Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Caracterizando Anillos de Burnside en su Anillo Fantasma

Tesis

para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

por

Edgar Jonathan Soto Rodríguez

Director de Tesis:

Dr. David Villa Hernández

Puebla Pue.
Abril de 2025

Agradecimientos

Primero agradezco a mi familia, a mi madre Ángeles, a mi padre Erasmo y a mi abuela Acela por el apoyo incondicional que me han dado durante mi carrera universitaria; sus consejos y amor son algo de lo que siempre lo recordaré.

En segundo quiero agradecer al Dr. David Villa Hernández, por los conocimientos que me brindó, así como su paciencia y explicaciones para guiarme en la elaboración de esta tesis.

Así como también, al Dr. Carlos Alberto López Andrade, al Mtro. Cristhian Vázquez Rosas y al Dr. Carlos Guillén Galván por sus observaciones para mejorar el desarrollo de este trabajo.

Por último, agradezco a todos las amistades que he formado durante mi vida universitaria, tanto profesores, compañeros y personas que no estén relacionadas con la universidad, pero sí en el día a día mientras cursaba la carrera, que puede parecer personas ajenas a la realización de este documento, pero yo no hubiera llegado a este momento sin divertirme gracias a ellos.

Espero que esta tesis sea del agrado a todo aquel que decida leerlo y le sea de ayuda.

Muchas gracias a todos.

Índice general

Introducción

El Anillo de Burnside $B(G)$ se define como el Anillo de Grothendieck de las clases de isomorfismos de $G-$conjuntos, para un grupo finito G, con la suma y multiplicación dadas por la unión disjunta y el producto Cartesiano respectivamente.

Uno estudia con frecuencia el Anillo de Burnside de un grupo finito G usando la marca de homomorfismo $\varphi\colon B(G) \to \mathbb{Z}^{|C(G)|}$, donde $C(G)$ es la familia de las clases de conjugación de los subgrupos de G.

Para cada $K \leq G$, la $K-$ésima cordinada de φ está definida por $\varphi_K(X) = |X^K|$, donde X es un $G-$conjunto. El anillo $\tilde{B}(G) := \mathbb{Z}^{|C(G)|}$ es el anillo de las funciones de superclase $f\colon C(G) \to \mathcal{Z}$ con la multiplicación dada coordenada a coordenada.

Este anillo es llamado el anillo fantasma de G y es parte importante para el entendimiento de los $G-$conjuntos usando la información de sus puntos fijos.

El objetivo de este trabajo es caracterizar el anillo de Burnside para $C_p \times C_p$, en donde C_p es un grupo cíclico de orden un entero primo p.

Comenzaremos hablando sobre los números $p-$ádicos, así cómo también el producto tensorial y el producto fibrado, temas importantes para el objetivo de este trabajo.

En el segundo capítulo de este trabajo daremos la definición de la acción de un grupo en un conjunto, así como los conceptos importantes para el estudio de éste mismo.

En el tercer capítulo estudiaremos el concepto de marca de un subgrupo para un grupo finito, donde analizaremos qué relación existe con los $G-$conjuntos.

En el cuarto capítulo construiremos el Anillo de Burnside para un grupo finito, que es una forma similar a la construcción de los números enteros a partir de los números naturales.

En el último capítulo daremos la caracterización de los anillos de Burnside para el grupo simétrico de S_3, el grupo 4 de Klein, el grupo diédrico D_8, el grupo de los cuaternios, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$, con la finalidad de caracterizar el caso general para $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos un breve repaso de los números $p-$ádicos, del producto tensorial y producto fibrado, temas que son importantes para el desarrollo de esta tesis.

Los números p-ádicos

Definición 1.1. *Sea $\mathbb{K}$ un campo y $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales no negativos. Un valor absoluto sobre el campo $\mathbb{K}$ es una función*

$$|\cdot|: \mathbb{K} \to \mathbb{R}^+$$

tal que cumple las siguientes propiedades:

1. $|x| = 0 \iff x = 0$;
2. $\forall x, y \in \mathbb{K} : |xy| = |x||y|$;
3. $\forall x, y \in \mathbb{K} : |x + y| \leq |x| + |y|$.

Definición 1.2. *Sea $\mathbb{K}$ un campo y $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales no negativos. Un valor absoluto sobre un campo $\mathbb{K}$ es no arquimediano si cumple también que*

$$|x + y| \leq \text{máx}\{|x|, |y|\}$$

para todo $x, y \in \mathbb{K}$.

Definición 1.3. *Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo arbitrario pero fijo y la función:*

$$v_p : \mathbb{Z} - \{0\} \to \mathbb{R},$$

tal que para cada $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, definimos $v_p(n)$ como el único entero no negativo que satisface:

$$n = p^{v_p(n)} n', \text{ donde } p \nmid n'.$$

*Llamamos a la función v_p la **valuación** $p-$ **ádica** sobre $\mathbb{Z}$.*

Podemos extender este concepto a los números racionales, i.e., para $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - 0$, su valuación $p-$ádica es:

$$v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b).$$

Además, definimos $v_p(0) = +\infty$.

Por ejemplo, $v_2(24) = 3$ y $v_3(24) = 1$, puesto que $24 = 2^3 3^1$. Por otro lado, $v_2(\frac{10}{9}) = 1$ y $v_3(\frac{10}{9}) = -2$.

Definición 1.4. *Sea $y \in \mathbb{Q}$, el valor absoluto $p-$ ádico de y es el siguiente:*

$$|y|_p = \begin{cases} p^{-v_p(y)} \ si \ y \neq 0 \\ 0 \ si \ y = 0. \end{cases}$$

El valor absoluto $p-$ ádico es un valor absoluto no arquimediano.

Definición 1.5. *Una sucesión de elementos de un campo $\mathbb{K}$, (x_n), es una sucesión de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon$ siempre que $n, m \geq N$.*

Lema 1.6. *Con la notación de la definición anterior,*

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0.$$

Observación 1.7. *El conjunto*

$$C_p(\mathbb{Q}) = \{(x_n) \ |x_n \in \mathbb{Q} \ y \ (x_n) \ es \ una \ sucesión \ de \ Cauchy \ con \ respecto \ a \ |\cdot|_p\}$$

es un anillo conmutativo con unidad con la siguiente suma y producto:

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n);$$
$$(x_n)(y_n) = (x_n y_n),$$

para toda $(x_n), (y_n) \in C_p(\mathbb{Q})$.

Proposición 1.8. *El conjunto*

$$\mathcal{N} = \{(x_n) \in C_p(\mathbb{Q}) | \lim_{n\to\infty} |x_n|_p = 0\}$$

es un ideal en $C_p(\mathbb{Q})$.

Demostración.

1. Es claro que $(0) \in \mathcal{N}$.
2. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{N}$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $m_1 > N_1$ y $m_2 > N_2$, entonces $|x_{m_1}|_p < \epsilon$ y $|x_{m_2}|_p < \epsilon$.
   Por lo tanto, tomando $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, entonces para cada $m > N$ se cumple que
   $$|x_m + y_m|_p < \text{máx}\{|x_m|, |y_m|\} < \epsilon,$$
   lo cual nos implica que $(x_n) + (y_n) \in \mathcal{N}$.
3. Sea $(x_n) \in C_p(\mathbb{Q}), (y_n) \in \mathcal{N}$, entonces, al ser (x_n) sucesión de Cauchy, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que
   $$|x_n|_p \leq r \ \forall n \in \mathbb{N},$$
   por lo tanto,
   $$\lim_{n\to\infty} |x_n|_p |y_n|_p \leq \lim_{n\to\infty} r|y_n|_p = 0,$$
   por lo que $(x_n)(y_n) \in \mathcal{N}$.

Por lo tanto, concluimos que $\mathcal{N}$ es un ideal en $C_p(\mathbb{Q})$. □

Observación 1.9. *Con la notación de la proposición anterior, se puede ver que $\mathcal{N}$ es ideal máximo.*

Definición 1.10. *Definimos el campo de los números p−ádicos como*

$$\mathbb{Q}_{(p)} = \frac{C_p(\mathbb{Q})}{\mathcal{N}}.$$

Podemos extender $|\cdot|_p$ *a* $\mathbb{Q}_{(p)}$ *de la siguiente forma: Si* $\lambda \in \mathbb{Q}_{(p)}$, *entonces*

$$|\lambda|_p = \lim_{n\to\infty} |x_n|_p, \text{ en donde } (x_n) \text{ es un representante de } \lambda.$$

La función $|\cdot|_p$ *está bien definida y es un valor absoluto no arquimediano.*
Por otro lado, definimos

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{x \in \mathbb{Q}_{(p)} : |x|_p \leq 1\}.$$

$\mathbb{Z}_{(p)}$ *es un anillo local cuyo ideal máximo es* $p\mathbb{Z}_{(p)}$, *sus unidades son los* $x \in \mathbb{Z}_{(p)}$ *tales que* $|x|_p = 1$ *y es subanillo de* $\mathbb{Q}_{(p)}$.

Nota 1.11. *Bajo la inclusión de:*

$$\begin{aligned} i\colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q}_{(p)} \\ x &\mapsto (x), \end{aligned}$$

la imagen de $\mathbb{Q}$ *en* $\mathbb{Q}_{(p)}$ *es densa, asimismo, la imagen de la inclusión de* $\mathbb{Z}$ *en* $\mathbb{Z}_{(p)}$ *es densa.*

Proposición 1.12. *Si* $x \in \mathbb{Z}_{(p)}$ *y* $n \geq 1$, *existe un único* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *con* $0 \leq \alpha \leq p^{n-1}$ *tal que* $|x - \alpha|_p \leq p^{-n}$. *Para cualquier* $x \in \mathbb{Z}_{(p)}$ *existe una única sucesión de Cauchy* (α_n) *que converge a* x *con las siguientes propiedades:*

1. $\alpha_n \in \mathbb{Z}$, *donde* $0 \leq \alpha \leq p^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\alpha_n \equiv \alpha_{n-1} \pmod{p^{n-1}}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. La demostración se encuentra en la Propisición 1.21 de [3]. □

Proposición 1.13.

1. *Cada* $x \in \mathbb{Z}_{(p)}$ *tiene una expresión única de la siguiente forma:*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i, \text{ donde } 0 \leq b_i \leq p^{i-1}.$$

2. *Cada* $x \in \mathbb{Q}_{(p)}$ *tiene una expresión única de la siguiente forma:*

$$x = \sum_{i=-n_0}^{\infty} b_i p^i, \text{ donde } 0 \leq b_i \leq p^{i-1},\, b_{-n_0} \neq 0 \text{ y } v_p(x) = -n_0.$$

Nota 1.14.

1. $\mathbb{Z}_{(p)}/n\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *como anillos para cada* $n \in \mathbb{N}$.
2. $\mathbb{Z}_{(p)}$ *y* $U(\mathbb{Z}_{(p)})$ *son compactos.*
3. $\mathbb{Q}_{(p)}$ *y* $\mathbb{Q}^*_{(p)}$ *son localmente compactos.*

Las demostraciones se encuentran a lo largo del capítulo 1 de [3].

Producto tensorial y producto fibrado

Definición 1.15. *Sea R un anillo, A_R un $R-$módulo derecho, ${}_RB$ un $R-$módulo izquierdo y G un grupo (aditivo) abeliano. La función*

$$f\colon A \times B \to G$$

es biaditiva si para todo $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ y $r \in R$ se cumple que:

1. $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$;
2. $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$;
3. $f(ar, b) = f(a, rb)$.

Por otro lado, si R es conmutativo y G es $R-$módulo, f es bilineal si f es biaditiva y, además, cumple también que $f(ar, b) = rf(a, b)$.

Definición 1.16. *Sea A_R un $R-$módulo derecho y ${}_RB$ un $R-$módulo izquierdo, su producto tensorial es un grupo abeliano, denotado por $A \otimes_R B$, junto con la función $h\colon A \times B \to A \otimes_R B$, donde h es biaditiva, y cumple que para cualquier grupo abeliano G y cualquier $f\colon A \times B \to G$ biaditiva, existe un único $\mathbb{Z}-$homomorfismo $\tilde{f}\colon A \otimes_R B \to G$ que hace que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & A \otimes_R B \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & G. \end{tikzcd}$$

Definición 1.17. *Un $R-$módulo izquierdo F es libre si es isomorfo a una suma directa de copias en R, es decir, existe I un conjunto de índices tal que:*

$$F = \bigoplus_{i \in I} R_i,$$

donde $R_i =< x_i >\cong R$, con $x_i \in F$ para cada $i \in I$. Un $\mathbb{Z}-$módulo libre es también llamado un grupo abeliano libre.

Nota 1.18. *Por la definición de suma directa, para todo $a \in F$ existe una única expresión de la forma*

$$a = \sum_{i \in I} r_i x_i,$$

donde $r_i \in R$ y $r_i = 0$ para casi todo $i \in I$.

Proposición 1.19. *Sea F un $R-$módulo izquierdo libre con base X. Si M es un $R-$módulo izquierdo y $f\colon X \to M$ una función, entonces existe un único $R-$morfismo de módulos $f'\colon F \to M$, donde $f'i = f$, con i la función inclusión.*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, dashed, "f'"] & \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"] & M. \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $X = \{x_i\}_{i \in I}$ una base de F, luego, cada $a \in F$ es de la forma

$$\sum_{i \in I} r_i x_i \in F,$$

donde $r_i \in R$. Entonces definimos la función:

$$\begin{aligned} f' \colon F &\to M \\ f'(a) &\mapsto \sum_{i \in I} r_i f(x_i), \end{aligned}$$

que está bien definida, puesto que la expresión de a es única y $f'|_X = f$. La unicidad de f' se sigue al considerar $g \colon F \to M$ otra función de $R-$módulos izquierdos tal que $g|_X = f$, y $b \in F$ tal que

$$b = \sum_{i \in I} s_i x_i,$$

donde $s_i \in R$. Entonces:

$$\begin{aligned} g(b) &= g(\sum_{i \in I} s_i x_i) \\ &= \sum_{i \in I} s_i g(x_i) \\ &= \sum_{i \in I} r_i f(x_i) \\ &= f'(b). \end{aligned}$$

Por lo tanto, f' es única. □

Proposición 1.20. *Sea A_R $R-$módulo derecho y ${}_RB$ $R-$módulo izquierdo, entonces $A \otimes_R B$ existe.*

Demostración. Sea F el grupo abeliano libre con base $A \times B$ (F es libre en todos los pares ordenados (a, b), donde $a \in A$ y $b \in B$). Sea S el subgrupo de G generado por los siguientes elementos:

1. $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$;
2. $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$;
3. $(a, rb) - (ar, b)$.

Sea $A \otimes_R B = F/S$ y denotando $(a, b) + S$ como $a \otimes b$, entonces sea

$$\begin{aligned} h \colon A \times B &\to A \otimes_R B \\ (a, b) &\mapsto a \otimes b, \end{aligned}$$

y podemos ver que se cumple las siguientes propiedades:

1. $(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$;
2. $a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b'$;
3. $ar \otimes b = a \otimes rb$.

por lo que h es biaditiva. Ahora, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X = A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "i"] \arrow[ddr, "f"'] & & A \otimes_R B = F/S \arrow[ddl, dashed, "\hat{\varphi}"] \\
& F \arrow[ur, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"] & \\
& M, &
\end{tikzcd}$$

en donde f es cualquier función biaditiva.
Por la proposición anterior, existe un único morfismo $\varphi\colon F \to M$ tal que $\varphi i = f$.
Primero, observemos que para cada elemento de S :

1. $$\begin{aligned}\varphi((a+a',b)-(a,b)-(a',b)) &= \varphi(a+a',b)-\varphi(a,b)-\varphi(a',b)\\ &= f(a+a',b)-f(a,b)-f(a',b)\\ &= 0.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\varphi((a,b+b')-(a,b)-(a,b')) &= \varphi(a,b+b')-\varphi(a,b)-\varphi(a,b')\\ &= f(a,b+b')-f(a,b)-f(a,b')\\ &= 0.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\varphi((ar,b)-(a,rb)) &= \varphi(ar,b)-\varphi(a,rb)\\ &= f(ar,b)-f(a,rb)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, cada generador de S está contenido en el núcleo de φ, es decir, $S \subseteq Ker\varphi$, entonces el $\mathbb{Z}-$morfismo

$$\begin{gathered}\hat{\varphi}\colon A\otimes_R B \to M\\ \hat{\varphi}(a\otimes b) = \hat{\varphi}((a,b)+S) = f(a,b)\end{gathered}$$

está bien definida.
Finalmente, supongamos que existe un $\mathbb{Z}-$morfismo $\psi\colon A\otimes_R B \to M$ tal que $\psi h = f$. Sea $a\otimes b \in A\otimes_R B$, entonces

$$\begin{aligned}\psi(a\otimes b) &= \psi(h(a,b))\\ &= f(a,b)\\ &= \hat{\varphi}(h(a,b))\\ &= \hat{\varphi}(a\otimes b),\end{aligned}$$

así, $\psi = \hat{\varphi}$.
Por lo anterior se concluye que $\hat{\varphi}h = f$. □

Definición 1.21. *Sean $f\colon A\to C$, $g\colon B\to C$ morfismos en una categoría, definimos el producto fibrado como una tripleta (X,α_1,α_2), tal que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C, \end{tikzcd}$$

y además, tiene la siguiente propiedad universal: Para cualquier otra tripleta (Y,β_1,β_2) que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C, \end{tikzcd}$$

entonces existe un único morfismo $\theta\colon Y \to X$, tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[drr, bend left, "\beta_2"] \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1"'] & & \\
& X \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C.
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.22. *Para cualesquiera $f\colon A \to C$ y $g\colon B \to C$ morfismos en la categoría de $R-$módulos, entonces su producto fibrado existe.*

Demostración. Sea $X = \{(a,b) \in A \times B | f(a) = g(b)\}$ y α_1, α_2 dados como en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & b \arrow[ddd, mapsto] \\
& X \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"] & B \arrow[d, "g"] & \\
& A \arrow[r, "f"] & C & \\
a \arrow[rrr, mapsto] & & & f(a) = g(b),
\end{tikzcd}$$

entonces es claro que la tripleta (X, α_1, α_2) que hace conmutar el diagrama.
Ahora sea (Y, β_1, β_2) otra tripleta tal que hace conmutar el diagrama, entonces definimos

$$\begin{aligned}
\theta\colon Y &\mapsto X \\
y &\mapsto (\beta_1(y), \beta_2(y)).
\end{aligned}$$

Es claro que θ hace conmutar el siguiente diagrama y es único:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[drr, bend left, "\beta_2"] \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1"'] & & \\
& X \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, (X, α_1, α_2) es un producto fibrado. □

Capítulo 2

G-Conjuntos

En este capítulo abordaremos sobre la acción de un grupo en un conjunto y conceptos relacionados, como lo son la órbita de un elemento de un grupo, el estabilizador de un grupo y el conjugado de un subgrupo en un elemento del grupo. Daremos también ejemplos de acción en ciertos conjuntos y resultados a partir de los conceptos anteriormente mencionados.

Definición 2.1. *Sea G un grupo con elemento identidad e y X un conjunto. G actúa en X si existe $*$ una función*

$$\begin{aligned} *\colon G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g * x, \end{aligned}$$

tal que para cada $x \in X$ y $g, h \in G$ se cumple que:

1. $e * x = x$;
2. $(gh) * x = g * (h * x)$.

Si G actúa en X con $*$, entonces X es un $G-$conjunto con la acción $*$.

Nota 2.2. *A la función $*$ la conocemos como la acción de G en X.*

Proposición 2.3. *Sea X un $G-$conjunto, entonces $\sim$ es una relación de equivalencia, donde dados $x, y \in X$:*

$$x \sim y \iff \exists g \in G\colon y = g * x.$$

Demostración. Sean $x, y, z \in X$, entonces:

1. $x \sim x$, puesto que $x = e * x$.
2. Si $x \sim y$, entonces existe $g \in G$ tal que $y = g * x$, y esto nos implica que:

$$\begin{aligned} g^{-1} * y &= g^{-1} * g * x \\ &= (g^{-1} g) * x \\ &= e * x \\ &= x, \end{aligned}$$

   por lo tanto, $y \sim x$.
3. Si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces existen $g, g' \in G$ tal que $y = g * x$ y $z = g' * y$. Entonces tenemos que $z = g' * (g * x) = (g' g) * x$, por lo que $x \sim z$.

□

Definición 2.4. *Sean X un $G-$conjunto y $x \in X$, definimos la órbita de x en G como el conjunto*

$$\mathcal{O}(x) = \{y \in X : y = g * x \text{ para algún } g \in G\}.$$

Observemos que $\mathcal{O}(x)$ es igual a la clase de equivalencia de x con la relación de equivalencia anterior $\sim$, y, en este sentido, el conjunto X lo podemos descomponer como la unión disjunta de sus órbitas.

Ejemplo 2.5. *G actúa en X con la acción trivial:*

$$\begin{aligned} *\colon G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto x. \end{aligned}$$

En efecto, sean $e \in G$ y $x \in X$. Entonces tenemos que:

$$*(e, x) = x.$$

Además, si $g, h \in G$, ocurre que:

$$\begin{aligned} *(gh, x) &= x \\ &= *(h, x) \\ &= *(g, *(h, x)) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.6. *G actúa en G con su producto como acción:*

$$\begin{aligned} *\colon G \times G &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2, \end{aligned}$$

donde $\cdot$ es el producto en G.
En efecto, sean $e \in G$ y $x \in G$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} *(e, x) &= e \cdot x \\ &= x. \end{aligned}$$

Además, si $g, h \in G$, ocurre que:

$$\begin{aligned} *(gh, x) &= (gh) \cdot x \\ &= g \cdot (h \cdot x) \\ &= *(g, *(h, x)). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.7. *G actúa en G/H con la acción:*

$$\begin{aligned} *\colon G \times G/H &\to G/H \\ (g, aH) &\mapsto (ga)H. \end{aligned}$$

En efecto, sean $e \in G$ y $gH \in G/H$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} *(e, gH) &= (eg)H \\ &= gH. \end{aligned}$$

Además, si $a, b \in G$, ocurre que:

$$\begin{aligned} *(ab, gH) &= ((ab)g)H \\ &= (a(bg))H \\ &= (a, *(b, gH)) \\ &= *(a, *(b, gH)). \end{aligned}$$

Definición 2.8. *Sea I un conjunto de índices y $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de $G-$conjuntos, donde $i \notin X_j$ para $i \neq j \in I$. La unión disjunta de los $X_i's$ los definimos de la siguiente manera:*

$$\bigsqcup X_i = \bigcup (X_i \times \{i\}).$$

En particular, para X, Y dos $G-$conjuntos, tales que $1 \notin Y$ y $2 \notin X$, su unión disjunta es la siguiente:

$$X \sqcup Y = (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\}).$$

Ejemplo 2.9. *Sea I un conjunto de índices, $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de $G-$conjuntos. Entonces G actúa en $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ con la siguiente acción:*

$$\begin{aligned} *\colon G \times \bigsqcup_{i\in I} X_i &\to \bigsqcup_{i\in I} X_i \\ (g, (x, i)) &\mapsto (g *_i x, i), \end{aligned}$$

en donde $x \in X_i$, para algún $i \in I$ y $*_i$ es la acción de G en X_i.

Ejemplo 2.10. *Sean I un conjunto finito de índices y $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de $G-$conjuntos. Veamos que G actúa en $\prod_{i\in I} X_i$ con la acción:*

$$\begin{aligned} *\colon G \times \prod_{i\in I} X_i &\to \prod_{i\in I} X_i \\ (g, (x_i)_{i\in I}) &\mapsto (g *_i x_i)_{i\in I}, \end{aligned}$$

donde $*_i$ es la acción de G en X_i para cada $i \in I$.

Demostración. Primero, sean $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ y $e \in G$, entonces notemos que:

$$\begin{aligned} *(e, (x_i)_{i\in I}) &= (e *_i x_i)_{i\in I} \\ &= (x_i)_{i\in I}. \end{aligned}$$

Además, si $g, h \in G$, entonces:

$$\begin{aligned} *(gh, (x_i)_{i\in I}) &= ((gh) *_i x_i)_{i\in I} \\ &= (g *_i (h *_i x_i))_{i\in I} \\ &= *(g, *(h, (x_i)_{i\in I})). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.11. *Sean $H \leq G$ y Y un $H-$conjunto. Veamos que H actúa en $G \times Y$ con la siguiente acción:*

$$\begin{aligned} *\colon H \times (G \times Y) &\to G \times Y \\ (h, (g, y)) &\mapsto (gh^{-1}, h \circ y), \end{aligned}$$

donde $\circ$ es la acción de H a Y.
En efecto, sean $(g, y) \in G \times Y$ y $e \in H$, entonces:

$$\begin{aligned} *(e,(g,y)) &= (ge^{-1}, e \circ y) \\ &= (ge, e \circ y) \\ &= (g, y). \end{aligned}$$

Además, si $h_1, h_2 \in H$:

$$\begin{aligned} *(h_1h_2,(g,y)) &= (g(h_1h_2)^{-1}, (h_1h_2) \circ y) \\ &= (g(h_2^{-1}h_1^{-1}), (h_1h_2) \circ y) \\ &= ((gh_2^{-1})h_1^{-1}), h_1 \circ (h_2 \circ y)) \\ &= *(h_1, (gh_2^{-1}), h_2 \circ y) \\ &= *(h_1, *(h_2, (g, y))). \end{aligned}$$

Nota 2.12. *Sea $*$ una acción de G en un conjunto X. A partir de este momento para cada $g \in G$ y para cada $x \in X$ denotaremos $*(g, x) = gx$, en los casos donde no haya confusión.*

Definición 2.13. *Sean X, Y dos $G-$conjuntos, con acciones $*, \circ$, respectivamente. Una función $f \colon X \to Y$ es un homomorfismo de $G-$conjuntos si*

$$f(g * x) = g \circ f(x),$$

para todo $g \in G$ y para todo $x \in X$, o simplemente $f(gx) = gf(x)$.

En particular, f es un ismorfismo de $G-$conjuntos si f es un homomorfismo de $G-$conjuntos biyectiva. En este caso, denotaremos $X \cong Y$ y diremos que X y Y son isomorfos como $G-$conjuntos.

Ejemplo 2.14. *Sean X un $G-$conjunto y $f \colon H \to G$ un homomorfismo de grupos. Veamos que H actúa en X con la siguiente acción:*

$$\begin{aligned} * \colon H \times X &\to X \\ (h, x) &\mapsto f(h)x. \end{aligned}$$

En efecto, sean $x \in X$, $e_H \in H$, $e_G \in G$ con e_H y e_G las identidades en H y G, respectivamente. Entonces:

$$\begin{aligned} e_H x &= f(e_H)x \\ &= e_G x \\ &= x. \end{aligned}$$

Además, si $h_1, h_2 \in H$:

$$\begin{aligned} (h_1h_2)x &= f(h_1h_2)x \\ &= (f(h_1)f(h_2))x \\ &= h_1(f(h_2)x) \\ &= h_1(h_2x). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.15. *Sean $H, K \leq G$ con $H \leq K$. Veamos que la siguiente función*

$$\begin{aligned} f \colon G/H &\to G/K \\ aH &\mapsto aK \end{aligned}$$

es un homomorfismo de $G-$conjuntos sobreyectivo (con las acciones referidas en el Ejemplo 2.7):

Demostración. Primero veamos que f está bien definida. Sean $aH = bH \in G/H$, entonces:

$$\begin{aligned} aH = bH &\iff b^{-1}a \in H \\ &\implies b^{-1}a \in K \\ &\iff aK = bK. \end{aligned}$$

Además, es claro que f es sobreyectiva debido a que $H \subseteq K$. Por último, sean $a, g \in G$, entonces:

$$\begin{aligned} f(g(aH)) &= f((ga)H) \\ &= (ga)K \\ &= g(aK) \\ &= gf(aH). \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que f es un homomorfismo de $G-$conjuntos sobreyectivo. ☐

Ejemplo 2.16. *Sean X, Y $G-$conjuntos y $f\colon X \to Y$ un isomorfismo de $G-$conjuntos. Veamos que $f^{-1}\colon Y \to X$ es un isomorfismo de $G-$conjuntos. Es claro que f^{-1} es biyectiva, entonces bastará que probemos que f^{-1} es un homomorfismo de $G-$conjuntos. Sean $y \in Y$ y $g \in G$, entonces:*

$$\begin{aligned} f(gf^{-1}(y)) &= gf(f^{-1}(y)) \\ &= gy, \end{aligned}$$

por lo que,

$$f^{-1}(gy) = gf^{-1}(y).$$

Ejemplo 2.17. *Sean X, Y, Z $G-$conjuntos y $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ isomorfismos de $G-$conjuntos. Entonces la composición $g \circ f$ es un isomorfismo de $G-$conjuntos.*

Definición 2.18. *Sean X un $G-$conjunto y $x \in X$. Definimos y denotamos el estabilizador de x en G como el conjunto:*

$$stab_G(x) = \{g \in G : gx = x\}.$$

Observación 2.19. *Sean X un $G-$conjunto, $x \in X$ y $e \in G$ el elemento identidad. Veamos que $stab_G(x) \leq G$.*
Primero, notemos que $ex = x$, entonces $e \in stab_G(x)$. Ahora, sean $g_1, g_2 \in stab_G(x)$, entonces:

$$\begin{aligned} (g_1g_2)x &= g_1(g_2x) \\ &= g_1x \\ &= x, \end{aligned}$$

y por lo tanto $g_1g_2 \in stab_G(x)$.
Por último, sea $g \in stab_G(x)$, entonces:

$$\begin{aligned} gx = x &\implies g^{-1}(gx) = g^{-1}x \\ &\implies (g^{-1}g)x = g^{-1}x \\ &\implies ex = g^{-1}x \\ &\implies x = g^{-1}x, \end{aligned}$$

de donde concluimos que $g^{-1} \in stab_G(x)$.

Definición 2.20. *Sea X un $G-$conjunto. X es transitivo como $G-$conjunto si X tiene una sola órbita.*

Proposición 2.21. *Sean X un $G-$conjunto, $x \in X$ y $g \in G$. Entonces:*

1. *$\mathcal{O}(x) \cong G/stab_G(x)$ como $G-$conjuntos;*
2. *G/H es transitivo, para todo $H \leq G$.*

En particular, si X es un $G-$conjunto transitivo, entonces $X \cong G/H$ como $G-$conjuntos, para algún $H \leq G$.

Demostración. $\mathcal{O}(x)$ es un $G-$conjunto con la acción de G en X restringida a este subconjunto, y $G/stab_G(x)$ es un $G-$conjunto con la acción del Ejemplo 2.7.

1. Sea $x \in X$, definimos la función:

$$\begin{aligned} f \colon \mathcal{O}(x) &\to G/K \\ gx &\mapsto gK, \end{aligned}$$

   donde $K = stab_G(x)$. Probemos que f es un isomorfismo de $G-$conjuntos:
   Sean $y_1, y_2 \in \mathcal{O}(x)$, entonces existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $y_1 = g_1x$ y $y_2 = g_2x$. Supongamos que $y_1 = y_2$, entonces:

$$\begin{aligned} g_1x = g_2x &\iff g_2^{-1}g_1x = x \\ &\iff g_2^{-1}g_1 \in K \\ &\iff g_1K = g_2K. \end{aligned}$$

   Así, f está bien definida y es inyectiva. Además, es claro que f es sobreyectiva.
   Por último, veamos que f es homomorfismo de $G-$conjuntos. Sea $a \in G$, entonces:

$$\begin{aligned} f(ay_1) &= f(ag_1x) \\ &= ag_1K \\ &= a(g_1K) \\ &= af(g_1x) \\ &= af(y_1). \end{aligned}$$

   Por todo lo anterior, concluimos que f es isomorfismo de $G-$conjuntos.

2. Recordemos que la acción de G en G/H está dado por $a(gH) = agH$, para todo $a \in G, gH \in G/H$. Entonces:

$$gH = g(eH) \in \mathcal{O}(eH).$$

   Concluimos que $G/H = \mathcal{O}(eH)$.

□

Definición 2.22. *Sean $H \leq G$ y $g \in G$. Definimos el conjugado de H en g como el conjunto:*

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}.$$

Ejemplo 2.23. *Sea X la familia de todos los subgrupos de G. Veamos que G actúa en X por conjugación, es decir:*

$$g \cdot H = gHg^{-1},$$

para cada $g \in G$ y $H \in X$.
Primero veamos que $gHg^{-1} \in X$:

- *$e \in H$, esto implica que $e = geg^{-1} \in gHg^{-1}$;*
- *Sean $gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1} \in gHg^{-1}$ para algún $h_1, h_2 \in H$. Entonces:*

$$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = gh_1h_2g^{-1} \in gHg^{-1};$$

- *Sean $ghg^{-1} \in gHg^{-1}$ con $h \in H$. Entonces:*

$$\begin{aligned}(ghg^{-1})^{-1} &= (g^{-1})^{-1}h^{-1}g^{-1} \\ &= gh^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}.\end{aligned}$$

  Por lo que $gHg^{-1} \in X$.

Ahora veamos que la conjugación es una acción de G en X.

1. *Sea $e \in G$ la identidad, entonces:*

$$\begin{aligned}e \cdot H &= eHe^{-1} \\ &= H;\end{aligned}$$

2. *Sean $g_1, g_2 \in G$ y $H \in X$, entonces:*

$$\begin{aligned}(g_1g_2) \cdot H &= (g_1g_2)H(g_1g_2)^{-1} \\ &= g_1(g_2Hg_2^{-1})g_1^{-1} \\ &= g_1(g_2 \cdot H)g_1^{-1} \\ &= g_1 \cdot (g_2 \cdot H).\end{aligned}$$

Concluimos que G actúa en X por conjugación.

Definición 2.24. *Sea X la familia de todos los subgrupos de G. Para cada $H \in X$, definimos la clase de conjugación de H en X como su órbita bajo la acción del ejemplo anterior, i.e., el conjunto $\{K \leq G : K = gHg^{-1}$ para algún $g \in G\}$.*

Notación. *Denotamos por $\mathcal{C}(G)$ a un conjunto completo de representantes de las clases de conjugación de los subgrupos de G.*

Proposición 2.25. *Sean $H, K \leq G$. Entonces $G/H \cong G/K$ como $G-$conjuntos si y solo si H y K pertenecen a la misma clase de conjugación.*

Demostración.
$\Longrightarrow$] Si $G/H \cong G/K$ como $G-$conjuntos entonces existe un homomorfismo de $G-$conjuntos

$$\begin{aligned}\varphi\colon G/H &\to G/K \\ aH &\mapsto ag_0K,\end{aligned}$$

donde $g_0 \in G$, es tal que $\varphi(H) = g_0K$. Observemos que

$$\begin{aligned}\varphi(hH) &= \varphi(heH) \\ &= h\varphi(eH) \\ &= hg_0K.\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\varphi(hH) &= \varphi(H) \\ &= g_0K.\end{aligned}$$

Por lo anterior, $hg_0K = g_0K$ y eso pasa si y solo si $g_0^{-1}hg_0 \in K$ para cada $h \in H$, por lo que $g_0^{-1}Hg_0 \subseteq K$.
Por otro lado, consideremos la función inversa de φ, la cual está dada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}\colon G/K &\to G/H\\ bK &\mapsto bg_0^{-1}H.\end{aligned}$$

Por lo que, análogamente, $g_0Kg_0^{-1} \subseteq H$, i.e., $K \subseteq g_0^{-1}Hg_0$, concluyendo que $K = g_0^{-1}Hg_0$, i.e., H y K pertenecen a la misma clase de conjugación.
[$\Longleftarrow$ Si $K = g^{-1}Hg$, veamos que:

$$\begin{aligned}\varphi\colon G/H &\to G/K\\ aH &\mapsto agK\end{aligned}$$

es un isomorfismo de $G-$conjuntos.
Sean $aH, bH \in G/H$, entonces:

$$\begin{aligned}aH = bH &\iff a(gKg^{-1}) = b(gKg^{-1})\\ &\iff agK = bgK\\ &\iff \varphi(aH) = \varphi(bH),\end{aligned}$$

i.e., que φ está bien definida y es inyectiva.
Ahora, sea $cK \in G/K$, entonces:

$$\varphi(cg^{-1}H) = cK,$$

por lo que φ es sobreyectiva. Es claro que φ es de $G-$conjuntos, por lo que concluimos que:

$$G/H \cong G/K.$$

□

Observación 2.26. *Si $\varphi\colon X \to Y$ es un homomorfismo de $G-$conjuntos, entonces*

$$\mathcal{O}(\varphi(x)) = \varphi(\mathcal{O}(x)).$$

En efecto, sean $x \in X$ y $gx \in \mathcal{O}(x)$ para algún $g \in G$, entonces:

$$\varphi(gx) = g\varphi(x) \in \mathcal{O}(\varphi(x)),$$

entonces $\varphi(\mathcal{O}(x)) \subseteq \mathcal{O}(\varphi(x))$.
Por otro lado, sea $y = g_1\varphi(x) \in \mathcal{O}(\varphi(x))$ para algún $g_1 \in G$, entonces:

$$\begin{aligned}y &= g_1\varphi(x)\\ &= \varphi(g_1x) \in \varphi(\mathcal{O}(x)).\end{aligned}$$

Concluimos que φ manda órbitas en órbitas.

Proposición 2.27. *Todo $G-$conjunto es isomorfo a la unión ajena de $G-$conjuntos de la forma G/H, donde $H \leq G$.*

Demostración. Sea X un $G-$conjunto, entonces $X = \bigsqcup_{i\in I} \mathcal{O}(x_i)$ donde I es un conjunto de índices. Además, sabemos que para cada $i \in I$

$$\mathcal{O}(x_i) \cong G/H_i,$$

donde $H_i = stab_G(x_i) \leq G$. Sea $\varphi_i \colon \mathcal{O}(x_i) \to G/H_i$ un isomorfismo de $G-$conjuntos, entonces el siguiente es un isomorfismo de $G-$conjuntos:

$$\begin{aligned} \varphi \colon X &\to \bigsqcup_{i \in I} G/H_i \\ x &\mapsto \varphi_i(x), \end{aligned}$$

siempre que $x \in \mathcal{O}(x_i)$, para algún $i \in I$. $\square$

Definición 2.28. *Sean $H, K \leq G$. H es subconjugado de K si existe $g \in G$ tal que $gHg^{-1} \leq K$.*

Definición 2.29. *Sean X, Y $G-$conjuntos. Definimos y denotamos el siguiente conjunto:*

$$Hom(X, Y) = \{\varphi \colon X \to Y \mid \varphi \text{ es un homomorfismo de } G - \text{conjuntos}\}.$$

Proposición 2.30. *Sean $H, K \leq G$. Entonces, $Hom(G/H, G/K) \neq \emptyset \iff H$ es subconjugado de K.*

Demostración.
$\implies$] Sea $\varphi \colon G/H \to G/K$ un homomorfismo de $G-$conjuntos, entonces existe $g \in G$ tal que $\varphi(H) = gK$. De la demostración de la Proposición 2.25, podemos ver que $g^{-1}Hg \subseteq K$.

[$\impliedby$ Sabemos que existe $g \in G$ tal que $g^{-1}Hg \leq K$, entonces $\varphi \colon G/g^{-1}Hg \to G/K$ es un homomorfismo de $G-$conjuntos por el Ejemplo 2.15.
Por otro lado, sea $\psi \colon G/H \to G/g^{-1}Hg$ un isomorfismo de $G-$conjuntos, entonces:

$$\varphi \circ \psi \in Hom(G/H, G/K).$$

$\square$

Observación 2.31. *Si H es subconjugado de K, entonces todo conjugado de H es subconjugado de cualquier conjugado de K, donde $H, K \leq G$. Veamos que esto es cierto:*
Existe $g_0 \in G$ tal que $g_0Hg_0^{-1} \leq K$. Sean $g_1, g_2 \in G$, entonces:

$$g_2g_0g_1^{-1}(g_1Hg_1^{-1})g_1g_0^{-1}g_2^{-1} \subseteq g_2Kg_2^{-1},$$

por lo que concluimos que $g_1Hg_1^{-1}$ es un subconjugado de $g_2Kg_2^{-1}$.

Capítulo 3

La Marca de H en X

En este capítulo abordaremos el concepto de marca de un subgrupo en un conjunto, el concepto de normalizador y el grupo de Weyl, así como unos resultados importantes a partir de estos conceptos y los del capítulo anterior.

Definición 3.1. *Sean $H \leq G$ y X un $G-$conjunto finito. Definimos la marca de H en X como la cardinalidad del siguiente conjunto:*

$$X^H := \{x \in X : hx = x \; \forall \, h \in H\},$$

es decir, la cardinalidad de puntos fijos de X bajo la acción de H. Denotamos la marca de H en X como $\varphi_H(X)$.

Proposición 3.2. *Sean X, Y $G-$conjuntos finitos y $H \leq G$. Entonces:*

1. $\varphi_H(X \sqcup Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y)$;
2. $\varphi_H(X \times Y) = \varphi_H(X)\varphi_H(Y)$.

Demostración.

1. Notemos que:

$$\begin{aligned}
(X \sqcup Y)^H &= \{z \in X \sqcup Y : hz = z \; \forall \, h \in H\} \\
&= \{(z_i, i) \in (X \times \{1\} \cup Y \times \{2\}) : h(z_i, i) = (z_i, i) \text{ para cada } h \in H\} \\
&= \{(z_i, i) \in (X \times \{1\} \cup Y \times \{2\}) : hz_i = z_i \text{ para cada } h \in H\} \\
&= \{(z_1, 1) \in X \times \{1\} : z_1 \in X^H\} \cup \{(z_2, 2) \in Y \times \{2\} : z_2 \in Y^H\} \\
&= X^H \sqcup Y^H.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi_H(X \sqcup Y) = |(X \sqcup Y)^H| = |X^H \sqcup Y^H| = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y)$.

2. Notemos que:

$$\begin{aligned}
(X \times Y)^H &= \{(x, y) \in X \times Y : h(x, y) = (x, y) \text{ para cada } h \in H\} \\
&= \{(x, y) \in X \times Y : (hx, hy) = (x, y) \text{ para cada } h \in H\} \\
&= \{(x, y) \in X \times Y : x \in X^H \wedge y \in Y^H\} \\
&= X^H \times Y^H.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi_H(X \times Y) = |(X \times Y)^H| = |X^H \times Y^H| = |X^H||Y^H| = \varphi_H(X)\varphi_H(Y)$.

$\square$

Teorema 3.3. *Sean $H, K \leq G$ pertenecientes a la misma clase de conjugación, entonces $\varphi_H(X) = \varphi_K(X)$ para cualquier $G-$conjunto finito X.*

Demostración. Notemos que existe $a \in G$ tal que $aHa^{-1} = K$. Entonces:

$$\begin{aligned} X^K &= \{x \in X : kx = x \text{ para cada } k \in K\} \\ &= \{x \in X : (aha^{-1})x = x \text{ para cada } h \in H\} \\ &= \{x \in X : h(a^{-1}x) = a^{-1}x \text{ para cada } h \in H\} \\ &= \{x \in X : a^{-1}x \in X^H\} \\ &= aX^H. \end{aligned}$$

Por lo anterior, si tomamos la función biyectiva

$$\begin{aligned} \tau_a \colon X^H &\to aX^H \\ x &\mapsto ax, \end{aligned}$$

cuya función inversa es

$$\begin{aligned} \tau_{a^{-1}} \colon aX^H &\to X^H \\ y &\mapsto a^{-1}y., \end{aligned}$$

llegamos a la conclusión de que $\varphi_H(X) = |aX^H| = |X^K| = \varphi_K(X)$. $\square$

Proposición 3.4. *Sean $H, K \leq G$. Entonces existe una biyección entre $Hom(G/H, G/K)$ y $(G/K)^H$.*

Demostración. G/H y G/K son $G-$conjuntos con la acción del Ejemplo 2.7. Sea:

$$\begin{aligned} \gamma \colon (G/K)^H &\to Hom(G/H, G/K) \\ aK &\mapsto \gamma_a, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \gamma_a \colon G/H &\to G/K \\ gH &\mapsto gaK. \end{aligned}$$

Veamos primero que γ_a está bien definida y es de $G-$conjuntos. Sean $g_1H, g_2H \in G/H$ tales que $g_1H = g_2H$, esto implica que existe $h \in H$ tal que $g_1 = g_2h$. Entonces:

$$\begin{aligned} g_1aK &= g_2h(aK) \\ &= g_2(h(aK)) \\ &= g_2aK. \end{aligned}$$

Por lo que γ_a está bien definida.
Por otro lado, para todo $g' \in G$ se cumple que $\gamma_a(g'gH) = g'gaK = g'\gamma_a(gH)$, entonces $\gamma_a \in Hom(G/H, G/K)$.

Ahora, veamos que γ está bien definida. Sean $aK = bK$ en $(G/K)^H$, entonces existe $k \in K$ tal que $a = bk$, y para cada $gH \in G/H$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}\gamma_a(gH) &= gaK \\ &= gb(kK) \\ &= gbK \\ &= \gamma_b(gH).\end{aligned}$$

Por lo anterior, $\gamma(aK) = \gamma_a = \gamma_b = \gamma(bK)$, es decir, γ está bien definida.
Entonces, veamos que

$$\begin{aligned}\gamma' \colon Hom(G/H, G/K) &\to (G/K)^H \\ \alpha &\mapsto \alpha(H)\end{aligned}$$

es la función inversa de γ.

Primero veamos que γ' está bien definida:
Sean $\alpha_1 = \alpha_2$ en $Hom(G/H, G/K)$. Es claro que $\alpha_1(H) = \alpha_2(H)$, por lo que γ' está bien definida.

Ahora, si $h \in H$, observemos que $h\alpha_1(H) = \alpha_1(hH) = \alpha_1(H)$, por lo que $\alpha_1(H) \in (G/K)^H$.

Enseguida, veamos que $\gamma' \circ \gamma = Id_{(G/K)^H}$:

Sea $aK \in (G/K)^H$, entonces

$$\begin{aligned}\gamma' \circ \gamma(aK) &= \gamma'(\gamma_a) \\ &= \gamma_a(H) \\ &= aK.\end{aligned}$$

Finalmente, veamos que $\gamma \circ \gamma' = Id_{Hom(G/H,G/K)}$:
Sea $\alpha \in Hom(G/H, G/K)$ y $gH \in G/H$, tal que $\alpha(H) = a_0K$ para algún $a_0 \in G$, entonces

$$\begin{aligned}\gamma \circ \gamma'(\alpha) &= \gamma(\alpha(H)) \\ &= \gamma_{a_0}.\end{aligned}$$

Observemos que $\gamma_{a_0}(gH) = ga_0K = g\alpha(H) = \alpha(gH)$, por lo que $\gamma_{a_0} = \alpha$, concluyendo que $\gamma \circ \gamma'(\alpha) = \alpha$. □

Corolario 3.5. *$\varphi_H(G/K) \neq 0$ si y solo si H es subconjugado de K.*

Demostración. Este resultado lo podemos obtener de manera sencilla, puesto que si suponemos que $\varphi_H(G/K) \neq 0$, esto pasa si y solo si $(G/K)^H \neq \emptyset$ y por la proposición anterior, hay una biyección con $Hom(G/H, G/K)$, lo que nos implica que este conjunto es no vacío y por la Proposición 2.30, tenemos que H es subconjugado de K.

□

Definición 3.6. *Sea $H \leq G$. Definimos y denotamos el normalizador de H en G como:*

$$N_G(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\}.$$

Definición 3.7. *Sea $H \leq G$. Definimos y denotamos el grupo de Weyl de H en G como:*

$$W(H) := N_G(H)/H.$$

Lema 3.8. *Sea $H \leq G$. Entonces $(G/H)^H \cong W(H)$ como $N_G(H)-$conjuntos.*

Demostración. Recordemos que G actúa en G/H con la acción $g \cdot aH = gaH$. En particular, $N(H)$ actúa en el grupo de Weyl con la acción anterior.

Ahora, sean $x \in N(H)$ y $aH \in (G/H)^H$, entonces $h(xaH) = xh'aH = xaH$ para algún $h' \in H$, por lo que $xaH \in (G/H)^H$.

Entonces, sea γ la función:

$$\begin{aligned} \gamma \colon W(H) &\to (G/H)^H \\ aH &\mapsto aH. \end{aligned}$$

Sea $aH \in (G/H)^H$, entonces:

$$\begin{aligned} aH \in (G/H)^H &\iff haH = aH \text{ para cada } h \in H \\ &\iff a^{-1}haH = H \text{ para cada } h \in H \\ &\iff a^{-1}ha \in H \text{ para cada } h \in H \\ &\iff a^{-1}Ha \subseteq H \\ &\iff a^{-1}Ha = H \text{ ya que las conjugaciones son biyecciones} \\ &\iff a \in N(H). \end{aligned}$$

Concluimos que $aH \in W(H)$, de donde es fácil ver que γ es una biyección de $G-$conjuntos, i. e., $W(H) \cong (G/H)^H$ como $N_G(H)-$conjuntos. ☐

Proposición 3.9. *Sean $H, K \leq G$. Entonces:*

$$\varphi_H(G/K) = W(K)\alpha(H,K) = \frac{|N_G(H)|}{|K|}\beta(H,K),$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha(H,K) &= |\{E \leq G : H \subseteq E \text{ y } E = gKg^{-1} \text{ para algún } g \in G\}|; \\ \beta(H,K) &= |\{S \leq G : S \subseteq K \text{ y } S = gHg^{-1} \text{ para algún } g \in G\}|. \end{aligned}$$

Demostración. Recordemos que:

$$\begin{aligned} (G/K)^H &= \{aK \in G/K : haK = aK \text{ para cada } h \in H\} \\ &= \{aK \in G/K : a^{-1}haK = K \text{ para cada } h \in H\} \\ &= \{aK \in G/K : a^{-1}ha \in K \text{ para cada } h \in H\} \\ &= \{aK \in G/K : a^{-1}ha \subset K\} \\ &= \{aK \in G/K : H \subset aKa^{-1}\}. \end{aligned}$$

Entonces $(G/K)^H = \{aK \in G/K : H \subset E \text{ en donde } E = aKa^{-1}\}$. Ahora, sea A el conjunto de todos los subgrupos $E \leq G$ tales que $H \subset E$ y $E = aKa^{-1}$ para algún $a \in G$; notemos que $\alpha(H,K) = |A|$.
Ahora, sea:

$$\begin{aligned} f \colon (G/K)^H &\to A \\ aK &\mapsto aKa^{-1}. \end{aligned}$$

Veamos que f está bien definida. Sean $aK, bK \in G/K$ tales que $aK = bK$, entonces $a = bk'$ para algún $k' \in K$. Entonces $aKa^{-1} = bk'Kk'^{-1}b^{-1} = bKb^{-1}$, por lo que nuestra función f está bien definida.

Por otro lado, veamos que f es sobreyectiva. Sea $E = aKa^{-1} \in A$, verifiquemos que $aK \in (G/K)^H$. Sea $h \in H$, entonces

$$\begin{aligned} haKa^{-1} &= hE \\ &= E \text{ (Puesto que } h \in H \subset E) \\ &= aKa^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $haKa^{-1} = aKa^{-1}$, y eso nos implica que $haK = aK$. Es claro que $f(aK) = E$.

Probemos que $f^{-1}(E)$ es igual al conjunto $\mathcal{F} = \{abK \in (G/K)^H : bK \in N(K)/K\}$.
$\subseteq$] Sea $cK \in f^{-1}(E)$, entonces $f(cK) = cKc^{-1} = aKa^{-1}$, entonces $a^{-1}cKc^{-1}a = K$, y esto nos implica que $a^{-1}c \in N(K)$, es decir, existe $b \in N(K)$ tal que $a^{-1}c = b$, entonces $c = ab$.
$\supseteq$] Sea $abK \in \mathcal{F}$, entonces $f(abK) = abKb^{-1}a^{-1} = aKa^{-1} = E$.
Por último, verifiquemos que hay una biyección entre $\mathcal{F}$ y $W(K)$, entonces sea:

$$\begin{aligned} g\colon \mathcal{F} &\to W(K) \\ abK &\mapsto bK. \end{aligned}$$

Veamos que g está bien definida y es inyectiva. Sean $ab_1K, ab_2K \in \mathcal{F}$, entonces observemos que $ab_1K = ab_2K \iff b_1K = b_2K$. Además, por construcción, es claro que g es sobreyectiva.

Recordemos que $(G/K)^H = \bigcup_{E\in A} f^{-1}(E)$, de donde finalmente:

$$\begin{aligned} \varphi_H(G/K) &= \sum_{E\in A} |f^{-1}(E)| \\ &= \sum_{E\in A} |W(K)| \\ &= |A||W(K)| \\ &= \alpha(H,K)|W(K)|. \end{aligned}$$

Concluimos que $\varphi_H(G/K) = \alpha(H,K)|W(K)|$.

Ahora, retomando $(G/K)^H = \{aK : S = a^{-1}Ha \subseteq K\}$ y definimos $A' = \{a \in G : a^{-1}Ha \subseteq K\}$ y la función:

$$\begin{aligned} f_1\colon A' &\to (G/K)^H \\ a &\mapsto aK. \end{aligned}$$

Es claro que h está bien definida y es sobreyectiva. Además, sea $bK \in (G/K)^H$, entonces:

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(bK) &= \{c \in A' : f_1(c) = bK\} \\ &= \{c \in G : cK = bK\} \\ &= \{c \in G : c = bk \text{ para algún } k \in K\} \\ &\subseteq bK. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_1^{-1}(bK) \subseteq bK$ y la otra contención es clara, por lo que se tiene que $f_1^{-1}(bK) = bK$, por lo que $|f_1^{-1}(bK) = |bK| = |K|$, y esto nos implica que $|A'| = |K|\varphi_H(G/K)$.
Por otro lado sea $B = \{S \leq G : S \subseteq K \text{ y } S = aHa^{-1} \text{ para algún } a \in G\}$ y la función:

$$\begin{aligned} f_2\colon A' &\to B \\ a &\mapsto a^{-1}Ha. \end{aligned}$$

Es evidente que f_2 está bien definida y es sobreyectiva. Además, sea $E \in B$, entonces:

$$\begin{aligned} f_2^{-1}(S) &= \{g \in G : h(g) = S\} \\ &= \{g \in G : g^{-1}Hg = a^{-1}Ha\} \\ &= \{g \in G : ag^{-1}Hga^{-1} = H\} \\ &= \{g \in G : ga^{-1} \in N(H)\} \\ &\subseteq N(H)a. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_2^{-1}(S) = N(H)a$ y, tomando sus cardinalidades, $|f_2^{-1}(S)| = |N(H)|$.

Finalmente, tenemos que $|A'| = |N(H)|\beta(H,K)$. Concluimos que $\varphi_H(G/K) = \frac{|N(H)|}{|K|}\beta(H,K)$. $\square$

Capítulo 4

El Anillo de Burnside

Nota 4.1. *A lo largo de este capítulo, denotamos a G un grupo finito, y a $\mathcal{A}$ como a la familia de todos los $G-$conjuntos finitos.*

Observación 4.2. *Sean $X, Y, Z \in \mathcal{A}$, $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ isomorfismos de $G-$conjuntos. Entonces la siguiente relación es de equivalencia en $\mathcal{A}$:*

$$X \sim Y \iff X \cong_G Y, \textit{donde } X, Y \in \mathcal{A}.$$

Definición 4.3. *Para cada $G-$conjunto finito X, definimos y denotamos la clase de equivalencia de X como sigue:*

$$[X] = \{Y \in \mathcal{A} : Y \cong_G X\}.$$

Definición 4.4. *Sea G un grupo finito, definimos a $B^+(G) := \{[X] : X \in \mathcal{A}\}$.*

Teorema 4.5. *Sea G un grupo finito, entonces $B^+(G)$ tiene estructura de semianillo conmutativo con unidad con la siguiente suma y producto, respectivamente:*

$$\begin{aligned} +\colon B^+(G) \times B^+(G) &\to B^+(G) \\ ([X], [Y]) &\mapsto [X] + [Y] = [X \sqcup Y]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *\colon B^+(G) \times B^+(G) &\to B^+(G) \\ ([X], [Y]) &\mapsto [X] \cdot [Y] = [X \times Y]. \end{aligned}$$

Demostración. Veamos que la suma está bien definida. Sean $[X_1] = [Y_1], [X_2] = [Y_2] \in B^+(G)$, entonces probemos que $[X_1 \sqcup X_2] = [Y_1 \sqcup Y_2]$:
Por hipótesis, existen $f_1\colon X_1 \to Y_1$ y $f_2\colon X_2 \to Y_2$ isomorfismos de $G-$conjuntos, entonces podemos ver que el siguiente es el isomorfismo deseado:

$$\begin{aligned} f_3\colon X_1 \sqcup X_2 &\to Y_1 \sqcup Y_2 \\ (x_i, i) &\mapsto (f_i(x_1), i), \end{aligned}$$

donde $x_i \in X_i$ con $i = 1, 2$, y por lo tanto $[X_1 \sqcup X_2] = [Y_1 \sqcup Y_2]$.
Ahora veamos que el producto está bien definido. Con la notación anterior, sólo necesitamos dar un isomorfismo de $G-$conjuntos entre $X_1 \times X_2$ y $Y_1 \times Y_2$. Entonces sea la siguiente función:

$$\begin{aligned} f_4\colon X_1 \times X_2 &\to Y_1 \times Y_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2)). \end{aligned}$$

Es claro que f_4 es un isomorfismo de $G-$conjuntos, por lo que $[X_1 \times X_2] = [Y_1 \times Y_2]$.
Por otro lado, es clara la conmutatividad en la suma y producto, así como también la asociatividad.
Ahora, sean $[X], [Y_1], [Y_2] \in B^+(G)$, para probar la distributividad, consideremos la función:

$$\begin{aligned} f_5\colon X \times (Y_1 \sqcup Y_2) &\to (X \times Y_1) \sqcup (X \times Y_2) \\ (x, (y_i, i)) &\mapsto ((x, y_i), i), \end{aligned}$$

donde $y_i \in Y_i$ con $i = 1, 2$.
Por último, para cada $[X] \in B^+(G)$, el siguiente es un isomorfismo de $G-$conjuntos:

$$\begin{aligned} f_6\colon X \times \{\cdot\} &\to X \\ (x, \cdot) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[X][\cdot] = [X]$, i.e., $[\cdot]$ es la unidad en $B^+(G)$. Por último, es claro que $[\emptyset]$ es el neutro aditivo en $B^+(G)$.

□

Teorema 4.6. *Sean $[X], [Y], [Z] \in B^+(G)$. Si $[X] + [Y] = [X] + [Z]$, entonces $[Y] = [Z]$, es decir, existe la cancelación en $B^+(G)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidadad, podemos elegir X, Y, Z $G-$conjuntos ajenos dos a dos, tales que existen $l, m, n \in \mathbb{N}$ que cumplen:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}(x_i), Y = \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{O}(y_j), Z = \bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{O}(z_k),$$

de donde $n + l = n + m$, y así $l = m$, es decir,

$$Y = \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{O}(y_i).$$

Veamos que podemos cancelar las órbitas de X en la siguiente expresión:

$$\left(\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{O}(y_j)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}(x_i)\right) \cong \left(\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{O}(z_j)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}(x_i)\right).$$

Procedamos por inducción en $n \geq 1$. Para la base de inducción $n = 1$, sea

$$f\colon \left(\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{O}(y_j)\right) \cup \mathcal{O}(x_1) \to \left(\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{O}(z_j)\right) \cup \mathcal{O}(x_1),$$

pero f manda órbitas en órbitas, luego $f(\mathcal{O}(x_1)) = \mathcal{O}(x_1)$, y así al tomar $f|_Y^Z-$isomorfismo, se tiene que $[Y] = [Z]$.

En el otro caso, sin pérdida de generalidad, si $f(\mathcal{O}(x_1)) = \mathcal{O}(z_m)$ y $f(\mathcal{O}(y_m)) = \mathcal{O}(x_1)$, entonces $\mathcal{O}(x_1) \cong \mathcal{O}(z_m)$ y $\mathcal{O}(y_m) \cong \mathcal{O}(x_1)$, y así, $\mathcal{O}(y_m) \cong \mathcal{O}(z_m)$.
Para la tesis de inducción, tenemos que

$$\bigcup_{j=1}^{m-1} \mathcal{O}(y_j) \cong \bigcup_{j=1}^{m-1} \mathcal{O}(z_j),$$

y esto nos implicará que

$$\bigcup_{j=1}^{m-1}\mathcal{O}(y_j)\cup\mathcal{O}(y_m)\cong\bigcup_{j=1}^{m-1}\mathcal{O}(z_j)\cup\mathcal{O}(z_m),$$

es decir,

$$[Y]=[Z].$$

Supongamos que podemos cancelar $n-1$ órbitas de X, entonces:

$$\bigcup_{j=1}^{m}\mathcal{O}(y_j)\cup\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{O}(x_i)\cong\bigcup_{j=1}^{m}\mathcal{O}(z_j)\cup\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{O}(x_i),$$

de donde

$$\bigcup_{j=1}^{m}\mathcal{O}(y_j)\cup\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathcal{O}(x_i)\cup\mathcal{O}(x_n)\cong\bigcup_{j=1}^{m}\mathcal{O}(z_j)\cup\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathcal{O}(x_i)\cup\mathcal{O}(x_n),$$

y así, por la base e hipótesis de inducción, se obtiene:

$$\bigcup_{j=1}^{m}\mathcal{O}(y_j)\cong\bigcup_{j=1}^{m}\mathcal{O}(z_j),$$

es decir,

$$[Y]=[Z].$$

□

Nota 4.7. *A partir de este momento, denotamos la clase de $G-$isomorfismos de X en $B^+(G)$ simplemente por X, cuando no exista confusión.*

Observación 4.8. *A partir del teorema anterior, tenemos la siguiente relación de equivalencia en $B^+(G)\times B^+(G)$, a saber, sean $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)\in B^+(G)\times B^+(G)$:*

$$(X_1,Y_1)\sim(X_2,Y_2)\iff X_1+Y_2=X_2+Y_1.$$

Son claras la reflexividad y la simetría de esta relación, la transitividad se da por la cancelación del teorema anterior.En lo sucesivo, cada elemento $(X,Y)\in B^+(G)\times B^+(G)$, se denotará por $[X,Y]$.

Definición 4.9. *Sea G un grupo finito. El anillo de Burnside de G lo definimos y denotamos por:*

$$B(G)=\{[X,Y]:(X,Y)\in B^+(G)\times B^+(G)\}.$$

Observación 4.10. *El anillo $B(G)$ de un grupo finito G es el anillo de Grothendieck de la categoría de $G-$conjuntos, es decir, que $B(G)$ se construye a partir de $B^+(G)$.*

Teorema 4.11. *Sea G un grupo finito. Entonces $B(G)$ es $\mathbb{Z}-$módulo libre con base $[G/H]$, donde $H \in \mathcal{C}(G)$ con $\mathcal{C}(G)$ un conjunto completo de representantes de las clases de conjugación de los subgrupos de G.*

Demostración. Sea $X \in B^+(G)$, entonces:

$$X = \bigcup_{i \in I} G/H,$$

con $H \leq G$ e I un conjunto finito apropiado de índices.
En $B^+(G)$, los elementos G/H y G/K se identifican si y solo si $H = gKg^{-1}$ para algún $g \in G$, entonces podemos escribir

$$X = \sum_{H \in \mathcal{C}(G)} n_H G/H \text{ en donde } n_H \in \mathbb{N}.$$

Por lo anterior,

$$B^+(G) = \sum_{H \in \mathcal{C}(G)} [\mathbb{N}G/H],$$

esto nos implica que

$$B(G) = \sum_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}[G/H].$$

Ahora, veamos que en $B(G)$ cada elemento tiene una única expresión de la forma

$$\sum_{H \in \mathcal{C}(G)} a_H G/H,$$

donde $a_H \in \mathbb{Z}$. Es suficiente demostrar que si

$$\sum_{H \in \mathcal{C}(G)} a_H G/H = 0,$$

entonces $a_H = 0$ para todo $H \in \mathcal{C}(G)$.
Entonces, si

$$\sum_{H \in \mathcal{C}(G)} a_H G/H = 0$$

y no todos los a_H son cero, podemos considerar la siguiente expresión:

$$\sum_{\substack{K \in \mathcal{C}(G) \\ a_K > 0}} a_K G/K = - \sum_{\substack{L \in \mathcal{C}(G) \\ a_L < 0}} a_L G/L. \qquad (*)$$

Observemos que la expresión anterior es válida en $B^+(G)$, entonces sea $K_0 \in \mathcal{C}(G)$ tal que $a_{K_0} > 0$; de (*), tenemos que

$$[G/K_0] = [G/L_0],$$

lo cual implica que $K_0 = L_0$ en $\mathcal{C}(G)$, lo cual no puede ocurrir.
Por lo tanto,

$$\sum_{H\in\mathcal{C}(G)} a_H G/H = 0, \text{ entonces } a_H = 0 \text{ para cada } H \in \mathcal{C}(G).$$

De este modo,

$$B(G) = \bigoplus_{H\in\mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}[G/H].$$

$\square$

Observación 4.12. *Sean G un grupo finito, R un anillo conmutativo y*

$$f\colon B^+(G) \to R$$

un morfismo de semianillos, entonces f se puede extender de manera única a $B(G)$, es decir, un morfismo de anillos, a saber:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}\colon B(G) &\to R \\ [X,Y] &\mapsto f(X) - f(Y). \end{aligned}$$

1. *$\widetilde{f}$ está bien definida. En efecto, sean $[X_1, Y_1], [X_2, Y_2] \in B(G)$ tales que*

   $$[X_1, Y_1] = [X_2, Y_2],$$

   si y solo si

   $$X_1 + Y_2 = Y_1 + X_2,$$

   entonces, por la buena definición de f,

   $$f(X_1 + Y_2) = f(Y_1 + X_2),$$

   esto implica que

   $$f(X_1) + f(Y_2) = f(Y_1) + f(X_2),$$

   o equivalentemente

   $$f(X_1) - f(Y_1) = f(X_2) - f(Y_2).$$

   Por lo tanto, $\widetilde{f}(X_1, Y_1) = \widetilde{f}(X_2, Y_2)$.

2. *Ahora, observemos que*

   $$\begin{aligned} \widetilde{f}(\{\cdot\}, \emptyset) &= f(\{\cdot\}) - f(\emptyset) \\ &= 1_R - 0 \\ &= 1_R. \end{aligned}$$

3. *Además, sean* $[X,Y],[X',Y'] \in B(G)$, *entonces:*

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}([X,Y]+[X',Y']) &= \widetilde{f}([X+X',Y+Y']) \\
&= f(X+X') - f(Y+Y') \\
&= f(X) + f(X') - (f(Y) + f(Y')) \\
&= f(X) - f(Y) + f(X') - f(Y') \\
&= \widetilde{f}([X,Y]) + \widetilde{f}([X',Y']); \\
\widetilde{f}([X,Y]\cdot[X',Y']) &= \widetilde{f}([XX'+YY', XY'+X'Y]) \\
&= f(XX'+YY') - f(XY'+X'Y) \\
&= f(XX') + f(YY') - f(XY') - f(X'Y) \\
&= f(X)f(X') + f(Y)f(Y') - f(X)f(Y') - f(X')f(Y) \\
&= (f(X)-f(Y))(f(X')-f(Y')) \\
&= \widetilde{f}([X,Y])\widetilde{f}([X',Y']).
\end{aligned}$$

Proposición 4.13. *Sean* $H, K \subseteq G$. *Entonces existe una biyección entre los siguientes conjuntos:*

1. $\mathcal{B}_1$: *el conjunto de las* G*-órbitas de* $\frac{G}{H} \times \frac{G}{K}$.
2. $\mathcal{B}_2$: *el conjunto de las* H*-órbitas de* $\frac{G}{K}$.
3. $\mathcal{B}_3$: *el conjunto de las clases laterales dobles de* G *en* $H\backslash G/K$ *de la forma* HgK *con* $g \in G$.

Demostración. Primero, observemos que $\mathcal{O}_G(aH,bK) = \mathcal{O}_G(a_0H,b_0K)$ si y solo si existe $g \in G$ tal que $(aH,bK) = (ga_0H, gb_0K)$, si y solo si $aH = ga_0H$ y $bK = gb_0K$.

P.D: $\mathcal{O}_H(a^{-1}bk) = \mathcal{O}_H(a_0^{-1}b_0k)$.
$\subseteq]$ Como $a = ga_0h$ y $b = gb_0k$, tenemos que

$$\begin{aligned}
a^{-1}bK &= h^{-1}a_0^{-1}g^{-1}gb_0kK \\
&= h^{-1}a_0^{-1}b_0K \in \mathcal{O}_H(a_0^{-1}b_0K).
\end{aligned}$$

$\supseteq]$ De forma análoga, tenemos que

$$\begin{aligned}
a_0^{-1}b_0K &= ha^{-1}gg^{-1}bk^{-1}K \\
&= ha^{-1}bK \in \mathcal{O}_H(a^{-1}bK).
\end{aligned}$$

Consideremos la función

$$\begin{gathered}
f : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2 \\
\mathcal{O}_G(aH,bK) \mapsto \mathcal{O}_H(a^{-1}bK).
\end{gathered}$$

f está bien definida por las contenciones anteriores. Veamos que f es sobreyectiva. En efecto, como $(aH,bK) = a(H,a^{-1}bK) \in \mathcal{O}_G(H,a^{-1}bK)$, entonces toda órbita tiene un representante de la forma (H,gK), es decir, $\mathcal{O}_H(gK)$ proviene de $\mathcal{O}_G(H,gK)$, así, f es sobreyectiva.

Por último, sean $\mathcal{O}_G(H,gK), \mathcal{O}_G(H,g_0K) \in \mathcal{B}_1$ tal que $\mathcal{O}_H(gK) = \mathcal{O}_H(g_0K)$, si y solo si $gK = hg_0K$ para algún $h \in H$.

P.D: $\mathcal{O}_G(H, gK) = \mathcal{O}_G(H, g_0K)$.
$\subseteq$] Notemos que

$$\begin{aligned}(H, gK) &= (hH, hg_0K)\\ &= h(H, g_0K) \in \mathcal{O}_G(H, g_0K).\end{aligned}$$

$\supseteq$] Tenemos que

$$\begin{aligned}(H, g_0K) &= (h^{-1}H, h^{-1}gK)\\ &= h^{-1}(H, gK) \in \mathcal{O}_G(H, gK).\end{aligned}$$

De donde, concluimos que f es inyectiva, así, existe una biyección entre $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.
La biyección entre $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ es clara. □

Proposición 4.14. *Sean $H, K \leq G$. Entonces $stab_G(aH, bK) = aHa^{-1} \cap bKb^{-1}$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}x \in stab_G(aH, bK) &\iff x(aH, bK) = (aH, bK)\\ &\iff (xaH, xbK) = (aH, bK)\\ &\iff xaH = aH \text{ y } xbK = bK\\ &\iff a^{-1}xa \in H \text{ y } b^{-1}xb \in K\\ &\iff x \in aHa^{-1} \text{ y } x \in bKb^{-1}\\ &\iff x \in aHa^{-1} \cap bKb^{-1}\end{aligned}$$

□

Teorema 4.15. *Sean $H, K \leq G$ y R un conjunto completo de representantes de las clases laterales dobles del conjunto $H\backslash G/K$. Si $G/H, G/K \in B(G)$ entonces*

$$(G/H)(G/K) = \sum_{g \in R} G/(H \cap gKg^{-1}).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}(G/H)(G/K) &= G/H \times G/K\\ &= \bigsqcup_{g \in R} \mathcal{O}_G(H, gK)\\ &= \bigsqcup_{g \in R} G/stab_G(H, gK)\\ &= \bigsqcup_{g \in R} G/(H \cap gKg^{-1})\\ &= \sum_{g \in R} G/(H \cap gKg^{-1}).\end{aligned}$$

□

Corolario 4.16. *Sean $H, K \leq G$ tales que K es normal y sea R un conjunto completo de representantes de las clases laterales dobles del conjunto $H\backslash G/K$. Si $G/H, G/K \in B(G)$, entonces*

$$(G/H)(G/K) = \frac{|G||H \cap K|}{|H||K|} G/(H \cap K).$$

Demostración. Por el teorema anterior,

$$\begin{aligned}(G/H)(G/K) &= \sum_{g \in R} G/(H \cap gKg^{-1}) \\ &= \sum_{g \in R} G/(H \cap K) \\ &= |R| G/(H \cap K).\end{aligned}$$

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned}H\backslash G/K &= \{HgK : g \in G\} \\ &= \{HKg : g \in G\} \\ &= HK\backslash G.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $|R| = [G : HK] = \frac{|G|}{|HK|}$. Además, $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.
Concluimos que $|R| = \frac{|G||H \cap K|}{|H||K|}$. $\square$

Lema 4.17. *Sea*

$$\begin{aligned}\varphi \colon B^+(G) &\to \tilde{B}(G) \\ X &\mapsto (\varphi_H(X))_{H \in \mathcal{C}(G)}.\end{aligned}$$

Entonces φ es un homomorfismo de semianillos.
En consecuencia, φ se puede extender, de acuerdo a la Observación 4.12, de manera única a un morfismo de anillos:

$$\tilde{\varphi} \colon B(G) \to \tilde{B}(G).$$

Demostración. Primero veamos que φ está bien definida. Observemos que por el Teorema 3.3, φ no depende de los representantes de $\mathcal{C}(G)$. Entonces, sean $X = Y \in B^+(G)$, i.e., existe

$$f \colon X \to Y$$

isomorfismo de $G-$conjuntos. Sean $H \in \mathcal{C}(G)$ y $x \in X^H$, entonces para cada $h \in H$ se cumple que

$$hx = x \iff hf(x) = f(x),$$

entonces $f(x) \in Y^H$.
Así, tenemos la siguiente biyección:

$$\begin{aligned}X^H &\to Y^H \\ x &\mapsto f(x),\end{aligned}$$

por lo que tenemos que $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y)$.

Por otro lado, por las propiedades de la marca, es fácil ver que φ abre sumas y productos.
Ahora, veamos que φ es inyectiva, i.e., si $0 \neq a \in B^+(G)$, entonces $\varphi(a) \neq 0$.

Sea $a = \sum_{H \in \mathcal{C}(G)} a_H(G/H)$ con $a_H \in \mathbb{N}$ no todos cero. Observemos que en $\mathcal{C}(G)$ tenemos un orden parcial:

$$H_1 \preceq H_2 \text{ si } H_1 \text{ es subconjugado de } H_2 \text{ para cada } H_1, H_2 \in H.$$

Por lo anterior, y puesto que G es finito, cada cadena ascendente se estaciona, así elegimos K' máximo con respecto a este orden, tal que $a_{K'} \neq 0$, entonces

$$\varphi_{K'}(a) = a_{K'}\varphi_{K'}(G/K') = a_{K'}|W(K')| \neq 0,$$

por lo tanto $\varphi(a) \neq 0$. $\square$

Capítulo 5

Caracterizando Anillos de Burnside

Anillo de Burnside del grupo simétrico de S_3. $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (321)\}$

Orden	Subgrupos de S_3	$\mathcal{C}(S_3)$
6	$K_1 = S_3$	$H_1 = S_3 \trianglelefteq S_3$
3	$K_2 = \langle (123) \rangle$	$H_2 = \langle (123) \rangle \trianglelefteq S_3$
2	$K_3 = \langle (12) \rangle, K_4 = \langle (13) \rangle, K_5 = \langle (23) \rangle$	$H_3 = \langle (12) \rangle$
1	$K_6 = \{(1)\}$	$H_4 = \{(1)\} \trianglelefteq S_3$

$$B_2(S_3) = \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbb{Z}_{(2)}(G/H_i) \subset \mathbb{Z}_{(2)}^4.$$

$R = \{(1), (13)\}$ es un conjunto completo de representantes de clases laterales dobles de $H_3 \backslash S_3 / H_3$. Entonces, su tabla de multiplicar es la siguiente:

	S_3/H_1	S_3/H_2	S_3/H_3	S_3/H_4
S_3/H_1	S_3/H_1	S_3/H_2	S_3/H_3	S_3/H_4
S_3/H_2		$2S_3/H_2$	S_3/H_4	$2S_3/H_4$
S_3/H_3			$S_3/H_3 + S_3/H_4$	$3S_3/H_4$
S_3/H_4				$6S_3/H_4$

Por otro lado, sea:

$$\begin{aligned} \varphi \colon B_2(S_3) &\to \mathbb{Z}_{(2)}^4 \\ S_3/H_1 &\mapsto (1,1,1,1) \\ S_3/H_2 &\mapsto (0,2,0,2) \\ S_3/H_3 &\mapsto (0,0,1,3) \\ S_3/H_4 &\mapsto (0,0,0,6). \end{aligned}$$

Recordemos primero que 3 es unidad en $\mathbb{Z}_{(2)}$, así notemos que en el anillo de $B_2(S_3)$ está generado por las columnas de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, si $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in B_2(S_3)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x_1\\ x_1+2x_2\\ x_3\\ x_3+2x_4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $B_2(S_3) = \{(y_1, \ldots, y_4) \in \mathbb{Z}_{(2)}^4 | y_2 - y_1, y_4 - y_3 \in 2\mathbb{Z}_{(2)}\}$ y así:

$$\boxed{\boldsymbol{B_2(S_3) \cong (B_2(\mathbb{Z}_2))^2.}}$$

Por otro lado, sea:

$$\begin{aligned}\psi \colon B_3(S_3) &\to \mathbb{Z}_{(3)}^4\\ S_3/H_1 &\mapsto (1,1,1,1)\\ S_3/H_3 &\mapsto (0,1,0,3)\\ S_3/H_2 &\mapsto (0,0,2,2)\\ S_3/H_4 &\mapsto (0,0,0,6).\end{aligned}$$

Recordemos primero que 2 es unidad en $\mathbb{Z}_{(3)}$, así notemos que:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Entonces, si $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in B_3(S_3)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_3+3x_4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $B_3(S_3) = \{(y_1, \ldots, y_4) \in \mathbb{Z}_{(3)}^4 | y_4 - y_3 \in 3\mathbb{Z}_{(3)}\}$ y así:

$$\boxed{\boldsymbol{B_3(S_3) \cong \mathbb{Z}_{(3)}^2 \times B_3(\mathbb{Z}_3).}}$$

Anillo de Burnside del grupo 4 de Klein $V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

Orden	Subgrupos de V	$\mathcal{C}(V)$
4	$K_1 = V$	$H_1 = K_1$
2	$K_2 = \langle (12)(34) \rangle$	$H_2 = K_2$
	$K_3 = \langle (13)(24) \rangle$	$H_3 = K_3$
	$K_4 = \langle (12)(34) \rangle$	$H_4 = K_4$
1	$K_5 = \{(1)\}$	$H_5 = K_5$

Entonces, su tabla de multiplicar es la siguiente:

	V/H_1	V/H_2	V/H_3	V/H_4	V/H_5
V/H_1	V/H_1	V/H_2	V/H_3	V/H_4	V/H_5
V/H_2		$2V/H_2$	V/H_5	V/H_5	$2V/H_5$
V/H_3			$2V/H_3$	V/H_5	$2V/H_5$
V/H_4				$2V/H_4$	$2V/H_5$
V/H_5					$4V/H_5$

Por otro lado, sea:

$$\begin{aligned} \varphi \colon B_2(V) &\to \mathbb{Z}^5_{(2)} \\ a_1 &\mapsto (1,1,1,1,1) \\ a_2 &\mapsto (0,2,0,0,2) \\ a_3 &\mapsto (0,0,2,0,2) \\ a_4 &\mapsto (0,0,0,2,2) \\ a_5 &\mapsto (0,0,0,0,4). \end{aligned}$$

Entonces, si $(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{Z}^5_{(2)}$ tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\boxed{B_2(V) = \{(y_1, \ldots, y_5) \in \mathbb{Z}^5_{(2)} : y_i - y_1 \in 2\mathbb{Z}_{(2)} \text{ con } i = 2,3,4; (y_5 - y_1) - \textstyle\sum_{i=2}^{4}(y_i - y_1) \in 4\mathbb{Z}_{(2)}\}}$$

Anillo de Burnside del grupo diédrico D_8 $\{(1),(1234),(13)(24),(4321),(14)(23),(12)(34),(24),(13)\}$.

Orden	Subgrupos de D_8	$\mathcal{C}(D_8)$
8	$K_1 = D_8$	$H_1 = K_1$
4	$K_2 = V$	$H_2 = K_2$
	$K_3 = \langle(1234)\rangle$	$H_3 = K_3$
	$K_4 = \{(1),(13),(24),(13)(24)\}$	$H_4 = K_4$
2	$K_5 = \langle(13)(24)\rangle$	$H_5 = K_5$
	$K_6 = \langle(12)(34)\rangle$, $K_7 = \langle(14)(23)\rangle$	$H_6 = K_6$
	$K_8 = \langle(24)\rangle$, $K_9 = \langle(13)\rangle$	$H_7 = K_8$
1	$K_{10} = \{(1)\}$	$H_8 = K_{10}$

Nota: $K_6 = (13)K_7(13)$ y $K_8 = (4321)K_9(1234)$

Primero, observemos que H_6 y H_7 no son normales, entonces hay que dar un conjunto completo de representantes de las clases laterales dobles de los conjuntos $H_6\backslash D_8/H_6$, $H_6\backslash D_8/H_7$ y $H_7\backslash D_8/H_7$ respectivamente:

- $R_1 = \{(1),(24),(13)(24)\}$ es un conjunto completo de representantes de $H_6\backslash D_8/H_6$, entonces su producto es el siguiente:

$$\begin{aligned}(D_8/H_6)(D_8/H_6) &= \sum_{g\in R_1} D_8/(H_6\cap gH_6g^{-1})\\ &= 2D_8/H_6 + D_8/H_8.\end{aligned}$$

- $R_2 = \{(1),(13)\}$ es un conjunto completo de representantes de $H_6\backslash D_8/H_7$, entonces su producto es el siguiente:

$$\begin{aligned}(D_8/H_6)(D_8/H_7) &= \sum_{g\in R_2} D_8/(H_6\cap gH_7g^{-1})\\ &= 2D_8/H_8.\end{aligned}$$

- $R_3 = \{(1),(1234),(13)\}$ es un conjunto completo de representantes de $H_7\backslash D_8/H_7$, entonces su producto es el siguiente:

$$\begin{aligned}(D_8/H_7)(D_8/H_7) &= \sum_{g\in R_3} D_8/(H_7\cap gH_7g^{-1})\\ &= 2D_8/H_7 + D_8/H_8.\end{aligned}$$

Definamos $a_i = D_8/H_i$ con $i = 1,\ldots,8$. Entonces la tabla de multiplicación es la siguiente:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_2		$2a_2$	a_5	a_5	$2a_5$	$2a_6$	a_8	$2a_8$
a_3			$2a_3$	a_5	$2a_5$	a_8	a_8	$2a_8$
a_4				$2a_4$	$2a_5$	a_8	$2a_7$	$2a_8$
a_5					$4a_5$	$2a_8$	$2a_8$	$4a_8$
a_6						$2a_6+a_8$	$2a_8$	$4a_8$
a_7							$2a_7+a_8$	$4a_8$
a_8								$8a_8$

Recordemos que:

$$\varphi_{H_i}(D_8/K) = \frac{|N(K)|}{|K|}|\{E \leq G : [E] = [K] \text{ y } H_i \subset E\}|$$

Para cada $i = 1, \ldots, 8$, tenemos que:

$$\varphi_{H_i}(D_8, D_8) = \frac{|D_8|}{|D_8|}|\{D_8\}| = 1$$

Para $j = 2, 3, 4$ e $i = 1, \ldots, 8$, entonces:

$$\begin{aligned}\varphi_{H_i}(D_8/H_j) &= \frac{|D_8|}{|H_j|}|\{E \leq G : [E] = [H_j] \text{ y } H_i \subset E\}| \\ &= 2\begin{cases} 0 \text{ si } H_i \nsubseteq H_j \\ 1 \text{ si } H_i \subseteq H_j. \end{cases}\end{aligned}$$

Para cada $i = 1 \ldots, 8$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\varphi_{H_i}(D_8/H_5) &= \frac{|D_8|}{|H_j|}|\{E \leq G : [E] = [H_5] \text{ y } H_i \subset E\}| \\ &= 4\begin{cases} 0 \text{ si } H_i \nsubseteq H_5 \\ 1 \text{ si } H_i \subseteq H_5. \end{cases}\end{aligned}$$

Observemos que $N_{D_8}(H_6) = V$, entonces para cada $i = 1, \ldots, 8$, tenemos que:

$$\varphi_{H_i}(D_8/H_6) = \frac{|V|}{|H_6|}|\{E \leq G : [E] = [H_6] \text{ y } H_i \subset E\}|$$

Observemos que $N_{D_8}(H_7) = H_4$ entonces para cada $i = 1, \ldots, 8$, tenemos que:

$$\varphi_{H_i}(D_8/H_7) = \frac{|H_4|}{|H_7|}|\{E \leq G : [E] = [H_6] \text{ y } H_i \subset E\}|$$

Para cada $i = 1 \ldots, 8$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\varphi_{H_i}(D_8/H_8) &= \frac{|D_8|}{|H_8|}|\{E \leq G : [E] = [H_5] \text{ y } H_i \subset E\}| \\ &= 8\begin{cases} 0 \text{ si } H_i \nsubseteq H_8 \\ 1 \text{ si } H_i \subseteq H_8. \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi\colon B_2(D_8) &\to \mathbb{Z}^8_{(2)} \\ x &\mapsto (\varphi_{H_1}(X), \ldots, \varphi_{H_8}(X)) \\ a_1 &\mapsto (1,1,1,1,1,1,1,1) \\ a_2 &\mapsto (0,2,0,0,2,2,0,2) \\ a_3 &\mapsto (0,0,2,0,2,0,0,2) \\ a_4 &\mapsto (0,0,0,2,2,0,2,2) \\ a_5 &\mapsto (0,0,0,0,4,0,0,4) \\ a_6 &\mapsto (0,0,0,0,0,2,0,4) \\ a_7 &\mapsto (0,0,0,0,0,0,2,4) \\ a_8 &\mapsto (0,0,0,0,0,0,0,8)\end{aligned}$$

Entonces, si $(x_1, x_2, \ldots, x_8) \in \mathbb{Z}_{(2)}^8$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_6 \\ x_1 + 2x_4 + 2x_7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 4x_6 + 4x_7 + 8x_8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{B_2(D_8) = \{(y_1, \ldots, y_8) \in \mathbb{Z}_{(2)}^8 : (y_1, \ldots, y_5) \in B_2(V); y_6 - y_2, y_7 - y_4 \in 2\mathbb{Z}_{(2)},} \\ \boldsymbol{(y_8 - y_5) - 2(y_6 - y_2) - 2(y_7 - y_4) \in 8\mathbb{Z}_{(2)}\}.} \end{array}}$$

Anillo de Burnside del grupo de los cuaternios. $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

Orden	Subgrupos de Q	$\mathcal{C}(Q)$
8	$K_1 = Q$	$K_1 = H_1$
4	$K_2 = \langle i \rangle$	$H_2 = K_2$
	$K_3 = \langle j \rangle$	$H_3 = K_3$
	$K_4 = \langle k \rangle$	$H_4 = K_4$
2	$K_5 = \langle -1 \rangle$	$H_5 = K_5$
1	$K_6 = \{1\}$	$H_6 = K_6$

Por otro lado, sea:

$$\begin{aligned} \varphi\colon B_2(Q) &\to \mathbb{Z}^6_{(2)} \\ a_1 &\mapsto (1,1,1,1,1,1) \\ a_2 &\mapsto (0,2,0,0,0,2) \\ a_3 &\mapsto (0,0,2,0,0,2) \\ a_4 &\mapsto (0,0,0,2,0,2) \\ a_5 &\mapsto (0,0,0,0,4,4) \\ a_6 &\mapsto (0,0,0,0,0,8). \end{aligned}$$

Entonces, si $(x_1,\dots,x_6) \in \mathbb{Z}^6_{(2)}$, tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 8x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\boldsymbol{B_2(Q) = \{(y_1,\dots,y_6) \in \mathbb{Z}^6_{(2)} \mid (y_1,\dots,y_5) \in B_2(V), y_6 - y_5 \in 8\mathbb{Z}_{(2)}\}.}}$$

Anillo de Burnside de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

Orden	Subgrupos de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathcal{C}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$
4	$K_1 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$H_1 = K_1$
2	$K_2 = \langle(0,1)\rangle$	$H_2 = K_2$
	$K_3 = \langle(1,0)\rangle$	$H_3 = K_3$
	$K_4 = \langle(1,1)\rangle$	$H_4 = K_4$
1	$K_5 = \{(0,0)\}$	$H_5 = K_5$

Definamos $a_i = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 / H_i$, con $i = 1, \ldots, 5$. Entonces la tabla de multiplicar es la siguiente:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	$2a_5$
a_2		$2a_2$	a_5	a_5	$2a_5$
a_3			$2a_3$	a_5	$2a_5$
a_4				$2a_4$	$2a_5$
a_5					$4a_5$

Ahora, sea:

$$\begin{aligned}
\varphi\colon B_2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) &\to \mathbb{Z}_{(2)}^5 \\
a_1 &\mapsto (1,1,1,1,1) \\
a_2 &\mapsto (0,2,0,0,2) \\
a_3 &\mapsto (0,0,2,0,2) \\
a_4 &\mapsto (0,0,0,2,0) \\
a_5 &\mapsto (0,0,0,0,4)
\end{aligned}$$

Entonces, si $(x_1, \ldots, x_5 \in)\mathbb{Z}_{(2)}^5$, la tabla de marcas es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{aligned}&\boldsymbol{B_2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \{(y_1, \ldots, y_5 \in)\mathbb{Z}_{(2)}^5 \mid y_i - y_1 \in 2\mathbb{Z}_{(2)},}\ \text{con } \boldsymbol{i = 2,3,4;} \\ &\boldsymbol{(y_5 - y_1) - \textstyle\sum_{i=2}^{4}(y_i - y_1) \in 4\mathbb{Z}_{(2)}\}}\end{aligned}}$$

Anillo de Burnside de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

Orden	Subgrupos de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathcal{C}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$
9	$K_1 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	$H_1 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
3	$K_2 = \langle (0,1) \rangle$	$H_2 = K_2$
	$K_3 = \langle (1,0) \rangle$	$H_3 = K_3$
	$K_4 = \langle (1,1) \rangle$	$H_4 = K_4$
	$K_5 = \langle (1,2) \rangle$	$H_5 = K_5$
1	$K_6 = \{(0,0)\}$	$H_6 = K_6$

Definamos $a_i = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 / H_i$, con $i = 1, \ldots, 6$, entonces su tabla de multiplicar es la siguiente:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_2		$3a_2$	a_6	a_6	a_6	$3a_6$
a_3			$3a_3$	a_6	a_6	$3a_6$
a_4				$3a_4$	a_6	$3a_6$
a_5					$3a_5$	$3a_6$
a_6						$9a_6$

Por otro lado, sea:

$$
\begin{aligned}
\varphi \colon B_3(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) &\to \mathbb{Z}^6_{(3)} \\
a_1 &\mapsto (1,1,1,1,1,1) \\
a_2 &\mapsto (0,3,0,0,0,3) \\
a_3 &\mapsto (0,0,3,0,0,3) \\
a_4 &\mapsto (0,0,0,3,0,3) \\
a_5 &\mapsto (0,0,0,0,3,3) \\
a_6 &\mapsto (0,0,0,0,0,9)
\end{aligned}
$$

Entonces, si $(x_1, \ldots, x_6) \in \mathbb{Z}^6_{(3)}$, su tabla de marcas es la siguiente:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
x_1 \\
x_1 + 3x_2 \\
x_1 + 3x_3 \\
x_1 + 3x_4 \\
x_1 + 3x_5 \\
x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 9x_6
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}
$$

Por lo tanto:

$$
\boxed{\begin{array}{l}
\boldsymbol{B_3(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) = \{(y_1, \ldots, y_6) \in \mathbb{Z}^6_{(3)} | y_i - y_1 \in 3\mathbb{Z}_{(3)},} \text{ con } \boldsymbol{i = 2, \ldots, 5;} \\
\boldsymbol{(y_6 - y_1) - \sum_{i=2}^{5} (y_i - y_1) \in 9\mathbb{Z}_{(3)}\}.}
\end{array}}
$$

Anillo de Burnside de $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

Orden	Subgrupos de $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathcal{C}(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5)$
25	$K_1 = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$	$H_1 = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$
5	$K_2 = \langle (0,1) \rangle$	$H_2 = K_2$
	$K_3 = \langle (1,0) \rangle$	$H_3 = K_3$
	$K_4 = \langle (1,1) \rangle$	$H_4 = K_4$
	$K_5 = \langle (1,2) \rangle$	$H_5 = K_5$
	$K_6 = \langle (1,3) \rangle$	$H_6 = K_6$
	$K_7 = \langle (1,4) \rangle$	$H_7 = K_7$
1	$K_8 = \{(0,0)\}$	$H_8 = K_8$

Definamos $a_i = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 / H_i$, con $i = 1, \ldots, 8$. Entonces su tabla de multiplicar es la siguiente:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_2		$5a_2$	a_8	a_8	a_8	$3a_8$	a_8	$5a_8$
a_3			$5a_3$	a_8	a_8	a_8	a_8	$5a_8$
a_4				$5a_4$	a_8	a_8	a_8	$5a_8$
a_5					$5a_5$	a_8	a_8	$5a_8$
a_6						$5a_6$	a_8	$5a_8$
a_7							$5a_7$	a_8
a_8								$25a_8$

Por otro lado, sea:

$$
\begin{aligned}
\varphi\colon B_5(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5) &\to \mathbb{Z}_{(5)}^8 \\
a_1 &\mapsto (1,1,1,1,1,1,1,1) \\
a_2 &\mapsto (0,5,0,0,0,0,0,5) \\
a_3 &\mapsto (0,0,5,0,0,0,0,5) \\
a_4 &\mapsto (0,0,0,5,0,0,0,5) \\
a_5 &\mapsto (0,0,0,0,5,0,0,5) \\
a_6 &\mapsto (0,0,0,0,0,5,0,5) \\
a_7 &\mapsto (0,0,0,0,0,0,5,5) \\
a_8 &\mapsto (0,0,0,0,0,0,0,25).
\end{aligned}
$$

Entonces, si $(x_1,\ldots,x_8)\in\mathbb{Z}^8_{(5)}$,su tabla de marcas es la siguiente:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\1&5&0&0&0&0&0&0\\1&0&5&0&0&0&0&0\\1&0&0&5&0&0&0&0\\1&0&0&0&5&0&0&0\\1&0&0&0&0&5&0&0\\1&0&0&0&0&0&5&0\\1&5&5&5&5&5&5&25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\\x_8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_1+5x_2\\x_1+5x_3\\x_1+5x_4\\x_1+5x_5\\x_1+5x_6\\x_1+5x_7\\x_1+5x_2+5x_3+5x_4+5x_5+5x_6+5_7+25x_8\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\y_6\\y_7\\y_8\end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\begin{array}{l}B_5(\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5)=\{(y_1,\ldots,y_8)\in\mathbb{Z}^8_{(5)}|\ \ y_i-y_1\in 5\mathbb{Z}_{(5)},\ \text{con } i=2,\ldots,7;\\(y_8-y_1)-\sum_{i=2}^7(y_i-y_1)\in 25\mathbb{Z}_{(5)}\}.\end{array}}$$

Anillo de Burnside de $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, donde p es un número primo.

Orden	Subgrupos de $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$	$\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p)$
p^2	$K_1 = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$	$H_1 = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$
p	$K_2 = \langle(0,1)\rangle$	$H_2 = K_2$
	$K_3 = \langle(1,0)\rangle$	$H_3 = K_3$
	$K_4 = \langle(1,1)\rangle$	$H_4 = K_4$
	$\vdots$	$\vdots$
	$K_{p+1} = \langle(1,p-2)\rangle$	$H_{p+1} = K_{p+1}$
	$K_{p+2} = \langle(1,p-1)\rangle$	$H_{p+2} = K_{p+2}$
1	$K_{p+3} = \{(0,0)\}$	$H_{p+3} = K_{p+3}$

Definiendo $a_i = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p/H_i$, donde $i = 1, \dots, p+3$, entonces para $j \in \{2, \dots, p+2\}$ tenemos los siguientes casos para el producto de $a_i a_j$:

1. Si $i = 1$, entonces $a_i a_j = a_j$.
2. Si $i = j$, entonces $a_i a_j = pa_j$
3. Si $i = p+3$, entonces $a_i a_j = pa_{p+3}$.
4. Si $i \neq 1, j, p+3$, entonces $a_i a_j = a_{p+3}$.

Por lo tanto, su tabla de multiplicar es la siguiente:

	a_1	a_2	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_{p+2}	a_{p+3}
a_1	a_1	a_2	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_{p+2}	a_{p+3}
a_2		pa_2	$\cdots$	a_{p+3}	$\cdots$	a_{p+3}	pa_{p+3}
$\vdots$			$\ddots$			$\vdots$	$\vdots$
a_i				pa_i	$\cdots$	a_{p+3}	pa_{p+3}
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{p+2}						pa_{p+2}	pa_{p+3}
a_{p+3}							$p^2 a_{p+3}$

Por otro lado, sea:

$$
\begin{aligned}
\varphi \colon B_p(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p) &\to \mathbb{Z}_{(p)}^{p+3} \\
a_1 &\mapsto \underbrace{(1, 1, \cdots, 1, 1, 1)}_{p+3- \text{ veces } 1} \\
a_2 &\mapsto (0, p, 0, \cdots, 0, p) \\
&\vdots \\
a_i &\mapsto (0, \underset{i-1}{\overrightarrow{\ldots}}, 0, p, 0, \dots, 0, p) \\
&\vdots \\
a_{p+2} &\mapsto (0, 0, \cdots, 0, p, p) \\
a_{p+3} &\mapsto (0, 0, \cdots, 0, 0, p^2),
\end{aligned}
$$

entonces su tabla de marcas es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\ 1 & p & p & p & p & p^2 \end{pmatrix}$$

Por lo anterior, concluimos que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{B_p(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p) = \{(y_1, \ldots, y_{p+3}) \in \mathbb{Z}_{(p)}^{p+3} | y_i - y_1 \in p\mathbb{Z}_{(p)},} \text{ con } \boldsymbol{i = 2, \ldots, p+2;} \\ \boldsymbol{(y_{p+3} - y_1) - (\sum_{i=2}^{p+2} y_i - y_1) \in p^2\mathbb{Z}_{(p)}\}.} \end{array}}$$

Apéndice A

Ideales en el Anillo de Burnside en un producto fibrado

Veamos la caracterización de $B_p(C_{p^n})$, entonces consideremos $C_{p^n} =< a >$ donde a es de orden p^n, y así

$$\mathcal{C}(C_{p^n}) = \{H_1 =< a >, H_2 =< a^p >, \dots, H_{n+1} =< a^{p^n} >\}.$$

Entonces, sea $a_i = C_{p^n}/H_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces tenemos que

$$B_p(C_{p^n}) = \bigoplus_{i=0}^{n+1} \mathbb{Z}_p a_i.$$

Además, φ induce la siguiente inclusión

$$\begin{aligned} B_p(C_{p^n}) &\to \mathbb{Z}_p^{n+1} \\ X &\mapsto (\varphi_{H_0}(X), \varphi_{H_1}(X), \dots, \varphi_{H_{n+1}}(X)). \end{aligned}$$

Ahora observemos que para $i, j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \varphi_{H_i}(C_{p^n}/H_j) &= \frac{|C_{p^n}|}{|H_j|} |\{E \leq C_{p^n} : [E] = [H_j] \text{ y } H_i \subseteq E\}| \\ &= \frac{|C_{p^n}|}{|H_j|} \begin{cases} 1 \text{ si } H_i \subseteq H_j \\ 0 \text{ si } H_i \nsubseteq H_j. \end{cases} \end{aligned}$$

Por ende, tenemos que

$$\begin{aligned} a_1 &\mapsto (1, 1, 1 \dots, 1) \\ a_2 &\mapsto (0, p, p \dots, p) \\ a_3 &\mapsto (0, 0, p^2, \dots, p^2) \\ &\vdots \\ a_{n+1} &\mapsto (0, 0, 0, \dots, p^n). \end{aligned}$$

Así, si $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{Z}_p^{n+1}$ tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & p & p^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & p & p^2 & \ldots & p^{n-1} & 0 \\ 1 & p & p^2 & \ldots & p^{n-1} & p^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + px_2 \\ x_1 + px_2 + p^2x_3 \\ \vdots \\ x_1 + px_2 + p^2x_3 + \cdots + p^{n-1}x_n \\ x_1 + px_2 + p^2x_3 + \cdots + p^{n-1}x_n + p^n x_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, podemos considerar a $B_p(C_{p^n})$ en $\mathbb{Z}_p^{n+1}$ de la siguiente manera

$$B_p(C_{p^n}) = \{(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \in \mathbb{Z}_p^{n+1} : y_i - y_{i-1} \in p^i\mathbb{Z}_p \text{ con } i = 2, 3, \ldots, n+1\}.$$

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & x_n \arrow[ddd, mapsto] \\
& B_p(C_{p^n}) \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"] & \mathbb{Z}_p \arrow[d, "g"] & \\
& B_p(C_{p^{n-1}}) \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p & \\
(x_1, \ldots, x_{n-1}) \arrow[rrr, mapsto] & & & \overline{X_{n-1}} = \overline{X_n},
\end{tikzcd}$$

observemos que los ideales de $\mathbb{Z}_p$ son de la forma $p^t\mathbb{Z}_p$ con $0 \leq t$ un entero. Entonces sea $I \leq B_p(C_{p^n})$ y sean $I_i = \alpha_i(I)$ con $i = 1, 2$. Puesto que α_i es sobreyectiva, es claro que I_i es ideal para $i = 1, 2$.

Además, como $\mathbb{Z}_p$ es un D.I.P., entonces en particular $I_2 = p^t\mathbb{Z}_p$, y como α_2 es sobreyectiva, existe $x \in B_p(C_{p^{n-1}})$ tal que $(x, p^t) \in I$ y $\alpha_2(x, p^t) = p^t$, y asimismo, $f(x) = g(p^t)$, i.e., $x - p^t \in p^n\mathbb{Z}_p$ con $0 \leq t$ un entero.

Sea $(a, b) \in I$, entonces $b \in I_2$, i.e, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = cp^t$, además existe $a_1 \in B_p(C_{p^{n-1}})$ tal que $\alpha_2(a_1, c) = c$. Por otro lado, $(x, p^t)(a_1, c) = (xa_1, cp^t) \in I$, entonces $(a, b) - (xa_1, cp^t) = (a - xa_1, 0) \in I$.

Entonces, definimos

$$J = \{a' \in B_p(C_{p^{n-1}}) | (a', 0) \in I\};$$

es claro que J es ideal de $B_p(C_{p^{n-1}})$ por la sobreyectividad de α_1. Como consecuencia, $a - xa_1 \in J$, entonces existe $d \in J$ tal que $d = a - xa_1$.
Así, $(a, b) = (xa_1 + d, cp^t) = (x, p^t)(a_1, c) + (d, 0)$, por lo que es claro la siguiente igualdad de conjuntos:

$$I = (x, p^t)B_p(C_{p^n}) + (J, 0),$$

en donde:

1. $J \leq B_p(C_{p^{n-1}})$, tal que $f(J) = 0$;
2. $x \in B_p(C_{p^{n-1}})$ tal que $x - p^t \in p^n\mathbb{Z}_p$, con x único (mód J);
3. si $D = \{(m, n) \in B_p(C_{p^n}) | np^t = 0\}$, entonces $mx \in J$ $\forall (m, n) \in D$, esto es, $\alpha_1(D)x \subseteq J$.

Se puede ver que $D = p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times \cdots \times p^n\mathbb{Z}_p \times \{0\}$.

Bibliografía

[1] J. M. Ramírez Contreras & D. Villa Hernández, *Solomon´s Zeta function of* $B_p(C_{p^3})$, Int. Electron. J. Algebra 20 (2016) 1-27.

[2] S. Bouc,, Burnside rings, in: *Handbook of algebra*, Noth-Holland, Amsterdam, vol 2, 2000, pp. 739-804.

[3] V. A. Aguilar Arteaga, Tesis de Maestría *"Funciones zeta locales de Igusa vía la fórmula de la fase estacionaria"*, FCFM, BUAP, julio 2014.

[4] Rotman, J.J., *Advanced Modern Algebra.*, Prentice Hall (2003).

[5] Cejudo Castilla, C., Ramírez Contreras, J. M., & Villa Hernández, D. (2016). El anillo de Burnside. En F. Macías Romero, *Matemáticas y sus aplicaciones 7*, (págs. 31-52). Puebla: BUAP.