Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Una breve exploración a pequeños grandes cardinales

Tesis presentada para obtener el grado de

Licenciado en Matemáticas

Presenta

Angel Rafael Barranco Carrasco

Director de tesis

Dr. Iván Martínez Ruiz

Puebla, PUE.

Febrero 2023

A Dios y a mis padres.

Agradecimientos

Cuando uno se pone a meditar acerca de todo lo que ha transcurrido para llegar hasta este punto, la verdad es difícil no terminar soltando un par de lagrimas. Esta carrera ha sido un regalo muy bonito, por parte de la vida, amo tanto haber estudiado un poco de esta hermosa área de conocimiento. Es mi deseo poder mencionar algunas de las personas que me motivaron a lo largo de estos años, y pido una sincera disculpa, a aquellas que se me han ido de la mente al momento de redactar estas palabras, de todo corazón, llevo a todos muy en el alma.

Mis padres han sido un pilar muy grande en mi vida, yo diría que el más grande de todos, y es que mis palabras no serían suficientes para agradecerles todo lo que han hecho por mí, de verdad gracias por nunca soltarme, porque en todos mis momentos más difíciles han seguido a mi lado, este trabajo, estas palabras y todo lo que he logrado, considero que apenas alcanza lo suficiente para toda la honra que deseo darles; en mi mente siempre llevo sus consejos, cuidados, esfuerzos, costumbres y valores que me han dado, gracias por tanto. Sé que ya es mucho pero cuando lean esto, les pido que jamás dejen de estar conmigo en todo momento y sigan siendo conmigo como lo han sido hasta ahora, no importando nada. Les amo y siempre lo haré.

Al resto de mi familia, y siendo particulares a mis hermanas, por ser siempre parte de mi vida, porque desde que tengo memoria, han acompañado mi existencia de diferentes formas, gracias por siempre procurarme y amarme como hasta ahora, no es mentira que yo las amo más de lo que se imaginan. A mi tío Alfonso, hasta el cielo te agradezco por confiar en mí y hasta donde llegaría, a mis primos Laura y Edwin porque de maneras diferentes me han

apoyado, a mis tíos, tías y abuelos, sobretodo a quienes siempre se han enorgullecido de mí ante los demás, ustedes saben quienes son, muchas gracias.

Desde pequeño, han existido muchos adultos que me han apoyado y creído en mí, y que no son parte de mi familia. A aquel profesor de mi infancia que me impulsó a ser quien soy. A mi profesora Lolita, donde sea que esté, y a mi profesora Inés, de verdad gracias por motivarme desde el principio.

Le agradezco tanto a mi profesora Elvira, porque me enseñó a enamorarme de las matemáticas, porque gracias a ella aprendí que existe esta carrera, y que siempre me guío para ser mejor en lo que hacía, sabiendo todo lo que podía lograr. A mi profesora Fanny, por darme la confianza en que puedo lograr tanto, que siempre estuvo conmigo pues nunca dudo del potencial que tenía, nunca dejó de fijarse en mí y con sus palabras me alentó a estudiar esta licenciatura. A la profesora Gabriela, por enseñarme a amar la lógica desde joven.

A cada profesor que me apoyó durante la carrera. Al profesor Soriano por enseñarme a tener más confianza en mis conocimientos. A la profesora Mónica Macías, por ser una buena consejera y preocuparse por mi desarrollo en la carrera. Al profesor Vilchis por abrirme los ojos a lo hermosas y formales que pueden ser las matemáticas.

Al profesor Iván Martínez, desde que tuvimos el gusto de conocernos siempre me ha mostrado su confianza en mí. Gracias profesor Iván por permitirme la oportunidad de realizar un trabajo así bajo su ayuda, porque aun en cosas no académicas se preocupa por mí, ha sido un gusto compartir varios momentos con usted. Gracias por ayudarme a creer en todo lo que puedo alcanzar si me esfuerzo lo suficiente y por nunca dudar de mí cada que enfrentaba un nuevo problema de esta área.

También le agradezco enormemente al profesor Alejandro Ramírez, porque nunca se cansó de decirme y aconsejarme para hacer más allá, gracias a usted pude realizar un trabajo que ha sido publicado incluso, de verdad gracias por llevarme a lugares que dentro de mí, imaginaba lejos de mi alcance. Por ser también un buen amigo y acompañarnos siempre con su gran personalidad.

A todos mis amigos, con cada uno tengo un agradecimiento muy especial y particular, me reservo esas palabras para ustedes. Gracias por el enorme apoyo que me han dado, por ser luz cuando me sentía en oscuridad, por hacerme reír y acompañarme cuando lloraba, ha sido un honor conocer a cada uno de ustedes. Muchas gracias Juan Pablo, Erick, Enrique, Wendy, Rafa por su gran amistad, y gracias Manuel, Aleyda, Pedro, Alonzo, Luis Enrique, Adal por ser las mejores compañías, en muchos sentidos, a lo largo de todos mis semestres en esta facultad.

Deseo hacer un pequeño énfasis en lo agradecido que estoy con mis amigas Ana, Brenda, Montse y Maleny, esta última etapa ha sido muy dura en el aspecto personal, que tengo la fiel certeza que puedo contar con ustedes en cualquier tiempo, les amo.

Finalmente, pero no menos importante, le agradezco a Dios por la vida, por su cuidado, por todos los regalos que me ha dado y por tantas cosas que hace por mí, sin él no estaría aquí, le agradezco que siempre ha estado conmigo y le pido que así siga siendo.

Introducción

El tratamiento de los grandes cardinales, ha sido una tendencia importante a lo largo de las últimas décadas, que tiene sus orígenes en la ya popular Teoría de Conjuntos. Recordemos que Cantor es el padre de esta rama de las matemáticas que se remonta en la investigación que él hacía sobre series trigonométricas, cuando utilizó cierta operación límite iterable hacía el "infinito". Desde entonces empezó la idea de los llamados números ordinales, los cuales fueron pensados originalmente como clases de equivalencia de la relación dada por la de isomorfismo entre buenos órdenes. Esto dio inicio a lo que se conoció como el "transfinito".

Felix Hausdorff en 1908, se encontraba interesado en investigar el transfinito, de hecho se logró un gran avance debido al trabajo de él; incluso interesado por la estructura de este mismo objeto, y despreocupado por cuestiones de fundamentos en su estudio, él continuó la forma de distintos tipos de órdenes para su propio propósito y dio origen al primer cardinal grande, los débilmente inaccesibles. Para los cuales Hausdorff observó que un cardinal κ con tal propiedad, ha de satisfacer que $\kappa = \aleph_\kappa$ y en realidad, es un punto límite de cerradura bajo procesos de cardinales límites. Con base en la evidencia que había encontrado, Hausdorff menciona lo siguiente acerca de la afirmación que existan tales objetos, "el menor de ellos tiene una magnitud tan exorbitante que difícilmente estará alguna vez en consideración para los propósitos usuales de la teoría de conjuntos". Hoy en día, es sabido que la existencia de cardinales débilmente inaccesibles no puede ser establecida en ZFC, pues induce un modelo para esta teoría.

Posteriormente, Mahlo, Sierpiński, Tarski, Zermelo, Ulam, Erdős, Hanf, Levy, Scott, entre otros, fueron protagonistas en el desarrollo de distintos tipos de cardinales grandes, cada vez mayores y provenientes de diferentes áreas de las matemáticas. Durante mediados y finales del siglo XX, se estudiaron estos objetos y en principio, uno podría imaginarse que no hay relación evidente entre tales cardinales, sin embargo, poco a poco se fue descubriendo que (por alguna misteriosa razón) los grandes cardinales se encuentran acomodados en una jerarquía lineal de consistencia entre estos, i.e. la existencia de cierto cardinal grande implica la existencia de los cardinales grandes menores al original. Este tipo de situaciones son parte principal del presente.

A lo largo de esta tesis, se pretende definir algunos cardinales grandes y exhibir propiedades importantes de los mismos, consecuencias relevantes que sean causadas por la existencia de alguno de ellos. Como veremos, los cardinales grandes traen resultados interesantes dentro de las matemáticas, demostramos muchas de estas consecuencias y sobretodo, aquellas que tienen su protagonismo en la parte pura de las matemáticas. También, se brindan las herramientas básicas para entender el tratamiento de los grandes cardinales, se busca que esta tesis sea autocontenida y que pueda tener impacto en la base y referencia de nuevos textos que traten este tema, así como un material de autoestudio.

Algo relevante que se hace en este trabajo, es que se muestran las relaciones que hay entre los diversos cardinales grandes que se presentan. Esto es muy importante, puesto que hace ver la relación lineal que hay entre estos objetos, lo cual es interesante puesto que muchos parecieran no presentar nexo entre los mismos. En casos donde no es posible mostrar estas implicaciones, se hace alusión a algún texto que exhiba esto, esto se hará principalmente puesto que el alcance de este estudio es otro.

Finalmente, vale la pena mencionar que la manera en que se presenta el material es dando el estudio de un cardinal grande por capítulo, empezando por los más pequeños y continuando con los que sean mayores respecto a la consistencia de tales. Dentro de cada capítulo se inicia con la teoría necesaria (si es el caso) para el tratamiento de cierto cardinal grande, algunos resultados no son demostrados pues son teoremas populares, además se da la referencia en donde se puede encontrar la prueba de los mismos. El resto del capítulo se dedica a estudiar propiedades del cardinal grande en cuestión y de su relación con los cardinales grandes anteriores a él. Durante la exposición de estos resultados, siempre se ha pretendido presentar demostraciones y prueba de detalles, los cuales cualquier texto, referente al tema, suele omitir en sus páginas.

Contenido

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Notación y convenciones

Seguiremos las notaciones y definiciones encontradas en [7]. A menos que se indique lo contrario, usamos las primeras letras griegas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ para referirnos a números ordinales, las letras griegas minúsculas encontradas en medio $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots$ nos ayudan a denotar números cardinales. Asumiendo el Axioma de Elección, sabemos que los números cardinales forman una clase bien ordenada y cada uno se corresponde con algún número alef, denotamos por $\aleph_\alpha$, el cardinal α-ésimo infinito. Mediante κ^+ nos referimos al cardinal sucesor de κ, i.e. el menor número cardinal que es mayor a κ.

Usando ON hacemos alusión a la clase formada por todos los números ordinales, V representa el universo de todos los conjuntos. ZF representa la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel, formada por seis axiomas y dos esquemas de axioma, los cuales pueden hallarse en la referencia dada en el párrafo anterior, ZFC es ZF junto con el Axioma de Elección, AC es el Axioma de Elección, CH es la Hipótesis del Continuo y GCH representa la Hipótesis Generalizada del Continuo.

Para un conjunto cualquiera S, $\mathcal{P}(S)$ representa el conjunto potencia de S, $|S|$ denota el número cardinal de S. Escribimos ω para referirnos al primer ordinal infinito, $\aleph_0$ al tratar ω como el primer cardinal infinito y $\mathbb{N}$ hace alusión al conjunto $\omega \setminus \{\emptyset\}$.

También, dado un cardinal κ y un conjunto S, $[S]^\kappa$ es el conjunto $\{X \subseteq S : |X| = \kappa\}$ y $[S]^{<\kappa}$ el conjunto $\{X \subseteq S : |X| < \kappa\}$. Usaremos la aritmética ordinal, cardinal y la aritmética infinita de cardinales. Si κ y λ son números cardinales (ordinales), entonces al tratar la exponenciación cardinal (ordinal), escribimos κ^λ para denotar tal operación.

Dados dos conjuntos A y B, ${}^A B$ es el conjunto de todas las funciones con dominio A y codominio B. Para una función f, $f[X]$ representa el conjunto imagen de X bajo f, $f \restriction X$ es la restricción de f al subconjunto X. Mediante $x \subsetneq y$, hacemos alusión a que x es un subconjunto propio de y, es decir $x \subseteq y$ y existen elementos de y que no pertenecen a x. Recordemos que para un conjunto X de números ordinales (cardinales), los ordinales (cardinales) $\min(X)$ y $\sup(X)$ se identifican con $\bigcap X$ y $\bigcup X$, respectivamente.

Se asume familiaridad con nociones básicas de lógica matemática. Un lenguaje lógico (formal) $\mathcal{L}$ está formado por un conjunto de *símbolos lógicos* y uno de *símbolos no lógicos*, el primero está formado por variables, símbolos de agrupación, conectivos lógicos y cuantificadores lógicos (también se puede incluir un símbolo de igualdad); el segundo está formado por símbolos constantes, para cada $n \in \mathbb{N}$, símbolos funcionales de aridad n y símbolos predicativos de aridad n.

Recordemos que el conjunto de los *términos* es aquel formado por las variables, los símbolos constantes o la aplicación de un símbolo funcional de algún término ya definido. Mientras que el conjunto de *fórmulas* contiene la igualdad de cualesquiera dos términos, la aplicación de un símbolo predicativo de términos (estos dos primeros tipos de fórmulas son llamadas *fórmulas atómicas*), si se tienen fórmulas, la aplicación de conectivos con una fórmula, es una fórmula, y la aplicación de un cuantificador seguido de una variable y de una fórmula, es una fórmula. Esto induce una manera natural de demostrar afirmaciones que involucran términos o fórmulas, comúnmente llamada "prueba por inducción sobre la longitud de ...".

Una variable se dice libre en una fórmula si no se encuentra al alcance de algún cuantificador. Si φ es una fórmula, $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ indica que sus variables libres son exactamente $v_1, \ldots, v_n$. Una fórmula sin variables libres es llamada una sentencia. Dada $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$, si $a_1, \ldots, a_n \in A$ para algún conjunto A, $\varphi[a_1, \ldots, a_n]$ representa la fórmula resultante de sustituir las instancias de las variables $v_1, \ldots, v_n$ por $a_1, \ldots, a_n$, respectivamente. Esto mismo aplica para el caso de términos.

Un *modelo* $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{L}$, es una estructura formada por un conjunto no vacío llamado el *universo, dominio o conjunto subyacente* de $\mathfrak{A}$, una función para cada símbolo funcional, un conjunto para cada símbolo predicativo y un elemento fijo del universo, para cada símbolo constante. Finalmente, $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ nos dice que φ es satisfecha en el modelo $\mathfrak{A}$ por la asignación (valuación) que toma a cada v_i en a_i, para cada i. El uso de $\models$ es extendido a colecciones de fórmulas (por ejemplo $\mathfrak{A} \models \mathrm{ZFC}$) mediante el significado esperado y obvio. Se recomienda consultar [1] para más información al respecto.

Una teoría es un conjunto formado solamente por sentencias. Para una teoría T, $\mathrm{con}(T)$ es la afirmación formal de su consistencia en términos de una aritmetización de su lenguaje. Mediante $\vdash$ hacemos referencia a que existe una demostración, haciendo uso de los axiomas de la lógica (de primer orden), de la fórmula (conjunto de fórmulas) que se encuentre delante de $\vdash$, mientras que lo que antecede a $\vdash$ indica las hipótesis que se han tomado para demostrar lo posterior. Por el Teorema de Completitud de Gödel, una teoría de primer orden es consistente si y solo si admite un modelo (una estructura que satisface las sentencias de la teoría).

1.2. Conjuntos bien fundados

Definición 1.1. Usando recursión definimos, para cada ordinal α, $R(\alpha)$ de la siguiente manera:

i) $R(0) = \emptyset$,

ii) $R(\alpha + 1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$,

iii) $R(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} R(\beta)$ si $\alpha \neq 0$ es límite.

Podemos considerar la clase $WF = \bigcup\{R(\alpha) : \alpha \text{ es ordinal}\}$. Diremos que x es un conjunto bien fundado si $x \in R(\alpha)$ para algún α ordinal, en tal caso también escribiremos $x \in WF$.

Presentamos algunas propiedades que cumplen estos conjuntos, las cuales serán de utilidad a lo largo del trabajo.

Proposición 1.2. *Si α y β son ordinales, entonces:*

i) *$R(\alpha)$ es un conjunto transitivo.*

ii) *Si $\beta \leq \alpha$, entonces $R(\beta) \subseteq R(\alpha)$.*

Demostración: i). Por inducción transfinita sobre α. Si $\alpha = 0$, entonces $R(\alpha) = \emptyset$, luego $R(\alpha)$ es claramente transitivo. Si $\alpha = \gamma+1$ y se tiene para γ, entonces sea $x \in R(\alpha)$ y sea $y \in x$, luego por definición $x \subseteq R(\gamma)$, así $y \in R(\gamma)$. Por hipótesis inductiva $y \subseteq R(\gamma)$ y entonces $y \in \mathcal{P}(R(\gamma)) = R(\gamma+1) = R(\alpha)$. Con esto $x \subseteq R(\alpha)$.

Si α es límite y se tiene para cada $\gamma < \alpha$, entonces sea $x \in R(\alpha)$ y sea $y \in x$, por definición $x \in R(\gamma)$ para algún ordinal $\gamma < \alpha$. Por hipótesis inductiva tenemos que $x \subseteq R(\gamma)$, así que $y \in R(\gamma)$, luego $y \in R(\alpha)$.

ii). Por inducción transfinita sobre α. Si $\alpha = 0$, entonces $\beta = 0$ y así $R(\alpha) = R(\beta) = \emptyset$. Si $\alpha = \gamma + 1$ y se tiene para γ, entonces supongamos que $\beta < \alpha = \gamma+1$, pues si $\beta = \alpha$ es clara la contención. Así que, si $\beta < \gamma + 1$, entonces $\beta \leq \gamma$ y por hipótesis inductiva, tenemos que $R(\beta) \subseteq R(\gamma)$. Por definición, lo anterior implica que $R(\beta) \in R(\gamma+1)$ y por i) se tiene que $R(\beta) \subseteq R(\gamma+1) = R(\alpha)$.

Si α es límite, hacemos la misma suposición que se hizo en el párrafo anterior y asumimos que $\beta < \alpha$. Entonces $R(\beta) \subseteq \bigcup_{\gamma<\alpha} R(\gamma) = R(\alpha)$. ■

Observemos que si $x \in WF$, entonces el menor ordinal α tal que $x \in R(\alpha)$, debe ser sucesor. Claramente $\alpha \neq 0$ y si α es límite, tenemos por definición que existe $\beta < \alpha$ tal que $x \in R(\beta)$ y entonces α no es mínimo. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.3. Si $x \in WF$, entonces el rango de x, denotado por $\operatorname{rank}(x)$, es el menor ordinal α tal que $x \in R(\alpha+1)$.

A partir de este concepto, podemos notar que si $\beta = \text{rank}(x)$, entonces $x \in R(\beta+1) = \mathcal{P}(R(\beta))$, así que $x \subseteq R(\beta)$ y $x \notin R(\beta)$. Además, para cada $\alpha > \beta$, $x \in R(\alpha)$.

Lema 1.4. *Para cada α ordinal, $R(\alpha) = \{x \in WF : \text{rank}(x) < \alpha\}$.*

Demostración: $\subseteq$: Sea $x \in R(\alpha)$, por definición $\text{rank}(x)+1 \leq \alpha$, luego $\text{rank}(x) < \alpha$.

$\supseteq$: Sea $x \in WF$ con $\beta = \text{rank}(x) < \alpha$, por ii) de la proposición anterior $R(\beta+1) \subseteq R(\alpha)$ y ya que $x \in R(\beta+1)$, entonces $x \in R(\alpha)$. ■

Además, la clase WF está cerrada bajo elementos que pertenecen a conjuntos bien fundados y la relación que hay respecto a sus rangos es la esperada.

Lema 1.5. *Si $y \in WF$, entonces:*

i) *Si $x \in y$, entonces $x \in WF$ y $\text{rank}(x) < \text{rank}(y)$.*

ii) $\text{rank}(y) = \sup\{\text{rank}(x)+1 : x \in y\}$.

Demostración: i). Sea $x \in y$, como $y \in R(\alpha)$ para algún ordinal α y $R(\alpha)$ es transitivo, entonces $x \in R(\alpha)$. Con esto $x \in WF$.

Si $\beta = \text{rank}(y)$, entonces $y \subseteq R(\beta)$, así que $x \in R(\beta)$, luego $\text{rank}(x)+1 \leq \beta$, con lo cual $\text{rank}(x) < \beta = \text{rank}(y)$.

ii). Sea $\beta = \sup\{\text{rank}(x)+1 : x \in y\}$. Si $x \in y$, entonces por i) $\text{rank}(x) < \text{rank}(y)$, luego $\text{rank}(x)+1 \leq \text{rank}(y)$. Con esto, $\beta \leq \text{rank}(y)$.

Por otro lado, si $x \in y$, entonces $\text{rank}(x) < \text{rank}(x)+1 \leq \beta$ con lo cual $x \in R(\beta)$. Con esto $y \subseteq R(\beta)$, así que $y \in R(\beta+1)$ y entonces $\text{rank}(y) \leq \beta$. ■

El siguiente teorema refleja una propiedad que uno esperaría que tengan los ordinales.

Teorema 1.6. *Para cada ordinal α, $\alpha \in WF$ y $\text{rank}(\alpha) = \alpha$.*

Demostración: Por inducción transfinita sobre α. Para $\alpha = 0$ es claro, pues $0 \in R(1)$ y ya que $R(0) = \emptyset$, entonces por definición $\operatorname{rank}(0) = 0$.

Supongamos que se tiene para cada $\beta < \alpha$. Sea $\beta \in \alpha$, entonces $\beta \in WF$ y $\operatorname{rank}(\beta) = \beta$, luego $\beta \in R(\beta + 1)$. Con lo que, si $\gamma = \sup\{\beta + 1 : \beta < \alpha\}$, entonces $\beta \in R(\gamma)$, así que $\alpha \subseteq R(\gamma)$, con ello $\alpha \in R(\gamma + 1)$. Con esto $\alpha \in WF$.

Ahora, si $\beta < \alpha$, entonces $\beta + 1 = \operatorname{rank}(\beta) + 1 \leq \alpha$ y así por ii) del lema anterior $\operatorname{rank}(\alpha) \leq \alpha$. Por otro lado, si $\beta < \alpha$, entonces $\beta < \beta+1 \leq \operatorname{rank}(\alpha)$, es decir $\beta < \operatorname{rank}(\alpha)$; con lo cual $\alpha \subseteq \operatorname{rank}(\alpha)$, es decir $\alpha \leq \operatorname{rank}(\alpha)$. ■

Finalmente, como herramienta básica para la construcción de estructuras con características útiles, tenemos el siguiente teorema cuya demostración omitiremos y referimos al lector en [5] para encontrar más información al respecto.

Teorema 1.7 (Lema del Colapso de Mostowski)**.** *Supongamos que $(M, E, \dots)$ es una (posiblemente clase propia) estructura con E una relación binaria sobre M tal que:*

a) *E es bien fundada;*

b) *(M, E) es extensional, i.e. si $a, b \in M$ y xEa si y solo si xEb para cada $x \in M$, entonces $a = b$;*

c) *E es casi-conjunto, i.e. $\{x \in M : xEa\}$ es un conjunto para cada $a \in M$.*

Entonces existe $\pi : (M, E, \dots) \to (M', \in, \dots)$ isomorfismo de modelos, que es único y tal que M' es transitivo. ■

A lo largo de este trabajo, cuando se haga uso del teorema anterior, se dirá que $(M', \in, \dots)$ es el *colapso transitivo* de $(M, E, \dots)$.

1.3. Cofinalidad y números beth

Definición 1.8. Sea α un ordinal, entonces:

i) Sea $X \subseteq \alpha$, decimos que X no está acotado o es no acotado en α si $\sup X = \alpha$. En caso contrario se dirá que X es acotado en α.

ii) Si α es límite y no cero, decimos que $f : \beta \to \alpha$ es cofinal si $f[\beta]$ es no acotado en α.

iii) Llamaremos cofinalidad de α al menor ordinal β tal que existe $f : \beta \to \alpha$ cofinal, denotamos este valor por $\mathrm{cf}(\alpha)$.

Notemos que $id : \alpha \to \alpha$ es siempre una función cofinal, con lo que su cofinalidad es un valor bien definido; más aún, $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$. No es difícil verificar que $\mathrm{cf}(\alpha)$ es un cardinal para cualquier ordinal límite $\alpha \neq 0$.

Para ilustrar los conceptos anteriores, probaremos las siguientes proposiciones que serán de utilidad a lo largo del trabajo.

Proposición 1.9. *Sea $\alpha \neq 0$ un ordinal límite y $X \subseteq \alpha$ no acotado en α, entonces $\mathrm{cf}(\alpha) \leq |X|$.*

Demostración: Sea $f : |X| \to X$ una biyección, entonces $g : |X| \to \alpha$ dada por $g(\beta) = f(\beta)$ es claramente cofinal. En efecto, si $\delta \in \alpha$, entonces como X es no acotado, existe $x_0 \in X$ tal que $\delta < x_0$. Ya que f es biyectiva, existe $\alpha_\delta \in |X|$ tal que $f(\alpha_\delta) = x_0$, con esto $\delta < x_0 = f(\alpha_\delta) = g(\alpha_\delta)$.

Así que por definición, $\mathrm{cf}(\alpha) \leq |X|$. ■

Proposición 1.10. *Sea $\alpha \neq 0$ un ordinal límite y $X \subseteq \alpha$ no acotado en α, si $\mathrm{type}(X) = \lambda$ y $f : \lambda \to X$ es un isomorfismo de orden, entonces:*

i) $\lambda \leq \alpha$.

ii) *Si* $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ *entonces* $\lambda = \alpha$.

Demostración: i). Dado que $X \subseteq \alpha$, entonces por un resultado clásico tenemos que $\lambda = \mathrm{type}(X) \leq \mathrm{type}(\alpha) = \alpha$.

ii). Por i) sabemos que $\lambda \leq \alpha$. Si $\lambda < \alpha$, entonces dado que f es biyectiva $|X| = |\lambda| \leq \lambda < \alpha = \mathrm{cf}(\alpha)$. Por la proposición anterior, esto implica que X es acotado en α lo cual es una contradicción. ■

Es interesante distinguir los casos donde $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$. Así que consideremos los siguientes conceptos.

Definición 1.11. Sea κ un cardinal, diremos que κ es regular si $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. Por otra parte, κ es singular si $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$.

Recordemos las siguientes propiedades que cumplen los distintos tipos de cardinales que hemos introducido.

Proposición 1.12. *Sea κ un cardinal y α un ordinal límite:*

i) $\mathrm{cf}(\alpha)$ *es un cardinal regular.*

ii) *Si κ es sucesor entonces κ es regular.*

iii) *κ es singular si y solo si es la unión ajena de menos que κ conjuntos con cada conjunto de cardinalidad menor que κ.*

iv) $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$. ■

Otro concepto que es muy importante distinguir es el de un cardinal límite fuerte, el cual hacemos claro a continuación.

Definición 1.13. Sea κ un cardinal no cero, diremos que es límite fuerte si para cada cardinal $\lambda < \kappa$, $2^\lambda < \kappa$.

Se verifica de manera inmediata que un cardinal límite fuerte es un cardinal límite. Un ejemplo claro de un cardinal límite fuerte es $\aleph_0$. Podemos caracterizar a los cardinales límite fuerte mediante el siguiente concepto.

Definición 1.14. Usando recursión definimos, para cada ordinal α, $\beth_\alpha$ mediante:

i) $\beth_0 = \aleph_0$,

ii) $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$,

iii) $\beth_\alpha = \sup\limits_{\beta<\alpha}\{\beth_\beta\}$ si $\alpha \neq 0$ es límite.

Observemos que para cada ordinal α, $\alpha \leq \beth_\alpha$. Por inducción transfinita sobre α. Para $\alpha = 0$ es claro. Si $\alpha = \beta + 1$, entonces por hipótesis inductiva, $\beta \leq \beth_\beta < 2^{\beth_\beta} = \beth_{\beta+1} = \beth_\alpha$, luego $\alpha = \beta + 1 \leq \beth_\alpha$. Si α es límite, sea $\beta < \alpha$, entonces por hipótesis inductiva, $\beta \leq \beth_\beta < \beth_{\beta+1} \leq \sup_{\gamma<\alpha}\{\beth_\gamma\} = \beth_\alpha$; se sigue que $\beta < \beth_\alpha$, con lo cual $\alpha \subseteq \beth_\alpha$, i.e. $\alpha \leq \beth_\alpha$.

Un inducción similar a la anterior muestra que si $\beta \leq \alpha$ entonces $\beth_\beta \leq \beth_\alpha$.

Lema 1.15. *Si κ es un cardinal límite fuerte entonces $\kappa = \beth_0$ ó $\kappa = \beth_\alpha$ para algún ordinal límite α.*

DEMOSTRACIÓN: Ya que $\kappa \leq \beth_\kappa < \beth_{\kappa+1}$, entonces podemos considerar α mínimo con la propiedad de que $\kappa < \beth_\alpha$. Claramente α no es límite, de lo contrario α no es mínimo. Además $\alpha \neq 0$, pues entonces κ no es límite fuerte; así que $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β. Luego, $\beth_\beta \leq \kappa < \beth_{\beta+1} = 2^{\beth_\beta}$.

Por lo anterior, si $\beth_\beta < \kappa$, entonces κ no es límite fuerte, con lo cual $\beth_\beta = \kappa$. Además si β es sucesor, digamos $\beta = \gamma + 1$ para algún ordinal γ, entonces $\beth_\gamma < 2^{\beth_\gamma} = \beth_{\gamma+1} = \beth_\beta = \kappa$, pero esto es imposible pues κ es límite fuerte. Con esto, β es límite ó $\beta = 0$. ■

El siguiente lema es un resultado natural que uno esperaría a partir de la definición de los números beth cuando se tiene un ordinal límite como índice.

Lema 1.16. *Para cada ordinal límite $\alpha \neq 0$, $\mathrm{cf}(\beth_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathrm{cf}(\beth_\alpha) = \lambda$ y $\mathrm{cf}(\alpha) = \mu$, entonces para $f : \mu \to \alpha$ cofinal, consideremos $g : \mu \to \beth_\alpha$ dada por $g(\delta) = \beth_{f(\delta)}$. Notemos que g es cofinal. En efecto, sea $\kappa < \beth_\alpha$, entonces $\kappa < \beth_\gamma$ para alguna $\gamma < \alpha$ y como f es cofinal, existe $\delta < \mu$ tal que $f(\delta) > \gamma$. Así que, $\kappa < \beth_\gamma \leq \beth_{f(\delta)} = g(\delta)$. Por tanto, por definición tenemos que $\lambda \leq \mu$.

Sea $h : \lambda \to \beth_\alpha$ cofinal, consideremos $r : \lambda \to \alpha$ dada por $r(\delta) = \beta$, donde $\beta < \alpha$ es el menor ordinal tal que $h(\delta) < \beth_\beta$. Comprobaremos que r es cofinal. Sea $\gamma < \alpha$, entonces $\beth_\gamma < \beth_{\gamma+1} \leq \beth_\alpha$, así que como h es cofinal, existe $\delta_\gamma < \lambda$ tal que $h(\delta_\gamma) > \beth_\gamma$. Ya que $r(\delta_\gamma)$ es el menor ordinal tal que $h(\delta_\gamma) < \beth_{r(\delta_\gamma)}$, entonces

$\beth_\gamma < h(\delta_\gamma) < \beth_{r(\delta_\gamma)}$, de donde se sigue que $\gamma < r(\delta_\gamma)$, de lo contrario $\beth_{r(\delta_\gamma)} \leq \beth_\gamma$ lo cual es imposible.

Lo anterior exhibe que r es cofinal y así, por definición $\mu \leq \lambda$. En consecuencia, tenemos la igualdad deseada. ■

Ahora, veremos como se relacionan los números beth con los tamaños de los conjuntos bien fundados con rango menor al de un ordinal dado.

Lema 1.17. *Para cada ordinal α, $|R(\omega+\alpha)| = \beth_\alpha$. En particular, si $\alpha \geq \omega^2$ entonces $|R(\alpha)| = \beth_\alpha$.*

DEMOSTRACIÓN: Primero, probemos por inducción sobre n que para cada $n < \omega$, $|R(n)| < \omega$. Para $n = 0$ es claro, así que supongamos que se tiene para $m < \omega$ y que $n = m+1$, entonces $|R(n)| = |\mathcal{P}(R(m))| = 2^{|R(m)|} < \omega$.

Ahora, probaremos el teorema por inducción transfinita sobre α. Si $\alpha = 0$, entonces $|R(\omega+\alpha)| = |R(\omega+0)| = |R(\omega)| = |\bigcup_{n<\omega} R(n)| \leq \sum_{n<\omega} |R(n)| = \aleph_0 \cdot \sup_{n<\omega}\{|R(n)|\} = \aleph_0 = \beth_0$. Además $\omega \subseteq R(\omega)$, luego $\beth_0 = |\omega| \leq |R(\omega)| = |R(\omega+\alpha)|$. Así que $|R(\omega)| = \beth_0$.

Si $\alpha = \beta+1$, y se tiene para β, entonces $|R(\omega+\alpha)| = |R(\omega + (\beta+1))| = |R((\omega+\beta)+1)| = |\mathcal{P}(R(\omega+\beta))| = 2^{|R(\omega+\beta)|} = 2^{\beth_\beta} = \beth_{\beta+1} = \beth_\alpha$.

Si α es límite y se tiene la afirmación para cada $\beta < \alpha$, entonces $|R(\omega+\alpha)| = |\bigcup_{\beta<\omega+\alpha} R(\beta)| = |\bigcup_{\beta<\alpha} R(\omega+\alpha)| \leq \sum_{\beta<\alpha} |R(\omega+\beta)| = \alpha \cdot \sup_{\beta<\alpha}\{|R(\omega+\beta)|\} = \alpha \cdot \sup_{\beta<\alpha}\{\beth_\beta\} = \alpha \cdot \beth_\alpha = \beth_\alpha$. Por otro lado, sea $\beta < \alpha$, entonces $R(\omega+\beta) \subseteq R(\omega+\alpha)$ así $|R(\omega+\beta)| \leq |R(\omega+\alpha)|$; se sigue que $\sup_{\beta<\alpha}\{|R(\omega+\beta)|\}$, es decir $\beth_\alpha = \sup_{\beta<\alpha}\{\beth_\beta\} \leq |R(\omega+\alpha)|$. Por tanto $|R(\omega+\alpha)| = \beth_\alpha$.

Esto completa la inducción. Para verificar la última parte, supongamos que $\alpha \geq \omega^2$, por aritmética ordinal existe β ordinal tal que $\omega^2 + \beta = \alpha$. Como $\omega + \alpha = \omega + (\omega^2 + \beta) = (\omega + \omega^2) + \beta = \omega(1+\omega) + \beta = \omega \cdot \omega + \beta = \omega^2 + \beta = \alpha$, tenemos que $|R(\alpha)| = |R(\omega+\alpha)| = \beth_\alpha$. ■

1.4. Conjuntos cerrados

Como parte de este trabajo, encontraremos muchas veces la noción de lo que es un conjunto cerrado así como sobre un conjunto cerrado y no acotado. Muchas de las pruebas, de los resultados que se presentan, serán omitidas debido a que pueden ser encontradas en cualquier texto básico.

Definición 1.18. Un conjunto $C \subseteq \alpha$, con α un ordinal límite, se dice cerrado en α si para cada $\lambda < \alpha$ ordinal límite tal que $\sup(C \cap \lambda) = \lambda$ se cumple que $\lambda \in C$.

La siguiente equivalencia a la definición anterior será muy útil cuando nos interese probar que algún conjunto es cerrado.

Teorema 1.19. *Sea α un ordinal límite y sea $C \subseteq \alpha$, C es cerrado en α si y solo si para cada $X \subseteq C$ no vacío y acotado en α se cumple que* $\sup X \in C$. ■

Veamos como podríamos aplicar este teorema con un ejemplo sencillo.

Ejemplo. Si λ es un ordinal límite, entonces para cada $\alpha < \lambda$ los intervalos $(\alpha, \lambda) = \{\gamma < \lambda : \alpha < \gamma\}$ son conjuntos cerrados en λ. Más aún, son conjuntos no acotados en λ.

DEMOSTRACIÓN: Sea λ un ordinal límite y sea $\alpha < \lambda$, para probar que (α, λ) es un conjunto cerrado, consideremos $X \subseteq (\alpha, \lambda)$ no vacío tal que $\sup X < \lambda$, veremos que $\sup X \in (\alpha, \lambda)$. Sea $\gamma \in X$, entonces $\alpha < \gamma$, así $\alpha < \sup X$; y ya que $\sup X < \lambda$, se tiene por definición que $\sup X \in (\alpha, \lambda)$.

Es claro que (α, λ) es no acotado, pues si $\gamma < \lambda$, entonces para $\beta = \max\{\alpha + 1, \gamma + 1\}$ cumple que $\gamma < \beta$ y que $\beta \in (\alpha, \lambda)$. ■

Cada que tengamos un conjunto $C \subseteq \alpha$ que cumpla con ser cerrado y no acotado en α, con α un ordinal límite, usaremos el término popular y diremos que C es un club en α. Aunado a este concepto, también es común hablar de lo que es un conjunto estacionario. Un conjunto estacionario es un objeto grande, en el sentido de que se encuentra “en casi todas partes” pues siempre tiene elementos en común con cualquier conjunto cerrado y no acotado.

Definición 1.20. Sea α un ordinal límite, $S \subseteq \alpha$ se dirá conjunto estacionario en α si para cada $C \subseteq \alpha$ club en α se cumple que $S \cap C \neq \emptyset$.

Las siguientes son propiedades básicas acerca de los conjuntos estacionarios.

Proposición 1.21. *Sea α un ordinal límite con $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$ y sea $S \subseteq \alpha$, tenemos que:*

i) *Si S es un club en α entonces S es estacionario en α.*

ii) *Si S es estacionario en α entonces $\sup S = \alpha$.*

iii) *Si S es estacionario y C es un club en α entonces $S \cap C$ es estacionario en α.*

iv) *Si S es estacionario en α y $T \supseteq S$ entonces T es estacionario en α.* ■

Para terminar esta sección hablaremos de funciones normales y regresivas.

Definición 1.22. Sea λ un ordinal límite, na función $f : \lambda \to \lambda$ se dice normal si f es estrictamente creciente y para cada $\alpha < \lambda$ límite, se cumple que $f(\alpha) = \sup\{f(\beta) : \beta < \alpha\}$.

A continuación listamos las propiedades más relevantes acerca de las funciones normales.

Proposición 1.23. *Sea κ un cardinal regular no numerable, entonces:*

i) *Un conjunto $C \subseteq \kappa$ es un club en κ si y solo si existe una función normal $f : \kappa \to \kappa$ tal que $f[\kappa] = C$.*

ii) *Si $f : \kappa \to \kappa$ es una función normal, entonces el conjunto de puntos fijos de f es un club en κ.* ■

Finalmente presentamos las funciones regresivas.

Definición 1.24. Sea κ un cardinal y sea $S \subseteq \kappa$, una función $f : S \to \kappa$ se dirá regresiva si para cada $\alpha \in S$, $f(\alpha) < \alpha$, con $\alpha > 0$.

El resultado más clásico acerca de funciones regresivas es el llamado *Pressing Down Lemma* o *Lema de Fodor* el cual enunciamos a continuación.

Teorema 1.25 (Lema de Fodor). *Sea κ un cardinal regular no numerable y $f : S \to \kappa$ una función regresiva sobre un conjunto estacionario $S \subseteq \kappa$, entonces existe un conjunto estacionario $T \subseteq S$ y un ordinal $\gamma < \kappa$, tal que para cada $\alpha \in T$, $f(\alpha) = \gamma$.* ■

1.5. Modelos

A lo largo de este trabajo estaremos interesados en estudiar modelos del lenguaje de la teoría de conjuntos, éste último consiste de un único símbolo predicativo de aridad 2, a saber $\in$; es decir, $\mathcal{L}_{TC} = \{\in\}$. Algunas veces se considerará algún lenguaje $\mathcal{L}$ que extiende a $\mathcal{L}_{TC}$.

Definición 1.26. Una fórmula de LTC es una fórmula Δ_0 si:

i) Es una fórmula atómica, i.e. $(x \in y)$ ó $(x = y)$,

ii) Es de la forma $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$ ó $\varphi \leftrightarrow \psi$, donde φ y ψ son fórmulas Δ_0,

iii) Es $(\exists x \in y)\varphi$ ó $(\forall x \in y)\varphi$, donde φ es una fórmula Δ_0.

Como es usual, $(\exists x \in y)\varphi$ y $(\forall x \in y)\varphi$ son solo abreviaciones para $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$ y $\forall x(x \in y \to \varphi)$ respectivamente.

Ahora, presentamos una manera de definir $\varphi^{M,E}$ directamente, sin recurrir a la definición de $\models$, con lo cual no es necesario que M y E sean conjuntos.

Definición 1.27. Sean M un conjunto (clase), E una relación binaria sobre M y sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos (LTC). La relativización de φ a (M, E) es la fórmula $\varphi^{M,E}(x_1, \ldots, x_n)$, definida inductivamente como:

- $(x \in y)^{M,E} \leftrightarrow xEy$,
- $(x = y)^{M,E} \leftrightarrow x = y$,
- $(\neg\varphi)^{M,E} \leftrightarrow \neg\varphi^{M,E}$,
- $(\varphi \wedge \psi)^{M,E} \leftrightarrow \varphi^{M,E} \wedge \psi^{M,E}$,
- $(\exists x\varphi)^{M,E} \leftrightarrow (\exists x \in M)\varphi^{M,E}$.

De manera similar para los otros conectivos y para $\forall$.

En el caso de que E es $\in$, escribimos φ^M en vez de $\varphi^{M,E}$. Asumiremos que, cuando se trata la relativización $\varphi^{M,E}(x_1, \ldots, x_n)$, las variables $x_1, \ldots, x_n$ corren sobre M.

Algunas veces usamos la notación usual $(M, E) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ cada vez que $\varphi^{M,E}(x_1, \ldots, x_n)$ para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in M$; y se dirá que el modelo (M, E) satisface $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Si M es transitivo, entonces se dice que el modelo (M, E) es transitivo

Introducimos el concepto de submodelo elemental, el cual usaremos en diversas partes del trabajo.

Definición 1.28. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ modelos para un lenguaje $\mathcal{L}$, entonces:

1. $\mathfrak{A}$ es submodelo de $\mathfrak{B}$, denotado por $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ si $A \subseteq B$ y,

   i) Si f es un símbolo funcional de aridad n, con $n > 0$, entonces $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \restriction A^n$,

   ii) Si P es un símbolo predicativo de aridad n, con $n > 0$, entonces $P^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{B}} \cap A^n$,

   iii) Si c es un símbolo constante, entonces $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

2. Si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y si φ es una fórmula de $\mathcal{L}$, entonces $\mathfrak{A} \preceq_\varphi \mathfrak{B}$ significa que $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ si y solo si $\mathfrak{B} \models \varphi[\sigma]$ para toda valuación σ en A.

   Diremos que $\mathfrak{A}$ es un submodelo elemental de $\mathfrak{B}$, lo cual denotamos por $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, si $\mathfrak{A} \preceq_\varphi \mathfrak{B}$ para toda fórmula φ de $\mathcal{L}$.

El siguiente lema de carácter auxiliar nos dará una condición necesaria y suficiente para que cierto submodelo $\mathfrak{A}$ de algún modelo $\mathfrak{B}$ sea del tipo elemental. Una demostración para tal lema la podemos encontar en [8].

Lema 1.29 (Criterio de Tarski-Vaught). *Sea $\mathfrak{A}$ un submodelo de $\mathfrak{B}$. Entonces $\mathfrak{A}$ es un submodelo elemental de $\mathfrak{B}$ si y solo si para cualquier fórmula $\varphi(v, \bar{w})$ y $\bar{a} \in A$, si existe $b \in B$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[b, \bar{a}]$, entonces existe $c \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[c, \bar{a}]$.* ■

Al trabajar en LTC, si $\mathfrak{A} \prec_\varphi \mathfrak{B}$ (también escrito como $A \prec_\varphi B$), diremos que φ es absoluta para A, B. Más aún, se dirá que φ es absoluta para $\mathfrak{A}$ (absoluta para A) si $A \preceq V$.

No es díficil verificar que, usando las definiciones respectivas, en el LTC φ es absoluta para M si y solo si para cada $x_1, \dots, x_n \in M$,

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^M(x_1, \dots, x_n).$$

Para poder probar que ciertas estructuras modelan ZFC, comprobaremos que algunos conceptos básicos dentro de las matemáticas son absolutos, en el sentido de la definición anterior. Para ello, veremos que muchos de ellos resultan ser del tipo Δ_0. Mediante el siguiente lema, veremos que las fórmulas que son de este tipo son absolutas cuando el modelo es transitivo.

Lema 1.30. *Si M es un modelo transitivo de $\mathcal{L}_{TC}$ y φ es una fórmula Δ_0, entonces φ es absoluta para M.*

Demostración: Por inducción sobre la complejidad de la fórmula. Si φ es atómica, entonces por 1.27 es clara la afirmación.

Supongamos que se tiene para ψ y veamos que $\varphi \equiv \neg\psi$ la cumple. En efecto, como para cada $x_1, \dots, x_n \in M$, $\psi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi^M(x_1, \dots, x_n)$ entonces es claro que, para cada $x_1, \dots, x_n \in M$, $\neg\psi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \neg\psi^M(x_1, \dots, x_n)$. De manera similar se prueba para $\varphi \equiv \psi \wedge \gamma$.

Ahora, si $\varphi \equiv (\exists x \in y)\psi(x, y, x_1, \dots, x_n)$ y se tiene la afirmación para ψ. Por hipótesis de inducción, para cada $x, y, x_1, \dots, x_n \in M$, $\psi(x, y, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi^M(x, y, x_1, \dots, x_n)$. Sean $y, x_1, \dots, x_n \in M$, entonces:

i) Si $\varphi^M(y, x_1, \ldots, x_n)$, lo cual es $((\exists x \in y)\psi(x, y, x_1, \ldots, x_n))^M$, esto es $(\exists x(x \in y \wedge \psi(x, y, x_1, \ldots, x_n)))^M$, entonces al hacer la relativización respectiva se tiene $(\exists x \in M)(x \in y \wedge \psi^M(x, y, x_1, \ldots, x_n))$ y aplicando la hipótesis de inducción $(\exists x \in M)(x \in y \wedge \psi(x, y, x_1, \ldots, x_n))$. En esta última fórmula, tenemos $\exists x(x \in y \wedge \psi(x, y, x_1, \ldots, x_n))$, o bien $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$.

ii) Si se tiene $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$, lo cual es $(\exists x \in y)\psi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$ y esto es $\exists x(x \in y \wedge \psi(x, y, x_1, \ldots, x_n))$, así que por hipótesis inductiva se tiene $\exists x(x \in y \wedge \psi^M(x, y, x_1, \ldots, x_n))$. Pero el hecho de que $x \in y$ implica que $x \in M$, debido a que $y \in M$ y M es un modelo transitivo, entonces tenemos $(\exists x \in M)(x \in y \wedge \psi^M(x, y, x_1, \ldots, x_n)$ usando la relativización esto es $(\exists x(x \in y \wedge \psi(x, y, x_1, \ldots, x_n)))^M$

Así que, i) y ii) exhiben que $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$. Esto completa la inducción. ■

Finalmente, mostramos un par de conceptos que son Δ_0, con lo cual son absolutos según el lema anterior.

1. $x \subseteq y$. Para describir que $x \subseteq y$ tenemos la fórmula $(\forall u \in x)u \in y$ y ya que $u \in y$ es una fórmula Δ_0 por definición, entonces toda la fórmula sigue siendo Δ_0.

2. $z = x \cap y$. Para este caso, la fórmula es $(\forall u \in z)(u \in x \wedge u \in y) \ \wedge (\forall u \in x)(u \in y \rightarrow u \in z)$. La cual es claramente una conjunción de fórmulas Δ_0.

De manera similar podemos verificar que $x \cup y$, $x \times y$, ω, f es función, f es inyectiva, f es sobreyectiva, f es biyectiva, son conceptos Δ_0 y así, absolutos en modelos transitivos de $\mathcal{L}_{TC}$. Referimos al lector a [4] y [10], donde encontrará más al respecto, además de poder verificar también que en modelos transitivos, la aritmética ordinal es absoluta.

También enunciamos, de manera resumida, el segundo Teorema de Incompletitud de Gödel, el cual informalmente dice. Toda teoría aritmética, recursiva, axiomatizable y consistente no puede demostrar su propia consistencia. Recordemos que ZFC tiene estas características, por lo que no es posible demostrar que ZFC es consistente, a partir de ZFC.

Capítulo 2

Cardinales inaccesibles

2.1. Propiedades

No hay una definición precisa y generalizada de lo que es un cardinal grande, ya que todos tienen la propiedad de proveer un modelo para la teoría de ZFC, su existencia bajo ZFC es imposible de probar, de lo contrario tendríamos una contradicción con el Teorema de Incompletitud de Gödel. Más aún, son cardinales cuya consistencia con ZFC no es posible probar. Esto nos lleva a pensar que quizá no tiene sentido tomarlos en cuenta, sin embargo, el estudio de estos objetos nos lleva a comprobar cuáles son los límites de las diferentes ramas de las matemáticas, así como descubrir proposiciones que requieren más teoría para ser probadas.

Comenzaremos el estudio de los cardinales grandes por los cardinales más pequeños de ellos que son los llamados cardinales inaccesibles.

Definición 2.1. Un cardinal límite no numerable κ es llamado débilmente inaccesible si κ es regular. Si κ es límite fuerte no numerable y regular, entonces κ se dice fuertemente inaccesible.

A los cardinales fuertemente inaccesibles, también se les dirá simplemente cardinales inaccesibles.

Suele verificarse en ZFC que existen cardinales que son puntos fijos de la función aleph, es decir, existen cardinales κ tales que $\kappa = \aleph_\kappa$. De manera intuitiva podemos darnos cuenta que estos cardinales son bastante grandes pues en los casos más comunes siempre sucede que $\kappa < \aleph_\kappa$ y que la diferencia entre ambos es bastante grande; sin embargo, los cardinales inaccesibles son aún más grandes, pues la función beth (que claramente crece más rápido que la función aleph) tiene como puntos fijos regulares los cardinales inaccesibles.

Lema 2.2. *Si κ es inaccesible entonces $\kappa = \beth_\kappa$*

Demostración: Como κ es no numerable, tenemos que $\kappa \neq \beth_0$. Además al ser κ un cardinal límite fuerte, sabemos por el Lema 1.15 que $\kappa = \beth_\alpha$ para algún ordinal límite α. Recordando las propiedades de los números beth y que κ es regular, tenemos:

$$\alpha \leq \beth_\alpha = \kappa = \mathrm{cf}(\kappa) = \mathrm{cf}(\beth_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$$

De aquí que $\alpha = \kappa$ y con ello $\kappa = \beth_\alpha = \beth_\kappa$. ■

Para poder demostrar que un cardinal inaccesible da lugar a un modelo de ZFC, necesitamos un último lema auxiliar.

Lema 2.3. *Si κ es inaccesible entonces para cada $x \in R(\kappa)$, se tiene que $|x| < \kappa$.*

Demostración: Si $x \in R(\kappa)$, entonces $x \in R(\alpha)$ para algún $\alpha < \kappa$, podemos asumir que $\alpha \geq \omega^2$ ya que $\kappa > \omega^2$ y si $\alpha < \omega^2$, se sigue que $x \in R(\omega^2)$ pues $R(\alpha) \subseteq R(\omega^2)$. Por el Lema 1.17 se tiene que $|R(\alpha)| = \beth_\alpha$. Por tanto, como $x \subseteq R(\alpha)$ pues $R(\alpha)$ transitivo, tenemos que $|x| \leq |R(\alpha)| = \beth_\alpha < \beth_\kappa = \kappa$. ■

2.2. Relación con ZFC

Finalmente, tenemos lo necesario para verificar que un cardinal inaccesible κ genera un modelo para ZFC. Lo que vamos a hacer es ver que, a partir de ZFC, cada axioma de la teoría se cumple en el modelo y, con ello dicho modelo satisface la teoría de Zermelo-Fraenkel. Vale la pena mencionar que, ya que el Axioma de Comprensión y el Axioma de Reemplazo son esquemas de axioma, es decir por cada fórmula de $\mathcal{L}_{TC}$ se tiene un axioma diferente, se entiende en un principio que la conclusión del teorema dice que para cada axioma de ZFC (los cuales son infinitos en el sentido mencionado) el modelo lo satisface; pero, ya que el modelo que damos es un conjunto, entonces lo consideraremos como modelo de ZFC en el sentido de la teoría de modelos

Teorema 2.4. *Si κ es inaccesible entonces $R(\kappa) \models$ ZFC.*

DEMOSTRACIÓN: Probaremos que en $R(\kappa)$ se verifican los axiomas de ZFC.

i) *Extensión*:

$$\forall x, y(\forall z(z \in x \leftrightarrow x \in y) \rightarrow x = y)$$

Para comprobar que se cumple en $R(\kappa)$, sean $x, y \in R(\kappa)$, supongamos que para cada $z \in R(\kappa)$, $z \in x \leftrightarrow z \in y$. Ya que $R(\kappa)$ es transitivo, $x \subseteq R(\kappa)$ así que para cada $z \in x$, $z \in R(\kappa)$ y por hipótesis $z \in y$. De la misma forma cada $z \in y$, es un elemento de $R(\kappa)$ y entonces $z \in x$. Luego, por el Axioma de Extensión, $x = y$.

ii) *Fundación*:

$$\forall x(\exists u(u \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \land \neg\exists z(z \in x \land z \in y)))$$

Sea $x \in R(\kappa) \setminus \{\emptyset\}$ entonces por el Axioma de Fundación aplicado a x, existe $y \in x$ tal que $\neg\exists z(z \in x \land z \in y)$, y ya que $R(\kappa)$ es transitivo tenemos que $y \in R(\kappa)$ lo cual se quería probar.

iii) *Comprensión*: Para cada fórmula, φ, sin y libre,

$$\forall u(\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in u \land \varphi(x)))$$

Sea $u \in R(\kappa)$ y φ una fórmula de $\mathcal{L}_{TC}$ sin y variable libre, por el Axioma de Comprensión, $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in u \land \varphi^{R(\kappa)}(x))$, basta probar que $y \in R(\kappa)$.

Notemos que por construcción $y \subseteq u$ y como $u \in R(\kappa)$, $u \in R(\alpha)$ para alguna $\alpha < \kappa$. Así que, como $u \subseteq R(\alpha)$, entonces $y \subseteq R(\alpha)$ con esto $y \in R(\alpha + 1) \subseteq R(\kappa)$ por ser κ ordinal límite. Así $y \in R(\kappa)$.

iv) *Par*:

$$\forall x, y(\exists z(x \in z \wedge y \in z))$$

Sean $x, y \in R(\kappa)$, entonces por el Axioma del Par $\exists z'(x \in z' \wedge y \in z')$, consideremos $z = \{u \in z' : u = x \vee u = y\} = \{x, y\}$ el cual existe por el Axioma de Comprensión, veamos que $z \in R(\kappa)$.

Como $x \in R(\kappa)$, se tiene que $x \in R(\alpha)$ para algún $\alpha < \kappa$, de la misma forma $y \in R(\beta)$ para algún $\beta < \kappa$; si $\gamma = \text{máx}\{\alpha, \beta\}$ entonces $x, y \in R(\gamma)$, luego $z = \{x, y\} \subseteq R(\gamma)$, así $z \in R(\gamma + 1) \subseteq R(\kappa)$.

v) *Unión*:

$$\forall F(\exists A \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in F \rightarrow x \in A))$$

Sea $F \in R(\kappa)$, entonces por el Axioma de Unión existe A' tal que $\forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in F \rightarrow x \in A')$. Usando el Axioma de Comprensión consideremos $A = \{u \in A' : \exists Y(Y \in F \wedge u \in Y)\}$, veamos que $A \in R(\kappa)$.

Como $F \in R(\alpha)$ para algún $\alpha < \kappa$, entonces $F \subseteq R(\alpha)$, luego para cada $Y \in F$, $Y \in R(\alpha)$. Por tanto, sea $u \in A$, sabemos que $u \in A'$ y que existe $Y \in F$ tal que $u \in Y \subseteq R(\alpha)$, así $u \in R(\alpha)$ y entonces $A \subseteq R(\alpha)$. Con esto $A \in R(\alpha + 1) \subseteq R(\kappa)$.

Además A es un elemento de $R(\kappa)$ que valida el Axioma de Comprensión en el modelo, ya que si $x, Y \in R(\kappa)$ son tales que $x \in Y$ y $Y \in F$, entonces $x \in A'$ y por construcción $x \in A$.

vi) *Infinito*:

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow S(y) \in x))$$

Como $R(\kappa)$ es transitivo, $\omega^{R(\kappa)}$ es el mismo ordinal ω. Así que, de manera equivalente, veamos que $\omega \in R(\kappa)$. Esto se sigue de manera directa pues κ es no numerable, así que $\omega = \text{rank}(\omega) < \kappa$ y entonces $\omega \in R(\kappa)$.

vii) *Potencia*:

$$\forall x(\exists y \forall z(z \subseteq x \rightarrow z \in y))$$

Sea $x \in R(\kappa)$, entonces por el Axioma del Potencia $\exists y' \forall z(z \subseteq x \to z \in y')$. Consideremos $y = \{u \in y' : u \subseteq x\}$.

Como $x \in R(\alpha)$ para algún $\alpha < \kappa$, tenemos que $x \subseteq R(\alpha)$. Sea $u \in y$, entonces $u \subseteq x \subseteq R(\alpha)$, luego $u \in R(\alpha+1)$, y así $y \subseteq R(\alpha+1)$. Con esto $y \in R(\alpha+2) \subseteq R(\kappa)$.

Además $y \in R(\kappa)$ es un elemento de $R(\kappa)$ que verifica el Axioma del Potencia en el modelo, pues si $z \in R(\kappa)$ es tal que $z \subseteq x$, entonces $z \in y'$ y por construcción $z \in y$.

viii) *Elección*:

$$\forall F(\emptyset \notin F \wedge \forall x, y \in F(x \neq y \to x \cap y = \emptyset) \to \\ \exists C \forall x \in F(\exists u \in (C \cap x)\ \forall v \in x(v = u)))$$

Sea $F \in R(\kappa)$, con $\emptyset \notin F$ y para cada $x, y \in F$, si $x \neq y$ entonces $x \cap y = \emptyset$. Por el Axioma de Elección existe C' tal que para cada $x \in F$, $C' \cap x$ consta de un solo elemento. Sea $C = \{u \in C' : u \in \bigcup F\}$, veamos que $C \in R(\kappa)$.

Ya que $F \in R(\alpha)$ para algún $\alpha < \kappa$, entonces $F \subseteq R(\alpha)$, así que si $u \in \bigcup F$, $u \in R(\alpha)$ y con esto $\bigcup F \subseteq R(\alpha)$. Por construcción $C \subseteq \bigcup F$, luego $C \subseteq R(\alpha)$ y por tanto $C \in R(\alpha+1) \subseteq R(\kappa)$.

Finalmente, notemos que $C \in R(\kappa)$ valida el Axioma de Elección en el modelo. En efecto, sea $x \in F$, entonces existe $y \in C' \cap x$ tal que para cada $z \in C' \cap x$, $z = y$; como $y \in C'$ y $y \in x$, entonces $y \in C'$ y $y \in \bigcup F$, luego $y \in C$ y $y \in x$, es decir $y \in C \cap x$. Sea $z \in C \cap x$, entonces $z \in C'$ y $z \in x$, luego $z \in C' \cap x$ y así $z = y$, lo cual se quería probar.

ix) *Reemplazo*: Si φ es una fórmula sin B como variable libre,

$$\forall A(\forall x \in A \exists! y \varphi(x, y) \to \exists B \forall x \in A \exists y \in B \varphi(x, y))$$

Sea φ una fórmula sin B variable libre, sea $A \in R(\kappa)$ y supongamos que para cada $x \in A$, existe un único $y \in R(\kappa)$ tal que $R(\kappa) \models \varphi[x, y]$. Por el Axioma de Reemplazo aplicado al conjunto A y a la fórmula $\psi(x, y) \equiv R(\kappa) \models \varphi[x, y] \wedge y \in R(\kappa)$, tenemos que existe B' tal que para cada $x \in A$, $\exists y \in B'$ para el cual $\psi(x, y)$. Con esto, la función $f : A \to R(\kappa)$ dada por $f(x)$ el único $y \in B'$ tal que $\psi(x, y)$, es decir $y \in R(\kappa)$ cumple que $R(\kappa) \models \varphi[x, y]$, está bien definida.

Consideremos $B = f[A]$ y probemos que $B \in R(\kappa)$. Por el Lema 2.3, $|A| < \kappa$, entonces si $g : A \to \kappa$ definida por $g(a)$ el menor ordinal $\delta < \kappa$ tal que $f(a) \in R(\delta)$, se tiene que $g[A] \subseteq \kappa$ y así $|g[A]| \leq \kappa$. Además, como $|g[A]| \leq |A| < \kappa$ se sigue que $|g[A]| < \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$, con lo cual por 1.9 $g[A]$ es un conjunto acotado en κ. Si $\sup\{g[A]\} = \lambda < \kappa$, entonces para cada $a \in A$, $g(a) \leq \lambda$, es decir $f(a) \in R(\lambda)$. Por tanto, $f[A] \subseteq R(\lambda)$ y así $B \in R(\lambda + 1) \subseteq R(\kappa)$.

Finalmente, es claro que $B \in R(\kappa)$ valida el Axioma de Reemplazo en el modelo. En efecto, sea $x \in A$, para $y = f(x) \in B$ tenemos que $y \in R(\kappa)$ y $R(\kappa) \models \varphi[x, y]$.

Por tanto, de i)-ix) se concluye que $R(\kappa) \models$ ZFC. ■

Uno podría pensar que entonces es necesario llegar hasta un cardinal grande como lo es un inaccesible, para poder encontrar un modelo para toda la teoría de Zermelo-Fraenkel, pero en realidad hay una vasta cantidad de modelos de ZFC que son más pequeños que $R(\kappa)$ con κ inaccesible. Esto lo exhibimos en la siguiente proposición.

Proposición 2.5. *Sea κ un cardinal inaccesible, entonces*

$$M = \{\alpha < \kappa : (R(\alpha), \in) \prec (R(\kappa), \in)\}$$

es un club en κ

Demostración: Verifiquemos que M es cerrado en κ. Sea $\lambda < \kappa$ un ordinal límite tal que $\sup(M \cap \lambda) = \lambda$, veamos que $\lambda \in M$. Es claro que $(R(\lambda), \in)$ es un submodelo de $(R(\kappa), \in)$. Para probar que es un submodelo elemental de $(R(\kappa), \in)$ usaremos el criterio de Tarski-Vaught. Sea $\varphi(v, \bar{w})$ una fórmula y supongamos que existe $b \in R(\kappa)$ tal que $R(\kappa) \models \varphi[b, \bar{a}]$ para algunos $\bar{a} \in R(\lambda)$.

Como $\bar{a} \in R(\lambda)$, entonces $\bar{a} \in R(\beta)$ para algún $\beta < \lambda$, ya que $\sup(M \cap \lambda) = \lambda$ consideremos $\beta_0 \in M \cap \lambda$ tal que $\beta_0 > \beta$; dado que $\beta_0 \in M$, se tiene que $(R(\beta_0), \in) \preceq (R(\kappa), \in)$. Por el criterio de Tarski-Vaught y como $\bar{a} \in R(\beta) \subseteq R(\beta_0)$ existe $c \in R(\beta_0)$ tal que $R(\kappa) \models \varphi[c, \bar{a}]$. Ahora, de $R(\beta_0) \subseteq R(\lambda)$ se sigue que $c \in R(\lambda)$ y $R(\kappa) \models \varphi[c, \bar{a}]$. Esto es lo que queríamos comprobar y así $(R(\lambda), \in) \preceq (R(\kappa), \in)$, luego $\lambda \in M$.

Probemos que M es no acotado en κ. Sea $\lambda < \kappa$. Notemos que si para cada fórmula $\varphi(v, \bar{w})$ existe $b \in R(\kappa)$ tal que $R(\kappa) \models \varphi[b, \bar{a}]$ con $\bar{a} \in R(\kappa)$ entonces está bien definida la función h_φ dada por $h_\varphi(\bar{a})$ un elemento de $R(\kappa)$ tal que $R(\kappa) \models \varphi[h_\varphi(\bar{a}), \bar{a}]$; si no existe $b \in R(\kappa)$ con la propiedad anterior, hacemos $h_\varphi(\bar{a}) = \emptyset$. Usando recursión, construimos la sucesión $(\alpha_n)_{n<\omega}$. Para $n = 0$, $\alpha_0 = \lambda + 1$. Dado α_n, notemos que $|\{h_\varphi(\bar{a}) : \varphi \text{ es una fórmula y } \bar{a} \in R(\alpha_n)\}| \leq \aleph_0 \cdot |R(\alpha_n)|^{\aleph_0} < |R(\kappa)| = \kappa$, pues el lenguaje $\mathcal{L}_{TC}$ es finito y κ es inaccesible. Luego, existe $\alpha_{n+1} < \kappa$ tal que $\{h_\varphi(\bar{a}) : \varphi \text{ es una fórmula y } \bar{a} \in R(\alpha_n)\} \subseteq R(\alpha_{n+1})$ y $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$.

Para cada $n < \omega$ consideremos $\phi_n(v, w) \equiv (\text{rank}(v \cup w) \geq \alpha_n)$, entonces es claro que existe $v_0 \in R(\kappa)$ tal que $R(\kappa) \models \phi_n[v_0, w_0]$ para algún $w_0 \in R(\alpha_n)$. Ya que para cada $x \in R(\alpha_n)$, $\text{rank}(x \cup w_0) < \alpha_n$, entonces $h_{\phi_n}(w_0) \notin R(\alpha_n)$; con esto $\alpha_n < \alpha_{n+1}$. Sea $\alpha = \sup\{\alpha_n : n < \omega\}$, como κ es regular y no numerable, entonces $\alpha < \kappa$. Veamos que $\alpha \in M$, es decir verifiquemos que $(R(\alpha), \in) \preceq (R(\kappa), \in)$.

Sea $\varphi(v, \bar{w})$ una fórmula, supongamos que existe $b \in R(\kappa)$ para el cual $R(\kappa) \models \varphi[b, \bar{a}]$ para $\bar{a} \in R(\alpha)$. Como α es límite, entonces $\bar{a} \in R(\beta)$ para algún $\beta < \alpha$, con lo cual $\bar{a} \in R(\alpha_n)$ para algún $n < \omega$. Luego $h_\varphi(\bar{a}) \in R(\alpha_{n+1})$ es un elemento tal que $R(\kappa) \models \varphi[h_\varphi(\bar{a}), \bar{a}]$; así que $c = h_\varphi(\bar{a}) \in R(\alpha_{n+1}) \subseteq R(\alpha)$ cumple que $R(\kappa) \models \varphi[c, \bar{a}]$. Por tanto, por el criterio de Tarski-Vaught, $(R(\alpha), \in) \preceq (R(\kappa), \in)$, luego $\alpha \in M$ y $\alpha > \lambda$, así M es no acotado en κ. ■

Para poder probar que, a partir de ZFC no se puede probar la existencia de cardinales inaccesibles, demostraremos que, si uno considera el modelo $R(\kappa)$, donde κ es el cardinal inaccesible más pequeño, entonces tal modelo no contiene ningún cardinal inaccesible y con esto se prueba lo que queríamos. Para poder verificar esto, veremos que un cardinal inaccesible según el modelo $R(\kappa)$ es en verdad un cardinal inaccesible; es decir, vamos a verificar que μ es inaccesible es un concepto absoluto para el modelo $R(\kappa)$, cuando κ es tal que se tiene un modelo para la teoría de Zermelo-Fraenkel.

Teorema 2.6. *Las expresiones siguientes son absolutas para cualquier $R(\lambda)$, con λ límite, tal que $R(\lambda) \models$ ZFC:*

i) *α es un ordinal.*

ii) *$\mathcal{P}(x)$.*

iii) *κ es un cardinal*

iv) *La aritmética cardinal, i.e. $\kappa + \mu, \kappa \cdot \mu, \kappa^{\mu}$.*

v) *$\mathrm{cf}(\alpha)$.*

vi) *κ es un cardinal sucesor, límite, regular, singular, débilmente inaccesible o fuertemente inaccesible.*

Demostración: i). Es un teorema de ZFC que α es un ordinal si y solo si α es transitivo y $\in$ satisface la tricotomía en α, veremos que ambos son conceptos Δ_0. α es transitivo si y solo si $\forall u \in \alpha(u \subseteq \alpha)$, esto es evidentemente una fórmula Δ_0. $\in$ satisface la tricotomía en α si y solo si $\forall x, y \in \alpha(x \in y \vee x = y \vee y \in x)$, la cual también es una fórmula Δ_0. Por tanto, la conjunción de estas fórmulas, que es α es ordinal, también es Δ_0 y como $R(\lambda)$ es transitivo, se tiene que α es ordinal es absoluto para el modelo.

ii). En ZFC se tiene que,

$$\forall x \forall u(u \in \mathcal{P}(x) \leftrightarrow u \subseteq x),$$

ya que $R(\lambda) \models$ ZFC tenemos que esta fórmula (relativizada) se cumple en el modelo. Relativizando, tenemos $\forall x, u \in R(\lambda)(u \in \mathcal{P}(x)^{R(\lambda)} \leftrightarrow u \subseteq x)$, donde $u \subseteq x$ al ser un concepto absoluto se mantiene igual después de la relativización.

Ya que $\mathcal{P}(x)^{R(\lambda)}$ es un elemento de $R(\lambda)$ por definición y como el modelo es transitivo, se tiene que si $u \in \mathcal{P}(x)^{R(\lambda)}$ entonces $u \in R(\lambda)$ y con esto $u \subseteq x$; es decir, $\mathcal{P}(x)^{R(\lambda)} \subseteq R(\lambda) \cap \mathcal{P}(x)$. Dado que $R(\lambda) \cap \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)^{R(\lambda)}$ por el párrafo anterior, concluimos que $\mathcal{P}(x)^{R(\lambda)} = R(\lambda) \cap \mathcal{P}(x)$.

Ahora, como $x \in R(\lambda)$, $x \in R(\alpha)$ para algún $\alpha < \lambda$, luego si $y \subseteq x$ se tiene que $y \subseteq R(\alpha)$, así $y \in R(\alpha + 1)$. Con esto, $\mathcal{P}(x) \subseteq R(\alpha + 1) \subseteq R(\lambda)$ y entonces $R(\lambda) \cap \mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(x)$, en particular $\mathcal{P}(x)^{R(\lambda)} = \mathcal{P}(x)$.

iii). Para ver que κ es un cardinal es un concepto absoluto, verificaremos que κ es un cardinal $\leftrightarrow$ κ es un cardinal$^{R(\lambda)}$.

a) Supongamos que $\kappa \in R(\lambda)$ es un cardinal$^{R(\lambda)}$, esto es $\neg\exists f, \alpha \in R(\lambda)(\alpha < \kappa \wedge f : \alpha \to \kappa$ biyectiva) (no hemos relativizado el hecho de que f es función y es biyectiva pues son conceptos absolutos en modelos transitivos) y κ es un ordinal$^{R(\lambda)}$, por i) tenemos que κ es un ordinal.

   Ahora, si existe $\alpha < \kappa$ y $f : \alpha \to \kappa$ biyectiva, entonces para $\beta < \lambda$ con $\kappa \in R(\beta)$, tenemos por la transitividad de $R(\lambda)$ que $\alpha \in R(\beta)$ y ya que $f \subseteq \alpha \times \kappa \subseteq R(\beta + 2)$, se sigue que $f \in R(\beta + 3) \subseteq R(\lambda)$ y con esto κ no es un cardinal$^{R(\lambda)}$. Por tanto, debemos tener que κ es un cardinal.

b) Por otro lado, supongamos ahora que $\kappa \in R(\lambda)$ es un cardinal. En ZFC tenemos que,

$$\forall f(\forall \alpha < \kappa(f : \alpha \to \kappa \text{ no es biyectiva})),$$

   en particular esto se cumple para cualquier ordinal menor que κ y cualquier función f en el modelo, y ya que el concepto de función biyectiva es absoluto, esto significa que κ es un cardinal$^{R(\lambda)}$.

iv). Verificaremos que $\kappa + \mu$ es absoluto para cada $\kappa, \lambda \in R(\lambda)$ cardinales, es decir veremos que el resultado de la operación es el mismo dentro y fuera del modelo, la parte de que $\kappa \cdot \mu$ es absoluto es similar.

Sean $\kappa, \mu \in R(\lambda)$, si κ y μ son finitos, entonces la suma de κ y μ como cardinales coincide con la suma de κ y μ como ordinales, sabemos que este concepto es absoluto, así que $\kappa + \mu$ es absoluto.

Si κ ó μ no es finito, tenemos que se prueba en ZFC que $\kappa + \mu$ es un cardinal y $\exists f(f : (\kappa \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\}) \to \kappa + \mu$ es biyectiva). Ya que $R(\lambda) \models$ ZFC, entonces lo anterior relativizado se cumple en el modelo, así $(\kappa + \mu)^{R(\lambda)}$ es un cardinal y $\exists f \in R(\lambda)(f : (\kappa \times$

$\{0\}) \cup (\mu \times \{1\}) \to (\kappa+\mu)^{R(\lambda)}$ es biyectiva), no hemos relativizado conceptos que sabemos que son absolutos. Así que $(\kappa+\mu)^{R(\lambda)} = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\})| = \kappa + \mu$.

Para la exponenciación de cardinales, podemos usar el mismo argumento anterior, pero hay que asegurarnos que ${}^{\mu}\kappa$ es absoluto. Probaremos esto en general. En ZFC se tiene que: $\forall A \forall B \forall f (f \in {}^{B}A \leftrightarrow f : B \to A)$. Relativizando, $\forall A, B, f \in R(\lambda)(f \in ({}^{B}A)^{R(\lambda)} \leftrightarrow f : B \to A)$, pero si $A, B \in R(\lambda)$, entonces podemos elegir $\beta < \lambda$ tal que $A, B \in R(\beta)$ y como $f \subseteq B \times A \subseteq R(\beta+2)$, se tiene que cada $f : B \to A$ cumple que $f \in R(\lambda)$.

Usando la fórmula relativizada tenemos que dado $f \in {}^{B}A$, $f \in ({}^{B}A)^{R(\lambda)}$, la otra contención es clara así que ${}^{B}A = ({}^{B}A)^{R(\lambda)}$.

v). Sea $\alpha \in R(\lambda)$ un ordinal límite, notemos que para $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ cofinal, como $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$, se tiene que $f \in R(\lambda)$. Observemos también que el ser "cofinal" es un concepto Δ_0, pues en general $g : \beta \to \beta'$ es cofinal $\leftrightarrow \forall \delta < \beta'(\exists \gamma < \beta(\delta \leq g(\gamma)))$, luego es un concepto absoluto. Así que f es una función en $R(\lambda)$ que es cofinal$^{R(\lambda)}$, entonces por definición se sigue que $\mathrm{cf}(\alpha)^{R(\lambda)} \leq \mathrm{cf}(\alpha)$.

Por otro lado, en ZFC tenemos

$$\forall \beta \exists f (f : \mathrm{cf}(\beta) \to \beta \text{ es cofinal}),$$

relativizando $\forall \beta \in R(\lambda) \exists f \in R(\lambda)(f : \mathrm{cf}(\beta)^{R(\lambda)} \to \beta$ es cofinal), en particular para $\alpha \in R(\lambda)$ existe $f' : \mathrm{cf}(\alpha)^{R(\lambda)} \to \alpha$ cofinal. Así que por definición $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\alpha)^{R(\lambda)}$. Por tanto, $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)^{R(\lambda)}$.

vi). Sea $\kappa \in R(\lambda)$ un cardinal, entonces

a) Si κ es un cardinal sucesor$^{R(\lambda)}$, existe μ cardinal$^{R(\lambda)}$ tal que κ es el menor cardinal con $\mu < \kappa$, por iii) esto implica que κ es un cardinal sucesor. De manera similar se muestra que κ cardinal sucesor implica κ cardinal sucesor$^{R(\lambda)}$.

b) Si κ es un cardinal límite$^{R(\lambda)}$, entonces κ es un cardinal y no existe $\mu \in R(\lambda)$ tal que $\mu^{+} = \kappa$. Esto implica que κ es un cardinal límite, pues si existe μ cardinal tal que $\mu^{+} = \kappa$ entonces en particular $\mu < \kappa$ y así $\mu \in R(\lambda)$ lo cual es imposible.

   Por otro lado, si κ es un cardinal límite, entonces es un cardinal y no existe cardinal μ tal que $\mu^{+} = \kappa$, en particular no existe cardinal $\mu \in R(\lambda)$ con esta propiedad. Se sigue así que κ es un cardinal límite$^{R(\lambda)}$.

c) En ZFC tenemos que κ es un cardinal regular si y solo si κ es un cardinal y $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, por iii) y v) esto último es equivalente a que κ es un cardinal$^{R(\lambda)}$ y $\mathrm{cf}(\kappa)^{R(\lambda)} = \kappa$ lo cual equivale a que κ es un cardinal regular$^{R(\lambda)}$.

d) De manera análoga al caso anterior se prueba que κ es un cardinal singular si y solo si κ es un cardinal singular$^{R(\lambda)}$.

e) κ es un cardinal débilmente inaccesible si y solo si $\kappa \neq \omega$, κ es un cardinal límite y regular, por lo anterior esto es equivalente a que $\kappa \neq \omega^{R(\lambda)}$, κ es un cardinal límite$^{R(\lambda)}$ y regular$^{R(\lambda)}$, lo cual equivale a que κ es un cardinal débilmente inaccesible$^{R(\lambda)}$.

f) Basta ver que el concepto "κ es un cardinal límite fuerte" es absoluto para $R(\lambda)$, pues entonces solo hay que aplicar la técnica del concepto anterior para ver la absolutez de la fórmula "κ es un cardinal fuertemente inaccesible".

   Si κ es un cardinal límite fuerte$^{R(\lambda)}$, tenemos que para cada $\mu \in R(\lambda)$ con $\mu < \kappa$ se cumple que $(2^\mu)^{R(\lambda)} = 2^\mu < \kappa$. Por ser $R(\lambda)$ un conjunto transitivo, se tiene que para cada $\mu < \kappa$, $\mu \in R(\lambda)$, de aquí que $2^\mu < \kappa$ y así κ es un cardinal límite fuerte.

   Si κ es un cardinal límite fuerte, entonces para cada $\mu < \kappa$, $2^\mu < \kappa$ y en particular para cada cardinal $\mu \in R(\lambda)$ se tiene esta propiedad y así, como la aritmética cardinal es absoluta, κ es un cardinal límite fuerte$^{R(\lambda)}$. ■

Finalmente estamos en posición de verificar que, la axiomatica de Zermelo-Fraenkel no es suficiente para probar la existencia de cardinales inaccesibles

Corolario 2.7. *La existencia de cardinales inaccesibles no es demostrable a partir de* ZFC.

Demostración: Supongamos por contradicción que sí, es decir, en ZFC se puede probar que existen cardinales inaccesibles. Sea κ

el menor cardinal inaccesible, entonces por el teorema 2.4 tenemos que $R(\kappa) \models$ ZFC. Ya que ZFC prueba la existencia de cardinales inaccesibles, entonces existe $\mu \in R(\kappa)$ tal que μ es un cardinal inaccesible$^{R(\kappa)}$ y por el teorema anterior tenemos que μ es un cardinal inaccesible. Pero, como $\mu \in R(\kappa)$ y κ es inaccesible, se tiene que $\mu = |\mu| < \kappa$ lo cual contradice la minimalidad de κ ■

Uno podría pensar que, aunque no podemos probar la existencia de cardinales inaccesibles, podemos asumir que existe al menos uno y tomar esto como un axioma nuevo a la teoría de ZFC. Sin embargo, debemos asegurarnos que la nueva teoría que resulta es consistente, es decir que no da lugar a contradicciones pues de lo contrario no tiene sentido seguir en una teoría así. Es decir, nos gustaría probar, asumiendo la consistencia de ZFC, que es consistente suponer que existe al menos un cardinal inaccesible. Desafortunadamente, el siguiente corolario nos dice que esto es imposible de probar.

Corolario 2.8. *Si* I denota la fórmula: existe al menos un cardinal inaccesible. Entonces no se puede probar la consistencia de ZFC+I, asumiendo la consistencia de ZFC.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que sí, entonces por el teorema 2.4, en ZFC+I se prueba que existe un modelo de ZFC, así ZFC $\vdash$ con(ZFC), por hipótesis, $\mathrm{ZFC} + \mathrm{I} \vdash (\mathrm{con(ZFC)} \to \mathrm{con(ZFC + I)})$, se sigue que $\mathrm{ZFC} + \mathrm{I} \vdash \mathrm{con(ZFC + I)}$, lo cual contradice el segundo teorema de incompletitud de Gödel. ■

Esto no significa que es un error trabajar en una teoría donde aceptamos la existencia de al menos un cardinal inaccesible, solo que no podemos probar la consistencia de esta nueva teoría.

Finalmente, para terminar el estudio de los cardinales inaccesibles notemos que la existencia de un cardinal inaccesible es una suposición muy fuerte, en el sentido que asumiendo que existe al menos uno, no es posible probar que existe un segundo cardinal inaccesible. Pues observemos que si I_1 es la fórmula que asevera la existencia de al menos un cardinal e I_2 es la fórmula que nos dice que existe un segundo cardinal inaccesible, entonces si $\mathrm{ZFC} + \mathrm{I}_1 \vdash \mathrm{I}_2$, podemos considerar a κ y μ como el primer y segundo cardinal inaccesible respectivamente. Por la absolutez del concepto de inaccesibilidad y ya que $\kappa < \mu$, entonces $\kappa \in R(\mu)$ y así $R(\mu) \models \mathrm{ZFC} + \mathrm{I}_1$, pero por la suposición, existen al menos dos cardinales inaccesibles en $R(\mu)$, pero esto contradice que μ es el segundo cardinal inaccesible.

Capítulo 3

Cardinales Mahlo

Presentamos ahora otro tipo de cardinales grandes, los llamados cardinales (de) Mahlo. Una vez que entramos al terreno de los cardinales infinitos, encontramos bastantes cardinales regulares al inicio. Una pregunta natural es, en que momento κ es un cardinal de manera que tiene una “gran cantidad” de cardinales regulares menores que él. Para precisar esto, lo que nos interesa es saber cuando un cardinal κ tiene una cantidad estacionaria de cardinales regulares por debajo de él. Con lo cual damos la siguiente definición.

Definición 3.1. Sea κ un cardinal infinito.

i) κ es débilmente Mahlo si el conjunto $\{\mu < \kappa : \mu \text{ es regular}\}$ es estacionario en κ.

ii) κ es (fuertemente) Mahlo si κ es límite fuerte y débilmente Mahlo.

En realidad, esta condición parece simple al principio, pero en realidad un cardinal débilmente Mahlo es grande, tan grande como probaremos a continuación.

Lema 3.2. *Sea κ un cardinal débilmente Mahlo, entonces:*

i) $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$,

ii) *κ es regular,*

iii) *κ es un cardinal límite.*

Demostración: i). Si $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$, entonces para $f : \omega \to \kappa$ cofinal consideramos $D = \{f(n) + 1 : n < \omega\}$, afirmamos que D es un club en κ. D es claramente no acotado, pues si $\delta < \kappa$, existe $n \in \omega$ tal que $\delta < f(n)$ luego $\delta < f(n) + 1 \in D$.

Para ver que D es cerrado, sea $\lambda < \kappa$ un ordinal límite tal que $\lambda = \sup(D \cap \lambda)$, como D es no acotado existe $n < \omega$ tal que $\lambda < f(n)+1$. Si $\beta \in D\cap\lambda$, entonces $\beta < \lambda < f(n)+1$ y $\beta = f(m)+1$ para algún $m < \omega$, como f es creciente se sigue que $m < n$. Así que $D \cap \lambda = \{\beta < \lambda : \beta = f(m) + 1 \text{ para algún } n < \omega\} \subseteq \{f(k) + 1 : k < n\}$.

De lo anterior se sigue que $D \cap \lambda$ es un conjunto finito, luego $\sup(D\cap\lambda)$ es en realidad un máximo, digamos que $\lambda = \sup(D\cap\lambda) = \beta' \in D \cap \lambda$, pero esto implica que $\lambda < \lambda$ lo cual es imposible. Por tanto, no existe $\lambda < \kappa$ tal que $\lambda = \sup(D\cap\lambda)$ y así D es claramente cerrado.

Por tanto D es un club y como κ es débilmente Mahlo, debemos tener que $\{\mu < \kappa : \mu \text{ es regular}\} \cap D$ es estacionario en κ, pero D está formado por ordinales sucesores, los cuales claramente no pueden ser regulares. Concluimos que $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$.

ii). Supongamos que κ es singular. Sea $\gamma = \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$; si $f : \gamma \to \kappa$ es cofinal, entonces $C = f[\gamma]$ es un conjunto no acotado en κ, y como $|C| = |f[\gamma]| \leq |\gamma| = \gamma = \mathrm{cf}(\kappa)$, debemos tener que $|C| = \gamma < \kappa$.

Consideremos $C^* = \{\beta \in C : \beta > \gamma\}$, claramente C^* es no acotado y $C^* \subseteq \kappa\setminus(\gamma+1)$. Además, como $|C^*| \leq |C| = \gamma = \mathrm{cf}(\kappa)$ se sigue que $|C^*| = \gamma = |C|$. Ahora, si $X = \{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es límite y } \lambda = \sup(C^* \cap \lambda)\}$, afirmamos que X es un club en κ.

Sea $\delta < \kappa$, usando recursión construimos una sucesión numerable de ordinales en C^*. Para $n = 0$, ya que C^* es no acotado, elegimos $\alpha_0 \in C^*$ un ordinal tal que $\alpha_0 > \delta$. Dado $\alpha_n \in C^*$, $\alpha_{n+1} \in C^*$ es un ordinal con $\alpha_{n+1} > \alpha_n$. Así $(\alpha_n)_{n<\omega}$ es una sucesión creciente de ordinales, sea $\alpha = \sup\{\alpha_n : n < \omega\}$, ya que $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, se tiene que $\alpha \in \kappa$. Si probamos que $\alpha \in X$, entonces X es no acotado en κ pues $\delta < \alpha_0 < \alpha$.

Claramente α es un ordinal límite, resta demostrar que $\alpha = \sup(C^* \cap \alpha)$. Es fácil ver que α es una cota superior de $C^* \cap \alpha$, luego $\sup(C^* \cap \alpha) \leq \alpha$. Sea $\beta < \alpha$, entonces $\beta < \alpha_n$ para algún

$n < \omega$, como $\alpha_n < \alpha$ y $\alpha_n \in C^*$ por construcción, tenemos que $\alpha_n \in C^* \cap \alpha$. Por definición, tenemos que $\alpha_n < \sup(C^* \cap \alpha)$ y ya que $\beta < \alpha_n$ se tiene que $\beta < \sup(C^* \cap \alpha)$; con esto, hemos probado que $\alpha \subseteq \sup(C^* \cap \alpha)$ lo cual en ordinales es lo mismo que $\alpha \leq \sup(C^* \cap \alpha)$. Por tanto, $\alpha \in X$.

Ahora, veamos que X es cerrado en κ. Sea $\delta < \kappa$ ordinal límite tal que $\delta = \sup(X \cap \delta)$, probaremos que $\delta \in X$, es decir, verifiquemos que $\delta = \sup(\delta \cap C^*)$. Como δ es cota superior de $C^* \cap \delta$ tenemos que $\sup(C^* \cap \delta) \leq \delta$. Sea $\beta < \delta = \sup(X \cap \delta)$, entonces $\beta < \lambda$ para algún $\lambda \in X \cap \delta$, además $\lambda < \delta$ y cumple que $\lambda = \sup(C^* \cap \lambda)$. Ya que $\beta < \lambda = \sup(C^* \cap \lambda) < \delta$, se sigue que $\beta < \lambda'$ para algún $\lambda' \in C^* \cap \lambda$; dado que $\lambda' \in C^* \cap \lambda$ tenemos que $\lambda' < \lambda < \delta$, luego $\lambda' < \delta$ y $\lambda' \in C^*$, es decir $\lambda' \in C^* \cap \delta$. Por tanto, como $\beta < \lambda' \leq \sup(C^* \cap \delta)$, tenemos que $\beta < \sup(C^* \cap \delta)$ y así $\delta \leq \sup(C^* \cap \delta)$.

De lo anterior X es un club en κ. Como κ es débilmente Mahlo, existe $\mu \in X$ tal que μ es un cardinal regular. Observemos que $\mu > \gamma$, pues si $\mu \leq \gamma$, entonces ya que $\mu \in X$ tenemos que $\mu = \sup(C^* \cap \mu)$, pero para cada $\beta \in C^* \cap \mu$ se tiene que $\beta > \gamma \geq \mu = \sup(C^* \cap \mu)$ lo cual es imposible.

Así que, como $\mu = \sup(C^* \cap \mu)$, tenemos que $C^* \cap \mu$ es no acotado en μ y μ es regular, con lo cual $\text{type}(C^* \cap \mu) = \mu$. Por tanto $|\mu| = \mu = \text{type}(C^* \cap \mu) = |C^* \cap \mu| \leq |C^*| = \gamma < \mu$ lo cual es una contradicción. Luego, debe ser que κ es regular.

iii). Supongamos que κ es un cardinal sucesor, digamos que $\lambda^+ = \kappa$ para algún cardinal λ. Consideremos el club (λ, κ), como κ es débilmente Mahlo existe $\mu \in (\lambda, \kappa)$ tal que μ es un cardinal regular. Pero esto es imposible pues κ es el cardinal más pequeño tal que $\kappa > \lambda$. ■

3.1. Mahlo vs inaccesibilidad

Como podemos observar, un cardinal débilmente Mahlo, debe ser muy grande, pues de manera inmediata podemos darnos cuenta de que al tener cofinalidad mayor que ω, tenemos que es un cardinal no numerable, al ser regular y límite tenemos que es débilmente inaccesible. Por otro lado, al considerar un cardinal fuertemente Mahlo, ya que es límite fuerte (y por lo anterior) resulta ser un cardinal fuertemente inaccesible. Pero un cardinal Mahlo va más allá de eso como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Sea κ un cardinal:*

i) *si κ es débilmente Mahlo, entonces el conjunto*

$$\{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es débilmente inaccesible}\}$$

es estacionario en κ;

ii) *si κ es Mahlo, entonces el conjunto*

$$\{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es inaccesible}\}$$

es estacionario en κ.

DEMOSTRACIÓN: Probaremos el caso en el que κ es Mahlo, el caso restante se hace de manera similar.

ii). Consideremos $C = \{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es un cardinal límite fuerte}\}$, probaremos que C es un club en κ.

Para ver que C es no acotado en κ, sea $\alpha < \kappa$, usando recursión definimos $(\mu_n)_{n<\omega}$ una sucesión creciente de cardinales. Para $n = 0$, elegimos $\mu_0 = 2^{(|\alpha|^+)}$ y dado μ_n, $\mu_{n+1} = 2^{\mu_n}$. Como κ es un cardinal límite fuerte, entonces para cada $n < \omega$, $\mu_n \in \kappa$ y, ya que $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ tenemos que $\mu = \sup\{\mu_n : n < \omega\} \in \kappa$. Claramente μ es un cardinal límite fuerte, pues si $\lambda < \mu$ es un cardinal, entonces existe $\mu_n > \lambda$ para algún $n < \omega$ y así $2^{\mu_n} \geq 2^\lambda$, por definición de μ se tiene que $2^\lambda < \mu$. Con esto $\mu \in C$ y $\mu > \alpha$, con ello C es no acotado en κ.

Probemos que C es cerrado, usando la equivalencia en 1.19. Sea $X \subseteq C$ no vacío con $\sup X < \kappa$, entonces $\sup X$ es un cardinal límite fuerte ya que si $\lambda < \sup X$, existe $\mu \in X$ tal que $\lambda < \mu$, como μ es un cardinal límite fuerte, se sigue que $2^\lambda < \mu \leq \sup X$. Con esto, $\sup X \in C$.

Finalmente, como C es un club y κ es Mahlo, entonces $C \cap \{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es regular}\} = \{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es cardinal límite fuerte y regular}\} = \{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es inaccesible}\}$ es estacionario en κ. ∎

Por tanto, la existencia de al menos un cardinal Mahlo implica la existencia de una infinidad de cardinales inaccesibles, pues por el teorema anterior forman un conjunto estacionario en κ, esto es una suposicición muy fuerte, ya que como vimos en el capítulo pasado, la existencia de un cardinal inaccesible no implica la existencia de un segundo cardinal inaccesible. De hecho, usando el Lema de Fodor podemos probar que ni siquiera un cardinal inaccesible que sea tan grande como para ser el κ-ésimo cardinal inaccesible, i.e. un punto fijo de la inacceesibilidad, es Mahlo.

Proposición 3.4. *Sea κ el menor cardinal inaccesible tal que κ es el κ-ésimo cardinal inaccesible. Entonces κ no es un cardinal Mahlo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $S = \{\kappa_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una enumeración de los cardinales inaccesibles menores que κ. Si κ es Mahlo, entonces S es un conjunto estacionario en κ por el teorema anterior. Consideremos $f : S \to \kappa$ dada por $f(\kappa_\alpha) = \alpha$, para cada $\alpha < \kappa$ tenemos que $\alpha \leq \kappa_\alpha$. En efecto, por inducción transfinita, para $\alpha = 0$ es claro; si $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β, como $\kappa_\beta < \kappa_{\beta+1}$ se sigue que $\beta < \kappa_{\beta+1}$, luego $\beta + 1 \leq \kappa_{\beta+1}$; por último, si α es límite, sea $\beta < \alpha$ entonces $\beta \leq \kappa_\beta < \kappa_\alpha$, así que $\beta < \kappa_\alpha$ y con ello $\alpha \leq \kappa_\alpha$.

Además, si $\alpha = \kappa_\alpha$ para algún $\alpha < \kappa$, entonces α es el α-ésimo cardinal inaccesible, lo cual es imposible pues κ es el primero con esta propiedad. Así, para cada $\alpha < \kappa$, $\alpha < \kappa_\alpha$, por tanto f es una función regresiva. Por el Lema de Fodor existe $T \subseteq S$ estacionario en κ tal que $f(\mu) = \gamma$ para algún $\gamma < \kappa$ y para todo $\mu \in T$.

Pero lo anterior implica que $\mu = \kappa_\gamma$ para todo $\mu \in T$, así $T = \{\kappa_\gamma\}$ y este claramente no intersecta al club (κ_γ, κ), lo cual contradice que T es estacionario en κ. ■

Encontrar cardinales regulares que modelen ZFC es muy difícil, pero un cardinal Mahlo es suficientemente grande como lo vemos a continuación.

Proposición 3.5. *Sea κ un cardinal Mahlo, entonces*

$$M = \{\mu < \kappa : \mu \textit{ es regular y } (R(\mu), \in) \preceq (R(\kappa), \in)\}$$

es estacionario en κ.

DEMOSTRACIÓN: Como κ es Mahlo, entonces es inaccesible y así, por la proposición 2.5 tenemos que $M' = \{\alpha < \kappa : (R(\alpha), \in) \preceq (R(\kappa), \in)\}$ es un club en κ, luego es claro que M es estacionario en κ, al ser la intersección de un club con el conjunto estacionario $\{\mu < \kappa : \mu \text{ es regular}\}$. ■

De hecho, por el teorema 3.3 podemos reemplazar la condición de ser regular en el conjunto M de la proposición anterior por la condición de ser inaccesible, y M aun sería un conjunto estacionario en κ. Por último, recordemos que una función normal en un cardinal regular no numerable tiene como club el conjunto de puntos fijos de la función, si además requerimos que el punto fijo sea regular, entonces no es posible encontrar (a partir de ZFC) un cardinal que cumpla esto último. Resulta que un cardinal debe ser muy grande para poder verificar la propiedad anterior junto con la última condición.

Teorema 3.6. *Un cardinal infinito regular κ es débilmente Mahlo si y solo si toda función normal con dominio κ tiene un punto fijo regular.*

DEMOSTRACIÓN: a). Supongamos que κ es débilmente Mahlo, sea $f : \kappa \to \kappa$ una función normal, entonces por el teorema 1.23 el conjunto $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \alpha\}$ es un club en κ y como $\{\mu < \kappa : \mu \text{ es regular}\}$ es estacionario en κ, existe $\mu < \kappa$ tal que μ es regular y $f(\mu) = \mu$.

b). Comprobemos que κ es débilmente Mahlo suponiendo que cada función normal con dominio κ tiene un punto fijo regular. Queremos demostrar que $\{\mu < \kappa : \mu \text{ es regular}\}$ es un conjunto estacionario en κ, para ello sea C un club en κ, entonces $\text{type}(C) = \kappa$ así que, para $f : \kappa \to C$ isomorfismo de orden se tiene que f es normal. En efecto, resta ver que si $\lambda < \kappa$ es límite, entonces $f(\lambda) = \sup\{f(\gamma) : \gamma < \lambda\}$.

Si $\delta = \sup\{f(\gamma) : \gamma < \lambda\}$, entonces podemos notar que δ cumple que $\delta = \sup(C \cap \delta)$. En efecto, resta ver que $\delta \leq \sup(C \cap \delta)$, sea $\alpha < \delta$, luego existe $\gamma < \lambda$ tal que $\alpha < f(\gamma)$, y como $f(\gamma) \in C$ se sigue que $f(\gamma) \in C \cap \delta$; por tanto $\alpha < f(\gamma) \leq \sup(C \cap \delta)$ y así

$\alpha < \sup(C \cap \delta)$, con ello $\delta \leq \sup(C \cap \delta)$. Ya que C es cerrado en κ, se tiene que $\delta \in C$.

Ahora, como f es sobreyectiva, existe $\alpha_0 < \kappa$ tal que $f(\alpha_0) = \delta$. Ya que $f(\lambda) > f(\gamma)$ para cada $\gamma < \lambda$, tenemos que $f(\lambda) \geq \sup\{f(\gamma) : \gamma < \lambda\} = \delta = f(\alpha_0)$ luego, por ser f isomorfismo de orden obtenemos que $\lambda \geq \alpha_0$. Si $\alpha_0 < \lambda$, entonces $\alpha_0 + 1 < \lambda$ pues λ es un ordinal límite, pero por ser f isomorfismo $f(\alpha_0) = \delta < f(\alpha_0 + 1)$ lo cual es imposible. Por tanto $\alpha_0 = \lambda$ y entonces $f(\lambda) = f(\alpha_0) = \delta = \sup\{f(\gamma) : \gamma < \lambda\}$.

De lo anterior f es una función normal y por hipótesis existe $\alpha < \kappa$ tal que $f(\alpha) = \alpha$, entonces $\alpha = f(\alpha) \in C$ y es regular con lo cual el conjunto $\{\mu < \kappa : \mu \text{ es regular}\}$ es estacionario en κ. ■

Un obvio resultado es el siguiente.

Corolario 3.7. *Si κ es débilmente Mahlo y f es normal con dominio κ, entonces f tiene κ puntos fijos regulares.*

DEMOSTRACIÓN: Como $C = \{\mu < \kappa : \mu \text{ es punto fijo regular}\}$ es la intersección de un club y un estacionario, entonces C es estacionario en κ, luego C es no acotado en κ y así $|C| = \kappa$. ■

3.2. Cardinales α-Mahlo

Finalmente, para cerrar este capítulo vamos a clasificar los cardinales Mahlo generalizando su definición.

Definición 3.8. Sea γ un ordinal infinito. Usando recursión definimos, para cada ordinal α, $M_\alpha(\gamma)$ mediante:

i) $M_0(\gamma) = \{\kappa < \gamma : \kappa \text{ es inaccesible}\}$,

ii) $M_{\alpha+1}(\gamma) = \{\kappa \in M_\alpha(\gamma) : \{\mu < \kappa : \mu \in M_\alpha(\gamma)\} \text{ es estacionario en } \kappa\}$,

iii) $M_\alpha(\gamma) = \bigcap_{\beta<\alpha} M_\beta(\gamma)$ si $\alpha \neq 0$ es límite.

Para cada α ordinal consideramos la clase $M_\alpha = \bigcup\{M_\alpha(\gamma) : \gamma \text{ es ordinal}\}$. Si $\kappa \in M_\alpha$, para algún ordinal α, diremos que κ es un cardinal α-Mahlo.

Podemos concluir un par propiedades relevantes de los cardinales α-Mahlo a partir de la mera definición.

Proposición 3.9. *Para cada ordinal α,*

i) *si $\kappa \in M_\alpha(\gamma)$ entonces $\kappa < \gamma$;*

ii) *si $\kappa \in M_\alpha(\gamma)$ y $\kappa < \delta$, para algún ordinal δ, entonces $\kappa \in M_\alpha(\delta)$.*

Demostración: Haremos ambas pruebas por inducción transfinita sobre α.

i). Si $\alpha = 0$ se tiene por definición. Si $\alpha = \beta + 1$, entonces $\kappa \in M_\beta(\gamma)$, luego por hipótesis de inducción $\kappa < \gamma$. Si α es límite y $\kappa \in M_\alpha(\gamma)$, se tiene que $\kappa \in M_\beta(\gamma)$ para cualquier $\beta < \alpha$, en particular y por la hipótesis de inducción se sigue que $\kappa < \gamma$.

ii). Para $\alpha = 0$, como $\kappa \in M_0(\gamma)$ tenemos que κ es inaccesible y ya que $\kappa < \delta$, entonces $\kappa \in M_0(\delta)$.

Si $\alpha = \beta + 1$, dado que $\kappa \in M_\alpha(\gamma)$ tenemos que $\kappa \in M_\beta(\gamma)$, luego por hipótesis de inducción $\kappa \in M_\beta(\delta)$. Además, ya que $\{\mu < \kappa : \mu \in M_\beta(\gamma)\}$ es estacionario en κ, se sigue que si C es un club en κ y $\mu \in C \cap M_\beta(\gamma)$ con $\mu < \kappa$, entonces como $\mu \in M_\beta(\gamma)$ y $\mu < \kappa < \delta$ tenemos por hipótesis de inducción que $\mu \in M_\beta(\delta)$, luego $\mu \in C \cap M_\beta(\delta)$. Con esto $\{\mu < \kappa : \mu \in M_\beta(\delta)\}$ es estacionario en κ y así $\kappa \in M_{\beta+1}(\delta) = M_\alpha(\delta)$.

Si α es límite y $\kappa \in M_\alpha(\gamma)$, entonces para cada $\beta < \alpha$, $\kappa \in M_\beta(\gamma)$ con lo cual por hipótesis de inducción $\kappa \in M_\beta(\delta)$, i.e. para cada $\beta < \alpha$, $\kappa \in M_\beta(\delta)$, lo que implica que $\kappa \in \bigcap_{\beta<\alpha} M_\beta(\delta) = M_\alpha(\delta)$. ■

Esto nos permite dar una caracterización para un cardinal α-Mahlo, la cual será más directa y fácil de comprobar.

Proposición 3.10. *Para cada cardinal infinito κ y cada ordinal α,*

i) *κ es 0-Mahlo si y solo si κ es inaccesible,*

ii) *κ es $(\alpha+1)$-Mahlo si y solo si κ es α-Mahlo y $\{\mu < \kappa : \mu$ es α-Mahlo$\}$ es estacionario en κ,*

iii) *κ es α-Mahlo, con $\alpha \neq 0$ límite, si y solo si κ es β-Mahlo para cada $\beta < \alpha$.*

DEMOSTRACIÓN: La equivalencia en i) es clara.

ii). Supongamos que κ es $(\alpha+1)$-Mahlo, entonces $\kappa \in M_{\alpha+1}(\gamma)$ para algún ordinal γ, luego $\kappa \in M_\alpha(\gamma)$, así κ es α-Mahlo. También $\{\mu < \kappa : \mu \in M_\alpha(\gamma)\}$ es estacionario en κ y como $\{\mu < \kappa : \mu \in M_\alpha(\gamma)\} \subseteq \{\mu < \kappa : \mu \text{ es } \alpha\text{-Mahlo}\}$, se tiene que este último es estacionario en κ.

Ahora supongamos que κ es α-Mahlo y $\{\mu < \kappa : \mu \text{ es } \alpha\text{-Mahlo}\}$ es estacionario en κ, para probar que κ es $(\alpha+1)$-Mahlo veremos que $\kappa \in M_{\alpha+1}(\gamma)$ para algún ordinal γ. Ya que κ es α-Mahlo entonces $\kappa \in M_\alpha(\gamma)$ para algún ordinal γ; afirmamos que $\kappa \in M_{\alpha+1}(\gamma)$, para ello resta ver que $\{\mu < \kappa : \mu \in M_\alpha(\gamma)\}$ es estacionario en κ.

Sea C un club en κ, por hipótesis existe $\mu_0 \in C$ tal que $\mu_0 < \kappa$ y μ_0 es α-Mahlo. Como $\kappa \in M_\alpha(\gamma)$, por la proposición anterior tenemos que $\kappa < \gamma$ y así $\mu_0 < \gamma$. Además dado que μ_0 es α-Mahlo se tiene que $\mu_0 \in M_\alpha(\delta)$ para algún ordinal δ, por lo anterior y usando ii) de la proposición anterior, se sigue que $\mu_0 \in M_\alpha(\gamma)$. Con esto $C \cap \{\mu < \kappa : \mu \in M_\alpha(\gamma)\} \neq \emptyset$. Lo cual completa la prueba de la afirmación y así κ es $(\alpha+1)$-Mahlo.

iii). Si κ es α-Mahlo, entonces $\kappa \in M_\alpha(\gamma)$ para algún ordinal γ, luego $\kappa \in M_\beta(\gamma)$ para cada $\beta < \alpha$, así κ es β-Mahlo para cada $\beta < \alpha$.

Por otro lado si κ es β-Mahlo para cada $\beta < \alpha$, entonces para cada $\beta < \alpha$, $\kappa \in M_\beta(\gamma_\beta)$ con γ_β ordinal. Tenemos que $\kappa < \gamma_\beta$ para cada $\beta < \alpha$, hacemos $\gamma = \text{mín}\{\gamma_\beta : \beta < \alpha\}$. Claramente $\kappa < \gamma$ así que $\kappa \in M_\beta(\gamma)$ para cada $\beta < \alpha$. Con esto $\kappa \in \bigcap_{\beta<\alpha} M_\beta(\gamma)$ y luego κ es α-Mahlo. ■

Por tanto, es fácil darnos cuenta que los cardinales Mahlo son justamente los cardinales 1-Mahlo. También, podríamos preguntarnos que tan grande puede ser un cardinal κ según esta categoría, es decir, si existe un ordinal α tal que κ a lo más puede ser α-Mahlo.

Supongamos que κ es α-Mahlo, por lo anterior tenemos que para cada $\beta < \alpha$ existe μ tal que μ es β-Mahlo. Para cada $\beta < \alpha$, si μ_β es el menor cardinal β-Mahlo, entonces la función $f : \alpha \to \kappa$ dada por $f(\beta) = \mu_\beta$ está bien definida. Veamos que f es inyectiva, si $\beta_1 \neq \beta_2$ pero $f(\beta_1) = f(\beta_2)$, supongamos que $\beta_1 < \beta_2$, tenemos que μ_{β_1} es β_2-Mahlo pero entonces existe un conjunto estacionario en μ_{β_1} de cardinales β_1-Mahlo y esto contradice que μ_{β_1} es el menor de ellos; de manera similar si $\beta_2 < \beta_1$. Por tanto f es inyectiva.

f es creciente, sea $\beta_1 < \beta_2$, entonces μ_{β_2} es el menor cardinal β_2-Mahlo, luego μ_{β_2} es β_1-Mahlo, por minimalidad $\mu_{\beta_1} \leq \mu_{\beta_2}$ y por la inyectividad de f, $f(\beta_1) = \mu_{\beta_1} < \mu_{\beta_2} = f(\beta_2)$.

Con esto, si $\beta < \alpha$, entonces ya que f es estrictamente creciente $\beta \leq f(\beta)$ y como $f(\beta) < \kappa$, se tiene que $\beta < \kappa$, con lo cual $\alpha \leq \kappa$. Y así un cardinal κ puede ser, a lo más, κ-Mahlo pero nunca $(\kappa + 1)$-Mahlo.

Capítulo 4

Cardinales débilmente compactos

4.1. Cálculo de particiones

Para empezar el estudio del siguiente tipo de cardinales, recordaremos una definición elemental, pues tomaremos el sendero de estudiar las particiones para introducir los cardinales débilmente compactos después.

Definición 4.1. Una partición de un conjunto S es una familia $P = \{X_i : i \in I\}$ de subconjuntos de S ajenos dos a dos tales que $\bigcup_{i \in I} X_i = S$.

Vale la pena mencionar que, para propósitos de este trabajo, no exigimos en la definición que cada $X_i \neq \emptyset$. Notemos que podemos asociar una función $f : S \to I$ dada por $f(x) = i$ si y solo si $x \in X_i$. Recíprocamente, cada función $f : S \to I$ determina una partición P de S dada por $P = \{f^{-1}[\{i\}] : i \in I\}$; con base en esto, algunas veces diremos que f es una partición de S.

Recordemos la definición del conjunto $[A]^n$, si A es un conjunto de ordinales, conviene identificar $[A]^n$ como el conjunto $\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A^n : \alpha_1 < \cdots < \alpha_n\}$.

Definición 4.2. Si $P = \{X_i : i \in I\}$ es una partición de $[A]^n$, $H \subseteq A$ se dirá n-homogéneo para P si existe $i \in I$ tal que $[H]^n \subseteq X_i$.

Si pensamos en la partición como una función, entonces H es n-homogéneo si f es constante en $[H]^n$.

El siguiente teorema es un clásico dentro de la teoría de particiones y será la basé que justificará la introducción de los cardinales débilmente compactos.

Teorema 4.3 (de Ramsey). *Sean $n, k \in \mathbb{N}$, si $\{X_1, \ldots, X_k\}$ es una partición de $[\omega]^n$ en k partes, entonces existe un conjunto infinito n-homogéneo para dicha partición. Equivalentemente, para cada $f : [\omega]^n \to \{1, \ldots, k\}$ existe un conjunto infinito $H \subseteq \omega$ tal que f es constante sobre $[H]^n$.*

Para facilitar el tratamiento de particiones presentamos la notación de flecha:

Sean κ y λ cardinales infinitos, sea $n \in \mathbb{N}$ y sea m un cardinal, el símbolo $\kappa \to (\lambda)^n_m$ denota la propiedad siguiente: Toda partición de $[\kappa]^n$ en m piezas tiene un conjunto n-homogéneo H tal que $|H| = \lambda$; en otras palabras, para cada $f : [\kappa]^n \to m$, existe $H \subseteq \kappa$ tal que f es constante sobre $[H]^n$ y $|H| = \lambda$.

A partir de lo anterior, hacemos tres observaciones que simplificarán ciertos casos sobre la notación de flecha. Primero, si $\kappa < \lambda$, entonces no puede existir $H \subseteq \kappa$ tal que $\kappa \to (\lambda)^n_m$, pues cada $H \subseteq \kappa$ cumple que $|H| \leq \kappa < \lambda$. Por lo cual supondremos que $\kappa \geq \lambda$.

Segundo, si $m = 1$, entonces $\kappa \to (\lambda)^n_m$ se cumple trivialmente, pues tendríamos una partición de 1 piezas, y descartando el número necesario de elementos de κ (si hiciese falta) tenemos $H \subseteq \kappa$ que es n-homogéneo y $|H| = \lambda$. Así que, supondremos siempre que $m \geq 2$. Además, si $m = 2$, escribimos $\kappa \to (\lambda)^n$ en vez de $\kappa \to (\lambda)^n_m$.

Por último, si $m > \kappa$, entonces $|[\kappa]^n| = \kappa^n = \kappa$ y $|\bigcup_{i \in m} X_i| = \sum_{i \in m} |X_i| = m \cdot \sup\{|X_i| : i \in m\} = m$, donde $\{X_i : i \in m\}$ es la partición y, recordando que los X_i son ajenos dos a dos y $|X_i| \leq |[\kappa]^n| = \kappa$; pero $[\kappa]^n = \bigcup_{i \in m} X_i$, lo cual genera una contradicción. Si $m = \kappa$, como $|[\kappa]^n| = \kappa$ existe $f : [\kappa]^n \to \kappa$ biyectiva, consideremos $P = \{f^{-1}[\{i\}] : i \in \kappa = m\}$ la partición inducida por f, entonces cada $f^{-1}[\{i\}]$ es un singular, con lo cual no existe $H \subseteq \kappa$ con $|H| = \lambda$ tal que $[H]^n \subseteq f^{-1}[\{i\}]$ para algún i; por tanto no se cumple que $\kappa \to (\lambda)^n_m$. De lo anterior, asumiremos que $m < \kappa$.

La notación de flecha es muy útil, pues resulta que si sabemos que se cumple la propiedad $\kappa \to (\lambda)^n_m$, entonces podemos aumentar el cardinal de la izquierda o disminuir los cardinales de la derecha y, seguiríamos teniendo como válida la relación de flecha. Mediante el siguiente par de proposiciones probamos esta afirmación.

Proposición 4.4. *Supongamos que $\kappa \to (\lambda)^n_m$. Si $\kappa \leq \kappa'$, $\lambda' \leq \lambda$ y $m' \leq m$, entonces $\kappa' \to (\lambda')^n_{m'}$.*

Demostración: Para probar que $\kappa' \to (\lambda')^n_{m'}$ sea $f : [\kappa']^n \to m'$ una partición de $[\kappa']^n$, probaremos que existe H' que es n-homogéneo y tal que $|H'| = \lambda'$. Definimos $g : [\kappa]^n \to m$ mediante $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, por las hipótesis sobre κ y m, g está bien definida. Ya que $\kappa \to (\lambda)^n_m$, existe $H \subseteq \kappa$ que es n-homogéneo y tal que $|H| = \lambda$.

Como $|H| = \lambda$, existe $h : \lambda \to H$ biyectiva, así que para $h[\lambda']$ tenemos que $h[\lambda'] \subseteq \kappa'$ y claramente $|h[\lambda']| = \lambda'$. Con esto, para $H' = h[\lambda']$ afirmamos que f es constante en $[H']^n$. En efecto, sea $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [H']^n$, ya que cada $\alpha_i \in H'$, entonces $\alpha_i = h(\beta_i)$ para algún $\beta_i < \lambda'$, con lo cual $\alpha_i \in H$. Como g es constante en $[H]^n$, tenemos que $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \gamma$ con $\gamma < m$ fijo; además $\gamma < m'$ pues $\gamma = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in m'$. Por tanto f es constante en $[H']^n$ con valor γ, y como $|H'| = \lambda'$, tenemos que H' es el conjunto buscado que es n-homogéneo para f. ■

El caso para n lo contemplamos en una proposición aparte.

Proposición 4.5. *Si $\kappa \to (\lambda)^n_m$ y $n' < n$, entonces $\kappa \to (\lambda)^{n'}_m$.*

Demostración: Sea $f : [\kappa]^{n'} \to m$ una partición de $[\kappa]^{n'}$. Definimos $g : [\kappa]^n \to m$ mediante $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n'})$, por hipótesis existe $H \subseteq \kappa$ con $|H| = \lambda$ tal que g es constante en $[H]^n$. Hacemos $\delta = \operatorname{type}(H)$ y $F : H \to \delta$ un isomorfismo de orden; notemos que δ es infinito, de lo contrario $|H| = |\delta| < \aleph_0 \leq \lambda$, lo cual no es posible.

Para exhibir el conjunto H' que es n'-homogéneo, consideramos lo siguiente. Si H no tiene elemento máximo, entonces hacemos $H' = H$. En caso contrario, si $\mu \in H$ es su elemento máximo, entonces δ es un ordinal sucesor, pues si δ es límite, se tiene que

$F(\mu)$ es un máximo de δ, lo cual es imposible pues δ es un ordinal límite, con esto δ es sucesor. Sabemos que existen α ordinal límite y $r \in \omega$ tal que $\delta = \alpha + r$ y ya que δ es un ordinal sucesor, tenemos que $r \neq 0$. Luego, consideremos $H' = F^{-1}[\alpha]$. Por construcción H' no tiene máximo, pues si existe $\mu' \in H'$ tal que μ' es máximo entonces es claro que $F(\mu')$ es un elemento máximo de α, esto es imposible ya que α es un ordinal límite. Además $|H'| = |H|$, pues $|H'| = |F^{-1}[\alpha]| = |\alpha|$ y $|\alpha| = |\alpha + r| = |\delta| = |H|$ ya que $r \in \omega$, α es infinito y F es biyectiva.

Con esto $H' \subseteq H$ es un conjunto que no tiene máximo y tal que $|H'| = \lambda$, afirmamos que H' es n'-homogéneo. Sea $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n'}) \in [H']^{n'}$, entonces cada $\alpha_i \in H' \subseteq H$ y como H' no tiene máximo, existen $\alpha_{n'+1} < \cdots < \alpha_n$ elementos de H' tal que $\alpha_{n'} < \alpha_{n'+1}$. Luego $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n'}, \ldots, \alpha_n) \in [H]^n$. Por tanto, $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \gamma$ para algún $\gamma < m$ fijo; por construcción $\gamma = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n'})$. Con lo cual f es constante en $[H']^{n'}$, así que H' es n'-homogéneo para f. ■

La técnica usada en esta proposición para hacer que un conjunto infinito de ordinales no tenga elemento máximo será usada en resultados posteriores, por lo que evitaremos entrar en detalle nuevamente cuando esto ocurra.

Con estas herramientas buscaremos responder la pregunta natural que surge a partir del Teorema de Ramsey, ¿Se puede generalizar el Teorema de Ramsey a cardinales mayores? Al menos, nos interesa ver si es válido el análogo al teorema para $\aleph_1$. Para ello ocuparemos el siguiente lema.

Lema 4.6. *El conjunto $P = {}^{\kappa}\{0,1\}$, con κ un cardinal infinito, ordenado lexicográficamente no admite sucesiones monótonas de longitud κ^+.*

Demostración: Por contradicción, si existe $W = \{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa^+}$ tal que $f_\alpha < f_\beta$ siempre que $\alpha < \beta$. Observemos que $\{f_\alpha(0)\}_{\alpha<\kappa^+}$ es una sucesión no decreciente de ordinales menores que 2, pues W es creciente. Además dicha sucesión se estaciona, i.e. existe $\alpha_0 < \kappa^+$ tal que $f_\alpha(0) = f_{\alpha_0}(0) = \beta_0$ para cada $\alpha > \alpha_0$ donde $\beta_0 \in \{0,1\}$ es fijo; supongamos lo contrario, que existe $\gamma_0 < \kappa^+$ tal que $f_\alpha(0) = 1$

para algún $\alpha < \gamma_0$ y $f_{\gamma_0}(0) = 0$, entonces para tal $\alpha < \gamma_0$ se tiene que $f_\alpha > f_{\gamma_0}$ por definición del orden lexicográfico, pero esto es imposible pues W es creciente.

Sea $\gamma < \kappa$, supongamos que para cada $\beta < \gamma$ hemos construido $\alpha_\beta < \kappa^+$. Notemos que $\delta = \sup\{\alpha_\beta : \beta < \gamma\} < \kappa^+$, pues κ^+ es regular por ser un cardinal sucesor. Observemos que $\{f_\alpha(\gamma) : \delta < \alpha < \kappa^+\}$ es una sucesión no decreciente, la cual se estaciona por el mismo argumento del párrafo anterior, así que hacemos $\alpha_\gamma > \delta$ un ordinal para el cual $f_\alpha(\gamma) = f_{\alpha_\gamma}(\gamma) = \beta_\gamma$ para cada $\alpha > \alpha_\gamma$, con $\beta_\gamma \in \{0, 1\}$ fijo.

Usando recursión, hemos construido una sucesión $(\alpha_i)_{i<\kappa}$, donde para cada $i < \kappa$, $\alpha_i < \kappa^+$ y $f_\alpha(i) = \beta_i$ para cada $\alpha > \alpha_i$, con $\beta_i \in \{0, 1\}$ para cada $i < \kappa$. Pero entonces $\alpha' = \sup\{\alpha_i : i < \kappa\} < \kappa^+$ por ser κ^+ regular, y $\{f_\alpha : \alpha' < \alpha < \kappa^+\}$ está formado por funciones idénticas, lo cual es una contradicción a la elección de W.

El caso decreciente es similar. ■

Si denotamos por $\kappa \nrightarrow (\lambda)^n_m$ a la fórmula $\neg(\kappa \to (\lambda)^n_m)$, entonces el siguiente teorema justifica la imposibilidad del análogo al Teorema de Ramsey para $\aleph_1$.

Teorema 4.7. *Para cada cardinal infinito κ, $2^\kappa \nrightarrow (\kappa^+)^2$.*

Demostración: Hallaremos una partición de $[2^\kappa]^2$ en dos piezas tal que no existe subconjunto 2-homogéneo de cardinalidad κ^+. Sea $\lambda = 2^\kappa$, como $P = {}^\kappa\{0, 1\}$ tiene cardinalidad 2^κ, podemos escribir $P = \{f_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Sea $\prec$ el orden para λ inducido por el orden lexicográfico en P: $\alpha \prec \beta$ siempre que $f_\alpha < f_\beta$. No es difícil comprobar que $\prec$ es un orden lineal en λ.

Definimos $f : [\lambda]^2 \to 2$ dada por $f(\alpha, \beta) = 1$ si y solo si $\alpha \prec \beta$ y $f(\alpha, \beta) = 0$ en caso contrario. Supongamos que existe $H \subseteq \lambda$ con $|H| = \kappa^+$ tal que H es 2-homogéneo para f. Entonces $\mathrm{type}(H; <) \geq \kappa^+$, así que tomando un subconjunto de H de ser necesario (usando un proceso parecido al de la proposición anterior), podemos suponer que $\mathrm{type}(H; <) = \kappa^+$.

Ahora, si $[H]^2 \subseteq f^{-1}[\{1\}]$, entonces $f(\alpha, \beta) = 1$ para cada $(\alpha, \beta) \in [H]^2$, es decir $\alpha \prec \beta$ y $f_\alpha < f_\beta$, como $\alpha < \beta$ se tiene que $\{f_\delta : \delta \in H\} \subseteq {}^\kappa\{0, 1\}$ es una sucesión creciente de longitud

κ^+. Por otro lado si $[H]^2 \subseteq f^{-1}[\{0\}]$ entonces $f(\alpha, \beta) = 0$ para cada $(\alpha, \beta) \in [H]^2$, luego $\alpha \not\prec \beta$ y como $\prec$ es lineal en λ se tiene que $\beta \prec \alpha$, así que $f_\beta < f_\alpha$ y con esto, ya que $\alpha < \beta$, $\{f_\delta : \delta \in H\}$ es una sucesión decreciente de longitud κ^+.

En cualquier caso tenemos una contradicción con el lema anterior. Por tanto no puede existir $H \subseteq \lambda$ con $|H| = \kappa^+$ tal que H es 2-homogéneo para la partición f. Con esto $2^\kappa \not\rightarrow (\kappa^+)^2$. ■

Ahora estamos en posición de comprobar que el análogo al Teorema de Ramsey para $\aleph_1$ no es posible. Uno podría pensar que nos vamos a apoyar de CH, reemplazando en el teorema anterior κ por $\aleph_0$, sin embargo esto no es necesario. Supongamos que $\kappa = \lambda^+$ para algún cardinal infinito λ, entonces veremos en general que $\kappa \not\rightarrow (\kappa)^n_m$ para cualesquiera $n, m \in \omega$.

Si $\kappa \rightarrow (\kappa)^n_m$, entonces la relación se mantiene para $2^\lambda \geq \kappa$, $2 \leq n$ y $2 \leq m$ que es $2^\lambda \rightarrow (\kappa)^2$, lo cual contradice el teorema anterior pues $\kappa = \lambda^+$.

Nos preguntamos en que momento $\kappa \rightarrow (\kappa)^n_m$, además de cuando $\kappa = \aleph_0$ que es el Teorema de Ramsey, o al menos nos interesa ver cuando $\kappa \rightarrow (\kappa)^2$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.8. Un cardinal κ no numerable se dirá débilmente compacto si $\kappa \rightarrow (\kappa)^2$.

Resulta, que un cardinal débilmente compacto es grande, $\aleph_0$ es un cardinal muy especial pues el siguiente cardinal que cumpla el análogo tiene que ser, al menos, un cardinal inaccesible.

Teorema 4.9. *Todo cardinal débilmente compacto es inaccesible.*

Demostración: Sea κ un cardinal débilmente compacto. Veamos que κ es un cardinal límite fuerte, si existe $\lambda < \kappa$ tal que $\kappa \leq 2^\lambda$, por el teorema 4.7 sabemos que $2^\lambda \not\rightarrow (\lambda^+)^2$, luego $\kappa \not\rightarrow (\lambda^+)^2$ y entonces $\kappa \not\rightarrow (\kappa)^2$ pues $\lambda^+ \leq \kappa$, pero esto es una contradicción a la elección de κ.

Comprobemos que κ es regular. Por contradicción supongamos que $\mu = \operatorname{cf}(\kappa) < \kappa$. Hacemos $\kappa = \bigcup_{\alpha<\mu} A_\alpha$ por ser κ singular, esto nos da una partición de κ en conjuntos ajenos de cardinalidad menor que κ. Definimos $f : [\kappa]^2 \rightarrow 2$ dada por $f(\alpha, \beta) = 0$ si y solo si $\{\alpha, \beta\} \subseteq A_\gamma$ para algún $\gamma < \mu$, en caso contrario $f(\alpha, \beta) = 1$. Como κ es débilmente compacto, existe $H \subseteq \kappa$ con $|H| = \kappa$ tal que H es 2-homogéneo para f.

Si $[H]^2 \subseteq f^{-1}[\{0\}]$ se tiene que $f(\alpha, \beta) = 0$ para cada $(\alpha, \beta) \in [H]^2$. Como $H \subseteq \kappa = \bigcup_{\alpha<\mu} A_\alpha$, entonces seleccionamos $\alpha_0 \in H$ fijo, $\alpha_0 \in A_{\gamma_0}$ para algún $\gamma_0 < \mu$. Ahora, si $\beta \in H$ y $\beta \neq \alpha_0$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\beta < \alpha_0$, ya que $f(\beta, \alpha_0) = 0$, se tiene que $\{\beta, \alpha_0\} \subseteq A_\gamma$ para algún $\gamma < \mu$. Pero $\gamma = \gamma_0$, pues si $\gamma \neq \gamma_0$ se tiene que $\alpha_0 \in A_\gamma$ y luego $A_\gamma \cap A_{\gamma_0} \neq \emptyset$, lo cual contradice la elección de los A_α. Con esto para cada $\beta \in H$, $\beta \in A_{\gamma_0}$ y así $H \subseteq A_{\gamma_0}$; pero esto implica que $|H| < \kappa$ lo cual es imposible por hipótesis.

Ahora si $[H]^2 \subseteq f^{-1}[\{1\}]$, tenemos para cada $\alpha < \mu$ que $|H \cap A_\alpha| \leq 1$. En efecto, si $|H \cap A_\alpha| > 1$ para algún $\alpha < \mu$, podemos tomar $\alpha, \beta \in H \cap A_\alpha$ distintos, para estos tenemos que $\{\alpha, \beta\} \subseteq A_\alpha$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\alpha < \beta$, entonces $f(\alpha, \beta) = 0$ por definición, pero esto es imposible pues $(\alpha, \beta) \in [H]^2 \subseteq f^{-1}[\{1\}]$. Con esto $|H| = |H \cap \kappa| = |H \cap (\bigcup_{\alpha<\mu} A_\alpha)| = |\bigcup_{\alpha<\mu}(H \cap A_\alpha)| \leq \sum_{\alpha<\mu} |H \cap A_\alpha| \leq \sum_{\alpha<\mu} 1 = \mu < \kappa$, lo cual es una contradicción a la elección de H.

Por tanto κ debe ser regular. Y en consecuencia, como κ es límite fuerte, tenemos que κ es un cardinal inaccesible. ■

Uno podría preguntarse cual es la relación entre un cardinal débilmente compacto y un cardinal Mahlo. Para poder responder esta cuestión, requerimos de diferentes caracterizaciones acerca de un cardinal débilmente compacto.

4.2. Relación con árboles

A continuación reunimos los conceptos básicos de la teoría de árboles.

Definición 4.10. Sea $(T, <)$ un conjunto parcialmente ordenado:

i) Diremos que $(T, <)$ es un árbol si para cada $x \in T$, $x{\downarrow} = \{y : y < x\}$ es un conjunto bien ordenado.

ii) Si T es un árbol, el α-ésimo nivel o nivel α de T, denotado por L_α es el conjunto $L_\alpha = \{x \in T : \text{type}(x\downarrow) = \alpha\}$.

iii) Si T es un árbol, su altura es el menor α tal que $L_\alpha = \emptyset$.

iv) Si T es un árbol, una rama en T es un subconjunto de T que es linealmente ordenado y maximal. La longitud de una rama b es el ordinal $\text{type}(b; <)$. Una α-rama b es un subconjunto de $\bigcup_{\beta\leq\alpha} L_\beta$ tal que b es linealmente ordenado y $|b \cap L_\beta| = 1$ para cada $\beta \leq \alpha$.

El siguiente lema es un resultado clásico dentro de la teoría de árboles, el cual exhibimos para justificar una definición posterior.

Teorema 4.11 (Lema de König)**.** *Si T es un árbol de altura $\aleph_0$ tal que cada nivel de T es finito, entonces T tiene una rama infinita.*

Al igual que con el Teorema de Ramsey, nos preguntamos si un resultado similar se tiene para $\aleph_1$, i.e. si para cada árbol T de altura $\aleph_1$, tal que cada nivel de T es numerable, tiene una rama no numerable. Desafortunadamente esto no es posible.

Diremos que un árbol T es de Aronszajn si tiene altura $\aleph_1$ y cada nivel es a lo más numerable, pero cada rama también es a lo más numerable. Esta definición es la negación del enunciado del Lema de König para $\aleph_1$, Nachman Aronszajn construyó un árbol de este tipo en 1934, lo cual implica que no es posible el resultado esperado que se describió en el párrafo anterior. También, no es difícil probar que para cada cardinal singular κ, existe un árbol de altura κ cuyos niveles tienen cardinalidad menor que κ pero que cada rama también es de cardinalidad menor que κ. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.12. Diremos que un cardinal κ regular y no numerable tiene la propiedad del árbol si para cada árbol de altura κ, cuyos niveles tienen cardinalidad menor que κ, tiene una rama de cardinalidad κ.

Por lo que el Lema de König nos asegura que $\aleph_0$ cumple la propiedad del árbol, mientras que el resultado de Aronszajn exhibe que $\aleph_1$ no tiene esta propiedad. Resulta que esta propiedad junto con otra acerca de cierto cardinal, caracterizan a los cardinales débilmente compactos; caracterización que será útil más adelante.

Teorema 4.13. *Sea κ un cardinal infinito. Las siguientes son equivalentes:*

i) *κ es débilmente compacto.*

ii) *κ es inaccesible y κ tiene la propiedad del árbol.*

iii) *κ cumple $\kappa \to (\kappa)^n_m$ para todo $n \in \omega$ y cada $m < \kappa$.*

Demostración: i) $\to$ ii): κ es inaccesible por un teorema previo. Verifiquemos que tiene la propiedad del árbol. Sea $(T, <_T)$ un árbol de altura κ cuyos niveles son de cardinalidad menor que κ, hallaremos una rama de cardinalidad κ. Como $T = \bigcup_{\alpha<\kappa} L_\alpha$ entonces $|T| = |\bigcup_{\alpha<\kappa} L_\alpha| = \sum_{\alpha<\kappa} |L_\alpha| = \kappa \cdot \sup\{|L_\alpha| : \alpha < \kappa\} = \kappa$. Así que existe $F : \kappa \to T$ biyectiva, escribimos $T = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

Definimos un orden lineal R sobre T dado por $x_\alpha R x_\beta$ si y solo si $x_\alpha <_T x_\beta$ o bien, si no son $<_T$-comparables y si $\delta < \kappa$ es mínimo con la propiedad que para el nivel δ, si $x_{\alpha'}$ y $x_{\beta'}$ son los predecesores de x_α y x_β respectivamente en el nivel δ, se tiene que $x_{\alpha'} \neq x_{\beta'}$ entonces $\alpha' < \beta'$. No es difícil verificar que R es un orden lineal. Sea $f : [\kappa]^2 \to 2$ dada por $f(\alpha, \beta) = 1$ si y solo si $x_\alpha R x_\beta$ y $f(\alpha, \beta) = 0$ en caso contrario. Como κ es débilmente compacto, existe $H \subseteq \kappa$ que es 2-homogéneo para f tal que $|H| = \kappa$.

Consideremos $B \subseteq T$ el conjunto de todos los $x_\alpha \in T$ tal que el conjunto $\{\beta \in H : x_\alpha <_T x_\beta\}$ tiene cardinal κ. Afirmamos que para cada $\alpha < \kappa$ existe $x_\beta \in L_\alpha$ tal que $x_\beta \in B$. Para verificar la afirmación supongamos lo contrario, i.e. supongamos que existe $\alpha < \kappa$ tal que para cada $x_\beta \in L_\alpha$, $x_\beta \notin B$, esto es $|\{\gamma \in H : x_\beta <_T x_\gamma\}| < \kappa$ para cada $x_\beta \in L_\alpha$. Si para cada $\delta < \kappa$ hacemos $\pi(\delta) = \{\lambda < \kappa : x_\lambda \in L_\delta\}$, tenemos que:

$$H = \bigcup_{\delta \leq \alpha} (\pi(\delta) \cap H) \cup \bigcup_{x_\beta \in L_\alpha} \{\gamma \in H : x_\beta <_T x_\gamma\} \tag{4.1}$$

En efecto, si $\lambda \in H$ entonces si $x_\lambda \in L_\delta$ para algún $\delta \leq \alpha$, se sigue que $\lambda \in \pi(\delta)$, así $\lambda \in \pi(\delta) \cap H$. Ahora, si $x_\lambda \in L_\delta$ para algún $\delta > \alpha$, tenemos que $\operatorname{type}(x_\lambda\downarrow; <_T) = \delta > \alpha$, luego existe $f_\lambda : \delta \to x_\lambda\downarrow$ isomorfismo de orden, para $f_\lambda(\alpha) \in x_\lambda\downarrow$, tenemos que $x_{\beta_0} = f_\lambda(\alpha) <_T x_\lambda$. Además, $x_{\beta_0} \in L_\alpha$ pues $f_\lambda \restriction \alpha$ es claramente un isomorfismo de orden tal que $(x_{\beta_0}, <_T) \cong (\alpha, <)$, con esto $\operatorname{type}(x_{\beta_0}\downarrow ; <_T) = \alpha$, así $x_{\beta_0} \in L_\alpha$. Por tanto para $x_{\beta_0} \in L_\alpha$ tenemos que $x_{\beta_0} <_T x_\lambda$, luego $\lambda \in \bigcup_{x_\beta \in L_\alpha}\{\gamma \in H : x_\beta <_T x_\gamma\}$. Así queda probada la igualdad en 4.1.

Más aún, los elementos de la unión en 4.1 son ajenos dos a dos. Pues si $\delta_1, \delta_2 \leq \alpha$, $\delta_1 \neq \delta_2$, es claro que $(\pi(\delta_1) \cap H) \cap (\pi(\delta_2) \cap H) = \emptyset$ ya que $L_{\delta_1} \cap L_{\delta_2} = \emptyset$ por ser $\delta_1 \neq \delta_2$. Por otro lado si $\delta_1 \leq \alpha$ y $x_\beta \in L_\alpha$, entonces también tenemos $(\pi(\delta_1) \cap H) \cap \{\gamma \in H : x_\beta <_T x_\gamma\} = \emptyset$, de lo contrario para $\gamma \in H$ con $x_\gamma \in L_{\delta_1}$ y $x_\beta <_T x_\gamma$ se tiene que $\delta_1 = \operatorname{type}(x_\gamma\downarrow; <_T) > \operatorname{type}(x_\beta\downarrow; <_T) = \alpha$ lo cual es imposible. Finalmente si $x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \in L_\alpha$ con $x_{\beta_1} \neq x_{\beta_2}$, veamos que $\{\gamma \in H : x_{\beta_1} <_T x_\gamma\} \cap \{\gamma \in H : x_{\beta_2} <_T x_\gamma\} = \emptyset$. Supongamos que $\gamma \in H$ es tal que $x_{\beta_1} <_T x_\gamma$ y $x_{\beta_2} <_T x_\gamma$, entonces $x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \in x_\gamma\downarrow$ con lo cual $x_{\beta_1} <_T x_{\beta_2}$ ó $x_{\beta_2} <_T x_{\beta_1}$; implicando que $\operatorname{type}(x_{\beta_1}\downarrow; <_T) < \operatorname{type}(x_{\beta_2}\downarrow; <_T)$ ó $\operatorname{type}(x_{\beta_2}\downarrow; <_T) < \operatorname{type}(x_{\beta_1}\downarrow; <_T)$ lo cual es imposible pues $x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \in L_\alpha$.

Tenemos que $\kappa = |H| = |\bigcup_{\delta \leq \alpha}(\pi(\delta) \cap H) \cup \bigcup_{x_\beta \in L_\alpha}\{\gamma \in H : x_\beta <_T x_\gamma\}| = \sum_{\delta \leq \alpha} |\pi(\delta) \cap H| + \sum_{x_\beta \in L_\alpha} |\{\gamma \in H : x_\beta <_T x_\gamma\}|$, pero por la elección de α y por las hipótesis sobre el árbol, se tiene que la última igualdad de lo anterior es una suma de menos de κ términos que tienen cardinalidad menor que κ cada uno, lo cual no es posible por ser κ regular. Por tanto, hemos probado la afirmación que para cada $\alpha < \kappa$ existe $x_\beta \in L_\alpha$ tal que $x_\beta \in B$; en otras palabras, B intersecta a cada nivel de T.

Supongamos por un momento que B está linealmente ordenado por $<_T$. Si $B' \supseteq B$ y B' está linealmente ordenado por $<_T$, y si $B' \setminus B \neq \emptyset$ entonces sea $x_b \in B' \setminus B$, si $x_b \in L_\alpha$ para algún $\alpha < \kappa$. Ya que $B \cap L_\alpha \neq \emptyset$, tomamos $x_\beta \in L_\alpha \cap B \subseteq B \subseteq B'$, luego $x_b <_T x_\beta$ ó $x_\beta <_T x_b$. En cualquier caso se sigue que $\alpha < \alpha$ lo cual es imposible. Por tanto $B = B'$ y así B' es maximal, con lo cual es una rama en T. Además es de cardinalidad κ pues $B \cap L_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha < \kappa$.

Probemos que B está linealmente ordenado por $<_T$. Supongamos que existen $x_\alpha, x_\beta \in B$ tal que x_α y x_β no son $<_T$-comparables.

Como R es un orden lineal podemos suponer que $x_\alpha R x_\beta$, como tienen κ sucesores en H, existen $\gamma < \delta < \varepsilon$ elementos de H tales que $x_\alpha <_T x_\gamma$, $x_\beta <_T x_\delta$ y $x_\alpha <_T x_\varepsilon$. Por la definición de R, $x_\gamma R x_\delta$ y $x_\varepsilon R x_\delta$, pues el primer nivel donde difieren los predecesores de x_γ y x_δ es el mismo donde difieren los de x_α y x_β; similarmente el mismo argumento verifica que $x_\varepsilon R x_\delta$.

Por tanto, por definición de f, $f(\gamma, \delta) = 1$ y $f(\delta, \varepsilon) = 0$, lo cual contradice que H es 2-homogéneo. Así que debemos tener que $(B, <_T)$ es un orden lineal. Y por un argumento anterior, B es una rama en T de cardinalidad κ, con lo cual κ cumple la propiedad del árbol.

ii) $\to$ iii)): Haremos inducción sobre n. Para $n = 1$ es claro pues queremos que $\kappa \to (\kappa)^1_m$ lo cual es claro pues κ es regular por ser un cardinal inaccesible. Ahora, supongamos que se tiene la conclusión para $n - 1$ con $n \in \mathbb{N}$, es decir supongamos que $\kappa \to (\kappa)^{n-1}_m$, y comprobemos que $\kappa \to (\kappa)^n_m$.

Sea $f : [\kappa]^n \to m$ una partición de $[\kappa]^n$. Definimos un orden parcial $\prec$ sobre κ, de modo que $(\kappa, \prec)$ formará un árbol. Para cada $\alpha < \kappa$, diremos que $\beta \prec \alpha$ si y solo si:

a) $\beta < \alpha$,

b) siempre que $\beta_0 < \cdots < \beta_{n-2} < \beta$ son tales que $\beta_0 \prec \cdots \prec \beta_{n-2} \prec \beta$, entonces $f(\beta_0, \ldots, \beta_{n-2}, \beta) = f(\beta_0, \ldots, \beta_{n-2}, \alpha)$.

Verifiquemos que $\prec$ definido de esta manera es un orden parcial. Veamos que $\prec$ cumple la transitividad, i.e. si $\gamma \prec \beta$ y $\beta \prec \alpha$ entonces $\gamma \prec \alpha$. Por inducción sobre α, para $\alpha = 0$ es claro. Supongamos que $\prec$ es transitivo para cada ordinal menor que α, tomemos $\gamma \prec \beta$ y $\beta \prec \alpha$, por definición de $\prec$ tenemos que $\gamma < \beta < \alpha$, luego $\gamma < \alpha$. Resta ver que se cumple b) de la definición. Sean $\beta_0 < \cdots < \beta_{n-2} < \gamma$ tales que $\beta_0 \prec \cdots \prec \beta_{n-2} \prec \gamma$, como $\gamma \prec \beta$ y $\beta < \alpha$ entonces por hipótesis de inducción $\beta_{n-2} \prec \beta$. Así que $\beta_0 < \cdots < \beta_{n-2} < \beta$ y $\beta_0 \prec \cdots \prec \beta_{n-2} \prec \beta$, y por b) aplicado a $\beta \prec \alpha$, tenemos que $f(\beta_0, \ldots, \beta_{n-2}, \beta) = f(\beta_0, \ldots, \beta_{n-2}, \alpha)$. También $f(\beta_0, \ldots, \beta_{n-2}, \gamma) = f(\beta_0, \ldots, \beta_{n-2}, \beta)$ pues $\gamma \prec \beta$, juntando estas igualdades verificamos que $f(\beta_0, \ldots, \beta_{n-2}, \gamma) = f(\beta_0, \ldots, \beta_{n-2}, \alpha)$. En consecuencia tenemos b), comprobando que $\gamma \prec \alpha$.

Es claro que $\prec$ es irreflexiva, así $(\kappa, \prec)$ es un orden parcial. Ahora, probaremos que $(\kappa, \prec)$ es un árbol, verifiquemos que $\alpha\!\downarrow$ está bien ordenado por $\prec$. Consideremos $X \subseteq \alpha\!\downarrow$ no vacío. Sea α_0 el elemento $<$-mínimo de X, donde $<$ es el orden usual en los ordinales, afirmamos que α_0 es $\prec$-minimal. Supongamos que existe $\beta \in X$ tal que $\beta \prec \alpha_0$, entonces por a) $\beta < \alpha_0$, pero esto es imposible por la elección de α_0; con esto no existe $\beta \in X$ tal que $\beta \prec \alpha_0$.

Veamos que $\alpha\!\downarrow$ está linealmente ordenado por $\prec$, i.e. si $\gamma, \beta \in \alpha\!\downarrow$ y $\gamma \neq \beta$, entonces $\gamma \prec \beta$ ó $\beta \prec \gamma$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\gamma < \beta$, entonces verifiquemos que $\gamma \prec \beta$. Por inducción sobre γ, para $\gamma = 0$ tenemos que $0 < \beta$, se sigue que $0 \prec \beta$. Supongamos que es válida la afirmación para cada ordinal menor que γ. Sean $\beta_0 < \cdots < \beta_{n-2} < \gamma$ tales que $\beta_0 \prec \cdots \prec \beta_{n-2} \prec \gamma$, por hipótesis de inducción con $\beta_{n-2} < \gamma$ tenemos que $\beta_{n-2} \prec \beta$. Así para $\beta_0 < \cdots < \beta_{n-2} < \beta$ se cumple que $\beta_0 \prec \cdots \prec \beta_{n-2} \prec \beta$, luego por b) aplicado a $\beta \prec \alpha$ tenemos que $f(\beta_0, \ldots, \beta_{n-2}, \beta) = f(\beta_0, \ldots, \beta_{n-2}, \alpha)$. Pero también $f(\beta_0, \ldots, \beta_{n-2}, \gamma) = f(\beta_0, \ldots, \beta_{n-2}, \alpha)$ pues $\gamma \prec \alpha$. Por tanto $f(\beta_0, \ldots, \beta_{n-2}, \gamma) = f(\beta_0, \ldots, \beta_{n-2}, \beta)$ y con esto probamos b), verificando que $\gamma \prec \beta$.

Por tanto $(\kappa, \prec)$ es un árbol. Probemos que es de altura κ y que cada nivel tiene cardinalidad menor que κ. Para calcular la máxima cardinalidad de los niveles de $(\kappa, \prec)$, notemos lo siguiente, si $k \leq n-2$ entonces $k \prec \delta$ para cualquier $\delta > k$ pues b) se cumple por vacuidad. En consecuencia cada nivel k, con $k \leq n-2$ consta de un solo elemento.

Notemos que si $\gamma \in L_\alpha$ con $\alpha \geq n-1$, y si $\beta \neq \beta'$ son sucesores inmediatos de γ, digamos que $\beta < \beta'$. Entonces para cada $\gamma_0 < \cdots < \gamma_{n-2} < \gamma$ con $\gamma_0 \prec \cdots \prec \gamma_{n-2} \prec \gamma$, ya que $\gamma \prec \beta$ y $\gamma \prec \beta'$ tenemos que $f(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-2}, \gamma) = f(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-2}, \beta) = f(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-2}, \beta')$. También tenemos que $\beta \not\prec \beta'$ con lo que existen $\gamma_0 < \cdots < \gamma_{n-3} < \gamma < \beta$ tales que $\gamma_0 \prec \cdots \prec \gamma_{n-3} \prec \gamma \prec \beta$ pero que $f(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-3}, \gamma, \beta) \neq f(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-3}, \gamma, \beta')$.

Por el análisis anterior y ya que el número máximo de posibles sucesiones que verifican, $\gamma_0 \prec \cdots \prec \gamma_{n-3} \prec \gamma$ es $|[\alpha]^{n-2}|$, dado que $\gamma \in L_\alpha$ entonces $\text{type}(\gamma\!\downarrow; \prec) = \alpha$. Por la definición de f, los valores que puede tomar $f(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-2}, \gamma, \beta)$ con $\gamma_0 \prec \cdots \prec \gamma_{n-3} \prec \gamma$ es $m^{|[\alpha]^{n-2}|}$. En conclusión, este es el número máximo de sucesores inmediatos que $\gamma \in L_\alpha$ puede tener.

Ahora, estamos en posición de probar que $|L_\alpha| < \kappa$ para cada $\alpha < \kappa$. Por inducción transfinita sobre α, para $\alpha = 0$ es claro. Si $\alpha = \beta + 1$, por lo anterior sabemos que cada $\gamma \in L_\beta$ tiene a lo más $m^{|[\beta]^{n-2}|}$, por hipótesis de inducción tenemos que $|L_\beta| < \kappa$, con esto $|L_\alpha| \leq |L_\beta| \cdot m^{|[\beta]^{n-2}|} < \kappa$ pues $m^{|[\beta]^{n-2}|} < \kappa$, ya que κ es límite fuerte.

Para probar el caso cuando α es un ordinal límite, observemos que L_α contiene a lo más un sucesor inmediato para cada α-rama. En efecto, veamos que es imposible que para $\beta_1, \beta_2 \in L_\alpha$ con $\beta_1 \neq \beta_2$ cumplan que $\beta_1{\downarrow} = \beta_2{\downarrow}$. Si $\beta_1 < \beta_2$, entonces para cualesquiera $\gamma_0 < \cdots < \gamma_{n-2} < \beta_1$ con $\gamma_0 \prec \cdots \prec \gamma_{n-2} \prec \beta_1$ se tiene que $\gamma_{n-2} \prec \beta_2$, pues $\beta_1{\downarrow} = \beta_2{\downarrow}$. Podemos elegir γ_{n-1} tal que $\gamma_{n-2} \prec \gamma_{n-1} \prec \beta_1$ y $\gamma_{n-1} \prec \beta_2$, ya que $\beta_1, \beta_2 \in L_\alpha$ y α es un ordinal límite. Pero como $\gamma_{n-1} \prec \beta_1$ entonces $f(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-2}, \gamma_{n-1}) = f(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-2}, \beta_1)$, de la misma forma dado que $\gamma_{n-1} \prec \beta_2$ se sigue que $f(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-2}, \gamma_{n-1}) = f(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-2}, \beta_2)$. Sin embargo, esto verifica b) probando que $\beta_1 \prec \beta_2$, lo cual es una contradicción a que $\beta_1, \beta_2 \in L_\alpha$.

Continuando la prueba para el caso límite. Ya que el número posible de α-ramas es $\prod_{\beta<\alpha} |L_\beta|$ pues cada α-rama intersecta cada nivel $\beta < \alpha$ en un solo elemento. Por hipótesis de inducción $|L_\beta| < \kappa$ para cada $\beta < \alpha$. Como el número de elementos no rebasa a κ y κ es regular, entonces usando la observación del párrafo anterior concluimos que $|L_\alpha| \leq \prod_{\beta<\alpha} |L_\beta| < \kappa$. Esto completa la inducción.

También la altura de $(\kappa, \prec)$ es κ, pues si $L_\alpha = \emptyset$ para algún $\alpha < \kappa$ entonces $\kappa = \sum_{\beta<\alpha} |L_\beta|$, lo cual es imposible por ser κ regular. Con esto $(\kappa, \prec)$ es un árbol de altura κ, donde cada nivel tiene cardinalidad menor que κ, así que por hipótesis existe $B \subseteq \kappa$ rama tal que $|B| = \kappa$.

En particular esto implica que $\mathrm{type}(B, \prec) = \kappa$, así que existe $h : B \to \kappa$ isomorfismo de orden, escribimos $\kappa = \{\alpha_\gamma : \gamma \in B\}$. Definimos $g : [B]^{n-1} \to m$ dada por $g(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-2}) = f(\alpha_{\gamma_0}, \dots, \alpha_{\gamma_{n-2}}, \alpha_\gamma)$ para $\gamma \in B$ con $\gamma_{n-2} \prec \gamma$, tal $\gamma \in B$ existe pues $\mathrm{type}(B, \prec) = \kappa$, B intersecta a cada nivel de $(\kappa, \prec)$; g está bien definida por b) de la definición de $\prec$. Consideremos $g' : [\kappa]^{n-1} \to m$ dada por $g'(\alpha_{\gamma_0}, \ldots, \alpha_{\gamma_{n-2}}) = g(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-2})$, aplicando la hipótesis de inducción sabemos que $\kappa \to (\kappa)^{n-1}_m$, luego existe $H \subseteq \kappa$ tal que g' es constante sobre $[H]^{n-1}$ y $|H| = \kappa$.

Finalmente, verificamos que H exhibe que $\kappa \to (\kappa)^n_m$, i.e. H es n-homogéneo para f. Sean $(\alpha_{\gamma_0}, \ldots, \alpha_{\gamma_{n-1}}), (\alpha_{\gamma'_0}, \ldots, \alpha_{\gamma'_{n-1}}) \in [H]^n$, sabemos que $g'(\alpha_{\gamma_0}, \ldots, \alpha_{\gamma_{n-2}}) = g'(\alpha_{\gamma'_0}, \ldots, \alpha_{\gamma'_{n-2}})$, así que $g(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-2}) = g(\gamma'_0, \ldots, \gamma'_{n-2})$, pero entonces $g(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-2}) = f(\alpha_{\gamma_0}, \ldots, \alpha_{\gamma_{n-1}})$ pues $\alpha_{\gamma_{n-2}} < \alpha_{\gamma_{n-1}}$ y así $\gamma_{n-2} \prec \gamma_{n-1}$, de la misma manera $g(\gamma'_0, \ldots, \gamma'_{n-2}) = f(\alpha_{\gamma'_0}, \ldots, \alpha_{\gamma'_{n-1}})$. Juntando lo último tenemos que $f(\alpha_{\gamma_0}, \ldots, \alpha_{\gamma_{n-1}}) = f(\alpha_{\gamma'_0}, \ldots, \alpha_{\gamma'_{n-1}})$, con lo cual f es constante para $[H]^n$. Con lo cual H es n-homogéneo para f, verificando así $\kappa \to (\kappa)^n_m$.

iii) $\to$ i): Es claro. ■

Vale la pena recalcar que el teorema anterior nos indica que un cardinal débilmente compacto es suficientemente fuerte, que basta con que $\kappa \to (\kappa)^2$ para que $\kappa \to (\kappa)^n_m$ para cualquier $n < \omega$ y $m < \kappa$

4.3. Relación con lógica

Para exhibir otra aplicación de los cardinales débilmente compactos, vamos a recordar lo siguiente.

En lógica clásica de primer orden, tenemos diferentes ingredientes entre los cuales destaca el *lenguaje*, que es uno de los conceptos base, el cual está formado por un conjunto de *símbolos funcionales* (con su respectiva aridad), un conjunto de *símbolos predicativos* (con su respectiva aridad) y un conjunto de *símbolos constantes*, estos tres conjuntos también son denominados *símbolos no-lógicos*. Entre los *símbolos lógicos* destacamos, un conjunto numerable de *símbolos variables*. También, dentro del conjunto de fórmulas bien formadas tenemos en un punto que si φ y ψ son fórmulas bien formadas, entonces $\varphi \wedge \psi$ y $\varphi \vee \psi$ también son fórmulas bien formadas; y $((\exists x_i)\varphi)$ también lo es.

Haciendo esta analogía, presentamos la siguiente definición.

Definición 4.14. Consideremos κ un cardinal infinito. El lenguaje

$\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ consiste de:

i) κ variables;

ii) $\leq \kappa$ símbolos constantes, funcionales y predicativos;

iii) conectivos lógicos que admiten "conectivos infinitarios", es decir $\bigwedge_{\beta<\alpha}\varphi_\beta$ y $\bigvee_{\beta<\alpha}\varphi_\beta$ con $\alpha<\kappa$;

iv) cuantificadores $\exists$, $\forall$.

El lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ es el mismo que $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$, excepto que admite infinitos cuantificadores, es decir $\exists_{\beta<\alpha}x_\beta$, $\forall_{\beta<\alpha}x_\beta$ con $\alpha<\kappa$.

Para no ser muy técnicos en cuestiones semánticas, la interpretación de los símbolos infinitarios de $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ ($\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$) es la generalización obvia del caso clásico finito. El lenguaje $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$ es el lenguaje del cálculo de primer orden.

Recordemos que el Teorema de Compacidad (para $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$) afirma que si Σ es un conjunto de sentencias para el cual todo subconjunto finito tiene un modelo, entonces Σ tiene un modelo. Diremos que $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ ($\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$) satisface el *Teorema de Compacidad Débil* si cada que Σ es un conjunto de sentencias de $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ ($\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$) con $|\Sigma|\leq\kappa$, tal que cada $S\subseteq\Sigma$ con $|S|<\kappa$ tiene un modelo, entonces Σ tiene un modelo . El teorema siguiente justifica el nombre dado a los cardinales débilmente compactos.

Teorema 4.15. *Sea κ un cardinal infinito:*

i) *Si κ es débilmente compacto entonces $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ satisface el Teorema de Compacidad Débil.*

ii) *Si κ es inaccesible y si $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ satisface el Teorema de Compacidad Débil, entonces κ es débilmente compacto.*

Demostración:

i). Sea Σ un conjunto de sentencias de $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ con $|\Sigma|=\kappa$ tal que si $S\subseteq\Sigma$ y $|S|<\kappa$, entonces S tiene un modelo. Podemos suponer que $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ es tal que $|\mathcal{L}|\leq\kappa$, pues basta considerar solamente los símbolos que ocurren en Σ.

Extendemos $\mathcal{L}$ como sigue. Para cada fórmula φ de $\mathcal{L}$ con variables libres x_β, $\beta < \alpha$, introducimos nuevos símbolos constantes c_β^φ, $\beta < \alpha$; sea $\mathcal{L}_1$ el lenguaje extendido resultante. Con estas nuevas constantes, podemos construir nuevas fórmulas de $\mathcal{L}_1$, haciendo lo mismo para cada fórmula e introduciendo sus respectivas constantes, construimos $\mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_1$. Continuando este proceso para cada $n < \omega$, sea $\mathcal{L}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_n$.

Notemos que para $\mathcal{L}$, podemos tener $\leq \kappa$ términos, pues tenemos κ variables y, una cantidad $\leq \kappa$ de símbolos funcionales y constantes. Luego, tenemos $\leq \kappa$ fórmulas atómicas y procediendo de manera inductiva, recordando que κ es inaccesible, tenemos que el número de fórmulas es $\leq \kappa$. Con esto, $|\mathcal{L}^*| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mathcal{L}_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Por construcción $\mathcal{L}^*$ tiene la propiedad que para cada fórmula φ con variables libres x_β, $\beta < \alpha$, existen símbolos constantes $c_\beta^\varphi \in \mathcal{L}^*$ (los cuales no ocurren en φ).

Para cada $\varphi((x_\beta)_{\beta<\alpha})$ fórmula de $\mathcal{L}^*$, donde $(x_\beta)_{\beta<\alpha}$ indica sus variables libres, sea σ_φ la sentencia dada por $\exists_{\beta<\alpha} x_\beta \varphi((x_\beta)_{\beta<\alpha}) \to \varphi((c_\beta^\varphi)_{\beta<\alpha})$. Sea $\Sigma^* = \Sigma \cup \{\sigma_\varphi : \varphi$ es una fórmula de $\mathcal{L}^*\}$, afirmamos que dado $S \subseteq \Sigma^*$ con $|S| < \kappa$ tiene un modelo. En efecto, consideremos un modelo de $S \cap \Sigma$, podemos expandir dicho modelo a un modelo para S interpretando cada símbolo constante de manera adecuada.

Como $|\mathcal{L}^*| \leq \kappa$ entonces el número de sentencias de $\mathcal{L}^*$ es κ, así que si $\{\sigma_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una enumeración del conjunto de sentencias de $\mathcal{L}^*$, entonces consideremos T el conjunto de todas las funciones $t : \gamma \to 2$, con $\gamma < \kappa$, tales que existe un modelo M de $\Sigma^* \cap \{\sigma_\alpha : \alpha < \gamma\}$ de modo que para cada $\alpha < \gamma$, $t(\alpha) = 1$ si y solo si $M \models \sigma_\alpha$. En T consideramos el orden dado por la contención, i.e. $t < s$ si y solo si $t \subsetneq s$. Es claro que $(T, <)$ es un orden parcial.

Además $(T, <)$ es un árbol, pues si $t \in T$, veamos que $t{\downarrow}$ es un orden lineal. Dados $t_1, t_2 \in t{\downarrow}$, con $t_1 \neq t_2$, si $\mathrm{dom}(t_1) = \gamma_1$ y $\mathrm{dom}(t_2) = \gamma_2$, como $t_1 < t$ y $t_2 < t$ entonces $\gamma_1 < \mathrm{dom}(t)$ y $\gamma_2 < \mathrm{dom}(t)$. Si $\gamma_1 < \gamma_2$, se tiene que $t_1 < t_2$ pues dado $(x, y) \in t_1$, tenemos que $x < \gamma_1 < \gamma_2$, luego $(x, y) \in t_2$ de lo contrario t no es función. Así $t{\downarrow}$ es un orden lineal. Para ver que es bien fundado, sea $X \subseteq t{\downarrow}$ y $X \neq \emptyset$, entonces $t' = \bigcap X$ es claramente un elemento mínimo de X. Por tanto $(T,<)$ es un árbol.

Dada la propiedad de Σ^* resulta que para cada $\gamma < \kappa$, existe $t \in T$ tal que $\mathrm{dom}(t) = \gamma$. En efecto, sea $\gamma < \kappa$, $\Sigma^* \cap \{\sigma_\alpha : \alpha < \gamma\}$ tiene un modelo M puesto que $|\Sigma^* \cap \{\sigma_\alpha : \alpha < \gamma\}| < \kappa$. Sea $t_\gamma : \gamma \to 2$ definida por $t_\gamma(\alpha) = 1$ si $M \models \sigma_\alpha$ y $t_\gamma(\alpha) = 0$ en caso contrario. Por definición se sigue que $t_\gamma \in T$ y $\mathrm{dom}(t_\gamma) = \gamma$. Además $\mathrm{type}(t{\downarrow}; <) = \mathrm{dom}(t)$, pues la función $h : t{\downarrow} \to \mathrm{dom}(t)$ dada por $h(s) = \mathrm{dom}(s)$ es un isomorfismo que lo exhibe. Así por la afirmación inicial, tenemos que $T \neq \emptyset$, más aun $|T| = \kappa$ y $L_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha < \kappa$. Ya que κ es inaccesible se sigue que $|L_\alpha| < \kappa$ para cada $\alpha < \kappa$.

De lo anterior se tiene que $(T,<)$ es un árbol de altura κ, donde cada nivel tiene cardinal menor que κ. Ya que κ es débilmente compacto existe una rama B de cardinalidad κ sobre $(T,<)$. Sea $\Delta = \{\sigma_\alpha : t(\alpha) = 1 \text{ para algún } t \in B\}$, probaremos que $\Sigma^* \subseteq \Delta$; sea $\phi \in \Sigma^*$, entonces ϕ es una sentencia con lo cual $\phi = \sigma_\alpha$ para algún $\alpha < \kappa$. Ya que $B \cap L_{\alpha+1} \neq \emptyset$, tomemos $t \in B \cap L_{\alpha+1}$, tenemos que $\mathrm{dom}(t) = \alpha + 1$ y que existe un modelo M de $\Sigma^* \cap \{\sigma_\beta : \beta < \alpha + 1\}$, dado que $\sigma_\alpha \in \Sigma^* \cap \{\sigma_\beta : \beta < \alpha + 1\}$ se sigue que $t(\alpha) = 1$ y así $\phi = \sigma_\alpha \in \Delta$.

Hallaremos un modelo para Δ, el cual por la contención anterior será un modelo para Σ^*. Sea A_0 el conjunto de todos los símbolos constantes de $\mathcal{L}^*$ y sea $\approx$ la relación en A_0 dada por $c_1 \approx c_2$ si y solo si $(c_1 = c_2) \in \Delta$. Verificamos que $\approx$ es una relación de equivalencia sobre A_0. Sea $c \in A_0$, existe $\gamma < \kappa$ tal que $(c = c) \equiv \sigma_\alpha$ para algún $\alpha < \gamma$, es claro que para $t \in B \cap L_\gamma$, $t(\alpha) = 1$ pues el modelo M respectivo siempre cumple que $M \models (c = c)$. Así $(c = c) \in \Delta$, con lo cual $c \approx c$ exhibiendo que $\approx$ es reflexiva.

Ahora, si $c_1, c_2 \in A_0$, son tales que $c_1 \approx c_2$. Entonces existe $\gamma < \kappa$ tal que $(c_1 = c_2), (c_2 = c_1) \in \{\sigma_\alpha : \alpha < \gamma\}$, por la hipótesis $(c_1 = c_2) \in \Delta$, luego existe $t \in B$ tal que $t(\alpha_1) = 1$, donde $\sigma_{\alpha_1} \equiv (c_1 = c_2)$ y $\alpha_1 < \gamma$. Esto significa que existe un modelo M tal que $M \models (c_1 = c_2)$, sabemos que esto implica que $M \models (c_2 = c_1)$, con lo cual $t(\alpha_2) = 1$, donde $\sigma_{\alpha_2} \equiv (c_2 = c_1)$ y $\alpha_2 < \gamma$. Así $(c_2 = c_1) \in \Delta$ con lo cual $c_2 \approx c_1$, esto prueba que $\approx$ es una relación simétrica. De manera similar se verifica que $\approx$ es transitiva. Por tanto $\approx$ es de equivalencia sobre A_0.

Sea $A = A_0/\approx$, definimos un modelo $\mathfrak{A}$ con universo A para Δ, dado de la siguiente manera:

- $c^{\mathfrak{A}} = [c]$ para cada símbolo constante c.
- $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ definida mediante $f^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [d]$ si y solo si $(f(c_1, \ldots, c_n) = d) \in \Delta$, para cada símbolo funcional f de aridad n.
- $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ donde $([c_1], \ldots, [c_n]) \in P^{\mathfrak{A}}$ si y solo si $P(c_1, \ldots, c_n) \in \Delta$, para cada símbolo predicativo P de aridad n.

Veamos que $\mathfrak{A}$ está bien definido. Probamos que $f^{\mathfrak{A}}$ está bien definida para cada símbolo funcional f de $\mathcal{L}^*$ (el caso de los símbolos predicativos es análogo).

Sean f un símbolo funcional de aridad n y $c_1, \ldots, c_n \in A_0$, para la fórmula $\varphi_f(x) \equiv (f(c_1, \ldots, c_n) = x)$, por construcción sabemos que la sentencia $\sigma_{\varphi_f} \equiv (\exists x(f(c_1, \ldots, c_n) = x) \to f(c_1, \ldots, c_n) = c_x^{\varphi_f})$ es un elemento de Σ^*. Además existen $\alpha_1, \alpha_2 < \gamma$, para algún $\gamma < \kappa$, de manera que $\sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\varphi_f}$ y $\sigma_{\alpha_2} \equiv (f(c_1, \ldots, c_n) = c_x^{\varphi_f})$. Ya que B es una rama, existe $t \in B \cap L_\gamma$ tal que hay un modelo M para $\Sigma^* \cap \{\sigma_\alpha : \alpha < \gamma\}$, con lo cual $M \models \sigma_{\alpha_1}$. También, es claro que $M \models (\exists x(f(c_1, \ldots, c_n) = x))$, así que modus ponens implica que $M \models (f(c_1, \ldots, c_n) = c_x^{\varphi_f})$, así $t(\alpha_2) = 1$. Entonces para $d = c_x^{\varphi_f}$ tenemos que $(f(c_1, \ldots, c_n) = d) \in \Delta$, por tanto $f^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n])$ está definido para $([c_1], \ldots, [c_n]) \in A^n$.

Ahora, supongamos que $([c_1], \ldots, [c_n]) = ([d_1], \ldots, [d_n]) \in A^n$, entonces $c_i \approx d_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, con lo cual $(c_i = d_i) \in \Delta$ para cada i. Si $f^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c]$ y $f^{\mathfrak{A}}([d_1], \ldots, [d_n]) = [d]$, tenemos que $(f(c_1, \ldots, c_n) = c), (f(d_1, \ldots, d_n) = d) \in \Delta$. Sea $\gamma < \kappa$ tal que $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+3} < \gamma$, donde $\sigma_{\alpha_i} \equiv (c_i = d_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\sigma_{n+1} \equiv (f(c_1, \ldots, c_n) = c)$, $\sigma_{n+2} \equiv (f(d_1, \ldots, d_n) = d)$ y $\sigma_{n+3} \equiv (c = d)$; para $t \in B \cap L_\gamma$ se tiene que $t(\alpha_i) = 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, n+2\}$. Así que el modelo M respectivo cumple que $M \models \sigma_{\alpha_i}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n+2\}$, esto implica que $M \models (c = d)$. Por tanto $t(\alpha_{n+3}) = 1$, entonces $(c = d) \in \Delta$, con lo cual $[c] = [d]$ exhibiendo que $f^{\mathfrak{A}}$ está bien definida.

Deseamos demostrar que $\mathfrak{A} \models \Delta$, para ello también comprobamos que los términos se comportan como uno esperaría. Afirmamos que si t es un término cuyas variables libres son $x_1, \ldots, x_n$, y si $c_1, \ldots, c_n, d \in A_0$, entonces $(t[c_1, \ldots, c_n] = d) \in \Delta$ si y solo si $t^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [d]$.

a) Por inducción sobre la longitud de t. Si t es un símbolo constante c y $(c = d) \in \Delta$, entonces $t^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}} = [c] = [d]$. Si t es una variable x_i y si $(c_i = d) \in \Delta$, entonces $t^{\mathfrak{A}}([c_i]) = [c_i] = [d]$. Supongamos que se tiene la afirmación para los términos $t_1, \ldots, t_m$ y que t es $f(t_1, \ldots, t_m)$. Sabemos que $\sigma_{\alpha_i} \equiv (\exists y_i(t_i[c_1, \ldots, c_n] = y_i) \to (t_i[c_1, \ldots, c_n] = c_{y_i}^{t_i})) \in \Sigma^*$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, además por ser sentencias podemos elegir $\gamma < \kappa$ tal que para $s \in B \cap L_\gamma$ le corresponde un modelo M para el cual $M \models \sigma_{\alpha_i}$ para cada i. Para cada i sabemos que $M \models (\exists y_i(t_i[c_1, \ldots, c_n] = y_i))$ así se sigue que $M \models (t_i[c_1, \ldots, c_n] = c_{y_i}^{t_i})$; haciendo $d_i = c_{y_i}^{t_i}$, tenemos que $(t_i[c_1, \ldots, c_n] = d_i) \in \Delta$. Por hipótesis inductiva, $t_i^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [d_i]$ para cada i.

   También $\sigma_\beta \equiv (\exists y(f(d_1, \ldots, d_m) = y) \to (f(d_1, \ldots, d_m) = c_y^t)) \in \Sigma^*$ y ya que es una sentencia, tomando $\gamma' < \kappa$ tal que $\beta < \gamma'$ tenemos que para $t' \in B \cap L_{\gamma'}$ existe un modelo M' para el cual $M' \models \sigma_\beta$, en consecuencia $M' \models (f(d_1, \ldots, d_m) = c_y^t)$, con ello $(f(d_1, \ldots, d_m) = c_y^t) \in \Delta$. Así, si $d' = c_y^t$ se tiene que $f^{\mathfrak{A}}([d_1], \ldots, [d_m]) = [d']$. Por el párrafo anterior, tenemos que $t^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [d']$. Además, un argumento similar muestra que $(d = d') \in \Delta$ con lo cual $[d] = [d']$, y por lo anterior tenemos que $t^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [d]$.

b) Por otro lado, supongamos que $t^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [d]$. Dado que $\sigma_\beta \equiv (\exists y(t[c_1, \ldots, c_n] = y) \to (t[c_1, \ldots, c_n] = c_y^t)) \in \Sigma^*$, existe $t \in B \cap L_\gamma$ para algún $\gamma < \kappa$ tal que hay un modelo M de $\Sigma^* \cap \{\sigma_\alpha : \alpha < \gamma\}$ para el cual $M \models \sigma_\beta$. Con esto $M \models (t[c_1, \ldots, c_n] = c_y^t)$, luego $(t[c_1, \ldots, c_n] = c_y^t) \in \Delta$, haciendo $e = c_y^t$ tenemos por a) que $t^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [e]$, por tanto $d \approx e$ y así $(d = e) \in \Delta$. Tomando $\gamma' < \kappa$ tal que para $t \in B \cap L_{\gamma'}$ se tiene que el modelo M' correspondiente cumple que $M' \models (t[c_1, \ldots, c_n] = e)$ y $M' \models (d = e)$, con esto $M' \models (t[c_1, \ldots, c_n] = d)$ y así $(t[c_1, \ldots, c_n] = d) \in \Delta$.

Finalmente estamos en posición de probar que $\mathfrak{A} \models \Delta$. Para ello, demostramos que para cada sentencia σ de $\mathcal{L}^*$ se cumple que $\mathfrak{A} \models \sigma$ si y solo si $\sigma \in \Delta$.

Usaremos inducción sobre la complejidad de la fórmula. Si σ es de la forma $(t_1 = t_2)$ para algunos términos t_1 y t_2, y si para $i \in \{1,2\}$ hacemos $t_i^{\mathfrak{A}} = [d_i]$. Tenemos que $\mathfrak{A} \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (t_1 = t_2) \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}} = t_2^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow [d_1] = [d_2] \Leftrightarrow (d_1 = d_2) \in \Delta \Leftrightarrow (t_1 = t_2) \in \Delta \Leftrightarrow \sigma \in \Delta$, donde la penúltima equivalencia se sigue usando el mismo argumento de encontrar un nodo que tenga un modelo el cual satisfaga las sentencias anteriores, y también recordando la afirmación anterior dada sobre los términos.

Si σ es $P(t_1, \dots, t_n)$, donde P es un símbolo predicativo de aridad n y $t_1, \dots, t_n$ son términos, hacemos $t_i^{\mathfrak{A}} = [d_i]$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego $\mathfrak{A} \models \sigma \Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{A}}, \dots, t_n^{\mathfrak{A}}) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow ([d_1], \dots, [d_n]) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow P(d_1, \dots, d_n) \in \Delta \Leftrightarrow P(t_1, \dots, t_n) \in \Delta \Leftrightarrow \sigma \in \Delta$, la penúltima equivalencia se tiene por los mismos argumentos del párrafo anterior.

Supongamos que es válida la afirmación para φ, verifiquemos para $\sigma \equiv \neg\varphi$. Sea $\gamma < \kappa$ tal que $\varphi, \sigma \in \{\sigma_\alpha : \alpha < \gamma\}$ y sea $t \in B \cap L_\gamma$, existe un modelo M de $\Sigma^* \cap \{\sigma_\alpha : \alpha < \gamma\}$ para el cual $t(\alpha) = 1$ si y solo si $M \models \sigma_\alpha$. Entonces $\mathfrak{A} \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi \Leftrightarrow \varphi \notin \Delta \Leftrightarrow M \not\models \varphi \Leftrightarrow M \models \neg\varphi \Leftrightarrow (\neg\varphi) \in \Delta \Leftrightarrow \sigma \in \Delta$.

Ahora, supongamos que se tiene la afirmación para cada ϕ_δ con $\delta < \beta$ y $\beta < \kappa$, si $\sigma \equiv \bigwedge_{\delta<\beta} \varphi_\delta$. Sea $\gamma < \kappa$ tal que $\varphi_\delta, \sigma \in \{\sigma_\alpha : \alpha < \gamma\}$ para cada $\delta < \beta$, consideremos $t \in B \cap L_\gamma$ y M un modelo de $\Sigma^* \cap \{\sigma_\alpha : \alpha < \gamma\}$, que cumple que $t(\alpha) = 1$ si y solo si $M \models \sigma_\alpha$. Tenemos que $\mathfrak{A} \models \sigma \Leftrightarrow \forall\delta < \beta, \mathfrak{A} \models \varphi_\delta \Leftrightarrow \forall\delta < \beta, \varphi_\delta \in \Delta \Leftrightarrow \forall\delta < \beta, M \models \varphi_\delta \Leftrightarrow M \models \sigma \Leftrightarrow \sigma \in \Delta$.

Por último, sea $\sigma \equiv \exists_{\delta<\beta} x_\delta \varphi$. Supongamos que $\mathfrak{A} \models \sigma$, entonces existen constantes de $\mathcal{L}^*$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi^*$, donde φ^* es la sentencia que resulta de hacer las valuaciones respectivas de x_δ en φ. Por hipótesis inductiva y ya que φ^* es una sentencia, tenemos que $\varphi^* \in \Delta$. Sea $\gamma < \kappa$ tal que $\varphi^*, \sigma \in \{\sigma_\alpha : \alpha < \gamma\}$, sea M un modelo de $\Sigma^* \cap \{\sigma_\alpha : \alpha < \gamma\}$ con la propiedad de los argumentos anteriores, ya que $\varphi^* \in \Delta$, tenemos que $M \models \varphi^*$ lo cual implica que $M \models \sigma$, y así $\sigma \in \Delta$.

Por otro lado, supongamos ahora que $\sigma \in \Delta$, tomemos $\gamma < \kappa$

tal que $\tilde{\varphi}, \sigma, ((\exists_{\delta<\beta} y_\delta\ \varphi) \to \tilde{\varphi}) \in \{\sigma_\alpha : \alpha < \gamma\}$, donde $\tilde{\varphi}$ es la sentencia que resulta de sustituir cada variable libre y de φ por su constante c_y^φ respectiva. Dado que $((\exists_{\delta<\beta} y_\delta\ \varphi) \to \tilde{\varphi}) \in \Sigma^*$, podemos seleccionar un modelo M, inducido por algún nodo de B, el cual cumple que $M \models ((\exists_{\delta<\beta} y_\delta\ \varphi) \to \tilde{\varphi})$. Como $\sigma \in \Delta$, se tiene que $M \models \sigma$, con lo cual se deduce que $M \models \tilde{\varphi}$, así $\tilde{\varphi} \in \Delta$. Por hipótesis inductiva y ya que $\tilde{\varphi}$ es una sentencia, se sigue que $\mathfrak{A} \models \tilde{\varphi}$ y con ello $\mathfrak{A} \models \sigma$.

Esto completa la inducción, en particular como Δ consta solamente de sentencias de $\mathcal{L}^*$, tenemos que $\mathfrak{A} \models \Delta$ y ya que $\Sigma \subseteq \Delta$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \Sigma$, es decir Σ tiene un modelo.

ii). Comprobaremos que κ satisface la propiedad del árbol y así por el Teorema 4.13, κ es un cardinal débilmente compacto. Sea $(T, <)$ un árbol de altura κ, donde cada nivel es de cardinalidad menor que κ, hallaremos una rama de cardinalidad κ. Sea $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ el lenguaje que contiene un símbolo predicativo B de aridad 1, un símbolo predicativo R de aridad 2 y símbolos constantes c_x para cada $x \in T$. Sea Σ el siguiente conjunto de sentencias:

a) $R(c_x, c_y)$, para cada $x, y \in T$ tales que $x < y$;

b) $\neg R(c_x, c_y)$, para cada $x, y \in T$ tales que $x \not< y$;

c) $\neg(B(c_x) \wedge B(c_y))$, para cualesquiera $x, y \in T$ incomparables;

d) $\bigvee_{x \in L_\alpha} B(c_x)$, para cada $\alpha < \kappa$.

Podemos notar que $|\Sigma| \leq \kappa$ y que si $S \subseteq \Sigma$ con $|S| < \kappa$, entonces S tiene como modelo a $M = (T, <, B')$, donde $c_x^M = x$, $R^M = <$ y $B^M = B'$, donde $B' \subseteq t{\downarrow}$ para alguna $t \in L_\gamma$, donde B' tiene un solo elemento de cada nivel $\alpha < \gamma$ y $\gamma < \kappa$ es tal que se tienen adecuadamente las interpretaciones de las sentencias en S para M. Así que, podemos aplicar el Teorema de Compacidad Débil a Σ para obtener un modelo M de Σ.

Consideremos $B_0 = \{x \in T : M \models B(c_x)\}$, claramente $|B_0| = \kappa$. Afirmamos que B_0 es una rama en T. En efecto, veamos que B_0 está linealmente ordenado, sean $x, y \in B_0$ con $x \neq y$, entonces $M \models B(c_x)$ y $M \models B(c_y)$. Ya que $M \models \Sigma$ y por c), tenemos que

$x < y$ ó $y < x$, de lo contrario $M \models \neg(B(c_x) \wedge B(c_y))$ lo cual es una contradicción con $M \models (B(c_x) \wedge B(c_y))$.

Resta ver que B_0 es maximal, sea $B' \subseteq T$ linealmente ordenado tal que $B' \supseteq B_0$. Supongamos que $B' \setminus B_0 \neq \emptyset$, sea $x \in B' \setminus B_0$, se sigue que $M \not\models B(c_x)$. Si $x \in L_\alpha$ para algún $\alpha < \kappa$, tenemos por d) que existe $x' \in L_\alpha$ tal que $M \models B(c_{x'})$, luego $x' \in B_0 \subseteq B'$. Ya que B' está linealmente ordenado entonces $x < x'$ ó $x' < x$, en cualquier caso se concluye que $\alpha < \alpha$, lo cual es imposible. Así $B_0 = B'$.

Por tanto, B_0 es una rama en T de cardinalidad κ, con esto κ tiene la propiedad del árbol. ■

Es claro que si $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ cumple el Teorema de Compacidad Débil, entonces también $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ también lo cumple. Con lo cual el teorema anterior nos da una nueva caracterización para κ cardinal débilmente compacto. A saber, para un cardinal κ, las siguientes son equivalentes:

i) κ es débilmente compacto.

ii) $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ cumple el Teorema de Compacidad Débil y κ es inaccesible.

iii) $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ cumple el Teorema de Compacidad Débil y κ es inaccesible.

Finalmente, estamos en posición de demostrar la relación que hay entre cardinales débilmente compactos y cardinales Mahlo, para ello necesitamos un lema. Cabe mencionar que puede demostrarse el converso del siguiente resultado y obtener así otra caracterización para los cardinales débilmente compactos.

Lema 4.16. *Sea κ un cardinal débilmente compacto, consideremos el lenguaje de la Teoría de Conjuntos $\mathcal{L}_{TC}$ extendido mediante un símbolo predicativo P de aridad 1. Para cada $A \subseteq R(\kappa)$, existe un conjunto transitivo $M \neq R(\kappa)$ y un conjunto $S \subseteq M$ tal que $(R(\kappa), \in, A) \prec (M, \in, S)$ y $\kappa \in M$.*

Demostración: Si κ es débilmente compacto, entonces κ es inaccesible, con lo cual $|R(\kappa)| = \kappa$. Sea $\mathcal{L}' = \{\in, P\} \cup \{c_x\}_{x \in R(\kappa)}$ y sea $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}' \cup \{c\}$, donde c_x y c son constantes nuevas; notemos que $|\mathcal{L}'| = |\mathcal{L}''| = \kappa$. Además, de manera natural se tiene que $(R(\kappa), \in, A)$ es un modelo para $\mathcal{L}'$, interpretando cada constante c_x por x y a P como A.

Sea Σ el conjunto de todas las sentencias (finitas) de $\mathcal{L}'$ verdaderas en $(R(\kappa), \in, A)$, junto con las siguientes sentencias de $\mathcal{L}''$:

a) $\forall u(u \notin c_\emptyset)$;

b) $\forall u(u \in c_x \leftrightarrow \bigvee_{y\in x}(u = c_y))$, para cada $x \in R(\kappa)$ no vacío;

c) $\neg \left(\exists_{n\in\omega} x_n \left(\bigwedge_{n\in\omega}(x_{n+1} \in x_n)\right)\right)$;

d) c es un ordinal;

e) $c_\alpha \in c$, para cada $\alpha < \kappa$.

Claramente $|\Sigma| = \kappa$ y, cualquier sentencia de Σ que no contiene a la constante c es válida en $(R(\kappa), \in, A)$. Además, si $X \subseteq \Sigma$ con $|X| < \kappa$, entonces X tiene como modelo a $(R(\kappa), \in, A)$ interpretando la constante c como un ordinal en $R(\kappa)$ suficientemente grande. Ya que κ es débilmente compacto, podemos usar el Teorema de Compacidad Débil y obtener un modelo M para Σ.

Ya que M cumple la sentencia c), se tiene que la relación $\in^M$ está bien fundada en M. También $\in^M$ es extensional, pues la sentencia respectiva es un elemento de σ por ser verdadera en $(R(\kappa), \in, A)$. Por tanto, por el Lema del Colapso de Mostowski, podemos suponer que M es un modelo transitivo.

Sea $x \in R(\kappa)$, afirmamos que $c_x^M = x$. Por inducción sobre $\alpha = \text{rank}(x) < \kappa$. Si $\alpha = 0$, tenemos que $\text{rank}(x) = 0$, luego $x \in R(1) = \{\emptyset\}$, así $x = \emptyset$ y como M cumple a), se tiene que para cada $u \in M$, $u \notin c_x^M$, recordando que M es transitivo se sigue que $c_x^M = \emptyset = x$.

Supongamos que se cumple para cada $y \in R(\kappa)$ con $\text{rank}(y) < \alpha$, verifiquemos que se tiene para elementos con rango α. Sea $x \in R(\kappa)$, con $\text{rank}(\kappa) = \alpha \neq 0$, entonces $x \neq \emptyset$ y ya que M satisface b), se tiene que para cada $u \in M$, $u \in c_x^M$ si y solo si $u = c_y^M$ para algún $y \in x$. Así, si $u \in c_x^M$, entonces $u = c_y^M$ para algún $y \in x$, por hipótesis de inducción y ya que $\text{rank}(y) < \text{rank}(x) = \alpha$ tenemos que $c_y^M = y$, y así $u = c_y^M = y \in x$; con ello $c_x^M \subseteq x$. Por otro lado, si $u \in x$ entonces $\operatorname{rank}(u) < \operatorname{rank}(x) = \alpha$ y por hipótesis inductiva $u = c_u^M$, dado que M cumple b) se sigue que $u \in c_x^M$. Por tanto $x = c_x^M$.

Esto completa la inducción. Sea $x \in R(\kappa)$, entonces $x = c_x^M \in M$, con lo cual $R(\kappa) \subseteq M$. En particular tenemos que M es un modelo de ZFC, pues $R(\kappa)$ lo es dado que κ es inaccesible.

Hacemos $S = P^M$. Verifiquemos que $(R(\kappa), \in A) \prec (M, \in, S)$. Sea φ una fórmula de $\mathcal{L} = \{\in, P\}$ tal que $(R(\kappa), \in, A) \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ con $a_1, \ldots, a_n$ elementos de $R(\kappa)$, entonces $(R(\kappa), \in, A) \models \varphi[c_{a_1}^M, \ldots, c_{a_n}^M]$ por la afirmación anterior. También, esto implica que la sentencia $\varphi[c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}]$ es un elemento de Σ y ya que M es un modelo de Σ, se tiene que $(M, \in, S) \models \varphi[c_{a_1}^M, \ldots, c_{a_n}^M]$ y con ello $(M, \in, S) \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Por otro lado, si φ es una fórmula de $\mathcal{L}$ tal que $(M, \in, S) \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ con $a_1, \ldots, a_n$ elementos de $R(\kappa)$, entonces $(M, \in, S) \models \varphi[c_{a_1}^M, \ldots, c_{a_n}^M]$. Por construcción de M, $\varphi[c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}] \in \Sigma$ y dado que φ es una fórmula de $\mathcal{L}$, se tiene que $\varphi[c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}]$ es una sentencia verdadera en $(R(\kappa), \in, A)$, es decir $(R(\kappa), \in, A) \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.

Finalmente, como M cumple d) y e), tenemos que $\gamma = c^M$ es un ordinal que contiene a cada ordinal menor que κ, con lo cual $\kappa \leq \gamma$, así que por transitividad se tiene que $\kappa \in M$. ■

Resulta que un cardinal débilmente compacto es demasiado grande, queremos demostrar que un cardinal débilmente compacto es un cardinal Mahlo, pero probamos un resultado más fuerte a continuación, que exhibirá que un cardinal débilmente compacto es muy grande, en particular asumir la existencia de un cardinal débilmente compacto implica la existencia de una cantidad infinita de cardinales Mahlo.

Teorema 4.17. *Sea κ un cardinal débilmente compacto, entonces κ es κ-Mahlo.*

DEMOSTRACIÓN: En varias instancias de la demostración usaremos la equivalencia dada en 3.10. Para ver que κ es κ-Mahlo, probaremos que κ es α-Mahlo para cada $\alpha < \kappa$, la demostración se hará por inducción sobre α. Si $\alpha = 0$, entonces κ es 0-Mahlo pues κ es inaccesible. Si $\alpha = \beta + 1$, necesitamos verificar que κ es β-Mahlo y que $\{\mu < \kappa : \mu \text{ es } \beta\text{-Mahlo}\}$ es estacionario en κ. Por hipótesis de inducción κ es β-Mahlo.

Comprobemos que $\{\mu < \kappa : \mu \text{ es } \beta\text{-Mahlo}\}$ es estacionario en κ. Sea C un club en κ, sabemos que $C \subseteq R(\kappa)$ pues $\kappa \subseteq R(\kappa)$, así que por el lema anterior consideremos $(M, \in, S)$ modelo de ZFC tal que $(R(\kappa), \in, C) \prec (M, \in, S)$ y $\kappa \in M$.

Si $\mathfrak{A} = (R(\kappa), \in, C)$ y si P es el símbolo predicativo de aridad 1 tal que $P^{\mathfrak{A}} = C$, entonces por ser C un club en κ observemos que,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models & (\forall\alpha\exists\beta(\alpha < \beta \wedge P(\beta)) \wedge \\ & \quad \forall\alpha(\forall\beta(\beta < \alpha \to \exists\delta(\beta < \delta \wedge \delta < \alpha \wedge P(\delta))) \to P(\alpha)))\end{aligned}$$

así que $\mathfrak{A}' = (M, \in, S)$ satisface la misma fórmula pues es una extensión elemental de $\mathfrak{A}$. Esto significa que S es un club$^{\mathfrak{A}'}$ en el ordinal γ, donde γ es el ordinal límite $\mathrm{ON} \cap M$, es un ordinal por ser un conjunto transitivo de ordinales. Verifiquemos que S es un club en γ. Sea $\xi < \gamma$, entonces $\xi \in M$, dado que S es un club$^{\mathfrak{A}'}$, tenemos que existe $\nu \in S$ tal que $\xi < \nu$; de aquí que S es un conjunto no acotado en γ. Por otra parte, si $\xi < \gamma$ es un ordinal límite tal que $\sup(S \cap \xi) = \xi$, esto es para cada $\nu < \xi$ existe $\eta \in S \cap \xi$ tal que $\nu < \eta$, puesto que S es un club$^{\mathfrak{A}'}$ se sigue que $\xi \in S$; por ende S es cerrado en γ.

Notemos que si $\alpha \in \kappa \cap S$, entonces $\alpha \in R(\kappa)$ y $\mathfrak{A}' \models P[\alpha]$, ya que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}'$ se tiene que $\mathfrak{A} \models P[\alpha]$, con lo cual $\alpha \in C$. Por otro lado si $\alpha \in C \subseteq \kappa$, tenemos que $\alpha \in R(\kappa)$ y $\mathfrak{A} \models P[\alpha]$, por el mismo argumento anterior se sigue que $\alpha \in S$. Esto muestra que $S \cap \kappa = C$ y ya que C es no acotado en κ entonces $\sup(S \cap \kappa) = \kappa$, dado que S es cerrado en γ y $\kappa < \gamma$ concluimos que $\kappa \in S$.

Afirmamos que κ es β-Mahlo$^{\mathfrak{A}'}$. En efecto, usando inducción veremos que para cada δ, si κ es δ-Mahlo, entonces κ es δ-Mahlo$^{\mathfrak{A}'}$. Si $\delta = 0$, queremos probar que κ es inaccesible$^{\mathfrak{A}'}$, esto se sigue pues κ es inaccesible.

Si $\delta = \gamma + 1$, para ver que κ es δ-Mahlo$^{\mathfrak{A}'}$, veamos que κ es γ-Mahlo$^{\mathfrak{A}'}$ y que $\{\mu < \kappa : \mu \text{ es } \gamma\text{-Mahlo}^{\mathfrak{A}'}\}$ es un conjunto estacionario$^{\mathfrak{A}'}$ en κ, por hipótesis de inducción tenemos la primera parte, resta ver lo segundo. Sea $U \subseteq \kappa$ un club$^{\mathfrak{A}'}$ en κ, veamos que $U \subseteq \kappa$ es un club en κ. En efecto, si $\lambda < \kappa$, ya que M es transitivo

$\lambda \in M$, con lo cual existe $\lambda' \in U \cap M$ tal que $\lambda' > \lambda$, en particular $\lambda' \in U$ exhibe que U es no acotado en κ. Ahora, si $\lambda < \kappa$ es un ordinal límite tal que $\sup(\lambda \cap U) = U$ entonces ya que M es transitivo, se tiene que λ tiene la misma propiedad relativizada a $\mathfrak{A}$ y ya que U es un club$^{\mathfrak{A}'}$ se concluye que $\lambda \in U$.

Como κ es δ-Mahlo, existe $\lambda \in U$ tal que λ es un cardinal γ-Mahlo, usando la hipótesis de inducción implicamos que λ es un cardinal γ-Mahlo$^{\mathfrak{A}'}$, tenemos que $U \cap \{\mu < \kappa : \mu \text{ es } \gamma\text{-Mahlo}^{\mathfrak{A}'}\} \neq \emptyset$. Por tanto $\{\mu < \kappa : \mu \text{ es } \gamma\text{-Mahlo}^{\mathfrak{A}'}\}$ es un conjunto estacionario$^{\mathfrak{A}'}$ en κ, por ende κ es un cardinal δ-Mahlo$^{\mathfrak{A}'}$.

Ahora, si δ es límite, entonces es claro que κ es δ-Mahlo$^{\mathfrak{A}'}$ pues ya que κ es δ-Mahlo, tenemos que κ es γ-Mahlo para cada $\gamma < \delta$ y por hipótesis de inducción κ es γ-Mahlo$^{\mathfrak{A}'}$ para cada $\gamma < \delta$.

Esto completa la inducción y así en particular κ es β-Mahlo$^{\mathfrak{A}'}$ ya que $\kappa \in S$ se sigue que $\mathfrak{A}' \models (\exists\mu(\mu \text{ es } \beta\text{-Mahlo} \wedge P(\mu)))$, recordando que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}'$ tenemos que $\mathfrak{A} \models (\exists\mu(\mu \text{ es } \beta\text{-Mahlo} \wedge P(\mu)))$, i.e. existe $\mu_0 \in C$ tal que μ_0 es β-Mahlo$^{\mathfrak{A}}$, no es difícil ver que este concepto es absoluto para $R(\kappa)$. Con esto se verifica que $\{\mu < \kappa : \mu \text{ es } \beta\text{-Mahlo}\}$ es un conjunto estacionario en κ probando que κ es α-Mahlo.

Finalmente, si α es un ordinal límite, resulta que κ es α-Mahlo pues por hipótesis de inducción κ es β-Mahlo para cada $\beta < \alpha$. Por tanto, hemos terminado la inducción y así κ es κ-Mahlo. ■

Recordando la jerarquía que dimos en el capítulo anterior acerca de cardinales α-Mahlo, podemos darnos cuenta que un cardinal débilmente compacto κ es bastante grande puesto que hemos dado un gran salto a los cardinales Mahlo los cuales simplemente son cardinales 1-Mahlo. De hecho usando la técnica del teorema anterior podemos probar un resultado aún más poderoso, el cual ilustra la magnitud de los cardinales débilmente compactos; a saber: Para cada cardinal κ débilmente compacto, el conjunto $\{\mu < \kappa : \mu \text{ es } \mu\text{-Mahlo}\}$ es estacionario en κ.

Para convencernos de ello, consideremos C un club en κ, tomando $(M, \in, S)$ un modelo para el cual $(R(\kappa), \in, C) \prec (M, \in, S)$ y $\kappa \in M$. En la demostración anterior vimos que si κ es α-Mahlo, entonces κ es α-Mahlo^M. Usando que κ es κ-Mahlo por el teorema anterior, tenemos que κ es κ-Mahlo^M. Además $\kappa \in S$ por el mismo argumento de la demostración anterior, esto implica que $(M, \in, S) \models (\exists\mu(\mu$ es μ-Mahlo $\wedge\ P(\mu)))$ y ya que $(R(\kappa), \in, C)$ es un submodelo elemental de $(M, \in, S)$, tenemos que existe $\mu_0 \in C$ tal que μ_0 es μ_0-Mahlo$^{R(\kappa)}$, luego μ_0 es μ_0-Mahlo y así $\{\mu < \kappa :$ μ es μ-Mahlo$\}$ es estacionario en κ.

Capítulo 5

Cardinales indescriptibles

5.1. Indescriptibilidad

Vamos a explorar otros tipos de cardinales grandes. Empezaremos con los llamados cardinales indescriptibles, los cuales no hacen honor a su nombre pues vamos a definirlos en esta sección. Para comenzar, necesitamos unos conceptos básicos sobre lógica de orden superior, la cual nos permite usar cuantificadores sobre "nuevos" tipos de variables, así que iniciaremos por este camino.

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, para considerar el *cálculo predicativo de n-ésimo orden* o *cálculo predicativo de orden* n, añadimos nuevas colecciones de variables $\mathrm{VAR}^1, \ldots, \mathrm{VAR}^n$ (el conjunto VAR de variables usuales del lenguaje $\mathcal{L}$ suele escribirse también como VAR^0); llamamos $\mathcal{L}^n$ al lenguaje resultante. Los elementos de VAR^i se llaman *variables de orden* $i+1$ (de $\mathcal{L}^n$).

Los términos y fórmulas de los lenguajes de orden superior se definen como sigue: Los términos de orden 1 son los usuales; los términos de orden $i+1$ son las variables VAR^i para $i \geq 1$. Las fórmulas son las usuales, permitiéndose cuantificadores sobre variables de cualquier orden y junto con $X(z)$, donde X y z son términos de orden $i+1$ e i respectivamente.

La semántica se trabaja de la siguiente manera, supongamos que A es el universo de un modelo para $\mathcal{L}$, definiendo recursivamente $\mathcal{P}^0(A) = A$ y $\mathcal{P}^{m+1}(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^m(A))$ para cada $m \in \omega$, podemos inducir un modelo para $\mathcal{L}^n$, de modo que las variables de orden

i recorren $\mathcal{P}^i(A)$ para cada $i \leq n$. De aquí se sigue de manera natural como definir una valoración para las variables del lenguaje predicativo de orden n.

Definición 5.1. Una fórmula Π^n_m es una fórmula de orden $n+1$ de la forma:

$$\forall \bar{x}_1 \exists \bar{x}_2 \forall \bar{x}_3 \cdots Q \bar{x}_m \psi$$

para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\bar{x}_i$ denota una sucesión de variables de orden $n+1$, Q es $\forall$ si m es impar o $\exists$ en caso contrario, ψ es una fórmula en la cual todas sus variables cuantificadas son de orden a lo más n.

Similarmente, una fórmula Σ^n_m es una fórmula de orden $n+1$ escrita como la descrita anteriormente pero con $\exists$ y $\forall$ intercambiados.

En la práctica, cuando digamos que una sentencia σ es Π^n_m (ó Σ^n_m) nos referiremos a que bajo cierto tipo específico de modelos en los cuales σ es interpretada (digamos los que tienen como universo a $R(\alpha)$ para algún α), existe una sentencia $\bar{\sigma}$ que es Π^n_m (ó Σ^n_m) de manera que la equivalencia $\sigma \leftrightarrow \bar{\sigma}$ se cumple en tales modelos.

Con esto, tenemos las herramientas necesarias para definir los cardinales indescriptibles.

Definición 5.2. Un cardinal infinito κ es Π^n_m-indescriptible (Σ^n_m-indescriptible) si siempre que σ es una sentencia Π^n_m (Σ^n_m), A es un subconjunto de $R(\kappa)$ y $(R(\kappa), \in, A) \models \sigma$, existe $\alpha < \kappa$ tal que $(R(\alpha), \in, A \cap R(\alpha)) \models \sigma$.

Diremos que κ es indescriptible si es Π^n_m-indescriptible para cada $n, m \in \omega$ (en consecuencia también es Σ^n_m-indescriptible).

No es díficil comprobar lo siguiente, si $m \leq m'$ y $n \leq n'$, entonces toda fórmula Π^n_m es una fórmula $\Pi^{n'}_{m'}$ (solo hay que cuantificar usando variables que no aparezcan en la fórmula original, del orden respectivo). También, si $n < n'$ entonces toda fórmula Π^n_m es $\Pi^{n'}_0$. Con lo cual, cada cardinal $\Pi^{n'}_{m'}$-indescriptible es Π^n_m-indescriptible, y todo cardinal Π^{n+1}_0-indescriptible es Π^n_m-indescriptible. De manera análoga, se tiene lo mismo cambiando Π por Σ.

También, los cardinales que son Π^1_m-indescriptibles coinciden con los cardinales Σ^1_{m+1}-indescriptibles. En efecto, una implicación se sigue del hecho que cualquier fórmula Π^1_m es claramente Σ^1_{m+1} y con esto, si κ es Σ^1_{m+1}-indescriptible, entonces es Π^1_m-indescriptible. Para la otra implicación, sea σ una sentencia Σ^1_{m+1}, la cual es de la forma $\exists X\psi$, donde X es una variable de orden 2 y ψ es Π^1_m, notemos que solo estamos cubriendo el caso en el que solo hay una variable de segundo orden, esto lo hacemos para simplificar la escritura, pero de manera similar se hace con una sucesión de variables de segundo orden. Ahora, supongamos que κ es Π^1_m-indescriptible, y que para $A \subseteq R(\kappa)$ se tiene que $(R(\kappa), \in, A) \models \sigma$, entonces existe $B \subseteq R(\kappa)$ tal que $(R(\kappa), \in, A) \models \psi[B]$.

Notemos que si reemplazamos las instancias de la variable de segundo orden X en ψ, por un nuevo símbolo predicativo P' de aridad 1, el cual se interpreta en B, obtenemos una nueva fórmula ψ' para la cual $(R(\kappa), \in, A, B) \models \psi'$. Tomemos $Z = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ y la sentencia $\varphi \equiv \exists x_1, x_2(x_1 = \emptyset \wedge x_2 = x_1 \cup \{x_1\} \wedge \psi'')$, donde ψ'' es la fórmula que resulta de reemplazar $P(x)$ y $P'(x)$ (los símbolos predicativos correspondientes de A y B respectivamente) en ψ', por $p(x, x_1)$ y $p(x, x_2)$ respectivamente, con p un nuevo símbolo predicativo de aridad 2 que se interpreta como Z.

Ya que $(R(\kappa), \in, Z) \models \varphi$, y esta sentencia es Π^1_m (pues ψ'' lo es y los cuantificadores de mayor orden, pueden ser escritos primero al tomar la forma prenexa), usando que κ es Π^1_m-indescriptible, existe $\alpha < \kappa$ para el cual $(R(\alpha), \in, Z \cap R(\alpha)) \models \varphi$. Ya que $Z \cap R(\alpha) = ((A \cap R(\alpha)) \times \{0\}) \cup ((B \cap R(\alpha)) \times \{1\})$, por la definición de Z, tenemos que $(R(\alpha), \in, A \cap R(\alpha), B \cap R(\alpha)) \models \psi'$. Lo cual equivale a que $(R(\alpha), \in, A \cap R(\alpha)) \models \exists X\psi$. Por tanto, κ es Σ^1_{m+1}-indescriptible.

Como nos hemos de imaginar, un cardinal indescriptible es un cardinal grande, pues no hace falta que n y m sean muy grandes para alcanzar a los primeros cardinales grandes, los inaccesibles.

Lema 5.3. *Un cardinal κ es Π^1_0-indescriptible si y solo si κ es inaccesible.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que κ es Π^1_0-indescriptible, veamos que κ es inaccesible. Primero verifiquemos que κ es un cardinal regular. Si κ es singular, sea $\lambda = \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ y consideremos $f : \lambda \to \kappa$ cofinal. Para $A = f \times \{\lambda\} \subseteq R(\kappa)$ tenemos que $(R(\kappa), \in, A) \models \exists x \forall y \in x \exists z (x > 0 \wedge A(y, z, x))$, esto es claro por ser f cofinal.

Además, la sentencia anterior es claramente de primer orden y en consecuencia es Π^1_0.

Pero no existe $\alpha < \kappa$ tal que $(R(\alpha), \in, A \cap R(\alpha))$ cumpla tal sentencia, de lo contrario, existe $\mu \neq 0 = \emptyset$ tal que para cada $\delta \in \mu$, existe $\gamma \in R(\alpha)$ para el cual $(\delta, \gamma, \mu) \in (f \times \{\lambda\}) \cap R(\alpha)$. Pero esto implica que $\mu = \lambda$ y entonces para cada $\delta < \mu = \lambda$, existe $\gamma \in R(\alpha)$ tal que $(\delta, \gamma) \in f$. Pero como f es cofinal, sabemos que existe $\delta_0 < \lambda$ tal que $f(\delta_0) > \alpha$ y con esto no se cumple la sentencia, lo cual contradice que κ es Π^1_0-indescriptible. De aquí que κ es regular.

Ahora, supongamos que κ no es límite fuerte, i.e. existe $\lambda < \kappa$ tal que $2^\lambda \geq \kappa$, entonces podemos considerar $f : \mathcal{P}(\lambda) \to \kappa$ sobreyectiva. Sea $A = f \times \{\mathcal{P}(\lambda)\} \subseteq R(\kappa)$, se tiene que $(R(\kappa), \in, A) \models \exists x \forall y \in x \exists z (x > 0 \wedge A(y, z, x))$. Sin embargo, por el mismo argumento anterior, no puede existir α tal que $(R(\alpha), \in, A \cap R(\alpha))$ modele la sentencia anterior. Concluimos que κ es límite fuerte.

Resta ver que $\kappa \neq \omega$, pero esto se sigue del hecho que ω es el menor ordinal α para el cual $(R(\omega), \in, \emptyset) \models \forall x \exists y (x \in y)$. Por tanto, de lo anterior obtenemos que κ es un cardinal inaccesible.

Supongamos ahora que κ es una cardinal inaccesible, probaremos que κ es Π^1_0-indescriptible. Notemos que una fórmula Π^1_0 es precisamente una fórmula de primer orden, así que al considerar σ una sentencia Π^1_0, estamos hablando de una sentencia cualquiera de primer orden. Con esto, sea σ una sentencia de primer orden, $A \subseteq R(\kappa)$ y supongamos que $(R(\kappa), \in, A) \models \sigma$. Por la Proposición 2.5 (haciendo una ligera modificación en la demostración) sabemos que $M = \{\alpha < \kappa : (R(\alpha), \in, A \cap R(\alpha)) \prec (R(\kappa), \in, A)\}$ es un club en κ. Por tanto, existe $\alpha < \kappa$ tal que $(R(\alpha), \in, A \cap R(\alpha)) \prec (R(\kappa), \in, A)$, y ya que $(R(\kappa), \in, A) \models \sigma$, se sigue que $(R(\alpha), \in, A \cap R(\alpha)) \models \sigma$. Así κ es Π^1_0-indescriptible. ∎

Por tanto, aún eligiendo los valores más pequeños posibles para m y n de un cardinal Π^n_m-indescriptible, alcanzamos cardinales bastante grandes, como lo son cardinales inaccesibles. Uno esperaría entonces que los cardinales indescriptibles son aún más enormes en tamaño, y de hecho es natural pensar en esto. Otra razón que motiva este pensamiento es que, de acuerdo a la estructura que se le ha dado al presente trabajo, se han colocado los cardinales indescriptibles después de los cardinales débilmente compactos, pues son más grandes que estos, en el sentido de implicación (de consistencia relativa) entre uno y otro, y esto es correcto.

Hasta ahora habíamos encontrado que los cardinales débilmente compactos eran demasiado grandes, el siguiente teorema nos dice que la nueva clase de cardinales grandes es mayor.

Teorema 5.4. *Un cardinal κ es Π^1_1-indescriptible si y solo si κ es débilmente compacto.*

Demostración: Supongamos que κ es Π^1_1-indescriptible, entonces κ es Π^1_0-indescriptible y por el lema anterior, κ es inaccesible. Así que, por el Teorema 4.13 resta probar que κ tiene la propiedad del árbol. Pero, podemos notar que basta concentrarnos en $(T,<)$ árboles formados por funciones $t:\gamma\to 2$ con $\gamma<\kappa$ y con el orden dado por el de la contención propia, pues así podemos proceder como en la demostración de 4.15 y tener la propiedad del árbol para κ. Sea $(T,<)$ un árbol de tal tipo, entonces para cada $\alpha<\kappa$, tenemos que el modelo $(R(\alpha),\in,T\cap R(\alpha))$ satisface la sentencia:

$$\exists B(B \text{ es una rama}),$$

pues basta fijarse en $B=\{t\restriction\beta:\beta<\alpha\}$ para algún $t\in T$ fijo con dominio α. Ahora, ya que $B\subseteq T\cap R(\alpha)$, entonces es claro que es la interpretación de una variable de segundo orden, así que la sentencia anterior es Σ^1_1. Por la observación hecha después de la definición anterior, sabemos que κ es Σ^1_1-indescriptible. Así que usando la forma contrarrecíproca de la definición de Σ^1_1-indescriptible, tenemos que $(R(\kappa),\in,T)\models\exists B(B \text{ es una rama})$, esto se traduce en que existe una rama para T, lo cual queríamos demostrar.

Ahora, supongamos que κ es débilmente compacto, probaremos que κ es Π^1_1-indescriptible. Sea σ una sentencia Π^1_1 y $A\subseteq R(\kappa)$, tal que $(R(\kappa),\in,A)\models\sigma$. Sabemos que σ es de la forma $\forall X\psi(X)$, donde X es una variable de segundo orden y $\psi(X)$ es una fórmula cuyas variables cuantificadas son de primer orden.

Por el Lema 4.16, sabemos que existe $(M,\in,S)$ una extensión elemental transitiva de $(R(\kappa),\in,A)$, tal que $\kappa\in M$. En ZFC tenemos que $\forall y(y\in R(\kappa)\leftrightarrow \operatorname{rank}(y)<\kappa)$, como $M\models$ ZFC tenemos que la fórmula relativizada se cumple en M, con lo cual

$\forall y \in M(y \in R(\kappa)^M \leftrightarrow \mathrm{rank}(y) < \kappa)$, no hemos relativizado κ pues es un elemento del modelo transitivo M, además una inducción rutinaria prueba que el rango de un conjunto es un valor absoluto. Así, de la fórmula anterior tenemos que $R(\kappa)^M = R(\kappa)$. Por tanto, se tiene que

$$(M, \in, S) \models \exists\alpha((R(\alpha), \in, S \cap R(\alpha)) \models \sigma),$$

puesto que $\alpha = \kappa \in M$ exhibe esto, vale la pena notar que hemos usado que $A = S \cap R(\kappa)$ por construcción, también recalcar que la sentencia anterior es de primer orden (considerando las instancias de X por un símbolo predicativo de aridad 1). Por ser $(R(\kappa), \in, A)$ un submodelo elemental de $(M, \in, S)$, también cumple la sentencia, i.e. existe $\alpha < \kappa$ tal que para cada $Y \subseteq R(\alpha)$, $(R(\alpha), \in, S \cap R(\alpha)) \models \psi[Y]$, como $S \cap R(\alpha) = A \cap R(\alpha)$ para $\alpha < \kappa$, concluimos que $(R(\alpha), \in, A \cap R(\alpha)) \models \sigma$. ■

Capítulo 6

Cardinales medibles

Gran parte del origen de la teoría de grandes cardinales se encuentra basado en el problema básico de la teoría de la medida, el Problema de la Medida de Lebesgue. Para los números reales, el problema dice: Existe una función m que asocia cada conjunto acotado de números reales X un número no negativo $m(X)$ tal que,

i) m no es idénticamente cero,

ii) m es *invariante bajo traslaciones*, i.e. $m(X) = m(Y)$ siempre que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $Y = \{x + r : x \in X\}$,

iii) m es σ-*aditiva*, i.e. si $\{X_n : n \in \omega\}$ es una familia de conjuntos ajenos dos a dos, cuya unión es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, entonces $m(\bigcup_{n\in\omega} X_n) = \sum_{n\in\omega} m(X_n)$.

Lebesgue desarrolló su medida en dirección a este problema, la cual sabemos es fundamental en el área del análisis matemático. En esos tiempos, se preguntaban que pasaba con un conjunto cualquiera de números reales; es bien sabido que Vitali, en 1905, usando una equivalencia del Axioma de Elección (AC), construyó un conjunto de números reales, el cual no es medible según Lebesgue. A partir de esto, Lebesgue tuvo más inquietudes acerca de AC, que de la posibilidad de dar solución al Problema de la Medida.

6.1. Medida y filtros

Banach propusó una generalización al Problema de la Medida, donde ii es reemplazada por una condición mínima y necesaria para evitar trivialidades, a saber: $m(\{x\}) = 0$ para cada x. Sin embargo, en 1929, Banach y Kuratowski probaron que, bajo CH, esta nueva versión del problema tampoco tiene solución. Aunque, este nuevo enfoque por parte de Banach, permite estudiar el problema desde el punto de vista dado por la siguiente definición.

Definición 6.1. Sea S un conjunto, una función $m : \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ es una medida sobre S si satisface:

i) $m(S) = 1$,

ii) $m(\{x\}) = 0$ para cada $x \in S$,

iii) m es σ-aditiva.

Banach se dio cuenta que la cardinalidad del conjunto S importa más en su problema, puesto que no es difícil observar que por la definición anterior, si un conjunto es numerable, entonces no admite una medida; así que trabajaremos en medidas definidas sobre cardinales. Y en vista de la condición iii, uno podría interesarse en requerir una propiedad más fuerte. Supongamos que $\{r_i\}_{i\in I}$ es una colección de números reales, entonces su *suma (transfinita)* se define como $\sum_{i\in I} r_i = \sup \left\{ \sum_{i\in E} r_i : E \in [I]^{<\aleph_0} \right\}$.

Definición 6.2. Sea λ un cardinal infinito, para una medida m sobre un conjunto S, m es λ-aditiva si para cada $\gamma < \lambda$, y $\{X_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ subconjuntos de S ajenos dos a dos, se tiene que $m(\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha) = \sum_{\alpha<\gamma} m(X_\alpha)$.

Ulam interesado en el problema de Banach, estableció resultados importantes, que implican una generalización directa de un ultrafiltro sobre ω. Para comprender esto, recordamos las definiciones básicas sobre un filtro. Un *filtro* en un conjunto S es una colección $F \subseteq \mathcal{P}(S)$ tal que,

i) $S \in F$ y $\emptyset \notin F$,

ii) si $X, Y \in F$ entonces $X \cap Y \in F$,

iii) si $X, Y \subseteq S$, $X \subseteq Y$ y $X \in F$, entonces $Y \in F$.

El filtro F se dirá *principal* si es de la forma $F = \{X \subseteq S : X_0 \subseteq X\}$ para algún $X_0 \subseteq S$; en cambio, no es difícil comprobar que todo conjunto de la forma $\{X \subseteq S : X_0 \subseteq X\}$ para algún $X_0 \subseteq S$, es un filtro en S. Si λ es un cardinal regular, F se llama λ-completo si para cada $\gamma < \lambda$, y $\{X_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ elementos de F, tenemos que $\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in F$. Cuando se cumple el análogo de propiedad para cada familia numerable de elementos de F, decimos que F es σ-completo.

Una familia G de conjuntos tiene la *propiedad de la intersección finita* (PIF) si $\bigcap H \neq \emptyset$ para cada $H \in [G]^{<\aleph_0}$. Todo filtro cumple la PIF. Un filtro F en S se llama *ultrafiltro* si es un filtro maximal, i.e. no existe filtro F' en S tal que $F \subsetneq F'$. Exhibimos propiedades básicas sobre filtros a continuación.

Proposición 6.3. *Sea S un conjunto, entonces:*

i) *Si $G \subseteq \mathcal{P}(S)$ cumple la PIF, entonces existe un filtro F en S tal que $G \subseteq F$.*

ii) *Si F es un filtro en S, F es un ultrafiltro si y solo si para cada $X \subseteq S$, $X \in F$ o $S \setminus X \in F$.*

iii) *Todo filtro puede ser extendido a un ultrafiltro.*

iv) *Un ultrafiltro no principal contiene solamente conjuntos infinitos.*

v) *Si U es un ultrafiltro en S, U es λ-completo si y solo si para cada $\gamma < \lambda$, si $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in U$, entonces existe $\alpha < \gamma$ tal que $Y_\alpha \in U$.* ■

Al tratar el Problema de la Medida de Banach, Ulam tomó un camino que tuvo varias consecuencias. Supongamos que para una medida m, κ-aditiva sobre κ, se cumple que existe algún conjunto $A \subseteq \kappa$, tal que $m(A) > 0$ y para cada $B \subseteq A$, $m(B) = m(A)$ ó

$m(B) = 0$; en tal caso, se suele decir que la medida tiene un *átomo*. Si μ se define en $\mathcal{P}(\kappa)$ como

$$\mu(X) = \frac{m(X \cap A)}{m(A)}$$

entonces μ es una medida κ-aditiva sobre κ con rango $\{0, 1\}$; si una medida cumple esta condición, se dice que es *bivaluada*. Podemos expresar esta propiedad mediante el uso de ultrafiltros.

Proposición 6.4. *Si μ es una medida bivaluada sobre S, entonces el conjunto $U_\mu = \{X \subseteq S : \mu(X) = 1\}$ es un ultrafiltro no principal σ-completo. Recíprocamente, todo ultrafiltro U no principal σ-completo, define una medida bivaluada sobre S.*

DEMOSTRACIÓN: Para comprobar que U_μ es un filtro, notemos que $S \in U_\mu$, puesto que $\mu(S) = 1$, ya que μ es una medida. Además, como $\emptyset = \bigcup_{n\in\omega} \emptyset$ y μ es σ-aditiva, se tiene que $\mu(\emptyset) = \sum_{n\in\omega} \mu(\emptyset)$, lo cual implica que $\mu(\emptyset) = 0$ y así $\emptyset \notin U_\mu$.

Sean $X, Y \in U_\mu$, así que $\mu(X) = \mu(Y) = 1$. Supongamos que $\mu(X \cap Y) = 0$, ya que $X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$, entonces aplicando μ y usando la σ-aditividad, $\mu(X) = \mu(X \setminus Y) + \mu(X \cap Y) + 0 + 0 + \dots$, de donde se sigue que $\mu(X \setminus Y) = 1$. De la misma manera, se prueba que $\mu(Y \setminus X) = 1$, y dado que $X \cup Y = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y) \cup (Y \setminus X) \cup \emptyset \cup \dots$ se tiene que $\mu(X \cup Y) = \mu(X \setminus Y) + \mu(X \cap Y) + \mu(Y \setminus X)$, sustituyendo obtenemos que $\mu(X \cup Y) = 1 + 0 + 1 = 2$, lo cual contradice que μ es bivaluada. Por tanto, $\mu(X \cap Y) = 1$ y así $X \cap Y \in U_\mu$.

Ahora, sea $X \in U_\mu$ y $X \subseteq Y$. Observemos que $Y = X \cup (Y \setminus X)$, aplicando μ tenemos que $\mu(Y) = \mu(X) + \mu(Y \setminus X)$, como $\mu(Y \setminus X) \geq 0$, se sigue que $\mu(Y) \geq \mu(X) = 1$. Dado que μ es bivaluada, concluimos que $\mu(Y) = 1$ y así $Y \in U_\mu$. Por tanto, hemos verificado que U_μ es un filtro en S.

Para comprobar que U_μ es un ultrafiltro, sea $X \subseteq S$, sabemos que $S = X \cup (S \setminus X)$, con lo cual $1 = \mu(S) = \mu(X) + \mu(S \setminus X)$. Como la medida es bivaluada, tenemos que $\mu(X) = 1$ ó $\mu(S \setminus X) = 1$, i.e. $X \in U_\mu$ ó $S \setminus X \in U_\mu$. Por la proposición anterior, esto verifica que U_μ es un ultrafiltro. Veamos que U_μ es no principal, supongamos que sí, entonces existe $X_0 \subseteq S$ tal que $U_\mu = \{X \subseteq S : X_0 \subseteq X\}$.

Sea $a \in X_0$, como $\{X \subseteq S : \{a\} \subseteq X\}$ es un filtro y claramente contiene a U_μ, obtenemos que deben ser iguales, puesto que U_μ es un ultrafiltro. Pero esto implica que $\{a\} \in U_\mu$, lo cual contradice que μ es una medida sobre S.

Verifiquemos que U_μ es σ-completo. Sea $\{X_n\}_{n\in\omega} \subseteq U_\mu$, sabemos que $S = (\bigcap_{n\in\omega} X_n) \cup (S \setminus (\bigcap_{n\in\omega} X_n)) = (\bigcap_{n\in\omega} X_n) \cup (\bigcup_{n\in\omega}(S \setminus X_n))$, así que por la σ-aditividad de μ, tenemos que $\mu(\bigcap_{n\in\omega} X_n) = 1$ ó $\mu(\bigcup_{n\in\omega}(S \setminus X_n)) = 1$. Supongamos lo segundo, usando recursión definimos $B_0 = S \setminus X_0$ y dado B_n, hacemos $B_{n+1} = (S \setminus X_{n+1}) \setminus (\bigcup_{i=0}^{n} B_i)$. Es claro que $\{B_n\}_{n\in\omega}$ es una familia de conjuntos ajenos dos a dos, $B_n \subseteq S \setminus X_n$ para cada n y $\bigcup_{n\in\omega} B_n = \bigcup_{n\in\omega}(S \setminus X_n)$.

Probamos en unas líneas anteriores, que μ es monótona, en particular $\mu(B_n) \leq \mu(S \setminus X_n)$ para cada $n \in \omega$, luego $\sum_{n\in\omega} \mu(B_n) \leq \sum_{n\in\omega} \mu(S \setminus X_n)$. Pero por la σ-aditividad, tenemos que $\mu(\bigcup_{n\in\omega}(S \setminus X_n)) = \mu(\bigcup_{n\in\omega} B_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(B_n) \leq \sum_{n\in\omega} \mu(S \setminus X_n)$. Como U_μ es ultrafiltro, se tiene que $S \setminus X_n \notin U_\mu$ para cada $n \in \omega$, esto implica que $\sum_{n\in\omega} \mu(S \setminus X_n) = 0$ lo cual contradice la suposición acerca de $\mu(\bigcup_{n\in\omega}(S \setminus X_n))$. Por tanto, concluimos que $\mu(\bigcap_{n\in\omega} X_n) = 1$ y así $\bigcap_{n\in\omega} X_n \in U_\mu$. Esto verifica que U_μ es σ-completo.

Por otro lado, ahora, supongamos que U es un ultrafiltro no principal y σ-completo, definimos $m : \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ mediante $m(X) = 1$ si $X \in U$ y $m(X) = 0$ en caso contrario. Probaremos que m es una medida sobre S. Dado que $S \in U$ por ser filtro, tenemos que $m(S) = 1$. También, para cada $x \in S$, $\{x\} \notin U$, de lo contrario tenemos una contradicción a iv) de la proposición anterior. Además, es claro que m es una medida bivaluada.

Resta ver que m es σ-aditiva. Sea $\{X_n\}_{n\in\omega}$ una familia de conjuntos ajenos dos a dos. Si $X_m \in U$ para algún $m \in \omega$, entonces $\bigcup_{n\in\omega} X_n \supseteq X_m$ es un elemento de U. Con esto, $m(\bigcup_{n\in\omega} X_n) = 1$; además $m(X_n) = 0$ para cada $n \neq m$, de lo contrario $X_n, X_m \in U$, y entonces $X_n \cap X_m \neq \emptyset$, lo cual es imposible. Luego, $m(\bigcup_{n\in\omega} X_n) = 1 = m(X_m) = \sum_{n\in\omega} m(X_n)$.

Ahora bien, si $X_n \notin U$ para cada $n \in \omega$, entonces afirmamos que $\bigcup_{n\in\omega} X_n \notin U$. En efecto, como $S \setminus X_n \in U$ para cada $n \in \omega$, pues U es ultrafiltro, tenemos que $\bigcap_{n\in\omega}(S \setminus X_n) \in U$, esto ya que U es σ-completo. Dado que $S \setminus (\bigcup_{n\in\omega} X_n) = \bigcap_{n\in\omega}(S \setminus X_n) \in U$ y U es ultrafiltro, se sigue la afirmación. Con esto $m(\bigcup_{n\in\omega} X_n) =$

$0 = \sum_{n\in\omega} 0 = \sum_{n\in\omega} m(X_n)$. Probando que m es σ-aditiva, así m es una medida sobre S. ■

Podemos requerir una condición más fuerte sobre la medida μ (o sobre el ultrafiltro) y obtenemos lo siguiente. Sea κ un cardinal infinito, bajo las condiciones de la proposición anterior, si la medida es κ-aditiva, entonces el ultrafiltro U_μ es κ-completo; de igual forma, si un ultrafiltro es κ-completo, entonces la medida que define es κ-aditiva. En efecto, una implicación se sigue haciendo una construcción similar a la de los B_n en la prueba anterior, contemplando que en el caso límite, se procede igual (quitando la unión de los anterior); además que las sumas seguirán satisfaciendo $\leq$ (recordando la definición que hicimos de sumas transfinitas), de donde se seguirá la misma contradicción. Para la otra implicación, se hace de manera análoga a la de la demostración anterior.

Esto nos conlleva al concepto más importante de toda la teoría de grandes cardinales.

Definición 6.5. Un cardinal κ no numerable, se llama medible si existe un ultrafiltro no principal κ-completo en κ.

Por el comentario anterior, tenemos que un cardinal es medible si y solo si existe una medida bivaluada κ-aditiva sobre κ. Tenemos una propiedad inmediata acerca de estos cardinales.

Lema 6.6. *Sea κ un cardinal medible, entonces κ es inaccesible.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que m es la medida sobre κ, que es bivaluada y κ-aditiva, demostremos que κ es un cardinal regular. Si $\lambda = \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, sabemos que esto implica que $\kappa = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$ para algunos $A_\alpha \subseteq \kappa$ tal que $|A_\alpha| < \kappa$ para cada $\alpha < \lambda$. Notemos que $m(A_\alpha) = 0$ para cada $\alpha < \lambda$. En efecto, sea $\alpha < \lambda$, hacemos $A_\alpha = \{x_\beta : \beta < |A_\alpha|\} = \bigcup_{\beta<|A_\alpha|}\{x_\beta\}$, por ser m una medida κ-aditiva, tenemos que $m(A_\alpha) = \sum_{\beta<|A_\alpha|} m(\{x_\beta\}) = 0$, ya que m se anula en los conjuntos singulares; esto prueba la afirmación. Pero, aplicando la κ-aditividad, $m(\kappa) = m(\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha) = \sum_{\alpha<\lambda} m(A_\alpha) = 0$ y esto es una contradicción, ya que m es no trivial. Por tanto, κ es regular.

Resta ver que κ es límite fuerte. Como κ es medible, sea U ultrafiltro no principal κ-completo en κ, supongamos que existe $\lambda < \kappa$ tal que $\kappa \leq 2^\lambda$, entonces existe $f : \kappa \to 2^\lambda$ inyectiva. Sea $\alpha < \lambda$, por ser U un ultrafiltro, $\{\beta < \kappa : (f(\beta))(\alpha) = 0\} \in U$ o $\{\beta < \kappa : (f(\beta))(\alpha) = 1\} \in U$; si X_α denota el conjunto, de los anteriores dos, que es elemento de U, e i_α el valor que toman los elementos de X_α evaluados en α, entonces $X_\alpha \in U$ para cada $\alpha < \lambda$.

Por ser U κ-completo, tenemos que $X = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in U$ y para $\beta \in X$, $(f(\beta))(\alpha) = i_\alpha$ para cada $\alpha < \lambda$. Esto implica que $|X| \leq 1$, pues si $\beta_1, \beta_2 \in X$, entonces $(f(\beta_1))(\alpha) = i_\alpha = (f(\beta_2))(\alpha)$ para cada $\alpha < \lambda$, lo cual implica que $f(\beta_1) = f(\beta_2)$, ya que f es inyectiva, se sigue que $\beta_1 = \beta_2$. Esto verifica que $|X| \leq 1$, lo cual es imposible dado que U es un ultrafiltro no principal, con lo que sus elementos son conjuntos infinitos. Por tanto, κ es límite fuerte. ■

Así que, nos encontramos nuevamente con objetos que están fuera del alcance de ZFC. Los cardinales medibles son muy grandes, y de hecho, como nos hemos de imaginar, son mucho más grandes que los expuestos hasta ahora. Sigamos explorando ciertas propiedades interesantes acerca de estos cardinales.

Exigir que un cardinal admita una medida bivaluada y κ-aditiva, parece sonar como algo muy complicado, sin embargo el tener una medida bivaluada en realidad es suficiente para escaparnos de la teoría, siendo más concretos, nos referimos a que un cardinal medible existe si y solo si existe un cardinal que admita una medida bivaluada.

Lema 6.7. *Sea κ el menor cardinal que admite un ultrafiltro no principal y σ-completo, entonces cada ultrafiltro en κ de este tipo es κ-completo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea U un ultrafiltro no principal y σ-completo, supongamos que U no es κ-completo, entonces existe $\lambda < \kappa$ cardinal, tal que $\{X_\alpha\}_{\alpha<\lambda} \subseteq U$ y $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \notin U$. Usando recursión transfinita definimos $Y_0 = \kappa \setminus X_0$, supongamos que se tiene Y_β para cada $\beta < \alpha$, entonces $Y_\alpha = (\kappa \setminus X_\alpha) \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta$. Es claro que los conjuntos Y_α son ajenos dos a dos y $\bigcup_{\alpha<\lambda} Y_\alpha = \bigcup_{\alpha<\lambda}(\kappa \setminus X_\alpha)$.

Notemos que $\{\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha\} \cup \{Y_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ forma una partición para κ, en la cual todos los elementos no pertenecen a U; sin pérdida de generalidad escribimos la partición simplemente como $\{Y_\alpha : \alpha < \lambda\}$ (lo cual se puede hacer puesto que no se afecta el cardinal λ). Definimos $f : \kappa \to \lambda$ por $f(\xi) = \alpha$ si y solo si $\xi \in Y_\alpha$. Hacemos $V = \{X \subseteq \lambda : f^{-1}[X] \in U\}$, afirmamos que V es un ultrafiltro no principal y σ-completo.

Ya que $f^{-1}[\lambda] = \kappa$ y $\kappa \in U$, tenemos que $\lambda \in V$; de la misma forma, $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$, luego $\emptyset \notin V$. Ahora, si $X \in V$ y $X \subseteq Y$, con $Y \subseteq \lambda$, entonces $f^{-1}[X] \in U$ y como $f^{-1}[X] \subseteq f^{-1}[Y]$, se sigue que $f^{-1}[Y] \in U$, por ende $Y \in V$. Ahora, sean $\{Z_n\}_{n\in\omega} \subseteq V$, por definición $f^{-1}[Z_n] \in U$ para cada $n \in \omega$, por ser U un filtro σ-completo, se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} f^{-1}[Z_n] \in U$. Recordando que $\bigcap_{n\in\omega} f^{-1}[Z_n] = f^{-1}[\bigcap_{n\in\omega} Z_n]$, concluimos que $\bigcap_{n\in\omega} Z_n \in V$. Por tanto V es un filtro σ-completo.

Para comprobar que V es un ultrafiltro, sea $X \subseteq \lambda$, si $X \notin V$, entonces $f^{-1}[X] \notin U$, ya que U es ultrafiltro en κ, $\kappa \setminus f^{-1}[X] \in U$. Pero $\kappa \setminus f^{-1}[X] = f^{-1}[\lambda \setminus X]$, de donde $\lambda \setminus X \in V$. Finalmente, V es no principal, de lo contrario existe $\eta \in \lambda$ tal que $V = \{X \subseteq \lambda : \{\eta\} \subseteq X\}$, con lo cual $f^{-1}[\{\eta\}] \in U$. Por definición de f, $f^{-1}[\{\eta\}] = \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = \eta\} = \{\alpha < \kappa : \alpha \in Y_\eta\} = Y_\eta$, esto implica que $Y_\eta \in U$, lo cual es imposible por la elección de los Y_α.

Hemos construido un ultrafiltro no principal y σ-completo en λ, pero $\lambda < \kappa$ y entonces κ no es mínimo con esta propiedad. De la contradicción tenemos que U es κ-completo. ■

Corolario 6.8. *Existe un cardinal medible si y solo si existe un cardinal que admite una medida bivaluada.*

Demostración: Una implicación es inmediata, comprobemos la otra. Supongamos que κ es el menor cardinal el cual admite una medida bivaluada, sabemos que tal medida induce un ultrafiltro U en κ no principal y σ-completo, es claro que κ es el menor con esta propiedad. Para el ultrafiltro U tenemos por el lema anterior que es κ-completo, así κ es un cardinal medible. ■

Este resultado es bastante sorprendente, puesto que pensar en la existencia de una medida bivaluada, parece no ser gran cosa, sin embargo sí lo es.

6.2. El modelo L

Los cardinales medibles tienen una característica que los hace mucho más grandes que aquellos expuestos hasta ahora, y es que resulta que también se escapan de ciertos modelos, como lo es el modelo interno L. En octubre de 1935 Gödel se comunicaba con von Neumann sobre la resolución de la consistencia relativa de AC. Lo logró a través de la introducción de una jerarquía nueva L, donde se verificaba el Axioma de Elección. Presentamos las herramientas básicas sobre esta clase y su relación con los cardinales medibles.

Definición 6.9. Un conjunto x se dirá *definible* sobre un modelo $\mathfrak{A}$ si existe una fórmula de primer orden $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ en el lenguaje de $\mathfrak{A}$, y elementos $a_1, \ldots, a_n$ en A, el universo de $\mathfrak{A}$, tal que $y \in x$ si y solo si $\mathfrak{A} \models \varphi[y, a_1, \ldots, a_n]$, es decir tal que $x = \{y \in A : \mathfrak{A} \models \varphi[y, a_1, \ldots, a_n]\}$.

Para cada conjunto x, hacemos

$$\mathrm{def}(x) = \{y \subseteq x : y \text{ es definible sobre } (x, \in)\}$$

claramente esto es un conjunto, pues es un subconjunto de $\mathcal{P}(x)$. Tenemos las siguientes propiedades sobre estos conjuntos.

Proposición 6.10. *Para cada conjunto x se cumple:*

i) $x, \emptyset \in \mathrm{def}(x)$.

ii) *Si x es transitivo, entonces $x \subseteq \mathrm{def}(x)$.*

iii) *Si $y \subseteq x$ con y finito, entonces $y \in \mathrm{def}(x)$.*

Demostración: i). Tomemos $\varphi(v) \equiv (v = v)$, es claro que $y \in x$ si y solo si $(x, \in) \models \varphi[y]$, con lo cual x es definible sobre $(x, \in)$. Ahora, si $\psi(v) \equiv \neg(v = v)$, entonces también $\emptyset = \{y \in x : (x, \in) \models \psi[y]\}$.

ii). Sea $y \in x$, entonces $y \subseteq x$ por ser x transitivo, si $\varphi(u, v) \equiv (u \in v)$, y tomando el mismo conjunto y, tenemos que $y = \{z \in y : (x, \in) \models \varphi[z, y]\}$.

iii). Sea $y \subseteq x$ finito, digamos que $y = \{z_1, \ldots, z_n\}$ para $n \in \omega$, consideremos $\varphi(u, v_1, \ldots, v_n) \equiv ((u = v_1) \vee \cdots \vee (u = v_n))$. Para

$z_1, \ldots, z_n \in x$, es claro que $y = \{z \in y : (x, \in) \models \varphi[z, z_1, \ldots, z_n]\}$. ■

Continuamos con la definición de la jerarquía construible, la cual nos va a permitir hablar de la clase L, la cual resultará ser un modelo transitivo de ZFC, y además el más pequeño con la propiedad de contener todos los números ordinales.

Definición 6.11. Usando recursión transfinita sobre α, definimos:

i) $L_0 = \emptyset$,

ii) $L_{\alpha+1} = \operatorname{def}(L_\alpha)$,

iii) $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$ si $\alpha \neq 0$ es límite.

Hacemos $L = \bigcup\{L_\alpha : \alpha \text{ es ordinal}\}$, L es llamada la clase de los conjuntos construibles y la afirmación, $V = L$, i.e. cada conjunto es construible, es el *Axioma de Constructibilidad.*

No es difícil comprobar que cada L_α es un conjunto transitivo. En efecto, usando inducción sobre α, para $\alpha = 0$ es inmediato. Si $\alpha = \beta + 1$, sea $x \in L_\alpha$, por definición de L_α tenemos que $x \subseteq L_\beta$ y por la proposición anterior se sigue que $L_\beta \subseteq \operatorname{def}(L_\beta) = L_\alpha$, dado que L_β es transitivo por hipótesis inductiva; luego $x \subseteq L_\alpha$. Finalmente, si α es límite tenemos que L_α es transitivo por ser unión de conjuntos transitivos.

Además, otra inducción rutinaria prueba que $L_\alpha \subseteq L_\beta$ para cada $\alpha \leq \beta$. Con lo que L es una clase transitiva, puesto que cada L_α es transitivo.

Definición 6.12. Para una clase propia M, $(M, \in)$ es un modelo interno si $(M, \in)$ es un modelo transitivo de ZF tal que cada ordinal es elemento de M.

Resulta que L es un modelo interno de ZFC, y además es el menor con esta propiedad, esto lo haremos más específico posteriormente. Primero, comprobamos que L es una clase que contiene a todos los ordinales.

Lema 6.13. *Sean α, β ordinales, entonces:*

i) *$L_\alpha \cap ON = \alpha$.*

ii) *Si $\alpha < \beta$, entonces $\alpha, L_\alpha \in L_\beta$.*

Demostración: i). Por inducción sobre α. Para $\alpha = 0$ es claro, ya que $L_0 \cap ON = \emptyset \cap ON = \emptyset = \alpha$. Si $\alpha = \beta + 1$, sabemos que $L_\beta \subseteq L_\alpha \subseteq \mathcal{P}(L_\beta)$, luego por hipótesis inductiva, $\beta = L_\beta \cap ON \subseteq L_\alpha \cap ON \subseteq \mathcal{P}(L_\beta) \cap ON$. Observemos que $\mathcal{P}(L_\beta) \cap ON \subseteq \alpha$, pues si $\gamma \in \mathcal{P}(L_\beta) \cap ON$, entonces $\gamma \subseteq L_\beta \cap ON = \beta$, con lo cual $\gamma < \beta + 1 = \alpha$. Por tanto, $L_\alpha \cap ON \subseteq \alpha$.

Ahora, supongamos por un momento que $\beta \in L_\alpha$, sea $\gamma < \alpha$, tenemos que $\gamma \leq \beta$, cuando $\gamma = \beta$ es claro que $\gamma \in L_\alpha \cap ON$; si $\gamma < \beta$, por la transitividad de L_α, $\gamma \in L_\alpha$, así $\gamma \in L_\alpha \cap ON$; por tanto $\alpha \subseteq L_\alpha \cap ON$. Demostremos que $\beta \in L_\beta$, por hipótesis inductiva, $\beta = \{x \in L_\beta : x \text{ es ordinal}\}$ con lo que $\beta \subseteq L_\beta$. Y también, si $\varphi(u) \equiv (u \text{ es ordinal})$, entonces recordemos que φ es una fórmula Δ_0 y L_β es un conjunto transitivo, con lo que $\varphi^{L_\beta}(x) \leftrightarrow \varphi(x)$ para cada $x \in L_\beta$, en particular esto implica que $\beta = \{x \in L_\beta : (L_\beta, \in) \models \varphi[x]\}$. Con lo cual, β es definible sobre L_β, i.e. $\beta \in L_\alpha$.

Finalmente, para α límite, $L_\alpha \cap ON = (\bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta) \cap ON = \bigcup_{\beta<\alpha}(L_\beta \cap ON) = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta = \alpha$, la penúltima igualdad se sigue de la hipótesis de inducción.

ii). Probamos que $\alpha, L_\alpha \in L_{\alpha+1}$, puesto que $\alpha + 1 \leq \beta$ y recordando que los conjuntos L_γ son monótonos respecto al subíndice, se sigue que $\alpha, L_\alpha \in L_\beta$. En la demostración del inciso anterior, verificamos que $\alpha \in L_{\alpha+1}$ a partir de $L_\alpha \cap ON = \alpha$, pero esto último se cumple por i), con lo que $\alpha \in L_{\alpha+1}$. Por otro lado, por i) de la Proposición 6.10, tenemos que $L_\alpha \in \mathrm{def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$. ■

Una consecuencia inmediata del lema anterior es que, si α es un ordinal, entonces $\alpha \in L_{\alpha+1} \subseteq L$. Por lo que L contiene a todos los ordinales. El siguiente teorema comprueba que L es un modelo (no en el sentido de la teoría de modelos pues L no es un conjunto ya que $ON \subseteq L$) para ZFC y aunado a lo anterior, L es un modelo interno. Ocuparemos un lema auxiliar, para el cual, referimos su demostración en [7].

Lema 6.14. *(Principio de Reflexión) Sean $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ fórmulas de $\mathcal{L}_{TC}$. Si B es una clase no vacía y $A(\alpha)$ es un conjunto para* *cada ordinal α, si también:*

i) *Cada que $\alpha < \beta$, tenemos que $A(\alpha) \subseteq A(\beta)$.*

ii) $A(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} A(\beta)$ *si $\alpha \neq 0$ es límite.*

iii) $B = \bigcup_{\alpha\in ON} A(\alpha)$.

Entonces para cada ordinal ξ, existe $\alpha > \xi$ límite tal que $A(\alpha) \neq \emptyset$ y φ_i es absoluta para $A(\alpha), B$ para cada $i < n$.

Finalmente, estamos en posición de probar el teorema antes mencionado. Vale la pena mencionar que, se omitirán algunos detalles en la demostración, pero tomando como guía la prueba del Teorema 2.4, es simple comprobar que no hay problema al hacerlo de esta manera.

Teorema 6.15. *L es un modelo interno de ZF.*

Demostración: Por ser L una clase transitiva, se verifica fácilmente el Axioma de Extensión y el Axioma de Fundación. Comprobemos los axiomas restantes.

i) *Comprensión:* Sea $u \in L$ y φ una fórmula de $\mathcal{L}_{TC}$ sin y variable libre, por el Axioma de Comprensión, $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in u \wedge \varphi^L(x))$. Necesitamos verificar que $y \in L$, para ello, sea α_0 un ordinal tal que $u \in L_{\alpha_0}$; por el lema anterior tomamos $\alpha > \alpha_0$ ordinal límite para el cual, $\varphi^{L_\alpha} \leftrightarrow \varphi^L$ (haciendo $A(\xi) = L_\xi$ y $B = L$).

   Con esto, si $\psi(v_1, v_2) \equiv (\varphi(v_1) \wedge v_1 \in v_2)$, y dado que $u \in L_\alpha$, afirmamos que $y = \{x \in L_\alpha : (L_\alpha, \in) \models \psi[x, u]\}$. En efecto, si $x \in y$, entonces sabemos que $x \in u \wedge \varphi^L(x)$, lo cual implica $\varphi^{L_\alpha}(x) \wedge x \in u$, es decir $(L_\alpha, \in) \models \psi[x, u]$; además $x \in L_\alpha$ ya que $x \in u \in L_\alpha$ y L_α es transitivo. Por otro lado, si $x \in L_\alpha$ satisface $(L_\alpha, \in) \models \psi[x, u]$, por la definición de ψ tenemos que $x \in u$ y $\varphi^{L_\alpha}(x)$, por la elección de α, se sigue $\varphi^L(x)$ y con esto $x \in y$.

   Finalmente, lo anterior implica que $y \in \operatorname{def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L$.

ii) *Par:* Sean $x, y \in L$, por el Axioma del Par podemos considerar $z = \{x, y\}$, veamos que $z \in L$. Sea α ordinal tal que $x, y \in L_\alpha$, entonces $z = \{x, y\} \subseteq L_\alpha$, así que por iii) de la Proposición 6.10, $z \in \text{def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L$.

iii) *Unión:* Sea $F \in L$, por el Axioma de Unión tomamos $A = \bigcup F$ y queremos demostrar que $A \in L$, pues así A exhibe el Axioma de Unión en L. Si α es un ordinal tal que $F \in L_\alpha$, tenemos que $A \subseteq L_\alpha$. Además, si $\varphi(v_1, v_2) \equiv \exists u \in v_2(v_1 \in u)$, entonces por ser Δ_0 y L_α transitivo, se tiene que $A = \{z \in L_\alpha : (L_\alpha, \in) \models \varphi[x, F]\}$. Esto exhibe que $A \in \text{def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L$.

iv) *Infinito:* Ya que L es una clase transitiva, tenemos que ω^L es el mismo ordinal ω, por lo que solo hace falta ver que $\omega \in L$. Pero esto es claro pues L contiene a todos los ordinales.

v) *Potencia:* Sea $x \in L$, usando el Axioma del Potencia, existe $\mathcal{P}(x)$, por el Axioma de Comprensión, podemos tomar $y = \{u \in \mathcal{P}(x) : u \in L\}$, probamos que $y \in L$. Para cada $u \in y$, hacemos α_u el menor ordinal α tal que $u \in L_\alpha$, consideremos $\alpha = \sup\{\alpha_u : u \in y\}$. Con esto, $y \subseteq L_\alpha$. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $x \in L_\alpha$.

De lo anterior, $y = \{u \in L_\alpha : u \subseteq x\}$. Es claro que $\varphi(v_1, v_2) \equiv (v_1 \subseteq v_2)$ es una fórmula absoluta para L_α y $y = \{u \in L_\alpha : (L_\alpha, \in) \models \varphi[u, x]\}$. Además, y cumple las propiedades que indican la satisfacción del Axioma del Potencia en L.

vi) *Reemplazo:* Sea φ una fórmula sin B variable libre, sea $A \in L$ y supongamos que para cada $x \in A$, existe un único $y \in L$ tal que $(L, \in) \models \varphi[x, y]$. Para cada $x \in A$, hacemos α_x el menor ordinal tal que existe $y \in L_\alpha$ y $(L, \in) \models \varphi[x, y]$; por el Axioma de Reemplazo el conjunto $\{\alpha_x : x \in A\}$ existe. Ahora, si $\alpha = \sup\{\alpha_x : x \in A\}$, entonces $B = L_\alpha \in L$ es el conjunto que verifica el Axioma de Reemplazo en L. ■

Uno de los aspectos importantes que tiene el modelo L es que es el menor modelo interno, por lo que cualquier otro modelo interno de ZF debe contener a L. Uno podría pensar qué sucede con el Axioma de Elección, pues resulta que el modelo L cumple el Axioma de Constructibilidad (relativizado a L) y, tal axioma implica el Axioma de Elección, por consiguiente L satisface AC.

Tener un modelo interno que satisfaga las propiedades que definen algún cardinal grande es muy importante, puesto que un modelo interno tiene todas las herramientas necesarias, al contener todos los números ordinales. L es el menor modelo interno, pero es suficiente para reflejar los grandes cardinales expuestos hasta antes de este capítulo. Sin embargo, L no es suficiente cuando se trata de cardinales medibles, estos objetos son tan grandes que se escapan del alcance de L. Esto se deriva del siguiente teorema de Scott, cuya demostración podemos encontrar en [6].

Teorema 6.16. *Si existe un cardinal medible, entonces $V \neq L$.* ■

Para obtener la conclusión deseada, basta combinar este teorema con la observación anterior donde afirma que se satisface $(V = L)^L$, con lo que si κ es un cardinal medible, entonces κ no es un cardinal medible^L, de lo contrario L no satisface $V = L$, lo cual contradice lo anterior. El problema no es que κ no pertenezca a L, pues L es un modelo interno, sino que κ no tiene la propiedad que lo hace ser medible en L, i.e. no existe una medida sobre κ que sea bivaluada y κ-aditiva según L. Pero, cabe mencionar que sí es posible construir un modelo interno para un cardinal medible, algo que requiere de diferentes técnicas y mucho uso de las llamadas *ultrapotencias*.

6.3. Relación con otros cardinales grandes

Por cuestiones referentes al objetivo de este trabajo y el alcance del presente material, los resultados que se comentan a continuación, se mencionan sin demostración, sin embargo podemos encontrar la prueba de todas las afirmaciones en [2] en la sección correspondiente.

Ya demostramos que los cardinales medibles son inaccesibles, esto nos dice que son parte de los llamados cardinales grandes. Pero, como nos hemos de imaginar, son aún más grandes, tanto que superan por mucho a los cardinales anteriores. Como hemos de suponer, solo bastaría probar que los cardinales medibles son indescriptibles y de ahí se siguen las demás implicaciones naturalmente. Desafortunadamente esto no es posible. Es un teorema de Scott que los cardinales medibles son Π_1^2-indescriptibles, más todavía, que los cardinales medibles son tan grandes que el conjunto de ordinales α que reflejan alguna sentencia Π_1^2 es un elemento del ultrafiltro (normal), el cual exhibe que el cardinal es medible. Es decir, no solo podemos encontrar un ordinal α el cual pruebe que un cardinal medible es Π_1^2-indescriptible, sino que podemos encontrar κ ordinales que cumplan esto.

Claro que esto no impide que un cardinal medible pueda ser totalmente indescriptible, pero lo que sí es posible observar es que el menor cardinal medible no puede ser totalmente indescriptible. Esto debido a que el mínimo cardinal medible puede ser caracterizado mediante

$$R(\kappa) \models \exists U(U \text{ es una medida bivaluada})$$

donde la sentencia que se encuentra después de $\models$ es de la forma Σ_1^2. Con lo que el menor cardinal medible no es Σ_1^2. En efecto, en caso contrario si κ es el menor cardinal medible, es claro que $R(\kappa)$ satisface la sentencia anterior, pues es equivalente a que κ es medible; con lo cual por ser Σ_1^2, existe $\alpha < \kappa$ que refleja esta sentencia, pero entonces esto induce un cardinal menor que κ el cual es medible, esto contradice la minimalidad de κ.

Sin embargo, es posible demostrar que, aunque algunos cardinales medibles no pueden ser indescriptibles, tienen una cantidad enorme de cardinales medibles menores. Es decir, podemos verificar que si κ es un cardinal medible, entonces los cardinales indescriptibles menores que él forman un conjunto estacionario en κ, más aún, el conjunto de cardinales indescriptibles menores que κ es un elemento de U, el ultrafiltro no principal y κ-completo que verifica que κ es medible.

Este es un resultado bastante interesante, puesto que si κ es un cardinal medible, entonces es bastante grande, como ya se vio en este capítulo, tiene propiedades bastante excéntricas y L no es capaz de conservar sus propiedades que lo definen; no obstante, existen tantos cardinales como el tamaño de κ, los cuales tienen características mucho más fuertes, dados sus atributos de reflejo frente a cualquier tipo de sentencia.

Uno podría estar preocupado pensando en qué sucede con los demás cardinales grandes, i.e. si se verifica que los cardinales medibles siguen siendo débilmente compactos o Mahlo, o quizá estas propiedades se pierden a través del gran tamaño de un cardinal medible. En realidad no hay nada que comprobar al respecto, puesto que cualquier cardinal medible es Π^2_1-indescriptible y por una observación, sabemos que esto implica en particular que un cardinal medible es Π^1_1-indescriptible, con lo que todo cardinal medible es débilmente compacto por el Teorema 5.4 y así, también ha de ser κ-Mahlo.

Por lo que, la jerarquía quedaría como sigue, la existencia de un cardinal medible implica la existencia de infinitos cardinales indescriptibles, los cuales son cardinales débilmente compactos, estos a su vez son cardinales κ-Mahlo, que son cardinales Mahlo y todos estos son cardinales inaccesibles. Por lo que la existencia de un cardinal medible implica la existencia de una infinidad de cardinales de todos los tipos anteriores. Este tipo de implicaciones continua, con cardinales aún más grandes que los medibles, entre los que destacan los cardinales *fuertes, Woodin, súper fuertes, fuertemente compactos, súper compactos, extendibles, casi enormes, enormes, súper enormes*, etc. También mencionar que, antes de los cardinales medibles, existen varios tipos de cardinales grandes que se encuentran después de los indescriptibles, como son los cardinales *sutiles, casi inefables, inefables, Ramsey, Jónsson, Rowbottom*, etc. Manteniendo siempre la característica de implicación (de consistencia relativa) entre estos.

Conclusiones

Como hemos observado, uno podría continuar incluyendo cardinales cada vez más grandes, ir descubriendo propiedades más fuertes que impliquen la existencia de cardinales grandes menores. A lo largo de este trabajo exploramos muchos de ellos, aunque la lista continúa; por ejemplo, vimos que los cardinales medibles son muy grandes que se escapan de L, sin embargo como ya vimos, sí es posible construir un modelo interno que admita la existencia de cardinales medibles. Pero, hay cardinales más grandes que hasta la fecha de escritura del presente, no existe manera de construir un modelo interno con tal propiedad. Esta parte es una gran área de interés e investigación dentro de la Teoría de Conjuntos, de Grandes Cardinales y de Modelos Internos.

Los cardinales grandes no son solo meras construcciones para "medir" los alcances de la imaginación del ser humano en cuestión de tamaño, también son una herramienta muy importante dentro de las matemáticas, para descubrir la naturaleza de muchas afirmaciones que se puedan hacer dentro de cualquier área de las mismas, que se fundamente en ZFC. Esto debido a lo siguiente, los grandes cardinales hemos visto que forman una jerarquía creciente de consistencia; de hecho, aseguramos que son los escalones de la jerarquía de interpretabilidad de las teorías matemáticas. Es posible probar lo siguiente, dada una sentencia σ, se cumple exactamente una de las siguientes:

- ZFC+σ es inconsistente.
- ZFC+σ es equiconsistente con ZFC.
- ZFC+σ es equiconsistente con ZFC más la existencia de algún

cardinal grande.

Por lo que los grandes cardinales puede ser usados para demostrar que alguna sentencia ϕ no implica alguna otra ψ. De esto, concluimos a partir del estudio hecho, que los cardinales grandes tienen una fuerte aplicación dentro de las matemáticas, la cual puede ser bien aprovechada para comprobar diferentes implicaciones. Además que, dentro de muchas ramas de la matemática, pueden surgir diversos conceptos y propiedades que den origen a un cardinal grande; pues hasta ahora, los más grandes conocidos son todo un misterio debido a lo excéntricos que pueden llegar a ser.

Finalmente, cabe mencionar que, aunque ya hemos demostrado que la existencia de grandes cardinales, no puede ser probada a partir de ZFC, todo indica que su existencia no solo puede no ser refutada, sino que tomar como axioma la existencia de alguno de ellos, en realidad no parece ser descabellada, y figura ser muy razonable hacerlo. Puesto que, existe mucha evidencia, como la que se ha provisto en este trabajo, de su consistencia, especialmente de aquellos cardinales grandes pequeños, i.e. donde es posible tener un modelo interno que los admita.

Bibliografía

[1] C. C. Chang y H. Jerome Keisler, *Model Theory*, Dover, New York, 2012.

[2] C. Ivorra Castillo, *Cardinales Grandes*, Valencia, 2020.

[3] C. Ivorra Castillo, *Pruebas de Consistencia*, Valencia, 2020.

[4] C. Ivorra Castillo, *Teoría de Conjuntos*, Valencia, 2020.

[5] T. Jech, *Set Theory*, Springer, Berlin, 2002.

[6] A. Kanamori, *The Higher Infinite*, Springer, Berlin, 2009.

[7] K. Kunen, *Set Theory*, College Publications, London, 2013.

[8] D. Marker, *Model Theory: An Introduction*, Spinger, New York, 2002.

[9] L. M. Villegas Silva, *Combinatoria Infinita*, Plaza y Valdés, Ciudad de México, 2007.

[10] L. M. Villegas Silva, *Teoría de Conjuntos, Lógica y Temas Afines II*, Universidad Autónoma Metropolitana, 2017.