscr{T}_W$ es una categoría triangulada?. Para abordar esta pregunta comenzaremos esta sección con el concepto de un sistema nulo. Cabe mencionar que esta sección está basada en [16] y [34].

Al igual que el ejemplo 2.1.10, donde dimos un sistema multiplicativo de una categoría abeliana $\mathscr{C}$ a través de una subcategoría $\mathscr{D}$ de Serre. Para una categoría triangulada $\mathscr{T}$ necesitamos una subclase de objetos de $\mathscr{T}$ que nos permita generar un sistema multiplicativo en $\mathscr{T}$. Esto nos motiva a dar la siguiente definición:

Definición 2.2.1. *Sea* $\mathscr{T} := (\mathscr{T}, \Sigma, \triangle)$ *una categoría triangulada, decimos que una subclase* $\mathscr{N} \subset Obj(\mathscr{T})$ *es un **sistema nulo** si satisface que:*

(N1) $0 \in \mathscr{N}$,

(N2) $X \in \mathscr{N}$ *si y sólo si* $\Sigma(X) \in \mathscr{N}$,

(N3) Si $X \to Y \to Z \to \Sigma(X) \in \triangle$ *con* $X, Y \in \mathscr{N}$, *entonces* $Z \in \mathscr{N}$.

Dado un sistema nulo en una categoría triangulada $\mathscr{T}$ podemos definir una subclase de morfismos $W(\mathscr{N})$ de la siguiente manera

$$W(\mathcal{N}) := \{f : X \to Y \in Mor(\mathcal{T}) \mid \text{existe } X \to Y \to Z \to \Sigma(X) \in \triangle \text{ con } Z \in \mathcal{N}\}.$$

Más aún, esta subclase de morfismos tiene una propiedad muy deseable como veremos a continuación.

Proposición 2.2.2. *La subclase $W(\mathcal{N}) \subset Mor(\mathcal{T})$ satisface las condiciones de Ore.*

Demostración. Primero veremos que $W(\mathcal{N})$ satisface las dos propiedades dadas en la Definición 2.1.1.

(1) Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ morfismos en $W(\mathcal{N})$, entonces existen triangulos

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Y' \longrightarrow \Sigma X \in \triangle \qquad \text{y} \qquad Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow Z' \longrightarrow \Sigma Y \in \triangle$$

con $Y', Z' \in \mathcal{N}$. Luego por el axioma **TR1(c)** existe un triángulo

$$X \xrightarrow{gf} Z \longrightarrow D' \longrightarrow \Sigma X \in \triangle.$$

De esta manera, por **TR4**, se obtiene un triangulo $Y' \to D' \to Z' \to \Sigma Y' \in \triangle$, de tal forma que al aplicarle dos veces de manera consecutiva el axioma **TR2** se obtiene

$$Z' \longrightarrow \Sigma Y' \longrightarrow \Sigma D' \longrightarrow \Sigma Z' \in \triangle.$$

con $Z', \Sigma Y' \in \mathcal{N}$ y por tanto $\Sigma D', D' \in \mathcal{N}$. Probándose que $gf \in W(\mathcal{N})$.

(2) Sea $X \in \mathcal{T}$, por **TR1(b)** tenemos que la existencia de un triángulo

$$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X \in \triangle,$$

y al tener $0 \in \mathcal{N}$, se obtiene que $1_X \in W(\mathcal{N})$ para cualquier $X \in \mathcal{T}$.

Ahora veamos se satisfacen las condiciones de Ore, es decir, se satisfacen las definiciones 2.1.2 y 2.1.3.

Primero vamos a verificar las condiciones de la Definición 2.1.2.

(a) Sean morfismos

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

en $\mathscr{T}$ con $f \in W(\mathscr{N})$. Así, existe

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \Sigma X \in \triangle,$$

con $Z \in \mathscr{N}$. Luego, por **TR2** se tiene que

$$V = \Sigma^{-1}(Z) \xrightarrow{l} X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow \Sigma(V) = Z \in \triangle. \tag{1}$$

De esta manera, aplicamos **TR1**(c) al morfismo $sl : V \to X'$ obteniendo

$$V \xrightarrow{sl} X' \xrightarrow{f'} Y' \longrightarrow \Sigma(V) \in \triangle. \tag{2}$$

Así, aplicando **TR2** al triángulo distinguido anterior, se obtiene:

$$X' \xrightarrow{f'} Y' \longrightarrow \Sigma(V) = Z \longrightarrow \Sigma(X') \in \triangle.$$

Con $Z \in \mathscr{N}$, es decir, $f' \in W(\mathscr{N})$. Finalmente, por **TR3** podemos tenemos el siguiente morfismo entre los triángulos distinguidos (1) y (2):

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "l"] \arrow[d, "1_V"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, dashed, "s'"'] & \Sigma(V) \arrow[d, "1_{\Sigma(V)}"] \\
V \arrow[r, "sl"'] & X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r] & \Sigma(V).
\end{tikzcd}$$

Probándose la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\
Y \arrow[r, "s'"'] & Y',
\end{tikzcd}$$

con $f' \in W(\mathscr{N})$.

(b) Sean $f : X \to Y$ y $v : X' \to X$ morfismos en $\mathscr{T}$ con $v \in W(\mathscr{N})$ tal que $fv = 0$. Por la Proposición 2.1.4 basta ver existe $w \in W(\mathscr{N})$ tal que $wf = 0$. Al tener que $v \in W(\mathscr{N})$, se obtiene

$$X' \xrightarrow{v} X \xrightarrow{h} Z' \longrightarrow \Sigma X' \in \triangle,$$

con $Z' \in \mathscr{N}$. Luego, por **TR1**(b) y **TR2** se obtiene

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{1_Y} Y \longrightarrow 0 \in \triangle.$$

Así, por **TR3**, podemos sumergir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "v"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
0 \arrow[r] & Y,
\end{tikzcd}$$

en un morfismo del triángulos distinguidos:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "0"'] & X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "t"'] & \Sigma X' \arrow[d, "0"] \\
0 \arrow[r, "0"'] & Y \arrow[r, "1_Y"'] & Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Consecuentemente, al aplicar **TR1**(c) al morfismo $t : Z' \to Y$ se obtiene

$$Z' \xrightarrow{t} Y \xrightarrow{w} Z'' \longrightarrow \Sigma Z' \in \triangle.$$

Y por **TR2**, se tiene que

$$Y \xrightarrow{w} Z'' \longrightarrow \Sigma(Z') \longrightarrow \Sigma Y \in \triangle,$$

con $\Sigma(Z') \in \mathscr{N}$, es decir, $w \in W(\mathscr{N})$.
Finalmente, del hecho que $f = th$ por (1), se puede sumergir el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
Z \arrow[r, "t"'] & Y,
\end{tikzcd}$$

por **TR3**, en el siguiente morfismo de triángulos distinguidos:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(h)"] \\
Z' \arrow[r, "t"'] & Y \arrow[r, "w"'] & Z'' \arrow[r] & \Sigma Z'.
\end{tikzcd}$$

Probándose que $wf = 0$ con $w \in W(\mathscr{N})$.

Ahora verifiquemos las condiciones de la Definición 2.1.3.

(a) Sean morfismos

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

en $\mathscr{T}$ con $f \in W(\mathscr{N})$, entonces existe

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \Sigma X \in \triangle,$$

con $Z \in \mathscr{N}$. Luego, al aplicar **TR1**(c) al morfismo $gs : Y' \to Z$ obtenemos un triángulo

$$Y' \xrightarrow{gs} Z \longrightarrow Z' \longrightarrow \Sigma Y' \in \triangle.$$

Y por **TR2** obtenemos

$$V = \Sigma^{-1}(Z') \xrightarrow{h} Y' \xrightarrow{gs} Z \longrightarrow \Sigma V = Z' \in \triangle,$$

con $Z \in \triangle$, es decir, $h \in W(\mathscr{N})$. Después, al considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "gs"] \arrow[d, "s"'] & Z \arrow[d, equal, "1_Z"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z, \end{tikzcd}$$

obtenemos un morfismo de triangulos distinguidos

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "gs"] \arrow[d, "s"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"'] & \Sigma(V) \arrow[r, "\Sigma(h)"] \arrow[d, "\Sigma(t)"'] & \Sigma(Y') \arrow[d, "\Sigma(s)"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r] & \Sigma(X) \arrow[r, "\Sigma(f)"'] & \Sigma(Y). \end{tikzcd}$$

Por tanto, de **TR2**, se obtiene el siguiente morfismo de triangulos distinguidos:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "h"] \arrow[d, "t"'] & Y' \arrow[r, "gs"] \arrow[d, "s"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"'] & \Sigma V \arrow[d, "\Sigma t"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "w'"'] & \Sigma X. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "h"] \arrow[d, "t"'] & Y' \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y, \end{tikzcd}$$

con $h \in W(\mathscr{N})$.

(b) Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathscr{T}$ y $w : Y \to Y'$ un morfismo en $W(\mathscr{N})$ tal que $wf = 0$, al ser $\mathscr{T}$ aditiva, por la Proposición 2.1.4, basta ver que existe $v \in W(\mathscr{N})$ tal que $fv = 0$. Al tener que $w \in W(\mathscr{N})$, existe un triángulo

$$Y \xrightarrow{w} Y' \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma Y \in \triangle,$$

con $Z \in \mathscr{N}$. Luego, por **TR2** se obtiene

$$V = \Sigma^{-1}(Z) \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{w} Y' \longrightarrow \Sigma(V) = Z \in \triangle.$$

Por otra parte, por **TR1**(b) y **TR2** obtenemos

$$X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma(X) \xrightarrow{-\Sigma(1_X)} \Sigma(X) \in \triangle.$$

De esta manera, al tener por hipótesis que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "w"'] & Y', \end{tikzcd}$$

es conmutativo, podemos obtener mediante **TR3** el siguiente morfismo de triangulos distinguidos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma(X) \arrow[r, "-\Sigma(1_X)"] \arrow[d, "\Sigma(g)"'] & \Sigma(X) \arrow[d, dashed] \\ Y \arrow[r, "w"'] & Y' \arrow[r] & \Sigma V \arrow[r] & \Sigma Y. \end{tikzcd} \tag{(1)}$$

Y por **TR2**, se obtiene el siguiente morfismo de triángulos distinguidos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, dashed, "g"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma t"] \\ V \arrow[r, "h"'] & Y \arrow[r, "w"'] & Y' \arrow[r] & \Sigma V. \end{tikzcd}$$

Así, aplicando **TR1**(c) al morfismo $g : X \to V$ se obtiene:

$$X \xrightarrow{g} V \longrightarrow V' \longrightarrow \Sigma X \in \triangle.$$

Luego, por **TR2** tenemos que:

$$U = \Sigma^{-1}(V') \xrightarrow{v} X \xrightarrow{g} V \longrightarrow \Sigma U = V' \in \triangle,$$

con $V = \Sigma^{-1}(Z) \in \mathscr{N}$, pues $\Sigma(\Sigma^{-1}(Z)) = Z \in \mathscr{N}$. Por lo tanto $v \in W(\mathscr{N})$. Por último, de (1) tenemos la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[d, "h"] \\
Y \arrow[r, "1_Y"'] & Y,
\end{tikzcd}$$

y así, por **TR3** se obtiene un morfismo de triángulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \Sigma Z \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma(f)"] \\
Y \arrow[r, "1_Y"'] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \Sigma Y.
\end{tikzcd}$$

De esta manera, por **TR2** tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "v"] \arrow[d, "0"'] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \Sigma Z \arrow[d] \\
0 \arrow[r, "0"'] & Y \arrow[r, "1_Y"'] & Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Lo cual demuestra que $fv = 0$ con $v \in W(\mathscr{N})$.

$\square$

Proposición 2.2.3. *Sea $\mathscr{T} := (\mathscr{T}, \Sigma, \triangle)$ una categoría triangulada y $\mathscr{N}$ un sistema nulo de $\mathscr{T}$. Entonces la localización de $\mathscr{T}$ mediante la clase de morfismos $W(\mathscr{N})$, denotada $(\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}, F)$, es tal que $\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$ es una categoría triangulada y $F : \mathscr{T} \to \mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$ es triangulado.*

Demostración. Al ser $\mathscr{T}$ una categoría triangulada, se tiene por la Proposición 2.1.21 que $\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$ es una categoría aditiva. Definimos un funtor de traslación $\Sigma_{\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}} : \mathscr{T}_{W(\mathscr{N})} \to \mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$ como $\Sigma_{\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}}(T) := T$ para cada $T \in Obj(\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}) = Obj(\mathscr{T})$ y en morfismos como

$$\Sigma_{\mathscr{T}_{\mathscr{N}}}([(f,w)]) = [(\Sigma(f), \Sigma(w))].$$

Veamos que esta asignación está bien definida, para esto tomamos $(f,w) \sim (f',w')$, lo que significa que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "f'"] & & & & Y \arrow[dlll, squiggly, "w"'] \arrow[dl, squiggly, "w'"] \\
& Z \arrow[dr, "u"'] & & Z' \arrow[dl, "v"] & \\
& & Z. & &
\end{tikzcd}$$

Luego, al ser Σ un funtor tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Sigma(X) \arrow[dr, "\Sigma(f)"'] \arrow[drrr, "\Sigma(f')"] & & & & \Sigma(Y) \arrow[dlll, squiggly, "\Sigma(w)"'] \arrow[dl, squiggly, "\Sigma(w')"] \\
& \Sigma(Z) \arrow[dr, "\Sigma(u)"'] & & \Sigma(Z') \arrow[dl, "\Sigma(v)"] & \\
& & \Sigma(Z), & &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por tanto, $(\Sigma(f),\Sigma(w)) \sim (\Sigma(f'),\Sigma(w'))$. Lo cual prueba que la asignación $\Sigma_{\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}}$ en morfismos está bien definida. Fácilmente, del hecho que Σ es funtor, podemos ver que la asignación $\Sigma_{\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}}$ es funtorial. Igualmente se sigue del hecho que el funtor Σ es de traslación, que $\Sigma_{\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}}$ también es de traslación. Además, podemos ver directamente que $F\Sigma = \Sigma_{\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}}F$. Sólo nos falta definir una clase de triángulos distinguidos para la categoría $\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$.

Decimos que un triángulo en $\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$ es distinguido si y sólo si es isomorfo a la imagen de un triángulo distinguido en $\mathscr{T}$ bajo el funtor F. Denotaremos a la clase de triángulos distinguidos en $\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$ como $\triangle'$.

Veamos en efecto que la terna $(\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}, \Sigma_{\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}}, \triangle')$, simplemente denotada $\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$, es una categoría triangulada. Para aligerar la notación en la prueba de que $\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$ es una categoría triangulada denotaremos por Σ al autofuntor $\Sigma_{\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}}$ de $\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$.

TR1 (a) Es directo de la definición de $\triangle'$.

(b) Sea $X \in Obj(\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}) := Obj(\mathscr{T})$, se tiene que el triángulo

$$X \xrightarrow{[(1_X,1_X)]} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$$

en $\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$ es isomorfo al triángulo

$$F(X) \xrightarrow{F(1_X)} F(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X \in \triangle',$$

que es la imagen bajo F del triángulo

$$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X \in \triangle.$$

(c) Sea $[(f,w)] : X \to Y$ un morfismo en $\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$,

$$[(f,w)] := \left[\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, squiggly, "w"] \\ & Y' & \end{tikzcd}\right].$$

Aplicando **TR1**(c) y F al morfismo $f : X \to Y'$ en $\mathscr{T}$ obtenemos un triángulo

$$X \xrightarrow{[(f,1_{Y'})]} Y' \xrightarrow{g^*} Z \xrightarrow{h^*} \Sigma X \in \triangle'.$$

Por otro lado, consideramos el triángulo

$$X \xrightarrow{[(f,w)]} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h^*} \Sigma X,$$

en la categoría $\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$, donde $g := g^*\alpha$ y α es el isomorfismo $\alpha := [(w, 1_{Y'})] : Y \to Y'$ en $\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$ (cuyo morfismo inverso es $[(1_{Y'}, w)] : Y' \to Y$). De esta manera, se obtiene el siguiente isomorfismo de triángulos en $\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{[(f,w)]}"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"'] & Z \arrow[r, "h^*"] \arrow[d, "1_Y"'] & \Sigma X \arrow[d, "1_{\Sigma X}"] \\ X \arrow[r, "{[(f,1_{Y'})]}"'] & Y' \arrow[r, "g^*"'] & Z \arrow[r, "h^*"'] & \Sigma X. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto,

$$X \xrightarrow{[(f,w)]} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h^*} \Sigma X \in \triangle'.$$

TR2 Sea

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \in \triangle', \tag{1}$$

entonces (1) es isomorfo a la imagen bajo F de un triángulo

$$X^* \xrightarrow{f^*} Y^* \xrightarrow{g^*} Z^* \xrightarrow{h^*} \Sigma X^* \in \triangle.$$

Luego,

$$Y^* \xrightarrow{g^*} Z^* \xrightarrow{h^*} \Sigma X^* \xrightarrow{\Sigma f^*} \Sigma Y^* \in \triangle. \tag{2}$$

Pero

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \in \triangle. \tag{3}$$

es isomorfo a la imagen bajo F de (2). Por lo tanto (3) es un triángulo distinguido en $\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$.

Las pruebas de **TR3** y **TR4** son análogas, pero por su extensión no serán incluidas, veáse Teorema 6.2.2 en [34]. Por tanto, $\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$ como fue definida es una categoría triangulada.

Finalmente, por definición de la clase $\triangle'$ y que $F\Sigma = \Sigma_{\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}} F$ se sigue que $F : \mathscr{T} \to \mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$ es un funtor triangulado.

□

Proposición 2.2.4. *Sea $F : \mathscr{T} \to \mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}$ el funtor de la localización $(\mathscr{T}_{W(\mathscr{N})}, F)$. Entonces se satisface lo siguiente:*

(i) $F(X) \cong 0$ *para todo* $X \in \mathscr{N}$,

(ii) El funtor de localización F es universal entre funtores triangulados que satisfacen la condición (i).

Demostración. (i) Sea $X \in \mathscr{N}$, luego el triángulo

$$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$$

es distinguido en $\mathscr{T}$. Por tanto, el triángulo

$$X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X \longrightarrow \Sigma X$$

también lo es. Pero $\Sigma(X) \in \mathscr{N}$ y así el morfismo $f : X \to 0$ pertenece a $W(\mathscr{N})$. Por tanto, $F(f)$ es isomorfismo y así $F(X) \cong 0$.

(ii) Sea $G : \mathscr{T} \to \mathscr{T}^*$ un funtor triangulado tal que $G(X) \cong 0$ para todo $X \in \mathscr{N}$ y sea $f : X \to Y$ un morfismo en $W(\mathscr{N})$, entonces hay un triángulo

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X \in \triangle,$$

tal que $Z \in \mathscr{N}$. Luego, el funtor G manda el triángulo anterior al triángulo distinguido en $\mathscr{T}^*$

$$G(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y) \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma^* G(X).$$

Donde $G(Z) \cong 0$, por hipótesis de que G satisface (i) y $\Sigma^* G \cong G\Sigma$ por ser G funtor triangulado, donde Σ^* es el funtor de traslación correspondiente a la categoría triangulada $\mathscr{T}^*$.

Después, podemos sumergir el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[r] \arrow[d, "1_{G(Y)}"'] & 0 \arrow[d] \\
G(Y) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

en el morfismo de triángulos distinguidos en $\mathscr{T}^*$ como:

$$\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[r, "1_{G(Y)}"] \arrow[d, dashed, "f^*"'] & G(Y) \arrow[r] \arrow[d, "1_{G(Y)}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma^* GY \arrow[d] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \arrow[r] & 0 \arrow[r, "w"'] & \Sigma^* GX.
\end{tikzcd}$$

Así, del hecho que $G(f)f^* = 1_{G(Y)}$, se tiene que f^* es un inverso derecho del morfismo $G(f)$. Por otro lado, podemos completar un morfismo de triángulos distinguidos en $\mathscr{T}^*$

$$\begin{tikzcd}
G(X) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "1_{G(X)}"'] & G(Y) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f^{**}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma^* GX \arrow[d] \\
G(X) \arrow[r, "1_{G(X)}"'] & G(X) \arrow[r] & 0 \arrow[r, "w"'] & \Sigma^* GX.
\end{tikzcd}$$

Así, del hecho que $f^{**}G(f) = 1_{G(X)}$ se sigue que f^{**} es un inverso izquierdo de $G(f)$. Por lo tanto, para todo morfismo f en $W(\mathscr{N})$ se tiene que $G(f)$ es un isomorfismo en la categoría $\mathscr{T}^*$. De esta manera, por la Proposición 2.1.20 existe un único funtor triangulado $H : \mathscr{T}_{W(\mathscr{N})} \to \mathscr{T}^*$ tal que $G = HF$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & \mathscr{T}_{W(\mathscr{N})} \arrow[dl, dashed, "H"] \\
\mathscr{T}^*. &
\end{tikzcd}$$

□

Capítulo 3

Categorías Derivadas

En la primer parte de este capítulo se estudian las nociones básicas del álgebra homológica necesarias para introducir la categoría homotópica de complejos en $\mathscr{C}$, denotada $K(\mathscr{C})$, construida a partir de una categoría aditiva o abeliana $\mathscr{C}$. Concluimos la primer parte de este capítulo estudiando la estructura triangulada de $K(\mathscr{C})$.

El resto del capítulo está destinado a utilizar la teoría desarollada en el capítulo anterior para construir la categoría derivada de complejos $D(\mathscr{C})$, mediante el proceso de localización respecto a la clase de cuasi-isomorfismos en $K(\mathscr{C})$. Para este capítulo nos hemos basado principalmente en [13], [34] y [16].

Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana, un **complejo en** $\mathscr{C}$ consiste en una familia $X := (X_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ donde X_n y $d_n^X : X_n \to X_{n-1}$ son objetos y morfismos en $\mathscr{C}$ respectivamente, tal que $d_n \circ d_{n+1} = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Un complejo es representado como una sucesión de objetos y morfismos de la siguiente manera:

$$X := \ldots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^X} X_n \xrightarrow{d_n^X} X_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

Sean $X = (X_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $Y = (Y_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dos complejos en $\mathscr{C}$, un **morfismo de complejos** $f : X \to Y$ es una familia de morfismos, $f := (f_n : X_n \to Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, que satisfacen $d_n^Y \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n^X$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X := \ldots \arrow[r] \arrow[d] & X_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^X"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & X_n \arrow[r, "d_n^X"] \arrow[d, "f_n"'] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
Y := \ldots \arrow[r] & Y_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^Y"'] & Y_n \arrow[r, "d_n^Y"'] & Y_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

La clase de los complejos sobre una categoría abeliana (o aditiva) $\mathscr{C}$, junto a la clase de los morfismos de complejos, forman la **categoría de complejos sobre** $\mathscr{C}$, denotada $Kom(\mathscr{C})$.

Definición 3.0.1. *Sean $f,g : X \to Y$ morfismos en $Kom(\mathscr{C})$, decimos que f y g son **homotópicos**, lo que denotamos por $f \sim g$, si existe una familia de morfismos $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathscr{C}$ con $s_n : X_n \to Y_{n+1}$ que satisfacen*

$$f_n - g_n = d^Y_{n+1}s_n + s_{n-1}d^X_n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Lo cual podemos visualizar como:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "d^X_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "d^X_n"] \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & X_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & Y_{n+1} \arrow[r, "d^Y_{n+1}"'] & Y_n \arrow[r, "d^Y_n"'] & Y_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Observación 3.0.2. *(a) Si en la definición anterior g es el morfismo cero, entonces decimos que f es homotópico a cero.*

(b) Es fácil verificar que la relación $\sim$ definida anteriormente es una relación de equivalencia.

Definición 3.0.3. *(i) Si $X = (X_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es un complejo en $Kom(\mathscr{A})$, la **n-ésima homología del complejo** X está definida como el objeto cociente*

$$H_n(X) := \frac{Ker(d^X_n)}{Im(d^X_{n+1})}$$

en $\mathscr{C}$.

*(ii) El complejo X es llamado **acíclico** si $H_n(X) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

(iii) Un morfismo $f : X \to Y$ de complejos, induce un morfismo natural

$$H_n(f) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$

$$x + Im(d^X_{n+1}) \longmapsto f_n(x) + Im(d^Y_{n+1}).$$

Observación 3.0.4. *Si $\mathscr{C}$ es una categoría abeliana, podemos establecer una asignación $H_n : Kom(\mathscr{C}) \to \mathscr{C}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, como: $H_n(X)$ para todo $X \in Kom(\mathscr{C})$ y $H_n(f)$ para todo $f \in Kom(\mathscr{C})$.*

La observación anterior nos induce al siguiente al siguiente resultado que puede ser consultado en la Proposición 6.8 de [33]:

Proposición 3.0.5. *Si $\mathscr{C}$ es una categoría abeliana, entonces $H_n : Kom(\mathscr{C}) \to \mathscr{C}$ es un funtor aditivo para cada $n \in \mathbb{Z}$.*

También por la Proposición 6.14 de [33], tenemos que:

Proposición 3.0.6. *Sean $f, g : X \to Y$ morfismos homotópicos en $Kom(\mathscr{C})$, es decir $f \sim g$. Entonces $H_n(f) = H_n(g)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Definición 3.0.7. *Decimos que un morfismo $f : X \to Y$ en $Kom(\mathscr{C})$ es un* ***cuasi-isomorfismo*** *si el morfismo inducido en homología es isomorfismo, es decir, si $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ es isomorfismo para toda $n \in \mathbb{Z}$. A la clase de todos los cuasi-isomorfismos de $Kom(\mathscr{C})$ la denotaremos Q a lo largo de este trabajo.*

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en el Teorema 6.10 de [33].

Proposición 3.0.8. *Sean $\mathscr{C}$ una categoría abeliana y*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de complejos en la categoría $Kom(\mathscr{C})$. Entonces existen morfismos de conexión $\delta_n : H_n(Z) \to H_{n-1}(X)$ obteniendo una sucesión exacta larga

$$\dots \xrightarrow{H_n(g)} H_{n+1}(Z) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(X) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(Z) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(X) \xrightarrow{H_{n-1}(g)} \dots$$

en $\mathscr{C}$.

Definición 3.0.9. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva. Se define la* ***categoría homotópica de complejos en $\mathscr{C}$****, la cual denotamos $K(\mathscr{C})$ como la categoría cuya clase de objetos es la misma que la categoría $Kom(\mathscr{C})$ de complejos sobre la categoría aditiva $\mathscr{C}$, y la clase de morfismos en $K(\mathscr{C})$ consiste en las clases de equivalencia de morfismos en $Kom(\mathscr{C})$ módulo homotopía, es decir*

$$Hom_{K(\mathscr{C})}(X,Y) := Hom_{Kom(\mathscr{C})}(X,Y)/\sim .$$

Para aligerar la lectura, en el resto de este trabajo nos referiremos a la categoría $K(\mathscr{C})$ como la categoría homotópica. La composición en la categoría homotópica $K(\mathscr{C})$ está bien definida ya que, si $f, g : X \to Y$ son homotópicos y $\alpha : Y \to Z$ es un morfismo de complejos, entonces αf y αg son homotópicos. Veamos que $\alpha f \sim \alpha g$. Considerando la familia de morfismos $(\alpha_{n+1}s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha_n(f_n - g_n) &= \alpha_n(d^Y_{n+1}s_n + s_{n-1}d^X_n) \\
&= \alpha_n d^Y_{n+1}s_n + \alpha_n s_{n-1}d^X_n \\
&= d^W_{n+1}(\alpha_{n+1}s_n) + (\alpha_n s_{n-1})d^X_n
\end{aligned}$$

De manera análoga para $f,g : X \to Y$ homotópicos y un morfismo $\beta : W \to X$ tenemos que $f\beta \sim g\beta$.

Luego, por la Proposición 1.7 de [13], tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.0.10. *Si $\mathscr{C}$ una categoría aditiva, entonces la categoría homotópica $K(\mathscr{C})$ es aditiva.*

Definición 3.0.11. *En una categoría homotópica $K(\mathscr{C})$ definimos un funtor de traslación $\Sigma = [1]$ intercambiando un grado a la derecha de cada complejo. Más precisamente, para un objeto $X = (X_n, d_n^X)_{n\in\mathbb{Z}}$ en $K(\mathscr{C})$ tenemos que:*

$$X[1] := (X[1]_n, d_n^{X[1]})_{n\in\mathbb{Z}} \quad con \quad X[1] = X_{n-1} \quad y \quad d_n^{X[1]} = -d_{n-1}^X.$$

Y para un morfismo de complejos $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en $K(\mathscr{C})$ tenemos que:

$$f[1] := (f[1]_n)_{n\in\mathbb{Z}} \quad donde \quad f[1]_n = f_{n-1}.$$

Sea $f : X \to Y$ un morfismo entre complejos, se define el **cono de** f, denotado $M(f)$, como el complejo definido por

$$M(f)_n := X_{n-1} \oplus Y_n \quad \text{y} \quad d_n^{M(f)} := \begin{pmatrix} -d_{n-1}^X & 0 \\ f_{n-1} & d_n^Y \end{pmatrix}.$$

En efecto, al tener que

$$\begin{aligned} d_n^{M(f)} \circ d_{n+1}^{M(f)} &= \begin{pmatrix} -d_{n-1}^X & 0 \\ f_{n-1} & d_n^Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_n^X & 0 \\ f_n & d_{n+1}^Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{n-1}^X d_n^X & 0 \\ -f_{n-1}d_n^X + d_n^Y f_n & d_n^Y d_{n+1}^Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

se sigue que el cono $M(f)$ es un complejo. Se consideran morfismos canónicos en $K(\mathscr{C})$,

$$\alpha(f) : Y \to M(f); \quad \alpha(f)_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y_n} \end{pmatrix}$$

y

$$\beta(f) : M(f) \to X[1]; \quad \beta(f)_n := \begin{pmatrix} 1_{X_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Lo cual nos lleva a la siguiente definición:

Definición 3.0.12. *Una sucesión de morfismos y objetos en la categoría homotópica $K(\mathscr{C})$ de la forma*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1]$$

es un triángulo estándar. Un triángulo distinguido en la categoría $K(\mathscr{C})$ es un triángulo que es isomorfo en $K(\mathscr{C})$ a un triángulo estándar.

Proposición 3.0.13. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva, entonces la categoría homotópica $K(\mathscr{C})$ es una categoría triangulada.*

Demostración.

TR1 (a) Se sigue directamente de la definición de triángulo distinguido dada en 3.0.12.

(b) Sea $X \in \mathscr{C}$, luego para el morfismo cero $0 : 0 \to X$ tenemos por la Definición 3.0.11 que $M(0) \cong X$ pues $M(0)_n := X_n$. De esta manera, por la Definición 3.0.12 se tiene que

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0$$

es un triángulo distinguido en $K(C)$. Luego por **TR2** de esta prueba se tiene que

$$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

es un triángulo distinguido en $K(\mathscr{C})$.

(c) Se sigue por la construcción de un triángulo estándar dada en 3.0.12.

TR2 Supóngase

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \tag{1}$$

es un triángulo distinguido en $K(\mathscr{C})$, veamos que

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$$

también es triángulo distinguido en $K(\mathscr{C})$. Para esto podemos asumir que $Z = M(f)$, es decir, $Z_n = M(f)_n$ ya que (1) es isomorfo a un triángulo estándar. Por otro lado, se tiene un triángulo distinguido

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\alpha(g)} M(g) \xrightarrow{\beta(g)} Y[1]$$

donde por definición de morfismo cono se tiene que $M(g)_n = Y_{n-1} \oplus Z_n = Y_{n-1} \oplus X_{n-1} \oplus Y_n$. Luego, definimos morfismos $\phi : X[1] \to M(g)$ como $\phi_n := \begin{pmatrix} -f_{n-1} \\ 1_{X_{n-1}} \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\psi : M(g) \to X[1]$ como $\psi_n := \begin{pmatrix} 0 & 1_{X_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$. Se puede verificar fácilmente que ϕ y ψ son complejos, así obtenemos que

$$(\psi\phi)_n = \psi_n\phi_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{X_{n-1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f_{n-1} \\ 1_{X_{n-1}} \\ 0 \end{pmatrix} = 1_{X_{n-1}}.$$

Sin embargo,

$$(\phi\psi)_n = \phi_n\psi_n = \begin{pmatrix} -f_{n-1} \\ 1_{X_{n-1}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_{X_{n-1}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -f_{n-1} & 0 \\ 0 & 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$(1_{M(g)})_n = \begin{pmatrix} 1_{Y_{n-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{Y_n} \end{pmatrix}.$$

Veamos que $\phi\psi \sim 1_{M(g)}$ mediante la familia de morfismos

$$S_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{Y_n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En efecto, se tiene que

$$
\begin{aligned}
s_{n-1}d_n^{M(g)}+d_{n+1}^{M(g)}s_n &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{Y_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_{n-1}^Y & 0 & 0 \\ 0 & -d_{n-1}^X & 0 \\ 1_{Y_{n-1}} & f_{n-1} & d_n^Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d_n^Y & 0 & 0 \\ 0 & -d_n^X & 0 \\ 1_{Y_n} & f_n & d_{n+1}^Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{Y_n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1_{Y_{n-1}} & f_{n-1} & d_n^Y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d_n^Y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{Y_n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1_{Y_{n-1}} & f_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{Y_n} \end{pmatrix} \\
&= (1_{M(g)})_n - \phi_n \psi_n
\end{aligned}
$$

De esta manera, se puede ver que $\phi\psi$ es homotópico a $1_{M(g)}$ y así $\phi\psi = 1_{M(g)}$ en $K(\mathscr{C})$. Por lo tanto ϕ y ψ son isomorfismos en $K(\mathscr{C})$. Luego, se puede verificar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_Y"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1_Z"'] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"] \arrow[d, "\phi"'] & Y[1] \arrow[d, "1_{Y[1]}"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "\alpha(g)"'] & M(g) \arrow[r, "\beta(g)"'] & Y[1].
\end{tikzcd}
$$

Lo cual demuestra que

$$
Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]
$$

es un triángulo distinguido.

TR3 Por la Definición 3.0.12 podemos suponer la existencia de dos triángulos distinguidos

$$
X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1] \quad \text{y} \quad X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{\alpha(f')} M(f') \xrightarrow{\beta(f')} X'[1],
$$

y un par de morfismos $u : X \to X'$ y $v : Y \to Y'$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y.'
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

Queremos completar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "v"] & M(f) \arrow[r, "\beta(f)"] & X[1] \arrow[d, "u[1]"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "\alpha(f')"'] & M(f') \arrow[r, "\beta(f')"'] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

a un morfismo de triángulos distinguidos. Al tener que (1) es conmutativo, es decir, $f'u = vf$ en $K(\mathscr{C})$ significa que existe una familia de morfismos $s_n : X_n \to Y'_{n+1}$ tal que

$$f_n v_n - f'_n u_n = s_{n-1} d_n^X + d_{n+1}^{Y'} s_n.$$

Luego, definimos un morfismo de complejos $w : M(f) \to M(f')$ cuya n-ésima componente $w_n : X_{n-1} \oplus Y_n \to X'_{n-1} \oplus Y'_n$ está representada por

$$w_n := \begin{pmatrix} u_{n-1} & 0 \\ s_{n-1} & v_n \end{pmatrix}.$$

Primero verifiquemos que $w : M(f) \to M(f')$ es un morfismo de complejos, esto es ver que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & M(f)_n \arrow[r, "d_n^{M(f)}"] \arrow[d, "w_n"'] & M(f)_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "w_{n-1}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & M(f')_n \arrow[r, "d_n^{M(f')}"'] & M(f')_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

En efecto, se tiene que

$$
\begin{aligned}
w_{n-1}d_n^{M(f)} &= \begin{pmatrix} u_{n-2} & 0 \\ s_{n-2} & v_{n-1}. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_{n-1}^X & 0 \\ f_{n-1} & d_n^Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -u_{n-2}d_{n-1}^X & 0 \\ -s_{n-2}d_{n-1}^X + v_{n-1}f_{n-1} & v_{n-1}d_n^Y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -d_n^{X'}u_{n-1} & 0 \\ f'_{n-1}u_{n-1} + d_n^{Y'}s_{n-1} & d_n^{Y'}v_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -d_{n-1}^{X'} & 0 \\ f'_{n-1} & d_n^{Y'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} & 0 \\ s_{n-1} & v_n. \end{pmatrix} \\
&= d_n^{M(f')}w_n.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $w : M(f) \to M(f')$ es un morfismo de complejos. Sólo falta ver que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "v"] & M(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, dashed, "w"] & X[1] \arrow[d, "u[1]"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "\alpha(f')"'] & M(f') \arrow[r, "\beta(f')"'] & X'[1]
\end{tikzcd} \tag{2}
$$

es conmutativo. Por un lado, tenemos que

$$
w_n\alpha(f)_n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & 0 \\ s_{n-1} & v_n. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y'_n} \end{pmatrix} v_n = \alpha(f')_n v_n.
$$

Por otro lado, tenemos que

$$
\beta(f')_n w_n = \begin{pmatrix} 1_{X'_{n-1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} & 0 \\ s_{n-1} & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = u_{n-1} \begin{pmatrix} 1_{X_{n-1}} & 0 \end{pmatrix} = u[1]_n\beta(f)_n.
$$

Probándose que (2) es conmutativo. Lo cual demuestra que se satisface **TR3**.

TR4 De nuevo por Definición 3.0.12, podemos suponer tenemos tres triángulos distinguidos

$$
X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} Z' \xrightarrow{\beta(f)} X[1],
$$

$$
Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\alpha(g)} X' \xrightarrow{\beta(g)} Y[1],
$$

y

$$X \xrightarrow{gf} Z \xrightarrow{\alpha(gf)} Y' \xrightarrow{\beta(gf)} X[1].$$

Donde

$$Z' = M(f) \text{ con } M(f)_n = X[1] \oplus Y_n = X_{n-1} \oplus Y_n,$$

$$X' = M(g) \text{ con } M(g)_n = Y[1] \oplus Z_n = Y_{n-1} \oplus Z_n,$$

y

$$Y' = M(gf) \text{ con } M(gf)_n = X[1] \oplus Z_n = X_{n-1} \oplus Z_n.$$

Luego, definimos tres morfismos de complejos como $f' : Z' \to Y'$ con $f'_n := \begin{pmatrix} 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & g_n \end{pmatrix}$, otro morfismo $g' : Y' \to X'$ con $g'_n := \begin{pmatrix} f_{n-1} & 0 \\ 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix}$ y $h : X' \to Z'[1]$ como $h := \alpha(f)[1]\beta(g)$, es decir, $h_n = \alpha(f)[1]_n\beta(g)_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$. De esta manera se puede ver directamente que estos morfismos son complejos obteniendo un triángulo

$$Z' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} X' \xrightarrow{h} Z'[1],$$

tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "f'"'] & X[1] \arrow[d, "1_{X[1]}"] \\
X \arrow[r, "gf"'] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "\alpha(gf)"'] \arrow[d, "1_Z"] & Y' \arrow[r, "\beta(gf)"'] \arrow[d, "g'"'] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
Y \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "\alpha(f)"'] & Z \arrow[r, "\alpha(g)"'] \arrow[d, "\alpha(gf)"'] & X' \arrow[r, "\beta(g)"'] \arrow[d, "1_{X'}"] & Y[1] \arrow[d, "\alpha(f)[1]"] \\
Z' \arrow[r, dashed, "f'"'] & Y' \arrow[r, dashed, "g'"'] & X' \arrow[r, dashed, "h"'] & Z'[1].
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Sólo faltaría verificar que el triángulo

$$Z' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} X' \xrightarrow{h} Z'[1]$$

es distinguido, para esto vamos a construir un morfismo de triángulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "1_{Z'}"'] & Y' \arrow[r, "\alpha(f')"] \arrow[d, "1_{Y'}"] & M(f') \arrow[r, "\beta(f')"] \arrow[d, dashed, "\phi"] & Z'[1] \arrow[d, "1_{Z'[1]}"] \\
Z' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & X' \arrow[r, "h"'] & Z'[1]
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Donde $\phi : M(f') \to X'$ debe ser un isomorfismo en $K(\mathscr{C})$. Para esto, notemos que

$$M(f')_n := Z'_{n-1} \oplus Y'_n = X_{n-2} \oplus Y_{n-1} \oplus X_{n-1} \oplus Z_n$$

y que $X'_n := Y_{n-1} \oplus Z_n$, lo cual nos lleva a definir el morfismo ϕ como

$$\phi_n := \begin{pmatrix} 0 & 1_{Y_{n-1}} & f_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix}.$$

Veamos primero que ϕ es un morfismo de complejos, para esto veamos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & M(f')_n \arrow[r, "d_n^{M(f')}"] \arrow[d, "\phi_n"'] & M(f')_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & X'_n \arrow[r, "d_n^{X'}"'] & X'_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
d_n^X \phi_n &= \begin{pmatrix} -d_{n-1}^Y & 0 \\ g_{n-1} & d_n^Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_{Y_{n-1}} & f_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -d_{n-1}^Y & -d_{n-1}^Y f_{n-1} & 0 \\ 0 & g_{n-1} & (gf)_{n-1} & d_n^Z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -d_{n-1}^Y & -f_{n-2} d_{n-1}^X & 0 \\ 0 & g_{n-1} & (gf)_{n-1} & d_n^Z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1_{Y_{n-1}} & f_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_{n-2}^X & 0 & 0 & 0 \\ -f_{n-2} & -d_{n-1}^Y & 0 & 0 \\ 1_{X_{n-2}} & 0 & -d_{n-1}^X & 0 \\ 0 & g_{n-1} & (gf)_{n-1} & d_n^Z \end{pmatrix} \\
&= \phi_{n-1} d_n^{M(f')}
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\phi : M(f') \to X'$ es un isomorfismo, para esto definimos otro morfismo $\psi : X' \to M(f')$ como

$$\psi_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z_n}. \end{pmatrix}$$

Se sigue de la siguiente igualdad que ψ es un morfismo de complejos:

$$
\begin{aligned}
d_n^{M(f')}\psi_n &= \begin{pmatrix} -d_{n-2}^X & 0 & 0 & 0 \\ -f_{n-2} & -d_{n-1}^Y & 0 & 0 \\ 1_{X_{n-2}} & 0 & -d_{n-1}^X & 0 \\ 0 & g_{n-1} & (gf)_{n-1} & d_n^Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_{Y_{n-1}} & 0 \\ g_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \psi_{n-1} d_n^{X'}.
\end{aligned}
$$

Podemos notar que ψ es inverso derecho de ϕ de la siguiente igualdad:

$$
\phi_n\psi_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{Y_{n-1}} & f_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{Y_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} = 1_{X'_n}
$$

Sin embargo, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\psi_n\phi_n &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_{Y_{n-1}} & f_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{Y_{n-1}} & f_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} \\
&\neq \begin{pmatrix} 1_{X_{n-2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{Y_{n-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} = 1_{M(f')_n}.
\end{aligned}
$$

Pero si definimos una familia de morfismos

$$s_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} d_{n-1}^{M(f')}s_n + s_{n-1}d_n^{M(f')} &= \begin{pmatrix} d_{n-1}^X & 0 & 0 & 0 \\ -f_{n-1} & -d_n^Y & 0 & 0 \\ 1_{X_{n-1}} & 0 & -d_n^X & 0 \\ 0 & g_n & (gf)_n & d_{n+1}^Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{n-1}^X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{n-2}^X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{n-2}^X & 0 & 0 & 0 \\ -f_{n-2} & -d_{n-1}^Y & 0 & 0 \\ 1_{X_{n-2}} & 0 & -d_{n-1}^X & 0 \\ 0 & g_{n-1} & (gf)_{n-1} & d_n^Z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_{X_{n-2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 1_{M(f')_n} - \psi_n\phi_n. \end{aligned}$$

Lo cual significa que $\psi\phi$ es homotópico a $1_{M(f')}$, $\psi\phi \cong 1_{M(f')}$. Esto es $\psi\phi = 1_{M(f')}$ en la categoría $K(\mathscr{C})$.

Finalmente veamos que el diagrama (2) es conmutativo, lo cual se sigue de

$$\phi_n\alpha(f')_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{Y_{n-1}} & f_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n-1} & 0 \\ 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} = g'_n$$

y

$$\beta(f')_n\psi_n = \begin{pmatrix} 1_{X_{n-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{Y_{n-1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n-1}} & 0 \end{pmatrix} = g'_n$$

Por tanto, de lo anterior se concluye que el triángulo

$$Z' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} X' \xrightarrow{h} Z'[1]$$

es distinguido en $K(\mathscr{C})$.

$\square$

Teorema 3.0.14. *El funtor $H_n : K(\mathscr{C}) \to \mathscr{C}$ es un funtor homológico.*

Demostración. Veamos se satisface la Definición 1.1.4. La categoría $\mathscr{C}$ ya es abeliana por hipótesis, por la Proposición 3.0.13 tenemos que $K(\mathscr{C})$ es una categoría triangulada y por la Proposición 3.0.6 tenemos que la asignación $H_n : K(\mathscr{C}) \to \mathscr{C}$ definida como en la Observación 3.0.4 es funtorial para todo $n \in \mathbb{Z}$. Primero haremos la prueba para $n = 0$, para esto consideramos un triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

en $K(C)$; y sabemos por **TR2** que

$$Z[-1] \xrightarrow{h[-1]} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z,$$

también es triángulo distinguido en $K(\mathscr{C})$. Ahora, aplicando **TR3** al cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Z[-1] \arrow[r, "h[-1]"] \arrow[d, "1_{Z[-1]}"'] & X \arrow[d, "1_X"] \\
Z[-1] \arrow[r, "h[-1]"'] & X,
\end{tikzcd}$$

se obtiene un morfismo de triángulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
Z[-1] \arrow[r, "h[-1]"] \arrow[d, "1_{Z[-1]}"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi"'] & Z \arrow[d, "1_Z"] \\
Z[-1] \arrow[r, "h[-1]"'] & X \arrow[r, "\alpha(h[-1])"'] & M(h[-1]) \arrow[r, "\beta(h[-1])"'] & Z,
\end{tikzcd} \tag{1}$$

donde $M(h[-1])_n = Z_n \oplus X_n$, $\alpha(h[-1]) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_X \end{pmatrix}$ y $\beta(h[-1]) = \begin{pmatrix} 1_Z & 0 \end{pmatrix}$. De esta manera al tener que las identidades $1_{Z[-1]}, 1_X$ y 1_Z son isomorfismos, se sigue por la Proposición 1.1.7, que $\phi : Y \to M(h[-1])$ también es un isomorfismo y por tanto (1) es un isomorfismo de triángulos. Luego, por **TR2** obtenemos el siguiente isomorfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1_Z"'] & X[1] \arrow[d, "1_{X[1]}"] \\
X \arrow[r, "\alpha(h[-1])"'] & M(h[-1]) \arrow[r, "\beta(h[-1])"'] & Z \arrow[r, "h"'] & X[1].
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Luego, si aplicamos el funtor H_0 al diagrama (2) tenemos que las sucesiones

$$H_0(X) \longrightarrow H_0(Y) \longrightarrow H_0(Z) \quad \text{y} \quad H_0(X) \longrightarrow H_0(M(h[-1])) \longrightarrow H_0(Z)$$

son isomorfas ya que un funtor preserva isomorfismos. Por otro lado, se tiene que

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha(h[-1])} M(h[-1]) \xrightarrow{\beta(h[-1])} Z \longrightarrow 0 \tag{3}$$

es una sucesión exacta corta que se escinde en $K(\mathscr{C})$, pues $M(h[-1])_n = Z_n \oplus X_n \cong X_n \oplus Z_n$. Así, al aplicar la Proposición 3.0.8 a (3) obtenemos que

$$H_0(X) \longrightarrow H_0(M(h[-1])) \longrightarrow H_0(Z),$$

es una sucesión exacta y por tanto

$$H_0(X) \longrightarrow H_0(Y) \longrightarrow H_0(Z),$$

también es una sucesión exacta. Probándose que H_n es un funtor homológico para $n = 0$. Para probar que H_n es funtor cohomológico para toda $n \in \mathbb{Z}$ notemos primero que

$$H_0(X[-n]) = \frac{Ker(d_0^{X[-n]})}{Im(d_1^{X[-n]})} = \frac{Ker(-d_n^X)}{Im(-d_{n+1}^X)} = \frac{Ker(d_n^X)}{Im(d_{n+1}^X)} = H_n(X). \tag{4}$$

para todo $X \in K(\mathscr{C})$ y $n \in \mathbb{Z}$. Entonces al considerar el triángulo distinguido

$$X[-n] \xrightarrow{f[-n]} Y[-n] \xrightarrow{g[-n]} Z[-n] \xrightarrow{h[-n]} X[-(n+1)]$$

en $K(\mathscr{C})$ y tener que el funtor $H_0 : K(\mathscr{C}) \to \mathscr{C}$ es homológico, obtenemos una sucesión exacta

$$H_0(X[-n]) \longrightarrow H_0(Y[-n]) \longrightarrow H_0(Z[-n]),$$

en $\mathscr{C}$. Pero por la igualdad (4) se obtiene que

$$H_n(X) \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(Z),$$

es una sucesión exacta en $\mathscr{C}$. Lo cual prueba que el funtor $H_n : K(\mathscr{C}) \to \mathscr{C}$ es homológico para toda $n \in \mathbb{Z}$.

$\square$

A continuación veremos que los objetos acíclicos en $K(\mathscr{C})$, recordar Definición 3.0.3, tienen una muy buena propiedad.

Lema 3.0.15. *Definimos una subclase de de objetos en $K(\mathscr{C})$ como*

$$\mathscr{N} := \{X \in Obj(K(\mathscr{C})) \,|\, H_n(X) = 0 \quad para \quad todo \quad n \in \mathbb{Z}\}.$$

Entonces $\mathscr{N}$ es un sistema nulo.

Demostración. Veamos que la clase $\mathscr{N}$ satisface las condiciones de la Definición 2.2.1.

(N1) Es claro que para el complejo $0 \in K(\mathscr{C})$ se tiene que $H_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y por tanto $0 \in \mathscr{N}$.

(N2) Primero observemos que $H_n(X) = H_{n+1}(X[1])$ ya que

$$H_{n+1}(X[1]) = \frac{Ker(d_{n+1}^{X[1]})}{Im(d_{n+2}^{X[1]})} = \frac{Ker(-d_n^X)}{Im(-d_{n+1}^X)} = \frac{Ker(d_n^X)}{Im(d_{n+1}^X)} = H_n(X).$$

De esta manera para $X \in \mathscr{N}$, entonces $H_{n+1}(X) = 0$ y por la igualdad anterior tenemos que $H_n(X[1]) = 0$, por tanto $X[1] \in \mathscr{N}$.

Análogamente se puede ver que si $X[1] \in \mathscr{N}$ entonces $X \in \mathscr{N}$.

(N3) Consideramos un triángulo distinguido

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

en $K(\mathscr{C})$ con $X, Y \in \mathscr{N}$. Veamos que $Z \in \mathscr{C}$, para esto notemos que en virtud del axioma **TR2**, el triángulo

$$Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1] \longrightarrow Y[1]$$

es distinguido en $K(\mathscr{C})$. Luego, por el Teorema 3.0.14 se tiene que

$$H_n(Y) \longrightarrow H_n(Z) \longrightarrow H_n(X[1]) \tag{1}$$

es una sucesión exacta en $\mathscr{C}$ con $H_n(Y) = 0$ y $H_n(X[1]) = H_{n-1}(X) = 0$, implicando que $H_n(Z) = 0$. Probándose que $Z \in \mathscr{N}$.

$\square$

Proposición 3.0.16. *Sea Q la clase de todos los cuasi-isomorfismos en $K(\mathscr{C})$, y $\mathscr{N}$ como en el Lema 3.0.15 entonces $Q = W(\mathscr{N})$.*

Demostración. Antes de comenzar la prueba recordemos que

$$W(\mathscr{N}) := \{f : X \to Y \in Mor(K(\mathscr{C})) \,|\, \text{existe}\, X \to Y \to Z \to X[1] \in \triangle \text{ con } Z \in \mathscr{N}\}.$$

Supóngase que $f \in W(\mathscr{N})$, entonces podemos obtener un triángulo distinguido

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

en $K(\mathscr{C})$, donde $Z \in \mathscr{N}$, esto es, $H_n(Z) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, se considera el siguiente triángulo distinguido en $K(\mathscr{C})$:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1]. \tag{1}$$

Luego, por **TR3** y la Proposición 1.1.7, obtenemos el siguiente isomorfismo de triángulos distinguidos:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "1_Y"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\phi"'] & X[1] \arrow[d, "1_{X[1]}"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r] & M(f) \arrow[r] & X[1].
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, tenemos que $H_n(M(f)) = 0 = H_n([-1]M(f))$. Por otro lado, aplicando **TR2** al triángulo distinguido (1) obtenemos otro triángulo distinguido

$$[-1]M(f) \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow M(f) \tag{2}$$

Ahora, por el Teorema 3.0.14 aplicado al triángulos distinguidos (2) obtenemos la siguiente sucesiones exacta en $\mathscr{C}$:

$$0 \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y) \longrightarrow 0.$$

Probándose que $H_n(f)$ es isomorfismo, es decir, f es cuasi-isomorfismo.

Ahora supóngase que $f : X \to Y$ es un cuasi-isomorfismo, luego consideramos el siguiente triángulo distinguido en $K(\mathscr{C})$:

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow M(f) \longrightarrow X[1].$$

Queremos ver que $f \in W(\mathscr{N})$, esto es $H_n(M(f)) = 0$. Pero esto se sigue del hecho que H_n es un funtor homológico, obteniendo la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{C}$:

$$H_n(X) \xrightarrow{f^*} H_n(Y) \longrightarrow H_n(M(f)) \longrightarrow H_n(X[1]) \xrightarrow{f[1]^*} H_n(Y[1])$$

donde $f^* = H_n(f)$ y $f[1]^* = H_n(f[1])$ isomorfismos. Por tanto, $H_n(M(f)) = 0$.

$\square$

Ahora bien, estamos listos para poder definir la categoría derivada respectiva a una categoría abeliana $\mathscr{C}$.

Definición 3.0.17. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana, decimos que la categoría*

$$D(\mathscr{C}) := K(\mathscr{C})_{W(\mathscr{N})}$$

definida en la Proposición 2.2.3 es la ***categoría derivada de*** *$\mathscr{C}$.*

Nótese que por la misma Proposición 2.2.3 la categoría derivada $D(\mathscr{C})$ es triangulada.

Las categorías derivadas nos proporcionan numerosos ejemplos de categorías trianguladas. Por ejemplo, considerando la categoría abeliana $Mod(R)$ de módulos sobre un anillo R se tiene que su categoría derivada $D(R)$ es triangulada. Cabe mencionar que cuando se trata el caso de las categorías derivadas de categorías de módulos sobre un anillo R, se denota usualmente en la literatura $D(R)$ en vez de $D(Mod(R))$.

Decimos que un complejo X en $Kom(\mathscr{C})$ es acotado inferiormente si existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $X_n = 0$ para todo $n > N$.

$$X := \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X_N \xrightarrow{d_N^X} X_{N-1} \xrightarrow{d_{N-1}^X} X_{N-2} \longrightarrow \ldots$$

De manera análoga, decimos que X en $Kom(\mathscr{C})$ es acotado superiormente si existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $X_n = 0$ para todo $n < N$.

$$X := \ldots \longrightarrow X_{N+2} \xrightarrow{d_{N+2}^X} X_{N+1} \xrightarrow{d_{N+1}^X} X_N \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

Se dice que un complejo X es acotado, si X es acotado inferiormente y superiormente.

Se puede ver que la clase de todos los complejos acotados inferiormente es una subcategoría plena de $Kom(\mathscr{C})$, denotada $Kom(\mathscr{C})^-$. De la misma manera, la clase de todos los complejos acotados superiormente y acotados (superiormente e inferiormente), son subcategorías plenas de $Kom(\mathscr{C})$, denotadas $Kom(\mathscr{C})^+$ y $Kom(\mathscr{C})^b$ respectivamente. Si restringimos el funtor canónico $F : Kom(\mathscr{C}) \to K(\mathscr{C})$ a $Kom(\mathscr{C})^*$ con $* \in \{+,-,b\}$, denotaremos a las imágenes de dicho funtor como $K^*(\mathscr{C})$ con $* \in \{+,-,b\}$. Dicho lo anterior, por la Definición 3.0.17 podemos definir las categorías trianguladas $D^*(\mathscr{C})$ como $K^*(\mathscr{C})_{W(\mathscr{N})}$ con $* \in \{+,-,b\}$.

Capítulo 4

Teorías de torsión trianguladas

En este capítulo se introduce la noción de una teoría de torsión en una categoría triangulada y se estudian algunas de sus propiedades, basándonos en [6]. Posteriormente, se estudia una caracterización importante de categoría triangulada que nos permitira definir y caracterizar las teorías de torsión hereditarias en una categoría triangulada. Por último, se introduce para una categoría triangulada el concepto de una t-estructura y se establece una correspondencia biyectiva entre sus clases de torsión trianguladas y sus t-estructuras.

Las teorías de torsión fueron introducidas formalmente en el contexto de las categorías abelianas por Dickson [8], a mediados de los años cincuenta, las cuales constituyen una importante generalización del concepto de grupo abeliano de torsión. Una **teoría de torsión** para una categoría abeliana $\mathscr{C}$ es una pareja $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ de subcategorías propias, cerradas bajo isomorfismos y plenas de $\mathscr{C}$ que satisfacen lo siguiente:

(i) $Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{X},\mathscr{Y})=0$,

(iii) Para todo $C\in\mathscr{C}$, existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow X_C \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} Y_C \longrightarrow 0$$

con $X_C\in\mathscr{X}$ y $Y_C\in\mathscr{Y}$. A la subcategoría $\mathscr{X}$ se le llama **clase de torsión** y a la subcategoría $\mathscr{Y}$ se le llama **clase libre de torsión**.

Una analogía formal entre una categoría abeliana y una categoría triangulada, es que en la primera existe la noción de sucesión exacta y en la segunda está la noción de triángulo como sustituto a la de una sucesión exacta. Al usar la definición de sucesión exacta dentro de la noción de teoría de torsión en categorías abelianas, cabe preguntarse cómo extender esta noción de teoría de torsión en términos de triángulos distinguidos en una categoría triangulada. Esto nos motiva a dar la siguiente definición:

Definición 4.0.1. *Sea $\mathscr{T}$ una categoría triangulada, una* ***teoría de torsión*** *en $\mathscr{T}$, o bien* ***una teoría de torsión triangulada****, es una pareja $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ de subcategorías propias, cerradas bajo isomorfismos y plenas de $\mathscr{T}$ que satisfacen lo siguiente:*

(i) $Hom_{\mathscr{T}}(\mathscr{X},\mathscr{Y})=0$,

(ii) $\Sigma(\mathscr{X})\subseteq\mathscr{X}$ *y* $\Sigma^{-1}(\mathscr{Y})\subseteq\mathscr{Y}$,

(iii) Para todo $C\in\mathscr{T}$, existe un triángulo distinguido

$$X_C\xrightarrow{f}C\xrightarrow{g}Y_C\xrightarrow{h}\Sigma X,$$

con $X_C\in\mathscr{X}$ y $Y_C\in\mathscr{Y}$. A la subcategoría $\mathscr{X}$ se le llama ***clase de torsión*** *y a la subcategoría $\mathscr{Y}$ se le llama* ***clase libre de torsión***.

Lema 4.0.2. *Sean $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ una teoría de torsión en una categoría triangulada $\mathscr{T}$ y $C\in\mathscr{T}$. Si*

$$\triangle_1:=X_C\xrightarrow{f}C\xrightarrow{g}Y_C\xrightarrow{h}\Sigma X_C,\quad y\quad \triangle_2:=X'_C\xrightarrow{f'}C\xrightarrow{g'}Y'_C\xrightarrow{h'}\Sigma X'_C,$$

son triángulos distinguidos con $X_C,X'_C\in\mathscr{X}$ y $Y_C,Y'_C\in\mathscr{Y}$. Entonces $\triangle_1\cong\triangle_2$.

Demostración. Aplicando el funtor $Hom_{\mathscr{T}}(X_C,-):\mathscr{T}\to Ab$ al triángulo distinguido $\triangle_1$, se obtiene por la Proposición 1.1.6, una sucesión exacta larga

$$...\longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X_C,\Sigma^{-1}(Y_C))\longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X_C,X_C)\xrightarrow{(X_C,f)}Hom_{\mathscr{T}}(X_C,C)\longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X_C,Y_C)\longrightarrow...$$

Donde $Hom_{\mathscr{T}}(X_C,\Sigma^{-1}(Y_C))=0=Hom_{\mathscr{T}}(X_C,Y_C)$, al ser $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ una teoría de torsión. Entonces, (X_C,f) es un isomorfismo. Consecuentemente, si $\beta\in Hom_{\mathscr{T}}(X_C,X_C)$ es tal que $f\beta=f$, entonces $\beta=1_{X_C}$. De manera análoga, se puede demostrar que si $\beta'\in Hom_{\mathscr{T}}(X'_C,X'_C)$ es tal que $f'=f'\beta'$, entonces $\beta'=1_{X'_C}$.

Por otro lado, aplicando el funtor $Hom_{\mathscr{T}}(X_C,-):\mathscr{T}\to Ab$ al triángulo distinguido $\triangle_2$, se obtiene por la Proposición 1.1.6, una sucesión exacta larga

$$...\longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X_C,\Sigma^{-1}(Y'_C))\longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X_C,X'_C)\xrightarrow{(X_C,f')}Hom_{\mathscr{T}}(X_C,C)\longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X_C,Y'_C)\longrightarrow...$$

Donde al ser $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ una teoría de torsión en $\mathscr{T}$, se sigue que $Hom_{\mathscr{T}}(X_C,\Sigma^{-1}(Y_C)) = 0$ y $Hom_{\mathscr{T}}(X_C,Y'_C) = 0$. De esta manera, el morfismo (X_C, f') en la sucesión exacta anterior es un isomorfismo. Así, para el morfismo $f \in Hom_{\mathscr{T}}(X_C,C)$ existe un único morfismo $\alpha \in Hom_{\mathscr{T}}(X_C,X'_C)$ tal que $f'\alpha = f$. Veamos que $\alpha : X_C \to X'_C$ es un isomorfismo. En efecto, al aplicar el funtor $Hom_{\mathscr{T}}(X'_C,-) : \mathscr{T} \to Ab$ al triángulo distinguido $\triangle_1$, se obtiene por la Proposición 1.1.6, una sucesión exacta larga

$$\ldots \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X'_C,\Sigma^{-1}(Y_C)) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X'_C,X_C) \xrightarrow{(X'_C,f')} Hom_{\mathscr{T}}(X'_C,C) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X'_C,Y_C) \longrightarrow \ldots$$

Donde al ser $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ una teoría de torsión en $\mathscr{T}$, se sigue que $Hom_{\mathscr{T}}(X'_C,\Sigma^{-1}(Y_C)) = 0$ y $Hom_{\mathscr{T}}(X'_C,Y_C) = 0$. De esta manera, el morfismo (X'_C, f') en la sucesión exacta anterior es un isomorfismo. Así, para el morfismo $f' \in Hom_{\mathscr{T}}(X'_C,C)$ existe un único morfismo $\alpha' \in Hom_{\mathscr{T}}(X'_C,X_C)$ tal que $f' = f\alpha'$. De esta manera, tenemos $f(\alpha'\alpha) = (f\alpha')\alpha = f'\alpha = f$, y por tanto $\alpha'\alpha = 1_{X_C}$. De manera análoga, se puede ver que $\alpha\alpha' = 1_{X'_C}$. Probándose que α es un isomorfismo. Así, del hecho que $\alpha, \Sigma(\alpha)$ y 1_C son isomorfismos, se obtiene por la Proposición 1.1.7 el siguiente isomorfismo de triángulos:

$$\begin{tikzcd}
X_C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & Y^C \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed] & \Sigma X_C \arrow[d, "\Sigma\alpha"] \\
X'_C \arrow[r, "f'"'] & C \arrow[r, "g'"'] & Y'^C \arrow[r, "h'"'] & \Sigma X'_C.
\end{tikzcd}$$

□

Definición 4.0.3. *Sea $\mathscr{Z}$ una clase de objetos en una categoría aditiva $\mathscr{C}$, denotamos como*

$$^{\perp}\mathscr{Z} := \{X \in \mathscr{C} \mid Hom_{\mathscr{C}}(X,\mathscr{Z}) = 0\}$$

*a **la clase ortogonal izquierda de** $\mathscr{Z}$. Y*

$$\mathscr{Z}^{\perp} := \{Y \in \mathscr{C} \mid Hom_{\mathscr{C}}(\mathscr{Z},Y) = 0,\}$$

*como **la clase ortogonal derecha de** $\mathscr{Z}$.*

Proposición 4.0.4. *Sea una pareja de subcategorías propias y plenas $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ de una categoría triangulada $\mathscr{T}$, que satisfacen (i) y (iii) de la Definición 4.0.1, entonces se satisface lo siguiente:*

(a) Si $\Sigma(X) \subseteq X$, entonces $\mathscr{X}^{\perp} = \mathscr{Y}$ y $\Sigma^{-1}(\mathscr{Y}) \subseteq \mathscr{Y}$;

(b) *si* $\Sigma^{-1}(\mathscr{Y}) \subseteq \mathscr{Y}$*, entonces* ${}^{\perp}\mathscr{Y} = \mathscr{X}$ *y* $\Sigma(\mathscr{X}) \subseteq \mathscr{X}$*;*

(c) *si* $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ *es una teoría de torsión en* $\mathscr{T}$*, entonces* $\mathscr{X}^{\perp} = \mathscr{Y}$ *y* ${}^{\perp}\mathscr{Y} = \mathscr{X}$*.*

Demostración. (a) Al tener (i) por la Definición 4.0.1, se sigue que $Hom_{\mathscr{T}}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = 0$, y así $\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{X}^{\perp}$. Ahora, tomando $C \in \mathscr{X}^{\perp}$, obtenemos por (iii) de la Definición 4.0.1 el siguiente triángulo distinguido:

$$X_C \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} Y_C \xrightarrow{h} \Sigma X.$$

Luego, por **TR2**, se obtiene el siguiente triángulo distinguido:

$$\Sigma^{-1}(C) \longrightarrow \Sigma^{-1}(Y_C) \longrightarrow X_C \xrightarrow{f} C.$$

Donde $f = 0$ por tener $C \in \mathscr{X}^{\perp}$. Así, por el Corolario 1.2.7 de [26], tenemos que $\Sigma^{-1}(Y_C) \cong \Sigma^{-1}(C) \oplus X_C$. De tal manera que al aplicar el funtor de traslación Σ, se tiene que $Y_C \cong C \oplus \Sigma(X_C)$. Con $\Sigma(X_C) \in \mathscr{X}$ y $Y_C \in \mathscr{Y}$. Luego, consideramos la inclusión $i_2 : \Sigma(X_C) \to C \oplus \Sigma(X_C) \cong Y_C$ dada por $i_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1_{\Sigma(X_C)} \end{pmatrix}$. De esta manera, al tener que $i_2 \in Hom_{\mathscr{T}}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ y tener por hipótesis que $Hom_{\mathscr{T}}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = 0$, se sigue que $i_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $\Sigma(X_C) = 0 = X_C$ y consecuentemente $C \cong Y_C \in \mathscr{Y}$.

Ahora, para $Y \in \mathscr{Y}$, tenemos del hecho que $\Sigma(\mathscr{X}) \in \mathscr{X}$ y que Σ es funtor de traslación, que

$$Hom_{\mathscr{T}}(\mathscr{X}, \Sigma^{-1}(Y)) \cong Hom_{\mathscr{T}}(\Sigma(\mathscr{X}), Y) = 0.$$

Entonces $\Sigma^{-1}(Y) \in \mathscr{X}^{\perp}$, es decir, $\Sigma^{-1}(\mathscr{Y}) \subseteq \mathscr{Y}$.

(b) Es una prueba análoga al inciso (a).

(c) Al ser $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ una teoría de torsión triangulada en $\mathscr{T}$, entonces se satisface (ii) de la Definición 4.0.1. En consecuencia, $\Sigma(\mathscr{X}) \subseteq \mathscr{X}$ y $\Sigma^{-1}(\mathscr{Y}) \subseteq \mathscr{Y}$. De esta manera, por los incisos (a) y (b), se sigue que $\mathscr{X}^{\perp} = \mathscr{Y}$ y ${}^{\perp}\mathscr{Y} = \mathscr{X}$.

$\square$

Definición 4.0.5. *Sea* $\mathscr{T}$ *una categoría triangulada y* $\mathscr{Z}$ *una subcategoría plena de* $\mathscr{T}$*, entonces decimos que* $\mathscr{Z}$ *es* ***cerrada bajo extensiones*** *si para todo triángulo distinguido*

$$Z_1 \longrightarrow C \longrightarrow Z_2 \longrightarrow \Sigma Z_1,$$

con $Z_1, Z_2 \in \mathscr{Z}$ *se tiene que* $C \in \mathscr{Z}$*.*

Observación 4.0.6. *Si* $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ *es una teoría de torsión en una categoría triangulada* $\mathscr{T}$*, entonces* $\mathscr{X}$ *y* $\mathscr{Y}$ *son subcategorías de* $\mathscr{T}$ *cerradas bajo extensiones.*

Demostración. Sea $\mathscr{X}$ la clase de torsión de la teoría de torsión triangulada $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, y sea

$$X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow \Sigma X', \tag{1}$$

un triángulo distinguido en $\mathscr{T}$ con $X',X \in \mathscr{X}$. Luego, aplicando el funtor $Hom_{\mathscr{T}}(-,Y) : \mathscr{T} \to Ab$ con $Y \in \mathscr{Y}$ al triángulo (1), se obtiene por la Proposición 1.1.6, la siguiente sucesión exacta en la categoría Ab:

$$Hom_{\mathscr{T}}(X'',Y) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X,Y) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X',Y).$$

Donde $Hom_{\mathscr{T}}(X'',Y) = Hom_{\mathscr{T}}(X',Y) = 0$ al ser $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ teoría de torsión. Por lo tanto, se tiene que $Hom_{\mathscr{T}}(X,Y) = 0$ y así, $X \in^{\perp} \mathscr{Y} = \mathscr{X}$. Se puede probar de la misma manera que la clase libre de torsión $\mathscr{Y}$ es una subcategoría de $\mathscr{T}$ cerrada bajo extensiones.

□

La siguiente proposición es una caracterización de la clase de torsión y la clase libre de torsión de una teoría de torsión para categorías trianguladas. Pero para facilitar el entendimiento de la prueba, el lector debe tener en la mente el concepto de una subcategoría reflexiva.

Definición 4.0.7. *Sea $\mathscr{D}$ una subcategoría plena de $\mathscr{C}$, decimos que $\mathscr{D}$ es **una subcategoría reflexiva de** $\mathscr{C}$ si para cada objeto $C \in \mathscr{C}$, existe un objeto $D_C \in \mathscr{D}$ y un morfismo $r_C : C \to D_C$ tal que para todo morfismo $f : C \to D$, existe un único morfismo $\bar{f} : D_C \to D$, tal que $f = \bar{f} r_C$.*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "r_C"] \arrow[dr, "f"'] & D_C \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & D. \end{tikzcd}$$

Lo anterior establece una asignación funtorial $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, donde L es llamado usualmente el **funtor reflector**. Y además, $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor adjunto izquierdo de la inclusión $i : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. Dicho esto, que $\mathscr{D}$ sea una subcategoría reflexiva de $\mathscr{C}$ es equivalente a decir que la inclusión $i : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tiene un funtor adjunto izquierdo $L : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. Y donde el morfismo $r_C : C \to D_C$ es la unidad de dicha adjunción. De manera dual, decimos que $\mathscr{D}$ es **una subcategoría coreflexiva de** $\mathscr{C}$, si la inclusión $j : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, tiene un funtor adjunto derecho $R : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, obtenido de manera dual al funtor reflector L.

Proposición 4.0.8. *Sea $\mathscr{T}$ una categoría triangulada con $\mathscr{X}$ y $\mathscr{Y}$ subcategorías plenas de $\mathscr{T}$ cerradas bajo isomorfismos. Entonces*

(a) $\mathscr{Y}$ es clase libre de torsión si y sólo si $\mathscr{Y}$ es cerrada bajo extensiones, Σ^{-1} y $\mathscr{Y}$ es una subcategoría reflexiva de $\mathscr{T}$.

(b) *$\mathscr{X}$ es clase de torsión si y sólo si $\mathscr{X}$ es cerrada bajo extensiones, Σ y $\mathscr{X}$ es una subcategoría coreflexiva de $\mathscr{T}$.*

Demostración. Se demostrará el inciso (a) siendo la prueba del inciso (b) análoga.

($\Leftarrow$) Supóngase que se tiene la adjunción izquierda $L : \mathscr{T} \to \mathscr{Y}$. Al considerar la unidad de la adjunción $g : 1_C \to jL$ evaluada en el objeto $C \in \mathscr{T}$, obtenemos un morfismo

$$g^C : C \to L(C).$$

Luego por axioma **TR1**(c) tenemos el siguiente triángulo distinguido en $\mathscr{T}$,

$$C \xrightarrow{g^C} L(C) \longrightarrow A \longrightarrow \Sigma C.$$

Consecuentemente, por **TR2** tenemos el siguiente triángulo distinguido

$$\Sigma^{-1}(A) \longrightarrow C \xrightarrow{g^C} L(C) \longrightarrow A.$$

Definiendo $\Sigma^{-1}(A) = X_C$, el triángulo distinguido anterior lo podemos renombrar como:

$$X_C \xrightarrow{f_C} C \xrightarrow{g^C} L(C) \xrightarrow{h^C} \Sigma(X_C), \tag{1}$$

con $L(C) \in \mathscr{Y}$. Si aplicamos el funtor cohomológico $Hom_{\mathscr{T}}(-,\mathscr{Y}) : \mathscr{T} \to Ab$, al triángulo distinguido (1) obtenemos por la Proposición 1.1.6, la siguiente sucesión exacta larga:

$$\ldots \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(\Sigma X_C,\mathscr{Y}) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(L(C),\mathscr{Y}) \xrightarrow{g^*} Hom_{\mathscr{T}}(C,\mathscr{Y}) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X_C,\mathscr{Y}) \longrightarrow \ldots$$

Donde g^* es un isomorfismo, ya que L es la adjunción izquierda de j. Por lo tanto, tenemos que $Hom_{\mathscr{T}}(\Sigma(X_C),\mathscr{Y}) = Hom_{\mathscr{T}}(X_C,\mathscr{Y}) = 0$ y al ser Σ un autofuntor tenemos que

$$Hom_{\mathscr{T}}(X_C,\Sigma^{-1}(\mathscr{Y})) \cong Hom_{\mathscr{T}}(\Sigma(X_C),\mathscr{Y}) = 0. \tag{2}$$

Definiendo $\mathscr{X} = \mathscr{Y}^{\perp}$, veamos que $X_C \in \mathscr{X}$. Sea $\alpha \in Hom_{\mathscr{T}}(X_C,Y)$ con $Y \in \mathscr{Y}$ y al tener que $L(C) \in \mathscr{Y}$ y $\Sigma^{-1}(\mathscr{Y}) \subseteq \mathscr{Y}$ tenemos que $\Sigma^{-1}(L(C)) \in \mathscr{Y}$. Después, al considerar un morfismo $\Sigma^{-1}(h') = \alpha \circ \Sigma^{-1}(h^C) \in Hom_{\mathscr{T}}(\Sigma^{-1}(L(C)),Y)$, y aplicar **TR1**(C) a dicho morfismo, se obtiene el siguiente triángulo distinguido en $\mathscr{T}$:

$$\Sigma^{-1}(L(C)) \xrightarrow{\Sigma^{-1}(h')} Y \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} L(C).$$

Luego, por **TR2** tenemos el siguiente triángulo distinguido

$$Y \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} L(C) \xrightarrow{h'} \Sigma(Y),$$

donde $Y' \in \mathscr{Y}$, ya que $Y, L(C) \in \mathscr{Y}$ con $\mathscr{Y}$ cerrada bajo extensiones por la Observación 4.0.6. Así, por **TR3** obtenemos un morfismo $\beta \in Hom_{\mathscr{T}}(C, Y')$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_c \arrow[r, "f_C"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \arrow[r, "g^C"] \arrow[d, "\beta"'] & L(C) \arrow[r, "h^C"] \arrow[d, equal] & \Sigma X_C \arrow[d, "\Sigma\alpha"] \\ Y \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & L(C) \arrow[r, "h'"'] & \Sigma X_C, \end{tikzcd} \tag{3}$$

es un morfismo de triángulos distinguidos. Por la existencia del morfismo $\beta : C \to Y'$ y al ser $\mathscr{Y}$ una subcategoría reflexiva en $\mathscr{T}$ existe un único morfismo $\rho : L(C) \to Y'$ tal que $\beta = \rho g^C$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g^C"] \arrow[dr, "\beta"'] & L(C) \arrow[d, dashed, "\rho"] \\ & Y'. \end{tikzcd} \tag{4}$$

Luego, de la conmutatividad de (3) y (4), se sigue que:

$$f'\alpha = \beta f_C = \rho g^C f_C = \rho 0 = 0.$$

Así, por la Proposición 1.1.8, se tiene la existencia de un morfismo $\tau : X_C \to \Sigma^{-1}(L(C))$ tal que $\tau\Sigma^{-1}(h) = \alpha$. Pero de (1), se tiene que $\tau \in Hom_{\mathscr{T}}(X_C, \Sigma^{-1}(L(C))) = 0$, entonces $\alpha = 0$. Probándose que $X_C \in \mathscr{Y}^{\perp} = \mathscr{X}$.

($\Rightarrow$) Sea $C \in \mathscr{T}$ y al tener que $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es una teoría de torsión triangulada en $\mathscr{T}$, se obtiene el siguiente triángulo distinguido en $\mathscr{T}$

$$X_C \xrightarrow{f_C} C \xrightarrow{g^C} Y^C \xrightarrow{h^C} \Sigma X_C.$$

Luego, aplicando el funtor $Hom_{\mathscr{T}}(-, \mathscr{Y}) : \mathscr{T} \to Ab$ a dicho triágulo, se obtiene la siguiente sucesión exacta larga

$$\ldots \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(\Sigma X_C, \mathscr{Y}) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(Y^C, \mathscr{Y}) \xrightarrow{g^*} Hom_{\mathscr{T}}(C, \mathscr{Y}) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X_C, \mathscr{Y}) \longrightarrow \ldots$$

Pero al tener $\Sigma(\mathscr{X}) \subseteq \mathscr{X}$ y que $Hom_{\mathscr{T}}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = 0$, se sigue que:

$$Hom_{\mathscr{T}}(\Sigma X_C, \mathscr{Y}) = 0 = Hom_{\mathscr{T}}(X_C, \mathscr{Y}).$$

Lo que implica que g^* es un isomorfismo. De esta manera, definiendo $L(C) = Y^C$ se tiene que para todo morfismo $\beta \in Hom_{\mathscr{T}}(C,Y')$ con $Y' \in \mathscr{Y}$ existe un único morfismo $\rho \in Hom_{\mathscr{T}}(L(C),Y')$ tal que $\rho g^C = \beta$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g^C"] \arrow[dr, "\beta"'] & L(C) \arrow[d, dashed, "\rho"] \\ & Y'. \end{tikzcd}$$

Probándose que $\mathscr{Y}$ es una categoría reflexiva en $\mathscr{T}$ lo cual es equivalente a que $L : \mathscr{T} \to \mathscr{Y}$ es adjunto izquierdo de la inclusión $j : \mathscr{Y} \to \mathscr{T}$ y g_C es la unidad de la adjunción evaluada en C.

$\square$

Observación 4.0.9. *En la Proposición anterior, la adjunción izquierda $L : \mathscr{T} \to \mathscr{Y}$ de la inclusión $j : \mathscr{Y} \to \mathscr{T}$, podemos interpretar la asignación funtorial $L : \mathscr{T} \to \mathscr{Y}$, de manera explícita como:*

(1) ***Objetos.-*** *Para $C \in \mathscr{T}$, se define $L(C) = Y_C$. Donde $Y_C \in \mathscr{C}$ fue obtenido al aplicar 4.0.1 (iii) al objeto $C \in \mathscr{T}$.*

$$X_C \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} Y_C \longrightarrow \Sigma X_C$$

(2) ***Morfismos.-*** *Sea $f_1 : C \to D$ un morfismo en $\mathscr{T}$, tenemos por Definición 4.0.1 (iii) aplicado a los objetos C y D, los siguientes triángulos distinguidos:*

$$\begin{tikzcd} X_C \arrow[r, "f"] & C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_1"'] & Y_C \arrow[r] & \Sigma X_C \\ X_D \arrow[r, "f'"'] & D \arrow[r, "g'"'] & Y_D \arrow[r] & \Sigma X_D. \end{tikzcd} \tag{1}$$

Así, al aplicar el funtor $Hom_{\mathscr{T}}(-,Y_D) : \mathscr{T} \to Ab$ al tríangulo superior en (1), se obtiene la siguiente sucesión exacta larga:

$$\ldots \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(\Sigma X_C, Y_D) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(Y_C, Y_D) \xrightarrow{g^*} Hom_{\mathscr{T}}(C, Y_D) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X_C, Y_D) \longrightarrow \ldots$$

Donde $Hom_{\mathscr{T}}(\Sigma X_C, Y_D) = Hom_{\mathscr{T}}(X_C, Y_D) = 0$ al tener que $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ una teoría de torsión. Así, tenemos que g^* es un isomorfismo y por lo tanto para el morfismo $g' f_1 \in Hom_{\mathscr{T}}(C, Y_D)$ existe un único morfismo $\bar{f} : Y_C \to Y_D$ tal que $g' f_1 = \bar{f} g$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_1"'] & Y_C \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ D \arrow[r, "g'"'] & Y_D. \end{tikzcd}$$

Dicho lo anterior, no es díficil verificar que la asignación $L : \mathscr{T} \to \mathscr{Y}$ es funtorial. De manera, análoga podemos describir la asignación en objetos y morfismos de $R : \mathscr{T} \to \mathscr{X}$.

Proposición 4.0.10. *Sean $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ una teoría de torsión en una categoría triangulada $\mathscr{T}$ y $C \in \mathscr{Y}$, entonces $L(C) = C$ y existe un triángulo distinguido*

$$X_C \xrightarrow{f} C \xrightarrow{1_C} C \xrightarrow{h} \Sigma X,$$

con $X_C \in \mathscr{X}$. De manera análoga, si $C \in \mathscr{X}$, entonces $R(C) = C$ y existe un triángulo distinguido

$$C \xrightarrow{1_C} C \xrightarrow{g} Y_C \xrightarrow{h} \Sigma C,$$

con $Y_C \in \mathscr{Y}$.

Demostración. Si $C \in \mathscr{Y}$, entonces existe un triángulo distinguido

$$\triangle_1 := X_C \xrightarrow{f_C} C \xrightarrow{g_C} Y_C \xrightarrow{h_C} \Sigma(X_C),$$

con $X_C \in \mathscr{X}$ y $Y_C \in \mathscr{Y}$. Luego, consideramos el triángulo

$$\triangle_2 := X_C \xrightarrow{f_C} C \xrightarrow{1_C} C \xrightarrow{h'_C} \Sigma(X_C),$$

donde $h'_C = h_C g_C$. Veamos que $\triangle_1 \cong \triangle_2$. Aplicando el funtor $Hom_{\mathscr{T}}(-, C) : \mathscr{T} \to Ab$ al triángulo distinguido $\triangle_1$, se obtiene por la Proposición 1.1.6, una sucesión exacta larga

$$\ldots \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(\Sigma(X_C), C) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(Y_C, C) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(C, C) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X_C, C) \longrightarrow \ldots$$

Donde $Hom_{\mathscr{T}}(\Sigma(X_C), C) = 0 = Hom_{\mathscr{T}}(X_C, C)$, al ser $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ una teoría de torsión. Por lo tanto, $Hom_{\mathscr{T}}(g_C, C)$ es un isomorfismo. Por lo tanto, para $1_C \in Hom_{\mathscr{T}}(C, C)$ existe un único morfismo $\alpha : Y_C \to C$ tal que $\alpha g_C = 1_C$. Veamos que α es un isomorfismo con morfismo inverso $g_C : C \to Y_C$.

Por tanto, verificaremos que $g_C\alpha = 1_{Y_C}$. Al aplicar, el funtor $Hom_{\mathscr{T}}(-,Y_C) : \mathscr{T} \to Ab$ al triángulo distinguido $\triangle_1$, se obtiene por la Proposición 1.1.6, una sucesión exacta larga

$$\ldots \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(\Sigma(X_C),Y_C) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(Y_C,Y_C) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(C,Y_C) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X_C,Y_C) \longrightarrow \ldots$$

Donde $Hom_{\mathscr{T}}(\Sigma(X_C),Y_C) = 0 = Hom_{\mathscr{T}}(X_C,Y_C)$, al ser $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ una teoría de torsión. Por lo tanto, $Hom_{\mathscr{T}}(g_C,Y_C)$ es un isomorfismo. Lo cual implica que si $\beta \in Hom_{\mathscr{T}}(Y_C,Y_C)$, es un morfismo tal que $\beta g_C = g_C$, entonces $\beta = 1_{Y_C}$. Por otro lado, como

$$(g_C\alpha)g_C = g_C(\alpha g_C) = g_C 1_C = g_C,$$

se concluye que, $g_C\alpha = 1_{Y_C}$. Probándose que α y α' son isomorfismos. Por tanto, tenemos el siguiente isomorfismo de triángulos:

$$\begin{tikzcd}
X_C \arrow[r, "f_C"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, "1_C"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, "h'_C"] \arrow[d, "g_C"] & \Sigma X_C \arrow[d, equal] \\
X_C \arrow[r, "f_C"'] & C \arrow[r, "g_C"'] & Y_C \arrow[r, "h_C"'] & \Sigma X_C.
\end{tikzcd}$$

Consecuentemente, $\triangle_2$ es un triángulo distinguido. Luego, por la Observación 4.0.10, se tiene que $L(C) = C$, para todo $C \in \mathscr{Y}$. De manera análoga, $R(C) = C$ para todo $C \in \mathscr{X}$.

$\square$

La Proposición anterior y su dualización para una clase de torsión de una teoría de torsión triangulada $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, nos dice que $R(\mathscr{X}) = \mathscr{X}$ y $L(\mathscr{Y}) = \mathscr{Y}$.

Definición 4.0.11. *Una teoría de torsión $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ en una categoría triangulada $\mathscr{T}$ se dice* ***hereditaria*** *si el funtor $iR : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ es triangulado. Respectivamente, diremos que la teoría de torsión en $\mathscr{T}$ es* ***cohereditaria*** *si el functor $jL : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ es triangulado.*

A continuación daremos una caracterización para teorías de torsión hereditarias y cohereditarias en una categoría triangulada, mediante el autofuntor $\Sigma : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$. Pero antes, daremos una definición obtenida de [26].

Definición 4.0.12. *Sea $(\mathscr{T},\Sigma,\triangle)$ una categoría triangulada y $\mathscr{T}'$ una subcategoría aditiva y plena de $\mathscr{T}$, decimos que $\mathscr{T}'$ es* ***es una subcategoría triangulada de*** *$\mathscr{T}$ si:*

(i) $\Sigma(\mathscr{T}') \subseteq \mathscr{T}'$ *y* $\Sigma^{-1}(\mathscr{T}') \subseteq \mathscr{T}'$;

(ii) si

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow \Sigma X_1 \in \triangle,$$

con $X_1, X_2 \in \mathscr{T}'$, entonces $X_3 \in \mathscr{T}'$.

Observación 4.0.13. *Si $\mathscr{T}'$ es una subcategoría triangulada de $\mathscr{T}$, entonces el funtor inclusión $i : \mathscr{T}' \to \mathscr{T}$ es triangulado. Es decir, $\mathscr{T}'$ es cerrada bajo extensiones.*

Proposición 4.0.14. *Sean $\mathscr{X}$ y $\mathscr{Y}$ subcategorías plenas de $\mathscr{C}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es una teoría de torsión hereditaria en $\mathscr{T}$,

(ii) $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es una teoría de torsión cohereditaria en $\mathscr{T}$,

(iii) $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es una teoría de torsión en $\mathscr{T}$ y $\Sigma^{-1}(\mathscr{X}) \subseteq \mathscr{X}$,

(iv) $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es una teoría de torsión en $\mathscr{T}$ y $\Sigma(\mathscr{Y}) \subseteq \mathscr{Y}$.

Demostración. $(i) \implies (iii)$ Como $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es una teoría de torsión hereditaria, entonces $iR : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ es un funtor triangulado. Consecuentemente, por la definición de funtor triangulado, tenemos que $(iR)\Sigma \cong \Sigma(iR)$ y al ser Σ autofuntor, se sigue que $\Sigma^{-1}(iR) \cong (iR)\Sigma^{-1}$. Luego, por el dual de la Proposición 4.0.10, tenemos que $R(\mathscr{X}) = \mathscr{X}$. De esta manera

$$\Sigma^{-1}(\mathscr{X}) = \Sigma^{-1}(R(\mathscr{X})) = (\Sigma^{-1}R)(\mathscr{X}) = (\Sigma^{-1})(iR)(\mathscr{X}) \cong (iR)\Sigma^{-1}(\mathscr{X}) = R\Sigma^{-1}(\mathscr{X}) \subseteq \mathscr{X}.$$

Probándose que $\Sigma^{-1}(\mathscr{X}) \subseteq \mathscr{X}$.

$(iii) \implies (i)$ Como $\Sigma^{-1}(\mathscr{X}) \subseteq \mathscr{X}$, entonces $\mathscr{X}$ es una subcategoría triangulada de $\mathscr{T}$. En efecto, para un triángulo distinguido

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow \Sigma X_1,$$

con $X_1, X_2 \in \mathscr{X}$. Luego, al aplicar el funtor $Hom_{\mathscr{T}}(-, Y) : \mathscr{T} \to Ab$ con $Y \in \mathscr{Y}$ al triángulo distinguido anterior, se obtiene la siguiente sucesión exacta:

$$Hom_{\mathscr{T}}(\Sigma X_1, Y) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X_3, Y) \longrightarrow Hom_{\mathscr{T}}(X_2, Y).$$

Donde $Hom_T(\Sigma X_1, Y) = 0 = Hom_T(X_2, Y)$, y por tanto, $Hom_T(X_3, Y) = 0$. Probándose que $X_3 \in \mathscr{X}$. De esta manera, por la Obsevación 4.0.13, se tiene que la inclusión $i : \mathscr{X} \to \mathscr{T}$ es un funtor triangulado. Luego, por la Proposición 1.1.11, se tiene que el funtor adjunto a derecha de i, $R : \mathscr{T} \to \mathscr{X}$, es triangulado. Por lo tanto, el funtor $iR : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ es triangulado, probándose que $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ es una teoría de torsión hereditaria.

$(ii) \iff (iv)$ La prueba es análoga a $(i) \iff (iii)$.

$(iii) \implies (iv)$ Para demostrar que $\Sigma(\mathscr{Y}) \subseteq \mathscr{Y}$ veamos que $Hom_{\mathscr{T}}(X, \Sigma(\mathscr{Y})) = 0$. Tomando $\alpha \in Hom_{\mathscr{T}}(\mathscr{X}, \Sigma(\mathscr{Y}))$ tenemos que $\Sigma^{-1}(\alpha) \in Hom_{\mathscr{T}}(\Sigma^{-1}(\mathscr{X}), \mathscr{Y})$, pero como $\Sigma^{-1}(\mathscr{X}) \subseteq \mathscr{X}$ y $\mathscr{X}^{\perp} = \mathscr{Y}$, entonces $\Sigma^{-1}(\alpha) = 0$. Por tanto $\alpha = 0$, probándose que $Hom_{\mathscr{T}}(\mathscr{X}, \Sigma(\mathscr{Y})) = 0$.

$(iv) \implies (iii)$ Es análogo a $(iii) \implies (iv)$.

□

Definición 4.0.15. *Sea $\mathscr{T}$ una categoría triangulada. Decimos que una pareja de subcategorías plenas de $\mathscr{T}$, $(\mathscr{T}^{\leq 0}, \mathscr{T}^{\geq 0})$ es una **t-estructura** en la que denotamos, $\mathscr{T}^{\leq n} = \Sigma^{-n}(\mathscr{T}^{\leq 0})$ y $\mathscr{T}^{\geq n} = \Sigma^{-n}(\mathscr{T}^{\geq 0})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y se satisface lo siguiente:*

(i) $Hom_{\mathscr{T}}(\mathscr{T}^{\leq 0}, \mathscr{T}^{\geq 1}) = 0$,

(ii) $\mathscr{T}^{\leq 0} \subseteq \mathscr{T}^{\leq 1}$ *y* $\mathscr{T}^{\geq 1} \subseteq \mathscr{T}^{\geq 0}$,

(iii) para todo $C \in \mathscr{T}$ existe un triángulo

$$C^{\leq 0} \longrightarrow C \longrightarrow C^{\geq 1} \longrightarrow \Sigma(C^{\leq 0}),$$

donde $C^{\leq 0} \in \mathscr{T}^{\leq 0}$ y $C^{\geq 1} \in \mathscr{T}^{\geq 1}$.

Las t-estructuras fueron introducidas por Beillinson, Bernstein y Deligne en [4] para axiomatizar las propiedades de una subcategoría abeliana $\mathscr{H}$ de una categoría derivada $D(\mathscr{C})$, dicha subcategoría es llamada *el corazón de $D(\mathscr{C})$*. Donde $\mathscr{H}$ está definida como $\mathscr{H} := \mathscr{T}^{\leq 0} \cap \mathscr{T}^{\geq 0}$. Concluimos este trabajo, estableciendo una biyección entre las t-estrucuras y teorías de torsión de una categoría triangulada formulada por I. Reiten y A. Beligiannis en [6]. La importancia de esta biyeccion es que permite traducir muchos resultados establecidos previamente en el lenguaje de las t-estructuras al lenguaje de las teorías de torsión. Un ejemplo de esto es la construcción de teorías de torsión trianguladas a partir de teorías de torsión en una categoría abeliana mediante el siguiente resultado, demostrado en el Teorema 3.1 de [6]:

Teorema 4.0.16. *Sean $\mathscr{T}$ y $\mathscr{F}$ subcategorías plenas de una categoría abeliana $\mathscr{C}$ que son cerradas bajo isomorfismos. Definimos las siguientes subcategorías plenas de $D^b(\mathscr{C})$ como:*

$$\mathscr{X}(\mathscr{T}) := \{C \in D^b(\mathscr{C})\} \mid H_n(C) = 0 \ \ \forall n > 0 \ \ y \ \ H_n(C) \in \mathscr{T}\}$$

y

$$\mathscr{Y}(\mathscr{F}) := \{C \in D^b(\mathscr{C})\} \mid H_n(C) = 0 \ \ \forall n < 0 \ \ y \ \ H_n(C) \in \mathscr{F}\}.$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ *es una teoría de torsión en* $\mathscr{C}$.

(ii) $(\mathscr{X}(\mathscr{T}),\mathscr{Y}(\mathscr{F}))$ *es una teoría de torsión en* $D^b(\mathscr{C})$.

Proposición 4.0.17. *Para una categoría triangulada* $\mathscr{T}$, *existe una una biyección entre sus teorías de torsión y sus t-estructuras.*

$$\{\textit{Teorías de torsión en } \mathscr{T}\} \xleftrightarrow{1:1} \{\textit{t- estructuras en } \mathscr{T}\}$$

Demostración. Definimos una asignación,

$$\phi : \{\text{Teorías de torsión en } \mathscr{T}\} \longrightarrow \{\text{t- estructuras en } \mathscr{T}\}$$

$$(\mathscr{X},\mathscr{Y}) \longmapsto (\mathscr{X},\Sigma(\mathscr{Y})).$$

Veamos primero que $(\mathscr{X},\Sigma(\mathscr{Y}))$ es una t-estrucura en $\mathscr{T}$. En efecto, al ser $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ una teoría de torsión en $\mathscr{T}$, entonces podemos renombrar $\mathscr{T}^{\leq 0} := \mathscr{X}$ y $\mathscr{T}^{\geq 0} := \Sigma\mathscr{Y}$, de esta manera tenemos que $\mathscr{T}^{\leq n} = \Sigma^{-n}(\mathscr{X}) = \Sigma^{-n}(\mathscr{T}^{\leq 0})$ y $\mathscr{T}^{\geq n} = \Sigma^{-n}(\Sigma(\mathscr{Y})) = \Sigma^{-n+1}(\mathscr{Y})$. Por tanto,

$$Hom_{\mathscr{T}}(\mathscr{T}^{\leq 0},\mathscr{T}^{\geq 1}) = Hom_{\mathscr{T}}(\mathscr{X},\Sigma^{-1}(\Sigma\mathscr{Y})) = Hom_{\mathscr{T}}(\mathscr{X},\mathscr{Y}) = 0.$$

Luego, por definición de teoría torsión se tiene por un lado que $\Sigma(\mathscr{X}) \subseteq \mathscr{X} = \mathscr{T}^{\leq 0}$, entonces aplicando el autofuntor $\Sigma^{-1} : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ se obtiene

$$\mathscr{T}^{\leq 0} = \Sigma^{-1}(\Sigma(\mathscr{X})) = \mathscr{X} \subseteq \Sigma^{-1}(\mathscr{T}^{\leq 0}) = \mathscr{T}^{\leq 1}.$$

Por otro lado, se tiene que también por definición de teoría de torsión que $\Sigma^{-1}(\mathscr{Y}) \subseteq \mathscr{Y}$, entonces aplicando el autofuntor $\Sigma : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ se tiene que

$$\mathscr{T}^{\geq 1} = \Sigma(\Sigma^{-1}(\mathscr{Y})) \subseteq \Sigma(\mathscr{Y}) = \mathscr{T}^{\geq 0}.$$

Al ser $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ teoría de torsión en $\mathscr{T}$, se tiene que para todo $C \in \mathscr{T}$ existe un triángulo

$$X_C \longrightarrow C \longrightarrow Y^C \longrightarrow \Sigma X$$

con $X_C \in \mathscr{X} = \mathscr{T}^{\leq 0}$ y $Y^C \in \mathscr{Y} = \mathscr{T}^{\geq 1}$. Por lo tanto, $\phi(\mathscr{X},\mathscr{Y}) = (\mathscr{X},\Sigma\mathscr{Y})$ es una t-estructura en $\mathscr{T}$.

Ahora, definimos la asignación

$$\psi : \{\text{t- estructura en } \mathscr{T}\} \longrightarrow \{\text{teoría de torsión en } \mathscr{T}\}$$

$$(\mathscr{T}^{\leq 0}, \mathscr{T}^{\geq 0}) \longmapsto (\mathscr{T}^{\leq 0}, \mathscr{T}^{\geq 1}),$$

veamos que $(\mathscr{T}^{\leq 0}, \mathscr{T}^{\geq 1})$ es una teoría de torsión en $\mathscr{T}$. Al ser $(\mathscr{T}^{\leq 0}, \mathscr{T}^{\geq 0})$ una t-estructura y renombrando $\mathscr{X} = \mathscr{T}^{\leq 0}$ y $\mathscr{Y} = \mathscr{T}^{\geq 1}$ se tiene inmediatamente que $Hom_{\mathscr{T}}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = 0$. Luego,

$$\Sigma(\mathscr{X}) = \Sigma(\mathscr{T}^{\leq 0}) = \mathscr{T}^{\leq -1} \subseteq \mathscr{T}^{\leq 0} = \mathscr{X}$$

y

$$\Sigma^{-1}(\mathscr{Y}) = \Sigma^{-1}(\mathscr{T}^{\geq 1}) = \Sigma^{-1}(\Sigma^{-1}(\Sigma(\mathscr{Y}))) = \Sigma^{-2}(\Sigma(\mathscr{Y})) = \mathscr{T}^{\geq 2} \subseteq \mathscr{T}^{\geq 1} = \mathscr{Y}.$$

Por otro lado, al ser $(\mathscr{T}^{\leq 0}, \mathscr{T}^{\geq 0})$ una t- estructura se tiene que para todo $C \in \mathscr{T}$ existe un triangulo

$$X_C \longrightarrow C \longrightarrow Y_C \longrightarrow \Sigma X$$

con $X_C \in \mathscr{T}^{\leq 0} = \mathscr{X}$ y $Y^C \in \mathscr{Y} = \mathscr{T}^{\geq 1}$, probándose que $(\mathscr{T}^{\leq 0}, \mathscr{T}^{\geq 1})$ es una teoría de torsión.

Finalmente, del hecho que

$$\begin{aligned}
\psi(\phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})) &= \psi(\mathscr{X}, \Sigma\mathscr{Y}) \\
&= \psi(\mathscr{T}^{\leq 0}, \mathscr{T}^{\geq 0}) \\
&= (\mathscr{T}^{\leq 0}, \mathscr{T}^{\geq 1}) \\
&= (\mathscr{X}, \mathscr{Y})
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\phi(\psi(\mathscr{T}^{\leq 0}, \mathscr{T}^{\geq 0})) &= \phi((\mathscr{T}^{\leq 0}, \mathscr{T}^{\geq 1})) \\
&= \phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \\
&= (\mathscr{X}, \Sigma(\mathscr{Y})) \\
&= (\mathscr{T}^{\leq 0}, \mathscr{T}^{\geq 0}),
\end{aligned}$$

se sigue que en una categoría triangulada $\mathscr{T}$, existe una relación biyectiva entre sus t- estrucuras y sus teorias de torsión.

$\square$

Bibliografía

[1] AL-NOFAYEE, S., AND RICKARD, J. Rigidity of tilting complexes and derived equivalence for self-injective algebras. *arXiv preprint arXiv:1311.0504* (2013).

[2] ANDERSON, F. W., AND FULLER, K. R. *Rings and categories of modules*, vol. 13. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] ATIYAH, M. *Introduction to commutative algebra*. CRC Press, 2018.

[4] BEILINSON, A., BERNSTEIN, J., DELIGNE, P., AND GABBER, O. *Faisceaux pervers*. Société Mathématique de France, 2018.

[5] BEILINSON, A. A. Coherent sheaves on p n and problems of linear algebra. *Functional Analysis and Its Applications 12*, 3 (1978), 214–216.

[6] BELIGIANNIS, A., AND REITEN, I. *Homological and homotopical aspects of torsion theories*. American Mathematical Soc., 2007.

[7] CLINE, E., PARSHALL, B., AND SCOTT, L. Derived categories and morita theory. *Journal of Algebra 104*, 2 (1986), 397–409.

[8] DICKSON, S. E. A torsion theory for abelian categories. *Transactions of the American Mathematical Society 121*, 1 (1966), 223–235.

[9] GEIGLE, W., AND LENZING, H. A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite dimensional algebras. In *Singularities, representation of algebras, and vector bundles*. Springer, 1987, pp. 265–297.

[10] GELFAND, S. I., AND MANIN, Y. I. *Methods of homological algebra*. Springer Science & Business Media, 2013.

[11] HAPPEL, D., AND DIETER, H. *Triangulated categories in the representation of finite dimensional algebras*, vol. 119. Cambridge University Press, 1988.

[12] HAPPEL, D., REITEN, I., SMALØ, S. O., SMAL, S. O., ET AL. *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, vol. 575. American Mathematical Soc., 1996.

[13] HOLM, T., AND JØRGENSEN, P. Triangulated categories: definitions, properties, and examples. *Triangulated categories 375* (2010), 1–51.

[14] HU, Y., YAO, H., AND FU, X. Tilting objects in triangulated categories. *Communications in Algebra 48*, 1 (2020), 410–429.

[15] HUYBRECHTS, D., ET AL. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. Oxford University Press on Demand, 2006.

[16] KASHIWARA, M., AND SCHAPIRA, P. *Categories and Sheaves*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[17] KATO, Y. On derived equivalent coherent rings. *Communications in Algebra 30*, 9 (2002), 4437–4454.

[18] KELLER, B. Derived categories and their uses. *Handbook of algebra 1* (1996), 671–701.

[19] KELLER, B. Invariance and localization for cyclic homology of dg algebras. *Journal of pure and applied Algebra 123*, 1-3 (1998), 223–273.

[20] LAM, T.-Y. *Lectures on modules and rings*, vol. 189. Springer Science & Business Media, 2012.

[21] LEINSTER, T. *Basic category theory*, vol. 143. Cambridge University Press, 2014.

[22] LENZING, H., AND MELTZER, H. Sheaves on a weighted projective line of genus one, and representations of a tubular algebra. *Representations of algebras (Ottawa, ON, 1992) 14* (1993), 313–337.

[23] MAC LANE, S. *Categories for the working mathematician*, vol. 5. Springer Science & Business Media, 2013.

[24] MITCHELL, B. *Theory of categories*. Academic Press, 1965.

[25] MORITA, K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A 6*, 150 (1958), 83–142.

[26] NEEMAN, A. *Triangulated categories*. No. 148. Princeton University Press, 2001.

[27] PAN, S., AND XI, C. Finiteness of finitistic dimension is invariant under derived equivalences. *Journal of Algebra 322*, 1 (2009), 21–24.

[28] POPESCU, N. *Abelian categories with applications to rings and modules*, vol. 3. Academic Press, 1973.

[29] PUPPE, D. On the formal structure of stable homotopy theory. In *Colloquium on Algebraic Topology. Mat. Inst., Aarhus Univ* (1962), pp. 65–71.

[30] RICKARD, J. Morita theory for derived categories. *Journal of the London Mathematical Society 2*, 3 (1989), 436–456.

[31] RICKARD, J. Derived equivalences as derived functors. *Journal of the London Mathematical Society 2*, 1 (1991), 37–48.

[32] RINGEL, C. M. *Tame algebras and integral quadratic forms*, vol. 1099. Springer, 2006.

[33] ROTMAN, J. J. *An introduction to homological algebra*. Springer Science & Business Media, 2008.

[34] SCHAPIRA, P. Categories and homological algebra. *course notes (available online from the author's web page)* (2003).

[35] SCHOFIELD, A. Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras (london mathematical society lecture note series 119), 1990.

[36] SCHRÖER, J., AND ZIMMERMANN, A. Stable endomorphism algebras of modules over special biserial algebras. *Mathematische Zeitschrift 244*, 3 (2003), 515–530.

[37] SERRE, J.-P. Cohomologie et géométrie algébrique. In *Proc. Int. Cong. Math., Amsterdam* (1954), vol. 3, pp. 515–520.

[38] VERDIER, J.-L. Categories derivees quelques résultats (etat 0). In *Cohomologie étale*. Springer, 1977, pp. 262–311.

[39] WEIBEL, C. A. *An introduction to homological algebra*. No. 38. Cambridge university press, 1995.

[40] XI, C. Derived equivalences of algebras. *Bulletin of the London Mathematical Society 50*, 6 (2018), 945–985.