BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS

Teoría de integración sobre espacios tensoriales y análisis de Fourier

Tesis

presentada para obtener el grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Presenta:
Oswaldo Flores Medina

Directores de tesis:
Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna
Dr. Juan Héctor Arredondo Ruiz
Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

Puebla, Pue.
Diciembre 2019

Índice general

1. Introducción **5**

2. Preliminares **9**
2.1. El espacio de las distribuciones integrables $\mathcal{A}_C$ 9
2.1.1. Las distribuciones integrables 9
2.2. El dual de $\mathcal{A}_C$ 12
2.2.1. $\mathcal{A}_C$ como espacio de Banach 12
2.2.2. El dual de $\mathcal{A}_C$ 13

3. Producto tensorial de espacios de Banach **15**
3.0.1. Factorización de módulos de Banach 17

4. Un teorema de factorización **21**
4.1. Primeras factorizaciones 21
4.2. Factorización con respecto a un producto de convolución 23

5. La integral tensorial y la transformada de Fourier **29**
5.1. La transformada de Fourier 30

APÉNDICES **34**

A. Distribuciones **35**
A.1. Producto tensorial de distribuciones 35
A.1.1. Producto tensorial de funciones 35
A.1.2. Producto tensorial de distribuciones 36
A.1.3. Propiedades del producto tensorial 37
A.2. Convolución de distribuciones 37
A.2.1. Propiedades de la convolución 38
A.2.2. Orden de una distribución integrable 39

B. La integral de Henstock **43**

Capítulo 1

Introducción

En el siglo XVII, Newton define en forma "descriptiva" la integral de una función que, en términos actuales, se traduce como una antiderivada o primitiva de la función. Por otro lado, Riemann, en 1854, definió la integral de una función como el límite de sumas que se aproximan al valor del área bajo la gráfica de la función. Su definición es de tipo "constructivo". El Teorema Fundamental del Cálculo muestra la conexión entre las dos formas de definir la integral. Sin embargo, las integrales definidas por Newton y Riemann no coinciden. Por ejemplo, sea $F(x) = x^2 \sin x^{-2}$ si $x \neq 0$ y $F(0) = 0$. Como F es diferenciable en cada punto, su derivada F' es Newton integrable. Pero F no es Riemann integrable, en $[0, 1]$.

Es fácil dar un ejemplo de una función que sea Riemann integrable pero no Newton integrable, por ejemplo, una función escalonada. A principios del siglo XX, Lebesgue propone una integral que lleva su nombre. El conjunto de funciones Lebesgue integrables sobre $[a, b]$ contiene propiamente al conjunto de funciones Riemann integrables sobre $[a, b]$. Es interesante notar que la derivada de la función F, mencionada arriba, no es Lebesgue integrable en $[0, 1]$.

Con la finalidad de integrar derivadas de funciones, Denjoy en 1912 y Perron en 1914, definen, de manera independiente, integrales que cumplen con esta propiedad y que generalizan las integrales de Lebesgue y Newton. Casi 10 años después se probó la equivalencia de las integrales de Denjoy y Perron. Posteriormente, en 1957 R. Henstock y J. Kurzweil definen, también de forma independiente, integrales de "tipo Riemann". Esta integral resultó equivalente a la integral de Denjoy-Perron.

En 1948 Alexiewicz define en [1] la norma:

$$\| f \|_A = \sup_{I \subset [a,b]} \left\{ \left| \int_I f \right| \right\}.$$

Esta norma se puede aplicar a los elemento de $HK([a, b])$, convirtiendolo en un espacio normado. Cabe señalar que el espacio $(HK([a, b]), \| \cdot \|_A)$ no es completo [34]. Denotamos la completación del espacio de funciones Henstock- Kurzweil integrables sobre $[a, b]$, por $\overline{HK([a, b])}$.

En general, $\overline{X}$ denota la completación del espacio vectorial X con respecto a una norma apropiada.

La definición de integral, para un subespacio de las distribuciones es semejante a la hecha por Newton. Esta definición fue dada por P. Mikusińksi y K. Ostaszewski [24].

Definición 1. *Sea f una distribución (función generalizada) sobre la recta real. Si existe una función continua F, con límites reales en $\pm\infty$ tal que $F' = f$ (derivada distribucional). Entonces la integral distribucional de f se define como $\int_{-\infty}^{\infty} f = F(\infty) - F(-\infty)$.*

La función F se llama la primitiva de f. La norma de f se define como $\| f \|_{\mathcal{A}_C} = \| F \|_{\infty}$. El espacio de distribuciones integrables se denota por $\mathcal{A}_C$ y es isométricamente isomorfo a $\overline{HK(\mathbb{R})}$.

Tanto Kurzweil como Henstock también consideraron versiones multidimensionales de su integral [14, 15, 17]. La teoría de Henstock-Kurzweil ha sido ampliamente estudiada para conjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$ [19, 34], pero no para funciones cuyo dominio es todo $\mathbb{R}^n$ [27], $n > 1$. Desarrollar teoría sobre la integral de Henstock-Kurweil, para funciones de varias variables, definidas sobre conjuntos no acotados trae dificultades significativas, como las siguientes.

Propiedades fundamentales del espacio $HK(\mathbb{R})$ no se han generalizado completamente para funciones con dominio $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. Un ejemplo de lo anterior es el Teorema de Hake [2, 9, 20, 19, 27, 34].

Por otro lado, la integral multidimensional de Henstock-Kurzweil no integra todas las derivadas, contrario a lo que ocurre en el caso de funciones de una variable.

Para funciones de varias variables, existen otras definiciones de integral que integran todas las derivadas [21]. Sin embargo, el Teorema de Fubini no se cumple para estas integrales, mientras que sí es válido para la integral multidimensional de Henstock-Kurzweil [17, 18].

Nuestro objetivo se divide en dos partes.

La primera parte es definir una integral que nos permita trabajar con la transformada de Fourier multidimensional sobre conjuntos no acotados.

La segunda parte es estudiar las propiedades del espacio sobre el cual se define la integral multidimensional anterior. En particular se desea saber si es posible encontrar “alguna factorización” para este espacio.

Usamos el producto tensorial para lograr este objetivo motivados por las propiedades que tiene este producto.

En 1957 W. Rudin demostró que para G, un grupo abeliano localmente compacto, cada función en $L^1(G)$ se puede expresar como la convolución de dos funciones adecuadas en $L^1(G)$ [29, 30]. Es decir,

$$L^1(G) * L^1(G) = L^1(G).$$

Recientemente en 2017 [25], fue probado un Teorema de Factorización para el espacio de distribuciones integrables $\mathcal{A}_C$, esto es,

$$\mathcal{A}_C * L^1(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_C \tag{1.1}$$

o equivalentemente

$$\overline{HK(\mathbb{R})} * L^1(\mathbb{R}) = \overline{HK(\mathbb{R})}, \tag{1.2}$$

Anteriormente en 2012, E. Talvila probó (1.1) en el caso periódico en [37].

Hay algunas dificultades para obtener un resultado similar a (1.1) para $HK(\mathbb{R}^2)$.

Por otra parte, conforme a la teoría de integración de Lebesgue la propiedad $\overline{L^1(\mathbb{R}) \otimes_\gamma L^1(\mathbb{R})} \cong L^1(\mathbb{R}^2)$ se satisface [32]. Además, el producto tensorial $HK(\mathbb{R}) \otimes HK(\mathbb{R})$ está bien definido y conserva algunas propiedades del espacio $HK(\mathbb{R})$, a diferencia del espacio $HK(\mathbb{R}^2)$. Así, una forma alternativa es probar una generalización de las ecuaciones (1.1) y (1.2) mediante productos tensoriales. Estos resultados pueden generalizarse para un número finito de productos tensoriales de $\mathcal{A}_C$, $\overline{HK(\mathbb{R})}$ o $\mathcal{B}_C$.

El concepto de producto tensorial puede utilizarse para extender eficientemente las propiedades a más dimensiones. Hay diferentes formas de definir una norma en un producto tensorial $X \otimes Y$ de dos espacios de Banach, X e Y. Una familia de normas bien conocidas son las normas cruz razonables. En 1950, Schatten definió la mayor y la menor norma cruz razonable, γ y λ, respectivamente [33]. El producto tensorial con diferentes normas da diferentes espacios.

En esta tesis trabajamos el producto tensorial con la norma γ que se define en el espacio $HK(\mathbb{R}) \otimes_\gamma HK(\mathbb{R})$ en términos de la norma de Alexiewicz.

Los resultados que obtuvimos están en el artículo [10]. Este artículo fue aceptado por la revista "Annals of Functional Analysis". Esta revista está editada por Springer con un factor de impacto 0,577, y está indexada en JCR, SCOPUS, Science Citation Index Expanded, zbMATH y Mathematical Reviews, entre otras. Estos resultados son la generalización de algunas propiedades del espacio $\mathcal{A}_C$ a mayores dimensiones a través del producto tensorial $\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C$. En particular, se obtuvo la siguiente generalización de la expresión (1.1)

$$\overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C} \circledast \overline{L^1 \otimes_\gamma L^1} = \overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}.$$

Aquí $\circledast$ es una convolución generalizada proporcionada en la Definición 1.1.

También estudiamos un álgebra de Banach significativa contenida en este producto tensorial para el cual no se cumple el Teorema de Factorización. Además, como aplicación, extendemos algunas propiedades del operador Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se define la integral distribucional y se exponen las propiedades del espacio de las distribuciones integrables. Se agregan otras propiedades para completar el tema aunque no se utilizan en los capítulos posteriores. Los resultados de este capítulo el lector los puede consultar en [35].

2.1. El espacio de las distribuciones integrables $\mathcal{A}_C$

2.1.1. Las distribuciones integrables

Denotamos por $C_c^\infty(\mathbb{R})$ al espacio de las funciones reales infinitamente diferenciables tales que

$$supp\ \phi := \overline{\{x \in \mathbb{R}\ : \phi(x) \neq 0\}}$$

es compacto en $\mathbb{R}$. Una distribución T es una forma lineal sobre $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que para cada compacto $K \subset \mathbb{R}$ existen constantes M y k tales que

$$|T(\phi)| \leq M \sum_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in K} \left| \frac{d^j \phi}{dx^j}(x) \right| \quad (\forall\ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ with } supp\ \phi \subset K).$$

El espacio de distribuciones es denotado por $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Este espacio es un espacio vectorial con la suma de funciones y producto por escalar usuales.

Es sencillo verificar que si T es una distribución entonces

$$T'(\phi) := -T(\phi')$$

es una distribución. T' es llamada la derivada de T. Además, para cualquier función F localmente Lebesgue integrable de valores reales, la forma lineal

$$T_F(\phi) := \int_{\mathbb{R}} F(x)\phi(x)dx$$

es una distribución. A este tipo de distribuciones se les llama: *distribuciones regulares.*

Recordemos que el espacio de funciones continuas de valores reales sobre $\mathbb{R}$ y que tienen límites en $\pm\infty$ se denota por $C(\overline{\mathbb{R}})$. Además, el espacio

$$\mathcal{B}_C := \{F \in C(\overline{\mathbb{R}}) \mid F(-\infty) = 0\}$$

es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Ahora definimos la integral distribucional [35].

Definición 2. *El espacio de distribuciones integrables está dado por*

$$\mathcal{A}_C := \{T'_F \mid F \in \mathcal{B}_C\}.$$

A F se le llama la primitiva de T'_F. La integral distribucional de T'_F sobre $\mathbb{R}$ se define como

$$\int_{\mathbb{R}} T'_F = F(\infty).$$

En esta definición T_F representa la distribución regular determinada por $F \in \mathcal{B}_C$. Luego, una distribución es integrable si es la derivada distribucional de una función continua que se anula en $-\infty$.

La siguiente proposición garantiza que para cada $T'_F \in \mathcal{A}_C$ su primitiva en $\mathcal{B}_C$ es única, y por lo tanto, la integral distribucional está bien definida.

Proposición 1. *Para cada $T'_F \in \mathcal{A}_C$ su primitiva en $\mathcal{B}_C$ es única.*

Demostración. Para ello, notemos que cada $T'_F \in \mathcal{A}_C$ tiene una infinidad de primitivas en $C(\overline{\mathbb{R}})$, pero tiene una única primitiva en $\mathcal{B}_C$, como veremos enseguida.

Supongamos que existen $F_1, F_2 \in \mathcal{B}_C$ tales que

$$\langle T'_{F_1}, \phi\rangle = \langle T'_F, \phi\rangle = \langle T'_{F_2}, \phi\rangle \text{ para toda } \phi \in \mathcal{D}.$$

De lo anterior $\langle T'_{F_1}, \phi\rangle - \langle T'_{F_2}, \phi\rangle = 0$, y por la linealidad de la derivada distribucional se tiene que

$$\begin{aligned} \langle T'_{F_1}, \phi\rangle - \langle T'_{F_2}, \phi\rangle &= \langle T'_{F_1-F_2}, \phi\rangle \\ &= -(L)\int_{-\infty}^{\infty} (F_1 - F_2)\phi' \text{ para toda } \phi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la última integral es igual a cero para toda $\phi \in \mathcal{D}$. Luego, $F_1 - F_2 = k$ (con k constante) y como $F_1(-\infty) = F_2(-\infty) = 0$, entonces $k = 0$. Por lo tanto $F_1 = F_2$. □

Observación 1. *Lo anterior nos dice que la infinidad de primitivas de T'_F en $C(\overline{\mathbb{R}})$ difieren entre sí por una constante y que en $\mathcal{B}_C$ su primitiva es única.*

Ejemplo 1. *La función de Heaviside (H), como distribución, es la derivada distribucional de la función*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si \;\; x \leq 0, \\ x, & si \;\; x > 0. \end{cases}$$

Es decir, $T_H = T'_F$. *Como* $F \in \mathcal{B}_C$, *entonces* $T_H \in \mathcal{A}_C$.

Por otro lado, $H \notin \mathcal{B}_C$, *y por lo tanto* $T'_H = \delta$ *no es un elemento de* $\mathcal{A}_C$, *como tampoco lo son sus derivadas.*

Otro ejemplo de una distribución que no es integrable, es T_{sgn}. *Pues* $T_{sgn} = T'_{|x|}$, *y* $|x| \notin \mathcal{B}_C$.

Integración sobre intervalos

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, y consideremos $I = (a, b)$.

$$\mathcal{D}(I) = \{\phi : I \to \mathbb{R} |\ \phi \in C^\infty(I) \text{ y } \phi \text{ tiene soporte compacto contenido en } I\}.$$

$\mathcal{D}'(I)$ representa el dual del espacio $\mathcal{D}(I)$. Denotamos mediante $C(\overline{I})$ el espacio de funciones continuas sobre $\overline{I} = [a, b]$.

Definición 3. *Diremos que* $T'_F \in D'(I)$ *es integrable sobre* $\overline{I}$ *si* $F \in C(\overline{I})$. *Además,*

$$\int_{\overline{I}} T'_F := F(b) - F(a).$$

También se usa la notación $\int_a^b T'_F$ para $\int_{\overline{I}} T'_F$. Denotamos por $\mathcal{A}_C(\overline{I})$ a las distribuciones $T'_F \in \mathcal{D}'(I)$, que son integrables en $\overline{I}$.

Observación 2. *Hacemos los siguientes comentarios.*

1. *Si cambiamos* I *por* $\mathbb{R}$ *en la Definición 3, se obtiene la definición de* $\mathcal{A}_C$.
2. *También se puede definir*
$$\mathcal{B}_C(\overline{I}) := \{F \in C(\overline{I}) |\ F(a) = 0\}.$$
3. *En la Definición 3, la primitiva* $F \in C(\overline{I}) \setminus \mathcal{B}_C(\overline{I})$. *Aunque la primitiva en* $C(\overline{I})$ *no es única, el valor de la integral no cambia.*

   Esto se debe a que todas las primitivas de una distribución son iguales entre sí, salvo por una constante. De hecho, todo elemento de $C(\overline{I})$ *se puede escribir como suma de un elemento en* $\mathcal{B}_C(\overline{I})$ *más una función constante.*

A continuación damos un ejemplo de una distribución que pertenece a $\mathcal{A}_C(\overline{I})$.

Ejemplo 2 (**Traza de onda**). *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi} \tag{2.1}$$

es convergente y su suma representa una función de período 1 *que en el intervalo* $(0, 1)$ *se define por* $F(x) = (1 - 2x)/4$. *La derivada distribucional de tal función es*

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k). \tag{2.2}$$

Lo anterior representa una distribución.

La función F es continua en todo intervalo de la forma $(k, k+1)$, para cualquier entero k. Si $[a, b] \subset (k, k+1)$ entonces F también es continua en $[a, b]$, y por lo tanto, $T'_F \in \mathcal{A}_C([a, b])$.

Por otro lado, si derivamos término a término la serie 2.1, obtenemos la serie divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\pi x). \tag{2.3}$$

Como esta serie converge (no en el sentido clásico pero sí en el sentido de las distribuciones) a la expresión (2.2), tendriamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\pi x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k) = T'_F.$$

Entonces,

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\pi x) = \int_a^b T'_F = F(b) - F(a).$$

Es importante observar que la serie 2.3 diverge, en particular, en el intervalo $[a, b] \subset (k, k+1)$. Esto significa que como distribución no es regular, pero sí es integrable.

2.2. El dual de $\mathcal{A}_C$

2.2.1. $\mathcal{A}_C$ como espacio de Banach

Para definir una norma en $\mathcal{A}_C$, presentamos primero la siguiente proposición.

Proposición 2. *Para cada $T'_F \in \mathcal{A}_C$, con $F \in \mathcal{B}_C$, se define*

$$\mathcal{F}(T'_F) = F.$$

La aplicación $\mathcal{F} : \mathcal{A}_C \to \mathcal{B}_C$ es un isomorfismo lineal de $\mathcal{A}_C$ en $\mathcal{B}_C$.

A traves del isomorfismo $\mathcal{F}$ definimos la norma de Alexiewicz sobre $\mathcal{A}_C$.

Definición 4. *Para cada $T'_F \in \mathcal{A}_C$ se define su norma por*

$$\| T'_F \|_{\mathcal{A}_C} := \| \mathcal{F}(T'_F) \|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x)|.$$

A $\| T'_F \|_{\mathcal{A}_C}$ se le llama: norma de Alexiewicz de T'_F.

Teorema 1. *$\mathcal{A}_C$ es un espacio de Banach separable isométricamente isomorfo a $\overline{HK(\mathbb{R})}$, y también a $\mathcal{B}_C$.*

La norma de Alexiewicz resulta invariante bajo traslaciones, y se pueden definir otras normas equivalentes a ella (véase [35]).

Con respecto al orden de las distribuciones (véase [8]) en $\mathcal{A}_C$ tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2. *Toda distribución en $\mathcal{A}_C$ tiene, a lo más, orden uno.*

Observación 3. *Este resultado y la aplicación del Teorema 22 establecen una relación entre las distribuciones regulares de $\mathcal{A}_C$ definidas por una función localmente integrable (en el sentido de Lebesgue o Henstock) y las distribuciones definidas por una medida.*

Lo anterior se debe a que toda distribución regular tiene orden cero, y por otro lado, todas las distribuciones regulares son medidas de Radon con signo.

$\mathcal{A}_C$ como el dual de BV

El siguiente teorema nos permite ver a los elementos de $\mathcal{A}_C$ como funcionales lineales y continuos sobre BV.

Teorema 3 (Desigualdad de Hölder). *Sea $f = T'_F \in \mathcal{A}_C$. Si $g \in NBV$ entonces $|\int_{-\infty}^{\infty} fg| \leq |\int_{-\infty}^{\infty} f| \inf_{\mathbb{R}} |g| + 2||f||Vg$. Si $g \in BV$, entonces $|\int_{-\infty}^{\infty} fg| \leq 2||f||\ ||g||_{BV}$.*

Teorema 4. $\mathcal{A}_C = BV^*$.

Observación 4. *Aquí hemos modificado el conjunto de distribuciones $\mathcal{D}'$ y lo hemos restringido al de todas aquellas que son derivada distribucional de alguna función contiua en $\mathcal{B}_C$. Pero aunque el espacio ahora es menor, el resultado anterior nos dice que esta restricción permite extender el espacio base $\mathcal{D}$ y cambiarlo por todo BV. Con lo cual damos lugar a otro tipo de distribuciones.*

Así, sabemos que el dual de BV contiene a $\mathcal{A}_C$, es decir, $\mathcal{A}_C \subset BV^*$. De hecho, BV^* es mucho más grande que $\mathcal{A}_C$ ya que este contiene medidas que no están en $\mathcal{A}_C$ tal como la medida de Dirac.

2.2.2. El dual de $\mathcal{A}_C$

Usando el hecho de que $HK^* = BV$, y aplicando el Teorema 1 se justifica el siguiente resultado.

Teorema 5. $\mathcal{A}_C^* = BV$.

La *variación escencial* es definida como *esvar* $g = \int_{-\infty}^{\infty} g\phi'$ donde ahora el supremo se toma sobre todas las $\phi \in C_c^1$ con $||\phi||_\infty \leq 1$. Denotamos a las funciones de variación acotada escencial por EBV. Se tiene que $BV \subsetneq EBV$.

El espacio EBV es un espacio de Banach con la norma $||g||_{EBV} = ||g||_\infty +$ *esvar* g. Si $g \in NBV$ entonces su variación y su variación escencial son idénticas.

Presentamos ahora el siguiente teorema.

Teorema 6. *Sea $f \in \mathcal{A}_C$ y sea $g \in EBV$. Sea $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}$ con $||f - \phi_n|| \to 0$. Definimos $\int_{-\infty}^{\infty} fg = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n g$. Sea $\overline{g}$ la única función en NBV tal que esvar $g = V\overline{g}$. Entonces $\int_{-\infty}^{\infty} fg = \int_{-\infty}^{\infty} f\overline{g}$.*

Corolario 1. $\mathcal{A}_C^* = EBV$

Capítulo 3

Producto tensorial de espacios de Banach

Alrededor de 1946, Dunford y Schatten [7] comenzaron un estudio sistemático del producto tensorial, $X \otimes Y$, de espacios de Banach. Como es bien sabido, hay diferentes normas en $X \otimes Y$ definidas en términos de las normas respectivas en X y Y [33].

Dados los espacios de Banach $(X, \| \cdot \|_X)$, $(Y, \| \cdot \|_Y)$ y $(Z, \| \cdot \|_Z)$, el espacio de las formas bilineales continuas con valores en Z se denotará por $\mathfrak{B}(X, Y; Z)$. En este espacio se toma la norma:

$$\| B \|_{\mathfrak{B}(X,Y;Z)} := \sup\{ \| B(x,y) \|_Z : x \in X, y \in Y, \| x \|_X, \| y \|_Y \leq 1 \}.$$

$\mathfrak{B}(X, Y; Z)$ se convierte en un espacio de Banach con esta norma. Cuando $Z = \mathbb{R}$ escribiremos solamente $\mathfrak{B}(X, Y)$. $L(X, Y)$ denota el espacio normado de las transformaciones lineales acotadas de X a Y con su norma habitual.

Denotamos por $X^* := L(X, \mathbb{R})$ al espacio de las funcionales lineales continuas sobre X.

Definición 5. *Dados X, Y espacios normados y $(x, y) \in X \times Y$, definimos*

$$\begin{aligned} U_{(x,y)} &: \mathfrak{B}(X,Y) \to \mathbb{R} \\ U_{(x,y)}(B) &:= B(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &: X \times Y \to \big(\mathfrak{B}(X,Y)\big)^* \\ H(x,y) &:= U_{(x,y)}. \end{aligned}$$

El producto tensorial algebraico $X \otimes Y$ se define como el espacio vectorial

$$X \otimes Y := span\big(H(X \times Y)\big) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\ v_i \in H(X \times Y),\ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Para simplificar escribimos

$$x \otimes y := H(x,y) \quad (\forall\ (x,y) \in X \times Y).$$

En este espacio vectorial definimos una familia de normas Υ llamadas normas cruz razonables [6].

Definición 6. *Dados X y Y espacios de Banach, una norma cruz razonable Υ sobre $X \otimes Y$ es una norma para la que se cumplen las dos condiciones siguientes:*

1. $\Upsilon(x \otimes y) \leq \| x \|_X \| y \|_Y \quad (\forall\ x \otimes y \in X \otimes Y)$.
2. *Para cada $x^* \in X^*$ y cada $y^* \in Y^*$ es verdad que $x^* \otimes y^* \in (X \otimes_\Upsilon Y)^*$ y que*
$$\| x^* \otimes y^* \|_{(X \otimes_\Upsilon Y)^*} \leq \| x^* \|_{X^*} \| y^* \|_{Y^*} .$$

El espacio $X \otimes Y$ con la norma dada Υ es denotado por $X \otimes_\Upsilon Y$, es decir:

$$\begin{aligned} X \otimes_\Upsilon Y &:= (X \otimes Y, \Upsilon), \\ \| z \|_{X \otimes_\Upsilon Y} &:= \Upsilon(z) \quad (\forall\ z \in X \otimes_\Upsilon Y). \end{aligned}$$

En la familia de normas cruz razonables hay elemento mínimal y máximal [33].

Definición 7. *Dados X, Y espacios de Banach y $z \in X \otimes Y$. Las funciones $\gamma : X \otimes Y \to [0, \infty)$ y $\lambda : X \otimes Y \to [0, \infty)$ definidas por*

$$\gamma(z) := \sup \Big\{ |B(z)| : B \in \mathfrak{B}(X, Y),\ \| B \| \leq 1 \Big\},$$

$$\lambda(z) = \sup \big\{ |(x^* \otimes y^*)(z)| : x^* \in X^*, y^* \in Y^*, \| x^* \|, \| y^* \| \leq 1 \big\}.$$

son normas cruz razonables. Se les llama la norma cruz proyectiva y la norma cruz inyectiva, respectivamente.

Cualquier otra norma cruz razonable Υ sobre $X \otimes Y$ satisface

$$\| z \|_{X \otimes_\lambda Y} \leq \| z \|_{X \otimes_\Upsilon Y} \leq \| z \|_{X \otimes_\gamma Y} \quad (\forall\ z \in X \otimes Y).$$

En este sentido γ es la mayor norma cruz y λ es la menor norma cruz [6].

Trabajaremos principalmente con la norma cruz proyectiva. A continuación se da una caracterización de la mayor norma cruz razonable [6] que usaremos después.

Proposición 3. *Si $u \in X \otimes Y$ entonces*

$$\gamma(u) = \text{ínf} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \| x_i \| \ \| y_i \| : x_i \in X, y_i \in Y, u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}.$$

Denotaremos a la norma proyectiva γ sobre diferentes espacios por el mismo símbolo $\mathfrak{A} \otimes_\gamma \mathfrak{B}$ independientemente de cualquier $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$. La completación de $\mathfrak{A} \otimes_\gamma \mathfrak{B}$ con respecto a esta norma se denotará por $\overline{\mathfrak{A} \otimes_\gamma \mathfrak{B}}$.

Hay que tener en cuenta que las normas proyectiva e inyectiva no son equivalentes. Por ejemplo, si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita, $L^1(\mu)$ con la norma usual y γ la norma asociada sobre el producto tensorial, entonces

$$\overline{L^1(\mu) \otimes_\gamma X} \cong L^1(\mu, X),$$

mientras que

$$\overline{L^1(\mu) \otimes_\lambda X} \cong K(\mu, X).$$

Donde el espacio $K(\mu, X)$, formado por todas las medidas vectoriales $G : \Sigma \to X$ μ-continuas cuyo rango es relativamente compacto, está equipado con la norma de la semivariación [6].

Proposición 4. *Sean X y Y espacios de Banach. Si W es un subespacio denso de X, entonces $W \otimes_\gamma Y$ es un subespacio denso de $\overline{X \otimes_\gamma Y}$.*

Demostración. Dados $\epsilon > 0$ y $0 \neq a = x \otimes y \in X \otimes Y$, existe $x' \in W$ tal que

$$\| x - x' \|_X < \epsilon / \| y \|_Y .$$

Tomamos $a' = x' \otimes y \in W \otimes Y$, tal que, para $B \in \mathfrak{B}(X, Y)$, con $\| B \|_{\mathfrak{B}(X,Y)} \leq 1$, se tiene

$$|U_{(x-x',y)}(B)| = |B(x-x', y)| \leq \| B \|_{\mathfrak{B}(X,Y)} \| x-x' \|_X \| y \|_Y \leq \| x-x' \|_X \| y \|_Y .$$

Luego,

$$\begin{aligned} \gamma(a - a') &= \| U_{(x,y)} - U_{(x',y)} \|_{(\mathfrak{B}(X,Y))^*} \\ &= \| U_{(x-x',y)} \|_{(\mathfrak{B}(X,Y))^*} \\ &= \sup\{|U_{(x-x',y)}(B)| \mid \| B \|_{\mathfrak{B}(X,Y)} \leq 1\} \\ &\leq \| x - x' \|_X \| y \|_Y < \epsilon \end{aligned}$$

Se pueden dar argumentos similares para el caso $a = 0$, y por la densidad de W en X obtenemos la validez para un elemento arbitrario en $X \otimes_\gamma Y$, obteniendo el resultado. Por lo tanto, también en $\overline{X \otimes_\gamma Y}$. □

La argumentación anterior implica el siguiente corolario.

Corolario 2. *Sean X y Y espacios de Banach. Si $W \subset X$ y $V \subset Y$ son subespacios densos, entonces $W \otimes_\gamma V$ es un subespacio denso de $\overline{X \otimes_\gamma Y}$.*

Demostración. Debido a la Proposición 4, $W \otimes_\gamma V$ es denso en $X \otimes_\gamma V$. Por otra parte, la misma argumentación de la Proposición 4 implica que este espacio es denso en $X \otimes_\gamma Y$, con lo cual se obtiene el resultado. □

Observación 5. *Sea $L^1(\mathbb{R})$ con la norma de Alexiewicz. El Corolario 2 implica que el espacio $L^1(\mathbb{R}) \otimes_\gamma L^1(\mathbb{R})$ es un subespacio denso de $\overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$.*

Teorema 7. *Los productos tensoriales $\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C$, $\overline{HK(\mathbb{R})} \otimes_\gamma \overline{HK(\mathbb{R})}$ y $B_C \otimes_\gamma B_C$ son isométricamente isomorfos entre sí.*

3.0.1. Factorización de módulos de Banach

En el estudio de funcionales lineales positivas en $L^1(G)$, donde G es un grupo topológico, se utiliza un teorema de factorización para álgebras de Banach. Este teorema tiene importantes aplicaciones en el análisis armónico.

En esta sección presentamos teoremas generales de factorización. Para dar estos resultados, es conveniente trabajar en el contexto de los módulos de Banach. El lector puede encontrar estos y otros resultados en [16].

El concepto de identidad aproximada es un interesante concepto que es necesario para el Teorema de Factorización [5].

Definición 8. *Una red* $(e_\beta)_{\beta\in I}$ *de un álgebra de Banach* $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}})$ *se dice que es una identidad aproximada izquierda (derecha, respectivamente) para* $\mathfrak{A}$ *si y sólo si* $(e_\beta\ a)_{\beta\in I}$ *(* $(a\ e_\beta)_{\beta\in I}$*, respectivamente) converge a* a*, para toda* $a \in \mathfrak{A}$*. A saber,*

$$\lim_\alpha \| a - a\ e_\alpha \|_{\mathfrak{A}} = 0 \quad (resp.\ \lim_\alpha \| a - e_\alpha\ a \|_{\mathfrak{A}} = 0) \quad (\forall\ a \in \mathfrak{A}).$$

Si para alguna constante positiva C *también se satisface que*

$$\| e_\alpha \|_{\mathfrak{A}} < C \quad (\forall\ \alpha \in I),$$

entonces se le llama identidad aproximada acotada.

A continuación damos la definición de $\mathfrak{A}$-módulo de Banach [16].

Definición 9. *Sea* $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}})$ *un álgebra de Banach sobre* $\mathbb{R}$*, y* $(X, \|\cdot\|_X)$ *un espacio de Banach real. Diremos que* X *es un* $\mathfrak{A}$*-módulo si y sólo si existe una aplicación* $\mathfrak{A} \times X \ni (\mathfrak{a}, x) \mapsto \mathfrak{a} \circledast x \in X$ *con las siguientes propiedades. Dados* $\alpha \in \mathbb{R},\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}$ *y* $x,\ y \in X$*:*

(i) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \circledast x = \mathfrak{a} \circledast x + \mathfrak{b} \circledast x, \quad \mathfrak{a} \circledast (x + y) = \mathfrak{a} \circledast x + \mathfrak{a} \circledast y;$

(ii) $(\alpha\ \mathfrak{a}) \circledast x = \alpha(\mathfrak{a} \circledast x) = \mathfrak{a} \circledast (\alpha\ x);$

(iii) $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \circledast x = \mathfrak{a} \circledast (\mathfrak{b} \circledast x);$

(iv) $\| \mathfrak{a} \circledast x \|_X \leq c \| \mathfrak{a} \|_{\mathfrak{A}} \| x \|_X$

Aquí $c \geq 1$ *es una constante.*

A un espacio normado X con una aplicación de $\mathfrak{A} \times X$ a L que satisface $(i) - (iv)$ es llamado un $\mathfrak{A}$-módulo normado izquierdo. Un $\mathfrak{A}$-módulo normado derecho se define de manera similar. Si X es un espacio de Banach, entonces a X se le llama $\mathfrak{A}$-módulo de Banach izquierdo (o derecho).

Observación 6. *Un álgebra de Banach* A *es siempre un* A*-módulo de Banach izquierdo y derecho con* $\circledast$ *como la multiplicación en* A *y con* $c = 1$*.*

Recordamos el siguiente resultado [16, Theorem 32.22].

Teorema 8 (Teorema de Factorización de Módulo de Banach)**.** *Sea* $\mathfrak{A}$ *un álgebra de Banach con identidad izquierda aproximada acotada (acotada por* d*). Si* X *es un* $\mathfrak{A}$*-módulo de Banach izquierdo (con respecto a la operación* $\circledast$*), entonces* $\mathfrak{A} \circledast X$ *es un subespacio vectorial cerrado de* X*.*

Más precisamente, sea z *un elemento en la cerradura del espacio generado* S *de* $\mathfrak{A} \circledast X$*, y supongamos que* $\delta > 0$*. Entonces existe un elemento* $a \in \mathfrak{A}$ *y un elemento* $y \in X$ *tal que:*

(i) $z = a \circledast y$;

(ii) $\| a \|_X \leq d$;

(iii) $y \in (A \circledast z)^-$;

(iv) $\| y - z \|_{\mathfrak{A}} \leq \delta$.

Observación 7. *Tenga en cuenta que bajo el supuesto del Teorema de Factorización de Módulo de Banach, y si además* $\mathfrak{A} \circledast X$ *es denso en* X*, entonces* $\mathfrak{A} \circledast X = X$.

Ahora presentamos nuestro teorema de factorización principal para los módulos de Banach izquierdos.

Teorema 9. *Las hipótesis son como en 8. Sea* $\{z_l\}_{l=1}^{\infty}$ *una sucesión en el subespacio cerrado* $\mathfrak{A} \circledast X$ *de* X *tal que* $\lim_{l\to\infty} z_l = 0$*, y supongase que* $\delta > 0$*. Entonces existe un elemento* $a \in \mathfrak{A}$ *y una sucesión* $\{y_l\}_{l=1}^{\infty}$ *de elementos de* L *tal que:*

(i) $z_l = a \circledast y_l$ *para* $l = 1, 2, \ldots$;

(ii) $\| a \|_X \leq d$;

(iii) $y_l \in (A \circledast z)^-$ *para* $l = 1, 2, \ldots$;

(iv) $\| y_l - z_l \|_{\mathfrak{A}} \leq \delta$ *para* $l = 1, 2, \ldots$;

(v) $\lim_{l\to\infty} y_l = 0$.

Corolario 3. *Las hipótesis son como en 8. Si* B *es un subconjunto numerable de* $\mathfrak{A} \circledast X$*, entonces existe un* $a \in \mathfrak{A}$ *tal que* $B \subset a \circledast X$.

Observación 8. *Hacemos algunas observaciones útiles acerca los Teoremas 8 y 9.*

(a) Si $\mathfrak{A} \circledast X$ *es denso en* X*, entonces el Teorema 8 nos dice que* $\mathfrak{A} \circledast X = X$*. En este caso, el Teorema 9 es válido para cualquier sucesión* $\{z_l\}_{l=1}^{\infty}$ *en* X *tal que* $\lim_{l\to\infty} z_l = 0$.

Esto pasa, por ejemplo, si la identidad aproximada para $\mathfrak{A}$ *también sirve como una identidad aproximada para* X *(las normas de* X *y* $\mathfrak{A}$ *pueden ser muy diferentes).*

En particular, estas observaciones siempre se aplican a la misma álgebra de Banach $\mathfrak{A}$.

(b) Supongamos que la identidad aproximada acotada izquierda de $\mathfrak{A}$ *se puede elegir de un determinado subconjunto convexo cerrado* $C \subset \mathfrak{A}$*. Entonces* a *se puede tomar en* C*. (Cada* $a_n = \sum_{k=1}^{n} (2d)^{k-1}(2d+1)^{-k} e_k + (2d)^n (2d+1)^{-n} e_n$ *es una combinación convexa de* $e_1, e_2, \ldots, e_n$*, y* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$*).*

El siguiente es el Teorema de Factorización de Cohen.

Corolario 4 (P. J. Cohen)**.** *Sea* $\mathfrak{A}$ *un álgebra de Banach con una identidad aproximada acotada izquierda. Entonces para cada* $z \in \mathfrak{A}$ *y* $\delta > 0$*, existen elementos* x *y* y *en* $\mathfrak{A}$ *tal que:*

(i) $z = xy$;

(ii) $y \in (Az)^{-}$;

(iii) $\| z - y \| < \delta$

Capítulo 4

Un teorema de factorización

Este capítulo contiene los principales resultados de esta tesis. El Teorema 13 y el Teorema 4 fueron publicados en [10] y son los resultados más importantes de este cápitulo. El Teorema 13 da una factorización del producto tensorial de las distribuciones integrables consigo mismo, y el Teorema 4 nos da una caracterización de este producto tensorial.

4.1. Primeras factorizaciones

Nuestro primer resultado sobre el Teorema de Factorización no es para un producto tensorial de $\mathcal{A}_C$, sino para este espacio en sí. Observese que el Teorema 10, que se presenta a continuación, proporciona una factorización diferente a la de [25].

En [13] se define un producto $\cdot$ en $\mathcal{A}_C$, este producto se define de la siguiente manera:

$$T'_F \cdot T'_G := T'_{FG} \quad (\forall\, T'_F, T'_G \in \mathcal{A}_C). \tag{4.1}$$

Con este producto $\mathcal{A}_C$ es un álgebra de Banach.

Teorema 10. *El álgebra de Banach* $(\mathcal{A}_C, \cdot)$ *tiene la siguiente factorización*

$$\mathcal{A}_C \cdot \mathcal{A}_C = \mathcal{A}_C.$$

Demostración. Tome una función $j(t)$ en $\mathbb{R}$ infinitamente diferenciable tal que es cero para $t < 1$ y $j(t) = 1$, para $t > 2$. Se define una identidad aproximada acotada en $\mathcal{A}_C$ como $(T'_{e_\alpha})_{\alpha\in\mathbb{R}}$ con

$$e_\alpha(t) := j(t + \alpha).$$

Luego,

$$\|T'_{e_\alpha} \cdot T'_F - T'_F\|_{\mathcal{A}_C} = \|e_\alpha F - F\|_\infty \to 0 \quad \text{as } \alpha \to \infty, \quad (\forall F \in \mathcal{B}_C).$$

Además, de [16, Observación 32.15] sabemos que $\mathcal{A}_C$ es un $\mathcal{A}_C$-módulo de Banach. Entonces, el Teorema de Factorización de Cohen se aplica en este caso y da el resultado. $\square$

Gelbaum [11] y Tomiyama [38] definieron el siguiente producto para los elementos de $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, con $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ álgebras de Banach.

Definición 10. *Sea $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ álgebras de Banach. El producto $\circ$ en $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ es definido por*

$$(\mathfrak{a}_1 \otimes \mathfrak{b}_1) \circ (\mathfrak{a}_2 \otimes \mathfrak{b}_2) := \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \otimes \mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2 \quad (\forall\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2 \in \mathfrak{A};\ \forall\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}_2 \in \mathfrak{B}).$$

El producto $\circ$ se extiende linealmente en $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Denotamos esta extensión por el mismo símbolo $\circ$.

Lema 1. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ álgebras de Banach. El producto $\circ$ definido en $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ hace de este espacio un álgebra. Además, la norma proyectiva γ en $\mathfrak{A} \otimes_\gamma \mathfrak{B}$ es compatible con el producto $\circ$:*

$$\gamma(u_1 \circ u_2) \leq \gamma(u_1)\gamma(u_2) \quad (\forall u_1, u_2 \in \mathfrak{A} \otimes_\gamma \mathfrak{B}).$$

Este producto puede ser extendido a la completación $\overline{\mathfrak{A} \otimes_\gamma \mathfrak{B}}$, el cual se convierte en un álgebra de Banach.

Demostración. La prueba es similar a la dada para el Lema 2 más adelante, aquí no damos los detalles. □

Para aplicar el Teorema de Factorización a un producto tensorial, necesitamos la siguiente generalización.

Teorema 11. *Si $(\mathfrak{A}, \| \cdot \|_{\mathfrak{A}})$ es un álgebra de Banach con identidad aproximada acotada, entonces $\overline{\mathfrak{A} \otimes_\gamma \mathfrak{A}}$ tiene unidad aproximada acotada.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $\sum_{i=1}^k u_i \otimes v_i \in \mathfrak{A} \otimes_\gamma \mathfrak{A}$. Denotamos por $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ a la identidad aproximada acotada, tomamos $M = \sup\{\| v_i \|, \| u_i \| +1 \mid i = 1, \ldots, k\}$. Para cada u_i existe e_{α_i} que cumple

$$\| u_i - e_{\alpha_i} u_i \|_{\mathfrak{A}} < \epsilon/(2kM).$$

Similarmente para cada v_i podemos tomar $e_{\overline{\alpha}_i}$ tal que

$$\| v_i - e_{\overline{\alpha}_i} v_i \| < \epsilon/(2kM).$$

Se elige $\alpha \in I$ tal que cumpla con las dos desigualdades anteriores. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\gamma\Big(\sum_{i=1}^k u_i \otimes v_i - e_\alpha \otimes e_\alpha \circ \sum_{i=1}^k u_i \otimes v_i\Big) &= \gamma\Big(\sum_{i=1}^k (u_i \otimes v_i - e_\alpha \otimes e_\alpha \circ u_i \otimes v_i)\Big) \\
&= \gamma\Big(\sum_{i=1}^k (u_i \otimes v_i - e_\alpha u_i \otimes e_\alpha v_i)\Big) \\
&= \gamma\Big(\sum_{i=1}^k (u_i - e_\alpha u_i) \otimes v_i + e_\alpha u_i \otimes (v_i - e_\alpha v_i)\Big) \\
&\leq \sum_{i=1}^k \gamma\big((u_i - e_\alpha u_i) \otimes v_i\big) + \gamma\big(e_\alpha u_i \otimes (v_i - e_\alpha v_i)\big) \\
&= \sum_{i=1}^k \| u_i - e_\alpha u_i \| \| v_i \| + \| e_\alpha u_i \| \| v_i - e_\alpha v_i \| \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Esto indica que $(e_\alpha \otimes e_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una identidad aproximada acotada de $\overline{\mathfrak{A} \otimes_\gamma \mathfrak{A}}$. □

Un resultado análogo del Teorema 10 es el siguiente corolario.

Corolario 5.

$$\overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C} \circ \overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C} = \overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C},$$

$$\overline{L^1(\mathbb{R}) \otimes_\gamma L^1(\mathbb{R})} \circ \overline{L^1(\mathbb{R}) \otimes_\gamma L^1(\mathbb{R})} = \overline{L^1(\mathbb{R}) \otimes_\gamma L^1(\mathbb{R})}.$$

Demostración. La primera igualdad es consecuencia de que $\mathcal{A}_C$ es un álgebra de Banach con el producto dado por (4.1). En la demostración del Teorema 10 se muestra que $\mathcal{A}_C$ tiene una identidad aproximada acotada. Por lo tanto, del Teorema 11, el álgebra de Banach $\overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$ también tiene una identidad aproximada acotada. Esta álgebra de Banach también es un módulo de Banach de sí misma. Entonces el Teorema de Factorización implica el resultado.

La segunda igualdad del Corolario 5 es una reformulación del resultado de W. Rudin [31], cuando $(L^1(\mathbb{R}), *)$ es un álgebra de Banach con el producto usual de convolución $*$ definido como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy. \tag{4.2}$$

Además, tiene una identidad aproximada acotada. Esto prueba el corolario. □

4.2. Factorización con respecto a un producto de convolución

En los siguientes lemas vamos a construir una aplicación $\circledast$ con las propiedades necesarias para que $\overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$ sea un $\overline{L^1(\mathbb{R}) \otimes_\gamma L^1(\mathbb{R})}$-módulo.

Recordemos que en [36] el operador convolución $*$ definido por (4.2) fue extendido, y esta extensión hace de $\overline{HK(\mathbb{R})}$ un L^1-módulo [25]. Esto significa que $\mathcal{A}_C$ también es un L^1-módulo. Vamos a denotar por el mismo simbolo $*$ a este operador.

Definición 11. *Sea* $h = \sum_{j=1}^m v_j \otimes w_j \in L^1 \otimes L^1$ *y* $u = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i \in \mathcal{A}_C \otimes \mathcal{A}_C$. *Definimos*

$$\circledast : \left(L^1 \otimes L^1\right) \times \left(\mathcal{A}_C \otimes \mathcal{A}_C\right) \to \mathcal{A}_C \otimes \mathcal{A}_C$$

como

$$h \circledast u := \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (v_j * f_i) \otimes (w_j * g_i).$$

Nótese que $\circledast$ es un operador bilineal, así que está bien definido en el producto tensorial [32].

Lema 2. *Si* $h \in L^1 \otimes L^1$ *y* $u \in \mathcal{A}_C \otimes \mathcal{A}_C$, *entonces* $\gamma(h \circledast u) \leq \gamma(h)\ \gamma(u)$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, tomamos h y u como anteriormente. Podemos suponer que

$$\sum_{i=1}^{n} \| f_i \|_{A_C} \| g_i \|_{A_C} \leq \gamma(u) + \epsilon; \quad \sum_{j=1}^{m} \| v_j \|_1 \| w_j \|_1 \leq \gamma(h) + \epsilon.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \gamma(h \circledast u) &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \| v_j * f_i \|_{A_C} \| w_j * g_i \|_{A_C} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (\| f_i \|_{A_C} \| v_j \|_1)\ (\| g_i \|_{A_C} \| w_j \|_1) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n} \| f_i \|_A \| g_i \|_A \Big)\Big(\sum_{j=1}^{m} \| v_j \|_1 \| w_j \|_1 \Big) \\ &\leq (\gamma(u) + \epsilon)(\gamma(h) + \epsilon). \end{aligned}$$

Concluimos la prueba ya que $\epsilon > 0$ es arbitrario. □

Lema 3. *La aplicación*

$$\circledast : \big(L^1 \otimes L^1\big) \times \big(\mathcal{A}_C \otimes \mathcal{A}_C\big) \to \mathcal{A}_C \otimes \mathcal{A}_C$$

se extiende a una función de $\overline{L^1 \otimes_\gamma L^1} \times \overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$ *a* $\overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$.

Demostración. Dadas (h_n) y (u_n) sucesiones de Cauchy en $\overline{L^1 \otimes_\gamma L^1}$ y $\overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$, respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \gamma(h_n \circledast u_n - h_m \circledast u_m) &\leq \gamma(h_n \circledast u_n - h_m \circledast u_n) + \gamma(h_m \circledast u_n - h_m \circledast u_m) \\ &\leq \gamma(u_n - u_m)\ \gamma(h_n) + \gamma(u_m)\ \gamma(h_n - h_m) \to 0 \\ &\quad \text{cuando } n,\ m \to \infty. \end{aligned}$$

Esto implica que $(h_n \circledast u_n)$ es una sucesión de Cauchy en $\overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$ cuando (h_n) y (u_n) son sucesiones de Cauchy. Para un elemento arbitrario $(h, u) \in \overline{L^1 \otimes_\gamma L^1} \times \overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$ extendemos la aplicación $\circledast$, denotándola por el mismo símbolo, de la siguiente manera

$$h \circledast u := \lim_{n\to\infty} h_n \circledast u_n, \text{ cuando } h_n \to h,\ u_n \to u \text{ en las normas respectivas.}$$

De acuerdo con un cálculo estándar, el límite es independiente de las sucesiones que convergen a h y u. Esto prueba el lema. □

Teorema 12. $\overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$ *es un* $\overline{L^1 \otimes_\gamma L^1}$*-módulo.*

Demostración. Esto se obtiene tomando una sucesión $(h_n \circledast u_n)$ con (h_n) y (u_n) sucesiones que convergen a h y u, respectivamente. El Lema 2 implica

$$\gamma(h \circledast u) = \lim_{n\to\infty} \gamma(h_n \circledast u_n) \leq \lim_{n\to\infty} \gamma(h_n)\ \gamma(u_n) \leq \gamma(h)\gamma(u).$$

La desigualdad anterior prueba la propiedad (iv) de la Definición 9. Las otras propiedades son sencillas de obtener. □

Teorema 13. $\big(\overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}\big) \circledast \big(\overline{L^1 \otimes_\gamma L^1}\big) = \overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$.

Demostración. De acuerdo con el Teorema de Factorización del Módulo de Banach es suficiente con probar que

$$\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C \subset \big(\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C\big) \circledast \big(L^1 \otimes_\gamma L^1\big).$$

Sea $w = \sum_{i=1}^n \mathfrak{a}_{1,i} \otimes \mathfrak{a}_{2,i} \in \mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C$. De la expresión (1.1) se puede escribir

$$\mathfrak{a}_{\ell,i} = f_{\ell,i} * h_{\ell,i} \in \mathcal{A}_C * L^1(\mathbb{R}), \quad \ell = 1,\ 2;\ i = 1, \ldots, n.$$

Al conjuntar lo anterior se obtiene:

$$w = \sum_{i=1}^n (f_{1,i} * h_{1,i}) \otimes (f_{2,i} * h_{2,i}) = \sum_{i=1}^n (f_{1,i} \otimes f_{2,i}) \circledast (h_{1,i} \otimes h_{2,i}).$$

Por el Teorema de Factorización del Módulo de Banach existe un elemento $u \in \mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C$ y un elemento $h \in L^1 \otimes_\gamma L^1$ tal que

$$\sum_{i=1}^n (f_{1,i} \otimes f_{2,i}) \circledast (h_{1,i} \otimes h_{2,i}) = u \circledast h \in \big(\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C\big) \circledast \big(L^1 \otimes_\gamma L^1\big).$$

Esto prueba la densidad de $\big(\overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}\big) \circledast \big(\overline{L^1 \otimes_\gamma L^1}\big)$ en $\overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$, dando el resultado por la aplicación del Teorema de Factorización del Módulo de Banach. □

Denotamos por $BV(\mathbb{R})$ al espacio de las funciones de variación acotada sobre $\mathbb{R}$. En el contexto de los teoremas anteriores también estudiamos el espacio

$$\overline{\big(HK(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})\big) \otimes_\gamma \big(HK(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})\big)}.$$

Este subespacio de $HK(\mathbb{R}) \otimes_\gamma HK(\mathbb{R})$ es análogo al espacio

$$L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2),$$

en la teoría de Lebesgue. En contraste, demostraremos que el Teorema de Factorización no se cumple para este subespacio de $\overline{HK(\mathbb{R}) \otimes_\gamma HK(\mathbb{R})}$.

Denotaremos por $B = HK(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$ y por $B_0 := AC_{loc}(\mathbb{R}) \cap B$, con AC_{loc} que denota al conjunto de funciones absolutamente continuas sobre cada intervalo compacto en $\mathbb{R}$. Se muestra en [25] que $B * L^1(\mathbb{R}) = B_0 \subsetneq B$. Esto significa en particular que B_0 es un subespacio cerrado del espacio de Banach B con la norma

$$\|f\|_B := \|f\|_A + \|f\|_{BV},$$

con $\|f\|_{BV}$ la norma usual en $BV(\mathbb{R})$. Además, para $u \in B$ se cumple que

$$\| u \|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)| \leq \| u \|_B\ . \tag{4.3}$$

Ver [25] para los detalles.

Lema 4. *Existe una isometría $\mathfrak{I}$ entre $\overline{B \otimes_\gamma B}$ y un espacio de Banach $\mathfrak{H}$ de funciones reales definidas sobre $\mathbb{R}^2$. En particular, $\mathfrak{I}\big(\overline{B_0 \otimes_\gamma B_0}\big)$ es un subespacio cerrado de $C_b(\mathbb{R}^2)$, las funciones continuas acotadas sobre $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Para cada elemento $\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{c} \in B \otimes_\gamma B$ definimos

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{c}) := \mathfrak{b}\ \mathfrak{c},$$

donde $\mathfrak{b}\ \mathfrak{c} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ denota la función

$$(\mathfrak{b}\ \mathfrak{c})(x, y) := \mathfrak{b}(x)\ \mathfrak{c}(y).$$

Se extiende linealmente la función $\mathfrak{I}$ sobre todo $B \otimes B$. El rango de $\mathfrak{I}$ es claramente un subespacio $\mathfrak{h}$ del espacio de funciones reales sobre $\mathbb{R}^2$. En este espacio definamos la norma

$$\|h\| = \text{ínf} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \| \mathfrak{b}_i \|_B \| \mathfrak{c}_i \|_B : \ \mathfrak{b}_i,\ \mathfrak{c}_i \in B,\ h = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{b}_i \mathfrak{c}_i \right\}.$$

Esto induce una norma en el espacio $\mathfrak{h}$, y claramente $\mathfrak{I} : B \otimes_\gamma B \to \mathfrak{h}$ es una isometría. Del Teorema de la Transformación Lineal Acotada uno puede extender continuamente $\mathfrak{I}$ sobre la completación $\overline{B \otimes_\gamma B}$. Denotamos la extensión por el mismo símbolo. $\mathfrak{I}$. Es fácil ver que esta isometría está definida sobre la completación $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{h}$ con la norma $\| \cdot \|$. Para ver que este espacio está contenido en el espacio de funciones reales sobre todo $\mathbb{R}^2$, tomamos una sucesión de Cauchy $\left(\sum_{j=1}^{R(n)} \mathfrak{b}_j^{(n)} \mathfrak{c}_j^{(n)} \right)_{n=1}^{\infty}$ de elementos en $\mathfrak{H}$. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{R(n)} \mathfrak{b}_j^{(n)} \mathfrak{c}_j^{(n)} - \sum_{j=1}^{R(m)} \mathfrak{b}_j^{(m)} \mathfrak{c}_j^{(m)} \right\| < \varepsilon \quad (\forall n,\ m \geq K_\varepsilon).$$

Denotemos $h = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{R(n)} \mathfrak{b}_j^{(n)} \mathfrak{c}_j^{(n)} \in \mathfrak{H}$, y

$$\mathbb{R}^+ \ni L = \lim_{n\to\infty} \| \sum_{j=1}^{R(n)} \mathfrak{b}_j^{(n)} \mathfrak{c}_j^{(n)} \| .$$

Esto implica que existe una secesión $\left(\sum_{j=1}^{R_k} \tilde{\mathfrak{b}}_j^{(k)} \tilde{\mathfrak{c}}_j^{(k)} \right)_{k=1}^{\infty}$ que cumple

$$\sum_{j=1}^{R(n_k)} \mathfrak{b}_j^{(n_k)} \mathfrak{c}_j^{(n_k)} = \sum_{j=1}^{R_k} \tilde{\mathfrak{b}}_j^{(k)} \tilde{\mathfrak{c}}_j^{(k)},$$

tal que

$$\sum_{j=1}^{R_k} \| \tilde{\mathfrak{b}}_j^{(k)} \|_B \| \tilde{\mathfrak{c}}_j^{(k)} \|_B \leq L + 1/k.$$

En particular,

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \left| \sum_{j=1}^{R(n_k)} \mathfrak{b}_j^{(n_k)}(x) \mathfrak{c}_j^{(n_k)}(y) \right| \leq \sum_{j=1}^{R_k} \| \tilde{\mathfrak{b}}_j^{(k)} \|_\infty \| \tilde{\mathfrak{c}}_j^{(k)} \|_\infty \leq L + 1/k.$$

Aquí se usa (4.3). Resulta que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{R(n_k)} \mathfrak{b}_j^{(n_k)}(x) \mathfrak{c}_j^{(n_k)}(y) \text{ exists in } \mathbb{R} \quad (\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}^2).$$

Siendo esta última expresión una subsucesión de la sucesión. $\left(\sum_{j=1}^{R(n)} \mathfrak{b}_j^{(n)} \mathfrak{c}_j^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, entonces

$$h = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{R(n)} \mathfrak{b}_j^{(n)} \mathfrak{c}_j^{(n)}$$

Es una función real sobre $\mathbb{R}^2$. Además, B_0 es un subespacio de las funciones continuas acotadas sobre $\mathbb{R}$ [25]. Entonces, un razonamiento similar al anterior conduce a la conclusión de que $\mathfrak{I}(\overline{B_0 \otimes_\gamma B_0})$ es un subespacio de las funciones continuas acotadas sobre $\mathbb{R}^2$. □

Teorema 14. $\left(\overline{B \otimes_\gamma B}\right) \circledast \left(\overline{L^1 \otimes_\gamma L^1}\right) = \overline{B_0 \otimes_\gamma B_0} \subsetneq \overline{B \otimes_\gamma B}$.

Demostración. El mismo argumento como en el Teorema. 13 muestra que

$$B_0 \otimes_\gamma B_0 \subset \left(B \otimes_\gamma B\right) \circledast \left(L^1 \otimes_\gamma L^1\right).$$

Esto demuestra la igualdad en la expresión de este teorema, mediante la aplicación del Teorema de Factorización del Módulo de Banach. Para probar que $\overline{B_0 \otimes_\gamma B_0}$ es un subespacio propio de $\overline{B \otimes_\gamma B}$, se observa que el Lema 4 implica que $\overline{B \otimes_\gamma B}$ es isométricamente equivalente a un espacio de funciones acotadas no necesariamente continuas. Mientras que $\overline{B_0 \otimes_\gamma B_0}$ corresponde a un subespacio de las funciones continuas. □

Teorema 15. *$\overline{B \otimes_\gamma B}$ está continuamente inmerso en los espacios $\overline{L^2(\mathbb{R}) \otimes_\gamma L^2(\mathbb{R})}$, $\overline{HK(\mathbb{R}) \otimes_\gamma HK(\mathbb{R})}$ y $\overline{BV(\mathbb{R}) \otimes_\gamma BV(\mathbb{R})}$.*

Demostración. Tomemos $u = \sum_{j=1}^{N} \mathfrak{b}_j \otimes \mathfrak{c}_\mathfrak{j} \in B \otimes_\gamma B$. Entonces, debido a que B está continuamente inmerso en $L^2(\mathbb{R})$ [25], obtenemos

$$\| u \|_{L^2 \otimes_\gamma L^2} \leq \sum_{j=1}^{N} \| \mathfrak{b}_j \|_{L^2} \| \mathfrak{c}_\mathfrak{j} \|_{L^2} \leq c^2 \sum_{j=1}^{N} \| \mathfrak{b}_j \|_B \| \mathfrak{c}_\mathfrak{j} \|_B .$$

Aquí $c > 0$ es una constante. Ya que la norma de u, como un elemento de $L^2 \otimes_\gamma L^2$, es un ínfimo tomado sobre un conjunto más grande, la primera desigualdad en la expresión anterior es válida. Con lo anterior se obtiene,

$$\begin{aligned} \| u \|_{L^2 \otimes_\gamma L^2} &\leq c^2 \inf \left\{ \sum_{j=1}^{N} \| \mathfrak{b}_j \|_B \| \mathfrak{c}_\mathfrak{j} \|_B : \mathfrak{b}_j, \mathfrak{c}_j \in B;\ u = \sum_{j=1}^{N} \mathfrak{b}_j \otimes \mathfrak{c}_\mathfrak{j} \right\} \\ &= c^2 \| u \|_{B \otimes_\gamma B} . \end{aligned}$$

Esto induce una inyección continua de $\overline{B \otimes_\gamma B}$ a $\overline{L^2(\mathbb{R}) \otimes_\gamma L^2(\mathbb{R})}$. Las otras inclusiones se prueban de manera similar. □

Capítulo 5

La integral tensorial y la transformada de Fourier

En este capítulo definimos la integral de Henstock-Kurzweil sobre el espacio $\overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$. También, en terminos de esta integral definimos una transformada integral sobre el producto tensorial $\overline{B \otimes_\gamma B}$, y mostramos su relación con la transformada clásica de Fourier sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Definición 12. *Dado un elemento $u \in \mathcal{A}_C \otimes \mathcal{A}_C$, su integral de Henstock-Kurzweil se define como*

$$T(u) := \iint \sum_{i=1}^{n} f_{1,i} \otimes f_{2,i} := \sum_{i=1}^{n} \Big(\int f_{1,i} \Big) \Big(\int f_{2,i} \Big).$$

Observación 9. *Nótese que esta integral es una forma bilineal y por lo tanto está bien definida [32].*

Proposición 5. *El operador $T : \mathcal{A}_C \otimes \mathcal{A}_C \to \mathbb{R}$ dado por $T(u) := \iint u$ se extiende a un funcional lineal acotado sobre $\overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$.*

Demostración. Sea $u \in \mathcal{A}_C \otimes \mathcal{A}_C$.

$$\begin{aligned}
|T(u)| &= \Big| \sum_{i=1}^{n} \Big(\int f_{1,i} \Big) \Big(\int f_{2,i} \Big) \Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \Big| \int f_{1,i} \Big| \Big| \int f_{2,i} \Big| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big| F_{1,i}(\infty) \Big| \Big| F_{2,i}(\infty) \Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \| f_{1,i} \|_A \| f_{2,i} \|_A
\end{aligned}$$

Se sigue de [32] que T está bien definido y $|T(u)| \leq \gamma(u)$. Esto implica que T se puede extender de manera continua sobre la completación de $\mathcal{A}_C \otimes \mathcal{A}_C$ con respecto a la norma γ. $\square$

Denotaremos por el mismo símbolo T a la extensión continua de este funcional.

Definición 13. *Para cada $u \in \overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$ definimos la 2D-integral de Henstock-Kurzweil por*

$$\iint u := T(u).$$

En el siguiente teorema presentamos las propiedades básicas de la integral distribucional.

Teorema 16 (**Propiedades Básicas**).

(a) Linealidad. Si $u_1, u_2 \in \overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$ y $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ entonces $k_1u_1 + k_2u_2 \in \overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$ y $\iint(k_1u_1 + k_2u_2) = k_1 \iint u_1 + k_2 \iint u_2$.

(b) Aditividad respecto a rectangulos no traslapados. Sea $\{E_i : i = 1, \ldots m\}$ una familia de rectángulos tales que $intE_i \cap intE_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Si $E = \cup_{i=1}^m E_i$ entonces

$$\iint_E u_1 = \sum_{i=1}^m \iint_{E_i} u_1.$$

(c) Integrabilidad en unión finita de rectángulos. Sea E como en el inciso anterior. Si $u \in \overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$ entonces u es integrable en E.

5.1. La transformada de Fourier

En [23] se muestra que la transformada de Fourier HK existe para toda función en $\overline{HK(I)}$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto. También se mostró en [23] que la transformada de Fourier HK existe para todos los elementos de B. Con lo anterior podemos definir la transformada de Fourier tensorial.

Definición 14. *Sean $X, Y \in \{\mathcal{A}_C(I), B\}$. Para cada $u \in X \otimes Y$, con $u = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i$, y cada $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, definimos*

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_\otimes u)(\mathbf{y}) &:= \iint u \circ (e^{-2i\pi(\cdot)y_1} \otimes e^{-2i\pi(\cdot)y_2}) \\ &:= \sum_{i=1}^n T\big(f_i(\cdot)e^{-2i\pi(\cdot)y_1} \otimes g_i(\cdot)e^{-2i\pi(\cdot)y_2}\big).\end{aligned}$$

Decimos que $\mathcal{F}_\otimes u$, denotado también por $\widehat{u}$, es la T-transformada de Fourier de u.

A continuación $\mathcal{F}_H^{(1)}$ representa la HK transformada de Fourier definida en B.

Proposición 6. *Sean $X, Y \in \{\mathcal{A}_C(I), B\}$. Para cada $u \in X \otimes Y$, con $u = \sum_{i=1}^n f_{1,i} \otimes f_{2.i}$, se satisface la siguiente ecuación*

$$\mathcal{F}_\otimes(u)(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \Big(\mathcal{F}^{(1)}(f_{1,i})(y_1)\Big) \otimes \Big(\mathcal{F}^{(1)}(f_{2,i})(y_2)\Big).$$

Demostración. Sea $u \in X \otimes_\gamma Y$ con $u = \sum_{i=1}^n f_{1,i} \otimes f_{2.i}$. Aplicando la definición de $\circ$ se tiene que:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) \circ (e^{-2i\pi x_1 y_1} \otimes e^{-2i\pi x_2 y_2}) &= \left(\sum_{i=1}^n f_{1,i}(x_1) \otimes f_{2.i}(x_2) \right) \circ (e^{-2i\pi x_1 y_1} \otimes e^{-2i\pi x_2 y_2}) \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\big(f_{1,i}(x_1) \otimes f_{2.i}(x_2) \big) \circ (e^{-2i\pi x_1 y_1} \otimes e^{-2i\pi x_2 y_2}) \Big) \\ &= \sum_{i=1}^n (f_{1,i}(x_1) e^{-2i\pi x_1 y_1}) \otimes (f_{2.i}(x_2) e^{-2i\pi x_2 y_2}). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\otimes(u)(\mathbf{y}) &:= \iint u(x) \circ (e^{-2i\pi x_1 y_1} \otimes e^{-2i\pi x_2 y_2});\ x \in \mathbb{R}^2 \\ &:= \iint \sum_{i=1}^n (f_{1,i} e^{-2i\pi x_1 y_1}) \otimes (f_{2.i}(x) e^{-2i\pi x_2 y_2}) \\ &:= \sum_{i=1}^n \left(\int f_{1,i} e^{-2i\pi x_1 y_1} \right) \otimes \left(\int f_{2,i} e^{-2i\pi x_2 y_2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\mathcal{F}^{(1)}(f_{1,i})(y_1) \Big) \otimes \Big(\mathcal{F}^{(1)}(f_{2,i})(y_2) \Big). \end{aligned}$$

□

A continuación $\mathcal{F}_H^{(1)}$ representa la HK transformada de Fourier definida en B. La convolución en B cumple que $* : B \times B \to C_0(\mathbb{R})$. Además, si $f, g \in B$ entonces $\mathcal{F}_H^{(1)}(f * g) = \mathcal{F}_H^{(1)}(f)\mathcal{F}_H^{(1)}(g)$ [22]. Lo anterior permite probar el siguiente resultado.

Teorema 17. *Sean $u_1, u_2 \in B \otimes B$, con $u_1 = \sum_{i=1}^n f_{1,i} \otimes f_{2,i}$ y $u_2 = \sum_{j=1}^m g_{1,j} \otimes g_{2,j}$. Entonces $\circledast : \big(B \otimes B\big) \times \big(B \otimes B\big) \to C_0(\mathbb{R}) \otimes C_0(\mathbb{R})$ y*

$$\mathcal{F}_\otimes(u \circledast h) = \mathcal{F}_\otimes(u) \circ \mathcal{F}_\otimes(h).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\otimes(u \circledast h) &= \mathcal{F}_\otimes\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (f_{1,i} * h_{1,j}) \otimes (f_{2,i} * h_{2,j}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathcal{F}_H^{(1)}(f_{1,i} * h_{1,j}) \otimes \mathcal{F}_H^{(1)}(f_{2,i} * h_{2,j}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathcal{F}_H^{(1)}(f_{1,i}) \mathcal{F}_H^{(1)}(h_{1,j}) \otimes \mathcal{F}_H^{(1)}(f_{2,i}) \mathcal{F}_H^{(1)}(h_{2,j}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Big(\mathcal{F}_H^{(1)}(f_{1,i}) \otimes \mathcal{F}_H^{(1)}(f_{2,i}) \Big) \circ \Big(\mathcal{F}_H^{(1)}(h_{1,j}) \otimes \mathcal{F}_H^{(1)}(h_{2,j}) \Big) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^n \mathcal{F}_H^{(1)}(f_{1,i}) \otimes \mathcal{F}_H^{(1)}(f_{2,i}) \Big) \circ \Big(\sum_{j=1}^m \mathcal{F}_H^{(1)}(h_{1,j}) \otimes \mathcal{F}_H^{(1)}(h_{2,j}) \Big) \\ &= \mathcal{F}_\otimes(u) \circ \mathcal{F}_\otimes(h). \end{aligned}$$

□

Analizamos la continuidad de la T-transformada de Fourier. En [26] se demuestra que para los elementos $f \in B$, la transformada clásica de Fourier unidimensional y la HK-transformada de Fourier coinciden. Se deduce que para $u = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i \in B \otimes_\gamma B$, entonces

$$\mathcal{F}_\otimes(u) := \sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}^{(1)}(f_i) \otimes \mathcal{F}^{(1)}(g_i) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Aquí $\mathcal{F}^{(1)}$ denota la transformada clásica de Fourier definida como un operador unitario sobre $L^2(\mathbb{R})$. Similarmente, denotamos por $\mathcal{F}^{(2)}$ a la transformada clásica de Fourier sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Por simplicidad escribiremos $L^2 = L^2(\mathbb{R})$. Nótese que $\overline{L^2 \otimes_\gamma L^2} \cong L^2(\mathbb{R}^2)$, así que identificamos cada elemento de cada espacio con su elemento correspondiente en el otro [6, 28].

Teorema 18. *La T-transformada de Fourier $\mathcal{F}_\otimes : B \otimes_\gamma B \to L^2(\mathbb{R}) \otimes_\gamma L^2(\mathbb{R})$ se extiende a un operador acotado de $\overline{B \otimes_\gamma B}$ a $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Demostración. Sea $u = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i \in B \otimes_\gamma B$. Observe que

$$\begin{aligned}
\gamma\Big(\mathcal{F}_\otimes\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i\Big)\Big) &= \gamma\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}^{(1)}(f_i) \otimes \mathcal{F}^{(1)}(g_i)\Big) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \gamma\Big(\mathcal{F}^{(1)}(f_i) \otimes \mathcal{F}^{(1)}(g_i)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \| \mathcal{F}^{(1)}(f_i) \|_2 \| \mathcal{F}^{(1)}(g_i) \|_2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \| f_i \|_2 \| g_i \|_2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4}(\| f_i \|_A + \| f_i \|_{BV})(\| g_i \|_A + \| g_i \|_{BV}) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \| f_i \|_B \| g_i \|_B
\end{aligned}$$

En la segunda desigualdad hemos utilizado [25, Teorema 1]. Por propiedades del ínfimo concluimos que

$$\gamma(\mathcal{F}_\otimes(u)) \leq \frac{1}{4}\gamma(u).$$

El Teorema de la Transformación Lineal Acotada implica el resultado. □

Corolario 6. *El siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
 & L^2(\mathbb{R}^2) \arrow[d, "\mathcal{F}^{(2)}"] \\
\overline{B \otimes_\gamma B} \arrow[ur, "\mathfrak{J}"] \arrow[r, "\mathcal{F}_\otimes"'] & L^2(\mathbb{R}^2)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Esto se sigue del Lema 4, el [25, Teorema 1] y la Definición 14. □

Ejemplo 3. *Sean α y β números positivos con $0 < \alpha < \beta \leq 1$ y $\alpha + \beta > 1$. Considere la siguiente función en $B \setminus L^1(\mathbb{R})$ [23]*

$$\sin_\alpha^\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \sin_\alpha^\beta(t) = \frac{\sin(|t|^\alpha)}{|t|^\beta}$$

para $|t| > 1$, extendiéndola de forma continuamente diferenciable sobre $[-1, 1]$. Entonces

$$\mathfrak{J}(\sin_\alpha^\beta \otimes \sin_\alpha^\beta) \in L^2(\mathbb{R}^2) \setminus L^1(\mathbb{R}^2)$$

y la T-transformada de Fourier de $\sin_\alpha^\beta \otimes \sin_\alpha^\beta$ es igual casi donde quiera a una función continua que tiende a cero en el infinito. Además,

$$\mathcal{F}_\otimes(\sin_\alpha^\beta \otimes \sin_\alpha^\beta)(y_1, y_2) = \iint (\sin_\alpha^\beta \otimes \sin_\alpha^\beta) \circ (e^{-2i\pi(\cdot)y_1} \otimes e^{-2i\pi(\cdot)y_2})$$

es una representación integral en términos de la 2D-integral de Henstock-Kurzweil siempre que $y_1, y_2 \neq 0$. Esto también muestra que el Lema de Riemann-Lebesgue es válido en un subespacio no contenido en $L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$. De hecho, al menos en el subespacio $\mathfrak{J}(B \otimes B)$.

La transformada de Fourier para $\mathcal{A}_C \otimes \mathcal{A}_C$ y $BV \otimes BV$

Las distribuciones integrables, $\mathcal{A}_C$, son temperadas y por lo tanto la transformada de Fourier distribucional existe para cada elemento de $\mathcal{A}_C$. Denotamos por $\mathcal{F}_d$ a la transformada de Fourier distribucional.

Proposición 7. *Para cada $u \in \overline{\mathcal{A}_C \otimes_\gamma \mathcal{A}_C}$, con $u = \sum_{i=1}^n f_{1,i} \otimes f_{2.i}$, la transformada de Fourier existe y*

$$\mathcal{F}_\otimes(u)(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \Big(\mathcal{F}_d(f_{1,i})(y_1)\Big) \otimes \Big(\mathcal{F}_d(f_{2,i})(y_2)\Big).$$

Las funciones de variación acotada, BV, son temperadas y por lo tanto la transformada de Fourier distribucional existe. Denotamos por $\mathcal{F}_d$ a la transformada distribucional.

Proposición 8. *Para cada $u \in \overline{BV \otimes BV}$, con $u = \sum_{i=1}^n f_{1,i} \otimes f_{2.i}$, la transformada de Fourier existe y*

$$\mathcal{F}_\otimes(u)(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \Big(\mathcal{F}_d(f_{1,i})(y_1)\Big) \otimes \Big(\mathcal{F}_d(f_{2,i})(y_2)\Big).$$

Las dos proposiciones anteriores prueban el siguiente corolario

Corolario 7. *Para cada $u \in \big(\overline{HK \otimes HK}\big) \cup \big(\overline{BV \otimes BV}\big)$, con $u = \sum_{i=1}^n f_{1,i} \otimes f_{2.i}$, la transformada de Fourier tensorial existe y*

$$\mathcal{F}_\otimes(u)(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \Big(\mathcal{F}_d(f_{1,i})(y_1)\Big) \otimes \Big(\mathcal{F}_d(f_{2,i})(y_2)\Big).$$

Apéndice A

Distribuciones

A.1. Producto tensorial de distribuciones

Aquí definimos el producto tensorial de distribuciones. Abordamos sus propiedades básicas. Más adelate definimos la convolución de distribuciones en terminos del producto tensorial. Todos los resultados de este apéndice el lector los puede consultar en [8].

A.1.1. Producto tensorial de funciones

De aquí en adelante U y V representan conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ respectivamente.

Definición 15. *Sean $f : U \to \mathbb{R}$ y $g : V \to \mathbb{R}$. El producto tensorial de f y g, denotado por $f \otimes g$, es la función $f \otimes g : U \times V \to R$ definida por*

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y).$$

Si $f \in \mathcal{D}(U)$ y $g \in \mathcal{V}$, entonces $f \otimes g$ es de clase C^∞ ya que, para cada p-tupla α y cada q-tupla β de enteros positivos, se tiene

$$D^{(\alpha,\beta)}(f \otimes g) = D^\alpha f \otimes D^\beta g,$$

con, para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$,

$$D^{(\alpha,\beta)} = \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_p^{\alpha_p} \partial y_1^{\beta_1} \ldots \partial x_q^{\beta_q}}.$$

Además este producto tensorial tiene soporte compacto, debido a

$$suppf \otimes g = suppf \times suppg.$$

Así $f \otimes g \in \mathcal{D}(U \times V)$. Consideremos el espacio vectorial de $\mathcal{D}(U \times V)$ generado por las funciones $f \otimes g$ con $f \in \mathcal{D}(U)$ y $g \in \mathcal{D}(V)$. Denotamos este espacio por $\mathcal{D}(U) \otimes \mathcal{D}(V)$.

A.1.2. Producto tensorial de distribuciones

Sean $f \in L^1_{loc}(U)$ y $g \in L^1_{loc}(V)$. Observe que $f \otimes g \in L^1_{loc}(U \times V)$. De acuerdo a la definición de producto tensorial para funciones podemos definir el producto tensorial de las distribuciones T_f y T_g como $T_f \otimes T_g := T_{f\otimes g}$. Así para $\theta \in \mathcal{D}(U \times V)$ se tiene lo siguiente:

$$\langle T_f \otimes T_g, \theta\rangle = \int_{U\times V} f(x)g(y)\theta(x,y)dxdy,$$

por el teorema de Fubini se obtiene,

$$\begin{aligned}\langle T_f \otimes T_g, \theta\rangle &= \int_U f(x)\bigg(\int_V g(y)\theta(x,y)dy\bigg)dx \\ &= \int_V g(y)\bigg(\int_U f(x)\theta(x,y)dx\bigg)dy.\end{aligned}$$

Observe que la función

$$x \mapsto \int_V g(y)\theta(x,y)dy$$

está en $\mathcal{D}(U)$ y que

$$\int_V g(y)\theta(x,y)dy = \langle T_g, \theta(x,.)\rangle, \text{ para cada } x \in U.$$

Así

$$\langle T_f \otimes T_g, \theta\rangle = \langle T_f, \langle T_g, \theta(.,.)\rangle\rangle.$$

Y también

$$\langle T_f \otimes T_g, \theta\rangle = \langle T_g, \langle T_f, \theta(.,.)\rangle\rangle.$$

También se escribe $\langle (T_f)_x, \langle (T_g)_y, \theta(x,y)\rangle\rangle$ en lugar de $\langle T_f, \langle T_g, \theta(.,.)\rangle\rangle$.

Teorema 19. *Sea $T \in \mathcal{D}'(U)$, $\theta \in \mathcal{C}^\infty(U \times V)$ y K un subconjunto compacto de U tal que $\theta(x,y) = 0$ para cada $x \in U - K$ y cada $y \in V$. Entonces la función*

$$F : y \mapsto \langle T_x, \theta(x,y)\rangle$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$ sobre V. Además, para cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^q$, se tiene que

$$D^\alpha_y F = \langle T_x, D^\alpha_y \theta(x,y)\rangle,$$

donde D^α_y representa la derivada con respecto a y.

Corolario 8. *Sean $T \in \mathcal{D}'(U)$ y $\theta \in \mathcal{C}^\infty(U \times V)$.*

(i) Si $\theta \in \mathcal{D}_{K\times L}(U \times V)$, entonces $F \in \mathcal{D}_L(V)$.

(ii) Si T tiene soporte compacto, entonces $F \in \mathcal{C}^\infty(V)$ y para cada multi-indice α,

$$D^\alpha F(y) = \langle T, D^\alpha \theta(x,y)\rangle.$$

Proposición 9. *Cualquier distribución T sobre $\mathcal{D}(U \times V)$ que se anula en $\mathcal{D}(U) \otimes \mathcal{D}(V)$ es identicamente cero.*

El siguiente teorema garantiza la existencia.

Teorema 20. *Sea $S \in \mathcal{D}'(U)$ y $T \in \mathcal{D}'(V)$. Existe una distribución sobre $\mathcal{D}(U \times V)$, denotada por $S \otimes T$, tal que*

$$\langle S \otimes T, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle S, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle; \ \varphi \in \mathcal{D}(U), \psi \in \mathcal{D}(V).$$

Debido a la unicidad de $S \otimes T$ se obtienen las siguientes formulas, que son el análogo al Teorema de Fubini para distribuciones.

Proposición 10. *Sean $S \in \mathcal{D}'(U)$ y $T \in \mathcal{D}'(V)$. Entonces para cada $\theta \in \mathcal{D}(U \times V)$,*

A.1.3. Propiedades del producto tensorial

El producto tensorial satizaface las siguientes propiedades

Proposición 11. *Sean $S \in \mathcal{D}'(U)$ y $T \in \mathcal{D}'(V)$.*

(i) Para cada $\theta \in \mathcal{D}(U \times V)$, se tiene

$$\langle S \otimes T, \theta \rangle = \langle T \otimes S, \overleftrightarrow{\theta} \rangle, \quad con \quad \overleftrightarrow{\theta}(y, x) = \theta(y, x).$$

Por lo tanto el producto tensorial no es conmutativo.

(ii) Para cada $f \in \mathcal{E}(U)$ y cada $g \in \mathcal{E}(V)$, se tiene

$$(f \otimes g)(S \otimes T) = (fS) \otimes (gT).$$

(iii) El producto tensorial es asociativo.

A.2. Convolución de distribuciones

Para $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la convolución $f * g$ de f y g, definida por

$$(f * g)(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(z - x) dx$$

esta en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Es natural definir $T_f * T_g$ por T_{f*g}. Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ se tiene,

$$\begin{aligned} \langle T_f * T_g, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(z) \varphi(z) dz, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(z - x) dx \Big) \varphi(z) dz. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Fubini se obtiene,

$$\begin{aligned} \langle T_f * T_g, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(z - x) \varphi(z) dx dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) \varphi(x + y) dx dy. \end{aligned}$$

Escribimos $h(x, y) = f(x)g(y) = (f \otimes g)(x, y)$ y $\varphi^{\Delta}(x, y) = \varphi(x + y)$, con lo cual se obtiene

$$\langle T_f * T_g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} h(x, y) \varphi^{\Delta}(x, y) dx dy.$$

Si $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n})$. Pero φ^Δ no necesariamente tiene soporte compacto. En efecto, si $supp\ \varphi = K$, se define

$$K^\Delta = (supp\ \varphi)^\Delta := \{(x, y) : x + y \in K\}.$$

Si tomamos $K = [0, 1]$, entonces K^Δ es la banda en $\mathbb{R}^2$ determinada por las rectas cuyas ecuaciones son $x + y = 0$ y $x + y = 1$. Sin embargo, $\langle T_h, \varphi^\Delta \rangle$ tiene sentido si $(supp\ h) \cap (supp\ \varphi^\Delta)$ es compacto. Pero $supp\ h \subset supp\ f \times supp\ g$ y $supp\ (\varphi^\Delta) \subset \big(supp\ \varphi\big)^\Delta$. Por lo tanto, $\langle T_h, \varphi^\Delta \rangle$ existe si $(supp\ f \times supp\ g) \cap \big(supp\ \varphi\big)^\Delta$ es compacto.

Definición 16. *Sean $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. El producto de convolución de S y T, denotado por $S * T$, es una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (en caso de que exista) definida por*

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S \otimes T, \varphi^\Delta \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Definición 17. *Sea (A_i), $1 \leq i \leq k$, una familia de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$. Decimos que se admite para la convolución si, para cada subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\left(\prod_{i=1}^k A_i\right) \cap K^\Delta$ es compacto en $\mathbb{R}^n$.*

Proposición 12. *La familia (A_i), $1 \leq i \leq k$, se admite para la convolución si y sólo si para cada compacto K y cada $1 \leq i \leq k$, el conjunto $A \cap \left(K - \sum_{j \neq i} A_j\right)$ es ralativamente compacto.*

A.2.1. Propiedades de la convolución

La convolución tiene las siguientes propiedades algebraicas.

Proposición 13.

1. *Si T_1 y T_2 son distribuciones cuyos soportes forman una familia admitida para la convolución, entonces $T_1 * T_2 = T_2 * T_1$.*
2. *Para cualquier distribución T sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, se tiene $T * \delta = \delta * T = T$ donde δ es la medida de Dirac en el origen.*
3. *Si T_1, T_2 y T_3 son distribuciones cuyos soportes forman una familia admitida para la convolución, entonces $(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_1 * T_3)$.*

En relación a la derivada de la convolución se tiene lo siguiente.

Proposición 14.

1. *Para cualquier distribución T sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, tenemos*

$$D^\alpha \delta * T = T * D^\alpha \delta = D^\alpha T,\ \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

2. *Si T_1 y T_2 son distribuciones cuyos soportes forman una familia admitida para la convolución, entonces*

$$D^\alpha (T_1 * T_2) = D^\alpha T_1 * T_2 = T_1 * D^\alpha T_2,\ \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Definición 18. *A la distribución $T * T_f$ se le llamada la convolución de T y f. Esta es denotada también por $T * f$. Se dice que esta distribución es la regularización de T por f.*

Como una consecuencia de la proposición anterior tenemos los siguientes resultados sobre densidad.

Proposición 15. *Cualquier distribución T es el límite en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de una sucesión de funciones de clase C^∞; decimos que $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Proposición 16. *El espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Proposición 17. *Sean T_1 y T_2 dos distribuciones cuyos soportes forman una familia admitida para la convolución. Entonces supp T_1 + supp T_2 es cerrado y*

$$supp\ (T_1 * T_2) \subset suppT_1 + supp\ T_2.$$

A continuación mencionamos el siguiente caso particular.

Proposición 18. *Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que la familia $(supp\ T, supp\ T_f)$ es admitida para la convolución. Entonces*

$$T * T_f = T_g,$$

donde la función g es de clase C^∞ dada por $g(t) = \langle T_x, f(t-x)\rangle$.

A.2.2. Orden de una distribución integrable

Introducimos una familia de seminormas sobre $\mathcal{D}$ de la siguiente manera:

$$||\varphi||_N = \sum_{n \leq N} ||\varphi^{(n)}||_\infty;$$

de hecho estas seminormas forman una sucesión creciente. Con estas seminormas se puede definir una topología localmente convexa sobre $\mathcal{D}$; la topología resultante hace de $\mathcal{D}$ un espacio métrico que no es completo.

Pero en este caso, las normas $||\varphi||_N$ son útiles para establecer el siguiente resultado.

Teorema 21. *Una funcional lineal T sobre $\mathcal{D}$ es una distribución si y sólo si para cada $K \subset \mathbb{R}$ compacto, existe una constante $C > 0$ y una $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C||\varphi||_N \tag{A.1}$$

para todas las funciones φ con soporte en K.

Definición 19. *Si el número N del teorema anterior, se puede elegir independientemente del compacto K, y N es el mínimo de tales enteros no negativos, se dice que la distribución es de orden N. Cuando ningún valor de N puede cumplir, para todo K, la Ecuación A.1 se dice que T tiene orden infinito.*

Ejemplo 4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto.*

(a) Sea λ una medida de Radon con signo sobre $\mathbb{R}$. La funcional

$$\langle T_\lambda, \phi\rangle := \int_{\mathbb{R}} \phi d\lambda, \quad \phi \in \mathcal{D},$$

es una distribución de orden cero.

(b) La distribución δ_{x_0} tiene orden cero.

(c) Sea $f \in L^1_{loc}$. La funcional

$$\langle T_f, \phi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx, \quad \phi \in \mathcal{D},$$

es una distribución de orden cero. En efecto,

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \phi \rangle| = \left| (L) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx \right| &\leq (L) \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x) f(x)| dx \\ &= (L) \int_{supp\ \phi} |\phi(x) f(x)| dx \\ &\leq \| \phi \|_\infty (L) \int_{supp\ \phi} |f(x)| dx \\ &= C \| \phi \|_0, \end{aligned}$$

con $C = (L) \int_{supp\ \phi} |f(x)| dx$.

(d) Para cualquier $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, escribimos

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{n \to \infty} \sum_{p=0}^{n} \varphi^{(p)}(p).$$

Este límite siempre existe para $\sum_{p=0}^{\infty} \varphi^{(p)}(p)$ el cual de hecho es una suma finita para cualquier $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Se verifica que T es una distribución. Esta distribución no es de orden finito.

Teorema 22. *T es una distribución de orden cero si y sólo si T es una medida de Radon con signo.*

Distribuciones con soporte compacto

Definición 20. *Sea T una distribución sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

1. *Decimos que T se desvanece en un subconjunto abierto U de Ω, si $\langle T, \varphi \rangle = 0$ para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que supp $\varphi \subset U$.*
2. *El conjunto abierto cero de T es el subconjunto abierto más grande de Ω (en caso de que exista) en el cual T se desvanece.*
3. *El soporte de T es el complemento en Ω del conjunto abierto cero.*

Ejemplo 5.

1. *Hemos visto que si $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, entonces*

$$supp\ T_f = \ supp f.$$

2. *Para toda función $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$, se tiene*

$$supp\ T_f \subset \ supp f.$$

Pero no siempre se tiene la igualdad. De hecho para la función característica $\chi_{\mathbb{Q}}$ de los racionales, se tiene que supp $(\chi_{\mathbb{Q}}) = \mathbb{R}$ y supp $(T_{\chi_{\mathbb{Q}}}) = 0$.

3. *Para cualquier $a \in \Omega$, se tiene que*

$$supp\ \delta_a = \{a\}.$$

Proposición 19. *Toda distribución con soporte compacto es de orden finito.*

Observación 10. *El recíproco es falso. Considere, por ejemplo, la distribución $V_p \frac{1}{x}$.*

En seguida presentamos una caracterización de las distribuciones con soporte compacto.

Proposición 20. *Sea T una distribución sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. T tiene soporte compacto si y sólo si existe un entero positivo m tal que T se extiende a una forma lineal continua sobre $\mathcal{E}^m(\Omega)$.*

Apéndice B

La integral de Henstock

En este apéndice consideramos funciones cuyo dominio son intervalos no acotados, así que empezaremos por definir a los reales extendidos; su orden, su aritmética y su topología.

Es conocido que a $\mathbb{R}$ se le adjuntan los puntos ∞ $(=+\infty)$ y $-\infty$ para formar el sistema de los números reales extendidos $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, y se extiende el orden usual sobre $\mathbb{R}$ definiendo que $-\infty < x < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Con este orden se obtiene que: cada subconjunto A de $[-\infty, \infty]$ tiene una mínima cota superior, o supremo, y una máxima cota inferior, o ínfimo, los cuales son denotados por $\sup A$ e $\inf A$, respectivamente. También se usa la notación $\vee A$ para el supremo y $\wedge A$ para el ínfimo.

La aritmética de $\mathbb{R}$ puede ser extendida parcialmente a $[-\infty, \infty]$ de la siguiente manera:

$$x \pm \infty = \pm\infty (x \in \mathbb{R}), \quad \infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty,$$
$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty (x > 0), \quad x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty (x < 0).$$

En la bibliografía consultada no se intenta definir $\infty - \infty$.

Es común aceptar la convención, a menos que se indique lo contrario, de que

$$0 \cdot (\pm\infty) = 0.$$

A partir de la topología usual en $\mathbb{R}$, $\tau_{\mathbb{R}}$, se puede definir una topología para los reales extendidos. A tal topología la denotaremos por $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$, y será la colección de todas la uniones de elementos de $\tau_{\mathbb{R}}$ con intervalos de la forma $[a, x)$, $(x, b]$ y $[a, b]$, con $a, b \in \{\infty, \infty\}$ y $x \in \mathbb{R}$. Entonces $\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau_{\overline{\mathbb{R}}}$. Además, esta topología hace a los reales extendidos un espacio compacto homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

Observese que con esta topología también podemos definir el concepto de límite de una sucesión $\{x_n\}$ en $\overline{\mathbb{R}}$. Decimos que, $\{x_n\}$ converge a $x \in \overline{\mathbb{R}}$, si y sólo si para todo abierto $U_x \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}$, que contenga a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_x$ si $n \geq N$.

Al hablar de *medida* sobre los reales extendidos siempre nos referiremos a la medida de Lebesgue, m. Así, recordemos que la medida de Lebesgue evaluada

en los subintervalos de $[-\infty, \infty]$ coincide con la función longitud l. En algunas ocasiones emplearemos l en lugar de m. También recordemos que si una afirmación acerca de los elementos x de un subconjunto $A \subset [-\infty, \infty]$ es verdadera excepto para los x en un subconjunto nulo de A, diremos que la afirmación es verdadera *casi dondequiera* en A. Si no se especifica cual es el subconjunto A, entonces se asumirá que $A = [-\infty, \infty]$.

A partir de aquí trabajaremos con funciones $f : [-\infty, \infty] \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(\pm\infty) = 0.$$

Se define la parte positiva y negativa de f como

$$f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\} \quad f^-(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\},$$

así, $f = f^+ - f^+$ y $|f| = f^+ + f^-$.

Definición 21. *Sea $\delta : \mathbb{R} \to (0, \infty)$. Un intervalo etiquetado (x, J) consiste de un intervalo cerrado $J \subseteq [-\infty, \infty]$ y un punto $x \in J$. El intervalo (x, J) es subordinado a δ si*

$$J \subset (x - \delta(x), x + \delta(x)) \quad ó \quad x \in \{-\infty, +\infty\}.$$

La letra $\mathcal{P}$ denotará una colección finita de intervalos etiquetados no traslapados, es decir, una colección de intervalos donde la intersección de cualesquiera dos de ellos es a lo más un punto. Sea $\mathcal{P} = \{(x, [c_i, d_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ una tal colección, donde cada $[c_i, d_i]$ está contenido en el intervalo $J \subseteq [-\infty, \infty]$. Adoptaremos la siguiente terminología:

(a) Los puntos $\{x_i\}$ serán las etiquetas de $\mathcal{P}$ y los intervalos $\{[c_i, d_i]\}$ serán los intervalos de $\mathcal{P}$.

(b) Si $(x_i, [c_i, d_i])$ está subordinado a δ para cada i, entonces $\mathcal{P}$ está subordinada a δ.

(c) Sea $E \subset [-\infty, \infty]$. Si $\mathcal{P}$ está subordinada a δ y cada $x_i \in E$, entonces $\mathcal{P}$ es E-subordinada a δ.

(d) Si $\mathcal{P}$ está subordinada a δ y $J = \bigcup_{i=1}^{n} [c_i, d_i]$, entonces $\mathcal{P}$ es una partición etiquetada de J subordinada a δ. De aquí en adelante, si $J = [-\infty, \infty]$ se dirá simplemente que son particiones etiquetadas.

Observación 11. *1. Existen colecciones de intervalos no traslapados que no son particiones.*

2. Si δ_1 y δ_2 son como en la definición anterior, entonces toda partición etiquetada subordinada al ínfimo de estas dos funciones, $\delta_1 \wedge \delta_2$, también está subordinada a δ_1 y a δ_2.

El siguiente teorema es indispensable para garantizar la buena definición de integral, puesto que garantiza la existencia de particiones etiquetadas subordinadas a una función estrictamente positiva definida sobre $\mathbb{R}$. La demostración de este y todos los resultados que aparecen en este capítulo se pueden consultar en [3], [34] y [12].

Proposición 21. Teorema de Cousin. *Si δ es una función estrictamente positiva definida sobre $\mathbb{R}$, entonces existe una partición etiquetada de $[-\infty, \infty]$ que está subordinada a δ.*

Sea $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{P} = \{(x_i, [c_i, d_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ una colección de intervalos etiquetados no traslapados. Usaremos la siguiente notación para una suma de Riemann en la colección $\mathcal{P}$:

$$f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(d_i - c_i).$$

Ahora tenemos los elementos necesarios para la siguiente:

Definición 22. *Una función $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ es HK-integrable si existe un número real L con la siguiente propiedad: para cada $\epsilon > 0$, existe una función estrictamente positiva δ definida en $\mathbb{R}$ tal que $|f(\mathcal{P}) - L| < \epsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición etiquetada subordinada a δ. El número L se llamará la integral de f y lo denotamos por $\int f$. Una función f es HK-integrable en un conjunto medible $E \subseteq [-\infty, \infty]$ si $f\chi_E$ es HK-integrable.*

La integral de Henstock-Kurweil está bien definida ya que la integral de una función, si existe, es única. Por otro lado, si f es integrable en $E = [a, b]$, un intervalo cerrado en $[-\infty, \infty]$, también se usará la notación $\int_a^b f$ en lugar de $\int f\chi_E$.

Si en la definición anterior se cambia la función δ por una constante se obtiene la definición de la integral de Riemann. La motivación para considerar a δ como una función en lugar de una constante se puede hacer a través del *Teorema Fundamental del Cálculo* tal como se hace al inicio del primer capítulo de la referencia [34]. Además, el lector puede consultar en el mismo texto la prueba de la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo para la HK-integral, como un ejemplo de las demostraciones que dejan ver claramente la ventaja de tomar a δ como una función en lugar de una constante.

El prefijo "HK" es para hacer referencia a los autores de esta definición: Ralph Henstock (1923 − 2007) y Jaroslav Kurzweil (nacido en 1926). Aunque en ocasiones no usaremos este prefijo a menos de que sea necesario, por lo que las palabras *integral, integrable, etc.* harán referencia, en este capítulo, a *HK-integral, HK-integrable, etc.*

Ahora presentamos una serie de resultados básicos. El primero de ellos nos dice que las funciones HK-integrables forman un espacio vectorial con las operaciones usuales de producto por escalar y suma de funciones.

Teorema 23. *Sean $f, g : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Entonces*

(a) *kf es integrable y $\int kf = k \int f$ para cada $k \in \mathbb{R}$.*

(b) *$f + g$ es integrable y $\int (f + g) = \int f + \int g$.*

Teorema 24. *Sea $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces: f es integrable si y sólo si f es integrable en cada intervalo cerrado $J \subset [-\infty, \infty]$. Además, si $z \in J = [s, t]$ entonces $\int_J f = \int_s^z f + \int_z^t f$.*

Como mencionamos antes, el involucrar los conceptos de teoría de la medida nos permite mejorar algunos teoremas debilitando las hipótesis, como veremos a continuación.

Teorema 25. *Sean $f, g : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables. Entonces*

(a) *Si $f \leq g$ casi dondequiera, entonces $\int f \leq \int g$.*

(b) *Si $f = g$ casi dondequiera, entonces $\int f = \int g$.*

Teorema 26. *Sea $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable y $g : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = g$ casi dondequiera en $[-\infty, \infty]$. Entonces g es integrable, y $\int f = \int g$.*

Existen funciones f que son HK-integrables, pero cuyo valor absoluto $|f|$ no lo es. A estas funciones se les conoce como condicionalmente integrables. Y a las funciones f que son integrables y cuyo valor absoluto $|f|$ también lo es, se les llama absolutamente integrables. El conjunto

$$\{f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R} |\ f \text{ es HK-integrable y } \ f \text{ es absolutamente integrable } \}$$

es un conjunto importante, ya que forma un subespacio vectorial que contiene a todas las funciones positivas que son Henstock integrables, de hecho coincide con el conjunto de las Lebesgue integrables. En relación a lo anterior enunciamos el siguiente resultado:

Teorema 27. *Si f es absolutamete integrable, entonces $|\int f| \leq \int |f|$.*

Como acabamos de comentar, no todas las funciones HK-integrables son absolutamente integrables así que no se puede definir una norma como la que se define en el conjunto de las funciones Lebesgue integrables.

Una seminorma sobre este espacio se define en [1] por

$$\| f \| := \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} \Big\{ \Big| \int_{-\infty}^{x} f \Big| \Big\}. \tag{B.1}$$

Esta es llamada la seminorma de Alexiewicz (es una seminorma como resultado del Teorema 25), se puede mostrar que es equivalente a

$$\| f \|' := \sup_{[s,t] \subseteq \overline{\mathbb{R}}} \Big| \int_{s}^{t} f \Big|.$$

De hecho,

$$\| f \| \leq \| f \|' \leq 2 \| f \| .$$

$HK(I)$ no es un espacio de Banach [34].

Si establecemos la siguiente relación de equivalencia: para f y g, funciones HK-integrables, se dice que $f \sim g$ si y sólo si $f = g$ casi donde quiera. Entonces podemos definir a HK como el conjunto de las clases de equivalencia de las funciones HK-integrables. Luego, la ecuación (B.1) define una norma sobre HK, y con ello podemos hablar ahora del espacio $(HK, \|\|_A)$, es decir, el conjunto de clases de equivalencia HK con una estructura de espacio normado. $HK(I)$ no es un espacio de Banach [34]. La completación del espacio Henstock-Kurzweil con la norma de Alexiewicz se denota por $\overline{HK(I)}$. El siguiente teorema da una caracterización de este espacio [4].

Teorema 28. *$\overline{HK(\mathbb{R})}$ es un espacio de Banach separable isométricamente isomorfo a $\mathcal{B}_C$.*

A continuación presentamos algunos teoremas importantes.

Proposición 22. Criterio de Cauchy. *Una función $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable si, y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe una función δ estrictamente positiva en $\mathbb{R}$ tal que $|f(\mathcal{P}_1) - f(\mathcal{P}_2)| < \epsilon$ siempre que $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ sean particiones etiquetadas subordinadas a δ.*

Teorema 29. *Sea $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que para cada $\epsilon > 0$ existen funciones integrables $g_1, g_2 : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $g_1 \leq f \leq g_2$ en $[-\infty, \infty]$, y $\int (g_2 - g_1) \leq \epsilon$. Entonces f es integrable.*

Teorema 30. *Si $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ entonces f es integrable en $[a, b]$.*

Proposición 23. Lema de Saks-Henstock. *Sea $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y $\epsilon > 0$. Supongase que δ es una función estrictamente positiva en $\mathbb{R}$ tal que $|f(\mathcal{P}) - \int f| < \epsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ sea una partición etiquetada subordinada a δ. Si $\mathcal{P}_0 = \{(x_i, [c_i, d_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ es cualquier colección de intervalos etiquetados no traslapados, subordinados a δ, entonces*

$$|f(\mathcal{P}_0) - \sum_{i=1}^{n} \int_{c_i}^{d_i} f| \leq \epsilon \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \mid f(x_i)(d_i - c_i) - \int_{c_i}^{d_i} f \mid \leq 2\epsilon.$$

En seguida, incluimos algunos resultados acerca de integrales impropias y una caracterización de funciones absolutamente integrables.

Proposición 24. Teorema de Hake. *Sea $f : [a, \infty] = I \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre $[a, b]$ para cada $a < b < \infty$. Entonces f es integrable sobre I si, y sólo si $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f$ existe.*

Corolario 9. *Sea $f : [a, \infty] = I \longrightarrow \mathbb{R}$ absolutamente integrable sobre $[a, b]$ para cada $a < b < \infty$.*

(a) *Si f es no negativa, f es integrable sobre I si y sólo si $\sup\{\int_a^b f : a < b < \infty\} < \infty$.*

(b) *Si $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre I y $|f(x)| \leq g(x)$ para cada $x \in I$, entonces f es absolutamente integrable sobre I.*

Teorema 31. *Sea $I = [-\infty, b]$, $b < \infty$, y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre I. Sea $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f$ para $-\infty < x \leq b$. Entonces $|f|$ es integrable sobre I si, y sólo si F es de variación acotada en I. En este caso, $\int_I |f| = Var(F; I)$.*

Ahora presentamos las dos versiones del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC); el cual es parte, sin duda, de la motivación para desarrollar el estudio de la HK-integral.

Proposición 25. Teorema Fundamental del Cálculo (Parte 1). *Sea $A \subset [a, \infty)$ un conjunto a lo más numerable y sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe. Si f es diferenciable excepto posiblemente en A, entonces f' es integrable en $[a, \infty)$ y $\int_a^\infty f' = f(\infty) - f(a)$, donde se define $f(\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x)$.*

Sería deseable que, en esta primera parte del TFC, A fuera cualquier conjunto de medida cero, pero en tal caso el teorema no es cierto. La función de Cantor es un contraejemplo (ver [3]).

Proposición 26. Teorema Fundamental del Cálculo (Parte 2). *Si $f : [-\infty, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable y se define a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f$, $-\infty < x < \infty$, la integral indefinida de f. Entonces*

(a) *F es continua en $[-\infty, \infty]$;*

(b) *F es diferenciable casi dondequiera en $[-\infty, \infty)$, y además $F' = f$ casi dondequiera en $[-\infty, \infty)$.*

Un resultado interesante es que *toda función integrable es medible*, ello es consecuencia de que *la integral indefinida, F, de la función f es continua cuando $f \in HK$*. Como F es continua, también lo es $k^{-1}\big(F(t + 1/k) - F(t)\big)$ para cada entero positivo k. Y ya que cada función continua es Lebesgue medible y f es el límite, casi donde quiera, de estas funciones cuando k tiende a infinito (esto último por el Teorema 26 (b)), entonces f es límite, casi donde quiera, de funciones medibles y por consiguiente también es medible.

Otra propiedad que tiene la integral indefinida está en términos de la siguiente definición.

Definición 23. *Sean $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $E \subset [a, b]$, y consideremos F como una función de intervalos. La función F es AC_δ en E si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número positivo η y una función positiva δ sobre E tal que $|F(\mathcal{P})| < \varepsilon$ siempre que $\mathcal{P}$ sea E-subordinada a δ y $\mu(\mathcal{P}) < \eta$. La función F es ACG_δ en E, si E puede escribirse como unión numerable de conjuntos E_n de tal forma que F es AC_δ sobre cada E_n.*

Ahora emplearemos el concepto de función ACG_δ para caracterizar a las funciones HK-integrables.

Teorema 32. *Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Henstock integrable sobre $[a, b]$ si y solo si existe una ACG_δ función F definida en $[a, b]$ tal que $F' = f$ casi dondequiera en $[a, b]$.*

Observación 12. *En [12, pág. 147s.] se puede consultar lo siguiente.*

1. *En la demostración de este teorema, para probar necesidad se emplea la función $F(x) = \int_a^x f$, en otras palabras, toda integral indefinida F es ACG_δ.*

2. *Se puede probar que una función ACG_δ en $[a, b]$ es diferenciable casi dondequiera en $[a, b]$. Por lo tanto, una función F es una integral indefinida si y solo si F es ACG_δ en $[a, b]$.*

Otro resultado importante es el siguiente

Proposición 27. Teorema de Integración por Partes. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Henstock integrable sobre $[a, b]$ y sea $F(x) = \int_a^x f$ para cada $x \in [a, b]$. Si $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua en $[a, b]$, entonces fG es Henstock integrable en $[a, b]$ y*

$$\int_a^b fG = F(b)G(b) - (L)\int_a^b FG'. \tag{B.2}$$

En este teorema se puede debilitar la hipótesis sobre G, de que sea absolutamente continua por la hipótesis de que sea de variación acotada. Como resultado de ello la integral de Lebesgue que aparece en el lado derecho de la igualdad (B.2) se cambia por la integral de Reimann-Stieljes, $\int_a^b FdG$.

Bibliografía

[1] A. Alexiewicz. Linear functionals on Denjoy-integrable functions. *Colloquium Mathematicum*, 1:289–293, 1948.

[2] D.D. Ang, K. Schmitt, and L.K. Vy. A multidimensional analogue of the Denjoy-Perron-Henstock-Kurzweil integral. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 4(3):355–371, 1997.

[3] R. G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* Wiley Classics Library Edition Published, 1995.

[4] B. Bongiorno and T. V. Panchapagesan. On the Alexiewicz topology of the Denjoy space. *Real Analysis Exchange*, 21:604–614, 1995.

[5] P. J. Cohen. Factorization in group algebras. *Duke Mathematical Journal*, 26:199–205, 1959.

[6] J. Diestel and J.J. Uhl Jr. *Vector Measures, 322 pp.* AMS, Providence, Rhode Island, 1977.

[7] N. Dunford and R. Schatten. On the associate and conjugate space for the direct product of Banach spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 59:430–436, 1946.

[8] A. El Kinani and M. Oudadess. *Distribution theory and applications*, volume 9. World Scientific Publishing Company, 2010.

[9] C.A. Faure and J. Mawhin. The Hake's property for some integrals over multidimensional intervals. *Real Analysis Exchange*, 20:622–630, 1994.

[10] O. Flores-Medina, J. H. Arredondo, J. A. Escamilla-Reyna, and F. J. Mendoza-Torres. On the factorization theorem for the tensor product of integrable distributions. *Aceptado en Annals of Functional Analysis.*

[11] B. R. Gelbaum. Tensor products of Banach algebras. *Canad. J. Math*, 11:297–310, 1959.

[12] R. A. Gordon. *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, volume 4. Graduate Studies in Mathematics, AMS, Provdence, Rhode Island, 1994.

[13] S. Heikkilä and E. Talvila. Distributions, their primitives and integrals with applications to differential equations. *Dynamic Systems and Applications*, 22:207–249, 2013.

[14] Ralph Henstock. *Theory of integration*, volume 1. Butterworth & Co Publishers Ltd, London, 1963.

[15] Ralph Henstock. *The general theory of integration.* Oxford, 1991.

[16] E. Hewitt and K. A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis. Structure and Analysis on Locally Compact Groups; Analysis on Locally Compact Abelian Groups, 771 pp*, volume II. Springer, New York-Berlin, 1970.

[17] J. Kurzweil. Nichtabsolut konvergente integrale, Teubner, Leipzig, 1980. *Teubner-Texte zur Mathematik*, 26.

[18] J. Kurzweil. On Fubini theorem for general Perron integral. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 23(2):286–297, 1973.

[19] Yeong L. T. *Henstock-Kurzweil Integration on Euclidean Spaces, 314 pp.* World Scientific, Singapore, 2011.

[20] S. Leader. *The Kurzweil-Henstock Integral and Its Differential: A Unified Theory of Integration on* $\mathbb{R}$ *and* $\mathbb{R}^n$*, 351 pp.* Marcel Dekker, New York, New York, 2001.

[21] J. Mawhin. Generalized multiple Perron integrals and the Green-Goursat theorem for differentiable vector fields. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 31(4):614–632, 1981.

[22] F. J. Medoza-Torres and M. G. Morales-Macías. On the convolution theorem for the Fourier transform of BV_0 functions. *J. Class. Anal*, 7(1):63–71, 2015.

[23] F. J. Mendoza-Torres, M. G. Morales-Macías, J. A. Escamilla-Reyna, and J. H. Arredondo-Ruiz. Several aspects around the Riemann–Lebesgue lemma. *Journal of Advance Research in Pure Mathematics*, 5:33–46, 2013.

[24] P. Mikusiński and K. Ostaszewski. Embedding Henstock integrable functions into the space of Schwartz distributions. *Real Analysis Exchange*, 14(1):24–29, 1988.

[25] M. G. Morales-Macías and J. H. Arredondo-Ruiz. Factorization in the space of Henstock-Kurzweil integrable functions. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 7:116–131, 2017.

[26] M. G. Morales-Macías, J. H. Arredondo-Ruiz, and F. J. Mendoza-Torres. An extension of some properties for the Fourier transform operator on L^p spaces. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 57:85–94, 2016.

[27] P Muldowney and V. A. Skvortsov. Improper Riemann integral and Henstock integral in $\mathbb{R}^n$. *Mathematical Notes*, 78:228–233, 2005.

[28] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional Analysis, 400 pp*, volume I. Academic Press, New York, 1980.

[29] W. Rudin. Factorization in the group algebra of the real line. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 43:339–340, 1957.

[30] W. Rudin. Representation of functions by convolutions. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 7:103–115, 1958.

[31] W. Rudin. *Real and Complex Analysis, 416 pp.* McGraw-Hill, New York, 1987.

[32] R. A. Ryan. *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces, 223 pp.* Springer-Verlag London Limited, Great Britain, 2002.

[33] R. Schatten. *A Theory of Cross-Spaces, 162 pp.* Princeton University Press, Princeton, 1985.

[34] C. Swartz. *Introduction to Gauge Integrals, 157 pp.* World Scientific, Singapore, first edition edition, 2001.

[35] E. Talvila. The distributional Denjoy integral. *Real Analysis Exchange*, 33:51–82, 2008.

[36] E. Talvila. Convolutions with the continuous primitive integral. *Abstract and Applied Analysis*, 2009:18 pp., 2009.

[37] E. Talvila. Fourier series with the continuous primitive integral. *J. Fourier Anal. Appl.*, 18(1):27–44, 2012.

[38] J. Tomiyama. Tensor products of commutative Banach algebras. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 12:147–154, 1960.