

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA**

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Postgrado en Ciencias Matemáticas

**RECONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES MEDIANTE
COMBINACIONES LINEALES DE OPERADORES
LINEALES Y POSITIVOS**

TESIS

Que para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Víctor Manuel Méndez Salinas

Director de tesis:

Dr. Jorge Bustamente González

Puebla, Pue. Junio 2015

A mi querida esposa.

Índice general

Introducción	iii
1. Resultados auxiliares	1
1.1. Fórmula de Taylor y momentos	2
1.2. Sobre módulos de continuidad	7
1.3. Núcleos clásicos	15
1.3.1. Núcleos de Jackson	18
1.3.2. Núcleo de Féjer	22
1.3.3. Núcleos de La Vallée Poussin	25
1.4. Sobre el operador \mathcal{M}_n	27
2. Combinaciones de Jackson con dos términos	31
2.1. Combinaciones a dos términos y clase $\mathcal{S}^{(\tau,\mu)}$.	31
2.2. Combinaciones con núcleos de Jackson	33
3. Operadores discretos	39
3.1. Algunas propiedades de $\mathcal{L}_{n,N}$	41
3.2. Estimados en $C_{2\pi}^3$	43
3.3. Estimados en $C_{2\pi}$	51
3.4. Aproximación de $\mathcal{L}_{n,N}$ para datos con error . .	53
3.5. Comparaciones	54
Conclusiones	59
Bibliografía.	61

Introducción

En esta tesis se presentan resultados relacionados con la reconstrucción de funciones. En diversos problemas de la modelación matemática se requiere obtener información sobre una función de la cual sólo se conocen, de forma aproximada, sus valores sobre ciertos puntos. En general, esto es un problema mal planteado (en el sentido de Hadamard) y se han propuesto diferentes métodos para su estudio. Por ejemplo, en [3] y [7] se construyó un método para reconstruir una función, suponiendo que se tiene información a priori sobre el comportamiento de su derivada.

Los operadores construidos en [3] son positivos. Se conoce que este tipo de operadores tienen limitaciones en cuanto a la velocidad de convergencia (problema de saturación). En particular, con una sucesión de operadores positivos no se puede sobrepasar la velocidad $\mathcal{O}(1/n)$ [8, p. 122-124]. Si se desea construir sucesiones con una velocidad de convergencia mayor, se pueden utilizar combinaciones lineales de operadores. Por ejemplo, Butzer realizó este tipo de construcción utilizando los polinomios de Bernstein [5]. Diferentes autores han aplicado este método para el análisis de otros procesos aproximativos (ver, por ejemplo, [10], [17] y [19]). De aquí surge la idea principal de nuestro trabajo: buscamos modificar los aproximantes estudiados en [3] para obtener nuevos operadores con una mayor velocidad de convergencia.

Planteamiento del problema

Para presentar el problema a estudiar, así como los detalles técnicos, necesitamos algunas notaciones que se utilizarán en este trabajo.

Mediante $C_{2\pi}$ denotamos el espacio de las funciones

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

continuas y 2π -periódicas. En $C_{2\pi}$ consideramos la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$. Esto es, para $f \in C_{2\pi}$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|.$$

En el resto del texto escribiremos simplemente $\|\cdot\|$ en lugar de $\|\cdot\|_\infty$.

El espacio de las funciones 2π -periódicas con derivada continua de orden r , está denotado por el símbolo $C_{2\pi}^r$.

Para $n \in \mathbb{N}_0$, \mathbb{T}_n denota al conjunto de los polinomios trigonométricos de grado no mayor que n .

En términos técnicos el problema de reconstrucción de funciones se formula como sigue:

Sea $f \in C_{2\pi}$ y supongamos que se conocen sus valores sobre un conjunto finito de puntos

$$0 \leq x_{n,1}, \dots, x_{n,n} < 2\pi. \quad (1)$$

Se desea utilizar esta información para construir un polinomio $T_n \in \mathbb{T}_n$ tal que el error

$$\|f - T_n\|$$

sea lo menor posible.

Uno pudiera utilizar un polinomio Q que interpole a la función en los puntos $x_{n,k}$. Pero el error $\|f - Q\|$ puede ser muy grande. En general, si uno fija una matriz triangular

$A = (x_{n,k})$, $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq k \leq n$, existe $g \in C_{2\pi}$, tal que si S_n es el polinomio trigonométrico de menor grado que interpola a g en los puntos $x_{n,k}$, $1 \leq k \leq n$, entonces $\|g - S_n\| \not\rightarrow 0$ (ver [12, Th. 1.4.1, p.53]). Luego, para nuestros propósitos, los polinomios de interpolación no son los adecuados.

En la Teoría de Aproximación clásica se conocen otras soluciones aproximativas. Por ejemplo, se puede utilizar el llamado *polinomio de la mejor aproximación*. Esto es, existe $T_n \in \mathbb{T}_n$ tal que

$$E_n(f) = \inf_{T \in \mathbb{T}_n} \|f - T\| = \|f - T_n\|.$$

En general, es muy difícil reconocer al polinomio de la mejor aproximación, por esto, en la práctica, se construyen otros polinomios que estén cercanos (en norma) al de la mejor aproximación. Además, si fijamos los puntos $x_{n,k}$ como lo hicimos anteriormente, no podemos asegurar que se puede encontrar el polinomio de la mejor aproximación cuando sólo se conocen los valores de la función en estos puntos.

En algunos de los problemas de reconstrucción aproximada de funciones periódicas que surgen de las aplicaciones, se busca la modelación de datos que están tomados en la superficie del cerebro humano. Por razones técnicas los datos no se pueden tomar a gusto del investigador, esto es, los puntos $x_{n,k}$ considerados en (1) no pueden ser elegidos de la mejor manera posible. En la práctica se supone que los puntos están igualmente espaciados, aunque en realidad esto no es así.

Nuestro estudio considera un caso particular del problema de reconstrucción de funciones.

Como en [3], consideramos que para cada entero positivo $N > 1$, se fijan puntos

$$x_{j,N} = \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (2)$$

y se supone que los valores $f(x_{j,N})$ de una función $f \in C_{2\pi}$ son conocidos.

Deseamos construir un polinomio trigonométrico $T_{n(N)}(f)$ de grado $n = n(N)$ de tal manera que:

1. $T_n(f)$ está únicamente determinado por los valores de f en los puntos $x_{j,N}$.
2. Se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|T_{n(N)}(f) - f\| = 0. \quad (3)$$

Se deben aclarar algunos detalles.

Observación 0.0.1. No podemos considerar valores de N muy grandes. De hecho, N es el número de mediciones y, en la práctica, es relativamente pequeño. La condición (3) se considera sólo como un auxiliar teórico para verificar que las soluciones propuestas son adecuadas.

Observación 0.0.2. En este trabajo estudiamos combinaciones lineales de operadores lineales y positivos para obtener una mayor velocidad de convergencia, sin incrementar significativamente el número de valores de las funciones utilizados en la construcción. De los estudios dedicados al análisis de combinaciones lineales de operadores se sabe que, mientras mayor sea el número de elementos en la combinación lineal, mayor será la velocidad de convergencia. Pero, en nuestro caso, aumentar el número de términos en la combinación lineal implicará trabajar con valores de N más grandes. Es por esta razón que sólo estudiamos combinaciones lineales con dos términos.

Observación 0.0.3. Para algunas elecciones de los coeficientes de las combinaciones lineales se pueden obtener nuevas construcciones con una mayor velocidad de convergencia. Es claro que si todos los coeficientes se toman positivos, el nuevo operador será positivo y, por lo tanto, no será adecuado para nuestros propósitos.

Observación 0.0.4. Necesitamos no sólo construir los operadores. Es preciso lograr buenos estimados de la velocidad de convergencia. Se conocen teoremas directos para combinaciones lineales de algunos operadores trigonométricos (ver [16], [17] y [19]), pero los resultados en estos trabajos no incluyen estimados de las constantes involucradas. De aquí que no podamos utilizar directamente los teoremas de los artículos aludidos anteriormente. Si consideramos las ideas de [3], las constantes específicas permiten utilizar el número N como un parámetro de regularización. Estamos obligados a verificar nuevos estimados, para poder construir algoritmos numéricos basados en nuestros resultados.

Observación 0.0.5. Los operadores estudiados en [17] y [19] son del tipo convolución. Como los operadores de convolución se definen mediante integrales, estos no son adecuados para nuestros propósitos. Como sólo conocemos un número finito de valores de las funciones, necesitaremos discretizar los operadores de forma que no se pierdan las propiedades aproximativas.

Según las observaciones anteriores formulamos los problemas siguientes:

Problema 1. *De los operadores conocidos para la aproximación mediante polinomios trigonométricos, determinar algunos que sean adecuados para obtener buenas aproximaciones mediante combinaciones lineales a dos términos.*

Problema 2. *Encontrar buenos estimados para las constantes que intervienen en los teoremas directos para combinaciones lineales a dos términos de los operadores seleccionados.*

Problema 3. *Buscar buenas discretizaciones de los operadores obtenidos al resolver el Problema 2.*

Antecedentes

En esta sección presentamos un breve resumen de algunos resultados conocidos sobre aproximación mediante combinaciones lineales de operadores polinomiales trigonométricos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $p_n \in \mathbb{T}_n$ un polinomio par y positivo tal que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(t) dt = 1.$$

En esta sección $\mathcal{P} := \{p_n\}$ denotará a una sucesión de polinomios, donde cada p_n tiene las propiedades anteriores.

Es claro que cada polinomio par p_n puede ser escrito en la forma

$$p_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_{k,n}(p_n) \cos(kx) \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

donde los números $\rho_{k,n}(p_n)$ son los coeficientes de Fourier de p_n . De acuerdo con [19], nos referiremos a estos coeficientes como los *factores de convergencia*.

Dada una sucesión $\mathcal{P} = \{p_n\}$, se definen los operadores $L_n : C_{2\pi} \rightarrow \mathbb{T}_n$ mediante la expresión

$$L_n(\mathcal{P}, f, x) = (f * p_n)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)p_n(t) dt, \quad (5)$$

para $f \in C_{2\pi}$.

El resultado siguiente es conocido.

Proposición 0.0.6. ([6, Proposition 1.3.10]) *La sucesión (5) define un proceso de aproximación. Esto es, para toda $f \in C_{2\pi}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n(\mathcal{P}, f)\| = 0,$$

si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{1,n}(p_n) = 1,$$

donde $\rho_{1,n}$ es el primer coeficiente de Fourier de p_n .

Dado $s \in \mathbb{N}$ y una sucesión $\mathcal{P} = \{p_n\}$, a cada familia de números $a_k \in \mathbb{N}$ fijos y $\gamma_k \in \mathbb{R}$ ($1 \leq k \leq s$), se le asocia una sucesión $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathcal{P}, s, a_k, \gamma_k) = \{q_n\}$, donde

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^s \gamma_k p_{na_k}(x). \quad (6)$$

Vogt estudió las propiedades aproximativas de estas sucesiones. Para presentar sus resultados necesitamos algunas notaciones.

Definición 0.0.7. Para $\tau \in \{1, 2\}$ y $\mu \in \mathbb{N}$, diremos que una sucesión de núcleos pares $\{p_n\}$,

$$p_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_{k,n} \cos(kx), \quad (7)$$

está en la clase $\mathcal{S}^{(\tau, \mu)}$, si existen constantes $c_{i,j}$, de forma que

$$1 - \rho_{k,n} = \sum_{j=1}^{\mu} (-1)^{j+1} \frac{\psi_j(k)}{n^{\tau j}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\tau(\mu+1/2)}}\right), \quad (8)$$

donde

$$\psi_j(k) = \sum_{i=1}^j c_{i,j} k^{2i}.$$

Definición 0.0.8. Para $f \in C_{2\pi}$ y $r \in \mathbb{N}$, el módulo de continuidad de orden r se define por

$$\omega_r(f, t) = \sup_{|h| \leq t} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} f(x + kh) \right|.$$

Teorema 0.0.9. ([19, Theorem 5.3]) *Fijemos $s \in \mathbb{N}$, $\tau \in \{1, 2\}$ y $\mu \in \mathbb{N}$, con $s \leq \mu$. Sea $\mathcal{P} = \{p_n\}$ tal que $\mathcal{P} \in \mathcal{S}^{(\tau, \mu)}$.*

Sean $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_s$ números naturales y sean γ_k ($1 \leq k \leq s$) la única solución del sistema de ecuaciones

$$\sum_{k=1}^s \gamma_k a_k^{-\tau j} = \delta_{j,0}, \quad (0 \leq j \leq s-1), \quad (9)$$

donde $\delta_{j,0}$ es la delta de Kronecker.

Si

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^s \gamma_k p_{na_k}(x) \quad (10)$$

entonces existe una constante C tal que, para toda $f \in C_{2\pi}$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f - (f * p_n)\| \leq C \omega_{2s} \left(f, \frac{1}{n^{\tau/2}} \right). \quad (11)$$

Nótese que los coeficientes γ_k de las combinaciones lineales (10) dependen de los parámetros libres a_i y τ (pero no de n , ver (9)). Estos parámetros se eligen según las propiedades asintóticas que se deseen de los operadores.

En general, buscar un buen estimado de la constante C en la ecuación (11) es un asunto complicado ya que, para un s arbitrario, las expresiones conocidas para las soluciones del sistema de ecuaciones (9) no son fáciles de manipular (ver [19, (4.2)]). Este hecho explica una de las razones por las cuales en este estudio nos limitamos a considerar combinaciones lineales a dos términos.

Si queremos seguir las ideas de Vogt, debemos elegir τ y $\mathcal{P} = \{p_n\}$ de manera conveniente. Para nosotros $s = 2$ y los polinomios p_n se tomarán como ciertos núcleos de Jackson. Nos hemos limitado a estos núcleos por dos razones:

1) Se conoce que los operadores de convolución asociados a ellos permiten obtener polinomios que están *cerca* de la mejor aproximación.

2) Para dichos núcleos Vogt dio condiciones para asegurar que la sucesión correspondiente de polinomios está en la clase $\mathcal{S}^{(\tau,\mu)}$.

Objetivos

Supongamos que se tiene una combinación lineal del tipo

$$q_n(x) = \gamma_1 p_{na_1}(x) + \gamma_2 p_{na_2}(x),$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ ($a_1 < a_2$), los valores γ_1 y γ_2 son soluciones del sistema (9) y los polinomios p_n son ciertos núcleos de Jackson.

Las preguntas que nos planteamos son las siguientes:

- 1.- ¿Cómo influye la elección de los números a_1 y a_2 en la constante C de la ecuación (11)?
- 2.- ¿Cuál es la mejor elección de a_1 y a_2 según el problema de la reconstrucción de funciones?
- 3.- ¿Cuál elección corresponde al menor grado posible?
- 4.- ¿Cómo se comportan los operadores discretos asociados?

Descripción de la tesis

En el Capítulo 1 se presentan resultados auxiliares, que son fundamentales para comprender el Capítulo 2. De los resultados teóricos conocidos se sabe que, para lograr buenos estimados de los operadores definidos mediante combinaciones lineales, es necesario acotar de forma precisa los momentos trigonométricos y algebraicos asociados a la construcción. El estudio de las desigualdades correspondientes se presenta en la Sección 1.1. Como es usual en Teoría de la Aproximación, la velocidad de convergencia de los operadores que se estudiarán se dará en términos de módulos de continuidad. En la Sección 1.2, se recuerdan las definiciones de los módulos así como algunas de las propiedades conocidas de estas funcionales. Además, se dan algunos estimados de funciones del tipo Steklov que se utilizarán más adelante. En la Sección 1.3 se presentan algunos estimados conocidos para núcleos pares, y en particular, mostramos algunos resultados para el caso de los núcleos de Jackson adaptándolos a nuestro caso de estudio. También se muestra que si se utilizan otros núcleos en la combinación lineal, es posible que no se obtengan nuevos operadores.

En el Capítulo 2 presentamos la construcción de una combinación lineal de dos términos usando el núcleo de Jackson y se da un estimado de su velocidad de convergencia para

funciones en $C_{2\pi}^2$ y $C_{2\pi}^3$. En particular, en el Teorema 2.1.2 se utilizan los resultados de Vogt para encontrar las condiciones específicas que necesitamos según nuestra elección de los núcleos. En el Teorema 2.2.2 se dan estimados precisos (para los operadores de convolución asociados), cuando estos se aplican a funciones suaves. Los estimados se dan en términos de las derivadas de la función estudiada. Este tipo de resultado tiene importancia práctica. De hecho, en las aplicaciones dadas en [3] se supone que se tiene información sobre el comportamiento de las derivadas de la función que se desea aproximar, y esto se utiliza como parámetro para el proceso de regularización. Este es un paso importante en nuestra investigación, aunque no da la solución definitiva ya que los operadores no son discretos. Finalmente, en este mismo teorema se da un estimado para la norma de los operadores de convolución. Creemos que el estimado es exacto, pero no tenemos la demostración.

En el Capítulo 3, se presenta la discretización de los operadores construidos en el Capítulo 2 (ver (3.7)). Los operadores discretos se denotan por $\mathcal{L}_{n,N}$. Se verifica que estos son operadores polinomiales (ver (3.3)) y, en el Teorema 3.1.1, se estiman sus normas. Después de varios resultados técnicos, en el Teorema 3.2.2 se dan los estimados para la aproximación de funciones suaves mediante los operadores $\mathcal{L}_{n,N}$. El Teorema 3.2.2 es el análogo al Teorema 2.2.2, pero para los operadores discretos. Otro resultado interesante, desde el punto de vista teórico, se da en Teorema 3.3.1. Allí se muestra un estimado del error cuando los operadores se aplican a funciones continuas, sin asumir propiedades relacionadas con sus derivadas. Al final del capítulo, comparamos nuestros resultados con los que se presentan en [3].

Los resultados principales de este trabajo se encuentran publicados en [4].

Todos los resultados que no llevan referencias a otros autores son parte de nuestros aportes a esta teoría.

Capítulo 1

Resultados auxiliares

Las condiciones dadas en la Proposición 0.0.6 garantizan la convergencia del proceso, pero sólo resuelven el problema cualitativo. Para el problema cuantitativo debemos considerar los momentos.

Para $p \in [1, \infty)$ se define el espacio $L_{2\pi}^p$ como el espacio de todas las funciones $f \in C_{2\pi}$ que cumplen

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Dada $K \in L_{2\pi}^1$ y $\sigma \in \mathbb{N}$, el momento trigonométrico de orden σ de K se define como

$$T(K, \sigma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^\sigma K(t) dt. \quad (1.1)$$

El momento algebraico de orden σ de K se define como

$$A(K, \sigma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t|^\sigma K(t) dt. \quad (1.2)$$

En [19] se dan relaciones entre ambos momentos y se vinculan con los factores de convergencia.

En el estudio de combinaciones de operadores lineales positivos, la velocidad de convergencia está relacionada con los

momentos. Con frecuencia, los momentos aparecen cuando se usan desarrollos de Taylor. Estos desarrollos se dan en términos de polinomios algebraicos y conducen al análisis de momentos algebraicos. Luego necesitamos pasar a momentos trigonométricos para poder utilizar las propiedades de ortogonalidad asociadas a los núcleos pares.

En la Sección 1.1 se utiliza la fórmula de Taylor para representar diferencias simétricas en términos de momentos, asumiendo que la función es de clase $C_{2\pi}^4$ (Proposición 1.1.1). El resto de la Sección se dedica a dar estimados de los términos que aparecen en la representación obtenida.

En la Sección 1.2 se estudian algunas propiedades relacionadas con los módulos presentados en la Definición 0.0.8.

En la Sección 1.3 se presentan algunos de los núcleos que se han utilizado para la aproximación mediante polinomios trigonométricos, con la finalidad de mostrar que la combinación lineal de algunos núcleos no da lugar a nuevos operadores.

1.1. Fórmula de Taylor y momentos

En el trabajo utilizamos varias veces las relaciones conocidas siguientes:

$$t \leq \frac{\pi}{2} \sin t, \quad \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad (1.3)$$

$$\left(\sin \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{1 - \cos s}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2(s) = \frac{1 + \cos 2s}{2}, \quad (1.4)$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

Más adelante necesitaremos representar las diferencias de segundo orden $f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)$ en términos de las derivadas de la función. Para ello utilizamos la fórmula de Taylor con resto:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)}{(n-1)!} dt, \quad (1.5)$$

válida siempre que $f \in C^n[a, b]$.

Proposición 1.1.1. Si $x, t \in \mathbb{R}$ y $f \in C^4(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} f(x+t) - 2f(x) + f(x-t) &= \frac{2}{3}f^{(2)}(x) \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}f^{(2)}(x) \left(t^2 - \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^2\right) \\ &\quad + \int_0^t \int_{-s}^s \left(\int_x^{x+u} (x+u-v)f^{(4)}(v) dv \right) du ds. \end{aligned}$$

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned} f(x+t) - 2f(x) + f(x-t) &= f(x+t) - f(x) + f(x-t) - f(x) \\ &= \int_0^t f'(x+s) ds - \int_0^t f'(x-s) ds \\ &= \int_0^t (f'(x+s) - f'(x-s)) ds \\ &= \int_0^t \int_{-s}^s f^{(2)}(x+u) du ds. \end{aligned}$$

Por otro lado, según la fórmula de Taylor, podemos escribir

$$f^{(2)}(x+u) = f^{(2)}(x) + f^{(3)}(x)u + \int_x^{x+u} (x+u-v)f^{(4)}(v)dv.$$

Sustituyendo esto en la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned} f(x+t) - 2f(x) + f(x-t) &= \int_0^t \int_{-s}^s \left(f^{(2)}(x) + f^{(3)}(x)u + \int_x^{x+u} (x+u-v)f^{(4)}(v)dv \right) du ds \\ &= \frac{2}{3}f^{(2)}(x)t^2 + \int_0^t \int_{-s}^s \left(\int_x^{x+u} (x+u-v)f^{(4)}(v)dv \right) du ds \\ &= \frac{2}{3}f^{(2)}(x) \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}f^{(2)}(x) \left(t^2 - \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^2\right) \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \int_{-s}^s \left(\int_x^{x+u} (x+u-v)f^{(4)}(v)dv \right) duds.$$

Lo cual prueba el resultado. \square

Hemos preferido escribir la fórmula incluyendo el término

$$\left(t^2 - \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^2 \right)$$

por dos razones. En primer lugar, como se mostrará en la Proposición 1.1.2, las integrales asociadas a dicho término se puede acotar con un momento algebraico de orden 4 y esto es más conveniente que considerar los momentos de orden 2. En segundo lugar, la integral asociada a la función

$$\left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^2$$

es justamente el momento trigonométrico de orden 2. Para completar el análisis damos estimados del último término en la Proposición 1.1.3.

Proposición 1.1.2. *Si $x \in [-\pi, \pi]$, entonces*

$$0 \leq x^2 - \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)^2 \leq \frac{x^4}{12} \quad (1.6)$$

y

$$\left| x - \sin(x) - \frac{x}{6} \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)^2 \right| \leq \frac{x^4}{72} \leq \frac{\pi^4}{72} \left(\sin \frac{x}{2} \right)^4.$$

Demostración. Como se trata de funciones pares, analizamos sólo el caso en que $x \in [0, \pi]$. Consideremos la función auxiliar

$$f_1(x) = 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}, \quad x \in [0, \pi].$$

Se tiene $f_1(0) = 0$ y $f_1'(x) = \sin x - x \leq 0$. De aquí se infiere que

$$0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}, \quad x \in [0, \pi]. \quad (1.7)$$

Ahora, sea

$$f_2(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad x \in (0, \pi]$$

y $f_2(0) = 1/6$. Según la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Luego $f_2 \in C[0, \pi]$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{x^3(1 - \cos x) - 3x^3 + 3x^2 \sin x}{x^6} \\ &= \frac{-2x + 3 \sin x - x \cos x}{x^4}. \end{aligned}$$

Si $f_2'(x_0) = 0$, entonces

$$\sin x_0 = \frac{x_0}{3}(2 + \cos x_0).$$

En tal caso, considerando (1.7), se tiene que

$$0 \leq f_2(x_0) = \frac{x_0 - \sin x_0}{x_0^3} = \frac{1 - \cos x_0}{3x_0^2} \leq \frac{1}{6}.$$

Como

$$f_2(\pi) = \frac{1}{\pi^2} < \frac{1}{6},$$

se concluye que

$$0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}, \quad x \in [0, \pi]. \quad (1.8)$$

Finalmente, definamos

$$f_3(x) = \frac{x^2 - (2 \sin(x/2))^2}{x^4}, \quad 0 < x \leq \pi$$

y $f_3(0) = 0$. Se puede verificar que $f_3 \in C[0, \pi]$. Además, para $x \in (0, \pi]$,

$$f_3'(x) = \frac{2(x^2 - x \sin x) - 4x^2 + 4(2 \sin(x/2))^2}{x^5}.$$

Luego si $f_3'(x_0) = 0$, entonces

$$(2 \sin(x_0/2))^2 = \frac{x_0^2 + x_0 \sin x_0}{2}.$$

En tal caso, considerando (1.8), obtenemos

$$0 \leq f_3(x_0) = \frac{2x_0^2 - x_0^2 - x_0 \sin x_0}{2x_0^4} = \frac{x_0 - \sin x_0}{2x_0^3} \leq \frac{1}{12}.$$

Como

$$0 \leq f_3(\pi) = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^4} \leq \frac{1}{12},$$

se concluye que $f_3(x) \leq 1/12$, para todo $x \in [0, \pi]$, lo cual prueba (1.6). \square

Proposición 1.1.3. Si $f \in C^4(\mathbb{R})$, $x \in [-\pi, \pi]$ y $t \in [0, \pi]$, entonces

$$\left| \int_0^t \int_{-s}^s \left(\int_x^{x+u} (x+u-v) f^{(4)}(v) dv \right) du ds \right| \leq \frac{t^4}{12} \|f^{(4)}\|.$$

Demostración. Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{-s}^s \left(\int_x^{x+u} (x+u-v) f^{(4)}(v) dv \right) du ds \right| \\ & \leq \int_0^t \int_{-s}^s \left| \int_x^{x+u} |x+u-v| |f^{(4)}(v)| dv \right| du ds \\ & \leq \|f^{(4)}\| \int_0^t \int_{-s}^s \left| \int_x^{x+u} |x+u-v| dv \right| du ds \\ & = \|f^{(4)}\| \int_0^t \int_{-s}^s \left| \int_x^{x+u} (x+u-v) dv \right| du ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \|f^{(4)}\| \int_0^t \int_{-s}^s u^2 du ds = \frac{1}{3} \|f^{(4)}\| \int_0^t s^3 ds \\
&= \frac{1}{12} \|f^{(4)}\| t^4.
\end{aligned}$$

□

1.2. Sobre módulos de continuidad

Se sabe que, para cada $n, r \in \mathbb{N}$, $t > 0$ y $f \in C_{2\pi}$,

$$\omega_r(f, nt) \leq n^r \omega_r(f, t), \quad (1.9)$$

$$\omega_r(f, t) \leq 2^{r-j} \omega_j(f, t), \quad j < r, \quad (1.10)$$

(ver [6, p. 76]).

Para $f \in C_{2\pi}$ y $h > 0$, utilizamos modificaciones de las medias de Steklov de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
f_h(x) = \frac{1}{3h^3} \int_0^h \int_0^h \int_0^h &\left(f\left(x - \sum_{i=1}^3 s_i\right) + 3f\left(x + \sum_{i=1}^3 s_i\right) \right. \\
&\left. - f\left(x + 2 \sum_{i=1}^3 s_i\right) \right) ds_1 ds_2 ds_3. \quad (1.11)
\end{aligned}$$

El siguiente hecho será de utilidad para demostrar la Proposición 1.2.1.

Si $g \in C_{2\pi}$, $h > 0$ y

$$g_h(x) = \int_0^h g(x+s) ds, \quad x \in \mathbb{R},$$

entonces $g_h \in C_{2\pi}^1$ y

$$g'_h(x) = g(x+h) - g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

Proposición 1.2.1. Si $f \in C_{2\pi}$, $h > 0$ y f_h está definida por (1.11), entonces $f_h \in C_{2\pi}^3$,

$$\|f_h - f\| \leq 9\omega_3(f, h), \quad y$$

$$\|f_h^{(j)}\| \leq \frac{5}{3h^j} \omega_j(f, h), \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Demostración. Utilizando (1.12) estimamos la primera derivada de f_h , de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} |f'_h(x)| &= \frac{1}{3h^3} \left| \int_0^h \int_0^h \left(-f\left(x - h - \sum_{i=2}^3 s_i\right) \right. \right. \\ &+ f\left(x - \sum_{i=2}^3 s_i\right) + 3f\left(x + h + \sum_{i=2}^3 s_i\right) - 3f\left(x + \sum_{i=2}^3 s_i\right) \\ &\left. \left. - \frac{1}{2}f\left(x + 2h + 2\sum_{i=2}^3 s_i\right) + \frac{1}{2}f\left(x + 2\sum_{i=2}^3 s_i\right) \right) ds_2 ds_3 \right| \\ &\leq \frac{4}{3h} \omega_1(f, h) + \frac{1}{6h} \omega_1(f, 2h) \leq \frac{5}{3h} \omega_1(f, h). \end{aligned}$$

Ahora estimamos la segunda derivada

$$\begin{aligned} |f_h^{(2)}(x)| &= \frac{1}{3h^3} \left| \int_0^h \left(f\left(x - 2h - s_3\right) - f\left(x - h - s_3\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - f\left(x - h - s_3\right) + f\left(x - s_3\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + 3f\left(x + 2h + s_3\right) - 3f\left(x + h + s_3\right) \right. \\ &\quad \left. - 3f\left(x + h + s_3\right) + 3f\left(x + s_3\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. -\frac{1}{4}f(x+4h+2s_3) + \frac{1}{4}f(x+2h+2s_3) \right. \\
& \left. + \frac{1}{4}f(x+2h+s_3) - \frac{1}{4}f(x+2s_3) \right) ds_3 \Big| \\
= & \frac{1}{3h^3} \left| \int_0^h \left(f(x-2h-s_3) - 2f(x-h-s_3) + f(x-s_3) \right. \right. \\
& \left. \left. + 3f(x+2h+s_3) - 6f(x+h+s_3) + 3f(x+s_3) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{4}f(x+4h+2s_3) + \frac{2}{4}f(x+2h+2s_3) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{4}f(x+2s_3) \right) ds_3 \right| \\
\leq & \frac{4}{3h^2}\omega_2(f, h) + \frac{1}{12h^2}\omega_2(f, 2h) \leq \frac{5}{3h^2}\omega_2(f, h).
\end{aligned}$$

Para la tercera derivada, se tiene

$$\begin{aligned}
|f_h^{(3)}(x)| = & \frac{1}{3h^3} \left| -f(x-3h) + f(x-2h) \right. \\
& \left. - 2f(x-h) - f(x-h) + f(x) \right. \\
& \left. + 3f(x+3h) - 3f(x+2h) - 6f(x+2h) \right. \\
& \left. + 6f(x+h) + 3f(x+h) - 3f(x) - \frac{1}{8}f(x+6h) \right. \\
& \left. + \frac{1}{8}f(x+4h) + \frac{2}{8}f(x+4h) - \frac{2}{8}f(x+2h) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{1}{8}f(x+2h) + \frac{1}{8}f(x) \right| \\
&= \frac{1}{3h^3} \left| -f(x-3h) + 3f(x-2h) + f(x) \right. \\
&\quad \left. + 3f(x+3h) - 9f(x+2h) + 9f(x+h) - 3f(x) \right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{8}f(x+6h) + \frac{3}{8}f(x+4h) - \frac{3}{8}f(x+2h) + \frac{1}{8}f(x) \right| \\
&\leq \frac{8}{6h^3}\omega_3(f, h) + \frac{1}{24h^3}\omega_3(f, 2h) \leq \frac{5}{3h^3}\omega_3(f, h).
\end{aligned}$$

□

A continuación enunciamos una proposición que será de utilidad para obtener el estimado del Teorema 2.2.3.

Para $f \in C_{2\pi}$ y $h > 0$ definimos la siguiente media de Steklov

$$\begin{aligned}
& F_h(x) \\
&= \frac{1}{6h^4} \int_0^h \int_0^h \int_0^h \int_0^h \left(4f\left(x + \sum_{i=1}^4 s_i\right) + 4f\left(x - \sum_{i=1}^4 s_i\right) \right. \\
&\quad \left. - f\left(x + 2\sum_{i=1}^4 s_i\right) - f\left(x - 2\sum_{i=1}^4 s_i\right) \right) ds_1 ds_2 ds_3 ds_4.
\end{aligned}$$

Proposición 1.2.2. Si $f \in C_{2\pi}$, $h > 0$ y $n \in \mathbb{N}$

entonces $F_h(x) \in C_{2\pi}^4$,

$$\|F_h - f\| \leq \frac{1}{6}\omega_4(f, 4h) \quad y \quad \|F_h^{(j)}\| \leq \frac{5}{3h^j}\omega_j(f, h),$$

para $1 \leq j \leq 4$.

Demostraci3n. Sea $\varphi(s) = \Delta_{s_1+s_2+s_3+s_4}^4 f\left(x - 2 \sum_{i=1}^4 s_i\right)$.

Notemos que

$$\begin{aligned} |F_h(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{6h^4} \int_0^h \int_0^h \int_0^h \int_0^h \varphi(s) ds_1 ds_2 ds_3 ds_4 \right| \\ &\leq \frac{1}{6} \omega_4(f, 4h). \end{aligned}$$

Para las dem3s desigualdades es necesario calcular las derivadas de F_h , lo cual haremos utilizando (1.12). Iniciemos calculando la primera derivada

$$\begin{aligned} &|F_h'(x)| \\ &= \left| \frac{1}{6h^4} \int_0^h \int_0^h \int_0^h \left(4f\left(x + h + \sum_{i=2}^4 s_i\right) - 4f\left(x + \sum_{i=2}^4 s_i\right) \right. \right. \\ &- 4f\left(x - h - \sum_{i=2}^4 s_i\right) + 4f\left(x - \sum_{i=2}^4 s_i\right) - \frac{1}{2}f\left(x + 2h + 2 \sum_{i=2}^4 s_i\right) \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}f\left(x + 2 \sum_{i=2}^4 s_i\right) + \frac{1}{2}f\left(x - 2h - 2 \sum_{i=2}^4 s_i\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2}f\left(x - 2 \sum_{i=2}^4 s_i\right) \right) ds_2 ds_3 ds_4 \right| \\ &\leq \frac{8}{6h} \omega_1(f, h) + \frac{1}{6h} \omega_1(f, 2h) \leq \frac{5}{3h} \omega_1(f, h). \end{aligned}$$

Ahora calculamos la segunda derivada

$$\begin{aligned} &|F_h^{(2)}(x)| = \left| \frac{1}{6h^4} \int_0^h \int_0^h \left(4f\left(x + 2h + \sum_{i=3}^4 s_i\right) \right. \right. \\ &- 4f\left(x + h + \sum_{i=3}^4 s_i\right) - 4f\left(x + h + \sum_{i=3}^4 s_i\right) + 4f\left(x + \sum_{i=3}^4 s_i\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4f\left(x - 2h - \sum_{i=3}^4 s_i\right) - 4f\left(x - h - \sum_{i=3}^4 s_i\right) \\
& - 4f\left(x - h - \sum_{i=3}^4 s_i\right) + 4f\left(x - \sum_{i=3}^4 s_i\right) \\
& - \frac{1}{4}f\left(x + 4h + 2\sum_{i=3}^4 s_i\right) + \frac{1}{4}f\left(x + 2h + 2\sum_{i=3}^4 s_i\right) \\
& + \frac{1}{4}f\left(x + 2h + 2\sum_{i=3}^4 s_i\right) - \frac{1}{4}f\left(x + 2\sum_{i=3}^4 s_i\right) \\
& - \frac{1}{4}f\left(x - 4h - 2\sum_{i=3}^4 s_i\right) + \frac{1}{4}f\left(x - 2h - 2\sum_{i=3}^4 s_i\right) \\
& + \frac{1}{4}f\left(x - 2h - 2\sum_{i=3}^4 s_i\right) - \frac{1}{4}f\left(x - 2\sum_{i=3}^4 s_i\right) \Bigg) ds_3 ds_4 \Bigg| \\
= & \left| \frac{1}{6h^4} \int_0^h \int_0^h \left(4f\left(x + 2h + \sum_{i=3}^4 s_i\right) - 8f\left(x + h + \sum_{i=3}^4 s_i\right) \right. \right. \\
& + 4f\left(x + \sum_{i=3}^4 s_i\right) + 4f\left(x - 2h - \sum_{i=3}^4 s_i\right) - 8f\left(x - h - \sum_{i=3}^4 s_i\right) \\
& + 4f\left(x - \sum_{i=3}^4 s_i\right) - \frac{1}{4}f\left(x + 4h + 2\sum_{i=3}^4 s_i\right) + \frac{2}{4}f\left(x + 2h + 2\sum_{i=3}^4 s_i\right) \\
& - \frac{1}{4}f\left(x + 2\sum_{i=3}^4 s_i\right) - \frac{1}{4}f\left(x - 4h - 2\sum_{i=3}^4 s_i\right) \\
& \left. + \frac{2}{4}f\left(x - 2h - 2\sum_{i=3}^4 s_i\right) - \frac{1}{4}f\left(x - 2\sum_{i=3}^4 s_i\right) \right) ds_3 ds_4 \Bigg| \\
& \leq \frac{8}{6h^2}\omega_2(f, h) + \frac{1}{12h^2}\omega_2(f, 2h) \\
& \leq \frac{4}{3h^2}\omega_2(f, h) + \frac{1}{3h^2}\omega_2(f, h) = \frac{5}{3h^2}\omega_2(f, h).
\end{aligned}$$

Para la tercera derivada obtenemos

$$\begin{aligned}
|F_h^{(3)}(x)| &= \left| \frac{1}{6h^4} \int_0^h \left(4f(x+3h+s_4) - 4f(x+2h+s_4) \right. \right. \\
&\quad - 8f(x+2h+s_4) + 8f(x+h+s_4) + 4f(x+h+s_4) \\
&\quad - 4f(x+s_4) - 4f(x-3h-s_4) + 4f(x-2h-s_4) \\
&\quad + 8f(x-2h-s_4) - 8f(x-h-s_4) - 4f(x-h-s_4) + 4f(x-s_4) \\
&\quad - \frac{1}{8}f(x+6h+2s_4) + \frac{1}{8}f(x+4h+2s_4) + \frac{2}{8}f(x+4h+2s_4) \\
&\quad - \frac{2}{8}f(x+2h+2s_4) - \frac{1}{8}f(x+2h+2s_4) + \frac{1}{8}f(x+2s_4) \\
&\quad + \frac{1}{8}f(x-6h-2s_4) - \frac{1}{8}f(x-4h-2s_4) \\
&\quad - \frac{2}{8}f(x-4h-2s_4) + \frac{2}{8}f(x-2h-2s_4) \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{8}f(x-2h-2s_4) - \frac{1}{8}f(x-2s_4) \right) ds_4 \right| \\
&= \left| \frac{1}{6h^4} \int_0^h \left(4f(x+3h+s_4) - 12f(x+2h+s_4) \right. \right. \\
&\quad + 12f(x+h+s_4) - 4f(x+s_4) - 4f(x-3h-s_4) \\
&\quad + 12f(x-2h-s_4) - 12f(x-h-s_4) + 4f(x-s_4) \\
&\quad - \frac{1}{8}f(x+6h+2s_4) + \frac{3}{8}f(x+4h+2s_4) - \frac{3}{8}f(x+2h+2s_4) \\
&\quad + \frac{1}{8}f(x+2s_4) + \frac{1}{8}f(x-6h-2s_4) - \frac{3}{8}f(x-4h-2s_4) \\
&\quad \left. \left. + \frac{3}{8}f(x-2h-2s_4) - \frac{1}{8}f(x-2s_4) \right) ds_4 \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{8}{6h^3}\omega_3(f, h) + \frac{1}{24h^3}\omega_3(f, 2h) \\
&\leq \frac{4}{3h^3}\omega_3(f, h) + \frac{1}{3h^3}\omega_3(f, h) = \frac{5}{3h^3}\omega_3(f, h).
\end{aligned}$$

por último, calculamos la cuarta derivada

$$\begin{aligned}
&| F_h^{(4)}(x) | \\
&= \left| \frac{1}{6h^4} \left(4f(x+4h) - 4f(x+3h) - 12f(x+2h) \right. \right. \\
&+ 12f(x+h) - 4f(x) + 4f(x-4h) - 4f(x-3h) - 12f(x-2h) \\
&+ 12f(x-h) - 4f(x) + 4f(x-8h) + \frac{1}{16}f(x+6h) + \frac{3}{16}f(x+6h) \\
&- \frac{3}{16}f(x+4h) - \frac{3}{16}f(x+4h) + \frac{3}{16}f(x+2h) + \frac{1}{16}f(x+2h) \\
&- \frac{1}{16}f(x) - \frac{1}{16}f(x-8h) + \frac{1}{16}f(x-6h) + \frac{3}{16}f(x-6h) \\
&- \frac{3}{16}f(x-4h) - \frac{3}{16}f(x-4h) + \frac{3}{16}f(x-2h) \\
&\left. \left. + \frac{1}{16}f(x-2h) - \frac{1}{16}f(x) \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{6h^4} \left(4f(x+4h) - 16f(x+3h) + 24f(x+2h) \right. \right. \\
&- 16f(x+h) + 4f(x) + 4f(x-4h) - 16f(x-3h) \\
&+ 24f(x-2h) - 16f(x-h) + 4f(x) - \frac{1}{16}f(x+8h) \\
&\left. \left. + \frac{4}{16}f(x+6h) - \frac{6}{16}f(x+4h) + \frac{4}{16}f(x+2h) - \frac{1}{16}f(x) \right) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{1}{16}f(x-8h) + \frac{4}{16}f(x-6h) - \frac{6}{16}f(x-4h) \right. \\
& \quad \left. + \frac{4}{16}f(x-2h) - \frac{1}{16}f(x) \right| \\
& \leq \frac{8}{6h^4}\omega_4(f, h) + \frac{2}{96h^4}\omega_4(f, 2h) \\
& \leq \frac{4}{3h^4}\omega_4(f, h) + \frac{1}{3h^4}\omega_4(f, h) = \frac{5}{3h^4}\omega_4(f, h).
\end{aligned}$$

□

1.3. Núcleos clásicos

En Teoría de Aproximación se utilizan muchos núcleos pares, algunas de las ideas y propiedades principales que se emplean en aproximación con estos núcleos, se encuentran enlistadas en las proposiciones siguientes. Por conveniencia del lector se incluyen las demostraciones, ya que son sencillas.

Proposición 1.3.1. *Si $K \in C_{2\pi}$ es una función par y*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t) dt = 1,$$

para $f \in L_{2\pi}^1$ se tiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t) dt - f(x) \\
& = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) - 2f(x) + f(x-t))K(t) dt.
\end{aligned}$$

Demostración. Basta observar que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t) dt \\
& = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x-t)K(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x-t)K(t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+t)K(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x-t)K(t)dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t))K(t)dt.
\end{aligned}$$

□

Para el caso de núcleos pares, se tiene una expresión simple para el primer momento trigonométrico.

Proposición 1.3.2. *Si un polinomio trigonométrico par P_n tiene la presentación*

$$P_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_{k,n} \cos(kt), \quad t \in \mathbb{R},$$

entonces

$$T(P_n, 2) = 2(1 - \rho_{1,n}),$$

donde $T(P_n, 2)$ es el momento trigonométrico de orden 2 (ver (1.1)).

Demostración. Considerando las relaciones de ortogonalidad y (1.4) obtenemos

$$\begin{aligned}
T(P_n, 2) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^\pi (1 - \cos t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_{k,n} \cos(kt) \right) dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \left(\frac{1}{2} - \rho_{1,n} \cos^2(t) \right) dt \\
&= 2 - \rho_{1,n} \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\
&= 2(1 - \rho_{1,n}).
\end{aligned}$$

□

En la Proposición siguiente, hemos incluido la desigualdad (1.20) para ilustrar las condiciones que necesitaremos más adelante. Además, se hace evidente que, para sucesiones cualesquiera de núcleos positivos no podemos obtener un estimado del orden $\mathcal{O}(n^{-4})$.

Para el momento algebraico de orden 4 de un polinomio par y positivo P_n , en [6, p. 69] se dio el estimado

$$A(P_n, 4) \leq \pi^4 \left(1 - \rho_{1,n} - \frac{1}{4}(1 - \rho_{2,n}) \right).$$

En la Proposición 1.3.3 damos un estimado ligeramente mejor.

Proposición 1.3.3. *Si*

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \rho_{k,n} \cos(kx) \quad (1.13)$$

es un polinomio positivo, entonces

$$A(P_n, 4) \leq \frac{\pi^4}{2} \left(1 - \rho_{1,n} - \frac{1}{4}(1 - \rho_{2,n}) \right).$$

Demostración. Considerando la desigualdad (se obtiene de (1.3))

$$\frac{t}{\pi} \leq \sin \frac{t}{2}, \quad t \in [0, \pi],$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t^4 P_n(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\pi \frac{2t}{\pi 2} \right)^4 P_n(t) dt \\ &\leq \pi^3 \int_0^\pi \left(\sin \frac{t}{2} \right)^4 P_n(t) dt \\ &= \pi^3 \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos t}{2} \right)^2 P_n(t) dt \\ &= \frac{\pi^3}{4} \int_0^\pi (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) P_n(t) dt \\ &= \frac{\pi^3}{4} \int_0^\pi \left(1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) P_n(t) dt \\ &= \frac{\pi^4}{8\pi} \int_{-\pi}^\pi \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{\cos 2t}{2} \right) P_n(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^4}{8} \left(\frac{3}{2} - 2\rho_{1,n} + \frac{\rho_{2,n}}{2} \right) \\
&= \frac{\pi^4}{8} \left(2(1 - \rho_{1,n}) - \frac{1}{2}(1 - \rho_{2,n}) \right).
\end{aligned}$$

□

1.3.1. Núcleos de Jackson

Recordemos que para $n, p \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R} \setminus k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), el núcleo de Jackson se define como

$$J_{n,p}(x) = \frac{1}{\lambda_{0,n}(p)} \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^{2p}, \quad (1.14)$$

donde $\lambda_{0,n}(p)$ se toma de la condición

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_{n,p}(t) dt = 1.$$

En el Teorema siguiente presentamos un resumen de algunos de los resultados que Matsuoka muestra en [13, Proposition B].

Teorema 1.3.4. (i) *Para cada entero positivo p*

$$\frac{(2p-1)!}{2} \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2p} = \frac{1}{2} r_{0,n}(p) + \sum_{k=1}^{p(n-1)} r_{k,n}(p) \cos(kt)$$

donde

$$r_{k,n}(p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{p+i+1} \binom{2p}{p-i} \prod_{j=1}^{2q+1} (k - in + q - j),$$

con $0 \leq k \leq n + p - 1$.

(ii) *Se tiene que*

$$r_{0,n}(p) \rho_{k,n} = r_{k,n}(p),$$

$$1 - \rho_{1,n}(p) = \frac{r_{0,n}(p) - r_{1,n}(p)}{r_{0,n}(p)},$$

y

$$1 - \rho_{2,n}(p) = \frac{r_{0,n}(p) - r_{2,n}(p)}{r_{0,n}(p)}.$$

Estamos interesados en el caso particular $p = 2$. Por ello, en lo que sigue, pondremos

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{3}{2n(2n^2 + 1)} \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^4 & (1.15) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{2n-2} \rho_{k,n} \cos(kx), \end{aligned}$$

donde

$$\rho_{1,n} = 1 - \frac{3}{2n^2 + 1}$$

(ver [6, p. 60] o [14, p. 80 - 81]).

Para el cálculo de los coeficientes $\rho_{k,n}$, Matsuoka presenta sus resultados de forma general, pero nosotros los necesitamos de una manera más concreta, como en la proposición siguiente.

Proposición 1.3.5. *Si $\rho_{1,n}(2)$ y $\rho_{2,n}(2)$ son los primeros coeficientes del núcleo de Jackson J_n en la representación (1.15), se tiene que*

$$1 - \rho_{1,n}(2) = \frac{3}{1 + 2n^2} = \frac{3}{2n^2} - \frac{3}{2n^2(1 + 2n^2)}$$

y

$$1 - \rho_{2,n}(2) = \frac{12n - 9}{n(1 + 2n^2)} = \frac{6}{n^2} - \frac{9n + 6}{n^2(1 + 2n^2)}.$$

Demostración. Sabemos que

$$\begin{aligned} r_{0,n}(2) &= 4(1 - n)(-n)(-1 - n) - (1 - 2n)(-2n)(-1 - 2n) \\ &= n(4(1 - n^2) - 2(1 - 4n^2)) = 2n(1 + 2n^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{1,n}(2) &= 4(2-n)(1-n)(-n) - 2(1-n)(1-2n)(-2n) \\
&= 4n(n-1)\left(2-n-1+2n\right) = 4n(n-1)(1+n)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
r_{2,n}(2) &= 4(3-n)(2-n)(1-n) - 2(3-2n)(1-n)(1-2n) \\
&= 2(1-n)\left(12-10n+2n^2-3+8n-4n^2\right) \\
&= 2(1-n)\left(9-2n-2n^2\right).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
1 - \rho_{1,n}(2) &= \frac{2n(1+2n^2) - 4n(n-1)(1+n)}{2n(1+2n^2)} \\
&= \frac{1+2n^2-2(n^2-1)}{1+2n^2} = \frac{3}{1+2n^2} \\
&= \frac{3}{2n^2} + \frac{3}{1+2n^2} - \frac{3}{2n^2} = \frac{3}{2n^2} - \frac{3}{2n^2(1+2n^2)} \\
&= \frac{3}{2n^2} - \frac{3}{4n^4} - \frac{3}{2n^2(1+2n^2)} + \frac{3}{4n^4} \\
&= \frac{3}{2n^2} - \frac{3}{4n^4} + \frac{3}{4n^4(1+2n^2)}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
1 - \rho_{2,n}(2) &= \frac{2n(1+2n^2) + 2(n-1)(9-2n-2n^2)}{2n(1+2n^2)} \\
&= \frac{n(10-2n) - (9-2n-2n^2)}{n(1+2n^2)} \\
&= \frac{6}{n^2} + \frac{12n-9}{n(1+2n^2)} - \frac{6}{n^2} \\
&= \frac{6}{n^2} + \frac{12n^2-9n-6-12n^2}{n^2(1+2n^2)} \\
&= \frac{6}{n^2} - \frac{9n+6}{n^2(1+2n^2)}.
\end{aligned}$$

□

En la Proposición 1.3.6, las igualdades (1.18) y (1.19) se pueden obtener de los resultados de Matsuoka en [13] (la identidad (1.18) está implícitamente contenida en [6, p. 60]). Cabe mencionar que los cálculos de Matsuoka son complicados. Aquí presentamos una demostración más simple de (1.19) basada en las identidades trigonométricas

$$2\left(\sin \frac{t}{2}\right)^2 = 1 - \cos(t) \quad \text{y} \quad 2\cos^2 t = 1 + \cos(2t). \quad (1.16)$$

Proposición 1.3.6. *Si $n \in \mathbb{N}$ y J_n es el núcleo de Jackson (1.15), entonces*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt = 1, \quad (1.17)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^2 J_n(t) dt = \frac{3}{1 + 2n^2} \quad (1.18)$$

y

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^4 J_n(t) dt = \frac{18}{n(1 + 2n^2)}. \quad (1.19)$$

Demostración. Se sabe (ver [14, p. 81] o [6, p. 60]) que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4 dt = \frac{2n(2n^2 + 1)}{3}.$$

Usando, (1.16), se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^4 J_n(t) dt \\ &= \frac{3}{2n(2n^2 + 1)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^4 \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4 dt \\ &= \frac{3}{2n(2n^2 + 1)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2 \sin(nt/2)\right)^4 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6}{n(2n^2 + 1)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(nt))^2 dt \\
&= \frac{6}{n(2n^2 + 1)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - 2\cos(nt) + \frac{1 + \cos(2nt)}{2}\right) dt \\
&= \frac{18}{n(2n^2 + 1)}.
\end{aligned}$$

□

Para el caso particular en que $P_n(t) = J_{n,2}$ (núcleo de Jackson) se tiene que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^4 P_n(t) dt \leq \frac{\pi^4}{16} \frac{9}{n(1 + 2n^2)}. \quad (1.20)$$

Para el caso de los núcleos de Jackson utilizamos la Proposición 1.3.5 para obtener la igualdad

$$\begin{aligned}
1 - \rho_{1,n}(2) - \frac{1}{4}(1 - \rho_{2,n}(2)) &= \frac{3}{1 + 2n^2} - \frac{12n - 9}{4n(1 + 2n^2)} \\
&= \frac{1}{1 + 2n^2} \left(3 - \frac{12n - 9}{4n}\right) \\
&= \frac{1}{1 + 2n^2} \left(\frac{12n - 12n + 9}{4n}\right) \\
&= \frac{9}{4n(1 + 2n^2)}.
\end{aligned}$$

1.3.2. Núcleo de Féjer

El núcleo de Féjer-Korovkin se define como

$$K_n(x) = \frac{2 \sin^2(\pi/(n+2))}{n+2} \left(\frac{\cos((n+2)x/2)}{\cos(\pi/(n+2)) - \cos x} \right)^2,$$

si $x \neq \pm\pi/(n+2) + 2j\pi$ y

$$K_n(x) = \frac{n+2}{2}, \quad \text{si } x = \pm \frac{\pi}{(n+2)} + 2j\pi, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Se conoce que ([6, p. 79 - 80]) K_n se puede escribir en la forma

$$K_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \rho_{k,n} \cos(kx)$$

donde

$$\rho_{k,n} = \frac{1}{2(n+2) \sin(\pi/(n+2))} \\ \times \left((n-k+3) \sin \frac{k+1}{n+2} \pi - (n-k+1) \sin \frac{k-1}{n+2} \pi \right).$$

El núcleo de La Vallée Poussin se define como

$$V_n(x) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^{2n}.$$

Se puede verificar que este núcleo se puede escribir en la forma

$$V_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} \cos(kx),$$

(ver [6, p. 112]).

Para un número $n \in \mathbb{N}$ fijo, el *Núcleo de Féjer de orden n* es la función 2π -periódica definida por

$$F_n(t) = \frac{1}{2n} \frac{(\sin nt/2)^2}{(\sin t/2)^2} \quad t \in (0, 2\pi) \quad (1.21)$$

y $F_n(0) = n$.

Para un número $n \in \mathbb{N}$ fijo, se define el núcleo de Dirichlet por

$$D_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx \\ = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin t/2} \quad t \neq 2j\pi, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (1.22)$$

y $D_n(2j\pi) = 2n + 1$. Además definimos $D_0(t) = 1$.

Proposición 1.3.7. *Fijemos $n \in \mathbb{N}$.*

$$F_n(t) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos(kt). \quad (1.23)$$

Demostración. Considerando la identidad

$$2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b) \quad (1.24)$$

y (1.22), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) &= \frac{1}{n \sin(t/2)} \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)t/2) \\ &= \frac{1}{n \sin^2(t/2)} \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)t/2) \sin(t/2) \\ &= \frac{1}{2n \sin^2(t/2)} \sum_{k=0}^{n-1} [\cos(kt) - \cos(k+1)t] \\ &= \frac{1}{2n \sin^2(t/2)} [1 - \cos(nt)] \\ &= \frac{1}{2n \sin^2(t/2)} 2 \sin^2(nt/2) \\ &= F_n(x). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^k \cos(jt)\right) \\ &= 1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos(kt). \end{aligned}$$

□

1.3.3. Núcleos de La Vallée Poussin

Para $n > m$, se define el núcleo de La Vallée Poussin de orden n por

$$V_{m,n}(f, x) = \frac{1}{n-m} \sum_{k=m}^{n-1} D_k(f, x), \quad (1.25)$$

donde D_k es el núcleo de Dirichlet.

Para $f \in L^1_{2\pi}$, el operador de La Vallée Poussin se define como

$$\mathcal{V}_{m,n}(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) V_{m,n}(t) dt.$$

El resultado siguiente es conocido, y hemos incluido la demostración para beneficio del lector.

Proposición 1.3.8. *Para $n > m$ se tiene*

$$\begin{aligned} V_{m,n}(t) &= \frac{1}{n-m} \frac{\cos(mt) - \cos(nt)}{2 \sin^2(t/2)} \\ &= D_m(t) + \frac{n}{n-m} \sum_{k=m+1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos kt. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Demostración. Si consideramos que

$$D_{m+k}(t) = D_m(t) + \cos(m+1)t + \dots + \cos(m+k)t,$$

entonces

$$\begin{aligned} V_{m,n}(t) &= D_m(t) + \frac{1}{n-m} \sum_{k=1}^{n-m-1} \sum_{j=1}^k \cos((m+j)t) \\ &= D_m(t) + \frac{1}{n-m} \sum_{k=1}^{n-m-1} (n-m-k) \cos((m+k)t) \\ &= D_m(t) + \frac{1}{n-m} \sum_{k=m+1}^{n-1} (n-k) \cos(kt). \end{aligned}$$

Podemos escribir $V_{m,n}$ en términos del núcleo de Féjer. Puesto que

$$\begin{aligned}
 V_{m,n}(x) &= \frac{1}{n-m} \left(\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) - \sum_{k=0}^{m-1} D_k(fx) \right) \\
 &= \frac{1}{n-m} (nF_n(t) - mF_{m-1}(t)) \\
 &= \frac{1}{n-m} \frac{\sin^2(nt/2) - \sin^2(mt/2)}{\sin^2(t/2)} \\
 &= \frac{1}{n-m} \frac{\cos(mt) - \cos(nt)}{2 \sin^2(t/2)}.
 \end{aligned}$$

□

El núcleo de Jackson-de La Vallée Poussin se define como

$$N_n(x) = \frac{2 + \cos x}{2n^3} \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^4.$$

Se verifica que este es un núcleo par trigonométrico positivo de grado $2n-1$. Se cumple también que ([6, p. 131 y p. 205])

$$N_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{2n-1} \rho_{k,n} \cos(kx),$$

donde

$$\rho_{k,n} = 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{k}{n} \right)^2 + \frac{4}{4} \left(\frac{k}{n} \right)^3, \quad 1 \leq k \leq n-1$$

y

$$\rho_{k,n} = \frac{1}{4} \left(2 - \frac{k}{n} \right)^3, \quad n \leq k \leq 2n-1$$

1.4. Sobre el operador \mathcal{M}_n

En esta sección P_n denotará una colección fija de núcleos pares positivos, γ_1 y γ_2 serán números reales, mientras que a_1 y a_2 denotarán números naturales tales que $1 \leq a_1 < a_2$.

Notemos que el sistema

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1 \quad (1.27)$$

$$\frac{\gamma_1}{a_1^2} + \frac{\gamma_2}{a_2^2} = 0. \quad (1.28)$$

tiene las soluciones únicas

$$\gamma_1 = -\frac{a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \quad \text{y} \quad \gamma_2 = \frac{a_2^2}{a_2^2 - a_1^2}.$$

En particular

$$\frac{\gamma_1}{a_1} + \frac{\gamma_2}{a_2} = \frac{1}{a_1 + a_2}.$$

Fijemos una colección $\{P_n\}$ de núcleos pares positivos:

$$P_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m(n)} \rho_{k,n} \cos(kx), \quad (1.29)$$

donde $m(\cdot)$ denota una aplicación creciente $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

A cada núcleo P_n se le asocia el operador lineal positivo

$$L_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) P_n(t) dt. \quad (1.30)$$

Dado el núcleo P_n y números a_1, a_2, γ_1 y γ_2 que satisfacen las ecuaciones (1.27) y (1.28), definimos un operador mediante la expresión

$$\mathcal{M}_n(f, x) = \gamma_1 L_{na_1}(f, x) + \gamma_2 L_{na_2}(f, x). \quad (1.31)$$

Vogt verificó que, si se quiere aproximar por los operadores (1.31) bajo las condiciones (1.27)-(1.28), entonces algunos

de los núcleos clásicos utilizados en teoría de aproximación mediante operadores lineales positivos no son adecuados. Por ejemplo, los núcleos de Féjer-Korovkin y los núcleos de Bohman son apropiados. Sin embargo, se pueden utilizar los núcleos de Jackson y de Jackson-de La Vallée-Poussin (con parámetro $p \geq 3$). Los núcleos de La Vallée Poussin se pueden utilizar, pero no dan la velocidad óptima de convergencia.

La Proposición siguiente ilustra la importancia de la condición $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ que surge en la construcción de las combinaciones lineales.

Proposición 1.4.1. *Si para cada $n \in \mathbb{N}$ el operador L_n definido en (1.30) preserva las constantes, entonces el operador \mathcal{M}_n definido en (1.31) preserva las constantes. Además, si denotamos*

$$e_k(t) = \cos(kt),$$

para $0 \leq k \leq m(na_1)$, entonces

$$\mathcal{M}_n(e_k, x) = (\gamma_1 \rho_{k,na_1} + \gamma_2 \rho_{k,na_2}) \cos(kx).$$

Demostración. El hecho de que \mathcal{M}_n fija las constantes es inmediato a partir de la condición $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$. Para la segunda parte consideramos la identidad trigonométrica

$$\cos(k(x-t)) = \cos(kx) \cos(kt) + \sin(kx) \sin(kt)$$

y la ortogonalidad del sistema de funciones

$$\{1, \sin t, \cos t, \dots, \sin(nt), \cos(nt), \dots\},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Se sigue de (1.27) y de la definición de los operadores \mathcal{M}_n que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(e_k, x) &= \gamma_1 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k(x-t) P_{na_1}(t) dt \\ &\quad + \gamma_2 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k(x-t) P_{na_2}(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\gamma_1 \rho_{k,na_1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kt) dt \right. \\
&\quad \left. + \gamma_2 \rho_{k,na_2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kt) dt \right) \cos(kx) \\
&= (\gamma_1 \rho_{k,na_1} + \gamma_2 \rho_{k,na_2}) \cos(kx).
\end{aligned}$$

□

Anteriormente consideramos parámetros definidos por las ecuaciones (1.27) y (1.28). Posteriormente se ilustra que las ecuaciones más simples

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1 \quad (1.32)$$

$$\frac{\gamma_1}{a_1} + \frac{\gamma_2}{a_2} = 0, \quad (1.33)$$

pueden no conducir a operadores nuevos. Nótese que, dados enteros positivos a_1 y a_2 , con $a_1 < a_2$, el sistema anterior tiene las soluciones

$$\gamma_1 = -\frac{a_1}{a_2 - a_1} \quad y \quad \gamma_2 = \frac{a_2}{a_2 - a_1}.$$

En el Teorema siguiente se muestra que, si utilizamos el núcleo de Féjer, al hacer combinaciones lineales puede que no se obtengan nuevos operadores.

Teorema 1.4.2. *Fijemos $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, con $a_1 < a_2$. Si γ_1 y γ_2 son las soluciones del sistema (1.32) – (1.33), F_n es el núcleo de Féjer, $n \in \mathbb{N}$ y*

$$\mathcal{M}_n(f, x) = \gamma_1 L_{na_1}(f, x) + \gamma_2 L_{na_2}(f, x),$$

donde L_n es el operador definido en (1.29) con $P_n = F_n$, entonces \mathcal{L}_n es un operador de La Vallée Poussin.

Teorema 1.4.3. *Sea $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, con $a_1 < a_2$,*

$$\gamma_1 = -\frac{a_1}{a_2 - a_1} \quad y \quad \gamma_2 = \frac{a_2}{a_2 - a_1}$$

Si $m, n \in \mathbb{N}$ ($m < n$) y $F_{m,n}$ es operador de La Vallée Poussin, se tiene que, para $1 \leq k \leq na_1$,

$$\mathcal{M}_n(e_k, x) = \cos(kx).$$

Demostración. Nótese que $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ y

$$\frac{\gamma_1}{a_1} + \frac{\gamma_2}{a_2} = 0.$$

Según (1.22), para $1 \leq k \leq m$

$$\rho_{k,n} = 1,$$

y según (1.26), se tiene que, para $m + 1 \leq k \leq n$,

$$\rho_{k,n} = \frac{n}{n-m} \left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

Considerando la Proposición 1.4.1 para $1 \leq k \leq m$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(e_k, x) &= (\gamma_1 \rho_{k,na_1} + \gamma_2 \rho_{k,na_2}) \cos(kx) \\ &= (\gamma_1 + \gamma_2) \cos(kx) = \cos(kx). \end{aligned}$$

Por otro lado, para $m + 1 \leq k \leq na_1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(e_k, x) &= (\gamma_1 \rho_{k,na_1} + \gamma_2 \rho_{k,na_2}) \cos(kx) \\ &= \left(\gamma_1 \frac{na_1}{na_1 - m} \left(1 - \frac{k}{na_1}\right) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_2 \frac{na_2}{na_2 - m} \left(1 - \frac{k}{na_2}\right) \right) \cos(kx) \\ &= \left(\gamma_1 + \gamma_2 - \frac{k}{n} \left(\frac{\gamma_1}{a_1} + \frac{\gamma_2}{a_2} \right) \right) \cos x = \cos(kx). \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Combinaciones de Jackson con dos términos

En este capítulo construimos una combinación lineal de dos términos usando núcleos de Jackson, y se dan estimados en términos del módulo de continuidad.

2.1. Combinaciones a dos términos y clase $\mathcal{S}^{(\tau, \mu)}$

El interés por las clases $\mathcal{S}^{(\tau, \mu)}$ se explica en el Teorema 2.1.2. Necesitamos una observación previa.

Proposición 2.1.1. *Dados $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, con $a_1 < a_2$, el sistema de ecuaciones*

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1 \tag{2.1}$$

$$\frac{\gamma_1}{a_1^2} + \frac{\gamma_2}{a_2^2} = 0. \tag{2.2}$$

tiene las soluciones únicas

$$\gamma_1 = -\frac{a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \quad \text{y} \quad \gamma_2 = \frac{a_2^2}{a_2^2 - a_1^2}.$$

En particular

$$\frac{\gamma_1}{a_1^4} + \frac{\gamma_2}{a_2^4} = -\frac{1}{a_1^2 a_2^2}. \quad (2.3)$$

Demostración La primera afirmación se verifica mediante una sustitución directa. Para (2.3) nótese que

$$\frac{\gamma_1}{a_1^4} + \frac{\gamma_2}{a_2^4} = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} \left(-\frac{a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \right) = -\frac{1}{a_1^2 a_2^2}. \quad \square$$

Teorema 2.1.2. *Sea $\{P_n\}$ una sucesión en la clase $\mathcal{S}^{(2,2)}$, con P_n dado por (7).*

Fijemos $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ ($a_1 < a_2$) y números γ_1 y γ_2 que satisfagan las ecuaciones (2.1) y (2.2).

Si \mathcal{L}_n es el operador de convolución asociado al núcleo P_n , el núcleo M_n del operador

$$\mathcal{M}_n = \gamma_1 \mathcal{L}_{na_1} + \gamma_2 \mathcal{L}_{na_2}$$

puede ser escrito en la forma

$$M_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{na_2} \sigma_{k,n} \cos(kx),$$

donde

$$1 - \sigma_{n,k} = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} \frac{\psi_2(k)}{n^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right), \quad 1 \leq k \leq na_1,$$

y ψ_2 es la función dada en (8).

Demostración. Se sigue de (7), (8) ($\mu = 2$) y (2.3) que, para $1 \leq k \leq na_1$,

$$\begin{aligned} \sigma_{k,n} &= \gamma_1 \rho_{k,na_1} + \gamma_2 \rho_{k,na_2} \\ &= \gamma_1 - \gamma_1 \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \frac{\psi_j(k)}{(a_1 n)^{2j}} \\ &\quad + \gamma_2 - \gamma_2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \frac{\psi_j(k)}{(a_2 n)^{2j}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^5}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{\psi_1(k)}{n^2} \left(\frac{\gamma_1}{a_1^2} + \frac{\gamma_2}{a_2^2} \right) + \frac{\psi_2(k)}{n^4} \left(\frac{\gamma_1}{a_1^4} + \frac{\gamma_2}{a_2^4} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^5} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{a_1^2 a_2^2} \frac{\psi_2(k)}{n^4} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^5} \right).
\end{aligned}$$

□

2.2. Combinaciones con núcleos de Jackson

A continuación presentamos un estimado de la norma del operador \mathcal{M}_n , y posteriormente en el Teorema 2.2.2 aplicamos el resultado del Teorema 2.1.2 para el caso particular de los núcleos de Jackson.

Teorema 2.2.1. *Si $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{M}_n : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ se define como $\mathcal{M}_n = \gamma_1 \mathcal{L}_{na_1} + \gamma_2 \mathcal{L}_{na_2}$, entonces:*

$$\|\mathcal{M}_n\| \leq \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_2^2 - a_1^2}.$$

Demostración. Para $x \in \mathbb{R}$ y cada $f \in C_{2\pi}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{M}_n(f, x)| \\
&\leq \|f\| \left(|\gamma_1| \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} J_{na_1}(t) dt + |\gamma_2| \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} J_{na_2}(t) dt \right) \\
&\leq \|f\| (|\gamma_1| + |\gamma_2|) \\
&\leq \|f\| \left(\frac{a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} \right) \\
&= \|f\| \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_2^2 - a_1^2}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$P_n(x) = J_n(x),$$

donde J_n es el núcleo de Jackson definido en (1.15).

Fijemos $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ ($a_1 < a_2$) y números γ_1 y γ_2 que satisfagan las ecuaciones (2.1) y (2.2).

Sea \mathcal{L}_n el operador de convolución asociado al núcleo P_n y definamos

$$\mathcal{M}_n = \gamma_1 \mathcal{L}_{na_1} + \gamma_2 \mathcal{L}_{na_2}. \quad (2.4)$$

Si $g \in C_{2\pi}^4$, entonces

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_n(g) - g\| &\leq \frac{6}{(1 + 2a_1^2n^2)(1 + 2a_2^2n^2)} \|g^{(2)}\| \\ &+ \frac{1}{(a_2 - a_1)} \frac{1}{n(1 + 2a_1^2n^2)} \left(\frac{3\pi^3 \|g^{(2)}\|}{112} + \frac{3\pi^4 \|g^{(4)}\|}{64} \right). \end{aligned}$$

Demostración. Según las ecuaciones (2.1), (5) y la Proposición 1.3.1 podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(g, x) - g(x) &= \gamma_1 \mathcal{L}_{na_1}(g, x) + \gamma_2 \mathcal{L}_{na_2}(g, x) - \gamma_1 g(x) - \gamma_2 g(x) \\ &= \gamma_1 \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) P_{na_1}(t) dt - g(x) \right) \\ &\quad + \gamma_2 \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) P_{na_2}(t) dt - g(x) \right) \\ &= \gamma_1 \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (g(x+t) - 2g(x) + g(x-t)) P_{na_1}(t) dt \right) \\ &\quad + \gamma_2 \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (g(x+t) - 2g(x) + g(x-t)) P_{na_2}(t) dt \right). \end{aligned}$$

Ahora podemos aplicar la Proposición 1.1.1 y utilizar las notaciones para los momentos trigonométricos $T(\cdot, 2)$ (ver la definición (1.1)), para obtener la representación

$$\mathcal{M}_n(g, x) - g(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma_1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{2}{3} g^{(2)}(x) \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} g^{(2)}(x) \left(t^2 - \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^2 \right) \right) P_{na_1}(t) dt \\
&\quad + \frac{\gamma_1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^t \int_{-s}^s \left(\int_x^{x+u} (x+u-v) g^{(4)}(v) dv \right) du ds P_{na_1}(t) dt \\
&\quad + \frac{\gamma_2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{2}{3} g^{(2)}(x) \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} g^{(2)}(x) \left(t^2 - \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^2 \right) \right) P_{na_2}(t) dt \\
&\quad + \frac{\gamma_2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^t \int_{-s}^s \left(\int_x^{x+u} (x+u-v) g^{(4)}(v) dv \right) du ds P_{na_2}(t) dt \\
&= \frac{\gamma_1}{3\pi} \left(T(P_{na_1}, 2) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \left(t^2 - \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^2 \right) P_{na_1}(t) dt \right) g^{(2)}(x) \\
&\quad + \frac{\gamma_1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^t \int_{-s}^s \left(\int_x^{x+u} (x+u-v) g^{(4)}(v) dv \right) du ds P_{na_1}(t) dt \\
&\quad + \frac{\gamma_2}{3\pi} \left(T(P_{na_2}, 2) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \left(t^2 - \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^2 \right) P_{na_2}(t) dt \right) g^{(2)}(x) \\
&\quad + \frac{\gamma_2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^t \int_{-s}^s \left(\int_x^{x+u} (x+u-v) g^{(4)}(v) dv \right) du ds P_{na_2}(t) dt \\
&= \frac{1}{3\pi} \left(\gamma_1 T(P_{na_1}, 2) + \gamma_2 T(P_{na_2}, 2) \right) g^{(2)}(x) \\
&\quad + \frac{1}{3\pi} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \left(t^2 - \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^2 \right) \left(\gamma_1 P_{na_1}(t) + \gamma_2 P_{na_2}(t) \right) dt g^{(2)}(x) \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_0^t \int_{-s}^s \left(\int_x^{x+u} (x+u-v) g^{(4)}(v) dv \right) du ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\gamma_1 P_{na_1}(t) + \gamma_2 P_{na_2}(t) \right) dt. \\ & = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Si consideramos las Proposiciones 1.3.2 y 1.3.5, sabemos que

$$\begin{aligned} & \gamma_1 T(P_{na_1}, 2) + \gamma_2 T(P_{na_2}, 2) \\ & = 2 \left(\gamma_1 (1 - \rho_{na_1}) + \gamma_2 (1 - \rho_{na_2}) \right) \\ & = 2\gamma_1 \left(\frac{3}{2a_1^2 n^2} - \frac{3}{2a_1^2 n^2 (1 + 2a_1^2 n^2)} \right) \\ & \quad + 2\gamma_2 \left(\frac{3}{2a_2^2 n^2} - \frac{3}{2a_2^2 n^2 (1 + 2a_2^2 n^2)} \right) \\ & = \frac{3}{n^2} \left(\frac{\gamma_1}{a_1^2 (1 + 2a_1^2 n^2)} - \frac{\gamma_2}{a_2^2 (1 + 2a_2^2 n^2)} \right) \\ & = \frac{1}{(a_2^2 - a_1^2)} \frac{3}{n^2} \left(\frac{1}{1 + 2a_1^2 n^2} - \frac{1}{1 + 2a_2^2 n^2} \right) \\ & = \frac{1}{(a_2^2 - a_1^2)} \frac{3}{n^2} \frac{2n^2 (a_2^2 - a_1^2)}{(1 + 2a_1^2 n^2)(1 + 2a_2^2 n^2)} \\ & = \frac{6}{(1 + 2a_1^2 n^2)(1 + 2a_2^2 n^2)}. \end{aligned}$$

Para acotar I_2 , utilizamos las Proposiciones 1.1.2 y 1.3.3. Esto nos da la estimación:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{3\pi} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(t^2 - \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^2 \right) \left(\gamma_1 P_{na_1}(t) + \gamma_2 P_{na_2}(t) \right) dt \right) \right| \\ & \leq \frac{1}{3\pi} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| t^2 - \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^2 \right| |\gamma_1| P_{na_1}(t) dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3\pi} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| t^2 - \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^2 \right| |\gamma_2| P_{na_2}(t) dt \right) \\
& \leq \frac{1}{42\pi} \left(\frac{|\gamma_1|}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 P_{na_1}(t) dt + \frac{|\gamma_2|}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 P_{na_2}(t) dt \right) \\
& = \frac{1}{21\pi} \left(\frac{|\gamma_1|}{\pi} \int_0^{\pi} t^4 P_{na_1}(t) dt + \frac{|\gamma_2|}{\pi} \int_0^{\pi} t^4 P_{na_2}(t) dt \right) \\
& \leq \frac{3\pi^3}{112} \left(\frac{|\gamma_1|}{a_1 n(1+2a_1^2 n^2)} + \frac{|\gamma_2|}{a_2 n(1+2a_2^2 n^2)} \right) \\
& = \frac{3\pi^3}{112} \frac{1}{n(a_2^2 - a_1^2)} \left(\frac{a_1}{1+2a_1^2 n^2} + \frac{a_2}{1+2a_2^2 n^2} \right) \\
& \leq \frac{3\pi^3}{112} \frac{1}{(a_2 - a_1)} \frac{1}{n(1+2a_1^2 n^2)}.
\end{aligned}$$

Para estimar el último término consideramos la Proposición 1.1.3 y utilizamos nuevamente la ecuación (1.20). Con ella obtenemos que

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^t \int_{-s}^s \left(\int_x^{x+u} (x+u-v) g^{(4)}(v) dv \right) du ds \right. \\
& \quad \left. \left(\gamma_1 P_{na_1}(t) + \gamma_2 P_{na_2}(t) \right) dt \right| \\
& \leq \frac{\|g^{(4)}\|}{12\pi} \int_0^{\pi} t^4 \left(|\gamma_1| P_{na_1}(t) + |\gamma_2| P_{na_2}(t) \right) dt \\
& \leq \frac{3\pi^4 \|g^{(4)}\|}{64} \left(\frac{|\gamma_1|}{a_1 n(1+2a_1^2 n^2)} + \frac{|\gamma_2|}{a_2 n(1+2a_2^2 n^2)} \right).
\end{aligned}$$

□

Podemos utilizar la Proposición 1.2.1 para extender el teorema anterior al caso de funciones continuas.

Teorema 2.2.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$P_n(x) = J_n(x),$$

donde J_n es el núcleo de Jackson.

Fijemos $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ ($a_1 < a_2$), números γ_1, γ_2 y sean \mathcal{L}_n y \mathcal{M}_n definidos como en el teorema anterior.

Si $f \in C_{2\pi}$, entonces

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{M}_n(f) - f\| \\ & \leq \left(\frac{2a_2^2}{a_2^2 - a_1^2}\right) \frac{1}{6} \omega_4(f, 4h) + \frac{10}{(1 + 2a_1^2 n^2)(1 + 2a_2^2 n^2) h^2} \omega_2(f, h) \\ & + \frac{1}{(a_2 - a_1)} \frac{1}{n(1 + 2a_1^2 n^2)} \left(\frac{5\pi^3}{112h^2} \omega_2(f, h) + \frac{5\pi^4}{64h^4} \omega_4(f, h) \right). \end{aligned}$$

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_n(f) - f\| & \leq \|\mathcal{M}_n(f - f_h)\| + \|f_h - f\| + \|\mathcal{M}_n(f_h) - f_h\| \\ & \leq (1 + \|\mathcal{M}_n\|) \|f - f_h\| + \|\mathcal{M}_n(f_h) - f_h\| \\ & \leq \left(\frac{2a_2^2}{a_2^2 - a_1^2}\right) \frac{1}{6} \omega_4(f, 4h) + \frac{6}{(1 + 2a_1^2 n^2)(1 + 2a_2^2 n^2)} \|f_h^{(2)}\| \\ & + \frac{1}{(a_2 - a_1)} \frac{1}{n(1 + 2a_1^2 n^2)} \left(\frac{3\pi^3 \|f_h^{(2)}\|}{112} + \frac{3\pi^4 \|f_h^{(4)}\|}{64} \right) \\ & = \left(\frac{2a_2^2}{a_2^2 - a_1^2}\right) \frac{1}{6} \omega_4(f, 4h) + \frac{10}{(1 + 2a_1^2 n^2)(1 + 2a_2^2 n^2) h^2} \omega_2(f, h) \\ & + \frac{1}{(a_2 - a_1)} \frac{1}{n(1 + 2a_1^2 n^2)} \left(\frac{5\pi^3}{112h^2} \omega_2(f, h) + \frac{5\pi^4}{64h^4} \omega_4(f, h) \right). \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Operadores discretos

En esta sección construimos una familia de operadores discretos asociados a los estudiados en el capítulo anterior.

Convengamos en decir que un operador no es discreto si para su cómputo se necesita conocer un cantidad al menos numerable de valores de las funciones. En caso contrario, diremos que el operador es discreto.

El interés que tenemos en estudiar el caso discreto viene dado porque en el caso estudiado en [3], los datos a partir de los cuales se reconstruyen los aproximantes corresponden a un número finito de mediciones.

Existen resultados que nos permiten pasar de operadores continuos a discretos (ver [1]). En algunos de ellos se tienen construcciones que son equivalentes a los operadores originales. La equivalencia se entiende en el sentido de que existen constantes C_1 y C_2 (independientes de n y f) tales que

$$C_1\|f - L_n f\| \leq \|f - M_n f\| \leq C_2\|f - L_n f\|,$$

donde $\{M_n\}$ es una sucesión de operadores lineales no discretos, L_n es una discretización de M_n . Hay dos razones por las cuales estos resultados no son satisfactorios para los estudios que realizamos aquí. En primer lugar, en ellos no se dan estimados de las constantes involucradas. En segundo lugar, para lograr resultados inversos los operadores discretos no se construyen con nodos equidistantes.

La discretización de los operadores utilizando núcleos de Jackson, se ha estudiado antes, (ver, por ejemplo, [2] y [3]). La diferencia entre nuestro trabajo y la discretización propuesta por Bojanic y Shisha en [2], es que ellos sólo dan estimados en términos del primer módulo de continuidad. Nosotros presentamos unos estimados diferentes.

Al igual que en el capítulo anterior, consideramos números $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ y $n, N, a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, ($a_1 < a_2$), con N, a_1 y a_2 fijos. Ahora agregamos la condición

$$(n-1)a_2 \leq N-3. \quad (3.1)$$

Para $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$), $x \in [0, 2\pi]$ y para cada función $f \in C_{2\pi}$, definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n,N}(f, x) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_{j,N}) & \left(\gamma_1 J_{na_1}(x_{j,N} - x) \right. \\ & \left. + \gamma_2 J_{na_2}(x_{j,N} - x) \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde los nodos $x_{j,N}$ se definen como en (2).

Nótese que $\mathcal{L}_{n,N}$ es un polinomio trigonométrico de grado no mayor que $(n-1)a_2$. Luego,

$$\mathcal{L}_{n,N}(f) : C_{2\pi} \longrightarrow \mathbb{T}_{(n-1)a_2} \subset C_{2\pi} \quad (3.3)$$

es un operador lineal que puede considerarse como una discretización de (2.4) (con $p = s = 2$). Según lo anterior, se sabe que no podemos lograr un orden de aproximación $\mathcal{O}(n^{-2})$. Si queremos obtener una aproximación de orden mayor que $\mathcal{O}(n^{-2})$ usando operadores de la forma

$$U_{n,p}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \left(\sum_{k=1}^s \alpha_k I_{nb_k,p}(t) \right) dt, \quad (3.4)$$

entonces debemos tomar $p \geq 3$ (ver [19, Section 6.1]).

3.1. Algunas propiedades de $\mathcal{L}_{n,N}$

Recordemos que (ver [8, p. 131]), si $x_{j,N} = 2j\pi/N$ donde $(0 \leq j \leq N-1)$, entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(t) dt = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} T(x_{j,N}), \quad (3.5)$$

para todo $T \in \mathbb{T}_{N-1}$.

Teorema 3.1.1. Si $(n-1)a_2 \leq N-1$ y el operador

$$\mathcal{L}_{n,N} : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$$

está dado por (3.7), entonces

$$\|\mathcal{L}_{n,N}\| \leq \frac{a_1^2 + a_2^2}{2(a_2^2 - a_1^2)}.$$

Demostración. Si $f \in C_{2\pi}$ y $x \in \mathbb{R}$, tomando en cuenta (3.5) y (1.17), se tiene que

$$\begin{aligned} & | \mathcal{L}_{n,N}(f, x) | \\ & \leq \frac{\|f\|}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(|\gamma_1| |J_{na_1}(x_{j,N} - x)| + \gamma_2 |J_{na_2}(x_{j,N} - x)| \right) \\ & = \|f\| \left(|\gamma_1| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_{na_1}(t) dt + \gamma_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_{na_2}(t) dt \right) \\ & = \frac{1}{2} \|f\| (|\gamma_1| + \gamma_2) = \frac{1}{2} \|f\| \left(\frac{a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} \right) \\ & = \|f\| \frac{a_1^2 + a_2^2}{2(a_2^2 - a_1^2)}. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.2. *Sea $\mathcal{L}_{n,N}$ el operador dado por (3.7) con $(n-1)a_2 \leq N-2$. Para cada $x \in [0, 2\pi]$ se tiene*

$$\mathcal{L}_{n,N}\left(\sin(t-x), x\right) = 0$$

y

$$\mathcal{L}_{n,N}\left(\left(2 \sin \frac{t-x}{2}\right)^2, x\right) = \frac{3}{2(1+2a_1^2n^2)(1+2a_2^2n^2)}.$$

Demostración. Denotemos

$$K_n(t) = \gamma_1 J_{na_1}(t) + \gamma_2 J_{na_2}(t).$$

Sabemos que $K_n \in \mathbb{T}_{(n-1)a_2}$. Por lo tanto, a partir de (3.5) y de la condición $(n-1)a_2 \leq N-3 < N-2$ tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(x_{j,N} - x) K_n(x_{j,N} - x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t-x) K_n(t-x) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) K_n(t) dt = 0, \end{aligned}$$

lo cual prueba la primera afirmación.

Para la segunda, usamos (3.5), (1.16) y (1.18) para obtener

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{n,N}\left(\left(2 \sin \frac{t-x}{2}\right)^2, x\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2 \sin \frac{t-x}{2}\right)^2 K_n(t-x) dt \\ &= \frac{\gamma_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2 \sin \frac{t-x}{2}\right)^2 J_{na_1}(t-x) dt \\ & \quad + \frac{\gamma_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2 \sin \frac{t-x}{2}\right)^2 J_{na_2}(t-x) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^2 J_{na_1}(t) dt \\
&\quad + \frac{\gamma_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)^2 J_{na_2}(t) dt \\
&= -\frac{a_1^2}{2(a_2^2 - a_1^2)} \frac{3}{(1 + 2(na_1)^2)} + \frac{a_2^2}{2(a_2^2 - a_1^2)} \frac{3}{(1 + 2(na_2)^2)} \\
&= \frac{3}{2(a_2^2 - a_1^2)} \left(\frac{a_2^2}{1 + 2(na_2)^2} - \frac{a_1^2}{1 + 2(na_1)^2} \right) \\
&= \frac{3}{2(a_2^2 - a_1^2)} \left(\frac{a_2^2 + 2a_2^2(na_1)^2 - a_1^2 - 2a_1^2(na_2)^2}{(1 + 2(na_2)^2)(1 + 2(na_1)^2)} \right) \\
&= \frac{3}{2(a_2^2 - a_1^2)} \left(\frac{a_2^2 - a_1^2}{(1 + 2(na_1)^2)(1 + 2(na_1)^2)} \right) \\
&= \frac{3}{2(1 + 2(na_1)^2)(1 + 2(na_1)^2)}.
\end{aligned}$$

□

3.2. Estimados en $C_{2\pi}^3$

Para $x \in [0, 2\pi]$ fijo y $g \in C_{2\pi}^3$, introducimos algunas funciones auxiliares:

$$H_1(t, x) = t - x - \sin(t - x) - \frac{t - x}{6} \left(2 \sin \frac{t - x}{2}\right)^2,$$

$$H_2(t, x) = \frac{t - x}{6} \left(2 \sin \frac{t - x}{2}\right)^2,$$

$$H_3(t, x) = \frac{1}{2}(t - x)^2 - \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{t - x}{2}\right)^2,$$

$$H_4(t, x) = \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{t - x}{2}\right)^2,$$

y

$$H_5(t, x) = \int_x^t (t - s) \left(g^{(2)}(s) - g^{(2)}(z)\right) ds.$$

Ahora, para $t \in [0, 2\pi]$ y $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sea

$$I_i(t, x) = \begin{cases} H_i(t, x), & \text{si } |t - x| \leq \pi, \\ H_i(t, x + 2\pi), & \text{si } x < t - \pi, \\ H_i(t, x - 2\pi), & \text{si } x > t - \pi. \end{cases} \quad (3.6)$$

Proposición 3.2.1. *Fijemos $x \in [0, 2\pi]$ y $g \in C_{2\pi}^3$. Sean $H_i(t, x)$ ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) las funciones definidas en (3.6). Para cada $t \in [0, 2\pi]$ se tiene*

$$\begin{aligned} g(t) - g(x) &= g'(x) \left(I_1(t, x) + I_2(t, x) + \sin(t - x) \right) \\ &\quad + g^{(2)}(x) \left(I_3(x, t) + I_4(x, t) \right) + I_5(t, x). \end{aligned}$$

Mas aún,

$$|I_1(t, x)| \leq \frac{\pi^4}{72} \left(\sin \frac{x - t}{2} \right)^4,$$

$$|I_2(t, x)| \leq \frac{2\pi}{3} \left| \sin \frac{t - x}{2} \right|^3,$$

$$|I_3(t, x)| \leq \frac{\pi^4}{24} \left(\sin \frac{t - x}{2} \right)^4$$

y

$$|I_5(t, x)| \leq \frac{\pi^3}{6} \|g^{(3)}\| \left| \sin \frac{t - x}{2} \right|^3.$$

Demostración. Notemos que, para cada $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(t) &= g(z) + g'(z)(t - z) + \int_z^t (t - s)g^{(2)}(s)ds \\ &= g(z) + g'(z) \left(t - z - \sin(t - z) - \frac{t - z}{6} \left(2 \sin \frac{t - z}{2} \right)^2 \right) \\ &\quad + g'(z) \sin(t - z) + g'(z) \frac{t - z}{6} \left(2 \sin \frac{t - z}{2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{(2)}(z) \left((t - z)^2 - \left(2 \sin \frac{t - z}{2} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}g^{(2)}(z)\left(2\sin\frac{t-z}{2}\right)^2 + \int_z^t (t-s)\left(g^{(2)}(s) - g^{(2)}(z)\right)ds.$$

Si $|x-t| \leq \pi$, y tomando $z = x$ obtenemos

$$g(t) - g(x) = \left(H_1(t, x) + H_2(t, x) + \sin(t-x)\right)g'(x) \\ + \left(H_3(t, x) + H_4(t, x) + \sin(t-x)\right)g^{(2)}(x) + H_5(x, t).$$

Ahora supongamos que $x < t - \pi$. Tomando $x = x + 2\pi$ obtenemos

$$g(t) - g(x) = g(t) - g(x + 2\pi) \\ = \left(H_1(t, x + 2\pi) + H_2(t, x + 2\pi) + \sin(t - x + 2\pi)\right)g'(x + 2\pi) \\ + \left(H_3(t, x + 2\pi) + H_4(t, x + 2\pi) + \sin(t - x)\right)g^{(2)}(x + 2\pi) \\ + H_5(x + 2\pi, t) \\ = \left(I_1(t, x) + I_2(t, x) + \sin(t - x)\right)g'(x) \\ + \left(I_3(t, x) + I_4(t, x) + \sin(t - x)\right)g^{(2)}(x) + I_5(x, t).$$

Si $x < t - \pi$, se obtiene una identidad similar tomando $z = x - 2\pi$.

Con el fin de estimar $|I_1(t, x)|$ consideramos tres casos. Si $|t - x| \leq \pi$, usamos la Proposición 1.1.2 para obtener

$$|I_1(t, x)| = |H_1(t, x)| \\ = \left|t - x - \sin(t - x) - \frac{t - x}{6} \left(2\sin\frac{t - x}{2}\right)^2\right| \\ \leq \frac{\pi^4}{72} \left(\sin\frac{t - x}{2}\right)^4.$$

Ahora, supongamos que $x < t - \pi$ y sea $y = x + 2\pi$. Nótese que si $0 \leq y - t < \pi$, entonces

$$|I_1(t, x)| = |H_1(t, y)| \leq \frac{\pi^4}{72} \left(\sin\frac{y - t}{2}\right)^4$$

$$= \frac{\pi^4}{72} \left(\sin \frac{x-t}{2} \right)^4.$$

Si $x > t - \pi$, sea $z = x - 2\pi$. Nótese que si $-\pi \leq z - t \leq 0$, entonces

$$\begin{aligned} |I_1(t, x)| &= |H_1(t, z)| \leq \frac{\pi^4}{72} \left(\sin \frac{z-t}{2} \right)^4 \\ &= \frac{\pi^4}{72} \left(\sin \frac{x-t}{2} \right)^4. \end{aligned}$$

Ahora consideremos la función I_2 . Si $|t - x| \leq \pi$, entonces

$$\begin{aligned} |I_2(t, x)| &= \left| \frac{t-x}{6} \left(2 \sin \frac{t-x}{2} \right)^2 \right| \\ &\leq \frac{\pi}{6} \left| \sin \frac{t-x}{2} \right| \left(2 \sin \frac{t-x}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Si $x < t - \pi$, sea $y = x + 2\pi$. Dado que $0 \leq y - t < \pi$, entonces

$$\begin{aligned} |I_2(t, x)| &= |I_2(t, y)| \leq \frac{\pi}{6} \left| \sin \frac{t-y}{2} \right| \left(2 \sin \frac{t-y}{2} \right)^2 \\ &= \frac{\pi}{6} \left| \sin \frac{t-x}{2} \right| \left(2 \sin \frac{t-x}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Una desigualdad similar se obtiene si $x > t - \pi$.

Para el estimado de I_3 usamos la Proposición 1.1.2. Cuando $|t - x| \leq \pi$, consideramos las desigualdades

$$\begin{aligned} |I_3(t, x)| &= \frac{1}{2} \left| (t-x)^2 - \left(2 \sin \frac{t-x}{2} \right)^2 \right| \leq \frac{(t-x)^4}{24} \\ &\leq \frac{1}{24} \left(\pi \sin \frac{t-x}{2} \right)^4. \end{aligned}$$

Si $x < t - \pi$, sea $y = x + 2\pi$. Entonces

$$|I_3(t, x)| = |H_3(t, y)| \leq \frac{\pi^4}{24} \left(\sin \frac{t-y}{2} \right)^4$$

$$= \frac{\pi^4}{24} \left(\sin \frac{t-x}{2} \right)^4.$$

Una desigualdad similar se obtiene si $x > t - \pi$.

Finalmente, estimamos I_5 . Si $|t - x| \leq \pi$, entonces

$$\begin{aligned} |I_5(t, x)| &= |H_5(t, x)| = \left| \int_x^t (t-s) \left(g^{(2)}(s) - g^{(2)}(x) \right) ds \right| \\ &\leq \|g^{(3)}\| \left| \int_x^t (t-s)(s-x) ds \right| = \|g^{(3)}\| \frac{1}{6} |t-x|^3 \\ &= \frac{4}{3} \|g^{(3)}\| \left| \frac{t-x}{2} \right|^3 \leq \frac{\pi^3}{6} \|g^{(3)}\| \left| \sin \frac{t-x}{2} \right|^3. \end{aligned}$$

Los otros casos se obtienen de manera análoga. \square

Teorema 3.2.2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 5$), sea $\mathcal{L}_{n,N}$ el operador dado por (3.7) con $(n-1)a_2 \leq N-3$. Si $g \in C_{2\pi}^3$, entonces*

$$\begin{aligned} \|g - \mathcal{L}_{n,N}(g)\| &\leq \frac{4}{\sqrt{a_1 a_2} n^{3/2} (a_2 - a_1)} \|g'\| \\ &\quad + \frac{2}{n^3 a_1^2 (a_2 - a_1)} \|g^{(2)}\| + \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{a_1 a_2} n^{3/2} (a_2 - a_1)} \|g^{(3)}\|. \end{aligned}$$

Demostración. Fijemos $g \in C_{2\pi}^3$ y $x \in [0, 2\pi]$. Dado que $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, tomando en cuenta las Proposiciones 3.2.1 y 3.1.2 respectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n,N}(g, x) - g(x) &= \mathcal{L}_{n,N}(g, x) - \gamma_1 g(x) - \gamma_2 g(x) \\ &= \mathcal{L}_{n,N}(g(t) - g(x), x) \\ &= g'(x) \mathcal{L}_{n,N}(I_1(t, x) + I_2(t, x) + \sin(t-x), x) \\ &\quad + g^{(2)}(x) \mathcal{L}_{n,N}(I_3(x, t) + I_4(x, t), x) + \mathcal{L}_{n,N}(I_5(t, x), x) \\ &= g'(x) \mathcal{L}_{n,N}(I_1(t, x) + I_2(t, x), x) + g^{(2)}(x) \mathcal{L}_{n,N}(I_3(x, t), x) \end{aligned}$$

$$+\frac{3g^{(2)}(x)}{2(1+2a_1^2n^2)(1+2a_2^2n^2)} + \mathcal{L}_{n,N}(I_5(t,x),x).$$

Ahora, usamos las ecuaciones (3.5), (1.19) y la Proposición 3.2.1, para obtener

$$\begin{aligned} & | \mathcal{L}_{n,N}(I_1(t,x),x) | \\ & \leq \frac{\pi^4}{72} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sin \frac{x_{j,N} - x}{2} \right)^4 \left(| \gamma_1 | J_{na_1}(x_{j,N} - x) \right. \\ & \quad \left. + | \gamma_2 | J_{na_2}(x_{j,N} - x) \right) \\ & = \frac{\pi^4}{72} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sin \frac{t-x}{2} \right)^4 \left(| \gamma_1 | J_{na_1}(t-x) \right. \\ & \quad \left. + | \gamma_2 | J_{na_2}(t-x) \right) dt \\ & = \frac{\pi^4}{72} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^4 \left(| \gamma_1 | J_{na_1}(t) + | \gamma_2 | J_{na_2}(t) \right) dt \\ & = \frac{\pi^4}{72} \frac{1}{16} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^4 \left(| \gamma_1 | J_{na_1}(t) \right. \\ & \quad \left. + | \gamma_2 | J_{na_2}(t) \right) dt \\ & = \frac{\pi^4}{72} \frac{1}{32} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(2 \sin \frac{t}{2} \right)^4 \left(| \gamma_1 | J_{na_1}(t) \right. \\ & \quad \left. + | \gamma_2 | J_{na_2}(t) \right) dt \\ & = \frac{\pi^4}{128} \left(\frac{| \gamma_1 |}{na_1(1+2(na_1)^2)} + \frac{| \gamma_2 |}{na_2(1+2(na_2)^2)} \right) \\ & \leq \frac{\pi^4}{256} \left(\frac{| \gamma_1 |}{(na_1)^3} + \frac{| \gamma_2 |}{(na_2)^3} \right) = \frac{\pi^4}{256 n^3 (a_2^2 - a_1^2)} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \\ & = \frac{\pi^4}{256 n^3 a_1 a_2 (a_2 - a_1)} \leq \frac{4^4}{256 n^3 a_1 a_2 (a_2 - a_1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n^3 a_1 a_2 (a_2 - a_1)}.$$

El término correspondiente a I_2 se estima como sigue

$$\begin{aligned} & | \mathcal{L}_{n,N}(I_2(t, x), x) | \\ & \leq \frac{2\pi}{3} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left| \sin \frac{x_{j,N} - x}{2} \right|^3 \left(| \gamma_1 | J_{na_1}(x_{j,N} - x) \right. \\ & \quad \left. + | \gamma_2 | J_{na_2}(x_{j,N} - x) \right) \\ & \leq \frac{2\pi}{3} | \gamma_1 | \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sin \frac{x_{j,N} - x}{2} \right)^2 J_{na_1}(x_{j,N} - x) \right. \\ & \quad \left. \times \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sin \frac{x_{j,N} - x}{2} \right)^4 J_{na_1}(x_{j,N} - x) \right)^{1/2} \\ & \quad + \frac{2\pi}{3} \gamma_2 \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sin \frac{x_{j,N} - x}{2} \right)^2 J_{na_2}(x_{j,N} - x) \right. \\ & \quad \left. \times \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sin \frac{x_{j,N} - x}{2} \right)^4 J_{na_2}(x_{j,N} - x) \right)^{1/2} \\ & = \frac{2\pi}{3} | \gamma_1 | \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^2 J_{na_1}(t) dt \right. \\ & \quad \left. \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^4 J_{na_1}(t) dt \right)^{1/2} \\ & \quad + \frac{2\pi}{3} \gamma_2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^2 J_{na_2}(t) dt \times \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^4 J_{na_2}(t) dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi}{3} |\gamma_1| \left(\frac{3}{2(1+2(na_1)^2)} \times \frac{9}{na_1(1+2(na_1)^2)} \right)^{1/2} \\
&\quad + \frac{2\pi}{3} \gamma_2 \left(\frac{3}{2(1+2(na_2)^2)} \times \frac{9}{na_2(1+2(na_2)^2)} \right)^{1/2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \pi \left(\frac{-\gamma_1}{(1+2(na_1)^2)\sqrt{na_1}} + \frac{\gamma_2}{(1+2(na_2)^2)\sqrt{na_2}} \right) \\
&\leq \frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{2}n^{3/2}} \left(\frac{-\gamma_1}{a_1^2\sqrt{a_1}} + \frac{\gamma_2}{a_2^2\sqrt{a_2}} \right) \\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{2}n^{3/2}(a_2^2 - a_1^2)} \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} \right) \\
&\leq \frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{2}a_1a_2n^{3/2}(a_2 - a_1)} \leq \frac{\sqrt{6}}{n^{3/2}\sqrt{a_1a_2}(a_2 - a_1)}.
\end{aligned}$$

Nótese que los términos correspondientes a I_3 y a I_5 se pueden estimar de manera similar (pero con diferentes constantes). Esto es

$$|\mathcal{L}_{n,N}(I_3(t, x), x)| \leq \frac{3}{n^3 a_1 a_2 (a_2 - a_1)} \leq \frac{3}{n^3 a_1^2 (a_2 - a_1)}$$

y

$$|\mathcal{L}_{n,N}(I_5(t, x), x)| \leq \frac{\sqrt{6} \pi^2}{4 n^{3/2} \sqrt{a_1 a_2} (a_2 - a_1)} \|g^{(3)}\|.$$

Dado que $a_2 \geq 2$ y $n \geq 5$, se tiene

$$(a_2 - a_1)n \leq a_2 n \leq \frac{1}{20}(2a_2 n^2) \leq \frac{1}{20}(1 + 2a_2 n^2).$$

Por lo tanto

$$\frac{3}{2(1+2a_1^2 n^2)(1+2a_2^2 n^2)} \leq \frac{3}{80a_1^2 n^3 (a_2 - a_1)}.$$

Sumando las últimas desigualdades obtenemos

$$|\mathcal{L}_{n,N}(g, x) - g(x)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{n^3 a_1 a_2 (a_2 - a_1)} + \frac{\sqrt{6}}{n^{3/2} \sqrt{a_1 a_2} (a_2 - a_1)} \right) \|g'\| \\
&\quad + \left(\frac{3}{2n^3 a_1^2 (a_2 - a_1)} + \frac{3}{80a_1^2 n^3 (a_2 - a_1)} \right) \|g^{(2)}\| \\
&\quad\quad + \frac{\sqrt{6} \pi^2}{\sqrt{a_1 a_2} n^{3/2} (a_2 - a_1)} \|g^{(3)}\| \\
&\leq \frac{4}{\sqrt{a_1 a_2} n^{3/2} (a_2 - a_1)} \|g'\| + \frac{2}{n^3 a_1^2 (a_2 - a_1)} \|g^{(2)}\| \\
&\quad + \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{a_1 a_2} n^{3/2} (a_2 - a_1)} \|g^{(3)}\|.
\end{aligned}$$

□

3.3. Estimados en $C_{2\pi}$

Teorema 3.3.1. *Sea $\mathcal{L}_{n,N}$ el operador dado por (3.7) para valores de $n \geq 5$. Si $f \in C_{2\pi}$, entonces*

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_{n,N}(f) - f\| &\leq \frac{20}{3\sqrt{a_1 a_2} n (a_2 - a_1)} \omega_1 \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\
&\quad + \frac{10}{3n^2 a_1^2 (a_2 - a_1)} \omega_2 \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\
&\quad + \left(\frac{9(3a_2^2 - a_1^2)}{2(a_2^2 - a_1^2)} + \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3a_1 a_2} (a_2 - a_1)} \right) \omega_3 \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right).
\end{aligned}$$

Demostración. Fijemos $f \in C_{2\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 5$) y N tal que $(n-1)a_2 \leq N-3$. Para

$$h = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

consideremos la función f_h definida en (1.11).

De los Teoremas 3.1.1 y 3.2.2 y la Proposición 1.2.1 se sigue que

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{L}_{n,N}(f) - f\| \\
& \leq \|f - f_h\| + \|\mathcal{L}_{n,N}(f) - \mathcal{L}_{n,N}(f_h)\| + \|\mathcal{L}_{n,N}(f_h) - f_h\| \\
& \leq (1 + \|\mathcal{L}_{n,N}\|)\|f - f_h\| + \|\mathcal{L}_{n,N}(f_h) - f_h\| \\
& \leq \frac{9(3a_2^2 - a_1^2)}{2(a_2^2 - a_1^2)} \omega_3(f, h) + \frac{4}{\sqrt{a_1 a_2} n^{3/2} (a_2 - a_1)} \|f'_h\| \\
& \quad + \frac{2}{n^3 a_1^2 (a_2 - a_1)} \|f_h^{(2)}\| + \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{a_1 a_2} n^{3/2} (a_2 - a_1)} \|f_h^{(3)}\| \\
& \leq \frac{9(3a_2^2 - a_1^2)}{2(a_2^2 - a_1^2)} \omega_3(f, h) + \frac{4}{\sqrt{a_1 a_2} n^{3/2} (a_2 - a_1)} \frac{5\omega_1(f, h)}{3h} \\
& \quad + \frac{2}{n^3 a_1^2 (a_2 - a_1)} \frac{5\omega_2(f, h)}{3h^2} + \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{a_1 a_2} n^{3/2} (a_2 - a_1)} \frac{5\omega_3(f, h)}{3h^3} \\
& = \frac{9(3a_2^2 - a_1^2)}{2(a_2^2 - a_1^2)} \omega_3\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{20}{3\sqrt{a_1 a_2} n (a_2 - a_1)} \omega_1\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
& \quad + \frac{10}{3n^2 a_1^2 (a_2 - a_1)} \omega_2\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3a_1 a_2} (a_2 - a_1)} \omega_3\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
& = \frac{20}{3\sqrt{a_1 a_2} n (a_2 - a_1)} \omega_1\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{10}{3n^2 a_1^2 (a_2 - a_1)} \omega_2\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
& \quad + \left(\frac{9(3a_2^2 - a_1^2)}{2(a_2^2 - a_1^2)} + \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3a_1 a_2} (a_2 - a_1)} \right) \omega_3\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

□

3.4. Aproximación de $\mathcal{L}_{n,N}$ para datos con error

Por lo general en las aplicaciones, no se conoce el valor exacto de una función f en los nodos $x_{j,N}$. Lo que se asume es que se conoce un valor aproximado $f_\delta(x_{j,N})$ donde $\delta > 0$ es un número fijo conocido. Estamos interesados en obtener un estimado del error cuando el operador original se cambia por otro que considera valores aproximados de la función f en los nodos (3.7).

Teorema 3.4.1. *Sea $\{P_n\}$ definido como en (1.29), $\delta > 0$, $f \in C_{2\pi}$, $N \in \mathbb{N}$. Sean $a_j \in \mathbb{R}$ $0 \leq j \leq N$ tales que*

$$|a_j - f(x_{j,N})| \leq \delta.$$

Si

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{n,N}(f, x) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} a_j \left(\gamma_1 J_{na_1}(x_{j,N} - x) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_2 J_{na_2}(x_{j,N} - x) \right), \\ \|f - \tilde{\mathcal{L}}_{n,N}(f_\delta)\| & \tag{3.7} \\ &\leq \frac{\delta(a_1^2 + a_2^2)}{2(a_2^2 - a_1^2)} + \frac{20}{3\sqrt{a_1 a_2} n(a_2 - a_1)} \omega_1 \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &\quad + \frac{10}{3n^2 a_1^2 (a_2 - a_1)} \omega_2 \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{9(3a_2^2 - a_1^2)}{2(a_2^2 - a_1^2)} + \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3a_1 a_2} (a_2 - a_1)} \right) \omega_3 \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

Demostración. Resulta inmediato a partir del Teorema 3.3.1 y el Teorema 3.1.1, ya que

$$\begin{aligned} &|f(x) - \tilde{\mathcal{L}}_{n,N}(f_\delta, x)| \\ &\leq |f(x) - \tilde{\mathcal{L}}_{n,N}(f, x)| + |\tilde{\mathcal{L}}_{n,N}(f, x) - \tilde{\mathcal{L}}_{n,N}(f_\delta, x)| \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \left| \tilde{\mathcal{L}}_{n,N}(f, x) - \tilde{\mathcal{L}}_{n,N}(f_\delta, x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(f(x_{j,N}) - a_j \right) \left(\gamma_1 J_{na_1}(x_{j,N} - x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \gamma_2 J_{na_2}(x_{j,N} - x) \right) \right| \\
&\leq \frac{\delta}{N} \left| \sum_{j=0}^{N-1} \left(\gamma_1 J_{na_1}(x_{j,N} - x) + \gamma_2 J_{na_2}(x_{j,N} - x) \right) \right| \\
&= \frac{\delta}{2} \frac{a_1^2 + a_2^2}{(a_2^2 - a_1^2)}.
\end{aligned}$$

□

3.5. Comparaciones

En [3] se consideraron los operadores

$$\mathcal{M}_{m,N}(f, x) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_{j,N}) J_m(x_{j,N} - x),$$

con $2m = N$. En ese trabajo se demostró que

$$\begin{aligned}
\|g - \mathcal{M}_{n,N}g\| &\leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{2n^2 + 1}} \|g'\| + \frac{\pi^2}{4} \frac{3}{2n^2 + 1} \|g^{(2)}\| \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

siempre que $g \in C_{2\pi}^2$.

Con el fin de comparar el resultado anterior con el Teorema 3.3.1, consideramos el caso más simple, es decir $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $2n = N$ ($n \geq 5$). Nótese que en tal caso $\mathcal{M}_{m,N}(f, x)$ es un

polinomio de grado no mayor que $2m - 2$ y $\mathcal{L}_{m,N}(f, x)$ es un polinomio de grado a lo sumo

$$(n - 1)a_2 = (n - 1)2 = N - 2 = 2m - 2.$$

Por lo tanto, de manera general, tenemos polinomios del mismo grado. Pero, si $g \in C_{2\pi}^3$, del Teorema 3.3.1 obtenemos

$$\begin{aligned} \|g - \mathcal{L}_{n,N}(g)\| &\leq \frac{20}{3\sqrt{2}n} \omega_1\left(g, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{10}{3n^2} \omega_2\left(g, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &\quad + \left(24 + \frac{20}{\sqrt{3}}\right) \omega_3\left(g, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

A continuación presentamos con línea continua la gráfica de la función

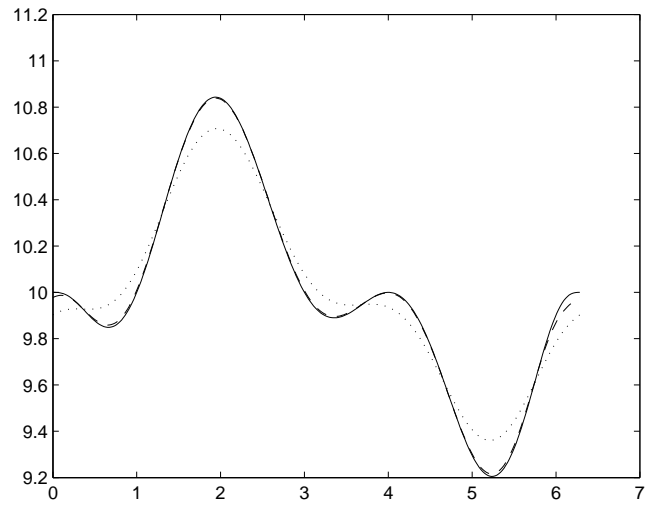
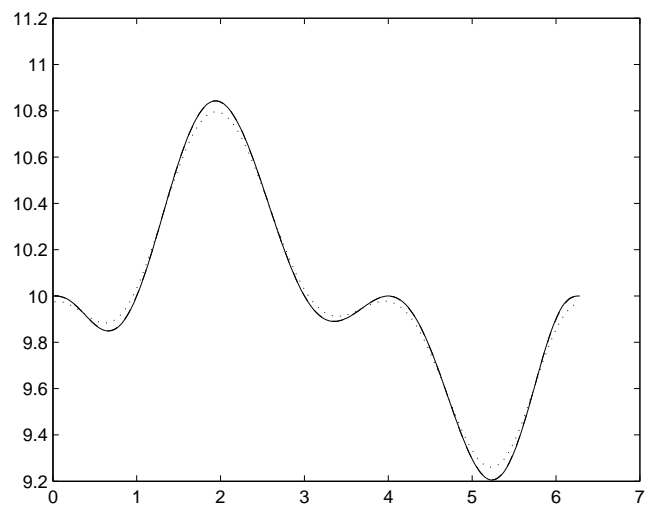
$$f(x) = \frac{1}{300}(x - 2\pi)^3(x - 4)^2(x - 1)(x - 3) + 10$$

con el fin de contrastar nuestro aproximante (tomando el caso más simple $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$) con línea discontinua, con el que se consideró en [3] con línea punteada.

En la figura 3.1 se muestra una aproximación considerando $N = 12$ nodos y un grado de $n = 10$.

Al aumentar el número de nodos a 50 y el grado a 48 se observa que la aproximación mostrada en [3] mejorará a la par que la combinación lineal de núcleos de Jackson propuesta en esta tesis (ver figura 3.2).

En las figuras 3.3 y 3.4 se hace un acercamiento a la gráfica, cuando $x = \pi$.

Figura 3.1: $n=10$ y $N=12$ Figura 3.2: $n=48$ y $N=50$

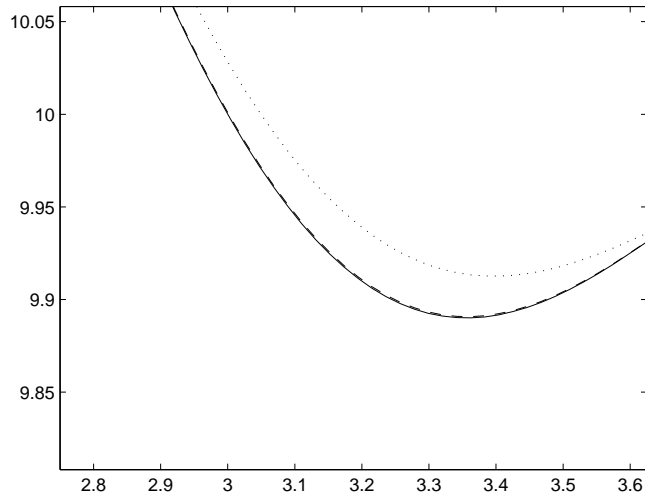


Figura 3.3: Primer acercamiento

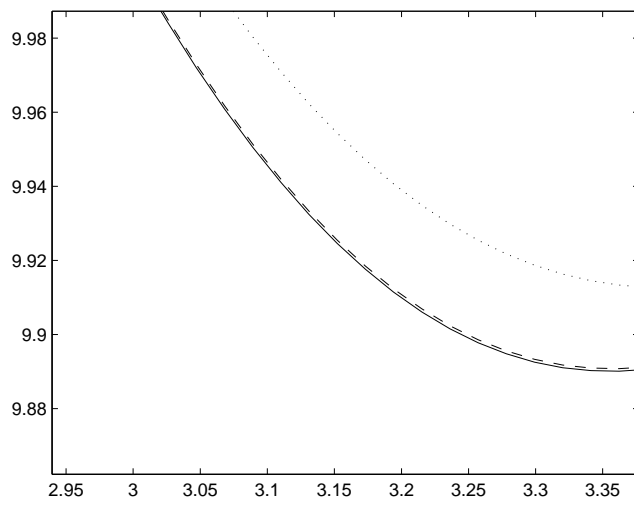


Figura 3.4: Segundo acercamiento

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado un caso particular del problema de reconstrucción de funciones. Para ello se consideró una combinación lineal a dos términos usando el núcleo de Jackson. Esto nos permitió obtener una mayor velocidad de convergencia en comparación con la conseguida en [3]. Es importante señalar que logramos incrementar la velocidad de convergencia sin aumentar significativamente el número de valores de las funciones utilizados en la construcción. En la teoría se sabe que, mientras mayor sea el número de elementos en la combinación lineal, mayor será la velocidad de convergencia. Recordemos que nuestro estudio está motivado por algunos problemas reales. En la tomografía de capacitancias, los datos corresponden a mediciones que, por lo general, son un número pequeño.

Los teoremas directos para combinaciones lineales de algunos operadores trigonométricos no incluyen estimados de las constantes involucradas. Es por esto que nos vimos en la necesidad de verificar nuevos estimados incluyendo las constantes involucradas (lo cual no es trivial) para poder construir algoritmos numéricos basados en nuestros resultados.

La discretización que se presentó en la Sección 3.2, es original e ingeniosa, y es una de las contribuciones que hicimos a esta teoría. Los resultados principales de este trabajo se encuentran en los Teoremas 2.2.2 y 3.3.1. En ellos se dan estimados de la velocidad de convergencia de los operadores construidos tanto en el caso continuo como en el discreto.

Según el Teorema 3.3.1, obtenemos un mejor estimado si

a_2 es mucho mayor que a_1 , debido a la expresión $a_2 - a_1$ en el denominador. Pero, tomar a_2 más grande implica aumentar el grado de los polinomios y esto, por otro lado, significa que se necesita un mayor número de datos. La solución óptima depende de los intereses de los investigadores en las aplicaciones concretas.

En este trabajo mejoramos los resultados de [3] usando una combinación lineal de dos términos de operadores lineales positivos.

A continuación se mencionan problemas que pueden ser la motivación de un trabajo futuro en esta dirección:

Problema 4. *Está claro que al considerar combinaciones lineales con más de dos términos, se alcanza un orden de convergencia más alto. Se desconoce el costo computacional de tales operaciones. Un problema teórico interesante y difícil es encontrar buenos estimados de las constantes para dichas combinaciones lineales.*

Problema 5. *Desarrollar algoritmos e implementar programas computacionales mediante un método estable utilizando las ideas de [3] y nuestros resultados, para resolver el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en una región anular.*

Problema 6. *Encontrar el estimado exacto de las normas de los operadores dados en el Teorema 2.2.1.*

Bibliografía

- [1] D.I. Berman, *Some remarks on the problem of the degree of approximation of polynomials operators*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 5 (1961), 3-5.
- [2] R. Bojanic y O. Shisha, *Approximation of continuous, periodic functions by discrete linear positive operators*, J. of Approximation Theory., 11 (1974), 231-235.
- [3] J. Bustamante, R. Cruz Castillo y A. Fraguera, *A regularization method for polynomial approximation of functions from their approximate values at nodes*, J. Numer. Math., 17(2) (2009), 97-118.
- [4] J. Bustamante y V. M. Méndez Salinas, *A discrete operator for approximation of continuous periodic functions*, Automat. Comput. Appl. Math., 22 (2013), 15-27.
- [5] P. L. Butzer, *Linear combinations of Bernstein polynomials*, Can. J. Math. Vol 15 (1953), 559-567.
- [6] P. L. Butzer y R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation*, Academic Press, New York and London, 1971.
- [7] R. Cruz Castillo, *Desarrollo de un método estable para el ajuste polinomial de datos discretos*, Tesis doctoral, FCFM BUAP, 2007.
- [8] R. A. DeVore, *Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators*, Springer, Lec. Notes in Math. 293, Spinger-Verlag, 1972.

- [9] R. A. DeVore y G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993.
- [10] Z. Ditzian y V. Totik, *Moduli of smoothness*, Springer, New York, 1987.
- [11] I. Gavrea, *Aproximarea funcțiilor prin operatori liniari*, Ed Mediamira Cluj-Napoca, 2001.
- [12] G. Mastroianni y G. V. Milovanović, *Interpolation Processes, Basic Theory and Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [13] Y. Matsuoka, *On the approximation of functions by some singular integrals*, Tôhoku Math. J., 18 (1) (1966), 13-43.
- [14] I. P. Natanson, *Constructive Function Theory*, Vol. I, Frederick Hungar, 1964.
- [15] R. Păltănea, *Approximation Theory Using Positive Linear Operators*, Birkhäuser, Boston, 2004.
- [16] E. L. Stark, *An extension of a theorem of P.P. Korovkin to singular integrals with not necessarily positive kernels*, Indag. Math. 34 (1972), 227-235.
- [17] J. Szabados, *On convolution operators with kernels of finite oscillations*, Acta Math. Hungar., (1976), 179-192.
- [18] A. F. Timan, *Theory of approximation of functions of a real variable*, Macmillan, New York, 1963.
- [19] L. Vogt, *Approximation by linear combinations of positive convolution integrals*, J. Approx. Theory, 57 (1989), 178-201.