



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Posgrado en Ciencias Matemáticas

Espacios con la propiedad celular \mathcal{P} y cardinalidad

TESIS

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Cesar Alonzo Moreno Espinoza

Directores de Tesis

Dr. Iván Martínez Ruiz

Dr. Alejandro Ramírez Páramo

Puebla, Puebla; Julio de 2025



BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

CESAR ALONZO MORENO ESPINOZA

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 29 de mayo de 2025, con la tesis titulada:

Espacios con la propiedad celular P y cardinalidad

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 3 de junio de 2025

DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.



*Dedicado con cariño
a mi familia, por ser la voz que me animó,
la mirada que me cuidó y el corazón que me sostuvo.*

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que han sido parte fundamental en este camino personal y académico.

En primer lugar, me gustaría agradecer a mi familia; a mis padres María del Refugio y José César y a mis hermanas Diana y Nelida, gracias por su compañía, amor incondicional y su apoyo constante. Gracias por creer en mí incluso en los momentos en que yo dudaba.

A mis asesores de tesis, Iván Martínez Ruiz y Alejandro Ramírez Páramo por brindarme su paciencia para explicarme cuando no entendía ciertos temas; su dedicación y compromiso hacia mí y hacia la presente tesis; y su guía durante mi proceso de aprendizaje y formación. Su apoyo ha sido clave para la culminación de este trabajo. Además, quiero expresar mi sincero agradecimiento a los sinodales Sonia, Javier, Agustín y Oleg que formaron parte del proceso de evaluación de esta tesis. Su tiempo y valiosas observaciones contribuyeron significativamente a mejorar la calidad de este trabajo.

A todos mis profesores de la facultad que me acompañaron durante este viaje que fue la maestría en Ciencias Matemáticas, quienes a lo largo de mi formación me brindaron conocimientos, inspiración y herramientas para crecer tanto profesional como personalmente.

A mis amigos Enrique y Joshua por su amistad y apoyo durante los momentos difíciles por los que pasé. A mis compañeros del posgrado y demás gente increíble que conocí durante el tiempo que estuve en el posgrado.

Finalmente, me gustaría agradecer profundamente al *Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT)*,

VI

hoy *Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación* (**SECIHTI**). Su respaldo, a través del otorgamiento de una beca, me ayudó en la realización de mis estudios académicos con la debida atención, permitiéndome avanzar en mi desarrollo profesional y personal.

Introducción

En el 2017, A. Bella y S. Spadaro introdujeron el concepto de espacios celular Lindelöf, [5]. El objetivo de estos espacios era generalizar a los espacios casi discretamente Lindelöf¹. Un espacio topológico X se dice que es *celular Lindelöf* si para cada familia celular \mathcal{U} de X , existe un subespacio Lindelöf, de X , que intersecta a todos los elementos de la familia \mathcal{U} .

La noción de espacio celular Lindelöf suscitó interés en varios autores, quienes obtuvieron resultados relevantes sobre dichos espacios. Por ejemplo, en el mismo artículo [5], Bella y Spadaro establecen cotas superiores para espacios celular Lindelöf, los cuales satisfacen algunas condiciones adicionales. Además, mostraron la existencia de espacios débilmente Lindelöf que no son celular Lindelöf. Posteriormente, en [26] y [27], Xuan y Song estudiaron a la clase de espacios celular Lindelöf, obteniendo diversas propiedades para los espacios celular Lindelöf; además formularon algunas caracterizaciones de dichos espacios y establecieron cotas superiores para espacios celular Lindelöf que verifican algunas condiciones adicionales.

La naturaleza de la definición de los espacios celular Lindelöf permite, de manera natural, establecer de manera genérica dicha noción; a saber, supongamos que \mathcal{P} es una propiedad topológica, entonces podemos introducir a la clase de los espacios celular \mathcal{P} (vea Definición 4.1). En [23], por ejemplo, Tkachuk y Wilson introdujeron el concepto de espacio celular compacto; propusieron una serie de propiedades y características, y establecieron ciertas cotas superiores para esta nueva clase de espacios topológicos. En el artículo [1], Alas, Junqueira, Passos y Wilson proponen formal-

¹Almost discretely Lindelöf, en inglés

VIII

mente el concepto de espacio celular \mathcal{P} , donde \mathcal{P} es una propiedad topológica dada. No obstante, el enfoque principal de su estudio se centró en la propiedades de compacidad, compacidad numerable y compacidad secuencial.

El estudio de las propiedades de estos espacios tipo “celular Lindelöf”, ha revelado la existencia de resultados que comparten características en común. Este hallazgo sugiere la presencia de características comunes que pueden ser objeto de un análisis más exhaustivo.

El propósito de la presente tesis se fundamenta en dos objetivos primordiales. En primera instancia, se pretende realizar un análisis genérico de los espacios celular \mathcal{P} , considerando que \mathcal{P} es una propiedad topológica arbitraria. Estudiaremos el comportamiento de estos espacios con respecto de las operaciones topológicas usuales; así como la preservación bajo funciones continuas, por citar algunos.

Nuestro segundo objetivo, es realizar un estudio acerca del comportamiento de las clases de espacios que se generan al considerar la noción celular \mathcal{P} para cuando \mathcal{P} es una propiedad de tipo Lindelöf tales como la propiedad casi Lindelöf y débilmente Lindelöf (además de las propiedades *CCC* Y *DCCC*). Entre otras cosas, analizaremos las relaciones que existen entre estas clases de espacios y las que se generan a través de la propiedad celular \mathcal{P} . Por ejemplo, para el caso de los espacios celular casi Lindelöf, una cuestión natural es: ¿las clases casi Lindelöf y celular casi Lindelöf son distintas o guardan alguna relación? Por supuesto que la misma pregunta se puede analizar con cada propiedad topológica dada. También resulta natural preguntarse la relación que guardan las propiedades celular \mathcal{P} , para cuando \mathcal{P} es una propiedad tipo Lindelöf, con las clases Lindelöf y celular Lindelöf. Nuevamente, y con la finalidad de ejemplificar lo dicho, una pregunta natural es: ¿qué relación guarda la clase celular casi Lindelöf con las clases Lindelöf y celular Lindelöf?. Finalmente, otras interrogantes, digamos inmediatas son las referentes a la cardinalidad. Por establecer una pregunta: ¿Las cotas superiores para la clase de espacios celular Lindelöf (bajo ciertas condiciones adicionales) que se conocen en la actualidad se verifican para la clase de los espacios celular casi Lindelöf?

Como es usual, en el Capítulo 1 de la presente tesis, se establecerán las nociones básicas de Teoría de Conjuntos y Topología que serán de utilidad en el desarrollo subsiguiente de la tesis. Dado que la mayoría de los tópicos abordados en el presente capítulo son objeto de estudio en un primer curso de Topología y Teoría de Conjuntos, no se llevarán a cabo las pruebas correspondientes. Sin embargo, el lector interesado en un estudio más profundo sobre alguno de estos temas, podría consultar las referencias [11], [12], [17] y [9] mismas en las que hemos basado este resumen de definiciones y notaciones. Particularmente, en este primer capítulo, expondremos algunos resultados relacionados con la noción de filtro. Dado que estos resultados no son comúnmente estudiados, damos algunas demostraciones y para aquellos interesados en un estudio más profundo sobre el tema de filtro pueden consultar, además de las referencias antes mencionadas, [14] y [3].

Con la finalidad de hacer, en la medida de lo posible, un trabajo autocontenido en el Capítulo 2 se abordará a detalle algunas de las propiedades inherentes a los espacios Lindelöf, casi Lindelöf y débilmente Lindelöf, además de algunas características asociadas a los espacios que poseen las propiedades *CCC* o *DCCC*. Adicionalmente, se abordará brevemente el tema de los espacios estrella Lindelöf y Lindelöf n -estrella.

Como se mencionó anteriormente y, como uno de los objetivos del presente trabajo de tesis, en el Capítulo 3, establecemos los resultados obtenidos de investigar las relaciones entre los espacios celular Lindelöf, celular casi Lindelöf, celular débilmente Lindelöf y celular *DCCC*. En el presente capítulo, exponemos diversos ejemplos de espacios topológicos y sus propiedades más relevantes. Además, presentaremos algunos métodos típicos para la construcción de nuevos espacios topológicos, los cuales serán empleados posteriormente para el análisis de dichas clases de espacios.

El último capítulo, el cual se encuentra dividido en tres secciones, contiene la información referente a los objetivos del presente trabajo de tesis, mismos que hemos señalado párrafos arriba. La primera sección contiene resultados (genéricos) sobre la clase de los espacios celular \mathcal{P} , para una propiedad topológica dada \mathcal{P} . En la segunda sección, centramos nuestra atención a las clases generadas por aplicar la noción celular \mathcal{P} , para cuando \mathcal{P} es una propiedad

X

de tipo Lindelöf. La última sección establece cotas superiores para la cardinalidad de espacios celular \mathcal{P} (donde \mathcal{P} es una propiedad tipo Lindelöf) que verifican alguna propiedad adicional.

Índice general

Agradecimientos	V
Introducción	VII
1. Preliminares	1
1.1. Teoría de conjuntos	1
1.2. Topología	11
2. Propiedades de cubiertas	23
3. Ejemplos de espacios topológicos	37
3.1. La línea de Sorgenfrey	37
3.2. El duplicado de Alexandroff	41
3.3. La G_κ -modificación	45
3.4. El Conjunto de Cantor	49
3.5. El Hiperespacio de Pixley-Roy	50
3.6. La extensión de Katětov	54
3.7. Compactación de Stone-Čech	58
3.7.1. Compactación de Stone-Čech para espacios discretos	61
3.8. Más espacios topológicos	72
3.8.1. Ejemplo 1	72
3.8.2. Ejemplo 2	76
3.8.3. Ejemplo 3	82
4. Espacios celular \mathcal{P}	87
4.1. Operaciones topológicas usuales	96
4.2. Propiedades de cubiertas tipo Lindelöf	106
4.3. Cardinalidad de los espacios celular \mathcal{P}	117

XII

ÍNDICE GENERAL

Conclusiones	118
Bibliografía	121

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección daremos algunas notaciones y conceptos básicos que estaremos usando a lo largo de la tesis.

1.1. Teoría de conjuntos

La existencia de obras excelentes en las que se expone la teoría de conjuntos (por ejemplo [11], [12] o [17]), nos brinda la oportunidad de exponer a manera de resumen, los conceptos y resultados que nos serán de utilidad durante el desarrollo de la tesis. Así, usaremos las mismas notaciones que en [11]. Por ejemplo, dado un conjunto X , $\mathcal{P}(X)$ denotará el conjunto potencia de X y $|X|$ denotará la cardinalidad del conjunto X . Denotaremos por ω al primer cardinal infinito, ω_1 será el primer cardinal infinito no numerable, etc. Usaremos las letras $\alpha, \beta, \gamma \dots$ para denotar los números ordinales, mientras que $\kappa, \lambda, \theta \dots$ denotarán a los números cardinales. Además, si κ es un número cardinal, entonces κ^+ denota al menor número cardinal más grande que κ .

Si $f : X \rightarrow Y$ es una función y $A \subseteq X$, entonces $f|_A$ denotará la restricción de f en A , es decir, $f = f \circ i_A$, donde $i_A : A \rightarrow X$ tal que $i(x) = x$.

Dado un conjunto X , para un ordinal α definimos

$$X^\alpha = \{f : \alpha \rightarrow X \mid f \text{ es una función}\},$$

$$X^{<\alpha} = \{f : \beta \rightarrow X \mid f \text{ es una función y } \beta < \alpha\}.$$

Y si κ es un número cardinal, entonces

$$[X]^\kappa = \{A \subseteq X : |A| = \kappa\}$$

y

$$[X]^{<\kappa} = \{A \subseteq X : |A| < \kappa\}.$$

Note que $[X]^{\leq\kappa} = [X]^{<\kappa^+}$.

Como se mencionó en la introducción, uno de los objetivos de la tesis es estudiar ciertos tipos de espacios topológicos. Entre los espacios topológicos que estaremos estudiando se encuentran la compactación de Stone-Čech, βX , y la extensión de Katětov, $\kappa(X)$. Al igual que casi todos los espacios que trabajaremos en la tesis, dichos espacios no son comúnmente estudiados en un primer curso de topología. Por tal motivo, estudiaremos estos espacios con detalle. Dado que la compactación de Stone-Čech y la extensión de Katětov usan nociones de ultrafiltros y ya que hablaremos de ultrafiltros y ultrafiltros abiertos, entonces haremos un pequeño estudio general de estos tipos de filtro. Estudiaremos los F -filtros, con $F \subseteq X$ y (X, \leq) un conjunto parcialmente ordenado. Ya que este estudio no es muy común, entonces daremos las demostraciones necesarias.

Recordemos que (X, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado si \leq es una relación reflexiva, simétrica y transitiva. Si $L \subseteq X$, definamos $\leq|_L = \leq \cap (L \times L)$. Entonces $(L, \leq|_L)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 1.1. Sean (X, \leq) un conjunto parcialmente ordenado y $L \subseteq X$.

1. Decimos que X es un retículo si para cualesquiera $x, y \in X$, $\sup\{x, y\}$ y $\inf\{x, y\}$ existen, en X .
2. Decimos que L es un subretículo de X si $(L, \leq|_L)$ es un retículo y $\inf_L\{x, y\} = \inf_X\{x, y\}$ y $\sup_L\{x, y\} = \sup_X\{x, y\}$.

Ejemplo 1.2. Sea X un conjunto, entonces $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un retículo y si $Y \subseteq X$, entonces $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$ es un subretículo de $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

Para un estudio más amplio acerca del tema de los filtros remitimos al lector a los trabajos [12], [14], [9].

Definición 1.3. Sean (X, \leq) un conjunto parcialmente ordenado y $F \subseteq X$. Decimos que F es un filtro en X si cumple:

1. $F \neq \emptyset$ y $F \neq X$.
2. Si $x, y \in F$, entonces existe $z \in F$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$.
3. Si $x \in F$, $y \in X$ y $x \leq y$, entonces $y \in F$.

Si X es un retículo, entonces podemos reemplazar 2 por: Si $x, y \in F$, entonces $\inf\{x, y\} \in F$.

Ejemplo 1.4. Sea X un conjunto no vacío.

1. La familia $\mathcal{F} = \{X\}$ es un filtro en $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.
2. Si X es infinito, entonces el conjunto $\{A \subseteq X : |X \setminus A| < \omega\}$ es un filtro en $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Al filtro anterior le llamamos el filtro de Fréchet.
3. Sea \mathcal{A} una colección no vacía de filtros en $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Entonces $\bigcap \mathcal{A}$ es un filtro sobre $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.
4. Si $\mathcal{C} \neq \emptyset$ es una \subseteq -cadena de filtros en $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es un filtro en $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

Si (X, \leq) es un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq X$, entonces definimos

$$A \uparrow = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } a \leq x\}$$

y

$$A \downarrow = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } x \leq a\}.$$

Definición 1.5. Sea (X, \leq) un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq X$. Decimos que B es una base de filtro en X si:

1. $B \neq \emptyset$ y existe $a \in X$ tal que para cada $b \in B$, $b \not\leq a$.
2. Si $x, y \in B$, entonces existe $z \in B$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$.

Ejemplo 1.6. Sea $\emptyset \neq A \subseteq X$, entonces $\mathcal{B} = \{A\}$ es una base de filtro en $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Por tanto, $\mathcal{F}(A) = \{B \subseteq X : A \subseteq B\}$ es el filtro generado por $\{A\}$. Más aún, $\mathcal{F}(A)$ es el menor filtro sobre $\mathcal{P}(X)$ que contiene a A .

Es claro que si B es una base de filtro en X , entonces $B \uparrow$ es un filtro en X . A tal $B \uparrow$ le llamaremos el filtro generado por B y lo denotaremos por $F(B)$. Si F es un filtro en X y $\emptyset \neq B \subseteq F$ tal que $B \uparrow = F$, entonces decimos que B es una base para el filtro F . Notemos que si B es una base para el filtro F , entonces B es una base de filtro en X y $F(B) = F$. Si G es un filtro en X , entonces G una base de filtro en X y $F(G) = G$.

Definición 1.7. Sean X un conjunto parcialmente ordenado y $U \subseteq X$. Decimos que U es un ultrafiltro en X si U es un filtro en X y si $F \subseteq X$ es un filtro en X tal que $U \subseteq F$, entonces $U = F$.

Ejemplo 1.8. 1. $\{X\}$ es un ultrafiltro en $\mathcal{P}(X)$ si y solo si $|X| = 1$.

2. Para cualquier $x \in X$, $\mathcal{F}(x) = \{A \subseteq X : x \in A\}$ es un ultrafiltro sobre $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Sabemos que $\mathcal{F}(x)$ es un filtro. Veamos que $\mathcal{F}(x)$ es un ultrafiltro. Sea \mathcal{F} un filtro en $\mathcal{P}(X)$ tal que $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Supongamos que $A \in \mathcal{F}$ tal que $x \notin A$. Ya que $\{x\} \in \mathcal{F}(x)$, entonces $\{x\} \in \mathcal{F}$. Así, $\emptyset = \{x\} \cap A \in \mathcal{F}$. Por tanto, $x \in A$. Concluimos que $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}$.

3. Sea $\emptyset \neq A \subseteq X$, entonces $\mathcal{F}(A)$ es un ultrafiltro si y solo si $|A| = 1$. Por el inciso anterior, si $|A| = 1$, entonces $\mathcal{F}(A)$ es un ultrafiltro. Supongamos que $\mathcal{F}(A)$ es un ultrafiltro y que $|A| > 1$. Sean $a, b \in A$ diferentes, entonces $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(a), \mathcal{F}(b)$. Dado que $\mathcal{F}(A)$ es un ultrafiltro, entonces $\mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(b)$, entonces $a = b$, lo cual contradice la elección de a y b .

Definición 1.9. Sean (X, \leq) un conjunto parcialmente ordenado, $L \subseteq X$ y $F \subseteq L$. Entonces

1. F es una L -base de filtro si F es una base de filtro en L .
2. F es un L -filtro si F es un filtro en L .
3. F es un L -ultrafiltro si F es un ultrafiltro en L .

Ejemplo 1.10. Sean X un conjunto no vacío y \mathcal{L} un subretículo de $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ tal que $\emptyset \in \mathcal{L}$. Entonces \mathcal{F} es un \mathcal{L} -filtro si y solo si \mathcal{F} cumple:

1. $\emptyset \neq \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$
3. Si $F \in \mathcal{F}$, $E \in \mathcal{L}$ y $F \subseteq E$, entonces $E \in \mathcal{F}$.

Definición 1.11. Sean (X, \leq) un conjunto parcialmente ordenado y $x \in X$. Al filtro generado por $\{x\}$, $F(x)$, le llamaremos el filtro principal en X generado por x . Un filtro F es llamado principal si $F = F(x)$, para algún $x \in X$. A los filtros que no son principales los llamaremos filtros libres.

En caso de que estemos considerando el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, entonces únicamente llamaremos filtro principal al filtro generado por el conjunto $\{x\}$, para algún $x \in X$.

Ejemplo 1.12. 1. Sean X un conjunto finito y \mathcal{F} un filtro en $\mathcal{P}(X)$. Ya que X es finito, entonces \mathcal{F} es finito, así, $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{F}$. No es difícil ver que $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\bigcap \mathcal{F})$. Concluimos que todos los ultrafiltros en $\mathcal{P}(X)$ son principales.

2. Si X es un conjunto infinito, entonces el filtro de Fréchet no es un filtro generado por un subconjunto de X . Supongamos que $\{A \subseteq X : |X \setminus A| < \omega\} = \mathcal{F}_B$, con $\emptyset \neq B \subseteq X$. Sea $a \in B$, entonces $X \setminus \{a\} \in \{A \subseteq X : |X \setminus A| < \omega\} = \mathcal{F}_B$. Por tanto, $B \subseteq X \setminus \{a\}$. Luego, $a \in X \setminus B$, lo cual es una contradicción. Notemos que en general, ningún filtro en $\mathcal{P}(X)$ que contenga al filtro de Fréchet, es un filtro principal.

Definición 1.13. Sea α un número ordinal límite. La cofinalidad de α , denotada por $cf(\alpha)$, es el mínimo número ordinal θ tal que existe $(\alpha_\xi)_{\xi < \theta}$, sucesión creciente de ordinales menores a α de longitud θ , tal que α es el límite de dicha sucesión.

Definición 1.14. Sea κ un cardinal infinito. Decimos que κ es un cardinal regular si cumple que $cf(\kappa) = \kappa$.

Por ejemplo, ω es un cardinal regular y para cualquier $n < \omega$, ω_n es un cardinal regular, pero ω_ω no es un cardinal regular. En general, para cualquier cardinal κ , κ^+ es un cardinal regular.

Definición 1.15. Sea \mathcal{A} una familia no vacía de conjuntos. Diremos que \mathcal{A} es un Δ -sistema si existe un conjunto R tal que para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$, distintos, se cumple que $A \cap B = R$. Al conjunto R le llamaremos la raíz o núcleo del Δ -sistema

El siguiente resultado es uno de los más importantes en teoría de conjuntos, el cual es conocido como el Lema del Δ -sistema. La demostración de este resultado se puede consultar, por ejemplo, en [17].

Lema 1.16. (El lema del Δ -sistema) Sean κ un cardinal infinito y θ un cardinal regular tal que $\kappa < \theta$ y para cada $\alpha < \theta$ se cumple que $|\alpha^{<\kappa}| < \theta$. Si \mathcal{F} es una familia de conjuntos que cumple

1. $|\mathcal{F}| \geq \theta$,
2. para cada $x \in \mathcal{F}$, $|x| < \kappa$,

entonces existe $\mathcal{G} \in [\mathcal{F}]^\theta$ tal que \mathcal{G} forma un Δ -sistema.

Otro resultado combinatorio importante en teoría de conjuntos es el Teorema de Erdős, Rado. La demostración de este Teorema la podemos encontrar en [15]

Teorema 1.17. (Teorema de Erdős, Rado) Sean κ un cardinal infinito, X un conjunto tal que $|X| > 2^\kappa$ y supongamos que

$$[X]^2 = \bigcup_{\alpha < \kappa} P_\alpha.$$

Entonces existen $\alpha < \kappa$ y $A \subseteq X$ con $|A| > \kappa$, tales que

$$[A]^2 \subseteq P_\alpha.$$

Definición 1.18. Sea \mathcal{P} una propiedad relativa a los subconjuntos de un conjunto X . Decimos que \mathcal{P} es una propiedad de carácter finito si

1. \emptyset tiene la propiedad \mathcal{P} ;
2. Para cualquier $A \subseteq X$ se cumple que: A tiene la propiedad \mathcal{P} si y solo si para todo $B \in [A]^{<\omega}$, B tienen la propiedad \mathcal{P} .

Teorema 1.19. *(El Lema de Teichmüller-Tukey) Sean X un conjunto y \mathcal{P} una propiedad relativa a los subconjuntos de X de carácter finito. Si $A \subseteq X$ es tal que A tiene la propiedad \mathcal{P} , entonces existe $B \subseteq X$ tal que $A \subseteq B$, B tiene la propiedad \mathcal{P} y B es \subseteq -maximal en la familia de todos los subconjuntos de X que tienen la propiedad \mathcal{P} .*

El Lema de Teichmüller-Tukey es equivalente al axioma de elección. La demostración de esta afirmación, puede consultarse en [9].

Definición 1.20. *Sea \mathcal{A} una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Decimos que \mathcal{A} tiene la propiedad de la intersección finita (PIF) si para cada $\emptyset \neq \mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ se cumple que $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$.*

Ejemplo 1.21. 1. *Sea X un conjunto. Entonces la propiedad \mathcal{P} : $\mathcal{A} = \emptyset$ o $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y \mathcal{A} tiene la PIF, es una propiedad relativa a los subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ de carácter finito. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

a) *Si \mathcal{A} tiene la propiedad \mathcal{P} y $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$. Si $\mathcal{B} = \emptyset$, entonces \mathcal{B} tiene la propiedad \mathcal{P} . Supongamos que $\emptyset \neq \mathcal{C} \in [\mathcal{B}]^{<\omega}$, entonces $\emptyset \neq \mathcal{C} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$, por tanto, $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Así, \mathcal{B} tiene la propiedad \mathcal{P} .*

b) *Supongamos que para cada $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$, \mathcal{B} tiene la propiedad \mathcal{P} . Si $\mathcal{A} = \emptyset$, entonces \mathcal{A} tiene la propiedad \mathcal{P} . Supongamos que $\emptyset \neq \mathcal{C} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$, entonces \mathcal{C} tiene la propiedad \mathcal{P} , en particular, $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.*

2. *Si \mathcal{F} es un filtro en \mathcal{L} , un subretículo de $\mathcal{P}(X)$, tal que $\emptyset \in \mathcal{L}$, entonces \mathcal{F} tiene la PIF.*

El siguiente resultado nos dice que cualquier familia de subconjuntos con la PIF está contenida en un filtro en $\mathcal{P}(X)$.

Lema 1.22. *Sean \mathcal{L} un subretículo de $\mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset \in \mathcal{L}$. Toda familia $\emptyset \neq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$ con la PIF esta contenida en un \mathcal{L} -filtro. Más aún, si \mathcal{B} es la colección de todas las intersecciones finitas de X , entonces \mathcal{B} es una \mathcal{L} -base de filtro y el \mathcal{L} -filtro generado por \mathcal{B} es el \subseteq -menor filtro que contiene a \mathcal{G} .*

Sin embargo, el lema anterior puede ser “mejorado”.

Teorema 1.23. *Sea \mathcal{L} un subretículo de $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ tal que $\emptyset \in \mathcal{L}$. Toda familia $\emptyset \neq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$ con la PIF está contenida en un \mathcal{L} -ultrafiltro.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{G} \neq \emptyset$ tiene la PIF. Sea \mathcal{P} como en el ejemplo anterior. Entonces \mathcal{G} tiene la propiedad \mathcal{P} y \mathcal{P} es una propiedad de carácter finito. Así, por el Lema de Teichmüller-Tukey, existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$ tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$, \mathcal{B} tiene la propiedad \mathcal{P} y \mathcal{B} es maximal en la familia de todos los subconjuntos de \mathcal{L} que tienen la propiedad \mathcal{P} . Ya que $\emptyset \neq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$, entonces \mathcal{B} tiene la PIF. Afirmamos que \mathcal{B} es un \mathcal{L} -filtro.

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{B}$.
2. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{B}$. Ya que \mathcal{B} tiene la PIF, entonces $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Definamos $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cup \{F_1 \cap F_2\}$. Entonces $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}$. Además, sea $\emptyset \neq \mathcal{A} \in [\mathcal{C}]^{<\omega}$ y definamos $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.
 - a) Si $\mathcal{A}' = \emptyset$, entonces $\mathcal{A} = \{F_1 \cap F_2\}$, así, $\bigcap \mathcal{A} = F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.
 - b) Supongamos que $\mathcal{A}' \neq \emptyset$. Si $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}' \cup \{F_1, F_2\}$, entonces $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}''$ y $\emptyset \neq \mathcal{A}'' \in [\mathcal{B}]^{<\omega}$. Ya que \mathcal{B} tiene la PIF, entonces $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{A}'' = \bigcap \mathcal{A}' \cap (F_1 \cap F_2) \subseteq \bigcap \mathcal{A}$.

Así, \mathcal{C} es un subconjunto de \mathcal{L} que tiene la propiedad \mathcal{P} . Ya que \mathcal{B} es maximal, entonces $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, es decir, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{B}$.

3. Sean $F_1 \in \mathcal{B}$ y $F_2 \in \mathcal{L}$ tal que $F_1 \subseteq F_2$. Consideremos $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cup \{F_2\}$. Sea $\emptyset \neq \mathcal{A} \in [\mathcal{C}]^{<\omega}$.
 - a) Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$, pues \mathcal{B} tiene la PIF.
 - b) Supongamos que $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cup \{F_2\}$, con $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}$. Si $\mathcal{A}' = \emptyset$, entonces $\bigcap \mathcal{A} = F_2 \neq \emptyset$. Supongamos que $\mathcal{A}' \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \neq \bigcap (\mathcal{A}' \cup \{F_1\}) = \bigcap \mathcal{A}' \cap F_1 \subseteq \bigcap \mathcal{A}' \cap F_2 = \bigcap \mathcal{A}$, pues $\emptyset \neq (\mathcal{A}' \cup \{F_1\}) \in [\mathcal{B}]^{<\omega}$.

Así, \mathcal{C} tiene la propiedad \mathcal{P} . Dado que \mathcal{B} es maximal concluimos que $F_2 \in \mathcal{C} = \mathcal{B}$.

Por tanto, \mathcal{B} es un \mathcal{L} -filtro. Veamos ahora que es un \mathcal{L} -ultrafiltro. Sea \mathcal{F} un \mathcal{L} -filtro tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. Ya que \mathcal{F} tiene la PIF, entonces

\mathcal{F} tiene la propiedad \mathcal{P} y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$. Por la maximalidad de \mathcal{B} , concluimos que $\mathcal{B} = \mathcal{F}$. \square

Corolario 1.24. *Sean \mathcal{L} un subretículo de $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ tal que $\emptyset \in \mathcal{L}$ y $\emptyset \neq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$. Entonces existe un \mathcal{L} -filtro que contiene a \mathcal{G} si y solo si \mathcal{G} tiene la PIF.*

Los ultrafiltros principales en $\mathcal{P}(X)$ siempre existen y son fáciles de trabajar, pues los conocemos explícitamente. Por otro lado, usando el Axioma de Elección, podemos demostrar que el filtro de Fréchet, en general, no es un ultrafiltro. Más aún, el Axioma de Elección nos permite construir ultrafiltros no principales.

Ejemplo 1.25. 1. *En general no es cierto que si X es infinito, entonces $\{A \subseteq X : |X \setminus A| < \omega\}$ es un ultrafiltro. Pues si $X = \mathbb{N}$, entonces $2\mathbb{N} \notin \{A \subseteq \mathbb{N} : |\mathbb{N} \setminus A| < \omega\}$, donde $2\mathbb{N} = \{2n : n \in \omega\}$. Sea $\mathcal{G} = \{A \subseteq X : |X \setminus A| < \omega\} \cup \{2\mathbb{N}\}$. Sea $A \subseteq X$ con complemento finito. Si $A \cap 2\mathbb{N} = \emptyset$, entonces $2\mathbb{N} \subseteq X \setminus A$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $2\mathbb{N} \cap A \neq \emptyset$. Así, \mathcal{G} tiene la PIF. Sea \mathcal{F} un filtro sobre $\mathcal{P}(X)$ que contenga a \mathcal{G} . Entonces $\{A \subseteq X : |X \setminus A| < \omega\} \subsetneq \mathcal{F}$.*

2. *Por el teorema anterior, para X un conjunto infinito existe \mathcal{U} ultrafiltro en $\mathcal{P}(X)$ tal que $\{A \subseteq X : |X \setminus A| < \omega\} \subseteq \mathcal{U}$. Note que \mathcal{U} no es un filtro principal en $\mathcal{P}(X)$.*

Usando el teorema anterior obtenemos algunas equivalencias de los \mathcal{L} -ultrafiltros.

Proposición 1.26. *Sean X un conjunto, \mathcal{L} un subretículo de $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ tal que $\emptyset \in \mathcal{L}$ y \mathcal{U} un \mathcal{L} -filtro. Entonces son equivalentes:*

1. \mathcal{U} es un \mathcal{L} -ultrafiltro.
2. \mathcal{U} es \subseteq -maximal en $\{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L} : \mathcal{G} \text{ tiene la PIF}\}$.
3. Si $A \in \mathcal{L}$ tal que $A \cap U \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}$, entonces $A \in \mathcal{U}$.

Además, si \mathcal{U} es un \mathcal{L} -ultrafiltro, entonces se cumplen:

- a. Si $\mathcal{A} \in [\mathcal{L}]^{<\omega}$ tal que $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{A} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

- b. Si $A \subseteq X$ tal que $A, X \setminus A \in \mathcal{L}$, entonces se cumple que $A \in \mathcal{U}$ ó $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

Más aún, si \mathcal{L} satisface que: para cada $A \subseteq X$, si $A \in \mathcal{L}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{L}$. Entonces cada una de las condiciones anteriores, suponiendo que \mathcal{U} es filtro, es equivalente a que \mathcal{U} es un \mathcal{L} -ultrafiltro.

Demostración:

1. Supongamos que \mathcal{U} es \mathcal{L} -ultrafiltro. Entonces $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$ y \mathcal{U} tiene la PIF. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$ tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ y \mathcal{F} tiene la PIF. Entonces existe \mathcal{G} un \mathcal{L} -filtro tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Ya que \mathcal{U} es un ultrafiltro, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{G} \supseteq \mathcal{U}$.
2. Supongamos que $A \in \mathcal{L}$ tal que para cada $U \in \mathcal{U}$ se cumple que $A \cap U \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{U} \cup \{A\}$, entonces $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}$. Sea $\emptyset \neq \mathcal{B} \in [\mathcal{C}]^{<\omega}$.
 - a) Supongamos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$, entonces $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$, pues \mathcal{U} es un \mathcal{L} -filtro.
 - b) Supongamos que $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{A\}$, con $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{U}$. Si $\mathcal{B}' = \emptyset$, entonces $\bigcap \mathcal{B} = A \neq \emptyset$. Si $\mathcal{B}' \neq \emptyset$, entonces $\bigcap \mathcal{B}' \in \mathcal{U}$, pues \mathcal{U} es \mathcal{L} -filtro. Por tanto, $\bigcap \mathcal{B} = \bigcap \mathcal{B}' \cap A \neq \emptyset$.

Entonces $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}$ con la PIF. Por el inciso anterior, $\mathcal{U} = \mathcal{C}$. Concluimos que $A \in \mathcal{U}$.

3. Sea \mathcal{F} un \mathcal{L} -filtro tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$. Sea $A \in \mathcal{F}$. Ya que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ y \mathcal{F} es un \mathcal{L} -filtro, entonces para cada $U \in \mathcal{U}$, se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$, por tanto, $A \in \mathcal{U}$.

Supongamos que \mathcal{U} es un \mathcal{L} -ultrafiltro.

- a. Supongamos que $\mathcal{A} \in [\mathcal{L}]^{<\omega}$ tal que $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{A} \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces $A_i \notin \mathcal{U}$, por tanto, existe $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $A_i \cap U_i = \emptyset$. Sea $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$, entonces $U \in \mathcal{U}$ y

$$\bigcup \mathcal{A} \cap U = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap U) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap U_i) = \emptyset.$$

Lo cual contradice que $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{U}$.

- b. Supongamos que $A \subseteq X$ tal que $A, X \setminus A \in \mathcal{L}$. Entonces $X = A \cup (X \setminus A) \in \mathcal{L}$. Ya que \mathcal{U} es un \mathcal{L} -filtro, entonces $X \in \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{A} = \{A, X \setminus A\} \in [\mathcal{L}]^{<\omega}$ tal que $\bigcup \mathcal{A} = X \in \mathcal{U}$. Por tanto, $\mathcal{A} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Así, $A \in \mathcal{U}$ ó $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

Supongamos que se cumple que si $A \in \mathcal{L}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{L}$. Por como demostramos los incisos a y b , solo hace falta demostrar que b implica que \mathcal{U} es un \mathcal{L} -ultrafiltro.

Supongamos que \mathcal{U} es un filtro que satisface la condición b y sea \mathcal{F} un \mathcal{L} -filtro tal que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$. Sea $A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{L}$. Ya que $A, X \setminus A \in \mathcal{L}$ y \mathcal{U} satisface b , entonces $A \in \mathcal{U}$ ó $X \setminus A \in \mathcal{U}$. Pero si $X \setminus A \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $A, X \setminus A \in \mathcal{F}$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $A \in \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{U} = \mathcal{F}$. \square

Notemos que el inciso 4 de la proposición anterior es equivalente a: \mathcal{U} es un filtro sobre X tal que para cualesquiera $A, B \subseteq X$, si $A \cup B \in \mathcal{U}$, entonces $A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$.

Recordemos que \mathcal{U} , un filtro en $\mathcal{P}(X)$, es principal si $\mathcal{U} = F(\{x\})$, para algún $x \in X$. En caso de que \mathcal{U} sea un ultrafiltro, entonces diremos que \mathcal{U} es un ultrafiltro principal. El siguiente resultado nos da algunas equivalencias de los ultrafiltros principales.

Proposición 1.27. *Sean X un conjunto y \mathcal{U} un ultrafiltro en $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Son equivalentes:*

1. \mathcal{U} es un ultrafiltro principal.
2. Existe $F \in [X]^{<\omega}$ tal que $F \in \mathcal{U}$.
3. $\{A \subseteq X : |X \setminus A| < \omega\} \not\subseteq \mathcal{U}$.
4. $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$.
5. Existe $x \in X$ tal que $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$.

Así, \mathcal{U} es un ultrafiltro libre si y solo si $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$.

1.2. Topología

Esta sección está desarrollada con el objetivo de exponer algunos conceptos y resultados importantes de topología general, que usaremos durante el desarrollo de la tesis. Sin embargo, ya que

nuestro objetivo es estudiar cierta clase de espacios topológicos, entonces esta sección está escrita a manera de resumen; por tanto, no entraremos a detalle sobre las definiciones o resultados que expongamos. Además, supondremos que el lector ya conoce ciertas nociones básicas de topología, como lo son espacios topológicos, funciones continuas, bases, cubiertas, etc. Aquellos lectores que deseen conocer más sobre estas nociones o sobre los resultados de esta sección pueden consultar, por ejemplo, [9] o [15].

Usaremos el símbolo τ_X (o τ) para denotar una topología para el conjunto X . Si X es un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces $cl_X(A)$ denotará la clausura del conjunto A en el espacio X ; en caso de que no haya riesgo de confusión, escribiremos simplemente $cl(A)$ o \overline{A} . Denotaremos por A^d al derivado de A , es decir, al conjunto de puntos de acumulación del conjunto A .

Dado un conjunto X podemos generar una topología para X de diferentes formas, dos de los métodos más usuales para generar topologías son: (1) describiendo una base para la topología; o (2) describiendo un sistema de vecindades para la topología. El siguiente resultado da condiciones para poder generar topologías mediante estos dos métodos.

Proposición 1.28. *Sea X un conjunto.*

1. *Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que cumple*

(B1) *Para cada $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ y cada $x \in U_1 \cap U_2$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.*

(B2) $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Sea

$$\tau_{\mathcal{B}} = \{O \subseteq X : \text{existe } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \text{ tal que } O = \bigcup \mathcal{A}\}.$$

Entonces $\tau_{\mathcal{B}}$ es una topología para X tal que \mathcal{B} es una base para el espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{B}})$.

2. *Para cada $x \in X$ sea $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ tales que $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ satisfacen:*

(BP1) *Para cada $x \in X$ se cumple que $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ y si $U \in \mathcal{B}(x)$, entonces $x \in U$.*

(BP2) Si $x \in U \in \mathcal{B}(y)$, entonces existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V \subseteq U$.

(BP3) Para cualesquiera $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(x)$, existe $U \in \mathcal{B}(x)$ tal que $U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Sea

$$\tau_{\{\mathcal{B}(x)\}} = \{O \subseteq X : \text{existe } \mathcal{A} \subseteq \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x) \text{ tal que } O = \bigcup \mathcal{A}\}.$$

Entonces $\tau_{\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}}$ es una topología para X tal que

$$\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$$

es un sistema de vecindades para $(X, \tau_{\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}})$.

Definición 1.29. Un espacio topológico X es de dimensión cero si tiene una base formada por conjuntos cerrado-abiertos.

Recordemos que dos espacios topológicos X y Y son homeomorfos, lo cual denotaremos por $X \cong Y$, si existe $f : X \rightarrow Y$ función tal que f es biyectiva, continua y f^{-1} es continua.

Definición 1.30. Diremos que una propiedad de espacios topológicos \mathcal{P} es una propiedad topológica si \mathcal{P} es invariante bajo homeomorfismos, esto es, para cualquier espacio topológico X si X tiene la propiedad \mathcal{P} , entonces todo espacio topológico homeomorfo a X tiene la propiedad \mathcal{P} .

Dada \mathcal{P} una propiedad topológica, para nosotros, será lo mismo decir que X tiene la propiedad \mathcal{P} o que X es un espacio \mathcal{P} ; y denotaremos este hecho como sigue

$$X \in [\mathcal{P}].$$

Definición 1.31. Sea \mathcal{P} una propiedad topológica. Diremos que \mathcal{P} se preserva bajo continuidad si para cualesquiera X y Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua, $X \in [\mathcal{P}]$ implica que $f[X] \in [\mathcal{P}]$.

Ejemplo 1.32. La propiedad de compacidad es una propiedad que se preserva bajo continuidad. Sean X y Y espacios topológicos y

$f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de $f[X]$, entonces existe \mathcal{U}' una familia de conjuntos abiertos en Y tales que

$$\mathcal{U} = \{A \cap f[X] : A \in \mathcal{U}'\}.$$

Por la continuidad de f se sigue que $\mathcal{V} = \{f^{-1}[A] : A \in \mathcal{U}'\}$ es una familia de conjuntos abiertos en X . Además, si $x \in X$, entonces existe $U \in \mathcal{U}'$ tal que $f(x) \in U \cap f[X]$. Luego, $x \in f^{-1}[U]$, por tanto, \mathcal{V} es una cubierta abierta de X . Puesto que X es un espacio compacto, entonces existen $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}'$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}[U_i].$$

Así,

$$f[X] = \bigcup_{i=1}^n (U_i \cap f[X]).$$

Ejemplo 1.33. La propiedad de Hausdorff no se preserva bajo continuidad. Sea X un conjunto de cardinalidad mayor a dos y consideramos

$$\begin{aligned} id_X : (X, \mathcal{P}(X)) &\longrightarrow (X, \{\emptyset, X\}) \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

la función identidad del espacio discreto de X al espacio indiscreto de X , entonces id_X es una función continua, pero $(X, \{\emptyset, X\})$ no es Hausdorff.

Un teorema importante sobre extensión de funciones continuas, además del Teorema de extensión de Tietze–Urysohn–Brouwer, es el siguiente.

Teorema 1.34. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ denso, Y un espacio topológico Hausdorff y compacto y $f : A \longrightarrow Y$ una función continua. Entonces para cualesquiera $F_1, F_2 \subseteq Y$ subconjuntos cerrados y ajenos, se cumple que $cl_X(f^{-1}[F_1]) \cap cl_X(f^{-1}[F_2]) = \emptyset$ si y solo si existe una función continua $F : X \longrightarrow Y$ tal que $F|_A = f$.

La demostración del teorema anterior se puede encontrar en [9].

Nuestro objetivo es hablar de espacios topológicos que cumplan la propiedad *celular* \mathcal{P} , donde \mathcal{P} es una propiedad topológica arbitraria (aunque después, nos fijaremos en algunas propiedades topológicas específicas), por tanto, es conveniente que adoptemos una terminología para referirnos a los espacios topológicos que tengan la propiedad \mathcal{P} .

Definición 1.35. *Sea \mathcal{P} una propiedad topológica, entonces $[\mathcal{P}]$ denotará a la clase de espacios topológicos que tienen la propiedad \mathcal{P} . Así, $X \in [\mathcal{P}]$ significa que X es un espacio topológico con la propiedad \mathcal{P} .*

Notemos que en general la colección $[\mathcal{P}]$, para \mathcal{P} una propiedad topológica, no es un conjunto. Por ejemplo, si \mathcal{P} es la propiedad de Hausdorff, entonces para cada conjunto X , el espacio topológico $(X, \mathcal{P}(X))$ es un espacio de Hausdorff. Por tanto, la colección $[\mathcal{P}]$ tiene que ser lo suficientemente grande para que *todo conjunto* esté dentro de $[\mathcal{P}]$. Lo anterior justifica que le demos el nombre de *clase*.

Denotaremos por T_i a los axiomas de separación de los espacios topológicos, por ejemplo, decir que X es un espacio topológico T_2 significa que X es un espacio Hausdorff.

Definición 1.36. *Sean X un espacio topológico y \mathcal{U} una familia de conjuntos abiertos, no vacíos. Decimos que \mathcal{U} es una familia celular si cualesquiera dos elementos de \mathcal{U} tienen intersección vacía.*

Además de las familias celulares, otros tipos de familias que se pueden definir en los espacios topológicos son las familias discretas.

Definición 1.37. *Sea X un espacio topológico. Una familia \mathcal{A} de subconjuntos de X es discreta si para cada $x \in X$ existe una vecindad U_x de x , en X , tal que $|\{A \in \mathcal{A} : U_x \cap A \neq \emptyset\}| \leq 1$.*

Observación 1. *Toda familia discreta de abiertos no vacíos es una familia celular. En efecto, sea \mathcal{A} es una familia discreta y sean $A, B \in \mathcal{A}$. Supongamos que $x \in A \cap B$. Note que para cualquier U vecindad de x se cumple que $x \in A \cap U$, así, toda vecindad de x interseca a A . Sin embargo, esto también ocurre para B . Luego, para cada vecindad U de x se cumple que $|\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}| > 1$, lo cual contradice que \mathcal{U} es una familia discreta.*

Definición 1.38. *Sea X un espacio topológico. Diremos que*

1. X tiene la propiedad CCC si toda familia celular es numerable.
2. X tiene la propiedad DCCC si toda familia discreta de conjuntos abiertos no vacíos es numerable.

Algunas propiedades topológicas importantes que vamos a estudiar frecuentemente son las propiedades del tipo cubiertas.

Definición 1.39. Sea X un espacio topológico. Diremos que

1. X es compacto (compact) si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.
2. X es Lindelöf (L) si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.

Definición 1.40. Una red para un espacio topológico X es una colección, \mathcal{N} , de subconjuntos de X tal que todo conjunto abierto es unión de elementos de \mathcal{N} .

Una propiedad topológica se puede heredar a ciertos tipos de espacios. Por ejemplo, es bien sabido que todo subconjunto cerrado de un espacio Lindelöf resulta ser Lindelöf. La propiedad de separabilidad es una propiedad hereditaria con respecto de subconjuntos abiertos. Y la propiedad de casi Lindelöf es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos [22].

Definición 1.41. Diremos que una propiedad \mathcal{P} es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos (respectivamente, abiertos o cerrados) si siempre que $X \in [\mathcal{P}]$ y Y es un subespacio cerrado-abierto (respectivamente, abierto o cerrado) de X , entonces $Y \in [\mathcal{P}]$.

Definición 1.42. Sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} propiedades topológicas. Diremos que \mathcal{Q} generaliza a \mathcal{P} si se cumple que

$$[\mathcal{P}] \subseteq [\mathcal{Q}],$$

es decir, siempre que X tiene la propiedad \mathcal{P} , entonces X tiene la propiedad \mathcal{Q} .

A continuación definiremos algunas funciones cardinales que vamos a ocupar a lo largo de la tesis.

Definición 1.43. *Sea X un espacio topológico.*

1. *El peso de X , denotada por $w(X)$, se define como sigue*

$$w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base para } X\} + \omega.$$

2. *La extensión de X , denotada por $e(X)$, se define como sigue*

$$e(X) = \text{sup}\{|E| : E \text{ es un subconjunto cerrado y discreto de } X\} + \omega.$$

3. *La celularidad de X , denotada por $c(X)$, se define como sigue*

$$c(X) = \text{sup}\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \text{ es una familia celular en } X\} + \omega.$$

4. *El peso de red de X , denotada por $nw(X)$, se define como sigue*

$$nw(X) = \text{mín}\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ es una red de } X\} + \omega.$$

5. *El grado de Lindelöf se define como sigue*

$$L(X) = \text{mín}\{\kappa : \forall(\mathcal{U} \text{ cubierta abierta}) \exists(\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa} \text{ cubierta de } X)\} + \omega.$$

6. *El grado de Lindelöf hereditario de X se define como*

$$hL(X) = \text{sup}\{L(Y) : Y \subseteq X\}.$$

Notemos que $c(X) = \omega$ si y solo si $X \in [CCC]$ y X es Lindelöf si y solo si $L(X) = \omega$.

Definición 1.44. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$.*

1. *Una familia \mathcal{V} de vecindades de x es llamada una pseudobase para x si $\bigcap \mathcal{V} = \{x\}$.*

2. *El pseudocarácter de x se define como*

$$\psi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es una pseudobase para } x\}.$$

3. *El pseudocarácter de X se define como*

$$\psi(X) = \text{sup}\{\psi(x, X) : x \in X\} + \omega.$$

Lema 1.45. *Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff. Entonces $\psi(X) \leq hL(X)$.*

Demostración: Sean $\kappa = hL(X)$, $x \in X$ y $\mathcal{V}_x = \{U \in \tau : x \in U\}$. Ya que X es Hausdorff, entonces $\{x\} = \bigcap \{cl(U) : U \in \mathcal{V}_x\}$. Entonces $X \setminus \{x\} = \bigcup \{X \setminus cl(U) : U \in \mathcal{V}_x\}$. Debido a que $hL(X) = \kappa$ y $\mathcal{U} = \{X \setminus cl(U) : U \in \mathcal{V}_x\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus \{x\}$, entonces existe $\{X \setminus cl(U_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ subcubierta abierta de \mathcal{U} . Así, $X \setminus \{x\} = \bigcup \{X \setminus cl(U_\alpha) : \alpha < \kappa\}$. Luego,

$$\{x\} \subseteq \bigcap \{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \bigcap \{cl(U_\alpha) : \alpha < \kappa\} = \{x\}.$$

Por tanto, $\psi(x, X) = \kappa$, pero esto ocurre para cada $x \in X$, así, $\psi(X) = \kappa$. \square

Definición 1.46. *Diremos que X es hereditariamente Lindelöf si cada subconjunto de X es Lindelöf.*

Notemos que X es hereditariamente Lindelöf si y solo si $hL(X) = \omega$.

Lema 1.47. *X es hereditariamente Lindelöf si y solo si cada subconjunto abierto de X es Lindelöf.*

Demostración: Es claro que si X es hereditariamente Lindelöf, entonces cada subconjunto abierto de X es Lindelöf. Supongamos que cada subconjunto abierto de X es Lindelöf y sea $A \subseteq X$. Veamos que A es Lindelöf, sea $\mathcal{U}' = \{O \cap A : O \in \mathcal{U}\}$ una cubierta abierta de A , donde \mathcal{U} es una familia de abiertos de X , entonces $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$. Sea $U = \bigcup \mathcal{U}'$, entonces es un abierto en X y \mathcal{U}' es una cubierta abierta de U , así, dado que U es Lindelöf, existe $\mathcal{V}' \in [\mathcal{U}']^{\leq \omega}$ tal que $U = \bigcup \mathcal{V}'$, luego $A = \bigcup \{O \cap A : O \in \mathcal{V}'\}$. \square

Definición 1.48. *Sea X un espacio topológico Hausdorff. El pseudocarácter Hausdorff de X , denotado por $H\psi(X)$, es el mínimo cardinal infinito κ tal que para cada $x \in X$ existe una colección de vecindades de x , $\mathcal{B}_x = \{V_{\alpha, x} : \alpha < \kappa\}$, que cumplen que si $x, y \in X$ y $x \neq y$, entonces existen $\alpha, \beta < \kappa$ tales que $V_{\alpha, x} \cap V_{\beta, y} = \emptyset$.*

Definición 1.49. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

1. Una g -función para X es una función $g : \omega \times X \rightarrow \tau$ tal que para cada $x \in X$ se cumple que $x \in g(n, x)$ y $g(n+1, x) \subseteq g(n, x)$ para cada $n \in \omega$.
2. Se dice que una g -función, para X , es simétrica si para cualesquiera $x, y \in X$ y $n \in \omega$ $y \in g(n, x)$ si y solo si $x \in g(n, y)$.

Se puede definir, de forma muy similar como en teoría de conjuntos, las nociones de filtros, ultrafiltros, etc. en topología. Al igual que antes, vamos a dar algunas definiciones y resultados que nos permitirán construir nuevos espacios topológicos. Aquellos lectores que deseen conocer más sobre estas nociones así como de los espacios H -cerrados, que definiremos más adelante, pueden consultar [3] y [2].

Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces τ es un subretículo de $\mathcal{P}(X)$.

Definición 1.50. *Un filtro abierto sobre el espacio (X, τ) es un τ -filtro.*

Proposición 1.51. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U} \subseteq \tau$ filtro abierto sobre X . Son equivalentes:*

1. \mathcal{U} es un ultrafiltro abierto sobre X .
2. Para cada conjunto abierto U , se cumple que $U \in \mathcal{U}$ ó $X \setminus \overline{U} \in \mathcal{U}$.

Ejemplo 1.52. *Sea (X, τ) es un espacio topológico.*

1. Si X es infinito \mathbf{T}_2 , entonces el conjunto $\{A \subseteq X : |X \setminus A| < \omega\}$, el filtro de Fréchet, es un filtro abierto sobre el espacio X .
2. Sea $x \in X$, entonces $\mathcal{F}(x) = \{U \in \tau : x \in U\}$ es un filtro abierto sobre el espacio X . En general, el filtro abierto generado por $x \in X$, $\mathcal{F}(x) = \{U \in \tau : x \in U\}$, no es un ultrafiltro abierto. Consideremos el espacio $X = \{0, 1\}$, con la topología $\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$. Entonces $\mathcal{F}(1) = \{X\}$. Sin embargo, $\{0\} \in \tau$, $\{0\} \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{F}(1)$ y $\{0\} \notin \mathcal{F}(1)$. Así, $\mathcal{F}(1)$ no es un ultrafiltro abierto.

Sean (X, τ) un espacio topológico y \mathcal{F} un filtro abierto sobre el espacio X . Si existe $x \in X$ tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$, entonces para cada $V \in \mathcal{F}$, $x \in V$. Luego, $x \in \bigcap_{V \in \mathcal{F}} V \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{F}} \bar{V}$. Así, si $\bigcap_{V \in \mathcal{F}} \bar{V} = \emptyset$, entonces no existe $x \in X$ tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$. Por lo anterior, a los filtros con intersección de clausuras vacías los llamaremos filtros abiertos libres.

Definición 1.53. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que \mathcal{F} , un filtro abierto sobre el espacio X , es un filtro abierto libre si $\bigcap_{V \in \mathcal{F}} \bar{V} = \emptyset$.*

Definición 1.54. *Sean \mathcal{F} filtro abierto sobre el espacio X y $x \in X$. Decimos que \mathcal{F} converge a x si para cada V , vecindad de x , se cumple que $V \in \mathcal{F}$. Además, decimos que \mathcal{F} es un filtro convergente en X si existe $x \in X$ tal que \mathcal{F} converge a x .*

Los filtro libres y los filtros convergentes están relacionados de la siguiente forma.

Teorema 1.55. *Sean X un espacio topológico y \mathcal{F} un ultrafiltro abierto sobre X . Entonces \mathcal{F} es libre si y solo si \mathcal{F} no converge en X .*

Si X es un espacio discreto, entonces las nociones sobre filtros abiertos coinciden con las nociones de filtros en $\mathcal{P}(X)$. Así, existe un ultrafiltro abierto libre sobre X . Por otro lado, existen espacios que no tienen ultrafiltros abiertos libres, los espacios H -cerrados.

Definición 1.56. *Un espacio topológico X es H -cerrado si para cualquier espacio topológico Hausdorff Y tal que $X \subseteq Y$, se cumple que X es cerrado en Y .*

El siguiente resultado nos da algunas condiciones (equivalentes) para determinar cuándo un espacio topológico X no tiene ultrafiltros libres.

Proposición 1.57. *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Son equivalentes:*

1. X es un espacio H -cerrado.
2. Para cualquier colección $\{V_i : i \in I\}$ de subconjuntos abiertos de X con la PIF, se cumple que $\bigcap_{i \in I} \bar{V}_i \neq \emptyset$.

3. *Todo ultrafiltro abierto sobre X converge.*
4. *Para cualquier cubierta abierta \mathcal{U} de X existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ tal que $X = \overline{\bigcup \mathcal{V}}$.*

No es difícil demostrar el siguiente resultado.

Proposición 1.58. *Si H es un espacio Hausdorff. Entonces X es compacto si y solo si X es regular y H -cerrado.*

Consecuentemente, si consideramos a $\omega + 1$ con la topología del orden, ya que $\omega + 1$ es un espacio compacto, entonces $\omega + 1$ es un espacio H -cerrado. Por tanto, $\omega + 1$ no tiene ultrafiltros abiertos libres.

Capítulo 2

Propiedades de cubiertas

Este capítulo está dedicado a establecer resultados topológicos adicionales, que normalmente no se ven en un primer curso de topología, pero que serán importantes cuando trabajemos con propiedades topológicas concretas.

Definición 2.1. *Sea X un espacio topológico. Decimos que*

1. *X es un espacio casi Lindelöf si para cada cubierta abierta \mathcal{U} existe una subcolección numerable \mathcal{V} ($\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$) tal que*

$$X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \bar{V}.$$

Denotaremos a la propiedad de casi Lindelöf como aL , por sus siglas en inglés almost Lindelöf.

2. *X es un espacio débilmente Lindelöf (wL) si toda cubierta abierta \mathcal{U} tiene una subcolección numerable \mathcal{V} ($\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$) tal que*

$$X = \overline{\bigcup \mathcal{V}}.$$

Denotaremos a la propiedad débilmente Lindelöf como wL , por sus siglas en inglés weakly Lindelöf.

De la definición de las propiedades L , aL y wL ; es evidente que la propiedad casi Lindelöf extiende a la propiedad Lindelöf y que la propiedad débilmente Lindelöf extiende a la propiedad casi Lindelöf.

En general, las tres propiedades anteriores son diferentes entre sí, como lo muestran los siguientes ejemplos. De momento, solo enunciaremos los ejemplos. En el capítulo siguiente, demostraremos que en efecto, estos espacios topológicos cumplen lo deseado.

Ejemplo 2.2. *Existe un espacio topológico casi Lindelöf que no es un espacio Lindelöf.*

Sea

$$X = [(\omega_1 + 1) \times (\omega + 1)] \setminus \{(\omega_1, n) : n \in \omega\}.$$

Para cada $x \in X$ sea $\mathcal{B}(x)$ como sigue:

1. si $x = (\alpha, n) \in \omega_1 \times \omega$, entonces sea

$$\mathcal{B}(x) = \{(\alpha, n)\};$$

2. si $x = (\alpha, \omega) \in \omega_1 \times \{\omega\}$. Para cada $n < \omega$ definamos $U_\alpha(n)$ como

$$U_\alpha(n) = \{(\alpha, m) : n \leq m \leq \omega\}.$$

Sea

$$\mathcal{B}(x) = \{U_\alpha(n) : n < \omega\}.$$

3. si $x = (\omega_1, \omega)$. Para cada $\alpha < \omega_1$ definamos $U_{\omega_1}(\alpha)$ como sigue

$$U_{\omega_1}(\alpha) = \{(\beta, n) : \alpha \leq \beta < \omega_1 \text{ y } n < \omega\} \cup \{(\omega_1, \omega)\}.$$

Sea

$$\mathcal{B}(x) = \{U_{\omega_1}(\alpha) : \alpha < \omega_1\}.$$

Entonces $\{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$ genera una topología para X . Este espacio topológico es casi Lindelöf pero no es un espacio Lindelöf.

Ejemplo 2.3. *Existe un espacio débilmente Lindelöf que no es casi Lindelöf.*

Sea $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ el plano de Sorgenfrey. Entonces $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ es un espacio débilmente Lindelöf, que no es casi Lindelöf.

Ejemplo 2.4. *Existe un espacio Lindelöf que no tiene la propiedad CCC.*

Consideremos $\omega_1 + 1$ con la topología del orden. Entonces $\omega_1 + 1$ es un espacio compacto, por tanto, Lindelöf. Por otro lado,

$$\{(\alpha, \alpha + 2) : \alpha < \omega_1\}$$

es una familia celular, no numerable, en $\omega_1 + 1$.

El siguiente resultado expone algunas de las formas en que se relacionan las propiedades Lindelöf, casi Lindelöf, débilmente Lindelöf, *CCC* y *DCCC*.

Proposición 2.5. 1. *Todo espacio separable tiene la propiedad CCC.*

2. $[CCC] \subseteq [wL]$.

3. $[wL] \subseteq [DCCC]$.

4. *Si X es un espacio casi Lindelöf y regular, entonces X es Lindelöf.*

5. *Todo espacio Lindelöf y regular es normal.*

Demostración:

1. Supongamos que X es un espacio separable y sea \mathcal{U} una familia celular en X . Sea $Q \subseteq X$ denso y numerable. Ya que D es denso, entonces para cada $U \in \mathcal{U}$ se cumple que $U \cap D \neq \emptyset$. Sea $f : \mathcal{U} \rightarrow D$ tal que $f(U) \in U \cap D$. Sean $U, V \in \mathcal{U}$, ya que \mathcal{U} es una familia celular, entonces $(U \cap D) \cap (V \cap D) = \emptyset$. Debido a que $f(U) \in U \cap D$, entonces $f(U) \neq f(V) \in V \cap D$ f es una función inyectiva. Por tanto, $|\mathcal{U}| \leq |D| = \omega$.

2. Supongamos que X es un espacio topológico tal que $X \notin [wL]$. Veamos que $X \notin [CCC]$. Ya que X no es débilmente Lindelöf, entonces existe \mathcal{U} cubierta abierta de X tal que la unión de cualquier subcolección numerable de \mathcal{U} no es densa en X . Construiremos una colección de familias de conjuntos abiertos $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$, \mathcal{U}_α es una familia celular en X , para cada $U \in \mathcal{U}_\alpha$ existe $V_U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V_U$ y \mathcal{U}_α es numerable y si $\beta < \alpha$, entonces $\mathcal{U}_\beta \subseteq \mathcal{U}_\alpha$.

Supongamos que para $\alpha < \omega_1$ se cumple que para cada $\beta < \alpha$, existe \mathcal{U}_β familia celular en X tal que para cada $U \in \mathcal{U}_\beta$ existe $V_U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V_U$, \mathcal{U}_β es numerable y si $\gamma < \beta < \alpha$, entonces $\mathcal{U}_\gamma \subseteq \mathcal{U}_\beta$. Además, supongamos que para cada $\beta < \alpha$ existe $U_\beta \in \mathcal{U}_\beta$ tal que si $\gamma < \beta < \alpha$, entonces $U_\gamma \neq U_\beta$.

Para cada $\beta < \alpha$ sea $\mathcal{U}'_\beta = \{V_U \in \mathcal{U} : U \in \mathcal{U}_\beta \text{ y } U \subseteq V_U\}$. Ya que $\alpha < \omega_1$, entonces $\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{U}'_\beta \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$, entonces $\overline{\bigcup(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{U}_\beta)} \subseteq \overline{\bigcup(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{U}'_\beta)} \neq X$. Sea $x_\alpha \in X \setminus \overline{\bigcup(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{U}_\beta)}$, entonces existe W_1 vecindad de x_α tal que $W_1 \cap \bigcup(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{U}_\beta) = \emptyset$. Ya que \mathcal{U} es una cubierta abierta de X , entonces existe $W_2 \in \mathcal{U}$ tal que $x_\alpha \in W_2$. Sea $U_\alpha = W_1 \cap W_2$. Entonces U_α es una vecindad de x_α tal que $U_\alpha \cap \bigcup(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{U}_\beta) = \emptyset$. Observemos que $U_\alpha \notin \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{U}_\beta$. Sea $\mathcal{U}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{U}_\beta \cup \{U_\alpha\}$. Notemos que para cada $U \in \mathcal{U}_\alpha$ existe $V_U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V_U$, \mathcal{U}_α es numerable y si $\beta < \alpha$, entonces $\mathcal{U}_\beta \subseteq \mathcal{U}_\alpha$. Además, si $U, V \in \mathcal{U}_\alpha$ diferentes, entonces ocurren dos casos. Existen $\beta, \gamma < \alpha$ tales que $U \in \mathcal{U}_\beta$ y $V \in \mathcal{U}_\gamma$; supongamos que $\beta < \gamma$, entonces $U, V \in \mathcal{U}_\gamma$ y \mathcal{U}_γ es una familia celular, por tanto, $U \cap V = \emptyset$. Por otro lado, supongamos que $V = U_\alpha$, entonces existe $\beta < \alpha$ tal que $U \in \mathcal{U}_\beta$. Pero $U_\alpha \cap \bigcup(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{U}_\beta) = \emptyset$, por tanto, $U \cap U_\alpha = \emptyset$. Así, \mathcal{U}_α es una familia celular en X .

Sea $\mathcal{V} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{U}_\alpha$. Es claro que \mathcal{V} es una familia celular en X . Más aún, ya que para cada $\alpha \neq \beta$ se cumple que $U_\alpha \neq U_\beta$. Entonces \mathcal{V} es una familia celular en X de cardinalidad ω_1 .

3. Supongamos que $X \notin [DCCC]$. Entonces existe \mathcal{A} familia discreta de conjuntos abiertos, no vacíos, la cuál no es numerable. Así, para cada $x \in X$, existe vecindad U_x , de x , tal que $|\{A \in \mathcal{A} : A \cap U_x \neq \emptyset\}| \leq 1$. Dado que \mathcal{A} es una familia celular, entonces supongamos, sin pérdida de generalidad, que si $x \in A \in \mathcal{A}$, entonces $U_x = A$.

Sea $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}$. Entonces \mathcal{U} es una cubierta abierta de X . Sea $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$. Ya que cada elemento de \mathcal{U} interseca a lo más un elemento de \mathcal{A} , entonces $\{A \in \mathcal{A} : \text{existe } U \in \mathcal{V} \text{ tal que } U \cap A \neq \emptyset\}$ es numerable. Ya que \mathcal{A} es no numerable, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap U = \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{V}$. Así, existe un conjunto abierto no vacío A tal que

$A \cap \bigcup \mathcal{V} = \emptyset$. Por tanto, ninguna subcolección numerable de \mathcal{U} es densa en X , es decir, $X \notin [wL]$.

4. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de X . Sea $x \in X$, entonces existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Ya que X es regular, entonces existe O_x , vecindad de x , tal que $x \in O_x \subseteq \overline{O_x} \subseteq U_x$.

Sea $\mathcal{V} = \{O_x : x \in X\}$. Entonces \mathcal{V} es una cubierta abierta de X . Dado que X es casi Lindelöf, entonces existe $\{O_{x_n} : x_n < \omega\} \in [\mathcal{V}]^{\leq \omega}$ tal que $X = \bigcup \{\overline{O_{x_n}} : n < \omega\}$. Dado que $\overline{O_{x_n}} \subseteq U_{x_n}$, entonces $X = \bigcup \{\overline{O_{x_n}} : n < \omega\} \subseteq \bigcup \{U_{x_n} : n < \omega\} \subseteq X$.

5. Sean E y F subconjuntos cerrados y ajenos de X . Por la regularidad de X , para cada $x \in E$ existen U_x , vecindad de x , tal que $\overline{U_x} \subseteq X \setminus F$.

Dado que E es un espacio de Lindelöf, pues E es un subconjunto cerrado de X y X es un espacio de Lindelöf, y $E \subseteq \bigcup \{U_x : x \in E\}$, entonces existe $\{x_n : n < \omega\} \subseteq E$ tal que $E \subseteq \bigcup_{n < \omega} U_{x_n}$ y para cada $n < \omega$ se cumple que $\overline{U_{x_n}} \cap F = \emptyset$.

Análogamente, podemos encontrar $\{y_n : n < \omega\} \subseteq F$ tales que $F \subseteq \bigcup_{n < \omega} V_{y_n}$ y para cada $n < \omega$ se cumple que $\overline{V_{y_n}} \cap E = \emptyset$.

Para cada $n < \omega$ definamos

$$E_n = U_{x_n} \setminus \overline{\bigcup_{i \leq n} V_{y_i}}$$

y

$$F_n = V_{y_n} \setminus \overline{\bigcup_{i \leq n} U_{x_i}}.$$

Claramente, E_n y F_n son conjuntos abiertos, para cada $n < \omega$.

Sea $n < \omega$, sabemos que si $1 \leq i \leq n$, entonces $\overline{V_{y_i}} \cap E = \emptyset$. Así,

$$\overline{\bigcup_{i \leq n} V_{y_i}} \cap E = \left(\bigcup_{i \leq n} \overline{V_{y_i}} \right) \cap E = \bigcup_{i \leq n} (\overline{V_{y_i}} \cap E) = \emptyset.$$

Por tanto, $E \subseteq X \setminus \overline{\bigcup_{i \leq n} V_{y_i}}$. Luego,

$$\begin{aligned}
 E &= \left(\bigcup_{n < \omega} U_{x_n} \right) \cap E \\
 &= \bigcup_{n < \omega} (U_{x_n} \cap E) \\
 &\subseteq \bigcup_{n < \omega} (U_{x_n} \cap (X \setminus \overline{\bigcup_{i \leq n} V_{y_i}})) \\
 &= \bigcup_{n < \omega} E_n.
 \end{aligned}$$

Análogamente se cumple que $F \subseteq \bigcup_{n < \omega} F_n$. Así, si $U = \bigcup_{n < \omega} E_n$ y $V = \bigcup_{n < \omega} F_n$, entonces U y V son abiertos tales que $E \subseteq U$ y $F \subseteq V$. Afirmamos que U y V son ajenos. Supongamos que $x \in U \cap V$, entonces existe $n, m < \omega$ tales que $x \in E_n$ y $x \in F_m$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $n < m$. Puesto que $x \in F_m = V_{y_m} \setminus \overline{\bigcup_{i \leq m} U_{x_i}}$, entonces $x \notin \overline{\bigcup_{i \leq m} U_{x_i}}$, sin embargo, ya que $x \in E_n \subseteq U_{x_n}$ y $n < m$, entonces $x \in \overline{\bigcup_{i \leq m} U_{x_i}}$, lo cual es una contradicción.

□

Recordemos que una propiedad topológica \mathcal{P} se preserva bajo uniones numerables si para cualquier espacio topológico Z , y cualquier $\{L_n : n \in \omega\}$ familia de subespacios topológicos de Z tal que para cada $n \in \omega$, $L_n \in [\mathcal{P}]$, entonces $\bigcup_{n \in \omega} L_n \in [\mathcal{P}]$. Y si para cualquier familia $\{X_n : n < \omega\}$, de espacios topológicos ajenos por pares tal que $X_n \in [\mathcal{P}]$ para cada $n < \omega$, se cumple que $\bigoplus_{n < \omega} X_n \in [\mathcal{P}]$, entonces decimos que \mathcal{P} se preserva bajo sumas numerables.

Es posible demostrar que las propiedades *Lindelöf*, *casi Lindelöf*, *débilmente Lindelöf* y *DCCC* cumplen lo siguiente.

Proposición 2.6. *Sea $\mathcal{P} \in \{L, aL, wL, DCCC\}$. Entonces se cumple*

1. \mathcal{P} se preserva bajo continuidad.

2. \mathcal{P} es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos.
Si $\mathcal{P} = L$, entonces \mathcal{P} es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrados.
3. \mathcal{P} se preserva bajo sumas numerables.

Demostración:

1. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Sea \mathcal{U} una colección de conjuntos abiertos en Y tal que $\mathcal{U}' = \{U \cap f[X] : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de $f[X]$. Entonces $\mathcal{V} = \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de X .
- a) Si $X \in [L]$, entonces existe $\{U_n : n < \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $X = \bigcup_{n < \omega} f^{-1}[U_n]$. Luego, $f[X] \subseteq \bigcup_{n < \omega} U_n$.
- b) Si $X \in [aL]$, entonces existe $\{U_n : n < \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $X = \bigcup_{n < \omega} f^{-1}[U_n]$. Ya que $f^{-1}[U_n] = f^{-1}[U_n \cap f[X]]$, entonces

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n < \omega} \overline{f^{-1}[U_n \cap f[X]]} \\ &\subseteq \bigcup_{n < \omega} f^{-1}[\overline{U_n \cap f[X]}], \end{aligned}$$

donde la última contención se sigue de la continuidad de f . Luego,

$$f[X] \subseteq \bigcup_{n < \omega} \overline{U_n \cap f[X]}.$$

Dado que $cl_{f[X]}(U_n \cap f[X]) = \overline{U_n \cap f[X]} \cap f[X]$, entonces $f[X] = \bigcup_{n < \omega} cl_{f[X]}(U_n \cap f[X])$. Por tanto, $f[X] \in [aL]$.

- c) Si $X \in [wL]$, entonces existe $\{U_n : n < \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que

$$X = \overline{\bigcup_{n < \omega} f^{-1}[U_n]}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 f[X] &= \overline{f\left[\bigcup_{n<\omega} f^{-1}[U_n]\right]} \\
 &\subseteq \overline{f\left[\bigcup_{n<\omega} f^{-1}[U_n]\right]} \\
 &= \bigcup_{n<\omega} \overline{f[f^{-1}[U_n]]} \\
 &\subseteq \bigcup_{n<\omega} U_n.
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f[X] = cl_{f[X]}\left(\bigcup_{n<\omega} U_n\right).$$

Supongamos ahora que $X \in [DCCC]$ y sea $\mathcal{U}' = \{U \cap f[X] : U \in \mathcal{U}\}$ una familia discreta de conjuntos abiertos no vacíos en $f[X]$. Entonces $\mathcal{V} = \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U}\}$ es una colección de conjuntos abiertos no vacíos en X . Afirmamos que \mathcal{V} es una familia discreta. Sea $x \in X$, entonces $f(x) \in f[X]$ y ya que \mathcal{U}' es una familia discreta en $f[X]$, entonces existe una vecindad de $f(x)$, V_x , en Y tal que $|\{U \in \mathcal{U} : V_x \cap U \cap f[X] \neq \emptyset\}| \leq 1$. Entonces $f^{-1}[V_x]$ es un abierto en X tal que $x \in f^{-1}[V_x]$ y si $U \in \mathcal{U}$ tal que $f^{-1}[V_x] \cap f^{-1}[U] \neq \emptyset$, entonces $V_x \cap U \cap f[X] \neq \emptyset$. Por tanto, \mathcal{V} es una familia discreta. Ya que $X \in [DCCC]$, entonces \mathcal{V} es numerable. Así, \mathcal{U}' es numerable.

2. Supongamos que $X \in [\mathcal{P}]$ y $Y \subseteq X$ cerrado-abierto.

a) Supongamos que $\mathcal{P} = L$. Sea $\mathcal{U}' = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$ una cubierta abierta de Y , con \mathcal{U} una colección de conjuntos abiertos en X . Dado que Y es cerrado, entonces $\mathcal{U} \cup \{X \setminus Y\}$ es una cubierta abierta de X . Por tanto, existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$ tal que $\mathcal{V} \cup \{X \setminus Y\}$ cubre a X . Es evidente que $\{U \cap Y : U \in \mathcal{V}\}$ es una cubierta abierta de Y .

b) Supongamos que $\mathcal{P} = aL$. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de Y . Dado que Y es un conjunto abierto, entonces $\mathcal{U} \cup$

$\{X \setminus Y\}$ es una cubierta abierta de X . Por tanto, existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$ tal que $X = \bigcup_{U \in \mathcal{V}} \overline{U} \cup \overline{X \setminus Y}$. Ya que $\overline{X \setminus Y} = X \setminus Y$, concluimos que $Y = \bigcup_{U \in \mathcal{V}} cl_Y(U)$.

- c) Supongamos que $\mathcal{P} = wL$. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de Y . Entonces $\mathcal{U} \cup \{X \setminus Y\}$ es una cubierta abierta de X . Por tanto, existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$ tal que $X = \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{V}} U \cup X \setminus Y} = \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{V}} U} \cup \overline{X \setminus Y}$. Concluimos que $Y = cl_Y(\bigcup_{U \in \mathcal{V}} U)$.
- d) Supongamos que $\mathcal{P} = DCCC$. Sea \mathcal{U} una familia discreta de conjuntos abiertos no vacíos de Y . Entonces \mathcal{U} es una familia de conjuntos abiertos no vacíos de X . Afirmamos que \mathcal{U} es una familia discreta en X . Sea $x \in X$; si $x \in Y$, entonces existe V_x abierto en X tal que $x \in V_x$ y $|\{U \in \mathcal{U} : U \cap V_x \neq \emptyset\}| \leq 1$; si $x \notin Y$, entonces $X \setminus Y$ es un conjunto abierto en Y tal que $x \in X \setminus Y$ y $X \setminus Y \cap U = \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Dado que $X \in [DCCC]$, entonces \mathcal{U} es numerable.

3. Sea $\{X_n : n < \omega\}$ una colección de espacios topológicos, ajenos por pares, tal que para cada $n < \omega$, $X_n \in [\mathcal{P}]$.

- a) Supongamos que $\mathcal{P} = L$. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de $\bigoplus_{n < \omega} X_n$. Para cada $n < \omega$ definamos $\mathcal{U}_n = \{U \cap X_n : U \in \mathcal{U}\}$. Entonces \mathcal{U}_n es una cubierta abierta de X_n , para cada $n < \omega$. Por tanto, para cada $n < \omega$, existe $\{U_{n,m} : m < \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $X_n = \bigcup_{m < \omega} (U_{n,m} \cap X_n)$. Luego, $X = \bigcup_{n,m < \omega} U_{n,m}$.
- b) Supongamos que $\mathcal{P} = aL$. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de $\bigoplus_{n < \omega} X_n$. Para cada $n < \omega$ definamos $\mathcal{U}_n = \{U \cap X_n : U \in \mathcal{U}\}$. Entonces \mathcal{U}_n es una cubierta abierta de X_n , para cada $n < \omega$. Por tanto, para cada $n < \omega$, existe $\{U_{n,m} : m < \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $X_n = \bigcup_{m < \omega} cl_{X_n}(U_{n,m} \cap X_n) = \bigcup_{m < \omega} [\overline{U_{n,m} \cap X_n} \cap X_n] \subseteq \bigcup_{m < \omega} \overline{U_{n,m}}$. Luego, $X = \bigcup_{n,m < \omega} \overline{U_{n,m}}$.
- c) Supongamos que $\mathcal{P} = wL$. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de $\bigoplus_{n < \omega} X_n$. Para cada $n < \omega$ definamos $\mathcal{U}_n = \{U \cap X_n : U \in \mathcal{U}\}$. Entonces \mathcal{U}_n es una cubierta abierta de X_n , para cada $n < \omega$. Por tanto, para cada $n < \omega$, existe

$\{U_{n,m} : m < \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $X_n = \text{cl}_{X_n}(\bigcup_{m < \omega} (U_{n,m} \cap X_n)) = \overline{\bigcup_{m < \omega} (U_{n,m} \cap X_n)} \cap X_n \subseteq \overline{\bigcup_{m < \omega} U_{n,m}}$. Luego, $X \subseteq \bigcup_{n < \omega} [\overline{\bigcup_{m < \omega} U_{n,m}}] \subseteq \overline{\bigcup_{n,m < \omega} U_{n,m}}$.

- d) Supongamos que $\mathcal{P} = \text{ccc}$. Sea \mathcal{U} una familia discreta de conjuntos abiertos no vacíos de $\bigoplus_{n < \omega} X_n$. Para cada $n < \omega$ definamos $\mathcal{U}_n = \{U \cap X_n : U \in \mathcal{U}\}$. Notemos que \mathcal{U}_n es una familia discreta en X_n , pues si $x \in X$, entonces existe V_x conjunto abierto en $\bigoplus_{n < \omega} X_n$ tal que $x \in V_x$ y V_x interseca a lo más a un elemento de \mathcal{U} . Entonces $V_x \cap X_n$ es una vecindad de x en X_n tal que $|\{U \in \mathcal{U} : V_x \cap U \cap X_n \neq \emptyset\}| \leq 1$. Por tanto, \mathcal{U}_n es una familia discreta. Dado que $X_n \in [DCCC]$, entonces cada familia \mathcal{U}_n es numerable, puede incluso ser vacía. Ya que cada $U \in \mathcal{U}$ es no vacía, entonces tiene que intersectar a X_n para algún $n < \omega$. Por tanto, \mathcal{U} tiene que ser numerable.

□

Notemos que si $\{X_n : n < \omega\}$ es una colección de subespacios topológicos de un espacio Y y consideramos a $X = \bigcup_{n < \omega} X_n$ con la topología del subespacio respecto de Y , entonces se cumple que: si U es un conjunto abierto en X , entonces $U \cap X_n$ es un conjunto abierto en X_n .

Proposición 2.7. *Sea $\mathcal{P} \in \{L, aL, wL\}$. Entonces la unión numerable de espacios \mathcal{P} es un espacio \mathcal{P} .*

Demostración: La demostración es similar a la del inciso 3, del resultado anterior. □

Como una consecuencia directa del resultado 1.57 y ya que $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$, entonces tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.8. *Si X es un espacio H -cerrado, entonces X es un espacio casi Lindelöf.*

Definición 2.9. *Un espacio topológico X es llamado numerablemente compacto si toda cubierta abierta numerable de X contiene una subcubierta finita.*

Un ejemplo de un espacio numerablemente compacto, que no es compacto es ω_1 con la topología del orden.

Proposición 2.10. *Si X es compacto y Y es numerablemente compacto, entonces $X \times Y$ es numerablemente compacto.*

Demostración: Sea $\mathcal{U} = \{U_n : n < \omega\}$ una cubierta abierta numerable de $X \times Y$. Para cada $y_0 \in Y$ sea $X_{y_0} = \{(x, y_0) : x \in X\}$. Es claro que para cada $y \in Y$, X_y es isomorfo a X . Así, X_y es un espacio compacto. Para cada $F \in [\omega]^{<\omega}$ definamos $O_F = \{y \in Y : X_y \subseteq \bigcup_{n \in F} U_n\}$.

Afirmamos que para cada $F \in [\omega]^{<\omega}$, O_F es un conjunto abierto en Y . Supongamos que $y \in O_F$, entonces $X_y \subseteq \bigcup_{n \in F} U_n$. Así, para cada $x \in X$, existe $m \in F$ tal que $(x, y) \in U_m$. Ya que U_m es abierto en $X \times Y$, entonces existen A_x , conjunto abierto en X , y B_x , conjunto abierto en Y , tales que $(x, y) \in A_x \times B_x \subseteq U_m$. Luego,

$$X_y \subseteq \bigcup_{x \in X} A_x \times B_x \subseteq \bigcup_{n \in F} U_n.$$

Ya que X_y es compacto, entonces existen x_1, \dots, x_n tales que

$$X_y \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_{x_i} \times B_{x_i} \subseteq \bigcup_{n \in F} U_n.$$

Sea $V = \bigcap_{i=1}^n B_{x_i}$, entonces V es abierto en Y . Ya que para cada $1 \leq i \leq n$ se cumple que $(x_i, y) \in A_{x_i} \times B_{x_i}$, entonces $y \in \bigcap_{i=1}^n B_{x_i} = V$. Finalmente, veamos que $V \subseteq O_F$. Sean $y' \in V$ y $x \in X$. Entonces existe $1 \leq i \leq n$ tal que $(x, y) \in A_{x_i} \times B_{x_i}$, así, $x \in A_{x_i}$. Ya que $y' \in \bigcap_{i=1}^n B_{x_i}$, entonces $(x, y') \in A_{x_i} \times B_{x_i}$. Por tanto, $X_{y'} \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_{x_i} \times B_{x_i}$. Concluimos que V es un conjunto abierto tal que $y \in V \subseteq O_F$.

Afirmamos que $\{O_F : F \in [\omega]^{<\omega}\}$ es una cubierta abierta de Y . Sea $y \in Y$, entonces $\{U_n \cap X_y : n < \omega\}$ es una cubierta abierta de X_y y dado que X_y es compacto, entonces existe $F \in [\omega]^{<\omega}$ tal que $X_y \subseteq \bigcup_{n \in F} U_n$. Por tanto, $y \in O_F$.

Dado que Y es numerablemente compacto y $\{O_F : F \in [\omega]^{<\omega}\}$ es una cubierta abierta numerable, entonces existen $F_1, \dots, F_n \in [\omega]^{<\omega}$ tales que $Y = \bigcup_{i=1}^n O_{F_i}$. Sea $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$, entonces $F \in [\omega]^{<\omega}$.

Afirmamos que $X \times Y = \bigcup_{n \in F} U_n$. Sea $(x, y) \in X \times Y$. Entonces existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $y \in O_{F_i}$. Entonces $(x, y) \in X_y \subseteq \bigcup_{n \in F_i} U_n$. Por tanto, existe $n \in F_i \subseteq F$ tal que $(x, y) \in U_n$. \square

Definición 2.11. *X tiene la propiedad DFCC si toda familia discreta de conjuntos abiertos no vacíos es finita.*

Es claro que todo espacio si $X \in [DFCC]$, entonces $X \in [DCCC]$.

Definición 2.12. *Sea X un conjunto, \mathcal{U} una familia de subconjuntos de X y A un subconjunto de X. Definimos la estrella de A respecto de \mathcal{U} como sigue*

$$st(A, \mathcal{U}) = \bigcup \{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Además, definimos la estrella-n recursivamente como sigue:

1. $st^1(A, \mathcal{U}) = st(A, \mathcal{U})$.
2. $st^{n+1}(A, \mathcal{U}) = st(st^n(A, \mathcal{U}), \mathcal{U})$.

Definición 2.13. *Sea \mathcal{P} una propiedad topológica. Diremos que X, un espacio topológico, es estrella \mathcal{P} ($st \mathcal{P}$) si para cada cubierta abierta \mathcal{U} , de X, existe $A \subseteq X$ subespacio de X tal que $A \in [\mathcal{P}]$ y*

$$st(A, \mathcal{U}) = X.$$

Observación 2. *Sean \mathcal{P} una propiedad topológica y $X \in [\mathcal{P}]$, entonces $X \in [st \mathcal{P}]$.*

Demostración: Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de X. Ya que $X \in \mathcal{P}$ solo resta notar que $st(X, \mathcal{U}) = X$. Sin embargo, ya que para cada $x \in X$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$, entonces $U \in \{U \in \mathcal{U} : U \cap X \neq \emptyset\}$, así, $st(X, \mathcal{U}) = X$. \square

Definición 2.14. *Sean $n \in \omega$ y X un espacio topológico.*

1. *Diremos que X es compacto n-estrella (Lindelöf n-estrella) si para cualquier cubierta abierta \mathcal{U} de X existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ ($\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$) tal que*

$$st^n(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U}) = X.$$

2. Diremos que X es fuertemente compacto n -estrella (fuertemente Lindelöf n -estrella) si para toda cubierta abierta \mathcal{U} de X existe $B \in [X]^{<\omega}$ ($B \in [X]^{\leq\omega}$) tal que

$$st^n(B, \mathcal{U}) = X.$$

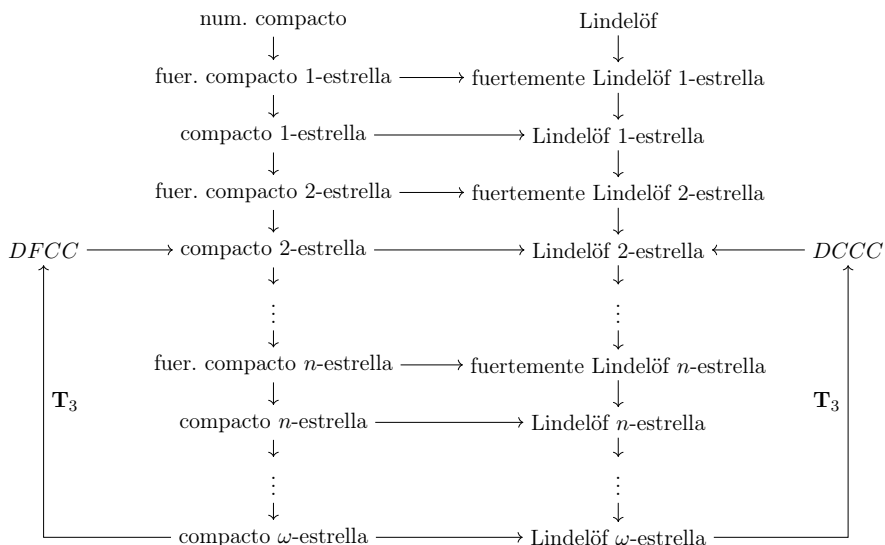
3. Diremos que X es compacto ω -estrella (Lindelöf ω -estrella) si para cualquier cubierta abierta \mathcal{U} de X existen $n \geq 1$ y $B \in [X]^{<\omega}$ ($B \in [X]^{\leq\omega}$) tal que

$$st^n(B, \mathcal{U}) = X.$$

La relación entre estos tipos de espacios está establecida en el siguiente lema. La demostración de este lema se puede encontrar en [7].

- Lema 2.15.** 1. Todo espacio numerablemente compacto (Lindelöf) es fuertemente compacto 1-estrella (fuertemente Lindelöf 1-estrella).
2. Todo espacio fuertemente compacto n -estrella (fuertemente Lindelöf n -estrella) es compacto n -estrella (Lindelöf n -estrella).
3. Todo espacio compacto n -estrella (Lindelöf n -estrella) es fuertemente compacto $n+1$ -estrella (fuertemente Lindelöf $n+1$ -estrella).
4. Todo espacio (fuertemente) compacto n -estrella es compacto ω -estrella.
5. Todo espacio (fuertemente) Lindelöf n -estrella es Lindelöf ω -estrella.
6. Si X es DFCC (DCCC), entonces X es compacto 2-estrella (Lindelöf 2-estrella).
7. Si X es compacto ω -estrella (Lindelöf ω -estrella) y T_3 , entonces $X \in [DFCC]$ ($X \in [DCCC]$).

El resultado anterior se puede escribir como el siguiente diagrama [7].



Observación 3. *Supongamos que X un espacio topológico estrella Lindelöf (st L) y sea \mathcal{U} una cubierta abierta de X , entonces existe $L \subseteq X$, Lindelöf, tal que $st(L, \mathcal{U}) = X$. Dado que $L \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ y L es Lindelöf, entonces existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$ tal que $L \subseteq \bigcup \mathcal{V}$, por tanto, $X = st(L, \mathcal{U}) \subseteq st(\bigcup \mathcal{V}, \mathcal{U}) \subseteq X$. Por tanto, todo espacio estrella Lindelöf es Lindelöf 1-estrella.*

Capítulo 3

Ejemplos de espacios topológicos

En esta sección presentaremos ejemplos de espacios topológicos que satisfacen ciertas propiedades topológicas que nos serán de utilidad más adelante. En esta sección, a menos que se diga lo contrario, X representará un espacio topológico infinito.

3.1. La línea de Sorgenfrey

Sea \mathbb{R} el conjunto de los números reales y sea

$$\mathcal{S} = \{[a, b) : a < b \text{ y } a, b \in \mathbb{R}\},$$

donde $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$. Notemos que:

1. Si $[a_1, b_1), [a_2, b_2) \in \mathcal{S}$ y $x \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, entonces definamos $a = \max\{a_1, a_2\}$ y $b = \min\{b_1, b_2\}$. Si $y \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, entonces $a \leq y < b$. Por otro lado, si $y \in [a, b)$, entonces $a_1, a_2 \leq a \leq y < b \leq b_1, b_2$, por tanto, $[a, b) \subseteq [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$. Así, $[a, b) = [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$.
2. Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces $x \in [x, x+1) \in \mathcal{S}$. Así, $\mathbb{R} = \bigcup \mathcal{S}$.

Ya que \mathcal{S} satisface la condición 1 de la Proposición 1.28, entonces \mathcal{S} genera una topología para \mathbb{R} de tal forma que \mathcal{S} es una base para dicho espacio topológico. Al espacio topológico, con la topología generada por \mathcal{S} como base, lo llamaremos la **Línea de**

Sorgenfrey y lo denotaremos por \mathbb{S} . Al producto del espacio topológico \mathbb{S} con sí mismo, $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$, le llamaremos el **Plano de Sorgenfrey**.

De ahora en adelante, y a menos que se diga lo contrario, cuando hablemos de \mathbb{R} nos estaremos refiriendo al espacio topológico euclidiano.

El siguiente resultado proporciona algunas propiedades básicas de la línea de Sorgenfrey.

Proposición 3.1. 1. *La topología de la línea de Sorgenfrey, \mathbb{S} , es más fina que la topología euclídeana de \mathbb{R} .*

2. *Todo subconjunto denso en \mathbb{R} es un subconjunto denso en \mathbb{S} .*

3. *\mathbb{S} es un espacio de dimensión cero.*

4. *\mathbb{S} es un espacio Lindelöf.*

5. *\mathbb{S} es T_4 .*

6. *$D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio cerrado discreto del plano de Sorgenfrey.*

7. *$\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ no es un espacio Lindelöf. Más aún, $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ no es un espacio casi Lindelöf.*

8. *\mathbb{S} es primero numerable y separable pero no es segundo numerable.*

9. *El plano de Sorgenfrey es un espacio T_3 débilmente Lindelöf.*

Demostración:

1. Notemos que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, se tiene que

$$(a, b) = \bigcup_{n < \omega} [a + \frac{1}{n}, b).$$

Ya que para cada $n < \omega$, $[a + \frac{1}{n}, b)$ es abierto en \mathbb{S} , entonces concluimos (a, b) es abierto en \mathbb{S} . Así, dado que todo básico de \mathbb{R} es abierto en \mathbb{S} , entonces concluimos que la topología de la línea de Sorgenfrey es más fina que la topología euclidiana.

2. Supongamos que $D \subseteq \mathbb{R}$ es denso en \mathbb{R} . Sea $[a, b) \in \mathcal{S}$, un abierto básico arbitrario no vacío, de \mathbb{S} . Entonces $(a, b) \subseteq [a, b)$ es un abierto en \mathbb{R} , por tanto, $\emptyset \neq (a, b) \cap D \subseteq [a, b) \cap D$.
3. Notemos que para cualquier $a \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a - n, a) \text{ y } [a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, a + n).$$

Es decir, $(-\infty, a)$ y $[a, \infty)$ son abiertos en \mathbb{S} . Por tanto,

$$\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$$

es abierto en \mathbb{S} . Por tanto, \mathcal{S} es una base de \mathbb{S} que consta de conjuntos cerrado-abiertos de \mathbb{S} .

4. Veamos primero que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ $[a, b)$ es un espacio de Lindelöf. Sea \mathcal{U} una familia de abiertos en \mathbb{S} tales que $[a, b) \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Sea

$$A = \{x \in (a, b) : \text{existe } \mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega} \text{ tal que } [a, x) \subseteq \bigcup \mathcal{V}\}.$$

Notemos que $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente, por b . Además, ya que $a \in [a, b)$, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ y $a < b' \in \mathbb{R}$ tal que $[a, b') \subseteq U$, por tanto, $A \neq \emptyset$. Sea $\alpha = \sup A$. Notemos que $\alpha \in A$, pues sea $\{a_n\}_{n \in \omega}$ una sucesión, en \mathbb{R} , creciente y convergente a α , con $a < a_0$ y $a_n < \alpha$ para cada $n < \omega$. Ya que $a_n < \alpha$, entonces para cada $n \in \omega$ existe $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$ tal que $[a, a_n) \subseteq \bigcup \mathcal{V}_n$. Entonces $[a, \alpha) \subseteq \bigcup_{n < \omega} \bigcup \mathcal{V}_n$. Así, $\alpha \in A$. Por otro lado, si $\alpha < b$, entonces existen $U_\alpha \in \mathcal{U}$ y $\alpha < b' \in \mathbb{R}$ tales que $[\alpha, b') \subseteq U_\alpha$. Por tanto, $b' \in A$, lo cual contradice que α es el supremo de A . Consecuentemente, $\alpha = b$.

Por lo anterior y ya que \mathbb{R} es unión numerable de elementos de \mathcal{S} ,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n),$$

entonces concluimos que \mathbb{R} es un espacio de Lindelöf.

5. Ya que \mathbb{R} es Hausdorff, entonces \mathbb{S} es Hausdorff. Ya se demostró que \mathbb{S} es Lindelöf, por tanto, si mostramos que \mathbb{S} es un espacio regular, entonces \mathbb{S} resultará ser un espacio normal. Sea $F \subseteq \mathbb{S}$ cerrado y $a \notin F$, entonces existe $a < b \in \mathbb{R}$ tal que $[a, b] \subseteq \mathbb{S} \setminus F$. Ya que $[a, b]$ es cerrado-abierto y $F \subseteq \mathbb{S} \setminus [a, b]$, entonces si $U = [a, b]$ y $V = \mathbb{S} \setminus [a, b]$, entonces $a \in U$, $F \subseteq V$, U y V son abiertos y $U \cap V = \emptyset$.

6. Primero veamos que D es cerrado. Ya que $\mathbb{R}^2 \setminus D$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 , entonces $\mathbb{R}^2 \setminus D$ es abierto en \mathbb{S} , por el inciso 1. Así, D es cerrado en \mathbb{S} .

Por otro lado, para cada $x \in \mathbb{R}$, $[x, x+1) \times [-x, -x+1)$ es una vecindad de $(x, -x)$, en $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$, tal que si $(y, -y) \in [x, x+1) \times [-x, -x+1) \cap D$, entonces $x \leq y$ y $-x \leq -y$. Así, $x = y$. Por tanto,

$$[x, x+1) \times [-x, -x+1) \cap D = \{(x, -x)\}.$$

7. Supongamos que $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ es Lindelöf. Dado que $D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ es cerrado y discreto, por el inciso anterior, entonces D es un espacio Lindelöf y discreto. Así, $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ es una cubierta abierta de D . Ya que D es Lindelöf, entonces existen $x_n \in \mathbb{R}$ tales que $D = \bigcup_{n < \omega} \{(x_n, -x_n)\}$. Sin embargo, ya que D es no numerable, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq x_n$ para cada $n < \omega$. Por tanto, $(x, -x) \in D \setminus \bigcup_{n < \omega} \{(x_n, -x_n)\}$. Por tanto, $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ no es un espacio Lindelöf.

Por la Proposición 2.5 inciso 4, dado que $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ es regular, entonces si $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ es un espacio casi Lindelöf, entonces concluimos que $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ es un espacio Lindelöf, lo cual es una contradicción.

8. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $[a, b] \in \mathcal{S}$ tal que $x \in [a, b]$. Entonces existe $0 < n \in \omega$ tal que $x + \frac{1}{n} < b$. Por tanto, $x \in [x, x + \frac{1}{n}] \subseteq [a, b]$. Así, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(x) = \{[x, x + \frac{1}{n}] : 0 < n \in \omega\}$ es una base local de vecindades para x .

Ya que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , entonces \mathbb{Q} es denso en \mathbb{S} . Por tanto, \mathbb{Q} es un denso numerable en \mathbb{S} .

Supongamos por contradicción que \mathbb{S} es segundo numerable. Entonces $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ es segundo numerable. Luego, $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ es Lindelöf, lo cual contradice el inciso anterior.

9. Ya que \mathbb{S} es \mathbf{T}_3 , entonces $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ es \mathbf{T}_3 . Dado que $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ tiene un denso numerable, entonces $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ tiene la propiedad de la CCC. Así, por la Proposición 2.5 inciso 2, $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ es débilmente Lindelöf.

□

3.2. El duplicado de Alexandroff

Dado un espacio topológico T_1 , (X, τ) , sea

$$AD(X) = X \times \{0, 1\}.$$

Para cada $p \in AD(X)$ definimos la colección $\mathcal{B}(p) \subseteq \mathcal{P}(AD(X)) \setminus \{\emptyset\}$ como sigue:

1. Si $p = (x, 0)$, con $x \in X$, sea

$$\mathcal{B}(p) = \{(U \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\} : U \in \tau \text{ y } x \in U\}.$$

2. Si $p = (x, 1)$, con $x \in X$, sea

$$\mathcal{B}(p) = \{\{p\}\}.$$

La colección de $\{\mathcal{B}(p)\}_{p \in AD(X)}$ satisface las condiciones siguientes: para cada $p \in AD(X)$

1. $\mathcal{B}(p) \neq \emptyset$ y si $U \in \mathcal{B}(p)$, entonces $p \in U$;
2. si $U \in \mathcal{B}(q)$ y $p \in U$, entonces existe $V \in \mathcal{B}(p)$ tal que $V \subseteq U$ (note que es necesario que X sea T_1 para que se cumpla esta condición);
3. si $U, V \in \mathcal{B}(p)$, entonces existe $W \in \mathcal{B}(p)$ tal que $W \subseteq U \cap V$.

Por lo tanto, $\{\mathcal{B}(p)\}_{p \in AD(X)}$ genera una topología, $\tau_{AD(X)}$, en $AD(X)$ tal que $\{\mathcal{B}(p)\}_{p \in AD(X)}$ es un sistema de vecindades. Al espacio topológico $(AD(X), \tau_{AD(X)})$ le llamaremos el duplicado de Alexandroff del espacio (X, τ) .

Proposición 3.2. *Sea X un espacio topológico.*

1. Para cada $y \in X$, $\{(y, 1)\}$ es un conjunto cerrado-abierto.
2. Si $Y \subseteq X \times \{1\} \subseteq AD(X)$, entonces Y es abierto en $AD(X)$.
3. X y $X \times \{0\} \subseteq AD(X)$, con la topología del subespacio, son homeomorfos.

Demostración:

1. Por definición, $\{(y, 1)\}$ es abierto. Para ver que $\{(y, 1)\}$ es cerrado solo hace falta notar que

$$AD(X) \setminus \{(y, 1)\} = (X \times \{0, 1\}) \setminus \{(y, 1)\} \in \mathcal{B}((y, 0)).$$

2. Sea $Y \subseteq X \times \{1\}$. Entonces para cada $q \in Y$, existe $y_q \in X$ tal que $q = (y_q, 1)$, entonces $q \in \{q\} \subseteq Y$. Así, todos los puntos en Y son puntos interiores de Y .
3. Sean $f : X \rightarrow X \times \{0\}$ definida por $f(x) = (x, 0)$ y $g : X \times \{0\} \rightarrow X$ definida por $g((x, 0)) = x$. Notemos que $\{U \cap (X \times \{0\}) : U \in \mathcal{B}(p) \text{ y } p \in AD(X)\} = \{U \times \{0\} : U \in \tau\}$ es base para $X \times \{0\}$. Dado que para cada $U \in \tau$, $f^{-1}[U \times \{0\}] = U$, entonces f es continua. Por otro lado, para cada $U \in \tau$, $g^{-1}[U] = U \times \{0\}$, así, g es continua. Finalmente, dado que $f \circ g = id_{X \times \{0\}}$ y $g \circ f = id_X$, entonces f es un homeomorfismo.

□

Proposición 3.3. *Si X es un espacio T_4 , entonces $AD(X)$ es un espacio T_4 .*

Demostración: Primero veamos que $AD(X)$ es un espacio T_1 . Sean $p, q \in AD(X)$, con $p \neq q$. Veamos que existen U, V abiertos en $AD(X)$ tales que $x \in U \setminus V$ y $y \in V \setminus U$.

1. Supongamos que $p = (x, 1)$ y $q = (y, 1)$, entonces $U = \{p\}$ y $V = \{q\}$ satisfacen lo requerido.
2. Supongamos que $p = (x, 0)$ y $q = (y, 1)$. Sea $V = \{q\}$, entonces V es cerrado-abierto en $AD(X)$. Entonces $U = [(X \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\}] \setminus V$ es abierto en $AD(X)$ y $p \in U \setminus V$ y $q \in V \setminus U$.
3. Supongamos que $p = (x, 0)$ y $q = (y, 0)$. Ya que X es \mathbf{T}_1 , entonces existen U', V' abiertos en X tales que $x \in U' \setminus V'$ y $y \in V' \setminus U'$. Entonces $U = (U' \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\}$ y $V = (V' \times \{0, 1\}) \setminus \{(y, 1)\}$ son abiertos en X que satisfacen lo deseado.

Veamos ahora que si $E, F \subseteq AD(X)$ cerrados y ajenos, entonces existen abiertos ajenos U, V en $AD(X)$ tales que $E \subseteq U$ y $F \subseteq V$. Ya que E y F son subconjuntos cerrados y ajenos en $AD(X)$, entonces $E \cap (X \times \{0\}), F \cap (X \times \{0\})$ son subconjuntos cerrados y ajenos en $X \times \{0\}$. Entonces existen $E', F' \subseteq X$ tales que $E \cap (X \times \{0\}) = E' \times \{0\}$ y $F \cap (X \times \{0\}) = F' \times \{0\}$. Entonces $f^{-1}[E \cap (X \times \{0\})] = E', f^{-1}[F \cap (X \times \{0\})] = F'$ son subconjuntos cerrados y ajenos en X , donde $f : X \rightarrow X \times \{0\}$ tal que $f(x) = (x, 0)$. Entonces existen $U', V' \in \tau$ tales que $E' \subseteq U', F' \subseteq V'$ y $U' \cap V' = \emptyset$. Luego,

$$E' \times \{0\} \subseteq (U' \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\},$$

con $x \in U'$ arbitrario, y

$$F' \times \{0\} \subseteq (V' \times \{0, 1\}) \setminus \{(y, 1)\},$$

con $y \in V'$ arbitrario. Sean

$$U = [(U' \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\}] \cap [AD(X) \setminus F]$$

y

$$V = [(V' \times \{0, 1\}) \setminus \{(y, 1)\}] \cap [AD(X) \setminus E].$$

Ya que $U' \cap V' = \emptyset$, entonces $U \cap V = \emptyset$; además, $E \cap (X \times \{0\}) \subseteq U$ y $F \cap (X \times \{0\}) \subseteq V$ y U y V son conjuntos abiertos en $AD(X)$. Por tanto,

$$E = [E \cap (X \times \{0\})] \cup [E \cap (X \times \{1\})] \subseteq U \cup [E \cap (X \times \{1\})],$$

y dado que $E \cap (X \times \{1\}) \subseteq X \times \{1\}$, entonces $E \cap (X \times \{1\})$ es un conjunto abierto en $AD(X)$, así, $A = U \cup [E \cap (X \times \{1\})]$ es conjunto abierto en $AD(X)$. Análogamente, sea $B = V \cup [F \cap (X \times \{1\})]$, entonces B es abierto en $AD(X)$ y

$$F \subseteq B.$$

Finalmente, ya que

- $U \cap V = \emptyset$,
- $U \cap [F \cap (X \times \{1\})] \subseteq (AD(X) \setminus F) \cap F = \emptyset$,
- $[E \cap (X \times \{1\})] \cap V \subseteq E \cap (AD(X) \setminus E) = \emptyset$, y
- $[E \cap (X \times \{1\})] \cap [F \cap (X \times \{1\})] \subseteq E \cap F = \emptyset$,

entonces $A \cap B = \emptyset$.

□

Proposición 3.4. *Si X es un espacio compacto y $Y \subseteq X$, entonces $(X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}) \subseteq AD(X)$ es un espacio compacto.*

Demostración: Sea \mathcal{U}' una familia de conjuntos abiertos, en $AD(X)$, tales que $(X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}) \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$. Para cada $x \in X$, existe un abierto $U'_x \in \mathcal{U}'$ tal que $(x, 0) \in U'_x$, entonces existe $U_x \in \tau$ tal que $x \in U_x \times \{0, 1\} \setminus \{(x, 1)\} \subseteq U'_x$. Sea $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}$. Entonces \mathcal{U} es una cubierta abierta de X y X es compacto, así, existen $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Si $x \in Y \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, entonces existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in U_{x_i}$ y, por tanto, $(x, 1) \in U_{x_i} \times \{0, 1\} \setminus \{(x_i, 1)\} \subseteq U'_{x_i}$. Luego, $(X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}) \setminus \{(x_i, 1) : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n U'_{x_i}$. Dado que $\{U'_{x_i} : 1 \leq i \leq n\}$ cubre a $X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$, excepto posiblemente a una cantidad finita de puntos, entonces concluimos que $X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$ es compacto.

□

Corolario 3.5. *Si X es un espacio compacto, entonces $AD(X)$ es un espacio compacto.*

3.3. La G_κ -modificación

Sean (X, τ_X) un espacio topológico y κ un cardinal infinito. Definamos

$$\mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau_X)} = \left\{ \bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \in [\tau_X]^{\leq \kappa} \right\}.$$

Sea $A \in \tau_X$. Si definamos $\mathcal{A} = \{A\}$, entonces $A = \bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau_X)}$. Por tanto, $\tau_X \subseteq \mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau_X)}$.

Proposición 3.6. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Entonces $\mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau_X)}$ genera una topología para X de tal forma que $\mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau_X)}$ es una base para dicha topología.*

Demostración:

1. Sean $A, B \in \mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau_X)}$, entonces existen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in [\tau_X]^{\leq \kappa}$ tales que $A = \bigcap \mathcal{A}$ y $B = \bigcap \mathcal{B}$. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{C} \in [\tau_X]^{\leq \kappa}$ y, por tanto, $\bigcap \mathcal{C} \in \mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau_X)}$. Notemos que $\bigcap \mathcal{C} = \bigcap \mathcal{A} \cap \bigcap \mathcal{B}$.
2. Ya que $\tau_X \subseteq \mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau_X)}$, entonces $X = \bigcup \tau_X \subseteq \bigcup \mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau_X)} \subseteq X$.

□

Denotaremos por $\tau_{G_\kappa(X, \tau_X)}$ a la topología generada por $\mathcal{B}_{G_\kappa(X, \tau_X)}$. Y al espacio $(X, \tau_{G_\kappa(X, \tau_X)})$ le llamaremos la G_κ -modificación del espacio (X, τ_X) . Si no hay riesgo de confusión escribiremos simplemente (X, τ_{G_κ}) . En caso de que $\kappa = \omega$, entonces escribiremos $(X, \tau_{G_\delta(X, \tau_X)})$ y lo llamaremos la G_δ -modificación el espacio (X, τ_X) .

Proposición 3.7. *Sea X un espacio topológico y \mathcal{B} una base para X . Entonces $\mathcal{B}' = \left\{ \bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \in [\mathcal{B}]^{\leq \kappa} \right\}$ es una base para la G_κ -modificación del espacio X .*

Demostración: Claramente \mathcal{B}' es una familia de subconjuntos abiertos de la G_κ -modificación de X . Sean O un conjunto abierto en la G_κ -modificación de X y $x \in O$, entonces existe $\mathcal{A} \in [\tau]^{\leq \kappa}$ tal que $x \in \bigcap \mathcal{A} \subseteq O$. Dado que \mathcal{B} es una base para X , entonces para cada $A \in \mathcal{A}$, existe $C_A \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C_A \subseteq A$. Sea $\mathcal{C} =$

$\{C_A : A \in \mathcal{A}\}$, entonces $\mathcal{C} \in [\mathcal{B}]^{\leq \kappa}$. Así, $x \in \bigcap \mathcal{C} \subseteq \bigcap \mathcal{A} \subseteq O$ y $\bigcap \mathcal{C} \in \mathcal{B}'$. \square

Otra característica importante de los G_κ -modificaciones es que nos da una condición necesaria sobre el espacio X para que su G_κ -modificación sea un espacio débilmente Lindelöf.

Proposición 3.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico de dimensión cero. Si la G_κ -modificación del espacio X es un espacio débilmente Lindelöf, entonces (X, τ) es un espacio Lindelöf.*

Demostración: Supongamos que la G_κ -modificación de X es débilmente Lindelöf y sea \mathcal{B} una base de conjuntos cerrado-abiertos de X . Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de X , supongamos sin pérdida de generalidad que \mathcal{U} es una cubierta abierta de elementos de \mathcal{B} . Entonces \mathcal{U} es una cubierta abierta de la G_κ -modificación de X . Entonces existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$ tal que $X = cl_{G_\kappa(X)}(\bigcup \mathcal{V})$. Puesto que \mathcal{V} es una familia de subconjuntos cerrado-abiertos en X , entonces \mathcal{V} son cerrado-abiertos en la G_κ -modificación. Dado que la unión numerable de conjuntos cerrados en la G_κ -modificación de X es un conjunto cerrado en la G_κ -modificación. Entonces $X = cl_{G_\kappa}(\bigcup \mathcal{V}) = \bigcup \mathcal{V}$. \square

Sean X un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Entonces podemos asignarle una topología a Y de las siguientes dos formas:

1. Ya que $Y \subseteq X$, entonces podemos considerar la topología del subespacio $(Y, \tau_{X|Y})$. Ya que $(Y, \tau_{X|Y})$ es un espacio topológico, entonces podemos considerar la G_κ -modificación del espacio $(Y, \tau_{X|Y})$, es decir, $(Y, \tau_{G_\kappa(Y, \tau_{X|Y})})$.
2. Sea $(X, \tau_{G_\kappa(X, \tau_X)})$ la G_κ -modificación del espacio (X, τ_X) . Ya que $Y \subseteq X$, entonces podemos asignarle a Y la topología del subespacio relativa a $(X, \tau_{G_\kappa(X, \tau_X)})$, esto es, $(Y, \tau_{G_\kappa(X, \tau_X)|Y})$.

El siguiente resultado nos dice que las dos topologías antes definidas para Y coinciden, así, es lo mismo pensar en la G_κ -modificación de un subespacio que en el subespacio de la G_κ -modificación.

Proposición 3.9. *Sean (X, τ_X) un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Sean $S_-(\cdot)$ el operador tal que para cualquier (Z, τ_Z) , espacio topológico, y cada $Y \in \mathcal{P}(Z)$, $S_{(Z, \tau_Z)}(Y) = (Y, \tau_{Z|Y})$ y G_κ el operador tal que para cada (Z, τ_Z) , espacio topológico, $G_\kappa((Z, \tau_Z)) =$*

$(Z, \tau_{G_\kappa(Z, \tau_Z)})$. Entonces se cumple que $G_\kappa(S_{(X, \tau_X)}(Y)) = S_{G_\kappa(X, \tau_X)}(Y)$. Es decir, $(Y, \tau_{G_\kappa(Y, \tau_X|_Y)}) = (Y, \tau_{G_\kappa(X, \tau_X)|_Y})$.

Demostración: Sabemos que $\mathcal{B} = \{O \cap Y : O \in \tau_X\}$ es una base para $S_{(X, \tau_X)}(Y)$. Por tanto, $\mathcal{B}_{G_\kappa} = \{\bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \in [\mathcal{B}]^{\leq \kappa}\}$ es una base para $G_\kappa(S_{(X, \tau_X)}(Y))$. Notemos que si $\mathcal{A} \in [\mathcal{B}]^{\leq \kappa}$, entonces existen $\lambda \leq \kappa$ cardinal tal que $\mathcal{A} = \{O_\alpha \cap Y : O_\alpha \in \tau_X \text{ y } \alpha < \lambda\}$. Entonces $\bigcap \mathcal{A} = (\bigcap_{\alpha < \lambda} O_\alpha) \cap Y$. Así, tenemos que $\mathcal{B}_{G_\kappa} = \{(\bigcap_{\alpha < \lambda} O_\alpha) \cap Y : \lambda \leq \kappa \text{ y } O_\alpha \in \tau_X\}$

Ya que $\{O_\alpha : \alpha < \lambda\} \in [\tau_X]^{\leq \kappa}$, entonces $\bigcap_{\alpha < \lambda} O_\alpha$ es un abierto en $G_\kappa((X, \tau_X))$, por tanto, $(\bigcap_{\alpha < \lambda} O_\alpha) \cap Y$ es un abierto en $S_{G_\kappa((X, \tau_X))}(Y)$. Por tanto, todo abierto de $G_\kappa(S_{(X, \tau_X)}(Y))$ es un abierto en $S_{G_\kappa(X, \tau_X)}(Y)$.

Por otro lado, $\mathcal{B}_{G_\kappa} = \{\bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \in [\tau_X]^{\leq \kappa}\}$ es una base para $G_\kappa((X, \tau_X))$, por tanto, $\mathcal{B} = \{O \cap Y : O \in \mathcal{B}_{G_\kappa}\}$ es una base para $S_{G_\kappa((X, \tau_X))}(Y)$. Si $O \in \mathcal{B}_{G_\kappa}$, entonces existen $\lambda \leq \kappa$ cardinal y $O_\alpha \in \tau_X$, para cada $\alpha < \lambda$, tales que $O = \bigcap_{\alpha < \lambda} O_\alpha$. Así, $O \cap Y = \bigcap_{\alpha < \lambda} (O_\alpha \cap Y)$. Ya que $O_\alpha \in \tau_X$, entonces $O_\alpha \cap Y$ es un abierto en $S_{(X, \tau_X)}(Y)$, y ya que esto ocurre para cada $\alpha < \lambda$, entonces $\bigcap_{\alpha < \lambda} (O_\alpha \cap Y)$ es un abierto en $G_\kappa(S_{(X, \tau_X)}(Y))$. Por tanto, todo abierto de $S_{G_\kappa(X, \tau_X)}(Y)$ es abierto en $G_\kappa(S_{(X, \tau_X)}(Y))$. \square

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \tau_X) & \xrightarrow{G_\kappa} & G_\kappa((X, \tau_X)) \\
 S_-(Y) \downarrow & & \downarrow S_-(Y) \\
 S_{(X, \tau_X)}(Y) & \xrightarrow{G_\kappa} & G_\kappa(S_{(X, \tau_X)}(Y)) = S_{G_\kappa(X, \tau_X)}(Y)
 \end{array}$$

Una propiedad interesante de la G_κ -modificación es que en estos espacios, la intersección de colecciones de tamaño $\leq \kappa$, de conjuntos abiertos, vuelve a ser conjunto abierto.

Definición 3.10. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un P -espacio si todo subconjunto G_δ (intersección numerable de subconjuntos abiertos) de X es un conjunto abierto en X .

Proposición 3.11. Para cualquier espacio X , la G_κ -modificación del espacio X es un P -espacio.

Demostración: Sean $\{O_n : n < \omega\}$ una colección numerable de subconjuntos abiertos de la G_κ -modificación de X y $x \in \bigcap_{n < \omega} O_n$. Ya que \mathcal{B}_{G_κ} es base para la G_κ -modificación, entonces para cada $n < \omega$ existe $\mathcal{O}_n \in [\tau_X]^{\leq \kappa}$ tal que $x \in \bigcap \mathcal{O}_n \subseteq O_n$. Sea $\mathcal{O} = \bigcup_{n < \omega} \mathcal{O}_n$, entonces $\mathcal{O} \in [\tau_X]^{\leq \kappa}$. Además, ya que para cada $n < \omega$, $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{O}$, entonces $\bigcap \mathcal{O} \subseteq \bigcap \mathcal{O}_n$, para cada $n < \omega$. Por tanto, $x \in \bigcap \mathcal{O} \subseteq \bigcap_{n < \omega} (\bigcap \mathcal{O}_n) \subseteq \bigcap_{n < \omega} O_n$. Por tanto, $\bigcap_{n < \omega} O_n$ es abierto en la G_κ -modificación del espacio X . \square

Definición 3.12. *Un espacio topológico X es llamado disperso (scattered) si todo subconjunto no vacío, Y , de X cumple que $Y \setminus Y^d \neq \emptyset$.*

Si X es un espacio \mathbf{T}_3 , disperso y Lindelöf, entonces su G_δ -modificación es un espacio Lindelöf. Además se cumple la siguiente proposición.

Proposición 3.13. *Sea X un espacio \mathbf{T}_3 y disperso con $L(X) \leq \kappa$, entonces*

$$L((X, \tau_{G_\kappa(X, \tau_X)})) \leq \kappa.$$

Demostración: Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de G_κ -modificación. Ya que X es un espacio disperso, entonces existe $x \in X$ tal que $\{x\}$ es abierto en X . Además, puesto que \mathcal{U} cubre a X , entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Sean $O_x = \{x\}$ y $\mathcal{U}_x = \{U\}$, entonces O_x es una vecindad de x , en la G_κ -modificación, y $\mathcal{U}_x \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$ son tales que $x \in O_x \subseteq \bigcup \mathcal{U}_x$. Definamos

$$O = \{x \in X : \exists (\mathcal{U}_x \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa} \text{ y } O_x \in \tau_X)(x \in O_x \subseteq \bigcup \mathcal{U}_x)\}.$$

Entonces $O \subseteq X$ es no vacío. Notemos que si $E \subseteq O$ es un subconjunto cerrado en (X, τ_X) , entonces para cada $x \in E$, existen $O_x \in \tau_X$ y $\mathcal{U}_x \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$ tales que $x \in O_x \subseteq \bigcup \mathcal{U}_x$. Así, $E \subseteq \bigcup_{x \in E} O_x$. Ya que $L(X) \leq \kappa$, entonces $L(E) \leq \kappa$, por tanto, existen $F_0 \in [E]^{\leq \kappa}$ tal que $E \subseteq \bigcup_{x \in F_0} O_x \subseteq \bigcup_{x \in F_0} (\bigcup \mathcal{U}_x) = \bigcup (\bigcup_{x \in F_0} \mathcal{U}_x)$, y $\bigcup_{x \in F_0} \mathcal{U}_x \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$. Por tanto, si $E \subseteq O$ cerrado en (X, τ_X) , entonces existe $\mathcal{U}' \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$ tal que $E \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$.

Veamos que $X = O$. Supongamos que $O \subsetneq X$, entonces $\emptyset \neq X \setminus O \subseteq X$, por tanto, existe $a \in X \setminus O$ el cual es aislado en $X \setminus O$. Entonces existe U' abierto en X tal que $U' \cap (X \setminus O) = \{a\}$.

Ya que X es regular, entonces existe un conjunto abierto U tal que $a \in U \subseteq \bar{U} \subseteq U'$. Así, $\bar{U} \cap (X \setminus O) = \{a\}$. Ya que \mathcal{U} cubre a X , entonces existe $P \in \mathcal{U}$ tal que $a \in P$. Dado que P es un conjunto abierto en la G_k -modificación, entonces existe $\mathcal{V} \in [\tau]^{\leq \kappa}$ tal que $a \in \bigcap \mathcal{V} \subseteq P$. Para cada $V \in \mathcal{V}$ definamos $F_V = \bar{U} \setminus V$. Entonces F_V es un conjunto cerrado en (X, τ_X) . Además, ya que $\bar{U} \cap (X \setminus O) = \{a\}$, entonces $\bar{U} \subseteq O \cup \{a\}$. Dado que $a \in V$, entonces $F_V \subseteq O \cap (X \setminus V) \subseteq O$. Por tanto, existe $\mathcal{U}_V \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$ tal que $F_V \subseteq \bigcup \mathcal{U}_V$. Notemos que si $x \in \bar{U} \setminus P$, entonces existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \notin V$, así, $x \in F_V \subseteq \bigcup \mathcal{U}_V$. Por tanto, $\mathcal{W} = \bigcup \{\mathcal{U}_V : V \in \mathcal{V}\} \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$ y \mathcal{W} cubre a $\bar{U} \setminus P$. Luego, $\mathcal{W} \cup \{P\} \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$ y $a \in U \subseteq \bar{U} \subseteq \bigcup (\mathcal{W} \cup \{P\})$, lo cual implica que $a \in O$ lo cual es una contradicción. \square

Para conocer más acerca estos espacios remitimos al lector a [24].

3.4. El Conjunto de Cantor

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot x_n}{3^n}$$

es una serie convergente. Más aún, $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot x_n}{3^n} \leq 1$. Definimos

$$\mathcal{C} = \{x \in [0, 1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot x_n}{3^n} \text{ y para cada } n \in \mathbb{N}, x_n \in \{0, 1\}\}.$$

Al conjunto \mathcal{C} le llamaremos el Conjunto de Cantor. De ahora en adelante, cuando hablemos de \mathcal{C} nos referiremos al Conjunto de Cantor con la topología de subespacio inducida por \mathbb{R} .

No es difícil demostrar que si $x \in \mathcal{C}$, entonces la colección $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot x_n}{3^n}$ es única.

Sean $0 \neq b, a \in \mathbb{R}$ y $f_a, g_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f_a(x) = a + x$ y $g_b(x) = bx$. Entonces f_a, g_b son homeomorfismos. Además, si definimos

$$\blacksquare I_0 = [0, 1];$$

$$\blacksquare I_{n+1} = g_{\frac{1}{3}}[I_n] \cup (f_{\frac{2}{3}} \circ g_{\frac{1}{3}})[I_n];$$

entonces es posible demostrar que

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Denotemos por D al espacio topológico $\{0, 1\}$ con la topología discreta. Entonces \mathcal{C} es un espacio compacto homeomorfo a D^{\aleph_0} , lo anterior puede consultarse por ejemplo en [9].

Aquellos lectores que deseen conocer la demostración de los siguientes resultados pueden consultar [21].

Proposición 3.14. 1. Sean X un espacio métrico separable y $E \subseteq X$ cerrado. Entonces E es unión de un espacio perfecto F ($F = F'$, es decir, F coincide con su derivado) y un conjunto numerable.

2. Todo espacio métrico completo y perfecto contiene un subespacio que es homeomorfo al Conjunto de Cantor.

3. Todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es completo.

Definición 3.15. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que A es totalmente imperfecto si no contiene una copia del Conjunto de Cantor.

Corolario 3.16. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ totalmente imperfecto y $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado y no numerable. Entonces $F \not\subseteq A$.

Teorema 3.17. (Teorema de Bernstein) Sea X un espacio métrico completo y separable, no numerable, entonces existe $A \subseteq X$ tal que $|A| = |X \setminus A| = \mathfrak{c}$ y A y $X \setminus A$ son conjuntos totalmente imperfectos.

3.5. El Hiperespacio de Pixley-Roy

Sea (X, τ_X) un espacio topológico y sea $\mathcal{F}[X] = \{A \in [X]^{<\omega} : A \neq \emptyset\}$. Sean $A \in \mathcal{F}[X]$ y U un abierto en X , entonces definimos

$$[A, U] = \{B \in \mathcal{F}[X] : A \subseteq B \subseteq U\}.$$

Consideremos

$$\mathcal{B} = \{[A, U] : A \in \mathcal{F}[X] \text{ y } U \in \tau_X\}.$$

Entonces

1. para cada $A \in \mathcal{F}[X]$ se cumple que $A \in [A, X]$ y $[A, X] \in \mathcal{B}$.
Así, $\mathcal{F}[X] = \bigcup \mathcal{B}$; y
2. si $[A, U], [B, V] \in \mathcal{B}$, entonces

$$[A, U] \cap [B, V] = [A \cup B, U \cap V] \in \mathcal{B},$$

pues $A \cup B \in \mathcal{F}[X]$ y $U \cap V \in \tau_X$.

Entonces \mathcal{B} genera una topología, τ , para $\mathcal{F}[X]$, con \mathcal{B} como base. Al espacio topológico $(\mathcal{F}[X], \tau)$ le llamaremos el *hiperespacio de Pixley-Roy*.

Notemos que si $[A, U], [B, V] \in \mathcal{B}$, entonces $[A, U] \cap [B, V] \neq \emptyset$ si y solo si $A \cup B \subseteq U \cap V$, por tanto

$$[A, U] \cap [B, V] \neq \emptyset \text{ si y solo si } A \subseteq V \text{ y } B \subseteq U.$$

Así, si X es T_1 , entonces

1. $\mathcal{F}[X]$ es Hausdorff. Pues dados $A, B \in \mathcal{F}[X]$ tales que $A \neq B$, entonces supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a \in A \setminus B$. Ya que X es T_1 , entonces para cada $b \in B$ existe un abierto V_b tal que $b \in V_b$ y $a \notin V_b$. Sean U un abierto tal que $A \subseteq U$ y $V = \bigcup_{b \in B} V_b$. Puesto que $A \not\subseteq V$, entonces $[A, U] \cap [B, V] = \emptyset$.
2. la base $\mathcal{B} = \{[A, U] : A \in \mathcal{F}[X] \text{ y } U \in \tau_X\}$, de $\mathcal{F}[X]$, es una base de conjuntos cerrado-abiertos en el hiperespacio. Para ver esto, sean $[A, U] \in \mathcal{B}$ y $B \notin [A, U]$, entonces existen dos casos:
 - a) Si $A \not\subseteq B$, entonces existe $a \in A \setminus B$. Aplicando el mismo razonamiento de la parte 1, solo que ahora el U de la parte 1 que sea el mismo U que tenemos aquí, obtenemos que existe una vecindad, $[B, \bigcup_{b \in B} V_b]$, contenida en el complemento de $[A, U]$.

- b) Si $B \not\subseteq U$, entonces para cualquier vecindad V de B se cumple que $[A, U] \cap [B, V] = \emptyset$.
3. $\mathcal{F}[X]$ es completamente regular ya que si F es un subconjunto cerrado en $\mathcal{F}[X]$ y $A \notin F$, entonces existe $[B, U] \in \mathcal{B}$ tal que $A \in [B, U] \subseteq \mathcal{F}[X] \setminus F$. La función $f_{[B, U]} : \mathcal{F}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_{[B, U]}(C) = \begin{cases} 0 & \text{si } C \in [B, U] \\ 1 & \text{si } C \in \mathcal{F}[X] \setminus [B, U] \end{cases}$$

Dado que los elementos de \mathcal{B} son cerrado-abiertos, entonces $f_{[B, U]}$ es continua, además, se cumple que $f_{[B, U]}(A) = 0$ y si $C \in F \subseteq \mathcal{F}[X] \setminus [B, U]$, entonces $f_{[B, U]}(C) = 1$.

4. $c(\mathcal{F}[X]) \leq w(X)$. Primero veamos que $c(\mathcal{F}[X]) \leq nw(X)$. Supongamos, por contradicción, que existe \mathcal{U} una familia celular en $\mathcal{F}[X]$ tal que $|\mathcal{U}| > nw(X) = \kappa$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{U} = \{[A_\alpha, U_\alpha] : \alpha < \lambda\}$, con $\lambda > \kappa$ y sea \mathcal{N} una red de cardinalidad $\kappa \geq \omega$. Dado que $|\mathcal{N}^{<\omega}| = |\mathcal{N}|$, entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que \mathcal{N} es cerrado bajo uniones finitas. Luego, para cada $\alpha < \lambda$ existe $N_\alpha \in \mathcal{N}$ tal que $A_\alpha \subseteq N_\alpha \subseteq V_\alpha$. Entonces existen $\alpha, \beta < \lambda$ tales que $N_\alpha = N_\beta$, así, $A_\alpha \cup A_\beta \subseteq V_\alpha \cap V_\beta$, lo cual contradice que \mathcal{U} es una familia celular.

Dado que toda base del espacio X es una red para el espacio X , entonces de la definición de las funciones cardinales se tiene que $nw(X) \leq w(X)$. Por tanto,

$$c(\mathcal{F}[X]) \leq nw(X) \leq w(X).$$

Proposición 3.18. *Sea Y un subespacio del espacio (X, τ) , entonces $\mathcal{F}[Y]$ es homeomorfo a $\mathcal{F}[X] \upharpoonright_Y = \{A \in \mathcal{F}[X] : A \subseteq Y\}$.*

Demostración: Sea $f : \mathcal{F}[Y] \rightarrow \mathcal{F}[X] \upharpoonright_Y$ definida por $f(A) = A$. Claramente f es biyectiva. Veamos que f es continua y abierta, para ello notemos que una base para $\mathcal{F}[Y]$ es

$$\mathcal{B} = \{[A, U \cap Y]_{\mathcal{F}[Y]} : A \in \mathcal{F}[Y] \text{ y } U \in \tau\}$$

y

$$\mathcal{B}' = \{[A, U]_{\mathcal{F}[X]} \cap \mathcal{F}[X]_{|Y} : A \in \mathcal{F}[X] \text{ y } U \in \tau\}$$

es una base para $\mathcal{F}[X]_{|Y}$. Si $A \in \mathcal{F}[Y]$, entonces

$$\begin{aligned} [A, U \cap Y]_{\mathcal{F}[Y]} &= \{B \in \mathcal{F}[Y] : A \subseteq B \subseteq U \cap Y\} \\ &= \{B \in \mathcal{F}[X] : A \subseteq B \subseteq U\} \cap \mathcal{F}[X]_{|Y} \\ &= [A, U]_{\mathcal{F}[X]} \cap \mathcal{F}[X]_{|Y} \end{aligned}$$

Dado que todo abierto básico de $\mathcal{F}[X]_{|Y}$ es abierto en $\mathcal{F}[Y]$ y viceversa, entonces se tiene que f es continua y abierta. \square

Proposición 3.19. *Sea \mathcal{U} una familia de subconjuntos abiertos de X , entonces*

$$V(\mathcal{U}) = \{A \in \mathcal{F}[X] : \text{existe } U \in \mathcal{U} \text{ tal que } A \subseteq U\}$$

es un subconjunto cerrado-abierto de $\mathcal{F}[X]$.

Demostración: Notemos que

$$V(\mathcal{U}) = \bigcup \{[B, U] : U \in \mathcal{U}, B \in \mathcal{F}[X] \text{ y } B \subseteq U\},$$

pues si $A \in V(\mathcal{U})$, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subseteq U$, ya que $A \in [A, U]$, entonces $A \in \bigcup \{[B, U] : U \in \mathcal{U}, B \in \mathcal{F}[X] \text{ y } B \subseteq U\}$. Por otro lado, si $A \in \bigcup \{[B, U] : U \in \mathcal{U}, B \in \mathcal{F}[X] \text{ y } B \subseteq U\}$, entonces existen $U \in \mathcal{U}$ y $B \in \mathcal{F}[X]$ tal que $A \in [B, U]$, así, $A \subseteq U$, luego, $A \in V(\mathcal{U})$. Dado que $V(\mathcal{U}) = \bigcup \{[B, U] : U \in \mathcal{U}, B \in \mathcal{F}[X] \text{ y } B \subseteq U\}$, entonces es claro que $V(\mathcal{U})$ es abierto.

Veamos ahora que $V(\mathcal{U})$ es cerrado. Si $A \notin V(\mathcal{U})$, entonces $A \not\subseteq U$ para cada $U \in \mathcal{U}$, por tanto, para cada $B \in \mathcal{F}[X]$ tal que $B \subseteq U$, entonces $[B, U] \cap [A, X] = \emptyset$, pues $A \not\subseteq U$. Así,

$$\left(\bigcup \{[B, U] : U \in \mathcal{U}, B \in \mathcal{F}[X] \text{ y } B \subseteq U\} \right) \cap [A, X] = \emptyset.$$

Concluimos que $[A, X] \subseteq \mathcal{F}[X] \setminus V(\mathcal{U})$. \square

3.6. La extensión de Katetöŷ

Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff. Sea

$$T(X) = \{p \subseteq \tau : p \text{ es un ultrafiltro abierto libre sobre } X\}.$$

Sea $\kappa X = X \cup T(X)$ y para cada $x \in \kappa X$ definamos $\mathcal{B}(x)$ como sigue:

1. Si $p \in X$, sea $\mathcal{B}(p) = \{U \subseteq X : U \in \tau \text{ y } x \in U\}$.
2. Si $p \in T(X)$, entonces $\mathcal{B}(p) = \{\{p\} \cup U : U \in p\}$.

Notemos que si $T(X) = \emptyset$, entonces $\kappa X = X$.

Proposición 3.20. *La colección $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in \kappa X}$ genera una topología para κX de tal forma que $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in \kappa X}$ es un sistema de vecindades.*

Demostración:

1. No es difícil verificar que si $p \in \kappa X$, entonces $\mathcal{B}(p) \neq \emptyset$ y que si $U \in \mathcal{B}(p)$, entonces $p \in U$.
2. Supongamos que $y \in \kappa X$ y sean $x \in U \in \mathcal{B}(y)$.
 - a) Si $y \in X$, entonces U es una vecindad de y en X . Ya que X es un espacio topológico y $\{\{U : U \in \tau \text{ y } x \in U\} : x \in X\}$ es un sistema de vecindades para X . Por tanto, existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V \subseteq U$, pues $x \in U$.
 - b) Si $y \in T(X)$, entonces $U = \{y\} \cup U'$, con $U' \in y$. Ya que $x \in U$, entonces $x = y$ o $x \in U'$. Si $x = y$, entonces $V = U$ satisface lo deseado. Supongamos que $x \in U'$. Sea $V = U'$, entonces $V \in \mathcal{B}(x)$ y $V \subseteq U$.
3. Supongamos que $x \in \kappa X$ y $U, V \in \mathcal{B}(x)$.
 - a) Si $x \in X$, como en el caso anterior, ya que $\{\{U : U \text{ es abierto en } X \text{ y } x \in U\} : x \in X\}$ es un sistema de vecindades, entonces existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tal que $W \subseteq U \cap V$.

- b) Supongamos que $x \in T(X)$. Entonces existen $U', V' \in x$ tales que $U = \{x\} \cup U'$ y $V = \{x\} \cup V'$. Ya que x es un filtro abierto, entonces $W' = U' \cap V' \in x$. Sea $W = \{x\} \cup W'$, entonces $W \in \mathcal{B}(x)$ y $W = \{x\} \cup W' \subseteq \{x\} \cup U' = U, \{x\} \cup V' = V$. Por tanto, $W \subseteq U \cap V$.

□

Al espacio topológico κX , con la topología generada por $\{\mathcal{B}(x)\}$, le llamaremos la extensión de Katětov del espacio X .

Proposición 3.21. *Sea X un espacio topológico. Se cumple que:*

1. X es un subespacio abierto y denso en κX . Más aún, todo conjunto abierto en X es abierto en κX .
2. $\kappa X \setminus X$ es cerrado y discreto.
3. Si X es un espacio de Hausdorff, entonces κX es un espacio de Hausdorff.

Demostración:

1. Veamos que X es denso. Es suficiente con ver que para cualquier $p \in \kappa X$ y cualquier $U \in \mathcal{B}(p)$ se cumple que $U \cap X \neq \emptyset$. Si $p \in X$, entonces para cualquier $U \in \mathcal{B}(p)$ se cumple que $U \subseteq X$.

Supongamos que $p \in T(X)$ y sea $\{p\} \cup U \in \mathcal{B}(p)$. Ya que p es un filtro abierto en X y $U \in p$, entonces $\emptyset \neq U \subseteq X$. Por tanto, $(\{p\} \cup U) \cap X \neq \emptyset$.

Sea A un subconjunto abierto de X y supongamos que $A \neq \emptyset$. Sea $x \in A$, entonces $x \in \kappa X$ y $A \in \mathcal{B}(x)$. Por tanto, A es abierto en κX .

2. Por el inciso anterior, X es un conjunto abierto en κX . Por tanto, $\kappa X \setminus X = T(X)$ es cerrado en κX .

Veamos que $T(X)$ es discreto. Sea $p \in T(X)$ y definamos $U = \{p\} \cup X$. Afirmamos que $U \cap T(X) = \{p\}$. Es claro que $\{p\} \subseteq U \cap T(X)$. Sea $q \in U \cap T(X)$, entonces q es un ultrafiltro libre sobre X tal que $q \in \{p\} \cup X$, entonces $p = q$.

3. Sean $p, q \in \kappa X$. Veamos que existe U y V abiertos ajenos tales que $p \in U$ y $q \in V$
- Supongamos que $p, q \in X$. Ya que X es Hausdorff, entonces existen abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.
 - Supongamos que alguno de los dos es un ultrafiltro abierto libre y el otro está en X . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $p \in T(X)$ y $q \in X$. Ya que p es un ultrafiltro abierto libre sobre X , entonces p no es convergente. En particular, para $q \in X$, existe una vecindad B , de q , tal que $B \notin p$. Ya que $B \notin p$ y p es ultrafiltro abierto, entonces existe $A \in p$ tal que $A \cap B = \emptyset$. Sea $U = \{p\} \cup A$ y $V = B$. Entonces $p \in U$, $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.
 - Supongamos que $p, q \in T(X)$. Ya que p y q son ultrafiltro, entonces $p \not\subseteq q$. Sea $A \in p \setminus q$. Como $A \notin q$, entonces existe $B \in q$ tal que $A \cap B = \emptyset$. Entonces $U = \{p\} \cup A$ y $V = \{q\} \cup B$ satisfacen lo deseado.

□

Corolario 3.22. *Sea X un espacio topológico. Si X_1 es X con la topología del subespacio respecto de κX , entonces los espacios topológicos X y X_1 son homeomorfos.*

Demostración: Sea U un conjunto abierto en X . Por la proposición anterior, U es un conjunto abierto en κX , así, $U = U \cap X$ es un conjunto abierto en X_1 .

Sean $U \cap X$ un conjunto abierto en X_1 y $x \in U \cap X$, entonces U es un conjunto abierto en κX . Ya que $\mathcal{B}(x)$ es una base de vecindades para x en κX y $x \in X$, entonces existe $V \in \mathcal{B}(x) = \{U \subseteq X : U \text{ es un conjunto abierto en } X \text{ y } x \in U\}$ tal que $x \in V \subseteq U$. Así, V es un conjunto abierto en X tal que $x \in V \subseteq U$. Ya que esto ocurre para cada $x \in U \cap X$, entonces $U \cap X$ es abierto en X . □

Proposición 3.23. *Sean U un subconjunto abierto de X y $\mathcal{A} = \{p \in T(X) : U \in p\}$. Entonces se cumple:*

1. $cl_{\kappa X}(U) = cl_X(U) \cup \mathcal{A}$.
2. $cl_{\kappa X}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.
3. $cl_{\kappa X}(\mathcal{A} \cup U) = cl_{\kappa X}(U)$.

Demostración:

1. Sea $x \notin cl_{\kappa X}(U)$. Entonces existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V \cap U = \emptyset$. Si $x \in X$, entonces V es un conjunto abierto en X , por tanto, $x \notin cl_X(U)$. Luego, $x \notin cl_X(U) \cup \mathcal{A}$. Si $x \in T(X)$, entonces $V = \{x\} \cup V'$ tal que $V' \in x$. Entonces $V' \cap U = \emptyset$. Ya que x es un filtro, entonces $U \notin x$. Así, $x \notin cl_X(U) \cup \mathcal{A}$.

Supongamos que $x \in \kappa X \setminus (cl_X(U) \cup \mathcal{A})$. Si $x \in X$, entonces existe V vecindad de x , en X , tal que $V \cap U = \emptyset$. Entonces V es una vecindad de x en κX tal que $V \cap U = \emptyset$, así, $x \notin cl_{\kappa X}(U)$. Si $x \in T(X)$, entonces $U \notin x$. Ya que x es ultrafiltro abierto, entonces existe $A \in x$ tal que $A \cap U = \emptyset$. Luego, $V = \{x\} \cup A$ es una vecindad de x en κX tal que $V \cap U = \emptyset$. Por tanto, $x \notin cl_{\kappa X}(U)$.

2. Supongamos que $x \in \kappa X \setminus \mathcal{A}$. Si $x \in X$, entonces X es una vecindad de x tal que $X \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Por tanto, $x \notin cl_{\kappa X}(\mathcal{A})$. Si $x \in T(X)$, sea $V = \{x\} \cup X$, entonces V es una vecindad de x tal que $V \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Por tanto, $x \notin cl_{\kappa X}(\mathcal{A})$.

3.

$$cl_{\kappa X}(\mathcal{A} \cup U) = cl_{\kappa X}(\mathcal{A}) \cup cl_{\kappa X}(U) = \mathcal{A} \cup (cl_X(U) \cup \mathcal{A}) = cl_{\kappa X}(U).$$

□

Notemos que si $p \in T(X)$ y U es un abierto en X tal que $U \in p$, entonces

$$cl_{\kappa X}(U) \subseteq cl_{\kappa X}(\{p\} \cup U) \subseteq cl_{\kappa X}(A \cup U) = cl_{\kappa X}(U),$$

donde $A = \{p \in T(X) : U \in p\}$. Por tanto, para cada U abierto en X y cada $p \in T(X)$, se cumple que $cl_{\kappa X}(\{p\} \cup U) = cl_{\kappa X}(U)$.

Proposición 3.24. *Si X es un espacio topológico Hausdorff, entonces la extensión de Katětov de X , κX , es un espacio H -cerrado.*

Demostración: Ya que X es un espacio de Hausdorff, entonces κX es un espacio de Hausdorff. Sea $\{V_i : i \in I\}$ una colección de subconjuntos abiertos de κX con la propiedad de intersección finita (PIF). Veamos que $\bigcap_{i \in I} cl_{\kappa X}(V_i) \neq \emptyset$, así, por la Proposición 1.57, κX es un espacio H -cerrado.

Supongamos que $\bigcap_{i \in I} cl_{\kappa X}(V_i) = \emptyset$. Consideremos $q' = \{X \cap V_i : i \in I\}$, entonces q' es una colección de subconjuntos abiertos, no vacíos, de X . Más aún, sean $X \cap V_1, \dots, X \cap V_n \in q'$, entonces $\bigcap_{i=1}^n (X \cap V_i) = X \cap \bigcap_{i=1}^n V_i$. Ya que $\{V_i : i \in I\}$ tiene la PIF, entonces $\bigcap_{i=1}^n V_i \neq \emptyset$ y dado que cada V_i es abierto, entonces $\bigcap_{i=1}^n V_i$ es un conjunto abierto no vacío de κX . Dado que X es denso en κX , entonces $X \cap \bigcap_{i=1}^n V_i \neq \emptyset$. Por tanto, q' tiene la PIF.

Ya que q' es una colección de conjuntos abiertos, de X , con la PIF, entonces existe q ultrafiltro abierto sobre X tal que $q' \subseteq q$. Por la proposición anterior, $cl_X(V) \subseteq cl_{\kappa X}(V)$ para cada $V \in q'$. Así,

$$\bigcap_{V \in q} cl_X(V) \subseteq \bigcap_{V \in q'} cl_X(V) \subseteq \bigcap_{V \in q'} cl_{\kappa X}(V) \subseteq \bigcap_{i \in I} cl_{\kappa X}(V_i) = \emptyset.$$

Por tanto, q es un ultrafiltro abierto libre sobre X . Así, $q \in T(X)$.

Afirmamos que $q \in \bigcap_{i \in I} cl_{\kappa X}(V_i)$. Sean $i \in I$ y $\{q\} \cup U$ un básico de q . Entonces $U, X \cap V_i \in q$, por tanto, $\emptyset \neq U \cap (X \cap V_i) \subseteq U \cap V_i \subseteq V_i \cap (\{q\} \cup U)$. Así, $q \in cl_{\kappa X}(V_i)$ para cada $i \in I$, es decir, $q \in \bigcap_{i \in I} cl_{\kappa X}(V_i)$. Lo cual es una contradicción. Por tanto, $\bigcap_{i \in I} cl_{\kappa X}(V_i) \neq \emptyset$. \square

Notemos que por la Proposición 1.57, ya que κX es un espacio H -cerrado, entonces todos los ultrafiltros abiertos sobre κX convergen.

Proposición 3.25. *Si X es un espacio topológico, entonces $T(\kappa X) = \emptyset$.*

3.7. Compactación de Stone-Čech

Antes de comenzar, conviene recordar lo que es un encaje [9].

Definición 3.26. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Decimos que f es un homeomorfismo de*

encaje si existen Z subespacio de Y y $f' : X \rightarrow Z$ un homeomorfismo tal que

$$f = i_Z \circ f',$$

donde $i_Z : Z \rightarrow Y$ es la función inclusión de Z en Y , es decir, $i_Z(x) = x$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow f' & \nearrow i_Z \\ & Z & \end{array}$$

Notemos que si $f : X \rightarrow Y$ es un encaje, entonces $f' = f \upharpoonright X$ y $Z = f[X]$, donde $f \upharpoonright X : X \rightarrow f[X]$ es tal que $f \upharpoonright X(x) = f(x)$. Por otro lado, todo homeomorfismo es trivialmente un encaje. Puede demostrarse que la composición de homeomorfismos de encaje es un encaje y la restricción de un encaje es un encaje.

Definición 3.27. Una compactación para el espacio topológico X es un par (Y, c) tal que

1. Y es un espacio Hausdorff y compacto,
2. $c : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo de encaje, y
3. $c[X]$ es denso en Y ($\overline{c[X]} = Y$).

Si un espacio X es encajado en un espacio Hausdorff y compacto Y , entonces podemos encontrar una compactación de X de forma muy natural. Supongamos que Y es un espacio Hausdorff y compacto y $f : X \rightarrow Y$ es un encaje, entonces $f = i_Z \circ f'$, con $Z \subseteq Y$. Así, $(\overline{f[X]}, i \circ f')$ (donde $i : f[X] \rightarrow \overline{f[X]}$ es la inclusión de $f[X]$ en $\overline{f[X]}$), es una compactación de X .

El siguiente teorema nos dice quiénes son todos los espacios que tienen una compactación. Las demostraciones de los resultados siguientes pueden ser consultadas en [9].

Teorema 3.28. Un espacio topológico X tiene una compactación si y solo si X es un espacio Tychonoff (X es $\mathbf{T}_{3\frac{1}{2}}$).

De ahora en adelante, si (Y, c) es una compactación del espacio X , entonces denotaremos a Y por cX . Notemos que, en general, cX y $c[X]$ representan cosas distintas.

Definición 3.29. Sean cX y $c'X$ compactaciones del espacio X . Diremos que (cX, c) y $(c'X, c')$ son compactaciones equivalentes si existe $f : cX \rightarrow c'X$ un homeomorfismo tal que $f \circ c = c'$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c} & cX \\ & \searrow c' & \downarrow f \\ & & c'X \end{array}$$

No es difícil ver que la (clase) relación “compactaciones equivalente” es una relación de equivalencia. Sea $\mathcal{C}(X)$ la colección de todas las clases de equivalencia determinadas por la relación “compactaciones equivalente”.

Teorema 3.30. Para cualquier compactación cX de X se cumple

$$|cX| \leq 2^{2^{d(X)}} \text{ y } w(cX) \leq 2^{d(X)}.$$

Teorema 3.31. Si X es un espacio Tychonoff, entonces X puede ser encajado en $I^{w(X)}$, donde $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Por tanto, toda compactación cX es homeomorfa a un subespacio de $I^{2^{d(X)}}$. Por tanto, podemos pensar a $\mathcal{C}(X)$ como el conjunto de todas las compactaciones del espacio X .

Definición 3.32. Sean cX y $c'X$ compactaciones del espacio X . Denotaremos por $c'X \leq cX$ al hecho de que exista una función $f : cX \rightarrow c'X$ continua tal que $f \circ c = c'$.

Es posible demostrar que la relación \leq es un orden parcial en $\mathcal{C}(X)$.

Teorema 3.33. Todo subconjunto no vacío de $\mathcal{C}(X)$ tiene un \leq -supremo en $\mathcal{C}(X)$.

Así, si X es un espacio Tychonoff, entonces $\mathcal{C}(X) \neq \emptyset$ y por tanto, existe un elemento en $\mathcal{C}(X)$ el cual es el \leq -mayor.

Definición 3.34. Sea X un espacio Tychonoff. Al elemento más grande en $\mathcal{C}(X)$ con respecto a la relación \leq le llamaremos la compactación de Stone-Čech, y la denotaremos por βX .

Así, si X es un espacio Tychonoff, entonces $(\beta X, \beta)$ es la compactación de Stone-Čech de X .

Teorema 3.35. Sea X un espacio de Tychonoff. Entonces

1. Para cualquier espacio Y Hausdorff y compacto y cualquier función $f : X \rightarrow Y$ continua, existe una función $F : \beta X \rightarrow Y$ continua tal que $F \circ \beta = f$.
2. Si (αX) es compactación del espacio X tal que: para cualquier espacio Y Hausdorff y compacto y cualquier función continua $f : X \rightarrow Y$, existe una función continua $F : \alpha X \rightarrow Y$ tal que $F \circ \alpha = f$. Entonces αX y βX son compactaciones equivalentes.

3.7.1. Compactación de Stone-Čech para espacios discretos

Aunque para cualquier espacio topológico Tychonoff existe su compactación de Stone-Čech, nosotros no sabemos qué forma tiene ese espacio. Afortunadamente, si nuestro espacio topológico X es \mathbf{T}_4 , entonces existe una compactación de X , ωX , la cual es equivalente a la compactación de Stone-Čech del espacio X , βX . La ventaja es que nosotros sí *conocemos* quién es ωX .

Sea X es espacio \mathbf{T}_1 . Denotemos por $\mathcal{D}(X)$ la colección de subconjuntos cerrados de X . Ya que la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado y la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, entonces $\mathcal{D}(X)$ es un subretículo de $\mathcal{P}(X)$, $\sup\{E, F\} = E \cup F$ y $\inf\{E, F\} = E \cap F$. Además, $\emptyset \in \mathcal{D}(X)$. Por el Teorema 1.23, si $\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}(X)$ con la PIF, entonces existe \mathcal{U} un $\mathcal{D}(X)$ -ultrafiltro tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$.

Denotemos por $\mathcal{F}(X)$ la familia de todos los $\mathcal{D}(X)$ -ultrafiltros. Entonces $\mathcal{F}(X) \neq \emptyset$. Notemos que si $x \in X$, entonces

$$\mathcal{F}(x) = \{E \in \mathcal{D}(X) : x \in E\}$$

es $\mathcal{D}(X)$ -filtro. Más aún, $\mathcal{F}(x)$ es un $\mathcal{D}(X)$ -ultrafiltro. Supongamos que \mathcal{F} es un $\mathcal{D}(X)$ -filtro tal que $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Ya que X es un

espacio \mathbf{T}_1 , entonces $\{x\} \in \mathcal{D}(X)$. Por tanto, $\{x\} \in \mathcal{F}(x)$. Ya que $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}$ y \mathcal{F} es un $\mathcal{D}(X)$ -filtro, entonces para cada $E \in \mathcal{F}$, $E \cap \{x\} \neq \emptyset$. Así, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}(x)$. Además, $\bigcap \mathcal{F}(x) = \{x\}$.

Sea $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(X)$. Supongamos que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Sea $x \in \bigcap \mathcal{F}$. Ya que $\{x\} \in \mathcal{D}(X)$ y para cada $E \in \mathcal{F}$, $E \cap \{x\} \neq \emptyset$, entonces $\{x\} \in \mathcal{F}$. Si $y \in X$ con $y \neq x$, entonces $y \notin \{x\}$, así, $y \notin \bigcap \mathcal{F}$; además, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$. Por tanto, para cada $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(X)$ $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ ó $\bigcap \mathcal{F} = \{x\}$, con $x \in X$. Concluimos que $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(X)$ es libre si y solo si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Así, dado $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(X)$, entonces $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ ó $\bigcap \mathcal{F} = \{x\}$.

Definamos

$$\mathcal{F}_0(X) = \{\mathcal{F} : \mathcal{F}(X) : \bigcap \mathcal{F} = \emptyset\},$$

la colección de todos los $\mathcal{D}(X)$ -ultrafiltros libres.

1. Sea U un subconjunto abierto de X , definamos

$$U^* = U \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : \text{existe } A \in \mathcal{F} \text{ tal que } A \subseteq U\}.$$

2. Sea E un subconjunto cerrado de X , definamos

$$E_* = E \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E \in \mathcal{F}\}.$$

Notemos que si U es un conjunto abierto en X , entonces $X \setminus U$ es cerrado en X , por tanto, $(X \setminus U)_*$ si está bien definido. Análogamente, si E es un conjunto cerrado en X , entonces $(X \setminus U)^*$ está bien definido.

Lema 3.36. *Sea X un espacio \mathbf{T}_1 . Sean U un subconjunto abierto de X y E un subconjunto cerrado de X . Entonces*

1. $\omega X \setminus U^* = (X \setminus U)_*$.

2. $\omega X \setminus E_* = (X \setminus E)^*$.

Demostración:

1. Utilizando el hecho de que para $p \in \mathcal{F}(X)$: si $E \in \mathcal{D}(X)$ tal que $E \cap A \neq \emptyset$ para cada $A \in p$, entonces $E \in p$. Obtenemos

lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\omega X \setminus (X \setminus U)_* &= \omega X \setminus [(X \setminus U) \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : (X \setminus U) \in \mathcal{F}\}] \\
&= [\omega X \setminus (X \setminus U)] \cap [\omega X \setminus \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : (X \setminus U) \in \mathcal{F}\}] \\
&= [(X \setminus (X \setminus U)) \cup (\mathcal{F}_0(X) \setminus (X \setminus U))] \\
&\quad \cap [(X \setminus \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : (X \setminus U) \in \mathcal{F}\}) \\
&\quad \cup (\mathcal{F}_0(X) \setminus \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : (X \setminus U) \in \mathcal{F}\})] \\
&= [(X \setminus (X \setminus U)) \cup (\mathcal{F}_0(X))] \\
&\quad \cap [X \cup (\mathcal{F}_0(X) \setminus \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : (X \setminus U) \in \mathcal{F}\})] \\
&= (X \setminus (X \setminus U)) \cup (\mathcal{F}_0(X) \setminus \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : (X \setminus U) \in \mathcal{F}\}) \\
&= U \cup (\{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : (X \setminus U) \notin \mathcal{F}\}) \\
&= U \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : \text{existe } A \in \mathcal{F} \text{ tal que } A \subseteq U\} \\
&= U^*.
\end{aligned}$$

Así, $(X \setminus U)_* = \omega X \setminus U^*$.

2. Por el inciso anterior tenemos

$$\omega X \setminus (X \setminus E)^* = (X \setminus (X \setminus E))_* = E_*.$$

Así, $\omega X \setminus E_* = (X \setminus E)^*$.

□

Lema 3.37. *Sea X un espacio T_1 . Sean E_1 y E_2 subconjuntos cerrados de X . Entonces*

$$1. (E_1 \cap E_2)_* = E_{1*} \cap E_{2*}.$$

$$2. (E_1 \cup E_2)_* = E_{1*} \cup E_{2*}.$$

Demostración: Primero demosetremos que $(E_1 \cap E_2)_* = E_{1*} \cap E_{2*}$. Supongamos que si $\mathcal{F} \in \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \cap E_2 \in \mathcal{F}\}$, entonces $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{F}$. Ya que $E_1, E_2 \in \mathcal{D}(X)$ y $E_1 \cap E_2 \subseteq E_1, E_2$, entonces $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$. Por tanto, $\mathcal{F} \in \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \in \mathcal{F}\} \cap \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_2 \in \mathcal{F}\}$. Por otro lado, dado que \mathcal{F} es un $\mathcal{D}(X)$ -filtro, entonces es evidente que $\{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \in \mathcal{F}\} \cap \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_2 \in \mathcal{F}\} \subseteq \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \cap E_2 \in \mathcal{F}\}$. Así,

$$\{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \in \mathcal{F}\} \cap \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_2 \in \mathcal{F}\} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \cap E_2 \in \mathcal{F}\}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 (E_1 \cap E_2)_* &= (E_1 \cap E_2) \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \cap E_2 \in \mathcal{F}\} \\
 &= (E_1 \cap E_2) \cup (\{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \in \mathcal{F}\} \\
 &\quad \cap \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_2 \in \mathcal{F}\}) \\
 &= [E_1 \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \in \mathcal{F}\}] \\
 &\quad \cap [E_2 \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_2 \in \mathcal{F}\}] \\
 &= E_{1*} \cap E_{2*}.
 \end{aligned}$$

Para demostrar el inciso 2 veamos que

$$\{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \in \mathcal{F}\} \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_2 \in \mathcal{F}\} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}\}.$$

Supongamos que $\mathcal{F} \in \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}\}$. Ya que \mathcal{F} es un $\mathcal{D}(X)$ -ultrafiltro, $E_1, E_2 \in \mathcal{D}(X)$ y $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}$, entonces por la Proposición 1.26, entonces $E_1 \in \mathcal{F}$ o $E_2 \in \mathcal{F}$. Así, $\mathcal{F} \in \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \in \mathcal{F}\} \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_2 \in \mathcal{F}\}$. La otra contención es trivial. Luego,

$$\begin{aligned}
 E_{1*} \cup E_{2*} &= [E_1 \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \in \mathcal{F}\}] \\
 &\quad \cup [E_2 \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_2 \in \mathcal{F}\}] \\
 &= (E_1 \cup E_2) \cup (\{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \in \mathcal{F}\} \\
 &\quad \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_2 \in \mathcal{F}\}) \\
 &= (E_1 \cup E_2) \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}\} \\
 &= (E_1 \cup E_2)_*.
 \end{aligned}$$

□

Corolario 3.38. *Sea X un espacio T_1 . Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos de X . Entonces*

1. $(U_1 \cap U_2)^* = U_1^* \cap U_2^*$.
2. $(U_1 \cup U_2)^* = U_1^* \cup U_2^*$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
 U_1^* \cap U_2^* &= [\omega X \setminus (X \setminus U_1)]_* \cap [\omega X \setminus (X \setminus U_2)]_* \\
 &= \omega X \setminus [(X \setminus U_1)_* \cup (X \setminus U_2)_*] \\
 &= \omega X \setminus [(\omega X \setminus U_1^*) \cup (\omega X \setminus U_2^*)] \\
 &= \omega X \setminus [\omega X \setminus (U_1^* \cap U_2^*)] \\
 &= (U_1 \cap U_2)^*.
 \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
 U_1^* \cup U_2^* &= [\omega X \setminus (X \setminus U_1)_*] \cup [\omega X \setminus (X \setminus U_1)_*] \\
 &= \omega X \setminus [(X \setminus U_1)_* \cap (X \setminus U_2)_*] \\
 &= \omega X \setminus [(\omega X \setminus U_1^*) \cap (\omega X \setminus U_2^*)] \\
 &= \omega X \setminus [\omega X \setminus (U_1^* \cup U_2^*)] \\
 &= (U_1 \cup U_2)^*.
 \end{aligned}$$

□

Proposición 3.39. Sean (X, τ) un espacio topológico \mathbf{T}_1 y

$$\omega X = X \cup \mathcal{F}_0(X).$$

La colección

$$\mathcal{B} = \{U^* : U \in \tau\},$$

genera una base para ωX .

Demostración: Ya que $X \in \tau$; y debido a que $X \in \mathcal{F}$, para cada $\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X)$, entonces

$$X^* = X \cup \mathcal{F}_0(X) = \omega X.$$

Sean $U^*, V^* \in \mathcal{B}$, ya que $U^* \cap V^* = (U \cap V)^* \in \mathcal{B}$, entonces \mathcal{B} genera una topología para ωX tal que \mathcal{B} es base para dicha topología. □

Definición 3.40. Sea (X, τ) un espacio topológico \mathbf{T}_1 . Al espacio topológico ωX con la topología generada por $\mathcal{B} = \{U^* : U \in \tau\}$, como base, le llamaremos la extensión de Wallman del espacio X .

Observemos que $F \subseteq \omega X$ es cerrado si y solo si $F = E_*$, con $E \subseteq X$ cerrado.

Teorema 3.41. Sean X un espacio \mathbf{T}_1 y ωX su extensión de Wallman. Entonces se cumplen:

1. ωX es un espacio \mathbf{T}_1 .
2. (X, τ) es subespacio de ωX .

3. X es un subespacio denso en ωX .
4. ωX es un espacio compacto.
5. La función inclusión $\omega^* : X \longrightarrow \omega X$, tal que $\omega^*(x) = x$, es un encaje.
6. Para cualquier función continua $f : X \longrightarrow Y$, con Y un espacio Hausdorff y compacto, existe una función continua $F : \omega X \longrightarrow Y$ continua tal que $F \circ \omega = f$.

Demostración:

1. Sea $p \in \omega X$. Veamos que $\{p\}$ es un subconjunto cerrado en ωX .
 - a) Supongamos que $p \in X$, entonces $\{p\} \in \mathcal{D}(X)$. Luego, $\{p\}_*$ es un subconjunto cerrado en ωX . Notemos que $\{p\}_* = \{p\} \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : \{p\} \in \mathcal{F}\}$, y dado que el único $\mathcal{D}(X)$ -ultrafiltro tal que $\{x\} \in \mathcal{F}$ es $\mathcal{F}(x)$, el $\mathcal{D}(X)$ -ultrafiltro generado por x , no es libre, entonces $\{p\}_* = \{p\}$.
 - b) Supongamos que $p \in \mathcal{F}_0(X)$. Afirmamos que

$$\{p\} = \bigcap_{E \in p} E_*$$

Sea $E \in p$, entonces $p \in E_*$, así, $p \in \bigcap_{E \in p} E_*$. Supongamos que $x \in \bigcap_{E \in p} E_*$. Si $x \in X$, entonces $x \in E$ para cada $E \in p$, es decir, $x \in \bigcap p$, sin embargo, esto contradice que p es un $\mathcal{D}(X)$ -ultrafiltro libre. Por tanto, $x \in \mathcal{F}_0(X)$. Si $x \neq p$, entonces existen $E \in p$ y $F \in x$ tales que $E \cap F = \emptyset$. Por tanto, $E \notin x$. Así, $x \notin E_*$, sin embargo, esto contradice que $x \in \bigcap_{E \in p} E_*$.

Ya que $\{p\} = \bigcap_{E \in p} E_*$, y cada E_* es cerrado en ωX , entonces $\{p\}$ es cerrado en ωX .

2. Sea $U \in \tau$, entonces $U = U^* \cap X$. Así, todo conjunto abierto en X es un conjunto abierto en el subespacio X , respecto de ωX . Inversamente, si $U^* \cap X$ es un conjunto abierto, básico, en el subespacio, entonces $U^* \cap X = U \in \tau$.

3. Sea $\emptyset \neq U^* \in \mathcal{B}$, con $U \in \tau$. Ya que $U^* \neq \emptyset$, entonces $U \neq \emptyset$, luego, $U^* \cap X = U \neq \emptyset$. Por tanto, $cl_{\omega X} X = \omega X$.
4. Sea $\mathcal{U} = \{F_{s^*} : s \in S\}$, con F_s un subconjunto cerrado en X , una familia de subconjuntos cerrados de ωX con la PIF. Para cada $s \in S$, existe T_s tal que

$$F_{s^*} = \bigcap_{t \in T_s} B_{t^*}.$$

Sean $T = \bigcup_{s \in S} T_s$ y $\mathcal{A} = \{B_{t^*} : t \in T\}$. Afirmamos que \mathcal{A} tiene la PIF. Sean

$$(B_{t_1,1})^*, \dots, (B_{t_1,r_1})^*, \dots, (B_{t_k,1})^*, \dots, (B_{t_k,r_k})^* \in \mathcal{A}$$

de tal forma que $(t_i, 1), \dots, (t_i, r_i) \in T_{s_i}$. Entonces

$$\emptyset \neq \bigcap_{j=1}^k (F_{s_j})^* = \bigcap_{j=1}^k \bigcap_{t \in T_{s_j}} (B_t)^* \subseteq \bigcap_{j=1}^k \bigcap_{l=1}^{r_j} (B_{t_j,l})^*$$

Afirmamos que $\mathcal{C} = \{B_t : t \in T\}$ tiene la PIF. Supongamos que $t_1, \dots, t_n \in T$ tales que $\bigcap_{i=1}^n B_{t_i} = \emptyset$. Luego, $\bigcap_{i=1}^n (B_{t_i})^* = (\bigcap_{i=1}^n B_{t_i})^* = (\bigcap_{i=1}^n B_{t_i}) \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : \bigcap_{i=1}^n B_{t_i} \in \mathcal{F}\} = \emptyset$, lo cual contradice que \mathcal{A} tiene la PIF. Por el Teorema 1.23, existe $\mathcal{F} \in \mathcal{F}(X)$ tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$.

- a) Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, entonces $\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X)$ y ya que para cada $t \in T$, $B_t \in \mathcal{F}$, concluimos que $\mathcal{F} \in \bigcap_{t \in T} (B_t)^* = \bigcap \mathcal{U}$.
- b) Si $\bigcap \mathcal{F} = \{x\}$, entonces para cada $t \in T$, $x \in B_t \subseteq (B_t)^*$. Luego, $x \in \bigcap_{t \in T} (B_t)^* = \bigcap \mathcal{U}$.

En cualquier caso, $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Por tanto, ωX es compacto.

5. Ya que X es subespacio de ωX , entonces es claro que $\omega^* : X \rightarrow \omega X$ es una función continua e inyectiva. Dado que si $U \in \tau$, y $\omega^*[U] = U = U^* \cap X = U^* \cap \omega^*[X]$, entonces $\omega^* \upharpoonright X : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo.
6. Sean Y un espacio topológico Hausdorff y compacto y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Sean F_1 y F_2 subconjuntos cerrados y ajenos del espacio Y . Ya que f es una función

continua, entonces $f^{-1}[F_1]$ y $f^{-1}[F_2]$ son subconjuntos cerrados y ajenos de X . Luego, $(f^{-1}[F_1])_*$ y $(f^{-1}[F_2])_*$ son subconjuntos cerrados de ωX . Además,

$$(f^{-1}[F_1])_* \cap (f^{-1}[F_2])_* = (f^{-1}[F_1] \cap f^{-1}[F_2])_* = \emptyset.$$

Dado que $f^{-1}[F_i] \subseteq (f^{-1}[F_i])_*$ y $(f^{-1}[F_2])_*$ es un conjunto cerrado en ωX , entonces concluimos que

$$cl_{\omega X}(f^{-1}[F_1]) \cap cl_{\omega X}(f^{-1}[F_2]) = \emptyset.$$

Por el Teorema 1.34, existe $F : \omega X \rightarrow Y$ una función continua que extiende a f . Concluimos que $F \circ \omega = f$.

□

Teorema 3.42. Sean (X, τ) un espacio topológico \mathbf{T}_1 y ωX su extensión de Wallman. Entonces ωX es un espacio Hausdorff si y solo si X es un espacio \mathbf{T}_4 .

Demostración: Supongamos que ωX es un espacio de Hausdorff. Sean E y F subconjuntos cerrados y ajenos en X . Entonces E_* y F_* son subconjuntos cerrados y ajenos en ωX . Ya que ωX es Hausdorff y compacto, entonces es normal. Así que existen U y V subconjuntos abiertos de ωX tales que $E_* \subseteq U$, $F_* \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Ya que \mathcal{B} es una base para ωX y E_* y F_* son conjuntos compactos, por ser subconjuntos cerrados de un espacio compacto, entonces existe $(U_1)^*, \dots, (U_n)^*, (V_1)^*, \dots, (V_m)^* \in \mathcal{B}$ tales que $E_* \subseteq \bigcup_{i=1}^n (U_i)^* \subseteq U$ y $F_* \subseteq \bigcup_{i=1}^m (V_i)^* \subseteq V$. Definamos $A = \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $B = \bigcup_{i=1}^m V_i$. Ya que $\bigcup_{i=1}^n (U_i)^* = (\bigcup_{i=1}^n U_i)^*$, entonces $A \in \tau$ y $E_* \subseteq A^* \subseteq U$. Análogamente, $F_* \subseteq B^* \subseteq V$. Dado que $A^* \cap B^* \subseteq U \cap V = \emptyset$, entonces $A \cap B = \emptyset$. Finalmente, $E = E_* \cap X \subseteq A^* \cap X = A$ y de la misma forma $F \subseteq B$. Por tanto, X es un espacio normal.

Supongamos que X es un espacio \mathbf{T}_4 y sean $p, q \in \omega X$, con $p \neq q$.

1. Supongamos que $p, q \in X$. Ya que X es un espacio Hausdorff, en particular, entonces existen $U, V \in \tau$ tales que $p \in U$, $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Entonces U^* y V^* son subconjuntos abiertos en ωX ajenos tales que $p \in U^*$ y $q \in V^*$.

2. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $q \in X$ y $p \in \mathcal{F}_0(X)$. Ya que $\bigcap p = \emptyset$, entonces existe $E \in p$ tal que $q \notin E$. Entonces existen $U, V \in \tau$ tales que $q \in V$, $E \subseteq U$ y $U \cap V = \emptyset$. Así, U^* y V^* son subconjuntos abiertos, y ajenos, de ωX . Es claro que $q \in V^*$. Por otro lado, ya que $E \in p$ y $E \subseteq U$, entonces $p \in U^*$.
3. Supongamos que $p, q \in \mathcal{F}_0(X)$. Ya que $p \neq q$, entonces existen $E \in p$ y $F \in q$ tales que $E \cap F = \emptyset$. Por la normalidad de X , existen $U, V \in \tau$ tales que $E \subseteq U$, $F \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Entonces U^* y V^* son subconjuntos abiertos de ωX tales que $p \in U^*$, $q \in V^*$ y $U^* \cap V^* = \emptyset$.

□

Corolario 3.43. *Sea X un espacio T_4 . Entonces $(\omega X, \omega^*)$, donde ωX la extensión de Wallman y $\omega^* : X \rightarrow \omega X$ tal que $\omega^*(x) = x$, es una compactación de X equivalente a la compactación de Stone-Čech del espacio X .*

Si X es un espacio discreto, entonces existe la compactación de Stone-Čech del espacio X , βX . Por otro lado, la extensión de Wallman del espacio X , ωX , existe y dicha extensión es una compactación equivalente a la compactación βX . Además, si X es un espacio discreto, entonces $\mathcal{D}(X) = \mathcal{P}(X)$. Así,

$$\mathcal{F}(X) = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro en } \mathcal{P}(X)\}$$

y

$$\mathcal{F}_0(X) = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro libre en } \mathcal{P}(X)\}.$$

Sea $A \subseteq X$, entonces A es un subconjunto cerrado-abierto en X y utilizando la Proposición 1.26, no es difícil ver que

$$A_* = A^*.$$

Por tanto, ωX es un espacio de dimensión cero. Por la Proposición 1.27 y el Axioma de Elección, $\mathcal{F}_0(X) \neq \emptyset$.

Si X es un espacio discreto, existe otra compactación equivalente a βX .

Sean X un conjunto y

$$\alpha X = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro en } \mathcal{P}(X)\}.$$

Sea $A \subseteq X$, definimos

$$\widehat{A} = \{\mathcal{F} \in \alpha X : A \in \mathcal{F}\}.$$

Proposición 3.44. *Sea X un conjunto. Entonces se cumplen*

1. $\widehat{A} = \emptyset$ si y solo si $A = \emptyset$.
2. $\widehat{A} = \alpha X$ si y solo si $A = X$.
3. $\widehat{A} = \widehat{B}$ si y solo si $A = B$.
4. $\widehat{A} \cap \widehat{B} = \widehat{A \cap B}$.
5. $\widehat{A} \cup \widehat{B} = \widehat{A \cup B}$.
6. $\alpha X \setminus \widehat{A} = \widehat{X \setminus A}$.
7. $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$ si y solo si $A \subseteq B$.

Demostración:

1. Supongamos que $A \neq \emptyset$, entonces $\{A\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tiene la PIF, por tanto existe \mathcal{F} un ultrafiltro tal que $A \in \mathcal{F}$. Así, $\widehat{A} \neq \emptyset$. La otra implicación es trivial.
2. Supongamos que $\widehat{A} = \alpha X$. Sea $x \in X$, entonces $\mathcal{F}(x) \in \widehat{A}$, así, $A \in \mathcal{F}(x)$. Ya que $\{x\} \in \mathcal{F}(x)$, entonces $\{x\} \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in A$. Por tanto, $A = X$. La otra implicación es trivial.
3. Sea $x \in A$, entonces $A \in \mathcal{F}(x)$. Así, $\mathcal{F}(x) \in \widehat{A} = \widehat{B}$. Por tanto, $B \in \mathcal{F}(x)$. Entonces $\{x\} \cap B \neq \emptyset$, es decir, $x \in B$. Análogamente, $B \subseteq A$. La otra implicación es trivial.
4. Supongamos que $\mathcal{F} \in \widehat{A} \cap \widehat{B}$, entonces $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$. Luego, $A \cap B \in \mathcal{F}$. Por otro lado, si $A \cap B \in \mathcal{F}$ ya que $A \cap B \subseteq A, B$, entonces $A, B \in \mathcal{F}$.

5. Si $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{F}$. Por otro lado, si $A \cup B \in \mathcal{F}$, entonces por la Proposición 1.26, $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$.
6. Ya que $\widehat{A \cup X \setminus A} = (A \cup \widehat{(X \setminus A)}) = \widehat{X} = \alpha X$ y $\widehat{A \cap X \setminus A} = (A \cap \widehat{(X \setminus A)}) = \widehat{\emptyset} = \emptyset$, entonces $\widehat{X \setminus A} = \alpha X \setminus \widehat{A}$.
7. Supongamos que $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$. Entonces $\widehat{B} = \widehat{A \cup B} = \widehat{A \cup B}$. Así, por el inciso 3, $B = A \cup B$, es decir, $A \subseteq B$. Por otro lado, si $A \subseteq B$, entonces $A = A \cap B$, así, $\widehat{A} = \widehat{A \cap B} = \widehat{A} \cap \widehat{B} \subseteq \widehat{B}$.

□

Proposición 3.45. *Sea X un conjunto. Entonces $\mathcal{B}_\alpha = \{\widehat{A} : A \subseteq X\}$ genera una topología para αX . Dicho espacio topológico es un espacio de Hausdorff. Además, si X es un espacio discreto, entonces la función $\alpha : X \rightarrow \alpha X$ definida por $\alpha(x) = \mathcal{F}(x)$, donde $\mathcal{F}(x) = \{A \subseteq X : x \in A\}$ es el ultrafiltro generado por $\{x\}$ en $\mathcal{P}(X)$, es un encaje.*

Demostración: Por los incisos 2 y 4, \mathcal{B}_α genera una topología para αX . Sean $p, q \in \alpha X$ con $p \neq q$. Entonces existen $A \in p$ y $B \in q$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Por tanto, $p \in \widehat{A}$, $q \in \widehat{B}$ y $\widehat{A} \cap \widehat{B} = \widehat{A \cap B} = \widehat{\emptyset} = \emptyset$.

Ya que X es un espacio discreto, entonces α es una función continua. Sean $x, y \in X$ tales que $\alpha(x) = \alpha(y)$, entonces $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(y)$. Así, $x = y$. Sea $A \subseteq X$, entonces $\alpha[A] = \{\mathcal{F}(x) : x \in A\} = \bigcup\{\{\mathcal{F}(x)\} : x \in A\} = \bigcup\{\widehat{\{x\}} : x \in A\}$. Por tanto, α es una función abierta. Concluimos que α es un encaje. □

Teorema 3.46. *Sea X un espacio discreto. Entonces*

1. *La función $\psi : \omega X \rightarrow \alpha X$ definida por*

$$\psi(p) = \begin{cases} \mathcal{F}(p) & \text{si } p \in X \\ p & \text{si } p \in \mathcal{F}_0(X) \end{cases}$$

es un homeomorfismo tal que $\psi \circ \omega^ = \alpha$.*

2. *$(\alpha X, \alpha)$ es una compactación para el espacio X , la cual es equivalente a la compactación de Stone-Čech.*

Demostración:

1. Es claro que ψ es una función inyectiva. Además, ya que todo ultrafiltro es libre ó es principal, entonces ψ es sobreyectiva. Veamos que f es continua. Sea $\hat{A} \in \mathcal{B}_\alpha$, ya que A es un conjunto abierto en X y $A_* = A^*$, entonces $\psi^{-1}[\hat{A}] = \{p \in \omega X : A \in \psi(p)\} = \{x \in X : A \in \mathcal{F}(x)\} \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : A \in \mathcal{F}\} = A \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : A \in \mathcal{F}\} = A^*$. Veamos ahora que ψ es abierta. Sea $A \subseteq X$, entonces $\psi[A^*] = \psi[A] \cup \psi[\{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : A \in \mathcal{F}\}] = \{\mathcal{F}(x) : x \in A\} \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0(X) : A \in \mathcal{F}\} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}(X) : A \in \mathcal{F}\} = \hat{A}$. Sea $x \in X$, entonces $(\psi \circ \omega^*)(x) = \psi(\omega^*(x)) = \psi(x) = \mathcal{F}(x) = \alpha(x)$. Por tanto, $\psi \circ \omega^* = \alpha$.
2. Ya que ωX y αX son espacios homeomorfos, entonces αX es un espacio Hausdorff y compacto. Por la proposición anterior, $\alpha : X \rightarrow \alpha X$ tal que $\alpha(x) = \mathcal{F}(x)$ es un encaje. Y ya que $\alpha[X]$ es homeomorfo a X y X es denso en ωX , entonces $\alpha[X]$ es denso en αX . Por tanto, $(\alpha X, \alpha)$ es una compactación del espacio X ; y por el inciso anterior, αX es una compactación equivalente a ωX .

□

3.8. Más espacios topológicos

A continuación presentaremos más ejemplos de espacios topológicos que no tienen un nombre bien establecido en la literatura, por tanto, cuando nos refiramos a la topología de dicho espacio, nos estaremos refiriendo a las topología construidas en ese ejemplo.

3.8.1. Ejemplo 1

Sea

$$X = [(\omega_1 + 1) \times (\omega + 1)] \setminus \{(\omega_1, n) : n \in \omega\}.$$

Para cada $x \in X$ definamos $\mathcal{B}(x)$ como sigue:

1. si $x = (\alpha, n) \in \omega_1 \times \omega$, entonces sea

$$\mathcal{B}(x) = \{ \{(\alpha, n)\} \};$$

2. si $x = (\alpha, \omega) \in \omega_1 \times \{\omega\}$. Para cada $n < \omega$ definamos $U_\alpha(n)$ como

$$U_\alpha(n) = \{(\alpha, m) : n \leq m \leq \omega\}.$$

Sea

$$\mathcal{B}(x) = \{U_\alpha(n) : n < \omega\}.$$

3. si $x = (\omega_1, \omega)$. Para cada $\alpha < \omega_1$ definamos $U_{\omega_1}(\alpha)$ como sigue

$$U_{\omega_1}(\alpha) = \{(\beta, n) : \alpha \leq \beta < \omega_1 \text{ y } n < \omega\} \cup \{(\omega_1, \omega)\}.$$

Sea

$$\mathcal{B}(x) = \{U_{\omega_1}(\alpha) : \alpha < \omega_1\}.$$

Veamos primero que $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ satisface las condiciones necesarias para generar un espacio topológico de tal forma que $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ resulta ser un sistema de vecindades para dicho espacio, [6].

Proposición 3.47. $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ genera un espacio topológico en X .

Demostración: Veamos que $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ satisface las condiciones de 2 de la Proposición 1.28.

Es claro que para cada $x \in X$, $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ y si $U \in \mathcal{B}(x)$, entonces $x \in U$.

Supongamos que $y \in X$, $U \in \mathcal{B}(y)$ y $x \in U$. Mostremos que existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V \subseteq U$.

1. Si $y = (\alpha, n) \in \omega_1 \times \omega$, entonces $U = \{(\alpha, n)\}$ y $x = y$, así que $V = U$ satisface lo deseado.
2. Si $y = (\alpha, \omega)$, con $\alpha < \omega_1$, entonces existe $n < \omega$ tal que $U = U_\alpha(n)$. Ya que $x \in U_\alpha(n)$, si $x = y$ entonces trivialmente $U = V$ cumple lo deseado; por tanto, supongamos que $x \neq y$, así, $x = (\alpha, m)$, con $n \leq m < \omega$. Entonces $V = \{(\alpha, m)\}$ satisface que $V \in \mathcal{B}(x)$ y $V \subseteq U$.

3. Si $y = (\omega_1, \omega)$, entonces $U = U_{\omega_1}(\alpha)$, para algún $\alpha < \omega_1$. Como en el caso anterior, supongamos que $x \neq y$, entonces $x = (\beta, n)$, con $\alpha \leq \beta < \omega_1$ y $n < \omega$. Entonces $V = \{(\beta, m)\}$ cumple lo deseado.

Sean $x \in X$ y $U, V \in \mathcal{B}(x)$. Mostremos que $U \cap V \in \mathcal{B}(x)$.

1. Supongamos que $x = (\alpha, n) \in \omega_1 \times \omega$. Entonces $U = \{(\alpha, n)\} = V$.
2. Supongamos que $x = (\alpha, \omega)$, con $\alpha < \omega_1$. Entonces existen $n, m < \omega$ tales que $U = U_\alpha(n)$ y $V = U_\alpha(m)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $n \leq m$, entonces $U \cap V = U_\alpha(m) \in \mathcal{B}(x)$.
3. Supongamos que $x = (\omega_1, \omega)$. Entonces existen $\alpha, \beta < \omega_1$ tales que $U = U_{\omega_1}(\alpha)$ y $V = U_{\omega_1}(\beta)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\alpha \leq \beta$. Entonces $U_{\omega_1}(\alpha) \cap U_{\omega_1}(\beta) = U_{\omega_1}(\beta)$.

□

En lo que resta de este ejemplo de espacio topológico, a la topología generada por $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ para X la denotaremos por τ .

Proposición 3.48. *Consideremos el espacio topológico X como antes. Entonces se cumplen:*

1. X es un espacio topológico Hausdorff.
2. X no es un espacio Lindelöf.
3. X es un espacio casi Lindelöf.
4. $Y = \omega_1 \times \omega \cup \{(\omega_1, \omega)\}$ es un subespacio denso y Lindelöf de X .

Demostración:

1. Sean $x, y \in X$ diferentes. Veamos que existen abiertos U y V ajenos tales que $x \in U$ y $y \in V$.
 - a) Supongamos que $x = (\alpha, n)$, con $\alpha < \omega_1$ y $n < \omega$.

- 1) Si $y = (\beta, m)$ con $\beta < \omega_1$ y $m < \omega$. Entonces ya que $x \neq y$, entonces $U = \{(\alpha, n)\}$ y $V = \{(\beta, m)\}$ cumplen lo deseado.
 - 2) Si $y = (\beta, \omega)$, con $\alpha < \omega_1$, entonces $U = \{(\alpha, n)\}$ y $V = U_\beta(n+1)$ cumplen lo deseado.
 - 3) Si $y = (\omega_1, \omega)$, entonces $U = \{(\alpha, n)\}$ y $V = U_{\omega_1}(\alpha+1)$ satisfacen lo deseado.
- b) Supongamos que $x = (\alpha, \omega)$, con $\alpha < \omega_1$.
- 1) Si $y = (\beta, m)$, entonces este caso es similar al caso 1 b).
 - 2) Si $y = (\beta, \omega)$, entonces $\alpha \neq \beta$, por tanto, $U = U_\alpha(0)$ y $V = U_\beta(0)$ cumplen lo deseado.
 - 3) Supongamos que $y = (\omega_1, \omega)$. Entonces $U = U_\alpha(0)$ y $V = U_{\omega_1}(\alpha+1)$ satisfacen lo deseado.
- c) Supongamos que $x = (\omega_1, \omega)$.
- 1) Si $y = (\beta, m)$, entonces estamos en el caso 1 c).
 - 2) Si $y = (\beta, \omega)$, entonces estamos en el caso 2 b).
2. Probemos ahora que X no es un espacio Lindelöf. Consideremos la cubierta abierta de básicos

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha(0) : \alpha < \omega_1\} \cup \{U_{\omega_1}(0)\}.$$

Sea \mathcal{V} una subcolección numerable de \mathcal{U} . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{V} = \{U_{\alpha_n}(0) : n \in \omega \text{ y } \alpha_n < \omega_1\} \cup \{U_{\omega_1}(0)\}$. Ya que ω_1 es regular, entonces existe $\beta > \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Luego, $(\beta, \omega) \notin \bigcup \mathcal{V}$.

3. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de X . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que \mathcal{U} es una cubierta abierta de conjuntos abiertos básicos. Entonces existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $(\omega_1, \omega) \in U_0$. Ya que \mathcal{U} es una cubierta de conjuntos abiertos básicos, entonces existe $\alpha < \omega_1$ tal que $U_0 = U_{\omega_1}(\alpha)$. Así, $U_0 = \{(\beta, n) : \alpha \leq \beta \text{ y } n < \omega\} \cup \{(\omega_1, \omega)\}$.

Afirmamos que $\overline{U_0} = \{(\beta, n) : \alpha \leq \beta \text{ y } n \leq \omega\} \cup \{(\omega_1, \omega)\}$. Sea $\alpha \leq \beta$, ya que para cada $n < \omega$, $(\beta, n) \in U_\beta(n) \cap U_0$ y dado que $\mathcal{B}((\beta, \omega))$ es una base local de vecindades para (β, ω) , entonces $(\beta, \omega) \in \overline{U_0}$. Por otro lado, supongamos que

$x \notin \{(\beta, n) : \alpha \leq \beta \text{ y } n \leq \omega\} \cup \{(\omega_1, \omega)\}$. Entonces $x = (\beta, n)$ con $\beta < \alpha$ y $n \leq \omega$. En cualquier caso, $U = U_\beta(0)$ es una vecindad de x tal que $U \cap U_0 = \emptyset$. Por tanto, $x \notin \overline{U_0}$.

Dado que $X \setminus \overline{U_0} = \{(\beta, n) : \beta < \alpha \text{ y } n \leq \omega\}$, entonces $X \setminus \overline{U_0}$ es un conjunto numerable, pues $\alpha < \omega_1$. Para cada $x \in X \setminus \overline{U_0}$, elijamos $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Sea $\mathcal{V} = \{U_x : x \in X \setminus \overline{U_0}\} \cup \{U_0\}$. Entonces se cumple que $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$ tal que $X = \bigcup \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\}$.

4. Para ver que Y es denso, mostremos que todos los básicos de $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ intersectan a Y . Es claro que si $x \in Y$, entonces todos los elementos de $\mathcal{B}(x)$ intersectan a Y . Sea $x = (\alpha, \omega)$, con $\alpha < \omega_1$. Sea $U_\alpha(n) \in \mathcal{B}(x)$, con $n < \omega$. Entonces $(\alpha, n) \in U_\alpha(n) \cap Y$.

Veamos ahora que Y es Lindelöf. Sea \mathcal{U} una colección de abiertos, de básicos, en X cuya unión cubre a Y . Entonces existe $\alpha < \omega_1$ tal que $(\omega_1, \omega) \in U_{\omega_1}(\alpha)$. Ya que $Y \setminus U_{\omega_1}(\alpha) = \{(\beta, n) : \beta < \alpha \text{ y } n < \omega\}$ es numerable, entonces podemos elegir una colección numerable de elementos de \mathcal{U} que cubran a Y .

□

3.8.2. Ejemplo 2

Sean $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un subconjunto denso y numerable en \mathbb{R} y κ un cardinal infinito no numerable. Sea

$$X = Q \cup \{(a, \kappa) : a \in A\}, \text{ donde } Q = \mathbb{Q} \times \kappa.$$

Para cada $x \in X$, definamos $\mathcal{B}(x)$ como sigue:

1. Si $x = (q, \alpha) \in Q$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$U_n(x) = (B_{\frac{1}{n}}(q) \cap \mathbb{Q}) \times \{\alpha\}$$

donde $B_{\frac{1}{n}}(q)$ es la bola Euclideana, usual en \mathbb{R} , con centro en q y radio $\frac{1}{n}$. Sea

$$\mathcal{B}(x) = \{U_n(x) : n \in \mathbb{N}\}.$$

2. Si $x = (a, \kappa)$, con $a \in A$, entonces para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$U_{n,F}(x) = [(B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A) \times \{\kappa\}] \cup [(B_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathbb{Q}) \times (\kappa \setminus F)].$$

Sea

$$\mathcal{B}(x) = \{U_{n,F}(x) : n \in \mathbb{N} \text{ y } F \in [\kappa]^{<\omega}\}.$$

Proposición 3.49. *La colección $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ genera una topología en X de tal forma que $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ es un sistema de vecindades para dicha topología¹.*

Demostración:

1. Es claro que para cada $x \in X$, $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ y que si $U \in \mathcal{B}(x)$, entonces $x \in U$.
2. Sean $y \in X$, $U \in \mathcal{B}(y)$ y $x \in U$.

a) Supongamos que $y \in Q$, entonces existen $q \in Q$ y $\alpha < \kappa$ tales que $y = (q, \alpha)$. Por tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U = U_n(y) = (B_{\frac{1}{n}}(q) \cap Q) \times \{\alpha\}$. Ya que $x \in U$, entonces existen $r \in B_{\frac{1}{n}}(q) \cap Q$ tal que $x = (r, \alpha)$. Luego, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{m}}(r) \subseteq B_{\frac{1}{n}}(q)$. Sea $V = (B_{\frac{1}{m}}(r) \cap Q) \times \{\alpha\}$. Claramente $V \in \mathcal{B}(x)$ y $V \subseteq U$.

b) Supongamos que $y = (a, \kappa)$, para algún $a \in A$. Entonces existen $n \in \omega$ y $F \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $U = U_{n,F}(y) = [(B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A) \times \{\kappa\}] \cup [(B_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathbb{Q}) \times (\kappa \setminus F)]$.

Si $x \in (B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A) \times \{\kappa\}$, entonces existe $b \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A$ tal que $x = (b, \kappa)$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{m}}(b) \subseteq B_{\frac{1}{n}}(a)$, definamos $V = [(B_{\frac{1}{m}}(b) \cap A) \times \{\kappa\}] \cup [(B_{\frac{1}{m}}(b) \cap \mathbb{Q}) \times (\kappa \setminus F)]$. Entonces $V \in \mathcal{B}(x)$ y $V \subseteq U$.

Si $x \in (B_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathbb{Q}) \times (\kappa \setminus F)$, entonces existen $q \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathbb{Q}$ y $\alpha \in \kappa \setminus F$ tales que $x = (q, \alpha)$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{m}}(q) \subseteq B_{\frac{1}{n}}(a)$ y definamos $V = (B_{\frac{1}{m}}(q) \cap \mathbb{Q}) \times \{\alpha\}$. No es difícil ver que $V \in \mathcal{B}(x)$ y $V \subseteq U$.

3. Sean $x \in X$, $U, V \in \mathcal{B}(x)$.

¹El lector que así lo desee, puede consultar [26]

- a) Supongamos que $x \in \mathbb{Q}$, entonces existen $q \in \mathbb{Q}$ y $\alpha < \kappa$ tal que $x = (q, \alpha)$. Entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $U = (B_{\frac{1}{n}}(q) \cap \mathbb{Q}) \times \{\alpha\}$ y $V = (B_{\frac{1}{m}}(q) \cap \mathbb{Q}) \times \{\alpha\}$. Sea $k = \max\{n, m\}$, entonces $B_{\frac{1}{k}}(q) \subseteq B_{\frac{1}{n}}(q), B_{\frac{1}{k}}(q) \subseteq B_{\frac{1}{m}}(q)$. Definamos $W = (B_{\frac{1}{k}}(q) \cap \mathbb{Q}) \times \{\alpha\}$, entonces $W \in \mathcal{B}(x)$ y $W \subseteq U \cap V$.
- b) Supongamos que $x = (a, \kappa)$, para algún $a \in A$. Entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ y $F, G \in [\kappa]^{<\omega}$ tales que $U = [(B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A) \times \{\kappa\}] \cup [(B_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathbb{Q}) \times (\kappa \setminus F)]$ y $V = [(B_{\frac{1}{m}}(a) \cap A) \times \{\kappa\}] \cup [(B_{\frac{1}{m}}(a) \cap \mathbb{Q}) \times (\kappa \setminus G)]$. Sea $k = \max\{n, m\}$, entonces $B_{\frac{1}{k}}(a) \subseteq B_{\frac{1}{n}}(a), B_{\frac{1}{k}}(a) \subseteq B_{\frac{1}{m}}(a)$. Definamos $W = [(B_{\frac{1}{k}}(a) \cap A) \times \{\kappa\}] \cup [(B_{\frac{1}{k}}(a) \cap \mathbb{Q}) \times (\kappa \setminus (F \cup G))]$, entonces $W \in \mathcal{B}(x)$ y $W \subseteq U \cap V$.

□

Por comodidad, denotemos al espacio anterior por (X, τ) .

Lema 3.50. \mathbb{Q} con la topología del subespacio heredada por \mathbb{R} es un espacio de dimensión cero.

Demostración: Sea $\mathcal{B} = \{(x, y) \cap \mathbb{Q} : x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ y } x < y\}$. Es claro que \mathcal{B} es base para \mathbb{Q} . Sea $q \in \mathbb{Q} \setminus (x, y)$, entonces $q < x$ ó $y < q$. Si $y < q$, entonces $q \in U = (y, q + \pi) \cap \mathbb{Q} \in \mathcal{B}$. Si $q < x$, entonces $q \in U = (q - \pi, x) \cap \mathbb{Q} \in \mathcal{B}$. En cualquiera de los dos casos, $U \subseteq \mathbb{Q} \setminus (x, y)$. □

Proposición 3.51. El espacio (X, τ) satisface las siguientes cosas:

1. X es Hausdorff.
2. X tiene dimensión cero.
3. X es débilmente Lindelöf.

Demostración:

1. Sean $x, y \in X$ diferentes.

a) Supongamos que $x = (q, \alpha) \in Q$. Si $y \in Q$, entonces existen $r \in \mathbb{Q}$ y $\beta < \kappa$ tales que $y = (r, \beta)$. Ya que $x \neq y$, entonces $q \neq r$ o $\alpha \neq \beta$. En caso de que $\alpha \neq \beta$, entonces $U = U_1(x)$ y $V = U_1(y)$ son abiertos ajenos. Si $q \neq r$, entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $B_{\frac{1}{n}}(q) \cap B_{\frac{1}{m}}(r) = \emptyset$. Si $U = U_n(q)$ y $V = U_m(y)$ satisfacen lo deseado.

Si $y = (a, \kappa)$, con $a \in A$, entonces definamos $F = \{\alpha\}$. Si $U = U_1(x)$ y $V = U_{1,F}(y)$, entonces U y V satisfacen lo deseado.

b) Supongamos que $x = (a, \kappa)$, con $a \in A$. Si $y = (q, \alpha) \in Q$, entonces $U = U_{1,\{\alpha\}}(x)$ y $V = U_1(y)$ satisfacen lo deseado.

Si $y = (b, \kappa)$, con $b \in A$, entonces ya que $x \neq y$, tenemos que $a \neq b$. Por tanto, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $B_{\frac{1}{n}}(a) \cap B_{\frac{1}{m}}(b) = \emptyset$. Luego, $U = U_{n,\emptyset}(x)$ y $V = U_{m,\emptyset}(y)$ son vecindades ajenas de x y y , respectivamente.

2. Veamos que X es un espacio de dimensión cero. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha \cap \mathbb{Q} : \alpha < \mathfrak{c}\}$ la base de subconjuntos cerrado-abiertos para \mathbb{Q} del lema anterior. Definamos

$$\mathcal{B}'_1 = \{(U_\alpha \cap \mathbb{Q}) \times \{\beta\} : U_\alpha \in \mathcal{U} \text{ y } \beta < \kappa\}$$

y

$$\mathcal{B}'_2 = \{[(U_\alpha \cap A) \times \{\kappa\}] \cup [(U_\alpha \cap \mathbb{Q}) \times (\kappa \setminus F)] : U_\alpha \in \mathcal{U} \text{ y } F \in [\kappa]^{<\omega}\}$$

y sea

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \cup \mathcal{B}'_2.$$

Afirmamos que \mathcal{B}' es una base de subconjuntos cerrado-abiertos para X .

a) Veamos que $\mathcal{B}' \subseteq \tau$. Sean $(U_\alpha \cap \mathbb{Q}) \times \{\beta\} \in \mathcal{B}'_1$ y $x \in (U_\alpha \cap \mathbb{Q}) \times \{\beta\}$, entonces existe $q \in U_\alpha \cap \mathbb{Q}$ tal que $x = (q, \beta)$. Ya que $\{B_{\frac{1}{n}}(q) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades para q en \mathbb{R} , entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(q) \subseteq U_\alpha$. Por tanto, $x \in U_n(x) \subseteq (U_\alpha \cap \mathbb{Q}) \times \{\beta\}$, así, $(U_\alpha \cap \mathbb{Q}) \times \{\beta\}$ es abierto en X .

Supongamos que $x \in [(U_\alpha \cap A) \times \{\kappa\}] \cup [(U_\alpha \cap \mathbb{Q}) \times (\kappa \setminus F)] \in \mathcal{B}'_2$. Si $x \in (U_\alpha \cap A) \times \{\kappa\}$, entonces existe

$a \in U_\alpha \cap A$ tal que $x = (a, \kappa)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(a) \subseteq U_\alpha$. Entonces $x \in U_{n,F}(x) \subseteq [(U_\alpha \cap A) \times \{\kappa\}] \cup [(U_\alpha \cap \mathbb{Q}) \times (\kappa \setminus F)]$.

Por otro lado, si $x \in (U_\alpha \cap \mathbb{Q}) \times (\kappa \setminus F)$, entonces existen $q \in U_\alpha \cap \mathbb{Q}$ y $\beta \in \kappa \setminus F$ tales que $x = (q, \beta)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(q) \subseteq U_\alpha$, entonces $x \in U_n(x) \subseteq [(U_\alpha \cap A) \times \{\kappa\}] \cup [(U_\alpha \cap \mathbb{Q}) \times (\kappa \setminus F)]$.

b) Veamos que los elementos de \mathcal{B}' son cerrados. Sean $U \in \mathcal{B}'$ y $x \notin U$. Supongamos que $U = (U_\alpha \cap \mathbb{Q}) \times \{\beta\} \in \mathcal{B}'_1$.

i) Si $x = (a, \kappa)$, con $a \in A$, entonces $x \in U_{1,\{\beta\}}(x) \subseteq X \setminus U$.

ii) Si $x = (q, \gamma) \in Q$, ya que $x \notin U$, entonces $x \notin U_\alpha$ o $\gamma \neq \beta$. Si $\gamma \neq \beta$, entonces $x \in U_1(x) \subseteq X \setminus U$. Si $q \notin U_\alpha$, existe $U_\delta \in \mathcal{C}$ tal que $q \in U_\delta \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus U_\alpha)$, pues \mathcal{C} es una base de subconjuntos cerrado-abiertos para \mathbb{Q} . Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(q) \subseteq U_\delta$. Entonces $x \in U_n(x) \subseteq X \setminus U$.

Supongamos que $U = [(U_\alpha \cap A) \times \{\kappa\}] \cup [(U_\alpha \cap \mathbb{Q}) \times (\kappa \setminus F)] \in \mathcal{B}'_2$.

i) Si $x = (q, \beta) \in Q$, entonces $q \notin U_\alpha$ o $\beta \notin \kappa \setminus F$. Si $\beta \notin \kappa \setminus F$, entonces $\beta \in F$ y por tanto, $x \in U_1(x) \subseteq X \setminus U$. Si $q \notin U_\alpha$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(q) \subseteq \mathbb{R} \setminus U_\alpha$. Entonces $x \in U_n(x) \subseteq X \setminus U$.

ii) Si $x = (a, \kappa)$, con $a \in A$, entonces $a \notin U_\alpha$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(a) \subseteq \mathbb{R} \setminus U_\alpha$. Entonces $x \in U_{n,F}(x) \subseteq X \setminus U$.

c) Veamos que \mathcal{B}' es una base para X . Sean $x = (q, \alpha) \in Q$ y $U_n(x) \in \mathcal{B}(x)$. Entonces $q \in B_{\frac{1}{n}}(q) \cap \mathbb{Q}$. Entonces existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $q \in U_\alpha \cap \mathbb{Q} \subseteq B_{\frac{1}{n}}(q) \cap \mathbb{Q}$. Luego, $x \in (U_\alpha \cap \mathbb{Q}) \times \{\alpha\} \subseteq U_n(x)$.

Supongamos que $x = (a, \kappa)$, con $a \in A$, y sea $U_{n,F}(x) \in \mathcal{B}(x)$. Por como fueron elegidos los conjuntos U_α , en el lema anterior, es posible encontrar un U_α tal que $U_\alpha \subseteq B_{\frac{1}{n}}(a)$. Por tanto, $x \in [(U_\alpha \cap A) \times \{\kappa\}] \cup [(U_\alpha \cap \mathbb{Q}) \times (\kappa \setminus F)] \subseteq U_{n,F}(x)$.

3. Veamos que X es débilmente Lindelöf, para ello, primero probemos que si O es un conjunto abierto en X tal que $B = \{(a, \kappa) : a \in A\} \subseteq O$, entonces $X \setminus \overline{O}$ es numerable. Supongamos que existe un abierto O , en X , tal que $B \subseteq O$ y $X \setminus \overline{O}$ no es numerable. Ya que $B \subseteq O$, entonces

$$X \setminus \overline{O} \subseteq Q = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{(q, \alpha) : \alpha < \kappa\}.$$

Por tanto, existe un $q_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $\{(q_0, \alpha) : \alpha < \kappa\} \cap X \setminus \overline{O}$ es un conjunto no numerable. Sea $S \in [\kappa]^{>\omega}$ tal que $\{(q_0, \alpha) : \alpha \in S\} \subseteq X \setminus \overline{O}$. Para cada $\alpha \in S$, existe un $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $U_{n_\alpha}(q_0, \alpha) \cap O = \emptyset$. Por el principio de las casillas, existe un $T \in [S]^{>\omega}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para cada $\alpha \in T$, $U_{n_0}((q_0, \alpha)) \cap O = \emptyset$.

Puesto que A es denso en \mathbb{R} , sea $a \in A$ tal que $|a - q_0| < \frac{1}{n_0}$. Afirmamos que

$$(a, \kappa) \in \overline{\bigcup \{U_{n_0}((q_0, \alpha)) : \alpha \in T\}}.$$

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $F \in [\kappa]^{<\omega}$, entonces $(a, \kappa) \in U_{n,F}((a, \kappa))$. Ya que T es infinito y F es finito, entonces existe $\alpha \in T \cap (\kappa \setminus F)$. Dado que $a \in (q_0 - \frac{1}{n_0}, q_0 + \frac{1}{n_0}) \cap (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ y ya que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , entonces existe $q' \in \mathbb{Q}$ tal que $q' \in (q_0 - \frac{1}{n_0}, q_0 + \frac{1}{n_0}) \cap (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$, es decir, $|q' - q_0| < \frac{1}{n_0}$ y $|q' - a| < \frac{1}{n}$. Por tanto, $(q', \alpha) \in U_{n_0}((q_0, \alpha)) \cap U_{n,F}((a, \kappa))$.

Sin embargo, por la elección de q_0 y n_0 , O es un abierto que tiene a (a, κ) , y así una vecindad de (a, κ) , tal que $U_{n_0}((q_0, \alpha)) \cap O = \emptyset$ para cada $\alpha \in T$. De aquí que O es una vecindad de (a, κ) tal que $O \cap (\bigcup_{\alpha \in T} U_{n_0}(q_0, \alpha)) = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Ahora sí, veamos que X es débilmente Lindelöf. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de X . Para cada $a \in A$ elijamos $U_a \in \mathcal{U}$ tal que $(a, \kappa) \in U_a$ y sea $O = \bigcup_{a \in A} U_a$. Entonces O es un abierto que contiene a B , entonces $X \setminus \overline{O}$ es numerable; luego podemos escoger \mathcal{V} una subcolección numerable de \mathcal{U} tal que $X \setminus \overline{O} \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Así,

$$X = \overline{O} \cup X \setminus \overline{O} \subseteq \overline{\bigcup_{a \in A} U_a} \cup \overline{\bigcup \mathcal{V}} \subseteq \overline{(\{U_a : a \in A\} \cup \mathcal{V})}.$$

Ya que A es numerable, entonces $\{U_a : a \in A\} \cup \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ numerable. De aquí que X es débilmente Lindelöf.

□

3.8.3. Ejemplo 3

Consideremos el espacio $\mathbb{D} = \{0, 1\}$, con la topología discreta. Al espacio producto de \mathfrak{c}^+ copias de \mathbb{D} , $\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$, le llamaremos el \mathfrak{c}^+ -cubo de Cantor. Una base para $\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$ es

$$\mathcal{B}_{\text{cantor-}\mathfrak{c}^+} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}[\{\varepsilon_i\}] : n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n < \mathfrak{c}^+ \text{ y } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\} \right\}.$$

Proposición 3.52. $\mathcal{B}_{\text{cantor-}\mathfrak{c}^+}$ es una base de conjuntos cerrado-abiertos.

Demostración: Supongamos que $\bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}[\{\varepsilon_i\}] \in \mathcal{B}_{\text{cantor-}\mathfrak{c}^+}$ y que $x \in \mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+} \setminus \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}[\{\varepsilon_i\}]$, entonces para algún $1 \leq i \leq n$ se cumple que $\pi_{\alpha_i}(x) \neq \varepsilon_i$, entonces $\pi_{\alpha_i}(x) = 1 - \varepsilon_i = \varepsilon'_i$. Entonces $x \in \pi_{\alpha_i}^{-1}[\{\varepsilon'_i\}] \in \mathcal{B}$. Además, $\pi_{\alpha_i}^{-1}[\{\varepsilon'_i\}] \subseteq \mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+} \setminus \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}[\{\varepsilon_i\}]$. Por tanto, $\bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}[\{\varepsilon_i\}]$ es cerrado en $\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$. □

Sean $\emptyset \neq A \subseteq \mathfrak{c}^+$ y $f \in \mathbb{D}^A$ definimos

$$G(A, f) = \{x \in \mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+} : x \upharpoonright_A = f\}.$$

Sea $\bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}[\{\varepsilon_i\}] \in \mathcal{B}_{\text{cantor-}\mathfrak{c}^+}$. Definamos $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in [\mathfrak{c}^+]^{<\omega}$ y sea $f \in \mathbb{D}^A$ tal que $f(\alpha_i) = \varepsilon_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces

$$\bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}[\{\varepsilon_i\}] = G(A, f).$$

Por otro lado, sean $\emptyset \neq A \in [\mathfrak{c}^+]^{<\omega}$ y $f \in \mathbb{D}^A$. Supongamos que $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ y definámos $\varepsilon_i = f(\alpha_i)$. Así

$$G(A, f) = \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}[\{\varepsilon_i\}].$$

Por tanto,

$$\mathcal{B}_{\text{cantor-}\mathfrak{c}^+} = \{G(A, f) : \emptyset \neq A \in [\mathfrak{c}^+]^{<\omega} \text{ y } f \in \mathbb{D}^A\}.$$

Dado que $\mathcal{B}_{\text{cantor-}\mathfrak{c}^+}$ es una base para el \mathfrak{c}^+ -cubo de Cantor, entonces

$$\mathcal{B}_{G_\delta} = \left\{ \bigcap_{n < \omega} G(A_n, f_{A_n}) : \emptyset \neq A_n \in [\mathfrak{c}^+]^{<\omega} \text{ y } f_{A_n} \in \mathbb{D}^A \right\}$$

es una base para la G_δ -modificación del \mathfrak{c}^+ -cubo de Cantor.

Sean $\emptyset \neq \bigcap_{n < \omega} G(A_n, f_{A_n}) \in \mathcal{B}_{G_\delta}$ y $x \in \bigcap_{n < \omega} G(A_n, f_{A_n})$. Para cada $n, m < \omega$ se cumple que $f_{A_n \upharpoonright A_n \cap A_m} = x \upharpoonright A_n \cap A_m = f_{A_m \upharpoonright A_n \cap A_m}$, por tanto, $\{f_{A_n} : n < \omega\}$ es una familia compatible de funciones. Definamos $A = \bigcup_{n < \omega} A_n$ y $f = \bigcup_{n < \omega} f_{A_n}$, entonces $\emptyset \neq A \in [\mathfrak{c}^+]^{\leq \omega}$ y $f \in \mathbb{D}^A$. Más aún,

$$\bigcap_{n < \omega} G(A_n, f_{A_n}) = G(A, f).$$

Por otro lado, sea $\emptyset \neq A \in [\mathfrak{c}^+]^{\leq \omega}$ y $f \in \mathbb{D}^A$. Supongamos que $A = \{\alpha_n : n < \omega\}$ y definamos $A_n = \{\alpha_n\}$ y $f_{A_n} \in \mathbb{D}^{A_n}$ como $f_{A_n}(\alpha_n) = f(\alpha_n)$. Entonces

$$G(A, f) = \bigcap_{n < \omega} G(A_n, f_{A_n}) \in \mathcal{B}_{G_\delta}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{B}_{G_\delta} = \{G(A, f) : \emptyset \neq A \in [\mathfrak{c}^+]^{\leq \omega} \text{ y } f \in \mathbb{D}^A\}$$

es una base para la G_δ -modificación del \mathfrak{c}^+ -cubo de Cantor. Por tanto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.53. *Consideremos el \mathfrak{c}^+ -cubo de Cantor. Entonces*

$$\mathcal{B}_{\text{cantor-}\mathfrak{c}^+} = \{G(A, f) : \emptyset \neq A \in [\mathfrak{c}^+]^{<\omega} \text{ y } f \in \mathbb{D}^A\}$$

es una base para el \mathfrak{c}^+ -cubo de Cantor. Además,

$$\mathcal{B}_{G_\delta} = \{G(A, f) : \emptyset \neq A \in [\mathfrak{c}^+]^{\leq \omega} \text{ y } f \in \mathbb{D}^A\}$$

es una base para la G_δ -modificación del \mathfrak{c}^+ -cubo de Cantor.

Denotaremos por $\hat{0}$ a la función constante 0, en $\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$. Sea $x \in \mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$, definimos el soporte de x como sigue:

$$\text{sop}(x) = \{\alpha < \mathfrak{c}^+ : x(\alpha) \neq 0\} = \{\alpha < \mathfrak{c}^+ : x(\alpha) = 1\}.$$

Consideremos los subespacios topológicos de $\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$,

$$S = S_{(\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}, \tau_{\text{cantor-}\mathfrak{c}^+})}(\{x \in \mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+} : |\text{sop}(x)| < \omega\})$$

y

$$T = S_{(\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}, \tau_{\text{cantor-}\mathfrak{c}^+})}(\{x \in \mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+} : 0 < |\text{sop}(x)| < \omega\}).$$

Proposición 3.54. *Sean S y T como antes y consideremos $L = G_\delta(S)$, la G_δ modificación de S , y $X = G_\delta(T)$, la G_δ modificación de T . Entonces se cumple*

1. L es un espacio Lindelöf.
2. X no es un espacio débilmente Lindelöf.
3. $c(X) \leq \mathfrak{c}$.

Demostración:

1. Para cada $n < \omega$ sea $S_n = \{x \in \mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+} : |\text{sop}(x)| \leq n\}$. Claramente $S = \bigcup_{n < \omega} S_n$. Afirmamos que para cada $n < \omega$, S_n es disperso. Sean $n < \omega$ y $\emptyset \neq A \subseteq S_n$; si $A = \{\hat{0}\}$, entonces $\hat{0} \in A \setminus A^d$. Supongamos que $x \in A \setminus \{\hat{0}\}$ y tal que el tamaño de $\text{sop}(x)$ es lo mayor posible ($\text{sop}(x)$ está entre 1 y n). Supongamos que $\text{sop}(x) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$. Entonces $\bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}[\{1\}] \cap S_n$ es una vecindad de x en S_n . Supongamos que $y \in A \cap (\bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}[\{1\}] \cap S_n)$, entonces $y(\alpha_i) = 1$ para cada $1 \leq i \leq m$, así, $y|_{\text{sop}(x)} = x|_{\text{sop}(x)}$. Además, si $\alpha < \mathfrak{c}^+ \setminus \text{sop}(x)$ y $y(\alpha) = 1$, entonces $y \in S_n$ con soporte más grande que el soporte x , lo cual contradice la elección de x . Por tanto, $y(\alpha) = 0 = x(\alpha)$ para cada $\alpha \notin \text{sop}(x)$. Luego, $x = y$.

Notemos también que para cada $n < \omega$, S_n es cerrado en $\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$. Sea $x \notin S_n$, entonces $|\text{sop}(x)| > n$. Consideremos

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \text{sop}(x).$$

Entonces $U = \bigcap_{i=1}^{n+1} \pi_{\alpha_i}^{-1}[\{1\}]$ es una vecindad de x la cual no interseca a S_n , pues todos los elementos de U tienen al menos n elementos en su soporte. Por el Teorema de Tychonoff, $\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$ es compacto y dado que S_n es cerrado en $\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$, entonces S_n es compacto en $\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$.

Por la Proposición 3.13, la G_δ -modificación de S_n es Lindelöf. Usando el hecho de que la G_δ -modificación de un subespacio coincida con el subespacio de la G_δ -modificación y que $S = \bigcup_{n < \omega} S_n$, tenemos que L es unión numerable de subespacios Lindelöf, por tanto, L es Lindelöf.

2. Primero veamos que T no es un espacio Lindelöf. Para cada $\alpha < \mathfrak{c}^+$ definamos $x_\alpha \in \mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$ como sigue

$$x_\alpha(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi = \alpha \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Sea $D = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}^+\} \subseteq T$. Afirmamos que D cerrado y discreto en T . Para cada $\alpha < \mathfrak{c}^+$, $\pi_\alpha^{-1}[\{1\}] \cap T$ es una vecindad de x_α en T . Afirmamos que $(\pi_\alpha^{-1}[\{1\}] \cap T) \cap D = \{x_\alpha\}$. Notemos que $x_\beta \in (\pi_\alpha^{-1}[\{1\}] \cap T) \cap D = \pi_\alpha^{-1}[\{1\}] \cap D$ si y solo si $\pi_\alpha(x_\beta) = x_\beta(\alpha) = 1$ si y solo si $\alpha = \beta$. Por tanto, D discreto en T .

Veamos ahora que D es cerrado en T . Sea $x \in T \setminus D$, entonces $x \neq \hat{0}$ y $\text{sop}(x)$ es finito no vacío. Ya que $x \notin D$, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{sop}(x)$, diferentes. Sea $O = \pi_{\alpha_1}^{-1}[\{1\}] \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}[\{1\}]$. Entonces $O \cap T$ es una vecindad de x en T . Además, para cualquier $\alpha < \mathfrak{c}^+$, $\alpha \neq \alpha_1$ o $\alpha \neq \alpha_2$; en cualquier caso $x_\alpha \notin O$. Así, $D \cap (O \cap T) = \emptyset$. Por tanto, D es un subconjunto cerrado discreto en T , no es numerable. Así, T no puede ser Lindelöf.

Ya que T es de dimensión cero y no es Lindelöf, entonces por la Proposición 3.8, X no es un espacio débilmente Lindelöf

3. Veamos ahora que $c(X) \leq \mathfrak{c}$. Supongamos que $c(X) > \mathfrak{c}$ y sea \mathscr{W} una familia celular en X . Ya que $\mathcal{B}_{G_\kappa} = \{G(A, f) : \emptyset \neq A \in [\mathfrak{c}^+]^{\leq \omega} \text{ y } f \in \mathbb{D}^A\}$ es una base para la G_δ -modificación del \mathfrak{c}^+ -cubo de Cantor, entonces podemos suponer que $\mathscr{W} \subseteq \mathcal{B}_{G_\kappa}$ y que $|\mathscr{W}| = \mathfrak{c}^+$.

Para cada $W \in \mathscr{W}$ existen $\emptyset \neq A_W \in [\mathfrak{c}^+]^{\leq \omega}$ y $f_W \in \mathbb{D}^{A_W}$ tales que $W = G(A_W, f_W) \cap T$. Ya que \mathfrak{c}^+ es regular y $\omega < \mathfrak{c}^+$ satisface que para cada $\alpha < \mathfrak{c}^+$, $|\alpha^{< \omega}| = |\alpha| \leq \mathfrak{c}^+$,

entonces por el el Lema del Δ -sistema (Lema 1.16), aplicado a $\{A_W : W \in \mathcal{W}\}$, existen $R \subseteq \mathfrak{c}^+$ y $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$ tal que $|W'| = \mathfrak{c}^+$ y para cada $W, V \in \mathcal{W}'$, diferentes, se cumple que $A_W \cap A_V = R$. Dado que $R \subseteq A_W$, con $W \in \mathcal{W}'$, entonces $R \in [\mathfrak{c}^+]^{\leq \omega}$. Entonces \mathbb{D}^R tiene tamaño a lo más \mathfrak{c} . Luego, $\{f_{W \upharpoonright R} : W \in \mathcal{W}'\} \subseteq \mathbb{D}^R$, así, existen $W, V \in \mathcal{W}'$ diferentes tales que $f_{W \upharpoonright R} = f_{V \upharpoonright R}$. Por la regularidad de \mathfrak{c}^+ , sea $\alpha < \mathfrak{c}^+$ tal que $A_W \cup A_V \subseteq \alpha$. Definamos $x \in \mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$ como sigue:

$$x(\xi) = \begin{cases} f_W(\xi) & \text{si } \xi \in A_W \\ f_V(\xi) & \text{si } \xi \in A_V \\ 1 & \text{si } \xi = \alpha \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Ya que f_W y f_V tienen soporte finito, entonces $x \in X$. Además, $x \in W \cap V$, lo cual contradice que \mathcal{W} es una familia celular.

□

El lector que desee estudiar el artículo original en el que aparecieron los resultados más importantes del ejemplo anterior pueden consultar [25].

Capítulo 4

Espacios celular \mathcal{P}

Iniciaremos definiendo el concepto más importante de la tesis, la propiedad celular \mathcal{P} .

Definición 4.1. *Sea \mathcal{P} una propiedad topológica. Diremos que un espacio topológico X tiene la propiedad celular \mathcal{P} (o que X es un espacio celular \mathcal{P}), si para cada familia celular \mathcal{U} de X existe $Y \in [\mathcal{P}]$ subespacio de X , tal que para cada $U \in \mathcal{U}$ se cumple que*

$$U \cap Y \neq \emptyset.$$

La propiedad topológica celular \mathcal{P} será denotada por $c\text{-}\mathcal{P}$.

Todo espacio con la propiedad \mathcal{P} es un espacio con la propiedad $c\text{-}\mathcal{P}$.

Proposición 4.2. *Sea \mathcal{P} una propiedad topológica. Entonces*

$$[\mathcal{P}] \subseteq [c\text{-}\mathcal{P}].$$

Demostración: Supongamos que $X \in [\mathcal{P}]$. Para cada \mathcal{U} familia celular en X se cumple que $Y = X$ satisface lo deseado. \square

De forma natural surge la siguiente pregunta, ¿será cierto que $[\mathcal{P}] = [c\text{-}\mathcal{P}]$ para cualquier propiedad \mathcal{P} ?

Ejemplo 4.3. *Sea \mathcal{P} la propiedad de Hausdorff. Todo espacio topológico es celular Hausdorff, pues si X es un espacio topológico y \mathcal{U} es una familia celular en X , entonces para cada $U \in \mathcal{U}$ sea $x_U \in U$, entonces $Y = \{x_U : U \in \mathcal{U}\}$ es un subespacio discreto de*

X y por tanto Y es un subespacio Hausdorff de X que intersecta a todos los elementos de \mathcal{U} . Sin embargo, no todo espacio topológico es Hausdorff.

El ejemplo anterior nos dice que

$$[T_2] \subsetneq [c-T_2].$$

La siguiente proposición nos da ejemplos de propiedades para las cuales se da la igualdad.

Proposición 4.4. *Si $\mathcal{P} = CCC$, o bien, $\mathcal{P} = DCCC$, entonces*

$$[\mathcal{P}] = [c-\mathcal{P}].$$

Demostración: Supongamos que $X \in [c-DCCC]$ y que \mathcal{U} es una familia discreta de abiertos no vacíos en X . Notemos que \mathcal{U} es una familia celular, pues en caso contrario, si $A, B \in \mathcal{U}$ son tales que $x \in A \cap B$. Entonces para cualquier vecindad U de x , $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap B \neq \emptyset$, lo cual contradice que \mathcal{U} sea una familia discreta. Dado que \mathcal{U} es celular, entonces existe Y subespacio de X tal que $Y \in [DCCC]$ y $Y \cap U \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Sea $\mathcal{U}' = \{Y \cap U : U \in \mathcal{U}\}$. Entonces \mathcal{U}' es una familia de abiertos no vacíos en Y . Más aún, sea $x \in Y \subseteq X$, entonces existe U vecindad de x en X tal que U intersecta a lo más un elemento de \mathcal{U} . Entonces $U \cap Y$ es una vecindad de x en Y y si $A, B \in \mathcal{U}$ tales que $(A \cap Y) \cap (U \cap Y) \neq \emptyset$ y $(B \cap Y) \cap (U \cap Y) \neq \emptyset$, entonces U intersecta a A y B , lo cual no puede ocurrir por la elección de U , así, \mathcal{U}' es una familia discreta en Y . Por tanto, $|\mathcal{U}'| = \omega$. Sea $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ definida por $f(U) = U \cap Y$. Claramente f es sobreyectiva; si $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tal que $U_1 \cap Y = U_2 \cap Y$. Dado que $U_1 \cap Y \neq \emptyset$ sea $x \in U_1 \cap Y$, entonces $x \in U_1 \cap U_2$ pero esto contradice que \mathcal{U} es un familia celular. Concluimos que \mathcal{U} es numerable.

La otra igualdad sigue las mismas ideas, solo hace falta notar que si \mathcal{U} es una familia celular en X y Y intersecta a todos los elementos de \mathcal{U} , entonces $\{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia celular en Y de la misma cardinalidad que \mathcal{U} . \square

Así, tenemos que para ciertas propiedades topológicas se cumple que $[\mathcal{P}] = [c-\mathcal{P}]$, mientras que para otras $[\mathcal{P}] \subsetneq [c-\mathcal{P}]$. Así, la pregunta natural es ¿bajo qué condiciones se cumple que $[\mathcal{P}] = [c-\mathcal{P}]$? Para los espacios discretos son equivalentes las propiedades \mathcal{P} y celular \mathcal{P} .

Proposición 4.5. *Sean \mathcal{P} una propiedad topológica y X un espacio discreto, entonces son equivalentes:*

1. X tiene la propiedad celular \mathcal{P}
2. X tiene la propiedad \mathcal{P}

Demostración: Por la Proposición 4.2, resta demostrar que si X es un espacio discreto celular \mathcal{P} , entonces X tiene la propiedad \mathcal{P} . Ya que X es discreto, entonces la colección $\mathcal{U} = \{\{x\} : x \in X\}$ es una familia celular de X , por tanto, existe Y subespacio de X con la propiedad \mathcal{P} que interseca a todos los abiertos de \mathcal{U} . Ya que para cada $x \in X$ $\{x\} \cap Y \neq \emptyset$, entonces $x \in Y$ para cada $x \in X$, es decir, $Y = X$. \square

Algunas veces, cuando queremos ver que un espacio topológico tiene una cierta propiedad, en lugar de preguntarnos ¿cómo se comportan todos los abiertos del espacio? Es suficiente con fijarnos en una base de conjuntos abiertos básicos del mismo. Por ejemplo, si X es un espacio topológico y \mathcal{B} es una base para el espacio tal que para cualquier cubierta abierta de elementos de \mathcal{B} existe una subcubierta numerable, entonces X es un espacio Lindelöf, [15].

Proposición 4.6. *Sea \mathcal{P} una propiedad topológica. Entonces $X \in [c\text{-}\mathcal{P}]$ si y solo si para cada familia celular de abiertos básicos de X existe Y subespacio de X tal que $Y \in [\mathcal{P}]$ y Y interseca a todos los elementos de la familia celular.*

Demostración: Supongamos que \mathcal{B} es una base de X y que para cada familia celular de abiertos básicos de X existe un subespacio de X con la propiedad \mathcal{P} que interseca a todos los elementos de la familia celular. Sea \mathcal{U} una familia celular en X . Ya que U es un conjunto abierto no vacío, en X , para cada $U \in \mathcal{U}$, entonces sea $\emptyset \neq A_U \in \mathcal{B}$ tal que $A_U \subseteq U$. Consideremos $\mathcal{A} = \{A_U : U \in \mathcal{U}\}$, entonces \mathcal{A} es una familia de abiertos básicos no vacíos de X . Además, para cada $U, V \in \mathcal{U}$ $A_U \cap A_V \subseteq U \cap V = \emptyset$, así, \mathcal{A} es una familia celular de abiertos básicos de X , por tanto existe Y subespacio de X con la propiedad \mathcal{P} que interseca a todos los elementos de \mathcal{A} , entonces para cada $U \in \mathcal{U}$ se cumple que

$$\emptyset \neq Y \cap A_U \subseteq Y \cap U.$$

□

Otra condición suficiente para que un espacio sea celular \mathcal{P} es que tenga un subconjunto denso con la propiedad \mathcal{P} .

Proposición 4.7. *Sea \mathcal{P} una propiedad topológica y X un espacio topológico. Si $Y \subseteq X$ es denso en X y $Y \in [\mathcal{P}]$, entonces $X \in [c\text{-}\mathcal{P}]$.*

Demostración: Sean \mathcal{U} una familia celular en X y Y es un subespacio denso de X con la propiedad \mathcal{P} . Dado que Y es denso en X , entonces Y intersecta a todos los elementos de \mathcal{U} . Así, Y es un subespacio de X que tiene la propiedad \mathcal{P} e intersecta a todos los elementos de \mathcal{U} . Concluimos que $X \in [c\text{-}\mathcal{P}]$. □

En general, no es cierto que si X es celular \mathcal{P} , entonces X tiene un subespacio denso con la propiedad \mathcal{P} . El siguiente ejemplo muestra que para la propiedad casi Lindelöf existe un espacio topológico que es celular \mathcal{P} pero que no puede tener un denso \mathcal{P} .

Antes de presentar el ejemplo, daremos unos resultados necesarios que nos permitirán justificar el ejemplo deseado.

Definición 4.8. *Una familia \mathcal{F} , de subconjuntos de X , es llamada una ω -cubierta de X si para cada subconjunto finito F de X existe un $A \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq A$. Si (X, τ) es un espacio topológico y $\mathcal{F} \subseteq \tau$, entonces diremos que \mathcal{F} es una ω -cubierta abierta de X .*

Recordemos que si $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ es una familia de espacios topológicos, entonces $\{\prod_{j=1}^n \Pi_{i_j}^{-1}[A_j] : n \in \omega, i_1, \dots, i_n \in I \text{ y } A_j \in \tau_{i_j}\}$ es una base para la topológica del producto. En particular, si $|I| = m$, entonces $\{\prod_{i=1}^m \Pi_i^{-1}[A_i] : A_i \in \tau_i\}$ es base para $X_1 \times \dots \times X_n$.

Lema 4.9. *Son equivalentes:*

1. X^n es Lindelöf para cada $n \in \omega$.
2. Para cada ω -cubierta abierta, \mathcal{F} , de X existe $\mathcal{G} \in [\mathcal{F}]^{\leq \omega}$ tal que \mathcal{G} es una ω -cubierta de X .

Demostración: Supongamos que para cada $n \in \omega$ X^n es Lindelöf y sea \mathcal{F} una ω -cubierta abierta de X . Para cada $n \in \omega$

sea $\mathcal{F}_n = \{A^n : A \in \mathcal{F}\}$, entonces \mathcal{F}_n es una familia de subconjuntos abiertos de X^n . Más aún, ya que \mathcal{F} es una ω -cubierta abierta de X si $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$, entonces existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A$, así, $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$, luego \mathcal{F}_n es una cubierta abierta de X^n . Ya que X^n es Lindelöf para cada $n \in \omega$, sea $\mathcal{G}_n = \{A_{m,n}^n : m \in \omega\} \subseteq \mathcal{F}_n$ subcubierta numerable de X^n . Si $\mathcal{G} = \{A_{m,n} : m, n < \omega\} \in [\mathcal{F}]^{\leq \omega}$, entonces afirmamos que \mathcal{G} es una ω -subcubierta numerable. Sea $\{x_1, \dots, x_n\} \in X$, entonces existe $m < \omega$ tal que $(x_1, \dots, x_n) \in A_{m,n}^n$, luego $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A_{m,n}$.

Ahora, supongamos que \mathcal{F} es una cubierta abierta de X^n , de abiertos básicos, y sea

$$\mathcal{F}' = \{U \in \tau : \text{existe } \mathcal{A} \in [\mathcal{F}]^{< \omega} \text{ tal que } U^n \subseteq \bigcup \mathcal{A}\}.$$

Es decir, \mathcal{F}' es la colección de subconjuntos abiertos, U , de X tales que U^n es cubierto por una cantidad finita de elementos de \mathcal{F} . Afirmamos que \mathcal{F}' es una ω -cubierta de X . Sean $F \in [X]^{< \omega}$, digamos $F = \{x_1, \dots, x_k\}$. Si $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$, no necesariamente diferentes entre sí, entonces existen $A_{i_1, \dots, i_n}^1, \dots, A_{i_1, \dots, i_n}^n \subseteq X$ abiertos, tales que

$$(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in A_{i_1, \dots, i_n}^1 \times \dots \times A_{i_1, \dots, i_n}^n \in \mathcal{F}.$$

Sea $j \in \{1, \dots, k\}$, definamos

$$V_j = \bigcap \{A_{i_1, \dots, i_n}^l : j \in \{i_1, \dots, i_n\} \text{ y } i \in \{1, \dots, n\} \text{ y } x_j \in A_{i_1, \dots, i_n}^l\}.$$

Es evidente que V_j es un conjunto abierto no vacío en X y $x_j \in V_j$. Sea $U = \bigcup_{j=1}^k V_j$. Entonces U es un conjunto abierto en X y $F \subseteq U$. Afirmamos que $U \in \mathcal{F}'$. Notemos que

$$U^n \subseteq \bigcup \{V_{i_1} \times \dots \times V_{i_n} : i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Luego, por definición de los conjuntos V_j , tenemos que $V_{i_j} \subseteq A_{i_1, \dots, i_n}^j$, pues $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in A_{i_1, \dots, i_n}^1 \times \dots \times A_{i_1, \dots, i_n}^n$. Por tanto,

$$U^n \subseteq \bigcup \{A_{i_1, \dots, i_n}^1 \times \dots \times A_{i_1, \dots, i_n}^n : i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Concluimos que \mathcal{F}' es una ω -cubierta abierta de X . Por tanto, existe $\mathcal{G}' \in [\mathcal{F}']^{\leq \omega}$ una ω -cubierta de X , supongamos que $\mathcal{G}' =$

$\{U_m : m \in \omega\}$. Para cada $m \in \omega$ sea $\mathcal{A}_m \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ tal que $(U_m)^n \subseteq \bigcup \mathcal{A}_m$. Sea

$$\mathcal{G} = \bigcup \{\mathcal{A}_m : m \in \omega\}.$$

Claramente \mathcal{G} es una subcolección numerable de \mathcal{F} , además, si $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ sea $F = \{x_1, \dots, x_n\}$, ya que \mathcal{G}' es una ω -cubierta, entonces existe $m \in \omega$ tal que $F \subseteq U_m$, luego, $F^n \subseteq (U_m)^n \subseteq \bigcup \mathcal{A}_m \subseteq \bigcup \mathcal{G}$. En particular, $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$ y por tanto $(x_1, \dots, x_n) \in \bigcup \mathcal{G}$. \square

Proposición 4.10. *Si $\mathcal{F}[X] \in [DCCC]$, entonces X es Lindelöf.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{F}[X]$ es $DCCC$ y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una ω -cubierta abierta de X . Para cada $\alpha < \kappa$ definamos

$$V_\alpha = V(\{U_\alpha\}) \setminus V(\{U_\beta : \beta < \alpha\}).$$

Por la Proposición 3.19 se tiene que V_α es cerrado-abierto, pues es intersección finita de conjuntos cerrado-abiertos. Más aún, si $A \in \mathcal{F}[X]$, entonces existe $\alpha < \kappa$ tal que $A \subseteq U_\alpha$. Sea $\alpha_0 < \kappa$ el mínimo ordinal tal que $A \subseteq U_{\alpha_0}$, entonces $A \in V(\{U_{\alpha_0}\})$, y para cada $\beta < \alpha_0$ se cumple que $A \not\subseteq U_\beta$, es decir, $A \notin V(\{U_\beta : \beta < \alpha_0\})$. Por tanto, $A \in V_{\alpha_0}$. Así, $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{F}[X]$.

Además, sean $\alpha, \beta < \kappa$ diferentes, entonces $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$, pues en caso contrario, si $A \in V_\alpha \cap V_\beta$, supongamos sin pérdida de generalidad que $\alpha < \beta$, entonces $A \in V_\alpha \subseteq V(\{U_\alpha\})$ y $A \notin V(\{U_\gamma : \gamma < \beta\})$, lo cual es una contradicción. Por tanto, \mathcal{V} es una cubierta abierta de subconjuntos ajenos por pares de $\mathcal{F}[X]$. Luego, $\Gamma = \{\alpha < \kappa : V_\alpha \neq \emptyset\}$ es numerable, pues en caso contrario consideremos $\{V_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$. Esta es una familia de abiertos no vacíos no numerable, además, si $A \in \mathcal{F}[X]$, ya que \mathcal{V} es cubierta de $\mathcal{F}[X]$, entonces existe $\alpha \in \Gamma$ tal que $A \in V_\alpha$. Dado que \mathcal{V} es una familia de abiertos ajenos por pares, entonces V_α es una vecindad de A que no interseca a ningún otro elemento, excepto el mismo. Por tanto $\{V_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ es una familia discreta de abiertos, no vacíos, no numerable lo que contradice que $\mathcal{F}[X]$ es $DCCC$. Así, supongamos que $\Gamma = \{\alpha_n : n \in \omega\}$. Afirmamos que $\mathcal{U}' = \{U_{\alpha_n} : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ es una ω -cubierta abierta de X . Sea $F \in [X]^{<\omega}$ no vacío, entonces $F \in \mathcal{F}[X]$, por tanto, existe $n \in \omega$

tal que $F \in V_{\alpha_n} \subseteq V(\{U_{\alpha_n}\})$, así, $F \subseteq U_{\alpha_n}$. Finalmente, por el Lema 4.9 concluimos que X es Lindelöf. \square

Ya que la propiedad $DCCC$ es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos, entonces tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.11. *Si $\mathcal{F}[X] \in [DCCC]$, entonces X es hereditariamente Lindelöf.*

Demostración: Sea A un subconjunto abierto de X . Por la Proposición 3.19 el conjunto $V(\{A\})$ es cerrado-abierto en $\mathcal{F}[X]$, así, $V(\{A\}) \in [DCCC]$. Notemos que $V(\{A\}) = \mathcal{F}[X] \upharpoonright_A$. Por la Proposición 3.18 $\mathcal{F}[X] \upharpoonright_A$ es homeomorfo a $\mathcal{F}[A]$, así, $\mathcal{F}[A] \in [DCCC]$, luego por la proposición anterior A es Lindelöf. Finalmente, ya que todos los subconjuntos abiertos de X son Lindelöf, entonces por el Lema 1.47 X es hereditariamente Lindelöf. \square

Proposición 4.12. *Si X es un espacio topológico tal que $\psi(X) = \omega$, entonces para cada $n \in \omega$ existe $F_n \subseteq \mathcal{F}[X]$ cerrado y discreto tal que $\mathcal{F}[X] = \bigcup_{n \in \omega} F_n$.*

Demostración: Para cada $n \in \omega$ sea

$$\mathcal{E}_n = \{A \in \mathcal{F}[X] : |A| = n\}.$$

Notemos que $\mathcal{F}[X] = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{E}_n$. Además, para cada $n \in \omega$ \mathcal{E}_n es discreto pues si $A \in \mathcal{E}_n$, entonces $[A, X]$ es una vecindad de A tal que si $B \in [A, X] \cap \mathcal{E}_n$, entonces $A \subseteq B$ y $|A| = |B| = n$, por tanto, $A = B$.

Dado que $\psi(X) = \omega$, para cada $x \in X$ sea $\mathcal{V}_x = \{V_{x,n} : n \in \omega\}$ una pseudobase para x numerable. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que, \mathcal{V}_x es decreciente para cada $x \in X$. Sean $A \in \mathcal{F}[X]$ y $x, y \in A$ diferentes, entonces existen $n_x, n_y \in \omega$ tales que $y \notin V_{x,n_y}$ y $x \notin V_{y,n_x}$. Sea $n_{x,y} = \max\{n_x, n_y\}$. Ya que \mathcal{V}_x y \mathcal{V}_y son pseudobases decrecientes, entonces $x \notin V_{y,n_{x,y}}$ y $y \notin V_{x,n_{x,y}}$. Puesto que A es finito, si $k = \min\{n_{x,y} : x, y \in A\}$, entonces para cada $x, y \in A$ se cumple que $x \notin V_{y,k}$ y $y \notin V_{x,k}$. Así, si $A \in \mathcal{F}[X]$ con $|A| > 1$ sea

$$k(A) = \min\{k : \text{para cada } x, y \in A \ x \notin V_{y,k} \text{ y } y \notin V_{x,k}\}.$$

Para cada $n \geq 1$ y $m \in \omega$ definamos

$$\mathcal{G}_{n,m} = \{A \in \mathcal{E}_n : k(A) = m\}.$$

Por lo visto anteriormente, si $A \in \mathcal{F}[X]$ tal que $|A| > 1$, entonces $k(A)$ existe, por tanto, si $n > 1$, entonces

$$\mathcal{E}_n = \bigcup_{m \in \omega} \mathcal{G}_{n,m}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{F}[X] = \mathcal{E}_1 \cup \bigcup_{n > 1} \left(\bigcup_{m \in \omega} \mathcal{G}_{n,m} \right).$$

Ya que $\mathcal{G}_{n,m} \subseteq \mathcal{E}_n$, entonces $\mathcal{G}_{n,m}$ es discreto.

Es claro que \mathcal{E}_1 es cerrado. Veamos ahora que si $n > 1$, entonces $\mathcal{G}_{n,m}$ es cerrado. Sea $A \notin \mathcal{G}_{n,m}$. Supongamos que $k = |A|$. Si $k \geq n$, entonces $\{A\} \subseteq [A, X]$ y $[A, X] \cap \mathcal{G}_{n,m} = \emptyset$. Supongamos que $A = \{x_1, \dots, x_k\}$, con $k < n$ y sea $l = \max\{k(A), m\}$. Si $U = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i, l}$, entonces $A \in [A, U]$. Más aún, si $B \in [A, U] \cap \mathcal{G}_{n,m}$, ya que $A \subseteq B$, entonces supongamos, sin pérdida de generalidad, que $B = \{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$. Dado que $B \subseteq U$, entonces existe un x_i , con $i > k$ tal que $x_i \in V_{x_j, l}$, con $1 \leq j \leq k$, lo cual contradice que $B \in \mathcal{G}_{n,m}$. \square

Proposición 4.13. *Sea X un espacio topológico T_1 . Entonces $\mathcal{F}[X]$ es estrella Lindelöf si y solo si X es numerable.*

Demostración: Si X es numerable, entonces

$$\mathcal{F}[X] = \bigcup_{0 < n < \omega} [X]^n$$

es numerable. Ya que $\mathcal{F}[X]$ es numerable, entonces $\mathcal{F}[X]$ es Lindelöf y, por tanto, $\mathcal{F}[X]$ es estrella Lindelöf.

Supongamos ahora que $\mathcal{F}[X]$ es estrella Lindelöf. Notemos que $\mathcal{U} = \{\{x\}, X : x \in X\}$ una cubierta abierta de $\mathcal{F}[X]$, pues si $A \in \mathcal{F}[X]$ sea $x \in A$, entonces $A \in [\{x\}, X]$. Así, existe L un subespacio Lindelöf de $\mathcal{F}[X]$ tal que $st(L, \mathcal{U}) = \mathcal{F}[X]$. Por la observación 3, $\mathcal{F}[X]$ es Lindelöf 1-estrella, por tanto, $\mathcal{F}[X]$ es Lindelöf ω -estrella; y ya que $\mathcal{F}[X]$ es $T_{3\frac{1}{2}}$, pues X es T_1 , entonces $\mathcal{F}[X] \in [DCCC]$.

Por el Corolario 4.11, dado que $\mathcal{F}[X]$ es *DCCC*, entonces X es hereditariamente Lindelöf. Luego, por el Lema 1.45 $\psi(X) \leq hL(X) = \omega$.

Ya que $\psi(X) = \omega$, entonces por la proposición anterior existen $\{F_n : n \in \omega\}$ subconjuntos cerrados y discretos de $\mathcal{F}[X]$ tales que

$$\mathcal{F}[X] = \bigcup_{n \in \omega} F_n.$$

Para cada $n \in \omega$ sea $L_n = L \cap F_n$, entonces L_n es un subconjunto cerrado de L , por tanto, L_n es Lindelöf. Más aún, dado que F_n es discreto, entonces L_n es un Lindelöf discreto, así, L_n es numerable. Ya que

$$L = \bigcup_{n < \omega} L_n,$$

entonces L es numerable. Supongamos que $L = \{A_n : n \in \omega\}$. Afir-
mamos que $X = \bigcup_{n < \omega} A_n$. Sea $x \in X$, ya que $\mathcal{F}[X] = st(L, \mathcal{U})$,
entonces existen $y \in X$ y $n < \omega$ tales que $\{x\} \in [\{y\}, X]$ y
 $A_n \in [\{y\}, X]$. Así, $\{y\} \subseteq \{x\}$ y $\{y\} \subseteq A_n$. Por tanto, $x = y \in A_n$. \square

Ejemplo 4.14. *Existe un espacio topológico regular X tal que $X \in [c-L]$ pero que no tiene un subespacio denso con la propiedad L .*

Consideremos a \mathbb{R} con la topología euclideana y sea $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ su hiperespacio de Pixley-Roy. Debido a que \mathbb{R} es T_1 y segundo numerable, entonces

$$c(\mathcal{F}[\mathbb{R}]) \leq w(\mathbb{R}) = \omega,$$

así, $\mathcal{F}[\mathbb{R}] \in [CCC]$. No es difícil ver que, todo espacio con la propiedad CCC tiene la propiedad celular L . Por tanto, $\mathcal{F}[\mathbb{R}] \in [c-L]$

Veamos ahora que ningún subespacio de $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ es denso y Lindelöf. Supongamos que D es un subespacio denso Lindelöf de $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$, entonces $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ es estrella Lindelöf, pues para cualquier cubierta abierta \mathcal{V} de $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$, ya que D es denso, entonces D interseca a todos los elementos de \mathcal{V} , y como \mathcal{V} es una cubierta de $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$, entonces $\mathcal{F}[\mathbb{R}] = st(D, \mathcal{V})$. Dado que $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ es estrella Lindelöf, por la Proposición 4.13, \mathbb{R} es numerable lo cual es una contradicción, por tanto, $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ no tiene ningún subconjunto denso Lindelöf.

Observación 4. *En el ejemplo anterior, $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ es celular casi Lindelöf y, dado que $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ es regular, entonces $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ no puede tener ningún subconjunto denso casi Lindelöf, pues si F es un subespacio casi Lindelöf de $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$, entonces F es un espacio casi Lindelöf regular, por tanto, F es un subespacio denso Lindelöf de $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$, lo cual no puede ocurrir.*

Proposición 4.15. *Sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} propiedades topológicas tales que*

$$[\mathcal{P}] \subseteq [\mathcal{Q}],$$

entonces se cumple que

$$[c\text{-}\mathcal{P}] \subseteq [c\text{-}\mathcal{Q}].$$

Demostración: Supongamos que $X \in [c\text{-}\mathcal{P}]$ y sea \mathcal{U} una familia celular en X . Entonces existe $Y \subseteq X$ tal que $Y \in [\mathcal{P}]$ que interseca a todos los elementos de \mathcal{U} . Dado que $[\mathcal{P}] \subseteq [\mathcal{Q}]$, entonces Y es un subespacio de X , con la propiedad \mathcal{Q} que interseca a todos los elementos de \mathcal{U} . Por tanto, $Y \in [c\text{-}\mathcal{Q}]$. \square

Ejemplo 4.16. *El inverso de la proposición anterior no es cierto. Considere las propiedades T_1 y T_2 . Siguiendo las mismas ideas de la propiedad T_2 , no es difícil ver que todo espacio topológico es $c\text{-}T_1$. Así, en particular tenemos que $[c\text{-}T_2] \subseteq [c\text{-}T_1]$, pero claramente $[T_2] \not\subseteq [T_1]$.*

4.1. Operaciones topológicas usuales

Empezaremos a estudiar el comportamiento de la propiedad celular \mathcal{P} con respecto a las operaciones típicas en topología.

Continuidad

Proposición 4.17. *Si \mathcal{P} una propiedad topológica que se preserva bajo funciones continuas, entonces la propiedad $c\text{-}\mathcal{P}$ se preserva bajo funciones continuas.*

Demostración: Supongamos que X y Y son espacios topológicos tales que $X \in [c\text{-}\mathcal{P}]$ y $f : X \rightarrow Y$ es una función continua. Sea \mathcal{U}

una familia celular en $f[X]$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe $\mathcal{U}' \subseteq \tau_Y$ tal que $\mathcal{U} = \{U \cap f[X] : U \in \mathcal{U}'\}$. Ya que f continua, entonces $\mathcal{V} = \{f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U}'\}$ es una familia de abiertos no vacíos. Además, si $x \in f^{-1}[U_1] \cap f^{-1}[U_2]$, donde $U_1, U_2 \in \mathcal{U}'$, entonces $f(x) \in U_1 \cap U_2$, es decir,

$$(U_1 \cap f[X]) \cap (U_2 \cap f[X]) \neq \emptyset,$$

lo cual contradice que \mathcal{U} es familia celular. Por tanto, \mathcal{V} es una familia celular en X . Puesto $X \in [c-\mathcal{P}]$, entonces existe $Z \in [\mathcal{P}]$ subespacio de X tal que para cada $V \in \mathcal{V}$ se cumple que

$$V \cap Z \neq \emptyset.$$

Como \mathcal{P} se preserva bajo funciones continuas y la función $f \circ i_Z$ es una función continua, donde i_Z es la función inclusión, entonces $f[Z] \in [\mathcal{P}]$. Sea $U \in \mathcal{U}'$, entonces $f^{-1}[U] \in \mathcal{V}$. Luego, existe $z \in Z \cap f^{-1}[U]$, por tanto $f(z) \in f[Z] \cap U$. Así, $f[Z]$ es un subespacio de $f[X]$ con la propiedad \mathcal{P} que intersecta a todos los elementos de la familia \mathcal{U} . \square

Corolario 4.18. *Si \mathcal{P} es un propiedad topológica, entonces $c-\mathcal{P}$ es un propiedad topológica.*

Subespacios

Es natural preguntarse si la propiedad celular \mathcal{P} se hereda a subespacios, y si es así, a cuáles tipos de espacios se heredan. El siguiente resultado nos dice que la propiedad celular \mathcal{P} es hereditaria con respecto a subconjuntos abiertos siempre que \mathcal{P} sea hereditaria con respecto a subconjuntos abiertos.

Proposición 4.19. *Sea \mathcal{P} una propiedad que es hereditaria con respecto a subconjuntos abiertos (cerrado-abiertos). Entonces son equivalentes*

1. $X \in [c-\mathcal{P}]$;
2. Para cada Y subconjunto abierto (cerrado-abierto) de X , se cumple que $Y \in [c-\mathcal{P}]$.

Demostración: Sean Y un subespacio abierto (cerradoabierto) de X y \mathcal{A} una familia celular de Y . Dado que Y es abierto, entonces \mathcal{A} es una familia celular en X , así que existe $L \subseteq X$ con $L \in [\mathcal{P}]$ tal que para cada $A \in \mathcal{A}$ se cumple que $A \cap L \neq \emptyset$. Puesto que $L \cap Y$ es abierto (cerradoabierto) en L , entonces $L \cap Y \in [\mathcal{P}]$. Además, si $A \in \mathcal{A}$, entonces

$$(L \cap Y) \cap A = L \cap A \neq \emptyset.$$

La otra implicación se sigue del hecho que X es abierto (cerradoabierto) en X . \square

Dado que toda propiedad hereditaria con respecto a subconjuntos abiertos (cerrados) es hereditaria con respecto a subconjuntos cerradoabiertos, entonces de la proposición anterior obtenemos lo siguiente.

Corolario 4.20. *Sea \mathcal{P} una propiedad que es hereditaria con respecto a subconjuntos abiertos (cerrados o cerradoabiertos). Entonces $X \in [c\text{-}\mathcal{P}]$ si y solo si la propiedad celular \mathcal{P} es hereditaria con respecto a subconjuntos cerradoabiertos.*

A continuación mostraremos que si \mathcal{P} es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrados, entonces no necesariamente se cumple que $X \in [c\text{-}\mathcal{P}]$ si y solo si $c\text{-}\mathcal{P}$ es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrados.

Definición 4.21. *Diremos que una propiedad topológica \mathcal{P} es numerablemente discreta si todo espacio discreto con la propiedad \mathcal{P} es numerable.*

Ejemplo 4.22. *Las propiedades de compacidad y Lindelöf son propiedades numerablemente discretas. Sea X un espacio topológico discreto y supongamos que X tiene la propiedad de Lindelöf. Ya que X es discreto, entonces para cada $x \in X$, $\{x\}$ es un abierto de X , así, $\{\{x\} : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X , por tanto, existe $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq X$ tal que $X = \bigcup_{n < \omega} \{x_n\}$, por tanto, $|X| = \omega$.*

Dado que en los espacios discretos si $x \in X$, entonces $\overline{\{x\}} = \{x\}$; y si $A \subseteq X$, entonces $\overline{A} = A$. Por tanto, las propiedades casi Lindelöf y débilmente Lindelöf son numerablemente discretas.

Dado que en un espacio discreto X , la colección $\{\{x\} : x \in X\}$ es una familia de abiertos no vacíos discreta, entonces la propiedad DCCC (y también la propiedad CCC) son propiedades numerablemente discretas.

Ya que en los espacios discretos $X \in [\mathcal{P}]$ si y solo si $X \in [c\text{-}\mathcal{P}]$, entonces tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.23. *Si \mathcal{P} es una propiedad numerablemente discreta, entonces la propiedad celular \mathcal{P} es numerablemente discreta.*

Ejemplo 4.24. *Existen \mathcal{P} una propiedad topológica hereditaria con respecto a subconjuntos cerrados, X un espacio topológico y F un subconjunto cerrado de X tales que $X \in [c\text{-}L]$ y $F \notin [c\text{-}L]$.*

Denotemos por \mathbb{S} la línea de Sorgenfrey y sea $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ el plano de Sorgenfrey. Dado que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es un subespacio denso y numerable en $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$, y por tanto un subespacio denso Lindelöf, entonces $\mathbb{S} \times \mathbb{S} \in [c\text{-}L]$. Sea

$$F = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{S} \times \mathbb{S},$$

entonces F es un subconjunto cerrado del plano de Sorgenfrey, pues F es un subconjunto cerrado en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología usual y la topología del plano de Sorgenfrey es más fina que la topología usual de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Más aún, F es discreto pues para cada $(x, -x) \in F$ el abierto de $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ $U_x = [x, x+1) \times [-x, -x+1)$ satisface que $U_x \cap F = \{(x, -x)\}$ pues si $(y, -y) \in U_x$, entonces

1. $x \leq y < x+1$
2. $-x \leq -y < -x+1$.

De las desigualdades anteriores se tiene que $x \leq y$ y $y \leq x$, por lo que $x = y$.

Notemos que F es un subespacio cerrado, discreto y no numerable. Dado que la propiedad Lindelöf es una propiedad numerablemente discreta, entonces la propiedad celular Lindelöf es numerablemente discreta, por tanto, F no puede ser celular Lindelöf.

Si \mathcal{P} es una propiedad hereditaria con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos, entonces no necesariamente ocurre que $X \in [c\text{-}\mathcal{P}]$ si y solo si $c\text{-}\mathcal{P}$ es hereditaria con respecto a subconjuntos abiertos.

Lema 4.25. *Para cualquier ordinal α el espacio topológico $\alpha + 1$, con la topología del orden, es un espacio topológico compacto.*

Demostración: Haremos la demostración por inducción transfinita.

Para $\alpha = 0$ el espacio topológico $\alpha + 1$ es simplemente $\{0\}$ con la topología discreta. Por tanto, $\alpha + 1$ es compacto.

Supongamos que para α ya demostramos que $\alpha + 1$ es compacto. Veamos que $(\alpha + 1) + 1$ es compacto. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de $(\alpha + 1) + 1$. Entonces $\mathcal{V} = \{U \cap \alpha + 1 : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de $\alpha + 1$, luego, existe $\mathcal{V}' = \{U_i \cap \alpha + 1 : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{V}$ tal que $\alpha + 1 = \bigcup \mathcal{V}'$. Sea $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha + 1 \in U_0$, entonces $\mathcal{U}' = \{U_i : 0 \leq i \leq n\}$ es una subcubierta finita de \mathcal{U} para $(\alpha + 1) + 1$.

Supongamos que α es un ordinal límite y para cada $\xi < \alpha$, $\xi + 1$ es compacto. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de $\alpha + 1$, entonces existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha \in U_0$, entonces existe $\xi < \alpha$ tal que $(\xi, \alpha + 1) \subseteq U_0$. Ya que $\xi < \alpha$, entonces por hipótesis inductiva existen $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ tales que $\xi + 1 \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Por tanto, $\alpha + 1 = \bigcup_{i=0}^n U_i$. \square

Lema 4.26. *Todo subespacio Lindelöf de ω_1 , con la topología del orden, es numerable.*

Demostración: Sea L un subespacio Lindelöf de ω_1 . Consideremos la cubierta abierta

$$\mathcal{U} = \{[0, \gamma) \cap L : \gamma < \omega_1\},$$

de L . Dado que L es un espacio Lindelöf, entonces existe $\{\gamma_n : n \in \omega\}$ tal que $\{[0, \gamma_n) : n \in \omega\}$ es una cubierta de L . Dado que ω_1 es regular, entonces existe $\beta < \omega_1$ tal que $\gamma_n < \beta$ para cada $n \in \omega$. Así,

$$L \subseteq \bigcup_{n < \omega} [0, \gamma_n) \subseteq [0, \beta)$$

y, dado que $\beta < \omega_1$, entonces $|L| \leq |\beta| = \omega$. \square

Puesto que la propiedad de Lindelöf, L , es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrados (ver por ejemplo, [22]), entonces la propiedad celular Lindelöf, c - L , es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos.

Ejemplo 4.27. *Existen \mathcal{P} una propiedad topológica hereditaria con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos, X un espacio topológico tal que $X \in [c\text{-}\mathcal{P}]$ y A un subconjunto abierto de X tal que $A \notin [c\text{-}\mathcal{P}]$.*

Consideremos a $\omega_1 + 1$ con la topología del orden y sea \mathcal{P} la propiedad de Lindelöf, L . Entonces $\omega_1 + 1$ es compacto. Así, $\omega_1 + 1$ es Lindelöf, luego, $\omega_1 + 1$ tiene la propiedad celular L . Sea $A = \omega_1 \subseteq \omega_1 + 1$, entonces A es abierto. Afirmamos que A no es celular Lindelöf. Supongamos que A es celular Lindelöf y sea

$$B = \{\alpha + 1 : \alpha \text{ es límite y } 0 < \alpha < \omega_1\}.$$

Para cada $\alpha + 1 \in B$ sea $U_\alpha = (\alpha, \alpha + 2) \subseteq A$. Es claro que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha + 1 \in B\}$ es una familia celular en A . Entonces existe L , un subespacio Lindelöf de A , tal que $L \cap U_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha + 1 \in B$. Pero al ser L un subespacio Lindelöf de ω_1 , entonces L es numerable. Dado que ω_1 es regular, entonces existe $\beta < \omega_1$ tal que $L \subseteq \beta$. Sea $\alpha > \beta$ un ordinal límite, entonces $U_\alpha \cap L = \emptyset$, lo cual contradice que L interseca a todos los elementos de \mathcal{U} .

Productos

Dada una propiedad topológica \mathcal{P} , puede ocurrir que \mathcal{P} se preserve bajo productos topológicos. Más aún, puede ocurrir, como en el caso de la propiedad de compacidad, que el producto topológico (arbitrario) tiene la propiedad \mathcal{P} si y solo si cada uno de sus factores tiene la propiedad \mathcal{P} .

Recordando que las proyecciones $\pi_\alpha : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ son continuas y que si \mathcal{P} es una propiedad topológica que se preserva bajo funciones continuas, entonces celular \mathcal{P} es una propiedad que se preserva bajo funciones continuas, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.28. *Sean \mathcal{P} una propiedad topológica que se preserva bajo funciones continuas y $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Si $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha \in [c\text{-}\mathcal{P}]$, entonces $X_\alpha \in [c\text{-}\mathcal{P}]$, para cada $\alpha \in I$.*

En general, el producto de dos espacios celular \mathcal{P} no necesariamente vuelve a ser celular \mathcal{P} ; esto sigue ocurriendo incluso cuando tomamos productos finitos y \mathcal{P} es una propiedad que se preserva bajo productos topológicos. El hecho de que una propiedad \mathcal{P}

se preserva bajo productos topológicos depende de la propiedad misma. Sin embargo, para ciertas propiedades \mathcal{P} ocurre que el producto de $X \in [c\text{-}\mathcal{P}]$ con Y , un espacio separable o discreto numerable, entonces $X \times Y \in [c\text{-}\mathcal{P}]$.

Definición 4.29. *Sea \mathcal{P} una propiedad topológica. Diremos que \mathcal{P} se preserva bajo uniones numerables si para cualquier espacio topológico Z , y cualquier $\{L_n : n \in \omega\}$ familia de subespacios topológicos de Z tal que para cada $n \in \omega$ $L_n \in [\mathcal{P}]$, entonces $\bigcup_{n \in \omega} L_n \in [\mathcal{P}]$.*

Proposición 4.30. *Si \mathcal{P} se preserva bajo uniones numerables y bajo continuidad, X es un espacio topológico tal que $X \in [\mathcal{P}]$ y Y es un espacio discreto con $|Y| = \omega$, entonces $X \times Y \in [\mathcal{P}]$.*

Demostración: Supongamos que $Y = \{y_n : n \in \omega\}$. Ya que

$$X \times Y = \bigcup_{n \in \omega} (X \times \{y_n\})$$

y debido a que $\{X \times \{y_n\}\}$ es una familia disjunta por pares de subconjuntos abiertos de $X \times Y$, entonces por el Teorema 2.2.4 de [9] se tiene que los espacios topológicos $X \times Y$ y $\bigoplus_{n \in \omega} (X \times \{y_n\})$ coinciden. Para cada $n \in \omega$, definamos

$$\begin{aligned} f_n : X &\longrightarrow X \times \{y_n\} \\ x &\longmapsto (x, y_n) \end{aligned}$$

Claramente, cada función f_n es continua, así, dado que \mathcal{P} se preserva bajo continuidad, entonces para cada $n \in \omega$ $X \times \{y_n\} \in [\mathcal{P}]$. Finalmente, ya que \mathcal{P} se preserva bajo uniones numerables, entonces $\bigoplus_{n \in \omega} (X \times \{y_n\}) = \bigcup_{n \in \omega} (X \times \{y_n\}) \in [\mathcal{P}]$. \square

Proposición 4.31. *Sea \mathcal{P} una propiedad que cumple:*

1. \mathcal{P} se preserva bajo uniones numerables.
2. \mathcal{P} se preserva bajo funciones continuas.

Entonces si $X \in [c\text{-}\mathcal{P}]$ y Y es un espacio separable, entonces $X \times Y \in [c\text{-}\mathcal{P}]$.

Demostración: Sean $\mathcal{U} = \{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia celular de abiertos básicos, de $X \times Y$, y $D = \{d_n : n \in \omega\}$ un subconjunto denso en Y . Para cada $n \in \omega$ consideremos

$$\mathcal{U}'_n = \{U_\alpha : d_n \in V_\alpha\}.$$

Afirmamos que si $\mathcal{U}'_n \neq \emptyset$, entonces \mathcal{U}'_n es una familia celular. Sean $U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{U}'_n$, con $\alpha \neq \beta$. Supongamos que $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, entonces

$$(x, d_n) \in (U_\alpha \times V_\alpha) \cap (U_\beta \times V_\beta),$$

pero esto contradice que \mathcal{U} es familia celular. Definamos la familia \mathcal{U}_n como sigue: si $\mathcal{U}'_n = \emptyset$, sea $\mathcal{U}_n = \{X\}$, en caso contrario, sea $\mathcal{U}_n = \mathcal{U}'_n$. Ya que para cada $n \in \omega$ \mathcal{U}_n es una familia celular en X , entonces existe $L_n \in [\mathcal{P}]$ subespacio de X , tal que L_n interseca a todos los elementos de \mathcal{U}_n , para cada $n \in \omega$. Dado que \mathcal{P} se preserva bajo uniones numerables, entonces $L = \bigcup_{n \in \omega} L_n \in [\mathcal{P}]$.

Consideremos la función $f_n : L \rightarrow L \times \{d_n\}$ tal que $f_n(x) = (x, d_n)$. Es claro que f_n es continua, así, ya que \mathcal{P} se preserva bajo funciones continuas, entonces $L \times \{d_n\} \in [\mathcal{P}]$. De nuevo, ya que \mathcal{P} se preserva bajo uniones numerables, entonces concluimos que $L \times D = \bigcup_{n \in \omega} L \times \{d_n\} \in [\mathcal{P}]$.

Notemos que $L \times D \in [\mathcal{P}]$ interseca a todos los elementos de \mathcal{U} , pues es si $\alpha < \kappa$, entonces existe $n_0 \in \omega$ tal que $d_{n_0} \in V_\alpha$, pues D es un conjunto denso en Y , así, $U_\alpha \in \mathcal{U}_{n_0}$. Ya que L_{n_0} interseca a todos los elementos de \mathcal{U}_{n_0} , en particular $L_{n_0} \cap U_\alpha \neq \emptyset$. Luego, $(L \times D) \cap (U_\alpha \times V_\alpha) \neq \emptyset$. \square

Sumas

Definición 4.32. Sean \mathcal{P} una propiedad topológica y κ un número cardinal infinito. Diremos que \mathcal{P} es κ -sumable si para cualquier familia de cardinalidad κ , $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$, de espacios topológicos ajenos por pares tal que $X_\alpha \in [\mathcal{P}]$ para cada $\alpha < \kappa$, se cumple que $\bigoplus_{\alpha < \kappa} X_\alpha \in [\mathcal{P}]$.

En caso de que \mathcal{P} sea una propiedad κ -sumable, también decimos que \mathcal{P} es una propiedad que se preserva bajo κ -sumas. Si $\kappa = \omega$, decimos que \mathcal{P} es una propiedad que se preserva bajo sumas numerables.

Proposición 4.33. *Sea \mathcal{P} una propiedad topológica. Si \mathcal{P} es κ -sumable, entonces la propiedad $c\text{-}\mathcal{P}$ es κ -sumable.*

Demostración: Sean $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de espacios topológicos ajena dos a dos tal que para cada $\alpha < \kappa$ se cumple que $X_\alpha \in [c\text{-}\mathcal{P}]$ y \mathcal{U} una familia celular para $X = \bigoplus_{\alpha < \kappa} X_\alpha$. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $\mathcal{U}'_\alpha = \{U \cap X_\alpha : U \in \mathcal{U} \text{ y } U \cap X_\alpha \neq \emptyset\}$. Si $\mathcal{U}'_\alpha = \emptyset$ definamos $\mathcal{U}_\alpha = \{X_\alpha\}$; en caso contrario, sea $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}'_\alpha$. Note que para cada $\alpha < \kappa$ se cumple que \mathcal{U}_α es una familia celular en X_α . Ya que $X_\alpha \in [c\text{-}\mathcal{P}]$, entonces existe $L_\alpha \in [\mathcal{P}]$ un subespacio de X_α que interseca a todos los elementos de \mathcal{U}_α . Sea $L = \bigoplus_{\alpha < \kappa} L_\alpha$, entonces L es un subespacio de X tal que $L \in [\mathcal{P}]$. Notemos que si $U \in \mathcal{U}$, entonces existe $\alpha < \kappa$ tal que $U \cap X_\alpha \neq \emptyset$. Entonces

$$\emptyset \neq L_\alpha \cap (U \cap X_\alpha) \subseteq L \cap U.$$

Por tanto, X es un espacio celular \mathcal{P} . □

Ya que para cada $\alpha < \kappa$ el espacio X_α es un subespacio cerrado-abierto en $\bigoplus_{\alpha < \kappa} X_\alpha$, entonces tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.34. *Sean \mathcal{P} una propiedad κ -sumable, hereditaria con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos y $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de espacios topológicos disjuntos por pares. Entonces $X_\alpha \in [c\text{-}\mathcal{P}]$ para cada $\alpha < \kappa$ si y solo si $\bigoplus_{\alpha < \kappa} X_\alpha \in [c\text{-}\mathcal{P}]$.*

El Duplicado de Alexandroff

Por la Proposición 3.4, si \mathcal{P} es la propiedad de compacidad, entonces se cumple que para un espacio compacto X , su duplicado de Alexandroff, $AD(X)$, vuelve a ser un espacio compacto. En particular, si $X \in [\mathcal{P}]$, entonces $AD(X) \in [c\text{-}\mathcal{P}]$. Sin embargo, esto no ocurre siempre para cualquier propiedad \mathcal{P} . Más aún, lo anterior no es cierto cuando pensamos en propiedades de cubiertas más generales como lo muestra el siguiente ejemplo.

Observación 5. *Si X es un espacio topológico y $D \subseteq X$ es cerrado y discreto, entonces $D \times \{1\} \subseteq AD(X)$ es un espacio cerrado-abierto y discreto.*

Notemos que

$$D \times \{1\} = \bigcup_{x \in D} \{(x, 1)\},$$

así, $D \times \{1\}$ es un subconjunto abierto. Además, como subespacio es discreto.

Veamos que $D \times \{1\}$ es cerrado. Sea $p \in AD(X) \setminus (D \times \{1\})$. Si $p = (x, 1)$, con $x \in X \setminus D$, entonces $\{p\}$ es una vecindad de p contenida en $AD(X) \setminus (D \times \{1\})$. Supongamos que $p = (x, 0)$, para algún $x \in X$. Si $x \in D$, dado que D es discreto, entonces existe V_x vecindad, en X , de x tal que $V_x \cap D = \{x\}$. Notemos que $(V_x \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\}$ es una vecindad de $(x, 0)$, en $AD(X)$, que no interseca a $D \times \{1\}$. Si $x \notin D$, dado que D es cerrado, entonces existe V_x vecindad de x , en X , tal que $V_x \subseteq X \setminus D$. Así, $(V_x \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\}$ es una vecindad de $(x, 0)$ en $AD(x)$ que no interseca a $D \times \{1\}$. Por tanto, $D \times \{1\}$ es un subconjunto de $A(X)$ cerrado-abierto y discreto.

Ejemplo 4.35. Existen una propiedad topológica \mathcal{P} y un espacio topológico de Tychonoff X tal que $X \in [c\text{-}\mathcal{P}]$ pero $AD(X) \notin [c\text{-}\mathcal{P}]$.

Consideremos una propiedad topológica \mathcal{P} hereditaria con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos, numerablemente discreta y tal que $[\sigma\text{-compactos}] \subseteq [\mathcal{P}]$, por ejemplo, $\mathcal{P} \in \{L, aL, wL\}$. Sean D un espacio discreto de cardinalidad ω_1 , digamos $D = \{d_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, y sea βD la compactación de Stone-Ćech de D . Consideremos a $\omega + 1$ con la topología del orden y sea

$$X = (\beta D \times (\omega + 1)) \setminus ((\beta D \setminus D) \times \{\omega\}),$$

con la topología de subespacio. Notemos que βD y $\omega + 1$ son espacios Tychonoff, por tanto, X , es Tychonoff.

Sea $Y = \beta D \times \omega \subseteq X$, con la topología de subespacio, notemos que en este caso la topología de subespacio coincide con la topología del producto de βD con la topología discreta de ω . Para cada $n \in \omega$, sea $f_n : \beta D \rightarrow \beta D \times \{n\}$ dada por $f_n(x) = (x, n)$. Entonces f_n es una función continua y sobreyectiva, por tanto, $\beta D \times \{n\}$ es un espacio compacto. Ya que $Y = \bigcup_{n \in \omega} \beta D \times \{n\}$ y cada $\beta D \times \{n\}$ es abierto, entonces $\beta D \times \omega$ es σ -compacto, es decir, $\beta D \times \omega$ es la unión numerable de subespacios compactos. Puesto que $\beta D \times \omega$ es σ -compacto, entonces $\beta D \times \omega \in [\mathcal{P}]$. Más aún, $\beta D \times \omega$ es denso en X , pues sea $(U \times V) \cap X$ un abierto en X , no vacío. Entonces U es un abierto no vacío de βD y V es un abierto no vacío de $\omega + 1$, y ya que ω es denso en $\omega + 1$, entonces $U \times V$ interseca a $\beta D \times \omega$. Por tanto, $X \in [c\text{-}\mathcal{P}]$.

Por otro lado, sea $A = \{(d_\alpha, \omega) : \alpha < \omega_1\}$. Veamos que A es cerrado y discreto en X . Sea $(x, n) \in X \setminus A$, entonces $x \in \beta D$ y $n < \omega$, por tanto, $(\beta D \times [0, n+1]) \cap A = \emptyset$, es decir, $\beta D \times [0, n+1] \subseteq X \setminus A$. Además, dado que d_α es aislado en βD , entonces $U_\alpha = \{d_\alpha\} \times \omega + 1$ es una vecindad de (d_α, ω) , en X , tal que $U_\alpha \cap A = \{(d_\alpha, \omega)\}$. Así, por la Observación 5, $A \times \{1\}$ es un subespacio cerrado-abierto y discreto no numerable de $AD(X)$. Ya que $c\text{-}\mathcal{P}$ es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos y es numerablemente discreta, entonces $AD(X) \notin [c\text{-}\mathcal{P}]$.

Proposición 4.36. *Sea \mathcal{P} una propiedad topológica que satisface:*

1. \mathcal{P} es numerablemente discreta;
2. \mathcal{P} es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos.

Si $AD(X) \in [\mathcal{P}]$, entonces $e(X) \leq \omega$.

Demostración: Supongamos que $e(X) > \omega$ y sea L un subconjunto cerrado y discreto de X tal que $|L| > \omega$. Por la Observación 5, $L \times \{1\}$ es un subconjunto cerrado-abierto y discreto no numerable en $AD(X)$.

Si $AD(X) \in [\mathcal{P}]$, ya que \mathcal{P} es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos, entonces $L \times \{1\} \in [\mathcal{P}]$. Pero \mathcal{P} es numerablemente discreta y $L \times \{1\}$ es un subconjunto discreto. Así, $L \times \{1\}$ es numerable, lo cual es una contradicción. Por tanto, $AD(X) \notin [\mathcal{P}]$. \square

Recordemos que si una propiedad \mathcal{P} es numerablemente discreta, entonces $c\text{-}\mathcal{P}$ es una propiedad numerablemente discreta. También, si \mathcal{P} es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos, entonces $c\text{-}\mathcal{P}$ es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos. Por tanto, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.37. *Sea \mathcal{P} una propiedad que es numerablemente discreta y que es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos. Entonces $AD(X) \in [c\text{-}\mathcal{P}]$ implica que $e(X) \leq \omega$.*

4.2. Propiedades de cubiertas tipo Lindelöf

En la sección anterior estudiamos algunas propiedades genéricas de los espacios celular \mathcal{P} , con algunas condiciones para la

propiedad \mathcal{P} . Debido a que ya existe literatura dónde se han estudiado de forma exhaustiva, los espacios celular \mathcal{P} , cuando \mathcal{P} es una propiedad de tipo compacidad, por ejemplo, los espacios celular compactos, o celular numerablemente-compactos (ver [1]), para evita ser repetitivos, entonces nuestro objetivo, ahora, es estudiar la relación que existe entre los espacios celular \mathcal{P} considerando propiedades de cubiertas tipo Lindelöf. Más específicamente, vamos a considerar los casos en que \mathcal{P} es la propiedad de *Lindelöf* (L), la propiedad *casi Lindelöf* (aL), la propiedad *débilmente Lindelöf* (wL) y la propiedad *DCCC*.

Como observamos en el Capítulo 3, las propiedades L , aL y wL están relacionadas como sigue:

$$L \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \longleftarrow \quad \longleftarrow \end{array} aL \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \longleftarrow \quad \longleftarrow \end{array} wL$$

Esto es, todo espacio Lindelöf es un espacio casi Lindelöf, y existe un espacio casi Lindelöf que no es un espacio Lindelöf. Similarmente, todo espacio casi Lindelöf es un espacio débilmente Lindelöf, pero existe un espacio débilmente Lindelöf que no es un espacio casi Lindelöf. Luego, por las proposiciones 4.15 y 4.2, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} L & \longrightarrow & aL & \longrightarrow & wL \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ c-L & \longrightarrow & c-aL & \longrightarrow & c-wL \end{array}$$

Considerando, además, las propiedades *CCC* y *DCCC*, entonces tenemos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} CCC & & L & \longrightarrow & aL & \longrightarrow & wL & \longrightarrow & DCCC \\ \updownarrow & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ c-CCC & \longrightarrow & c-L & \longrightarrow & c-aL & \longrightarrow & c-wL & \longrightarrow & c-DCCC \end{array}$$

Recordemos que todo espacio casi Lindelöf regular es Lindelöf (Proposición 2.5, 4), por tanto, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.38. *Todo espacio celular casi Lindelöf y regular es celular Lindelöf.*

Nuestro objetivo a continuación es mostrar, como en el caso de las propiedades L , aL y wL , que estas clases de espacios propuestas, $c-L$, $c-aL$, $c-wL$ y $c-DCCC$ son, efectivamente, nuevas clases de espacios topológicos. Para ello mostraremos, por ejemplo, que existe un espacio topológico X tal que $X \in [c-L]$ pero que $X \notin [L]$. Es pertinente resaltar que los espacios que usaremos para construir nuestros ejemplos fueron estudiados en capítulos anteriores. Si el lector desea leer más sobre estos espacios así como de algunas de sus propiedades, recomendamos leer el Capítulo 2, donde se construyen dichos espacios.

Ejemplo 4.39. *Existe un espacio X Hausdorff, celular Lindelöf tal que X no es un espacio Lindelöf.*

Sea $X = [(\omega_1 + 1) \times (\omega + 1)] \setminus \{(\omega_1, n) : n \in \omega\}$. Para cada $x \in X$ definamos $\{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$ como sigue:

1. si $x = (\alpha, n) \in \omega_1 \times \omega$, entonces sea

$$\mathcal{B}(x) = \{ \{(\alpha, n)\} \};$$

2. si $x = (\alpha, \omega) \in \omega_1 \times \{\omega\}$. Para cada $n < \omega$ definamos $U_\alpha(n)$ como

$$U_\alpha(n) = \{(\alpha, m) : n \leq m \leq \omega\}.$$

Sea

$$\mathcal{B}(x) = \{U_\alpha(n) : n < \omega\}.$$

3. si $x = (\omega_1, \omega)$. Para cada $\alpha < \omega_1$ definamos $U_{\omega_1}(\alpha)$ como sigue

$$U_{\omega_1}(\alpha) = \{(\beta, n) : \alpha \leq \beta < \omega_1 \text{ y } n < \omega\}.$$

Sea

$$\mathcal{B}(x) = \{U_{\omega_1}(\alpha) : \alpha < \omega_1\}.$$

En el Capítulo 3 mostramos que X es un espacio topológico Hausdorff que no es Lindelöf. Además, sea $Y = \omega_1 \times \omega \cup \{(\omega_1, \omega)\}$. En el capítulo 3 vimos que Y es un subespacio denso y Lindelöf de X . Así, por la Proposición 4.7 tenemos que X es un espacio celular Lindelöf.

Ejemplo 4.40. *Existe un espacio topológico Tychonoff, celular casi Lindelöf que no es casi Lindelöf.*

Consideremos el plano de Sorgenfrey $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$. En el Capítulo 3 vimos que $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ es un espacio \mathbf{T}_3 que no es casi Lindelöf.

Ya que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es un subespacio denso y numerable, entonces $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ tiene la CCC. Por tanto, $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ es celular casi Lindelöf.

Ejemplo 4.41. *Existe un espacio Hausdorff, celular débilmente Lindelöf y P -espacio que no es un espacio débilmente Lindelöf.*

Sea $\mathbb{D} = \{0, 1\}$ con la topología discreta y consideremos el \mathfrak{c}^+ -cubo de Cantor, $\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}$ con la topología del producto. Definamos $S = \{x \in \mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+} : |\text{sop}(x)| < \omega\}$ y $T = \{x \in \mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+} : 0 < |\text{sop}(x)| < \omega\}$ y sean $L = G_\delta(S_{\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}}(S))$ y $X = G_\delta(S_{\mathbb{D}^{\mathfrak{c}^+}}(T))$.

En el Capítulo 3 demostramos que X es un P -espacio que no es débilmente Lindelöf y que $c(X) \leq \mathfrak{c}$.

Veamos que X es celular Lindelöf. Sea \mathcal{U} una familia celular; supongamos sin pérdida de generalidad, que cada $U \in \mathcal{U}$ es de la forma $G(A_U, f_U) \cap T$. Ya que $c(X) \leq \mathfrak{c}$, entonces $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} A_U$ tiene tamaño a lo más \mathfrak{c} . Luego, existe $\alpha > \sup(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} A_U)$. Entonces $O = \pi_\alpha^{-1}[\{0\}] \cap L$ es un abierto en L , así $L \setminus O$ es cerrado en L . En el Capítulo 3 observamos que L es un espacio Lindelöf, por tanto, $L \setminus O$ es un espacio Lindelöf. Más aún, $L \setminus O \subseteq X$ y $L \setminus O$ intersecta a todos los elementos de \mathcal{U} (pues ningún A_U tiene a α).

Ejemplo 4.42. *Existe un espacio Hausdorff, celular casi Lindelöf que no es un espacio celular Lindelöf.*

Consideremos a ω_1 con la topología discreta y sea $\kappa(\omega_1)$ la extensión de Katětov de ω_1 . Por el Capítulo 3, $\kappa(\omega_1)$ es un espacio Hausdorff H -cerrado. Por la Proposición 2.8, concluimos que $\kappa(\omega_1)$ es un espacio casi Lindelöf. Así, $\kappa(\omega_1)$ es celular casi Lindelöf.

Veamos que $\kappa(\omega_1)$ no es un espacio celular Lindelöf. Consideremos $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia de subconjuntos infinitos de ω_1 , disjunta por pares. Para cada $\alpha < \omega_1$, sea $p'_\alpha = \{A \subseteq \omega_1 : |\omega_1 \setminus A| < \omega\} \cup \{A_\alpha\}$. Notemos que p'_α tiene la PIF, pues si $A \subseteq \omega_1$, con complemento finito, es tal que $A \cap A_\alpha = \emptyset$, entonces $A_\alpha \subseteq (\omega_1 \setminus A)$. Por tanto, existe p_α ultrafiltro sobre ω_1 tal que $p'_\alpha \subseteq p_\alpha$. Por la Proposición 1.27, ya que p_α contiene todos los

subconjuntos con complementos finitos de ω_1 , entonces p_α es un ultrafiltro libre sobre ω_1 .

Definamos $\mathcal{U} = \{\{p_\alpha\} \cup A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Claramente, los elementos de \mathcal{U} son abiertos en $\kappa(\omega_1)$. Más aún, \mathcal{U} es una familia celular. Observemos que si $\alpha \neq \beta$, entonces $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, así, $A_\alpha \notin p_\beta$, pues $A_\beta \in p_\beta$. Por tanto, $p_\alpha \neq p_\beta$.

Por otro lado, ya que ningún ultrafiltro \mathcal{V} sobre ω_1 es elemento de ω_1 pues si $\mathcal{V} \in \omega_1$, entonces \mathcal{V} es un ordinal, digamos λ . Ya que $\lambda \subseteq \omega_1$ abierto y \mathcal{V} es ultrafiltro sobre ω_1 , entonces $\lambda \in \mathcal{V}$ o $\omega_1 \setminus \lambda \in \mathcal{V}$, pero $\lambda = \mathcal{V} \notin \mathcal{V}$ y $\omega_1 \setminus \lambda \notin \mathcal{V} = \lambda$, pues $\lambda < \omega_1$; entonces si suponemos que $x \in (A_\alpha \cup \{p_\alpha\}) \cap (A_\beta \cup \{p_\beta\})$, entonces no queda de otra más que $x \in A_\alpha \cap \{p_\beta\}$ o $x \in \{p_\alpha\} \cap A_\beta$, entonces $p_\beta \in \omega_1$ o $p_\alpha \in \omega_1$, lo cual es una contradicción. Por tanto, \mathcal{U} es una familia celular.

Afirmamos que ningún subespacio Lindelöf de $\kappa(\omega_1)$ interseca a todos los elementos de la familia \mathcal{U} y por tanto, $\kappa(\omega_1)$ no es un espacio celular Lindelöf. Supongamos que L un subespacio Lindelöf de $\kappa(\omega_1)$ que interseca a todos los elementos de \mathcal{U} . Ya que $Y = \kappa(\omega_1) \setminus \omega_1$ es un subespacio cerrado y discreto de ω_1 , entonces $L \cap Y$ es un subespacio cerrado y discreto de L . Ya que la propiedad de Lindelöf se preserva bajo subconjuntos cerrados, entonces $L \cap Y$ es un espacio discreto Lindelöf, así, $L \cap Y$ es numerable.

Ya que ω_1 es un ordinal regular, sea $\alpha_0 = \sup\{\alpha < \omega_1 : p_\alpha \in L \cap Y\}$. Ya que L interseca a todos los elementos de \mathcal{U} , entonces para cada $\alpha > \alpha_0$ $A_\alpha \cap L \neq \emptyset$, así, para cada $\alpha > \alpha_0$ sea $x_\alpha \in A_\alpha \cap L$. Sea $A = \{x_\alpha : \alpha_0 < \alpha < \omega_1\} \subseteq L$; notemos que A tiene cardinalidad ω_1 . Afirmamos que A es cerrado y discreto en L . Sea x un punto de acumulación de A . Dado que $A \subseteq \omega_1$ y ω_1 tiene la topología discreta, entonces $x \notin \omega_1$. Por tanto, $x \in L \cap Y$, entonces existe $\alpha \leq \alpha_0$ tal que $x = p_\alpha$. Sin embargo, por contrucción de A , $\{p_\alpha\} \cup A_\alpha$ es una vecindad de p_α que no interseca a ningún elemento de A . Por tanto, A no tiene puntos de acumulación en L , así, A es un subconjunto discreto y cerrado, y por tanto es un espacio discreto y Lindelöf. Así, A es numerable, lo cual contradice que $|A| = \omega_1$.

Ejemplo 4.43. *Existe subespacio Tychonoff, celular débilmente Lindelöf que no es celular casi Lindelöf.*

Sean $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un subconjunto denso y numerable en \mathbb{R} y κ

un cardinal infinito no numerable. Sea

$$X = Q \cup \{(a, \kappa) : a \in A\}, \text{ donde } Q = \mathbb{Q} \times \kappa.$$

Para cada $x \in X$, definamos $\mathcal{B}(x)$ como sigue:

1. Si $x = (q, \alpha) \in Q$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$U_n(x) = (B_{\frac{1}{n}}(q) \cap \mathbb{Q}) \times \{\alpha\}$$

donde $B_{\frac{1}{n}}(q)$ es la bola Euclideana, usual en \mathbb{R} , con centro en q y radio $\frac{1}{n}$. Sea

$$\mathcal{B}(x) = \{U_n(x) : n \in \mathbb{N}\}.$$

2. Si $x = (a, \kappa)$, con $a \in A$, entonces para cada $F \in [\kappa]^{<\omega}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$U_{n,F}(x) = [(B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A) \times \{\kappa\}] \cup [(B_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathbb{Q}) \times (\kappa \setminus F)].$$

Sea

$$\mathcal{B}(x) = \{U_{n,F}(x) : n \in \mathbb{N} \text{ y } F \in [\kappa]^{<\omega}\}.$$

En el Capítulo anterior vimos que el espacio anterior es débilmente Lindelöf. Por tanto, X es celular débilmente Lindelöf.

Veamos que X no es celular Lindelöf. Notemos que para cada $\alpha < \kappa$, $\mathbb{Q} \times \{\alpha\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} U_1((q, \alpha))$. Por tanto, para cada $\alpha < \kappa$ $\mathbb{Q} \times \{\alpha\}$ es abierto en X . Más aún, si $\alpha, \beta < \kappa$ tales que $\alpha \neq \beta$, entonces $(\mathbb{Q} \times \{\alpha\}) \cap (\mathbb{Q} \times \{\beta\}) = \emptyset$. Así, $\mathcal{U} = \{\mathbb{Q} \times \{\alpha\} : \alpha < \kappa\}$ es una familia celular en X . Afirmamos que ningún subespacio Lindelöf de X interseca a todos los elementos de \mathcal{U} . Supongamos que $L \subseteq X$ interseca a todos los elementos de \mathcal{U} . Para cada $\alpha < \kappa$ sea $(q_\alpha, \alpha) \in L \cap (\mathbb{Q} \times \{\alpha\})$. Por el Principio de las Casillas, dado que $\kappa > \omega$, existen $q_0 \in \mathbb{Q}$ y $S \in [\kappa]^{>\omega}$ tales que $D = \{(q_0, \alpha) : \alpha \in S\} \subseteq L$. Afirmamos que D es un subconjunto cerrado y discreto. Puesto que X es T_1 , si y es un punto de acumulación de D ($y \in D^d$), entonces cada vecindad de y interseca a D en un número infinito de puntos.

1. Supongamos que $x = (a, \kappa)$, con $a \in A$. Ya que $q_0 \in \mathbb{Q}$ y $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces $|a - q_0| > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < |a - q_0|$. Entonces $U_{\frac{1}{n}, \emptyset}(x) \cap D = \emptyset$. Así, $x \notin D^d$.

2. Supongamos que $x \in Q$, entonces existen $q \in \mathbb{Q}$ y $\alpha < \kappa$ tales que $x = (q, \alpha)$.

a) Si $\alpha \notin S$, entonces $U_1(x) \cap D = \emptyset$.

b) Si $\alpha \in S$, entonces $|U_1(x) \cap D| \leq 1$.

Por tanto, $x \notin D^d$.

Consecuentemente, $D^d = \emptyset$ y, así, D es cerrado y discreto en X . Si L es un espacio Lindelöf, entonces D tiene que ser un espacio Lindelöf (por ser cerrado y estar contenido en L), pero entonces D es un espacio Lindelöf, discreto y no numerable. Lo cual contradice que L es una propiedad numerablemente discreta.

Más aún, por el Corolario 4.38, dado que X es regular, entonces X no puede ser celular casi Lindelöf.

Ejemplo 4.44. *Existe un espacio regular, DCCC que no es celular débilmente Lindelöf.*

Consideremos los espacios topológicos $\omega_1 + 1$ y ω_1 con la topología del orden. Sea

$$X = (\omega_1 + 1) \times \omega_1,$$

con la topología del producto.

Ya que $\omega_1 + 1$ es compacto y ω_1 es numerablemente compacto, entonces X es numerablemente compacto. Por el Lema 2.15, ya que $X \times Y$ es regular, entonces $X \times Y$ tiene la propiedad DCCC.

Afirmamos que

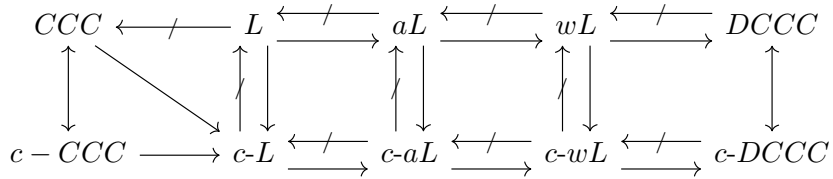
$$\mathcal{U} = \{ \{(\alpha, \alpha)\} : \alpha \text{ es un ordinal sucesor y } \alpha < \omega_1 \}$$

es una familia celular tal que ningún subespacio débilmente Lindelöf intersecta a todos los elementos de \mathcal{U} . Sea $\{(\alpha, \alpha)\} \in \mathcal{U}$, entonces existe $\beta < \omega_1$ tal que $\beta + 1 = \alpha$. Así, $\{(\alpha, \alpha)\} = (\beta, \beta + 2) \times (\beta, \beta + 2)$, por tanto, \mathcal{U} es una familia celular.

Supongamos que L es un subespacio débilmente Lindelöf de X y sea $\pi_2 : (\omega_1 + 1) \times \omega_1 \rightarrow \omega_1$ la proyección sobre la segunda coordenada. Sabemos que π_2 es una función continua, y ya que la propiedad débilmente Lindelöf se preserva bajo funciones continuas, entonces $\pi_2[L]$ es un subespacio débilmente Lindelöf de ω_1 .

Veamos que $\pi_2[L]$ es acotado. Consideremos $\{[0, \alpha) : \alpha < \omega_1\}$, entonces existe $\{[0, \alpha_n) : n < \omega\}$ tal que $\pi_2[L] \subseteq \bigcup_{n < \omega} [0, \alpha_n)$. Ya que ω_1 es regular, entonces existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\pi_2[L] \subseteq \overline{[0, \alpha)} = [0, \alpha]$. Entonces $(\alpha + 1, \alpha + 1) \notin L$.

Ya que $\omega_1 + 1$ es un espacio Lindelöf, y por tanto, celular Lindelöf que no tiene la propiedad CCC. Entonces concluimos que el siguiente diagrama se satisface, donde las flechas rojas significa que no se da dicha implicación.



Para finalizar esta sección, mencionaremos algunas propiedades, derivadas de la sección anterior, que cumplen los espacios celular Lindelöf, celular casi Lindelöf, celular débilmente Lindelöf y DCCC.

Corolario 4.45. *Para $\mathcal{P} \in \{L, aL, wL, DCCC\}$, la imagen continua de espacios celular \mathcal{P} , es un espacio celular \mathcal{P} .*

Corolario 4.46. *Todo subespacio cerrado-abierto de un espacio celular \mathcal{P} vuelve a ser un espacio celular \mathcal{P} , para*

$$\mathcal{P} \in \{L, aL, wL, DCCC\}.$$

Dado que las propiedades Lindelöf, casi Lindelöf y débilmente Lindelöf se preservan bajo sumas numerables y son hereditarias con respecto a subconjuntos cerrado-abiertos, entonces tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.47. *Sean \mathcal{P} es una propiedad topológica tal que $\mathcal{P} \in \{L, aL, wL\}$ y $\{X_n : n \in \omega\}$ una familia de espacios topológicos disjuntos por pares. Entonces $X_n \in [c-\mathcal{P}]$ para cada $n \in \omega$ si y solo si $\bigoplus_{n \in \omega} X_n \in [c-\mathcal{P}]$.*

En [8] A. Dow y R.M. Stephenson Jr. dieron un ejemplo de un espacio celular Lindelöf y un espacio compacto cuyo producto

no es un espacio celular Lindelöf. Así, existen dos espacios celular Lindelöf tales que su producto no es un espacio celular Lindelöf. De hecho, lo anterior también ocurre en caso de que $\mathcal{P} \in \{aL, wL\}$.

Ejemplo 4.48. *Existen dos espacios Tychonoff celular débilmente Lindelöf, X y Y , tales que $X \times Y$ no es un espacio celular débilmente Lindelöf.*

Demostración: Por el Teorema de Bernstein (Teorema 3.17), existe $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que A y $\mathbb{R} \setminus A$ son conjuntos totalmente imperfectos y $|A| = |\mathbb{R} \setminus A| = \mathfrak{c}$.

Consideremos

$$X = (A \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\}) \text{ y } Y = ((\mathbb{R} \setminus A) \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$$

subespacios del duplicado de Alexandroff de \mathbb{R} , $AD(\mathbb{R})$.

Ya que \mathbb{R} es un espacio \mathbf{T}_4 , entonces $AD(\mathbb{R})$ es un espacio \mathbf{T}_4 , por tanto, X y Y son espacios Tychonoff. Veamos que X es un espacio Lindelöf. Es claro que

$$\mathcal{B}_X = \{[(U_x \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\}] \cap X : x \in A \text{ y } x \in U_x \in \tau_e\} \cup \{\{(x, 1)\} : x \in \mathbb{R}\}$$

es una base para X , donde τ_e es la topología de \mathbb{R} usual. Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de conjuntos básicos de X , es decir, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}_X$. Entonces existen $F \subseteq A$ y $B \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$\mathcal{U} = \{[(U_x \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\}] \cap X : x \in F \text{ y } x \in U_x \in \tau_e\} \cup \{\{(x, 1)\} : x \in B\}.$$

Notemos que si $x \in A$, entonces $(x, 0) \in X$, por tanto, existen $x' \in F$, $U_{x'} \in \tau_e$ y $[(U_{x'} \times \{0, 1\}) \setminus \{(x', 1)\}] \cap X \in \mathcal{U}$ tales que $(x, 0) \in [(U_{x'} \times \{0, 1\}) \setminus \{(x', 1)\}] \cap X$. Por tanto, $x \in U_{x'}$. Así, $\mathcal{A} = \{U_x : x \in F \text{ y } [(U_x \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\}] \cap X \in \mathcal{U}\}$ es una colección de conjuntos abiertos que cubren a A . Ya que $A \subseteq \mathbb{R}$ y \mathbb{R} es segundo numerable, entonces A es segundo numerable, por tanto, A es Lindelöf. Luego, existe una colección $\{U_{x_n} : n < \omega\} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\{x_n : n < \omega\} \subseteq F$, $x_n \in U_{x_n}$ y

$$A \subseteq \bigcup_{n < \omega} U_{x_n}.$$

Sea $U = \bigcup_{n < \omega} U_{x_n}$. Entonces $\mathbb{R} \setminus U \subseteq \mathbb{R} \setminus A$. Ya que $\mathbb{R} \setminus U$ es un subconjunto cerrado de \mathbb{R} contenido en $\mathbb{R} \setminus A$, un conjunto totalmente imperfecto, entonces $\mathbb{R} \setminus U$ es numerable, Corolario 3.16.

Para cada $x \in \{x_n : n < \omega\} \cup (\mathbb{R} \setminus U)$ escojamos $V_x \in \mathcal{U}$ tal que $(x, 1) \in V_x$. Sea

$$\mathcal{U}_0 = \{[(U_{x_n} \times \{0, 1\}) \setminus \{(x_n, 1)\}] \cap X : n < \omega\} \cup \{V_x : x \in \{x_n : n < \omega\} \cup (\mathbb{R} \setminus U)\}.$$

Entonces $\mathcal{U}_0 \in [\mathcal{U}]^{\leq \omega}$. Afirmamos que $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$. Sea $p \in X$.

1. Si $p = (x, 0)$, con $x \in A$, entonces existe $n < \omega$ tal que $x \in U_{x_n}$, por tanto, $p \in [(U_{x_n} \times \{0, 1\}) \setminus \{(x_n, 1)\}] \cap X$.
2. Si $p = (x, 1)$, con $x \in \mathbb{R}$.
 - a) Si $x \in \{x_n : n < \omega\} \cup (\mathbb{R} \setminus U)$, entonces $p \in V_x$.
 - b) Si $x \notin \{x_n : n < \omega\} \cup (\mathbb{R} \setminus U)$, entonces $x \in U$. Por tanto, existe $n_0 < \omega$ tal que $x \in U_{x_{n_0}}$ y ya que $x \neq x_{n_0}$, entonces $p = (x, 1) \in [(U_{x_{n_0}} \times \{0, 1\}) \setminus \{(x_{n_0}, 1)\}] \cap X$.

Análogamente, podemos demostrar que Y es un espacio Lindelöf.

Ya que X y Y son espacios Lindelöf, entonces X y Y son espacios celular (casi) débilmente Lindelöf.

Ya que para cada $p \in \mathbb{R} \times \{1\}$, $\{p\}$ es cerrado-abierto, entonces

$$D = \{(p, p) : p \in \mathbb{R} \times \{1\}\} \subseteq X \times Y$$

es un subespacio abierto y discreto, no numerable. Más aún, veamos que D es un subconjunto cerrado de $X \times Y$. Dado que \mathcal{B}_X es una base para X , entonces

$$[(U_x \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\}] \cap X = [(U_x \cap A) \times \{0\}] \cup [(U_x \times \{1\}) \setminus \{(x, 1)\}],$$

con $x \in A$ y $x \in U_x \in \tau_e$, es abierto en X . Sea $(p, q) \in X \times Y$ tal que $(p, q) \notin D$.

1. Supongamos que $p, q \in \mathbb{R} \times \{1\}$, entonces $p \neq q$ y $\{p\}$ es un abierto en X y $\{q\}$ es un abierto en Y , por tanto, $(p, q) \in \{p\} \times \{q\} \subseteq (X \times Y) \setminus D$.
2. Supongamos que $p \in A \times \{0\}$ y $q \in \mathbb{R} \times \{1\}$. Entonces $p = (x, 0)$, con $x \in A$, y $q = (y, 1)$ con $y \in \mathbb{R}$.

- a) Si $y = x$, entonces $(A \times \{0\}) \cup [(\mathbb{R} \times \{1\}) \setminus \{(x, 1)\}]$ es una vecindad de p en X y $\{q\}$ es una vecindad de q en Y y

$$[(A \times \{0\}) \cup [(\mathbb{R} \times \{1\}) \setminus \{(x, 1)\}]] \times \{q\} \cap D = \emptyset,$$

pues en caso contrario $q \in (A \times \{0\}) \cup [(\mathbb{R} \times \{1\}) \setminus \{(x, 1)\}]$, pero esto último implica que $q \notin \{(x, 1)\} = \{q\}$, lo cual es una contradicción.

- b) Si $y \neq x$, entonces existe $U \in \tau_e$ tal que $x \in U_x$ y $y \notin U_x$. Entonces $p \in [(U_x \cap A) \times \{0\}] \cup [(U_x \times \{1\}) \setminus \{(x, 1)\}]$, $\{q\}$ es una vecindad de q en Y y

$$[[(U_x \cap A) \times \{0\}] \cup [(U_x \times \{1\}) \setminus \{(x, 1)\}]] \times \{q\} \cap D = \emptyset,$$

pues en caso contrario, $q \in (U_x \times \{1\}) \setminus \{(x, 1)\}$, es decir, $y \in U_x$; lo cual es una contradicción.

3. Supongamos que $p \in A \times \{0\}$ y $q \in (\mathbb{R} \setminus A) \times \{0\}$. Entonces $p = (x, 0)$, con $x \in A$, y $q = (y, 0)$, con $y \in \mathbb{R} \setminus A$. Así, $x \neq y$. Sean $U_x, V_y \in \tau_e$ tales que $x \in U_x$, $y \in V_y$ y $U_x \cap V_y = \emptyset$. Entonces

$$W_1 = [(U_x \cap A) \times \{0\}] \cup [(U_x \times \{1\}) \setminus \{(x, 1)\}]$$

es una vecindad de p en X y

$$W_2 = [(V_y \cap (\mathbb{R} \setminus A)) \times \{0\}] \cup [(V_y \times \{1\}) \setminus \{(y, 1)\}]$$

es una vecindad de q en Y . Además, si $r \in (W_1 \times W_2) \cap D$, entonces $r = (t, t)$, con $t \in \mathbb{R} \times \{1\}$ y $t \in W_1, W_2$, por tanto, existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $t = (z, 1)$ y $z \in U_x \cap V_y$, lo cual contradice que $U_x \cap V_y = \emptyset$.

Por tanto, $D \subseteq X \times Y$ es cerrado-abierto, discreto y no numerable, entonces $X \times Y$ no puede ser un espacio celular débilmente Lindelöf. \square

Finalmente, como un corolario de la Proposición 4.31 tenemos lo siguiente.

Corolario 4.49. (*[26], Teorema 3.9 para $\mathcal{P} = L$*) Si $\mathcal{P} \in \{L, aL, wL\}$, $X \in [c\text{-}\mathcal{P}]$ y Y es un espacio separable, entonces $X \times Y \in [c\text{-}\mathcal{P}]$.

4.3. Cardinalidad de los espacios celular \mathcal{P}

Teorema 4.50. *Sea X un espacio topológico normal, DCCC, con $H\psi(X) = \omega$ y con una g -función simétrica g que satisface que para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap \{g(n, x) : n \in \omega\}$, entonces $|X| \leq \mathfrak{c}$.*

Demostración: Supongamos que $|X| > \mathfrak{c}$. Ya que $H\psi(X) = \omega$, entonces para cada $x \in X$ sea $\mathcal{B}_x = \{V_{n,x} : n \in \omega\}$, tal que si $x, y \in X$ y $x \neq y$, entonces existen $n, m < \omega$ tales que $V_{n,x} \cap V_{m,y} = \emptyset$.

Para cada $n, m, k < \omega$ definamos

$$P_{n,m,k} = \{\{x, y\} \in [X]^2 : [(V_{n,x} \cap V_{m,y}) = \emptyset \text{ o } (V_{m,x} \cap V_{n,y}) = \emptyset] \text{ y } y \notin g(k, x)\}.$$

Afirmamos que $[X]^2 = \bigcup_{n,m,k < \omega} P_{n,m,k}$. Sea $\{x, y\} \in [X]^2$, ya que $x \neq y$, entonces existen $n_0, m_0 < \omega$ tales que $V_{n_0,x} \cap V_{m_0,y} = \emptyset$. Por otro lado, ya que $\bigcap \{g(n, x) : n \in \omega\} = \{x\}$, entonces existe $k_0 < \omega$ tal que $y \notin g(k_0, x)$. Así, $\{x, y\} \in P_{n_0,m_0,k_0}$.

Luego, por el Lema de Erdős, Rado, existen $n_0, m_0, k_0 < \omega$ y $S \subseteq X$ infinito no numerable tal que $[S]^2 \subseteq P_{n_0,m_0,k_0}$. Afirmamos que S es un subconjunto cerrado y discreto en X . Si $x \in S^d$, entonces existe $y \in g(k_0, x) \cap S \setminus \{x\}$. Dado que g es una g -función simétrica, entonces $x \in g(k_0, y)$. Ya que X es \mathbf{T}_1 , entonces $g(k_0, y) \cap S$ es una cantidad infinita de puntos, por tanto, existe $z \in g(k_0, y) \cap S \setminus \{x, y\}$. Entonces $y, z \in S$, $z \neq y$ y $z \in g(k_0, y)$, lo cual contradice que $[S]^2 \subseteq P_{n_0,m_0,k_0}$. Por tanto, $S^d = \emptyset$.

Para cada $x \in S$, sea $U_x = V_{n_0,x} \cap V_{m_0,x}$ y $\mathcal{U} = \{U_x : x \in S\}$. Notemos que \mathcal{U} es una familia celular en X . Sean $x, y \in S$ diferentes, supongamos que $V_{n_0,x} \cap V_{m_0,y} = \emptyset$, entonces $U_x \cap U_y \subseteq V_{n_0,x} \cap V_{m_0,y} = \emptyset$.

Por la normalidad de X , existe W abierto tal que $S \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Afirmamos que $\{U_x \cap W : x \in S\}$ es una familia discreta en X . Sea $x \in X$. Si $x \in \bigcup \mathcal{U}$, entonces existe $y \in S$ tal que $x \in U_y$. Ya que \mathcal{U} es una familia celular, entonces $U = U_y$ es una vecindad de x tal que $|\{U_z \in \mathcal{U} : U_z \cap U \neq \emptyset\}| = 1$. Supongamos que $x \notin \bigcup \mathcal{U}$, entonces $x \notin \overline{W}$, por tanto, $x \in U = X \setminus \overline{W}$. Ya que $U_x \cap W \subseteq \overline{W}$, entonces $\emptyset = (U_x \cap W) \cap X \setminus \overline{W} = (U_x \cap W) \cap U$. Por tanto, $|\{U_z \in \mathcal{U} : U_z \cap U \neq \emptyset\}| = 0$.

Ya que X tiene la DCCC, entonces dicha familia es numerable. Por tanto, existen $x, y \in S$, diferentes, tales que $U_x = U_y$, es

decir, $V_{n_0,x} \cap V_{m_0,y} \neq \emptyset$ y $V_{m_0,x} \cap V_{n_0,y} \neq \emptyset$, lo que contradice que $[S]^2 \subseteq P_{n_0,m_0,k_0}$. \square

Corolario 4.51. (*[26], Teorema 5.2*) *Sea X un espacio topológico normal con $H\psi(X) = \omega$ y con una g -función simétrica g que satisface que para cada $x \in X$ $\{x\} = \bigcap \{g(n,x) : n \in \omega\}$. Si $X \in [\mathcal{P}]$ y $[\mathcal{P}] \subseteq [DCCC]$, entonces $|X| \leq \mathfrak{c}$. En particular, si $X \in \{L, aL, wL, c-L, c-aL, c-wL, c-DCCC\}$, entonces $|X| \leq \mathfrak{c}$.*

Conclusiones

En la Proposición 4.15 establecimos que si \mathcal{P} implica topológicamente una propiedad \mathcal{Q} , entonces la propiedad celular \mathcal{P} implica topológicamente la propiedad celular \mathcal{Q} . Lo anterior, en conjunto con los ejemplos de la sección 4.2 evidencia que las clases de espacios topológicos Lindelöf, casi Lindelöf, débilmente Lindelöf y *DCCC*, son distintas entre sí. Además, para estas mismas propiedades logramos encontrar una cota superior para espacios celular \mathcal{P} que cumplen algunas condiciones adicionales (Teorema 4.50), el cual generaliza el Teorema 5.2 de [26].

A pesar de que en la tesis obtuvimos algunos resultados interesantes, el trabajo no ha sido exhaustivo. A continuación presentamos algunas preguntas importantes que no pudimos responder o que surgieron durante el desarrollo del presente trabajo.

¿Bajo que condiciones un espacio con la propiedad celular \mathcal{P} tiene la propiedad \mathcal{P} ?

Respecto a la pregunta previa, Xuan y Song mostraron, en [26], que si un espacio X es monótonamente normal y primero numerable o si X es un espacio de orden generalizado y primero numerable, entonces X es Lindelöf si y solo si X es celular Lindelöf. Por tanto, una pregunta natural es si dicha proposición se sigue cumpliendo cuando intercambiamos la propiedad de Lindelöf por la propiedad casi Lindelöf, débilmente Lindelöf o *DCCC*.

Otras preguntas interesantes que quedaron sin responder son las siguientes.

1. ¿Cuáles otras propiedades satisfacen que $[\mathcal{P}] = [c\text{-}\mathcal{P}]$?
2. ¿Para qué propiedades \mathcal{P} , si X es un espacio celular \mathcal{P} , entonces existe un subespacio denso de X que tiene la propiedad \mathcal{P} ?

3. Si X es un espacio compacto, entonces su duplicado de Alexandroff, $AD(X)$, es un espacio compacto; además, existe un espacio topológico celular Lindelöf que su duplicado de Alexandroff no es celular Lindelöf. Por tanto, otra pregunta interesante es ¿si X es un espacio celular compacto, entonces $AD(X)$ es un espacio celular compacto?

Pese al hecho de que el estudio realizado dejó varias cuestiones sin resolver, esperamos que la presente investigación constituya una primera aproximación al estudio de la clase de espacios topológicos celular \mathcal{P} . En este orden de ideas, resulta pertinente manifestar el deseo de que este estudio se erija como un punto de partida para aquellos interesados en la exploración de dichos espacios.

Bibliografía

- [1] Alas, O.T., Junqueira, L.R., Passos, M.D. et al. *On cellular-compactness and related properties*, RACSAM, **114** (2020), 101.
- [2] Ramírez-Páramo, A., & Sánchez-Texis, F. (2013). Extensión de Katetov. En Angoa J. J, Arrazola J., Escobedo E., *Topología y sus aplicaciones* (2). Cuerpo Académico de Topología y sus aplicaciones, FCFM BUAP.
- [3] Aparicio Hernández O. (2020), *Extensiones H-cerradas de Espacios Topológicos Hausdorff*, Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias.
- [4] Bell M., Ginsburg J., Woods G., *Cardinal inequalities for topological spaces involving the weak Lindelöf number*, Pac. J. Math. 79 (1) (1978) 306–311.
- [5] Bella, A., Spadaro, S., *On the cardinality of almost discretely Lindelöf spaces*, Monatsh Math **186** (2018), 345–353.
- [6] Cammaroto, F. & Santoro, G., *Some counterexamples and properties on generalizations of Lindelöf spaces*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **19** (1996), 737-746.
- [7] van Douwen E.K., Reed G.M., Roscoe A.W., Tree I.J., *Star covering properties*, Topol. Appl. **39** (1991), 71–103.
- [8] Dow A., Stephenson R.M., *Productivity of cellular-Lindelöf spaces*, Topology Appl. **290** (2021), 107606.

- [9] Engelking R., *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin (1989).
- [10] Gerlits J., Nagy Zs., *Some Properties of $C(X)$, I*, *Topol. Appl.* **14** (1982), 151-161.
- [11] F. Hernández. *Teoría de Conjuntos. Una introducción*. Aportaciones Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, segunda edición, 2019.
- [12] Jech T., *Set theory*, The Third Millennium Edition, revised and expanded. Springer Berlin, Heidelberg, third edition, 2003.
- [13] Lutzer D. J., *Pixley-Roy Topology*, *Topology Proc.* **3** (1978), 139-158.
- [14] Hindman, Neil. and Dona Strauss, *Algebra in Stone-Céch Compactification*, Walter de Gruyter, Berlin, NewYork, (1998).
- [15] Hodel R., *Cardinal functions I*, in: K. Kunen, J. Vaughan (Eds.), *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 1–61.
- [16] Juhász I., Tkachuk V. V., Wilson R. G., *Weakly linearly Lindelöf monotonically normal spaces are Lindelöf*, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **54** (2017), 523-535.
- [17] Kunen, K., *Set Theory*, An Introduction to Independence Proofs, North-Holland, Amsterdam (1980).
- [18] Kuratowski K., *Topology*, vol. I, Academic Press, New York-London, 1966.
- [19] Sakai M., *Cardinal functions of Pixley-Roy hyperspaces*, *Topol. Appl.* **159** (2012), 3080–3088.
- [20] Sakai, S., *Cardinal functions on Pixley–Roy hyperspaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **89** (1983), 336–340.
- [21] Singh-Kainth S. P., *A comprehensive Textbook on Metric spaces*, 1st ed., Springer Singapore, (2023).

- [22] Staynova, P., *A Comparison of Lindelof-Type Covering Properties of Topological Spaces*, RHIT Under-grad. Math. J. **12** (2011), 164–204
- [23] Tkachuk, V.V., Wilson, R.G., *Cellular-compact spaces and their applications*. Acta Math. Hungar. **159** (2019), 674–688.
- [24] Tkachuk, V.V., *A C_p -theory Problem Book. Special Features of Function Spaces*, Springer (New York, 2014).
- [25] Tkachuk V.V., *Weakly linearly Lindelöf spaces revisited*, Topol. Appl. **256** (2018), 128–135.
- [26] Xuan W.F., Song Y.K., *A study of cellular-Lindelöf spaces*, Topol. Appl. **251** (2019), 1–9.
- [27] Xuan W.F., Song Y.K., *More on cellular-Lindelöf spaces*, Topol. Appl. **266** (2019), 12 pp., MR3997193.