



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

**Equilibrio en sistemas de
confinamiento magnético toroidal
axisimétrico**

Tesis Presentada al

Colegio de Física

como requisito para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Ana María Iglesias Reséndiz

asesorado por

Dr. José Julio Emilio Herrera
Velázquez y M.C. Pedro Tolentino
Eslava

Puebla, Pue.

30/10/2020

Equilibrio en sistemas de confinamiento magnético toroidal axisimétricos

Tesis

Ana María Iglesias Reséndiz Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez y M.C. Pedro Tolentino
Eslava



Facultad de Ciencias
Físico Matemáticas

Título: Equilibrio en sistemas de confinamiento magnético toroidal axisimétricos.

Estudiante: Ana María Iglesias Reséndiz

COMITÉ

Dr. Óscar Mario Martínez Bravo
Presidente

Dra. Areli Montes Pérez
Secretario

Dr. César Romeo Guitierrez Tapia
Vocal

Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez y M.C. Pedro Tolentino Eslava
Asesor

Agradecimientos

A mis padres y familia que me apoyaron en todas mis decisiones, al M.C. Pedro Tolentino E. por acercarme a esta rama de la física y darme su apoyo a lo largo de la carrera, al Dr. Julio Herrera por aceptarme como estudiante, por su infinita paciencia, dedicación y atención y a Manuel.

Índice general

1. Introducción	1
2. Fusión Nuclear	3
2.1. Barrera de Coulomb	5
2.2. Efecto túnel	6
2.2.1. Aproximación de Barrera Escalón	6
2.2.2. Generalización a la Barrera de Coulomb	11
2.2.3. Pico de Gamow	13
3. Fundamentos de física de Plasma	17
3.1. Plasma	17
3.2. Dinámica de partículas independientes en campos magnéticos	23
3.3. Aproximación Magnetohidrodinámica	29
3.4. Ondas Magnetohidrodinámicas	35
4. Confinamiento Magnético	39
4.1. Espejos magnéticos	39
4.2. Z -pinch	41
4.3. Sistemas toroidales	46

5. Equilibrio	53
5.1. Función de flujo	53
5.2. Ecuación de Grad Shafranov	58
6. Métodos de Solución	63
6.1. Método de Solov'ev	63
6.2. Solución Variacional	70
7. Conclusiones	77
A. Integral	81
B. Decaimiento Alfa	83

Resumen

En el primer capítulo se hace el cálculo desde el caso clásico de cuántica y se afina hasta llegar al pico de Gamow. En el capítulo 2, debido a la necesidad de emplear campos magnéticos y eléctricos para confinar el plasma, se hace un análisis del comportamiento de las partículas en ellos, se deben de considerar varios casos pues en el siguiente capítulo se examinan algunas configuraciones magnéticas y éstas tienen diferentes formas en sus campos. Aunado a ello se debe considerar el caso en el que el plasma ya es considerado un fluido, para lo que se usa la teoría de la magnetohidrodinámica. En el capítulo siguiente se hace una revisión de los tipos de confinamiento, poniendo sobre la mesa sus ventajas y desventajas. El capítulo 5 se hace un análisis de la forma de los campos y presión magnéticos y flujo para sistemas toroidales, con el fin de encontrar la ecuación vectorial de equilibrio y posteriormente escribirla en forma de ecuación diferencial, conocida como ecuación de *Grad-Shafranov*. En el capítulo 6 se discuten los posibles métodos de solución de tal ecuación, con frontera fija, pues es una ecuación diferencial no lineal elíptica; se dan 2 posibles vertientes: una solución analítica usando perfiles constantes (los perfiles de Solov'ev) que nos da una solución útil para casos reales aunque tiene sus limitaciones. La otra posibilidad es usar un método numérico, que es la forma en la que en general se solucionan este tipo de ecuaciones. En este segundo caso se utiliza un método variacional usando el principio de energía. Y finalmente el capítulo 7 con las conclusiones.

Capítulo 1

Introducción

En 1927 Mark Oliphant haciendo estudios con un acelerador de partículas, disparando núcleos de ${}^2\text{H}^+$ contra blancos, descubrió que el He^3 y el H^3 reaccionan entre sí y fue la primera demostración de la fusión nuclear. En 1929 Atkinson y Houtemans plantearon la posibilidad de obtener energía a partir de la fusión, tomando los textos de Einstein, con su famosa ecuación $E = mc^2$, que relaciona la masa con la energía, y con ello se explicó el modo en que las estrellas irradian energía en términos de luz y calor. A partir de entonces se desarrollaron varios conceptos y sus aplicaciones, inicialmente con los trabajos de Bethe, quien descubrió en 1938 una de las reacciones nucleares por la que las estrellas convierten hidrógeno en helio: el ciclo del carbono.

Ya entrada la segunda guerra mundial, estando en Estados Unidos en 1939 empieza el desarrollo el primer reactor de fisión en el proyecto Manhattan, siendo dirigidos por Oppenheimer, junto con científicos importantes se entre los que se encontraban: Teller, Bethe, Fermi, Feynman, etc., el Chicago Pile-1 junto con Leó Szilárd, quien descubrió la reacción en cadena, que se realizaría por primera vez en 1942.

En 1951 Ronald Richter, un científico alemán residido en Argentina, publica sus estudios y el proyecto Huemul, que pretendía hacer el primer reactor de fusión experimental. Pero no es hasta 1952 que se detona la primera bomba H que Teller, Ulam y Bethe desarrollaron en 1951, en donde se pone en marcha el proceso Teller-Ulam, que fue una idea originalmente pensada por Fermi en 1941, y que fue transmitida a Teller. Ulam rescató la idea original y expuso que la bomba tendría un proceso de 3 partes: Se hace explotar una bomba de fisión que calentara lo suficiente para que se iniciara el proceso de fusión de tal manera que la primera explosión comprima lo suficiente al segundo como para activar la

fusión. La radiación gamma y los rayos x emitidos por la primera fase tienen la suficiente energía como para inducir la fusión y la tercera parte es otra vez un proceso de fisión.

Para ese mismo año se empezó a desarrollar el proyecto Sherwood, que planteaba el uso comercial de la fusión para obtener energía barata e inagotable de la mano de Lyman Spitzer, quien ideó un reactor de confinamiento magnético **Stellarator** con campos helicoidales en 1951, pero hasta 1953 se puso en operación

Mientras en la URSS en 1950 Oleg Lavrentiev hacía los primeros bosquejos de lo que sería uno de los primeros reactores de confinamiento magnético. En 1951 se crea el generador magnético implosivo (MK1) cuyo funcionamiento se basaba en la compresión de campos magnéticos por medio de explosiones, dos años más tarde se realizó el MK2 un afinamiento del MK1 (1953). Ya para 1956 Igor Tam y Andréi Sájarov logran el primer **Tokamak** (cámara toroidal con bobinas magnéticas, por sus siglas en ruso) que consistió en una cámara de vacío toroidal que contenía hidrógeno y un dispositivo que por grandes descargas eléctricas ionizaba el gas y un campo magnético helicoidal confinaba el plasma. Estos, el Stellarator y el Tokamak, son los dos reactores de fusión más estudiados hasta el momento, y de los cuales el proyecto más grande y ambicioso hasta el momento es el **ITER** (International Thermonuclear Experimental Reactor) que es un reactor tipo Tokamak, que se está construyendo en Francia y en el cual participan varios países como la Unión Europea, Japón, Rusia, China, EE.UU., Corea del Sur e India. Se le considera el proyecto científico más complejo de la historia, ya que se tuvo que hacer por partes que luego se deben ensamblar en una provincia francesa, en una superficie de 42 hectáreas. El primer plasma que generará este coloso será para diciembre de 2025 e inaugurará el experimento más grande hasta ahora en materia energética.

Capítulo 2

Fusión Nuclear

Llamamos fusión nuclear a la reacción en el que dos nucleidos (o nucleido y partícula proyectil) interactúan para dar lugar a un nucleido con número másico mayor que el de cada uno de los dos nucleidos iniciales, existen varios tipos de reacciones, entre las que se encuentran:

- Ciclo protón-protón
- Ciclo CNO
- triple alfa
- Isótopos de hidrógeno,

Todas ellas son posibles por el *Defecto de masa* y la existencia de una fuerza de atracción entre nucleones que, a pesar de ser de corto alcance, es capaz de superar la fuerza eléctrica (ya que mantiene a los protones y neutrones juntos y estables en el núcleo).

En principio la fusión y la fisión son reacciones, exotérmicas. Se puede conocer el tipo de reacción al hacer un balance de masas teniendo en cuenta la ecuación de energía de Einstein $E = mc^2$. Si la masa de los nucleidos iniciales es mayor o menor a los finales, su diferencia es el parámetro Q , si es positiva se producirá energía, en caso contrario se necesita aportar energía para que se produzca la reacción.

La masa del núcleo que está relacionada con su número de nucleones, y es siempre menor a la suma de las masas constituyentes, la masa de exceso, δm_0 está relacionada con la energía de ligadura E_l , que es la energía mínima para producir ruptura en el núcleo, la

relación entre el exceso de masa y la energía de ligadura es:

$$\delta m_0 = \frac{E_l}{c^2}. \quad (2.1)$$

Por lo que entonces, la masa del núcleo, m_n esta descrita por:

$$\delta m_0 = Zm_p + (A - Z)m_n - M. \quad (2.2)$$

Donde M es la masa total del núcleo, m_n masa de un neutrón y m_p masa de un protón. Lo que nos da un aproximado de la energía necesaria para separar al nucléido en sus partículas constituyentes, a tal energía se le conoce como Energía de ligadura o enlace; el que ésta sea más grande o pequeña indica la estabilidad del nucleón.

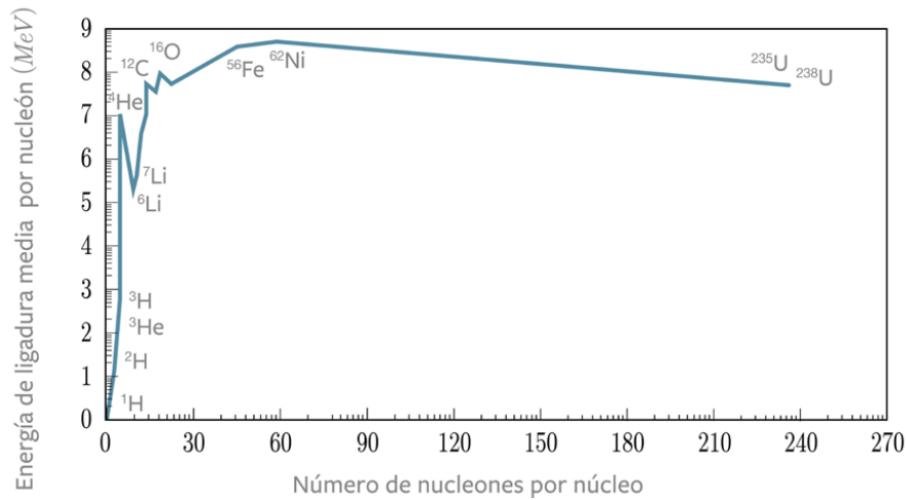


Figura 2.1: Gráfica de energía de enlace en función del número de nucleones

Como podemos observar en la gráfica, los elementos más estables son el Hierro y el Níquel, lo que significa que la fuerza nuclear en estos dos casos es fuerte y por lo tanto necesitaríamos mucha energía para vencer tal fuerza y romper el núcleo, que en este caso es de aproximadamente 8MeV . Otra cosa a observar, es que al aumentar el tamaño del núcleo, la energía de enlace crece, debido a que hay más nucleones ejerciendo atracción, pero pasado un cierto punto ésta empieza a decrecer ya que cada vez están más lejos entre sí los nucleones, lo que hace que su energía de enlace no aumente significativamente e incluso decrezca en algunos puntos. La fuerza nuclear es de corto alcance, entre más nucleones, más alejados están los unos de los otros y se debilita la fuerza nuclear por lo que la eléctrica se hace presente. Esta a diferencia de la nuclear es de largo alcance y se opone a la de corto, disminuyendo su energía de enlace.

Sin embargo para poder obtener esta reacción se necesita una energía de activación, una vez iniciada la reacción debe auto sostenerse y obtener energía. Primeramente se necesita que la distancia media entre los nucleones sea pequeña $\sim 1\text{fm}$. Por lo que se debe de romper la barrera de Coulomb, es decir que deben estar a temperaturas muy altas: del orden de $10,000,000\text{ C}^\circ$ (que es la temperatura en el núcleo solar) o de $150,000,000\text{ C}^\circ$ que se ha logrado en laboratorios terrestres, específicamente en los sistemas toroidales. Para ello, revisaremos algunos temas básicos de la teoría cuántica que solventa la fusión, en este caso el entunelamiento, que permite alcanzar esta distancia a menores temperaturas, para posteriormente abocarnos al plasma, su configuración, su turbulencia, finalmente la barrera de potencial.

2.1. Barrera de Coulomb

Es menester romper la barrera electromagnética, lo que implica acercar dos partículas de cargas iguales, en este caso dos nucleones, de tal manera que estén a una distancia cercana al radio nuclear R_c . Para aclarar la situación anterior, escribamos la ecuación que rige esta fuerza:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2}. \quad (2.3)$$

Donde, r es la distancia entre las cargas, y q_i es el valor de la carga, ϵ es la permeabilidad en el vacío. Para el caso de interés, el que dos nucleones se *toquen* implicaría que $r \rightarrow R_c$, y por lo tanto, $F_e \rightarrow \infty$, pero alcanzado este punto la fuerza de Coulomb deja de ser dominante y pasa a ser la nuclear la principal, cuya energía potencial no tiene dependencia simple con la distancia y es inversa a la eléctrica. Sumando estas dos contribuciones se forma una barrera de potencial y un pozo. Para conocer el límite entre el dominio de la fuerza nuclear y la eléctrica debemos estudiar a profundidad esta barrera:

$$V_{BC} = \kappa \frac{Z_1Z_2}{R_c}. \quad (2.4)$$

Z_i es el número de protones del núcleo correspondiente, $\kappa = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1,439976\text{ MeVfm}$ y $R_c = R_1 + R_2$, este potencial en general es válido para cuando $r \geq R_c$ en el caso contrario debemos hacer otras consideraciones. Por el momento podemos calcular el potencial para un ejemplo que nos competa, como el del deuterio y tritio:



Dónde:

$$R_c = R_1 + R_2 = r_o(A_1^{\frac{1}{3}} + A_2^{\frac{1}{3}}). \quad (2.6)$$

Usando el valor típico de $r_0 = 1,44$ fm [10] y los radios $R_1 = 1,5119$ fm y $R_2 = 1,7309$ fm [24], que nos da un $R_c = 3,2428$ fm, por lo tanto $V_{CB} = 0,44407$ MeV. Esta es la manera más intuitiva de estimar la barrera de Coulomb, existe el modelo de Bass y uno más fino que considera la contribución nuclear V_N , calculada con el potencial de doble plegado, y la Coulombiana, los 3 métodos dan resultados similares[10], por lo que usaremos el primer cálculo. Con esta aproximación haremos el cómputo de la temperatura promedio que se necesita para superar la barrera:

$$V_{CB} = \frac{3}{2}kT \rightarrow T = \frac{V_{CB} 2}{k 3}, \quad (2.7)$$

k es la constante de Boltzmann. Sustituyendo los resultados anteriores en 2.7, obtenemos que $T = 3,4352 \times 10^9$ K, es una temperatura considerablemente alta debido a que la fusión puede ser iniciada por partículas que estén fuera de la cola de alta energía de la distribución de Maxwell-Boltzmann. Aunque la temperatura crítica se reduce por el efecto túnel.

2.2. Efecto túnel

Como se presentó anteriormente, la barrera de Coulomb es inversamente proporcional a la distancia, y ésta llega a un límite donde la fuerza nuclear supera la repulsión eléctrica. Utilizando los radios clásicos de los núcleos, aunque el rango de la interacción fuerte es mayor que el radio clásico del protón. Por lo que necesitamos tomar en cuenta los fenómenos cuánticos tales como el efecto túnel.

2.2.1. Aproximación de Barrera Escalón

Es de interés calcular la probabilidad de transmisión, por lo que se hará una aproximación con una función de onda en su forma exponencial.

Asumiremos que la partícula incide desde el lado derecho, seccionaremos el potencial en 3 partes como se observa en la figura 3.68 :

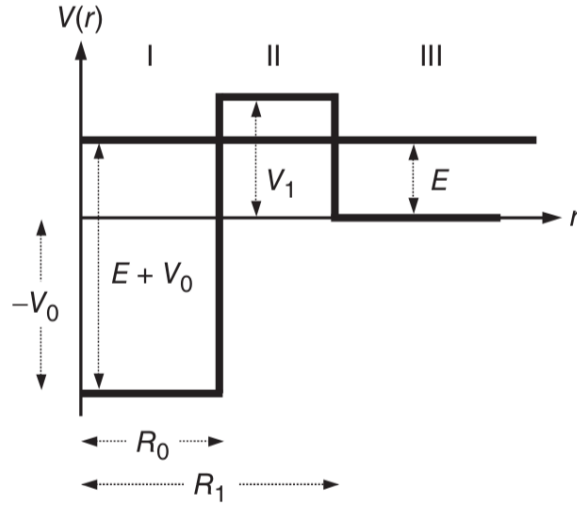


Figura 2.2: Potencial de escalón

Es conveniente iniciar con la función solución en términos de exponentes complejos, este cálculo es para una sola dimensión. Las partículas incidentes vienen del lado derecho y se encuentran con la barrera en $x = R_c$, que es un escalón de potencial $-V_0$ y su potencial continúa al $-\infty$. Teniendo las funciones de onda de cada sección:

$$U_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad k = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}, \quad (2.8)$$

$$U_{II}(x) = Ce^{-i\kappa x} + De^{i\kappa x}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_1-E)}}{\hbar}, \quad (2.9)$$

$$U_{III}(x) = Fe^{ik'x} + Ge^{-ik'x}, \quad k' = \frac{\sqrt{2m(V_1-E)}}{\hbar}, \quad (2.10)$$

Cabe destacar que el segundo término de 2.8 corresponde a una onda plana que se propaga en la dirección $-x$. Mientras que el primer término de 2.10 es un plano de ondas reflejadas desde la barrera y ondas moviéndose hacia la barrera respectivamente. Nuestro propósito es calcular el coeficiente de transmisión definido como:

$$T = \frac{k|B|^2}{k'|G|^2}. \quad (2.11)$$

Las condiciones de continuidad requieren que la onda y sus derivadas sean continuas en $x = R_0$ y $x = R_1$:

$$U_I(R_0) = U_{II}(R_0), \quad (2.12)$$

$$U_{II}(R_1) = U_{III}(R_1), \quad (2.13)$$

$$\left. \frac{dU_I}{dx} \right|_{x=R_0} = \left. \frac{dU_{II}}{dx} \right|_{x=R_0}, \quad (2.14)$$

$$\left. \frac{dU_{II}}{dx} \right|_{x=R_1} = \left. \frac{dU_{III}}{dx} \right|_{x=R_1}. \quad (2.15)$$

De estas condiciones obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$Ae^{ikR_0} + Be^{-ikR_0} = Ce^{-i\kappa R_0} + De^{i\kappa R_0}, \quad (2.16)$$

$$Ce^{-i\kappa R_1} + De^{i\kappa R_1} = Fe^{ik'R_1} + Ge^{-ik'R_1}, \quad (2.17)$$

$$\frac{ik}{\kappa} Ae^{ikR_0} + Be^{-ikR_0} = -Ce^{-i\kappa R_0} + De^{i\kappa R_0}, \quad (2.18)$$

$$-Ce^{-i\kappa R_1} + De^{i\kappa R_1} = \frac{ik}{\kappa} (Fe^{ik'R_1} - Ge^{-ik'R_1}). \quad (2.19)$$

Sumando y restando pares de ecuaciones obtenemos las siguientes cuatro expresiones:

$$A\left(1 + \frac{ik}{\kappa}\right)e^{ikR_0} + B\left(1 - \frac{ik}{\kappa}\right)e^{-ikR_0} = 2De^{i\kappa R_0}, \quad (2.20)$$

$$A\left(1 - \frac{ik}{\kappa}\right)e^{ikR_0} + B\left(1 + \frac{ik}{\kappa}\right)e^{-ikR_0} = 2Ce^{i\kappa R_0}, \quad (2.21)$$

$$2De^{i\kappa R_1} = F\left(1 + \frac{ik'}{\kappa}\right)e^{ik'R_1} + G\left(1 - \frac{ik'}{\kappa}\right)e^{-ik'R_1}, \quad (2.22)$$

$$2Ce^{-i\kappa R_1} = F\left(1 - \frac{ik'}{\kappa}\right)e^{ik'R_1} + G\left(1 + \frac{ik'}{\kappa}\right)e^{-ik'R_1}. \quad (2.23)$$

Para simplificar los subsecuentes cálculos definamos $\alpha = 1 + \frac{ik}{\kappa}$, $\alpha^* = 1 - \frac{ik}{\kappa}$, $\beta = 1 + \frac{ik'}{\kappa}$, $\beta^* = 1 - \frac{ik'}{\kappa}$. Tomamos las ecuaciones 2.20 y 2.22, despejamos D, igualamos y obtenemos la siguiente ecuación:

$$A\alpha e^{R_0(ik-\kappa)} + B\alpha^* e^{-R_0(ik+\kappa)} = F\beta e^{R_1(ik'-\kappa)} + G\beta^* e^{R_1(\kappa+ik')}. \quad (2.24)$$

Factorizando la exponencial $e^{-R_0\kappa}$ del lado izquierdo y del lado derecho $e^{-R_1\kappa}$ y pasando la exponencial factorizada de la derecha al lado izquierdo obtenemos:

$$A\alpha e^{ikR_0} + B\alpha^* e^{-ikR_0} = e^{-\kappa(R_1-R_0)} (F\beta e^{ik'R_1} + G\beta^* e^{-ik'R_1}). \quad (2.25)$$

2.2. Efecto túnel

Análogamente tomando las ecuaciones 2.21 y 2.23, haciendo el mismo procedimiento anterior obtenemos:

$$A\alpha^* e^{ikR_0} + B\alpha e^{-ikR_0} = e^{\kappa(R_1-R_0)}(F\beta^* e^{ik'R_1} + G\beta e^{-ik'R_1}). \quad (2.26)$$

Nuestro interés es T de una onda incidente desde la derecha de la barrera, por lo que no puede haber ninguna onda incidente en la zona I , es decir $A = 0$. Lo que nos deja las siguientes 2 ecuaciones:

$$B\alpha e^{-ikR_0} = e^{\kappa(R_1-R_0)}(F\beta^* e^{ik'R_1} + G\beta e^{-ik'R_1}), \quad (2.27)$$

$$B\alpha^* e^{-ikR_0} = e^{-\kappa(R_1-R_0)}(F\beta e^{ik'R_1} + G\beta^* e^{-ik'R_1}), \quad (2.28)$$

Trabajando las ecuaciones 2.27 y 2.28 despejando F y definiendo $\Delta = R_1 - R_0$ obtenemos:

$$e^{-\kappa\Delta} e^{-ik'R_1} \left(B \frac{\alpha}{\beta^*} e^{-kR_0} - G \frac{\beta}{\beta^*} e^{\kappa\Delta} e^{-ik'R_1} \right), \quad (2.29)$$

$$e^{\kappa\Delta} e^{-ik'R_1} \left(B \frac{\alpha^*}{\beta} e^{-kR_0} - G \frac{\beta}{\beta^*} e^{-\kappa\Delta} e^{-ik'R_1} \right). \quad (2.30)$$

Igualando y haciendo algunos cálculos obtenemos:

$$B(\alpha^* \beta^* e^{\kappa\Delta} - \alpha \beta e^{-\kappa\Delta}) = G((\beta^*)^2 - \beta^2) e^{-i(k'R_1 - kR_0)}. \quad (2.31)$$

Sustituyendo a β , α y sus conjugados del lado derecho, haciendo un poco de álgebra despejando B resulta lo siguiente:

$$B = \frac{-2i \frac{k'}{\kappa} G e^{-i(k'R_1 - kR_0)}}{\alpha^* \beta^* e^{\kappa\Delta} - \alpha \beta e^{-\kappa\Delta}}. \quad (2.32)$$

Por lo que ya estamos en condiciones de escribir T de la siguiente manera (después de hacer algunos cálculos):

$$T = \frac{k|B|^2}{k'|G|^2} = \frac{\frac{k}{k'} 4 \left(\frac{k'^2}{\kappa^2} \right)}{|\alpha^* \beta^* e^{\kappa\Delta} - \alpha \beta e^{-\kappa\Delta}|^2}. \quad (2.33)$$

La cual podemos reescribir en términos de seno hiperbólico:

$$\frac{kk'}{(k+k')^2 + (\kappa^2 + k^2 + k'^2 + \frac{kk'}{\kappa^2}) \operatorname{senh}^2(\kappa\Delta)}. \quad (2.34)$$

Ahora lo único que queda es escribir el coeficiente de transmisión en términos de las energías y potenciales correspondientes:

$$T = \frac{\sqrt{(E + V_0)E}}{2E + 2\sqrt{E(E + V_0)} + (E + V_0 + V_1 + \frac{E(E+V_0)}{V_1-E})\operatorname{senh}^2(\kappa\Delta)} \quad (2.35)$$

Por lo que podemos concluir que efectivamente habrá partículas en el lado izquierdo de la barrera de potencial aunque su energía sea menor al escalón. Para energías bajas de bombardeo o teniendo una barrera delgada tenemos que:

$$\kappa\Delta = \frac{\sqrt{2m(V_1 - E)}}{\hbar}(R_1 - R_0) \gg 1. \quad (2.36)$$

Podemos hacer la siguiente aproximación:

$$|\alpha^* \beta^* e^{\kappa\Delta} - \alpha \beta e^{-\kappa\Delta}|^2 \approx |\alpha^* \beta^* e^{\kappa\Delta}|^2 \quad (2.37)$$

. Haciendo un procedimiento parecido al anterior obtenemos una aproximación de T :

$$T \approx \frac{4\sqrt{E(E + V_0)}(V_1 - E)}{V_1(V_0 + V_1)} e^{2\kappa(R_1 - R_0)}. \quad (2.38)$$

T en estos términos es dominado por la exponencial, tomando valores razonables de E , V_0 , V_1 , por lo que el término:

$$\frac{4\sqrt{E(E + V_0)}(V_1 - E)}{V_1(V_0 + V_1)} \approx 1. \quad (2.39)$$

Así que podemos escribir a T simplemente como:

$$T \approx e^{\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(V_1 - E)}(R_1 - R_0)}. \quad (2.40)$$

2.2.2. Generalización a la Barrera de Coulomb

El cálculo anterior puede generalizarse a una barrera arbitraria dividiendo la barrera en n rectángulos de ancho como se ve en la figura 3.69:

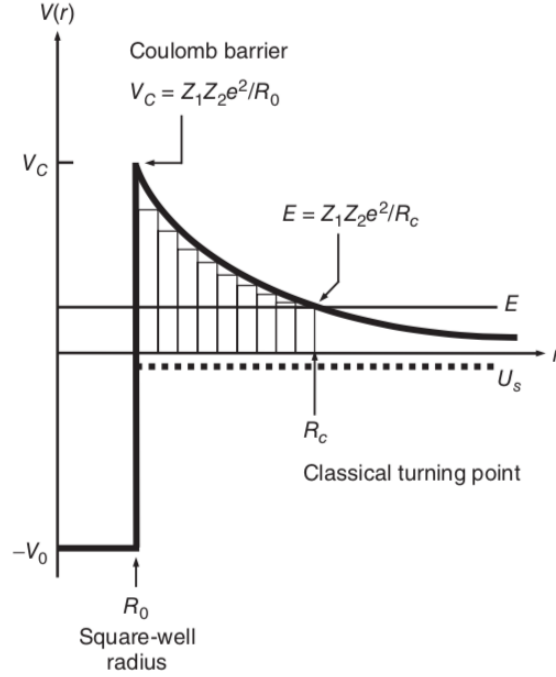


Figura 2.3: Barrera de Coulomb. Tomada de [Iliadis, [17]]

Por lo que el coeficiente de transmisión total es el producto de los coeficientes de transmisión de cada rectángulo:

$$T_t = T_1 \cdot T_2 \cdot \dots \cdot T_n \approx e^{-\frac{2}{\hbar} \sum_i^n \sqrt{2m(V_i - E)}(R_{i+1} - R_i)}, \quad (2.41)$$

Que al hacer que el ancho de cada rectángulo tender a cero, es decir $r \rightarrow dr$, nos queda la siguiente integral:

$$e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^{R_c} \sqrt{2m(V(r) - E)} dr}. \quad (2.42)$$

Ahora, para el caso específico de la barrera de Coulomb $V(r) = \sqrt{\frac{Z_0 Z_1 e^2}{r}}$, donde Z_0 , Z_1 representan la carga del proyectil y la del blanco, y en este caso R_c es la distancia en la que la partícula incidente debería ser reflejada en términos clásicos, se le conoce como punto de retorno clásico.

La energía incidente en el punto de retorno es de $E = \frac{Z_0 Z_1 e^2}{R_0}$. Sustituyendo en la integral

obtenemos:

$$T \approx \exp\left(\frac{-2}{\hbar} \sqrt{2mZ_0Z_1e^2} \int_{R_0}^{R_c} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_c}} dr\right). \quad (2.43)$$

Para resolver la integral primero definimos $z = \frac{r}{R_c}$ y $\tau = \sqrt{2mZ_0Z_1e^2}$ y sabiendo que $\frac{E}{V_c} = \frac{R_0}{R_c} = a$, por lo que reescribimos 2.43 de la siguiente manera:

$$\exp\left(\frac{-2}{\hbar} \sqrt{2mZ_0Z_1e^2} \sqrt{R_c} \int_a^1 \sqrt{\frac{1}{zR_c} - \frac{1}{R_c}} R_c dz\right), \quad (2.44)$$

Tomando en cuenta que $\sqrt{R_c} = \sqrt{\frac{Z_0Z_1e^2}{E}}$ reescribimos 2.44:

$$T \approx \exp\left(\frac{-2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} Z_0Z_1e^2 \int_a^1 \sqrt{\frac{1}{z} - 1} dz\right), \quad (2.45)$$

Resolviendo la integral del apéndice A, nos queda:

$$T \approx \exp\left(\frac{-2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} (\arccos(\sqrt{a}) - \sqrt{a(1-a)})\right). \quad (2.46)$$

Que escrito en términos de energía y potencial es:

$$T \approx \exp\left(\frac{-2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} \left\{ \arccos\sqrt{\frac{E}{V_c}} - \sqrt{\frac{E}{V_c} \left(1 - \frac{E}{V_c}\right)} \right\}\right). \quad (2.47)$$

Para bajas energías comparadas con la barrera:

$$\frac{E}{V_c} \ll 1. \quad (2.48)$$

Lo que nos permite usar la expansión en serie:

$$\arccos\sqrt{x} - \sqrt{x(x-1)} \approx \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{x} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}, \quad (2.49)$$

Sustituyendo tenemos

$$T \approx \exp\left(\frac{-2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} Z_0Z_1e^2 \left\{ \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{E}{V_c}} + \left(\frac{E}{V_c}\right)^{\frac{3}{2}} \right\}\right). \quad (2.50)$$

Haciendo algo de álgebra, llegamos a la siguiente expresión:

$$T \approx \exp\left(\frac{-2\pi}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}} Z_0Z_1e^2 \left\{ 1 + \frac{2}{3\pi} \left(\frac{E}{V_c}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{\hbar} \sqrt{Z_0Z_1e^2 2mR_0} \right\}\right). \quad (2.51)$$

Analizando 2.51 podemos ver que el primer término de la exponencial es mayor que el tercero por un factor de $\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{V_c}{E}}$; por lo que domina al coeficiente de transmisión, el tercer

término se va a cero cuando $R_0 \rightarrow 0$ y representa una corrección causada por un radio finito que el proyectil debe superar. Si $R_0 \gg 1$ implica que la distancia de penetración es mucho más pequeña que uno, siempre que R_0 sea grande, y por consecuencia, si $R_0 \gg 1$ entonces $T \gg 1$. El segundo factor representa una corrección al primero, cuando la energía se convierte en una fracción significativa de la barrera de Coulomb. Por lo que a bajas energías el coeficiente de transmisión es:

$$T \approx \exp\left(\frac{-2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}} Z_0 Z_1 e^2\right) \equiv e^{-2\pi\nu}. \quad (2.52)$$

La ecuación final es el llamado factor de Gamow, que representa la probabilidad para dos partículas nucleares de pasar la barrera de Coulomb para someterse a reacciones nucleares como la fusión. Mientras que ν representa al factor de Sommerfield es una constante adimensional de la razón de reacción entre dos núcleos.

2.2.3. Pico de Gamow

Para que lo anterior ocurra, se debe de tomar en cuenta que la probabilidad de que una partícula tenga la energía suficiente para llegar al punto de retorno decae muy rápido, de acuerdo a la distribución de Boltzmann-Maxwell. Gamow tomó al factor de penetración y el factor de Boltzmann para encontrar el punto óptimo donde se dan la mayor parte de las reacciones nucleares, el cual es llamado el Pico de Gamow, que se puede ver al graficar la siguiente exponencial:

$$\exp\left(\frac{-E}{kT}\right) \exp\left(\frac{-b}{E^{\frac{1}{2}}}\right) = \exp\left(\frac{-E}{kT} - \frac{-b}{E^{\frac{1}{2}}}\right), \quad (2.53)$$

Donde $b = \frac{\pi(2m)^{\frac{1}{2}} Z_1 Z_0 e^2}{\hbar}$, este pico representa el relativamente estrecho rango de energía donde las reacciones nucleares ocurren en el plasma, como se ve en la figura 2.2.3:

Donde el eje x representa la energía medida en MeV , que tiene un máximo al que llamaremos E_0 , el cual podemos calcular derivando con respecto a la energía e igualando a cero:

$$\frac{d}{dE} \left(\exp\left(\frac{-E}{kT} - \frac{-b}{E^{\frac{1}{2}}}\right) \right) = 0. \quad (2.54)$$

Haciendo unos cuántos cálculos obtenemos E_0 :

$$E_0 = \left\{ \frac{-2\pi}{\hbar} \frac{2m}{2} (Z_1 Z_0 e^2)^2 (kT)^2 \right\}^{\frac{1}{3}}, \quad (2.55)$$

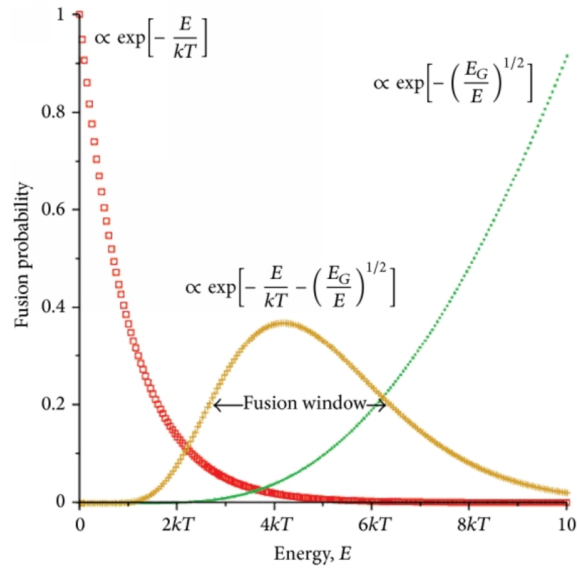


Figura 2.4: Pico de Gamow, con la probabilidad normalizada, tomada de [Haubold, [15]]

Que representa la energía más efectiva para las reacciones nucleares. Ahora, es posible aproximar la gráfica del Pico con una función Gaussiana como vemos en la figura 4.3, donde la línea punteada es una función Gaussiana con un máximo en E_0 y la línea sólida es la gráfica exacta del Pico,

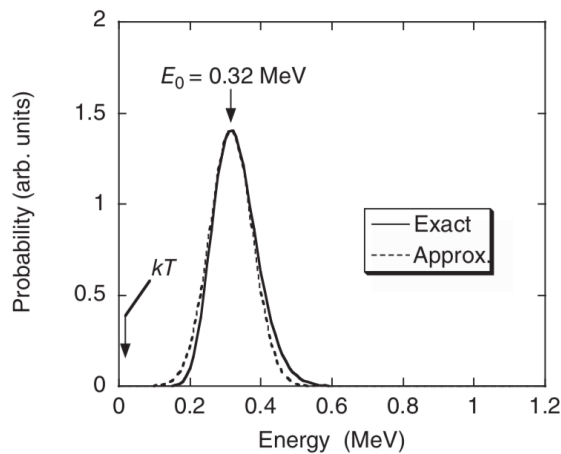


Figura 2.5: Aproximación del Pico de Gamow

Procederemos a calcular el rango de energía donde es más probable que se den las reacciones nucleares. reescribimos la ecuación 2.55 igualando de lado izquierdo $E_0 = E$, haciendo

la suma de fracciones y un poco de álgebra obtenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{-2\pi}{\hbar} \frac{2m}{2} (Z_1 Z_0 e^2)^2 (kT)^2 = \exp\left(\frac{-2(E_0)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{E}kT} - \frac{E}{kT}\right). \quad (2.56)$$

Ahora escribimos esta expresión con una aproximación:

$$\exp\left(\frac{-2(E_0)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{E}kT} - \frac{E}{kT}\right) \approx \exp\left(\frac{3E_0}{kT}\right) \exp\left(\frac{-(E - E_0)}{\Delta 2}\right)^2, \quad (2.57)$$

Donde podemos encontrar Δ de la Gaussiana usando la condición de que la segunda derivada sea igual en $E_0 = E$:

$$\frac{d^2}{dE^2} \left(\frac{2E^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{E}kT} + \frac{E}{kT} \right) \Big|_{E=E_0} = \frac{3}{2} \frac{1}{E_0 kT}, \quad (2.58)$$

$$\frac{d^2}{dE^2} \left(\frac{-(E - E_0)}{2\Delta} \right)^2 \Big|_{E=E_0} = \frac{2}{\Delta}, \quad (2.59)$$

Igualando 2.58 y 2.59 y despejando para Δ obtenemos el ancho de la campana:

$$\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{E_0 kT}. \quad (2.60)$$

Usualmente $kT \ll E_0$, es aparente que el ancho sea más pequeño que E_0 , se puede ver que con el incremento del pico, crece la barrera de Coulomb. Ahora tenemos una mejor aproximación de las probabilidades de pasar la barrera, la ventana de energía donde ocurren (también llamada ventana de Gamow) es de $E_0 - \frac{\Delta}{2}$ y $E_0 + \frac{\Delta}{2}$. Esta ventana se puede volver un borde (al tener energías altas) para casos de incremento de cargas en proyectil y blanco.

Este análisis puede ser puesto a prueba con el caso del cálculo de la probabilidad de del decaimiento alfa, en el cuál la única diferencia es que la partícula pasa la barrera de Coulomb de izquierda a derecha, (ya que es desde el núcleo que sale la partícula cargada) como podemos constatar en el apéndice B. Por lo que gracias a este efecto, de pasar a tener una temperatura de fusión de billones de grados, ahora sólo es menester llegar a un millón de grados, lo cual, representa una gran ventaja para la parte experimental, ya que la hace posible.

Capítulo 3

Fundamentos de física de Plasma

3.1. Plasma

Como ya se calculó en el capítulo anterior, las temperaturas a las que la fusión son muy altas, por lo que la materia, en tales condiciones, se vuelve necesariamente en plasma, el cuarto estado de la materia, en el cual la energía cinética de los átomos es tan alta que al colisionar se desprenden electrones, lo que a diferencia de un gas convencional, lo ioniza. Por lo que tiene características intrínsecas, es conductor y por lo tanto reactivo a campos eléctricos y magnéticos, es cuasineutro, por lo general un volumen de cualquier sustancia, en promedio es neutra, ya que posee la misma cantidad de partículas positivas y negativas, pero tiene la particularidad de que se comporta como un fluido sin carga si es visto de manera externa y al estudiar su comportamiento como el conjunto de partículas cargadas se toma como fluido casi neutral, ya que hay una pequeña diferencia en la cantidad de partículas positivas y negativas. Otra característica es su comportamiento colectivo, ya que el plasma en su conjunto es capaz de generar campos magnéticos y eléctricos a los cuales a su vez pueden reaccionar, además de que el efecto de la fuerza eléctrica es de muy largo alcance y hace que las partículas estén acopladas en todo momento, por lo que puede responder colectivamente a cualquier alteración.

Existen varios tipos de plasma, dependiendo de la escala de densidades y temperatu-

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DE FÍSICA DE PLASMA

ras en las que se trabaje, como se ve en la figura:

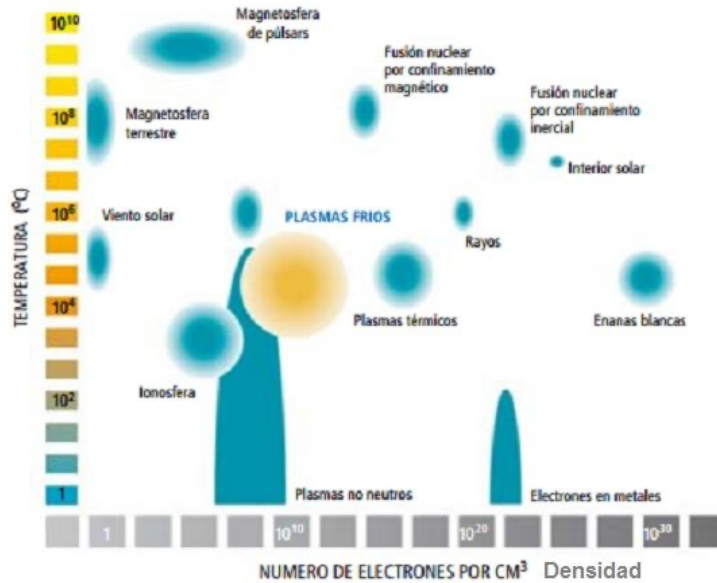


Figura 3.1: Escalas del plasma

Notemos que tenemos que invertir energía para subir la temperatura, para la reacción de D-T se necesita al rededor de 100 millones °C. Lo que convierte a este gas en plasma que lanza radiación de freno por colisiones electrón-ión y electrón-electrón. Ahora si el plasma tiene impurezas no ionizadas hay perdidas por radiación ya que enfría los electrones. Para confinar al plasma se utilizan campos magnéticos, lo que implica radiación ciclotrónica. Por lo que para mantener el plasma a la temperatura adecuada para que se produzcan las reacciones de fusión, se deben tener en cuenta las entradas y salidas de energía dentro del plasma. Como calentamiento se tiene el calentamiento óhmico y la potencia de fusión y las pérdidas se producen principalmente por radiación, transporte del calor y fuga de partículas.

Los núcleos del deuterio y tritio tienen una energía de ligadura muy baja en sus , por lo que la energía cinética requerida para tener una alta probabilidad de fusión es la más baja, como podemos constatar en la siguiente figura:

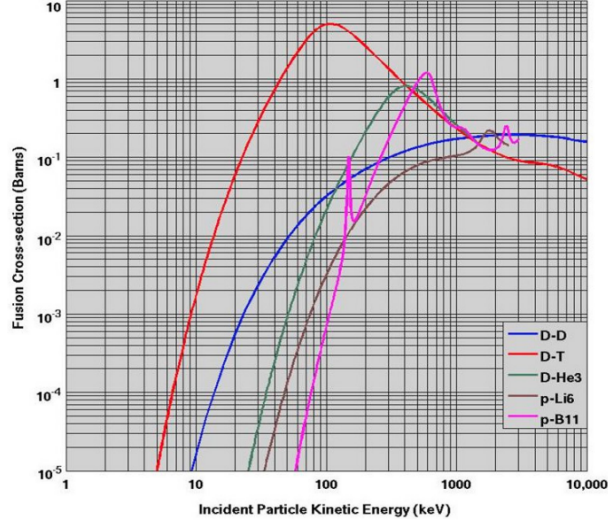


Figura 3.2: Sección eficaz de varias reacciones nucleares, tomada de [16]

La energía de salida de un reactor puede medirse en términos de la energía ganada, con el factor Q que es la razón entre la energía de entrada y la de salida, donde entendemos la energía de entrada como la energía auxiliar aplicada al reactor para mantener la fusión y a la energía de salida como la energía generada:

$$Q = \frac{P_f}{P_a}, \quad (3.1)$$

Donde P_f es la energía derivada de la fusión y P_a es la energía auxiliar aplicada al reactor. Así que para considerar exitoso un experimento de fusión el criterio $Q > 1$. Cuando $Q = 0$ se le llama punto de equilibrio, donde $P_f = P_a$.

Por otra parte, las partículas alfa liberadas contribuyen al calentamiento, y se deben conseguir las condiciones para que entreguen su energía. La potencia obtenida por la fusión es 5 veces la obtenida de las partículas alfa P_α :

$$Q = \frac{P_f}{P_a} = \frac{5P_\alpha}{P_a}, \quad (3.2)$$

la fracción de calentamiento debido a tales partículas es:

$$f_\alpha = \frac{P_\alpha}{P_\alpha + P_a}. \quad (3.3)$$

Despejando P_α en la ecuación 3.2 y sustituyendo en 3.3 obtenemos:

$$f_\alpha = \left(\frac{Q}{Q + 5} \right). \quad (3.4)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DE FÍSICA DE PLASMA

En la siguiente tabla se presentan las fracciones de calentamiento para distintos valores de ganancia:

Q	f_α
1	17 %
5	50 %
10	60 % (<i>ITER*</i>)
20	80 % (Reactor)
∞	100 % (Ignición)

Cuadro 3.1: Comparación entre la ganancia y fracciones de calentamiento para algunos casos.

Considerando la ecuación 3.1 podríamos aumentar Q haciendo $P_a \rightarrow 0$. Con D-T la salida de partículas alpha de la reacción pierdan toda su energía al mantener el plasma caliente, aparte del control del transporte. Este caso sería una reacción autosostenida por lo que no se necesitaría de energía auxiliar.

Podemos calcular el calentamiento neto al considerar el balance:

$$P_c = P_a + P_\alpha - P_{Br} = P_t + \frac{dW_p}{dt}. \quad (3.5)$$

En la ecuación 3.5 P_t es el total de pérdidas, P_c es el calor total, $\frac{dW_p}{dt}$ se refiere al poder requerido para incrementar la energía del plasma, P_α es la energía añadida de las partículas alpha y P_{Br} es la energía perdida por el frenado de los electrones por el campo creado por los iones conocido como pérdida de Bremsstrahlung. Tal como podemos ver:

$$\begin{aligned} P_\alpha &= n_D n_T \langle \sigma_v \rangle E_\alpha V_p = \frac{1}{4} n_e^2 \langle \sigma_v \rangle E_\alpha V_p, \\ P_{Br} &= C_{Br} \sqrt{T} n_e^2 Z_e f f V_p, \\ W_p &= 3 n_e k_B T_e V_p. \end{aligned} \quad (3.6)$$

$\langle \sigma_v \rangle$ es el promedio de colisiones de la sección transversal, E_α es la energía de las partículas alpha (aprox. $3,5 MeV$), V_p es el volumen del plasma y n_D y n_T es el número de deuterios y tritios respectivamente, nótese que la mezcla esta dada por un $\frac{50}{50}$. Para el caso de las pérdidas tenemos que C_{Br} es una constante, T_e es la temperatura electrónica, n_e es el número de partículas cargadas.

Un parámetro que sirve para medir la calidad del confinamiento y sus pérdidas por transporte, es el tiempo de confinamiento, τ_E , que nos da el tiempo que tarda en escapar la

energía dentro del plasma:

$$\tau_E = \frac{W_p}{P_c - \frac{dW_p}{dt}}. \quad (3.7)$$

Ahora, despejando de 3.7 P_c , obtenemos:

$$P_c = \frac{W_p}{\tau_E} + \frac{dW_p}{dt}. \quad (3.8)$$

Otro aspecto importante es el calentamiento óhmico, ya que si hay una corriente en el plasma, éste se calentara por efecto Joule:

$$P_{ohm} = \eta j^2, \quad (3.9)$$

j es la densidad de corriente dentro del plasma y η es la resistividad del plasma, la cual podemos ver de la siguiente manera:

$$\eta = \eta_s Z_{eff} f(Z_{eff}, v, \frac{r}{R}), \quad (3.10)$$

Aquí Z_{eff} es una media de la carga de los iones del plasma, f es una función que toma en cuenta los electrones atrapados en el plasma que a su vez es función de Z_{eff} , de la frecuencia de colisión v y de la relación entre r y R y η_s es la resistividad de Spitzer, que depende de la temperatura ($T_e \approx 3$), con lo que sólo con el calentamiento óhmico no es posible obtener el calor necesario para reacciones de fusión.

En términos de pérdidas por radiación, tenemos la radiación de línea y la ya antes mencionada (perdida de freno de electrones), donde la primera se produce por los diferentes iones en el plasma, estos se excitan y desexcitan según su nivel atómico y emiten radiación en una longitud de onda, dependiendo del estado inicial y final, la podemos describir de la siguiente manera:

$$P_l = C_l n_e n_{im} \sqrt{Z_{im}} \frac{T_e'^2}{1 + T_e' - e'^4}, \quad (3.11)$$

$$T_e' = \frac{T_e}{10^{-4} Z_{im}^2}.$$

Vemos que n_e y n_{im} es la cantidad de electrones y de impurezas respectivamente, Z_{im} es el número atómico de las impurezas, T_e' es una temperatura electrónica y C_l es una constante.

Una última fuente de impurezas es la radiación sincrotrónica, que se produce al tener cargas en movimiento:

$$P_s = C_s (1 - t)^{\frac{1}{2}} R a^{\frac{3}{2}} T_e^{\frac{5}{2}} B_0^{\frac{5}{2}} n_e^{\frac{1}{2}}, \quad (3.12)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DE FÍSICA DE PLASMA

C_s es constante, t es un parámetro que toma en cuenta que no toda la radiación del sincrotrón se pierde, ya que una se refleja y es reabsorbida. R es el radio mayor del plasma y n_e la cantidad de electrones. Es claro ver que al tener una dependencia cuadrática con la temperatura, entre mayores temperaturas mayores pérdidas.

Tenemos bien definida la ecuación 3.5, podemos sustituir y encontrar $n_e\tau_E$:

$$n_e^2 \langle \sigma v \rangle E_\alpha \left(\frac{Q+5}{4Q} \right) - C_B \sqrt{T} n_e^2 = \frac{3n_e k_B T_e}{\tau_E} + \frac{d(3n_e k_B T_e)}{dt}. \quad (3.13)$$

El último término al no depender del tiempo se va a cero, así que despejando $n_e\tau_E$ tenemos:

$$n_e\tau_E = \frac{3k_B T_e}{\frac{\langle \sigma v \rangle E_\alpha (Q+5)}{4Q} - C_B \sqrt{T}}. \quad (3.14)$$

La condición de equilibrio es $Q = 1$, lo que nos da una condición mínima para la fusión, que es el *Criterio de Lawson*, para el cual debemos introducir la eficiencia de entrada (η_i) y la de salida (η_s), con lo que reescribimos la ecuación 3.14 como sigue:

$$n_e\tau_E = \frac{3(1 - \eta_i\eta_s)k_B T_e}{\frac{(\eta_i\eta_s)\langle \sigma v \rangle E_\alpha (Q+5)}{4Q} - C_B(1 - \eta_i\eta_s)\sqrt{T}}. \quad (3.15)$$

Usualmente se toma que $\eta_i\eta_s \approx \frac{1}{3}$ y que la temperatura óptima para D-T es $T_e = 15KeV$, lo que nos da un valor numérico:

$$n_e\tau_E = 10^{20} s \cdot m^{-3}. \quad (3.16)$$

Si se desea considerar un rango de temperaturas, se debe usar la variación de la cross-section con la temperatura, ya que $\langle \sigma v \rangle$ varía con la temperatura con T_e^2 así que podemos hacer una corrección al resultado anterior y nos da:

$$T_e n_e \tau_E = 1,5^{21} s \cdot m^{-3} \cdot KeV. \quad (3.17)$$

Si en un reactor de fusión con combustible D-T se cumple este criterio significa que la energía producida es igual a la energía inyectada para producir y mantener el plasma.

Este criterio es el límite mínimo de densidad, tiempo de confinamiento y temperatura, es importante recalcar que para una cierta temperatura, densidad y combustibles el punto de equilibrio difiere, tal como podemos ver en la siguiente figura:

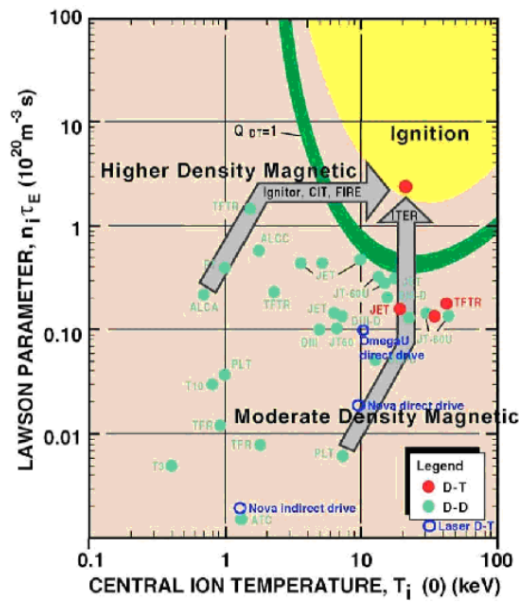


Figura 3.3: Relación entre el producto de la densidad por el tiempo de confinamiento vs. la temperatura de iones para varios tokamaks, mostrando las fronteras para $Q=1$ y para ignición (ver Cuadro 3.1)

3.2. Dinámica de partículas independientes en campos magnéticos

En un campo magnético (\vec{B}) homogéneo fuerza a las partículas a hacer órbitas circulares perpendiculares al campo, pero no limita el movimiento a lo largo de las líneas de campo. Las inhomogeneidades en el campo introducen derivas. Para las temperaturas del plasma, se pueden seguir 2 estrategias en cuanto a las paredes de confinamiento: Limitar las líneas de campo a superficies cerradas o incrementar el campo magnético para que sean capaces de reflejar la suficiente cantidad de partículas (espejos magnéticos). En ambos casos \vec{B} debe ser inhomogéneo y debemos preocuparnos por minimizar las derivas.

Movimiento de partículas

Antes de abordar en profundidad el equilibrio del tokamak y de la teoría del MHD, revisaremos las ecuaciones de movimiento de partículas cargadas en presencia de campos

magnéticos y eléctricos para ver cómo es que se comportaría de manera general el plasma, para después con el MHD dotarle de las características propias de un fluido cargado.

Campos Uniformes

El caso más sencillo es en el que tanto el campo magnético y eléctrico son uniformes, por lo que escribimos sus ecuaciones de fuerza, frecuencia ciclotrónica, aceleración, y la segunda derivada de la velocidad:

$$\vec{F} = qv \times \vec{B}, \quad (3.18)$$

$$\omega_c = \frac{qB}{m}, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} mv_x &= qv_y B, & \ddot{v}_x &= \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x, \\ mv_y &= -qv_x B, & \ddot{v}_y &= -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Las segundas derivadas de la velocidad nos ayudarán a resolver las ecuaciones diferenciales para encontrar las ecuaciones referentes a la posición y velocidad, escogemos $v_{x,y} = v_{bot} e^{(\pm i\omega_c t + i\delta_{x,y})}$ donde el signo es dado por el signo de la carga. Por lo que las velocidad de x nos da:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} e^{i\omega_c t}, \\ v_y &= \frac{m}{qB} \dot{v}_x = \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Integrando las ecuaciones anteriores obtendremos:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -i \frac{v_{bot}}{\omega_c} e^{i\omega_c t}, \\ y - y_0 &= \pm i \frac{v_{bot}}{\omega_c} e^{i\omega_c t}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Definimos como radio de Larmor a $r_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c}$, de las ecuaciones 3.22 se toma sólo la parte real, por lo que describen una órbita circular con centro guía en x_0, y_0 . Es momento de añadir el campo eléctrico, por lo tanto, el movimiento será la suma del movimiento circular de Larmor y la deriva del centro guía. Elegimos \vec{E} en el plano $x - z$, con $E_y = 0$. Por su naturaleza podemos tratar por separado la componente z, entonces la ecuación de fuerza queda:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.23)$$

3.2. Dinámica de partículas independientes en campos magnéticos

Haciendo un cálculo parecido al anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} v_x &= -i \frac{v_{bot}}{e^{i\omega_c t}}, \\ v_y &= \pm i v_{bot} e^{i\omega_c t} - \frac{E_x}{B}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Lo que interpretamos de esto es que el movimiento de Larmor no cambia, sólo se le superpone una deriva eléctrica: v_e del centro guía en la dirección $-y$. Ahora para obtener la forma general de esta deriva usamos que:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0. \quad (3.25)$$

De donde, haciendo unos pequeños cálculos tenemos:

$$\vec{v}_\perp = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \equiv v_e. \quad (3.26)$$

Ahora, anexando ahora la presencia de campos gravitatorios, si reemplazamos $q\vec{E}$ de la ecuación 3.23 por una fuerza genérica \vec{F} la deriva causada por esta fuerza sería:

$$v_f = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (3.27)$$

Por lo que, si en particular hacemos $F = mg$ la deriva gravitatoria resulta:

$$v_g = \frac{m}{g} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (3.28)$$

Con lo anterior, podemos suponer la existencia de una densidad de corriente en el plasma dada por:

$$\vec{j} = n(M + m) \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}, \quad (3.29)$$

n es el número de partículas, M es la masa de un ión y m la masa del electrón.

Una vez entendido el movimiento en campos uniformes, ahora podemos introducir las ecuaciones cuando estos no son uniformes.

Campos no uniformes

$\nabla B \perp B$

Las líneas de campo son rectas pero su densidad aumenta en una dirección arbitraria, esto hace que el radio de Larmor sea más grande en la parte de abajo del ciclo que en la de arriba, lo que deja una deriva perpendicular a \vec{B} y $\nabla \vec{B}$, la velocidad será proporcional a $\frac{r_L}{L}$ y v_L . Considerando ahora, la fuerza de Lorentz promediada a un giro, donde el gradiente

esta en el eje y obtenemos:

$$F_y = -qv_x B_z(y) = -qv_\perp \cos\omega_{ct} B_z(y). \quad (3.30)$$

Donde podemos calcular B_z con una expansión en serie de Taylor, donde $\vec{r} = x, y$:

$$\vec{B}_z = B_0 + (\vec{r} \cdot \nabla) B + \dots \quad (3.31)$$

Haciendo los cálculos pertinentes tomando únicamente los primeros dos términos de la serie obtenemos

$$F_y = -qv_{bot} \cos(\omega_{ct}) [B_0 \pm r_L (\cos\omega_{ct}) \frac{\partial B_z}{\partial y}]. \quad (3.32)$$

La cual requiere que $\frac{r_L}{L} \ll 1$, donde L es una escala de longitud de $\frac{\partial B_z}{\partial y}$, promediando nos queda:

$$\bar{F}_y = \pm qv_\perp r_L \frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial y}. \quad (3.33)$$

Una vez teniendo esto, podemos usar la ecuación 3.27 tomando como $F = F_y$ que nos da: $\pm \frac{v_{bt} r_L}{2B} \frac{\partial B_z}{\partial y}$. Notemos que arbitrariamente elegimos el eje y como eje del gradiente, pero podemos generalizar el resultado como sigue:

$$v_{\nabla B} = \pm \frac{1}{q} \frac{\nabla \vec{B} \times \vec{B}}{B^2} \frac{1}{2} v_\perp r_L. \quad (3.34)$$

Deriva de Curvatura

Asumimos que el \vec{B} es curvo y por lo tanto las líneas de fuerza tienen un radio de curvatura constante R considerando $|\vec{B}| = cte$. Este tipo de campo no sigue las ecuaciones de Maxwell en el vacío, por lo que en la práctica la deriva del gradiente tendrá añadido el efecto de curvatura. Que surge de la fuerza centrípeta que sienten las partículas cuando se mueven a lo largo de las líneas de fuerza; si v_\parallel^2 denota el promedio del cuadrado de la componente de alguna velocidad a lo largo de B, el promedio de la fuerza centrípeta es:

$$F_{cf} = \frac{mv_\parallel^2}{R_c} \hat{r} = mv_\parallel^2 \frac{\vec{R}_c}{R_c^2}. \quad (3.35)$$

Usando 3.27 obtenemos:

$$v_R = \frac{mv_\parallel^2}{qB^2} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c^2}. \quad (3.36)$$

Obtendremos la deriva $\nabla \vec{B}$ que acompaña a esta deriva cuando se considera un decrecimiento de $|\vec{B}|$ de acuerdo al radio. En coordenadas cilíndricas $\nabla \times \vec{B}$ tiene una sola componente en z. Desde que B sólo tiene una componente en φ y $\nabla \vec{B}$ sólo una componen-

3.2. Dinámica de partículas independientes en campos magnéticos

te en r .

$$(\nabla \times \vec{B})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_\varphi) = 0, \quad (3.37)$$

Entonces:

$$|B| \propto \frac{1}{R_c}, \quad \frac{\nabla |\vec{B}|}{|\vec{B}|} = -\frac{\vec{R}_c}{R_c^2}. \quad (3.38)$$

Usando la ecuación 3.34 resulta:

$$v_{\nabla B} = \pm \frac{m}{q} \frac{1}{2} v_\perp^2 \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{B^2 R_c^2}. \quad (3.39)$$

Añadiendo a la ecuación anterior a 3.36 tendremos la deriva total de un campo curvado en el vacío:

$$v_R + v_{\nabla B} = \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{R_c B^2} \frac{m}{q} (v_\parallel^2 + \frac{1}{2} v_\perp^2). \quad (3.40)$$

Esta adición es desafortunada si se curva el campo hasta hacer un toro con el fin de confinar a las partículas, éstas se desviarán fuera del mismo, sin importar los campos ni las temperaturas. Para una distribución de Maxwell:

$$E_{av} = \frac{1}{4} m v^2 = 2KT. \quad (3.41)$$

Por cada grado de libertad tenemos un término como el anterior, por lo que indicando que \bar{v}_\parallel y $\frac{1}{2} v_\perp^2$ cada una es igual a $\frac{KT}{m}$, y sabiendo que la velocidad perpendicular involucra 2 grados de libertad, las ecuaciones de ω_c nos permiten escribir el promedio de la deriva de curvatura como:

$$v_{R+\nabla B} = \pm \frac{r_L}{R_c} \left(\frac{2KT}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{i}, \quad (3.42)$$

\hat{i} es la dirección del producto cruz $\vec{R}_c \times \vec{B}$, podemos notar que el signo aquí depende de las cargas y no de las masas.

$\nabla \vec{B} \parallel \vec{B}$

Consideramos un campo magnético que es puntiagudo en el eje z y cuya magnitud varía cerca de la dirección z , con un eje axisimétrico, $B_\theta = 0$ y $\frac{\partial}{\partial \theta}$. Las líneas de fuerza necesariamente están en B_r . Mostraremos que esto da aumento a la fuerza que puede atrapar partículas en el campo magnético.

Para obtener B_r de:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (3.43)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DE FÍSICA DE PLASMA

Si $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ no varía mucho con r , integramos:

$$rB_r = - \int_0^r r \frac{\partial B_z}{\partial z} dr \approx -\frac{1}{2}r^2 \left[\frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_r = 0 = -\frac{1}{2}rC(r), \quad (3.44)$$

$\frac{\partial B_z}{\partial z}$ es una constante en términos de z ya que sólo depende de r que ya escribimos como $C(r)$. Tomando la fuerza de Lorentz y descomponiéndola obtenemos:

$$\begin{aligned} F_r &= q(v_\theta B_z - v_z B_\theta) = q(v_\theta B_z), \\ F_\theta &= q(B_r v_z - v_r B_z), \\ F_z &= q(v_r B_\theta - B_r v_\theta) = q(-B_r v_\theta). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Notemos que F_r y $-qv_r B_z$ originan el giro de Larmor, además este segundo término no interviene en el eje z , si $v_z \neq 0$ habrá una deriva a lo largo del radio. Analicemos F_z :

$$F_z = q(-B_r v_\theta) = \frac{1}{2}v_\theta r C(r). \quad (3.46)$$

Promediando sobre el giro $v_\theta = \pm v_\perp$ dependiendo del signo de q . Para un giro tenemos:

$$F_z = \pm \frac{1}{2}q v_\perp r_L \frac{\partial B_z}{\partial z} = \pm \frac{v_\perp}{2} \frac{mv_\perp}{qB} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{mv_\perp^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \mu \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (3.47)$$

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B}, \quad (3.48)$$

Esto último es el momento magnético μ de la partícula, y es un invariante además de que podemos escribir algo más general:

$$F_{\parallel} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \quad (3.49)$$

Donde ds es un elemento de línea de campo a lo largo de un campo cualesquiera. Podemos ver que la energía de la partícula se conserva si no hay efectos disipativos:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} = mv_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{dt} = v_{\parallel} - \mu \frac{\partial B}{\partial s} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = -\mu \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (3.50)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right) = -\mu \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (3.51)$$

Por lo que su energía se conserva.

3.3. Aproximación Magnetohidrodinámica

Para estudiar al plasma, debemos considerar que es un fluido electroconductor en presencia de campos magnéticos, se entiende como un fluido individual, es decir, no distingue entre diferentes partículas. Consideremos el enfoque euclidiano, donde se toma un volumen fijo en el marco de referencia. Escogemos un elemento de volumen \mathbf{dv} y $p(x,y,z)$ el centroide. El fluido puede dirigirse hacia dentro y fuera del elemento de volumen, tenemos también $\rho(x,y,z)$ la densidad de masa en p , donde la densidad sea aproximadamente uniforme. La masa total del elemento de volumen esta dado por la siguiente integral:

$$m = \int_v \rho dv = \int_v \rho dx dy dz. \quad (3.52)$$

Si no hay fuentes ni sumideros de masa dentro de \mathbf{dv} entonces $\frac{dm}{dt}$ es la tasa a la cual entra o sale masa a travez de \mathbf{S} (elemento de superficie que encierra a \mathbf{dv} por lo que escribimos también su diferencial $d\vec{S} = \hat{n} ds$ donde \hat{n} es un vector unitario normal a la superficie que apunta hacia afuera. El flujo de masa lo definimos como $\rho\vec{v}$ donde \vec{v} es la velocidad del fluido. Escribamos la masa por unidad de tiempo que fluye a través de dS :

$$\rho\vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho\vec{v} \cdot \hat{n} ds. \quad (3.53)$$

El flujo total de la masa fuera de \mathbf{dv} esta dado por:

$$\oint_S \rho\vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_v \rho\vec{v} \cdot \hat{n} dS, \quad (3.54)$$

la cual tomando la derivada de la masa con respecto al tiempo:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \rho v = -\frac{d}{dt} \int \rho\vec{v} \cdot \hat{n} dS. \quad (3.55)$$

En este volumen de Euler sustituimos $\frac{d}{dt}$ por $\frac{\partial}{\partial t}$:

$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = -\oint \rho\vec{v} \cdot \hat{n} dS. \quad (3.56)$$

Aplicando teorema de Gauss:

$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = - \int_v \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dv, \quad (3.57)$$

Cómo $d\mathbf{v}$ es arbitrario se debe cumplir que:

$$\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_v \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dv = 0. \quad (3.58)$$

Es decir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.59)$$

Esta última ecuación es la ecuación de continuidad, que representa la conservación de la masa en este sistema de referencia. Además podemos escribir la ecuación de su estado adiabático, donde γ es la razón de calor específico, que para el plasma una buena aproximación es tomarla como $\gamma = \frac{5}{3}$.

$$\frac{d}{dt} p \rho^{-\gamma}. \quad (3.60)$$

Ahora nos incumbe encontrar la segunda ley de Newton para este caso, supongamos que las fuerzas actúan sobre una superficie $\vec{S} = s \cdot \hat{n}$, es decir:

$$\vec{F} = \vec{S} \cdot \vec{P}. \quad (3.61)$$

Que es la fuerza que el material de un lado de la cara ejerce sobre el material del otro lado, donde P es un tensor de esfuerzos de presión en la superficie cuyos elementos diferentes de cero se encuentran únicamente en la diagonal, es decir:

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}. \quad (3.62)$$

Donde p_{ij} hace referencia a la presión y σ_{ij} esta en torno a la viscosidad. La fuerza total la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\vec{F} = - \oint_s \vec{p} \cdot d\vec{s}. \quad (3.63)$$

Aplicamos ley de Gauss:

$$\vec{F} = - \int \nabla \cdot \vec{p} dv. \quad (3.64)$$

Si $v \rightarrow 0$ la fuerza neta por unidad de volumen queda en :

$$\vec{F} = -\nabla \cdot p. \quad (3.65)$$

3.3. Aproximación Magnetohidrodinámica

Esta es la equivalente volumétrica de las fuerzas superficiales, entonces:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla \cdot p. \quad (3.66)$$

Si omitimos la viscosidad e incluimos las fuerzas de la ecuación de movimiento obtenemos:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = J \times B - \nabla \cdot p. \quad (3.67)$$

Ahora es momento de deducir la ecuación de la Ley de Ohm generalizada, por lo que tomaremos el modelo de los 2 fluidos, donde se consideran dos especies posibles partículas (iones, electrones), donde escribimos sus ecuaciones principales (las cuales serán utilizadas más adelante):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (n_e v_e) &= 0, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (n_i v_i) &= 0, \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} m_e n_e \frac{dv_e}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot [p_{\perp e} I + (p_{\parallel e} - p_{\perp e}) \vec{b}\vec{b}] - en_e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + R_{ei}, \\ m_i n_i \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot [p_{\perp i} I + (P_{\parallel i} - p_{\perp i}) \vec{b}\vec{b}] + Zen_i (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + R_{ie}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

Con las siguientes aclaraciones: I es la matriz identidad, $p_{i\parallel}$ se refiere a las presiones perpendiculares y paralelas de cada partícula, $v_{i\parallel}$ es la velocidad de las partículas y \vec{b} es el vector unitario del campo magnético. Además de que $R_{ei} = -R_{ie}$, $\rho_c = Zen_i - en_e$ y $\vec{j} = Zen_i \vec{v}_i - en_e \vec{v}_e$. Podemos simplificar este modelo al considerar que $m_e \ll m_i$ y que las variaciones espaciales son grandes comparadas con la longitud de Debye, lo que nos permite hacer la aproximación de cuasineutralidad:

$$Zn_i \simeq n_e. \quad (3.70)$$

Y por lo tanto escribimos \vec{j} como:

$$\vec{j} = en_e (\vec{v}_i - \vec{v}_e). \quad (3.71)$$

Introduzcamos la velocidad de masa del fluido:

$$\vec{v} \equiv \frac{m_i n_i \vec{v}_i + m_e n_e \vec{v}_e}{m_i n_i + m_e n_e} = \frac{m_i \vec{v}_i + Z m_e \vec{v}_e}{m_i + Z m_e}, \quad (3.72)$$

Y la densidad de masa del fluido:

$$\rho \equiv m_i n_i + m_e n_e. \quad (3.73)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DE FÍSICA DE PLASMA

Ahora, de las ecuaciones despejamos \vec{v}_i y \vec{v}_e (omitiendo términos del orden de $\frac{m_e}{m_i}$ frente a la unidad)

$$\begin{aligned}\vec{v}_i &= \vec{v} + \left(\frac{\vec{j}}{en_e}\right)\left(\frac{Zm_e/m_i}{1 + Zm_e/m_i en_e}\right) \simeq \vec{v} + \frac{Zm_e}{m_i} \frac{\vec{j}}{en_e}, \\ \vec{v}_e &= \vec{v} - \left(\frac{\vec{j}}{en_e}\right) \simeq \vec{v} - \frac{\vec{j}}{en_e}.\end{aligned}\tag{3.74}$$

Sustituyendo \vec{v}_i y \vec{v}_e en las ecuaciones 3.68 obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (\rho \vec{v}) = 0,\tag{3.75}$$

Sumamos entre sí, despreciamos los términos de orden $\frac{m_e}{m_i}$ frente a la unidad y usando 3.68 escribimos las derivadas conectivas:

$$n_{ei} \frac{d\vec{v}_{ie}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (n_{e,i} v_{e,i}) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (n_{e,i} v_{e,i} v_{e,i}),\tag{3.76}$$

de la cual se encuentra que:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} \cdot [p_{\perp} I + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \vec{b}\vec{b}] + \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}.\tag{3.77}$$

Donde:

$$\begin{aligned}p_{\parallel} &\equiv p_{\parallel e} + p_{\parallel i}, \\ p_{\perp} &\equiv p_{\perp e} + p_{\perp i},\end{aligned}\tag{3.78}$$

y

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial x}) \vec{v}.\tag{3.79}$$

Para hacer una simplificación pertinente contemplaremos un tiempo característico $T = \frac{U}{L}$ donde U y L son también parámetros característicos, en específico la velocidad y longitud respectivamente. Por lo que tenemos estas relaciones:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= U \vec{u}^*, & \vec{X} &= L \vec{x}, & \vec{E} &= E \vec{e}, \\ \vec{J} &= J \vec{j}, & t &= T t^*, & \vec{B} &= B \vec{b}, \\ \vec{H} &= H \vec{h}, & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t^*}, & \nabla &= \frac{1}{L} \nabla^*,\end{aligned}\tag{3.80}$$

Ahora debemos tomar en cuenta que en el MHD consideramos un fluido isotrópico eléctricamente conductor, por lo cual $\mu = \mu_0$ y $\epsilon = \epsilon_0$. Escribamos la ley de Ohm:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}).\tag{3.81}$$

Lo anterior debido a que el medio se mueve a lo largo de un campo de velocidad \vec{u} la densidad \vec{J}_c esta relacionada con \vec{B} . Sabemos por conservación de la carga que: $\nabla \cdot \vec{J} =$

3.3. Aproximación Magnetohidrodinámica

$-\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$. Escribimos la ley de Faraday en términos unitarios:

$$\nabla \times \vec{E} \Rightarrow \frac{E}{L} \nabla^* \times \vec{e} = \frac{B}{T} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t^*}. \quad (3.82)$$

Ahora somos capaces de comparar sus magnitudes:

$$\frac{E}{L} \sim \frac{B}{T} \Leftrightarrow \frac{E}{B} \sim \frac{L}{T} = U. \quad (3.83)$$

Ahora hagamos lo pertinente con la ley de Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{H}{L} \nabla^* \times \vec{h} = J\vec{j} + \frac{D}{T}. \quad (3.84)$$

Notemos que $\vec{B} = \mu_0 H + \mu_0 M$ y $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ pero como el MHD considera solo materiales conductores libres de polarización, los segundos sumandos tanto del campo magnético como de la corriente de desplazamiento son cero. por lo que pudimos hacer su equivalencia en las ecuaciones anteriores. Así que análogamente vamos a hacer una comparación de sus magnitudes, comencemos con \vec{D} y el rotacional de \vec{H} :

$$\frac{D/T}{H/L} \sim \frac{D}{T} \frac{L}{H} \sim \mu_0 \epsilon_0 \frac{E}{B} \frac{L}{T} = \frac{U^2}{c^2}, \quad (3.85)$$

Pero el MHD sólo considera velocidades mucho menores a la de la luz, por lo que esta atribución es pequeña, ahora comparemosla con la de \vec{J} :

$$\frac{J}{D/T} \sim \frac{TJ}{D} \sim \frac{T\sigma E}{\epsilon_0 E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} T. \quad (3.86)$$

Y sabemos que σ oscila entre $10^3 - 10^6$ donde la cota inferior es para plasmas fríos y la cota superior es para plasmas calientes, por lo tanto podemos omitir la corriente de desplazamiento.

Para calcular \vec{j} se consideran procesos suficientemente lentos para que los electrones tengan tiempo de equilibrarse mecánicamente, por lo que despreciamos su inercia, así la ecuaciones 3.69 usando las ecuaciones 3.74:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} + \frac{1}{en_e} \left\{ \vec{j} \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot [p_{\perp e} I + (p_{\parallel e} - p_{\perp e}) \vec{b}\vec{b}] \right\}, \quad (3.87)$$

Que es la Ley de Ohm generalizada, donde introdujimos la resistividad del plasma:

$$\eta \equiv \frac{m_e \nu_{ei}}{e^2 n_e}. \quad (3.88)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DE FÍSICA DE PLASMA

El término $\vec{j} \times \vec{B}/(en_e)$ es el término de Hall. La densidad n_e se determina por la condición de cuasineutralidad:

$$\rho \equiv m_i n_i + m_e n_e = n_e \left(\frac{m_i}{Z} + m_e \right) \approx \frac{n_e m_i}{Z}, \quad (3.89)$$

Por lo que nos queda:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} \cdot [p_{\perp} I + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \vec{b}\vec{b}] + \vec{j} \times \vec{B}, \quad (3.90)$$

Aquí la ecuación de Poisson ya no es necesaria, a menos que se pretenda calcular la densidad de carga eléctrica, así que al despreciar la corriente de desplazamiento la conservación de carga la escribimos:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (3.91)$$

y obtenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot [p_{\perp} I + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \vec{b}\vec{b}] = \nabla p_{\perp} + (\nabla \cdot \vec{B}) [(p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{\vec{B}}{B^2}]. \quad (3.92)$$

Cuando la presión es isotrópa (plasma no magnetizado) $p_{\parallel} = p_{\perp} = p$, este termino simplemente se reduce a ∇p . Si usamos ahora la ley de Ampère:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}, \quad (3.93)$$

Usando identidades vectoriales, podemos reescribir la ecuación de movimiento como sigue:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla \left(p_{\perp} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + (\vec{B} \cdot \nabla) \left[\frac{\vec{B}}{\mu_0} - (p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{\vec{B}}{B^2} \right]. \quad (3.94)$$

Esta última es conocida como la ecuación de Parker, observamos que $B^2/2\mu_0$ hace de una presión (la presión magnética). Una última aproximación más resistiva consiste en simplificar la ley de Ohm comparando el término de presiones con $\vec{v} \times \vec{B}$ (aquí no hay distinción entre temperaturas de partículas):

$$\frac{\frac{1}{en_e} \left| \frac{\partial}{\partial x} \cdot [p_{\perp} I + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \vec{b}\vec{b}] \right|}{|\vec{u} \times \vec{B}|} \approx \frac{T/L}{evB} \approx \frac{r_{Li} \sqrt{T/m_i}}{vL}. \quad (3.95)$$

Donde r_{Li} es el radio de Larmor de iones a velocidades térmicas $\sqrt{T/m_i}$. Como $\vec{j} \times \vec{B}$ es del mismo orden que el término de presiones, la misma estimación es válida para el término de Hall. Vemos que con la condición de un radio de Larmor pequeño ($r_{Li} \ll L$), para velocidades v no muy pequeñas comparadas con $\sqrt{T/m_i}$ podemos aproximar la ley

de Ohm por:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}, \quad (3.96)$$

Lo cual nos deja únicamente las ecuaciones provenientes de las de Maxwell:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{E}, \quad (3.97)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.98)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (3.99)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.100)$$

3.4. Ondas Magnetohidrodinámicas

Consideremos la linealización de las ecuaciones del MHD de plasmas fríos ($p=0$), al introducir pequeñas perturbaciones en sus respectivas formas:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B_0 + B_1(r, t), \\ \vec{v} &= v_0 + v_1(r, t), \\ \rho &= \rho_0 + \rho_1(r, t). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Donde el subíndice 1 hace referencia a la perturbación, $v_0 = 0$ y $B_0 = B_0 \hat{z}$, susituyendo en las ecuaciones del MHD:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \vec{j} \times \vec{B}, \quad (3.102)$$

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.103)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.104)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.105)$$

Debemos aclarar que trabajaremos en el espacio de frecuencias por lo que hacemos las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\Rightarrow -i\omega & \nabla \cdot &\Rightarrow i\vec{k} \cdot, \\ \nabla \times &\Rightarrow i\vec{k} \times & \nabla^2 &\Rightarrow k^2. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Por lo que las ecuaciones anteriores ya con la perturbación y la notación en el espacio de frecuencias queda:

$$-(\rho_0 + \rho_1)(i\omega v_1 + v_1^2 \cdot i\vec{k}) = j_1 \times (B_0 + B_1), \quad (3.107)$$

$$\vec{E} = -v_1 \times (B_0 + B_1), \quad (3.108)$$

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega(B_0 + B_1). \quad (3.109)$$

De lo que obtenemos las siguientes relaciones si despreciamos los términos que tengan dos términos con subíndice 1 multiplicándose:

$$\rho_0 i\omega v_1 = (j_{1\perp} + j_{1\parallel}) \times B_0, \quad (3.110)$$

$$\vec{E}_1 = -v_1 \times B_0, \quad (3.111)$$

$$\vec{k} \times \vec{E}_1 = \omega B_1. \quad (3.112)$$

Para el caso de la ecuación 3.105 debemos de hacer unos cálculos preliminares para abordarla: primeramente tomamos la ecuación 3.110 y le hacemos el siguiente producto cruz:

$$(\rho_0 i\omega)(\vec{v}_1 \times B_0) = ((j_{1\perp} + j_{1\parallel}) \times B_0) \times B_0 = (\vec{J}_1 \times B_0) \times B_0. \quad (3.113)$$

Desarrollando el lado derecho y tomando en cuenta que $\vec{J}_1 = j_{1\perp} + j_{1\parallel}$ referente a la dirección de B_0 obtenemos:

$$B_0(B_0 \cdot \vec{J}_1) - \vec{J}_1(B_0^2). \quad (3.114)$$

De la ecuación 3.111 podemos escribir la parte izquierda de la ecuación 3.113, con lo anterior, reescribimos:

$$\rho_0 i\omega(-\vec{E}_1) = B_0(B_0 \cdot J_1) - \vec{J}_1(B_0^2) = B_0(B_0(j_{1\parallel})) - \vec{J}_1(B_0^2). \quad (3.115)$$

Si omitimos los efectos de $j_{1\parallel}$ tenemos que:

$$-\rho_0 i\omega(\vec{E}_1) = -\vec{J}_1 B_0^2 = -(j_{1\perp} B_0^2) \rightarrow j_{1\perp} = \frac{\rho_0 i\omega \vec{E}_1}{B_0^2}, \quad (3.116)$$

Ahora hacemos el rotacional la ecuación 3.104 :

$$i\vec{k} \times i\vec{k} \times \vec{E}_1 = i\vec{k} \times i\omega(B_0 + B_1), \quad (3.117)$$

3.4. Ondas Magnetohidrodinámicas

Y vemos que si derivamos con respecto al tiempo la ecuación 3.105 obtenemos:

$$i\vec{k} \times i\omega(B_0 + B_1) = \mu_0 i\omega j + \epsilon_0 \mu_0 i^2 \omega^2 \vec{E}_1, \quad (3.118)$$

Ahora igualando la ecuación anterior con 3.117 y sustituimos la corriente de la ecuación 3.116 obtenemos:

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E}_1 = \frac{\mu_0 i^2 \omega^2 \rho_0 \vec{E}_1}{B_0^2} + \epsilon_0 \mu_0 i^2 \omega^2 \vec{E}_1. \quad (3.119)$$

Haciendo las operaciones pertinentes, sacamos factores comunes y definimos la velocidad de Alfvén como: $v_A = \sqrt{B_0^2 / \mu_0 \rho_0}$, nos queda:

$$-\omega^2 \vec{E}_1 \left[\frac{\rho_0 \mu_0}{B_0^2} + \epsilon_0 \mu_0 \right] = -\omega^2 \vec{E}_1 \left[\frac{1 + v_A^2/c^2}{v_A^2} \right]. \quad (3.120)$$

Al no considerar el caso relativista tenemos que:

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E}_1 = -\frac{\omega^2}{v_A^2} \vec{E}_1. \quad (3.121)$$

Con este resultado podemos escribir la ecuación de onda del campo eléctrico:

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}_1) - k^2 \cdot \vec{E}_1 = -\frac{\omega^2}{v_A^2} \vec{E}_1. \quad (3.122)$$

Calculemos la ecuación de onda del campo eléctrico considerando que $\vec{k} = k(\text{sen}\theta_y + \text{cos}\theta_z)$:

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}_1) - k^2 \cdot \vec{E}_1 = \frac{\omega^2}{v_A^2} \vec{E}_1, \quad (3.123)$$

Que ya al sustituir \vec{k} y escribirla de manera matricial corresponde a:

$$\begin{bmatrix} k^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2} & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 \text{cos}^2\theta - \frac{\omega^2}{v_A^2} & -k^2 \text{sen}\theta \text{cos}\theta \\ 0 & -k^2 \text{sen}\theta \text{cos}\theta & k^2 \text{sen}^2\theta - \frac{\omega^2}{v_A^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{1z} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.124)$$

Para el caso en el que \vec{k} es paralelo a B_0 calculamos su velocidad de propagación:

$$\frac{\omega}{k} = v_A. \quad (3.125)$$

Aquí el campo magnético actúa como cuerda y la perturbación es dada en una onda transversal. Y para el caso de \vec{k} es perpendicular a B_0 su velocidad de propagación es:

$$\frac{\omega}{k} = v_A. \quad (3.126)$$

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTOS DE FÍSICA DE PLASMA

Aunque es el mismo valor para ambos casos, cuando \vec{k} es perpendicular el campo magnético ahora funciona como muchas cuerdas y la onda es una onda de presión longitudinal. Nótese que estas velocidades corresponden al límite de muy bajas frecuencias.

Capítulo 4

Confinamiento Magnético

Para llegar a el sistema deseado de confinamiento empecemos primero por un sistema simple de confinamiento como lo son los espejos magnéticos, contemplar sus características después afinar este sistema y arribar al sistema cerrado de tokamak.

4.1. Espejos magnéticos

Un sistema simple es el espejo magnético que es un campo magnético inhomogéneo en una cavidad cilíndrica, donde la intensidad de campo es mayor en los extremos, las líneas de fuerzas de campo tienen la siguiente forma:

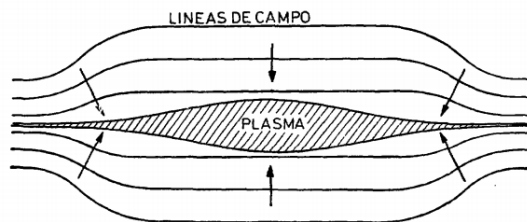


Figura 4.1: Espejo magnético. Tomado de. [Otero, D, Proto, A. N., [30]]

Por lo ya visto en el capítulo anterior en la sección de gradiente paralelo al campo, que las partículas describen una trayectoria helicoidal, además de que sabemos que el momento magnético definido en 3.48 es constante. Lo que significa que si la partícula entra en una región donde el campo es mayor la velocidad perpendicular debe de aumentar para

CAPÍTULO 4. CONFINAMIENTO MAGNÉTICO

conservar μ , así mismo se conserva la energía cinética, por lo que al aumentar v_{\perp} debe disminuir v_{\parallel} . Que se traduce en que al acercarse al extremo, donde el campo es mayor, las partículas se frenan y se regresan.

No todas las partículas se atrapan, ya que pueden tener v_{\parallel} suficientemente grande como para que el campo no alcance a frenarlas. si consideramos B_0 y B_m son los valores mínimos (centro) y máximo(extremos), tomemos el parámetro R:

$$R = \frac{B_m}{B_0} \quad (4.1)$$

Escaparán las partículas que tengan v_{\parallel} tal que:

$$1 + \left(\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}}\right)^2 \geq R \quad (4.2)$$

Es decir, cuánto mayor sea R, mejor será la capacidad de confinamiento del espejo, aunque es claro que este sistema no elimina las pérdidas del plasma por los extremos. Podemos definir el cono de pérdida en el espacio de velocidades, tal como esta centrado en la velocidad paralela con una apertura angular de θ_c :

$$\text{sen}\theta_c = \frac{1}{\sqrt{R}} \quad (4.3)$$

Esta ecuación es el caso en el que 4.2 es igual, lo que implica que todas las partículas cuyas velocidades estén dentro del cono escaparán de la región de confinamiento.

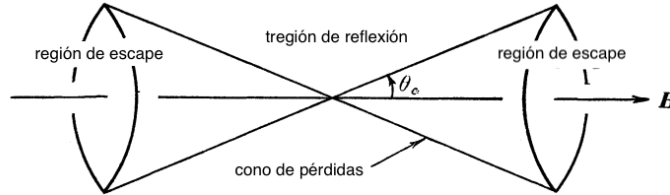


Figura 4.2: Cono de pérdidas. Tomado de [Otero, D, Proto, A. N., [30]]

Además, las colisiones pueden llevar a otras partículas al cono, de tal manera que el confinamiento en algún punto se habrá perdido inexorablemente, podemos estimar el tiempo de confinamiento:

$$t_r \approx \frac{L}{\sqrt{kT/m}} \quad (4.4)$$

Dónde L es el largo total de la región de confinamiento, k es la constante de Boltzmann, T la temperatura y m la masa de las partículas.

La existencia del cono de pérdidas tiene consecuencias al considerar las microinestabilidades, ya que el plasma tiene tendencia a oscilar lateralmente, por lo que es necesario

introducir fuerzas que neutralicen esta inestabilidad. Una de las inestabilidades más significativas es la deriva de ciclotrón en el cono de pérdida. Estas perturbaciones tienen forma de flautas alineadas a las líneas de campo, con una velocidad de fase azimutal en dirección de la deriva diamagnética, la frecuencia de esta perturbación es de orden de la frecuencia de ciclotrón en iones. Esta deriva causa el escape rápido de iones en el cono de pérdida, y una degradación importante del confinamiento. A menos que se le inyecten haces neutros en la zona de confinamiento, ya que al ser neutros no interactúan electromagnéticamente y penetran sin dificultad la zona de confinamiento donde son ionizados, regenerando y recalentando al plasma. Estos haces deben de ser inyectados a $\sim 45^\circ$, en este caso el parámetro R tendrá que ser varias veces más grande que $\frac{1}{\sin^2(45)} = 2$. Supongamos $R = 5$, esto hace que los iones producidos inicialmente estarán anclados entre los espejos, y tendrán una velocidad paralela cercana a la mitad del plano. Esta distribución es conocida como "distribución iónica chapoteante". Los iones se dispersan y se realentizan por el arrastre de los electrones, esta distribución es más estable respecto a las microinestabilidades relativas al espacio de velocidades. En un plasma de alta presión los modos asociados a la anisotropía de presión ($p_\perp > p_\parallel$) serán más claras, en particular el modo espejo, que es inestable si:

$$\frac{-2\mu_0}{B} \frac{\partial p_\perp}{\partial B} > p_\perp \quad (4.5)$$

Otra forma es utilizar que la presencia de algunos iones con una energía menor al promedio de energía iónica W_i permite estabilizar la deriva de ciclotrón. Existen varias formas de lograr esto, una manera es inyectar de manera continua un plasma relativamente frío a través del dispositivo.

4.2. Z -pinch

Es un efecto pulsado que consiste en la autocompresión de una columna de plasma por el pasaje de una corriente unidimensional, que induce un campo \vec{B} que constriñe el plasma aumentando la densidad y temperatura. Si \vec{B} es lo suficientemente grande separará el plasma de las paredes.

En el Z pinch se hace pasar corriente en la dirección z (j_z), que induce un campo en θ (\vec{B}). La corriente crece rápidamente. Si el gas es un conductor perfecto y las paredes aislantes, la corriente circulará por una capa adyacente a las paredes del cilindro, que genera \vec{B}_θ por fuera de la capa que a su vez ejerce una presión hacia adentro ($\frac{B_\theta^2}{8\pi}$) que comprime la columna. Al moverse hacia dentro la capa de corriente se vuelve un "pistón".

La fuerza es proporcional a $j_z B_\theta$. Como se puede ver en la figura:

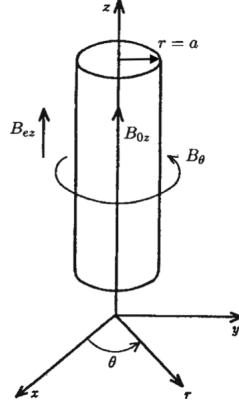


Figura 4.3: Columna de plasma en el caso ideal. Tomado de [Miyamoto,[28]]

La variación de cantidad de movimiento de sobre la vaina de la columna balanceada contra la presión magnética de la velocidad de la capa de corriente en función del tiempo.

En el caso específico del Z pinch encontramos la corriente en un estado de equilibrio, como sigue:

$$I(r) = \int_0^r 2\pi r' J_z(r') dr' \quad (4.6)$$

Donde

$$J_z(r) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I}{\partial r} \quad (4.7)$$

De la ley de Ampère tenemos:

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r} \quad (4.8)$$

Por lo que la ecuación $\nabla P = \vec{J} \times \vec{B}$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$r^2 \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\mu_0}{8\pi^2} \frac{\partial I^2}{\partial r} \quad (4.9)$$

Integrando la ecuación anterior, de 0 a **a**, donde **a** es el radio exterior del plasma cilíndrico obtenemos:

$$\int_0^a r^2 \frac{\partial P}{\partial r} = r^2 P(r)|_0^a - 2 \int_0^a r P(r) dr = -\frac{\mu_0 I^2(a)}{8\pi^2} \quad (4.10)$$

Si consideramos que $P(a) = 0$ y que la temperatura es uniforme podemos escribir la presión de la siguiente manera: $P(r) = n(r)\kappa T$ que al sustituir en 4.10 tenemos:

$$I^2 = \frac{8\pi N \kappa T}{\mu_0} \quad (4.11)$$

Donde N es el número de partículas que están en la parte axial y que es la integral de 0 a **a** en un giro : $N = \int_0^a n(r) 2\pi r dr$.

Lo anterior es en el caso ideal, donde el plasma es un conductor perfecto, la columna de corriente avanza hacia el eje construyendo el plasma con espesor despreciable y queda tras de sí un vacío perfecto.

Pero ya fuera del ideal, la configuración plasma-campo magnético en un pinch es favorable a las inestabilidades de intercambio, ya que cuando una superficie de separación plasma-campo es cóncava hacia el plasma el sistema es intrínsecamente inestable, el plasma tiende a oscilar, debido a gradientes de presión magnética en áreas donde el campo magnético es curvo, pues el plasma cambia de posición con las líneas magnéticas (intercambio de líneas de fuerza) lo que origina las inestabilidades tipo "flauta", que son perturbaciones que se encuentran en canales a lo largo de las líneas magnéticas, debido a que el campo entra en la columna y el plasma es obligado a salir de ella. Esta inestabilidad esta ligada a la geometría del campo cercano a la superficie. Esto se asemeja al caso clásico de la turbulencia de Rayleigh-Taylor, que es un intercambio entre un fluido denso (plasma) y uno menos denso (campo magnético). Para el z pinch en análisis de estabilidad bajo perturbaciones de tipo:

$$Re(\exp(i(\pm m_\theta + kz))) \quad (4.12)$$

Donde θ y z son las coordenadas y m son los modos, podemos considerar 3 casos, si $m > 1$ implican una alongación longitudinal que no suele aparecer en el z pinch, si $m = 1$ la columna se conserva, pero la sección circular oscila, produciendo un desbalance de presiones, lo que tiende a destruir el equilibrio (kink o retorcimiento). En el último caso $m = 0$ aparecen englobamientos, que son amplificadas por la presión magnética. Este resultado puede obtenerse del principio de energía, usando análisis de Fourier

Para el caso de. $m = 0$ la inestabilidad "salchicha", el campo magnético (con dirección hacia dentro de la columna) en el cuello aumenta y no puede ser equilibrado con la presión cinética (con dirección hacia fuera de la columna), el aumento de la fuerza de Lorentz causa el aumento de esta perturbación. La velocidad característica del crecimiento de perturbación es la velocidad de la onda magnetosónica: la velocidad de Alfvén. Para velocidades $v > v_A$ las líneas de campo están forzadas a alinearse con las de la velocidad de Alfvén .

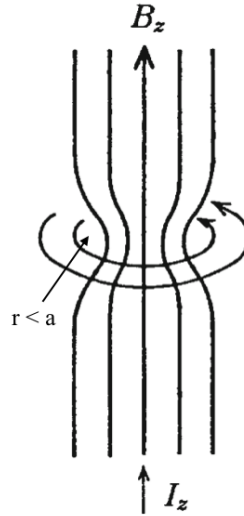


Figura 4.4: Inestabilidad tipo "Salchicha", Tomado de[Miyamoto,[28]]

En cuanto a $m = 1$ el "kink", la turbulencia fuerza a las líneas de campo a concentrarse en el lado cóncavo de la columna, pues el producto $\vec{J} \times \vec{B}$, no es uniforme en ambos lados por el incremento de \vec{B} en uno de los lados la columna lo que aumenta la presión magnética en un lado de la columna y la presión no puede reestablecer la rectitud de la misma. Mientras que en el Pinch un campo magnético mayor significa mayor presión magnética, una mayor velocidad de flujo implica mejor presión, por el teorema de Bernoulli, es decir, mientras que la columna del pinch es inestable respecto a su flexión, sucede lo contrario para vórtices de línea.

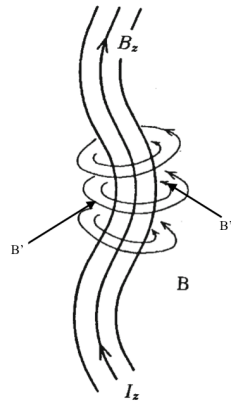


Figura 4.5: Inestabilidad "Kink", donde $B' > B''$. Tomado de [Miyamoto,[28]]

A temperaturas de fusión el radio de Larmor iónico es una fracción significativa del radio del Pinch, las tasas de crecimiento para la inestabilidad se reducen. La introducción de un flujo

axial cortante (B_z) tiene un efecto estabilizante, ya que estabiliza tanto las perturbaciones del Kink, como del salchicha con longitudes de onda menores a:

$$L_s = \frac{2\pi r B_z}{B_\theta} \quad (4.13)$$

Como el campo magnético conlleva una presión magnética, se lleva parte de la energía para comprimir las líneas de campo magnético.

Se debe de tener en cuenta que B_θ y B_z se mezclan en la zona de la envoltura ya que el plasma no es un conductor perfecto. Las corrientes j_θ se producen en una capa con un espesor que puede convertirse en un agente generador de inestabilidades, aunque la mezcla de los campos magnéticos generan calentamiento óhmico en las paredes del cilindro al actuar sobre la corriente. Este calentamiento es aprovechado por el plasma para elevar su temperatura. La constante de decaimiento τ de B_z dentro del plasma da un estimado del tiempo que tardarán en mezclarse los campos.

En un modelo simple, en el que la columna de plasma tiene contornos netos y entre ella y la cámara hay vacío, se puede establecer una condición de estabilidad:

$$\frac{B'_z}{I}(\alpha + 2\pi k) \geq \mu_0 \frac{L}{2\pi r_0^2} \quad (4.14)$$

Donde L es la longitud de la columna, $I = \frac{2\pi B_\theta r}{\mu_0}$ que es la corriente en z , B'_z es el campo B_z en el vacío, α es el ángulo de rotación de la línea de fuerza por unidad de longitud, k es un número entero.

Esta condición preve la aparición de las inestabilidades no localizadas con $m = 1$, que se puede generalizar a sistemas toroidales. Definimos:

$$\Lambda = \frac{B_\theta}{r B_z} \quad (4.15)$$

La reemplazamos en 4.14 y obtenemos:

$$\Lambda L \leq \alpha + 2\pi k \quad (4.16)$$

Y $q(r)$ es el factor de seguridad que da la medida del pinch de la línea de campo:

$$q(r) = \frac{L B_z}{r B_\theta} \quad (4.17)$$

Los gradientes negativos de la presión están asociados con el confinamiento del plasma, da un efecto desestabilizante, esto puede compensarse si se tiene una variación radial suficientemente larga a lo largo de la línea del pinch. Es equivalente a tener un campo magnético de cizalla o una razón radial de cambio de dirección de campo magnético.

En una descarga lineal una condición necesaria aunque no suficiente para que exista estabilidad es el criterio de Suydam, que sintetiza en un criterio de estabilidad en ausencia de disipación. Es decir en el caso $m \neq 0$:

$$\frac{1}{4}r \left(\frac{dq(r)}{qdr} \right)^2 + \frac{2\mu_0}{B_z^2} \frac{dp_r}{dr} > 0 \quad (4.18)$$

Donde μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío, $p(r)$ es la presión magnética en r .

La ecuación 4.18 al considerar el límite donde $L \gg r$ se transforma a:

$$\frac{1}{4}r \left(\frac{dq(r)}{qdr} \right)^2 + \frac{2\mu_0}{B_z^2} \frac{dp_r}{dr} (1 - q^2) > 0 \quad (4.19)$$

Como el primer sumando es necesariamente positivo, entonces $q^2 > 1$, lo cual indica que el campo B_z debe hacer una tensión magnética lo suficientemente grande como para enderezar la columna del plasma; si la longitud de onda del plasma es muy alta, mayores a 4.13, se debe poner adicionalmente una pared conductora para enderezar la columna.

4.3. Sistemas toroidales

Como vimos anteriormente, aunque en principio los sistemas abiertos son más sencillos de fabricar, estos tienen serios problemas de pérdidas. Si pensamos que simplemente al *cerrar* estas configuraciones es posible eliminar tal problema, el resultado es una fuerza externa neta sobre el plasma, que posee dos componentes, una debido a la presión del plasma y otra por la presión magnética, así que si únicamente se cierra un sistema abierto, como por ejemplo el Z-pinch, el plasma es cerrado y éste acarrea corriente que genera un campo B_θ , esta configuración es susceptible a inestabilidades de tipo Kink y Salchicha, como vimos en la sección anterior, la solución es introducir un campo que tenga la misma dirección del plasma, así que en una configuración cerrada el campo B_z del Z-Pinch se vuelve un campo toroidal B_ϕ .

En cambio si sólo *cerramos* un espejo, el campo toroidal generado por un solenoide con componentes B_ϕ es insuficiente para confinar al plasma ya que se desplaza a las paredes, pues B_ϕ es proporcional a $\frac{1}{r}$, y decrece desde el extremo interior hacia el extremo exterior del toro por lo que las partículas en este campo inhomogéneo se separan, el plasma pierde neutralidad y se crea un campo E_z , que además, genera una velocidad de arrastre como 3.26.

Y en ambos casos, al estar cerrado en un toro, el campo magnético es curvo, por lo que el

plasma tenderá a desplazarse en la dirección ∇B como se ilustra en 3.34. Al agregar B_θ a una configuración con campo B_ϕ , por ser una componente azimutal comprime contra la pared conductora, generando una fuerza que restituye la posición de la columna del plasma.

La ecuación 4.18 es posible transformarla considerando efectos toroidales de primer orden, en una región radialmente localizada. Considerando el límite donde $R \gg a$ [11], en:

$$\frac{1}{4}r \left(\frac{dq(r)}{qdr} \right)^2 + \frac{2\mu_0}{B_\phi^2} \frac{dp_r}{dr} (1 - q^2) > 0 \quad (4.20)$$

Donde μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío, $p(r)$ es la presión magnética del plasma en r , $q(r)$ es el factor de seguridad.

$$q(r) = \frac{rB_\phi}{RB_\theta} \quad (4.21)$$

Si $q > 1$ en todo el sistema, éste es estable incluso sin cizalla. La inestabilidad Kink se puede evadir forzando a su longitud de onda a exceder la circunferencia del toro:

$$\frac{B_\phi(a)}{B_\theta(a)} \rightarrow q(a) = \frac{aB_\phi}{RB_\theta} > 1 \quad (4.22)$$

Donde a es el radio menor del plasma, podemos encontrar la corriente máxima del plasma:

$$I_m = 2\pi a \frac{B_\phi}{q(a)\mu_0} \frac{a}{R} \quad (4.23)$$

Al estar presentes los campos B_θ y B_ϕ se producen trayectorias helicoidales, lo que previene la separación de las cargas, para este tipo de sistemas es importante para el equilibrio dinámico la existencia de una corriente J_ϕ que fluya dentro del plasma, que es otra de las ventajas de agregar el campo poloidal, pues éste conlleva la presencia de la corriente necesaria.

Existen diferentes tipos de configuraciones de confinamiento magnético cerrado, entre las que se encuentran el Tokamak (cámara toroidal con bobinas magnéticas, por sus siglas en ruso) y el RFP (Reversal Field Pinch), este último debido a sus problemas de turbulencias, no es tan popular en la fusión como lo es el sistema Tokamak. Una de las principales diferencias entre estos sistemas es: la predominancia de alguno de los dos términos en 4.20, para el caso del RFP el predominante es el primer término, pues establece el confinamiento con B_θ , que es un ahorro en cuanto a la magnitud de B_ϕ , que es menor a lo utilizado en el tokamak, lo que es compensado por considerar $q < 1$. La deriva originada

CAPÍTULO 4. CONFINAMIENTO MAGNÉTICO

por perturbaciones de la corriente se puede evitar si $q(r)$ no tiene máximos o mínimos en presencia del vacío del borde, por lo que el campo magnético toroidal debe de ser negativo en ciertas regiones, lo que hace que las líneas de campo ya con la contribución del campo poloidal sean inversas y es lo que lo provee de su nombre *reversal*. Los perfiles de los campos magnéticos y el perfil de el factor de seguridad se ilustran en la siguientes figuras:

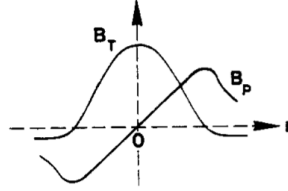


Figura 4.6: Perfiles de los campos magnéticos RFP. Tomada de [Dreicer,[11]]

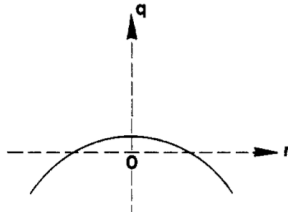


Figura 4.7: Perfil del factor de seguridad RFP. Tomada de [Dreicer,[11]]

Mientras que en el sistema tokamak $q > 1$, pues es el segundo término de 4.20 es el predominante y cabe recordar que $p(r) < 1$ por lo que para cumplir la desigualdad es necesaria esa consideración. Esta configuración va a tener una componente toroidal más fuerte y no va a necesitar una corriente tan grande como el RFP. En la siguientes figuras podemos observar sus perfiles típicos:

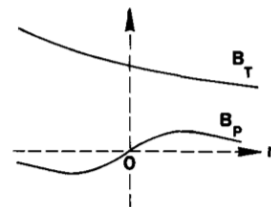


Figura 4.8: Perfiles de los campos magnéticos Tokamak. Tomada de [Dreicer,[11]]

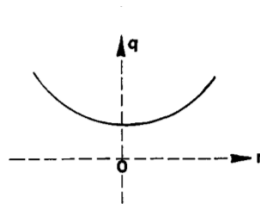


Figura 4.9: Perfil del factor de seguridad Tokamak. Tomada de [Dreicer,[11]]

El sistema tokamak, fue ideado en los años 50 por los físicos soviéticos Igor Tam y Andrei Sajarov, con las ideas de Oleg Lavrantiev, que consiste en una *camara toroidal* con dos ejes de simetría: el eje mayor y el menor. El eje z es el eje mayor, y el menor es un circuito circular que recorre el toro de forma azimutal a z , tales ejes representan las direcciones toroidal (ϕ), paralela a z , y la poloidal (θ) que es azimutal al eje menor. R es la distancia radial desde el eje mayor, r es la distancia radial desde el eje menor. El radio mayor R_0 es la distancia entre el eje menor y el radio menor a como se ilustra en las siguientes figuras:

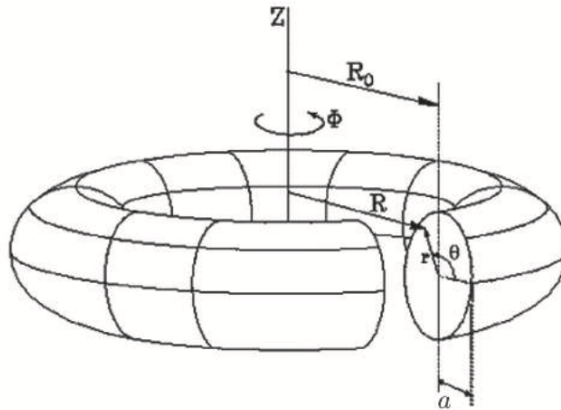


Figura 4.10: Geometría del tokamak

Como ilustramos en la introducción de esta sección para un buen confinamiento es necesario que, además de la cámara *cerrada de vacío* (1,1) que debe de ser cubierta en

CAPÍTULO 4. CONFINAMIENTO MAGNÉTICO

su interior con módulos *Cobertor* (1.2) preparado para soportar una gran carga térmica, cuya misión es frenar neutrones y transferir calor al sistema de refrigeración y absorbe la energía de los neutrones, además de producir tritio a partir de reacciones con Litio, se necesitan emplear campos magnéticos toroidales y poloidales, en el caso de ésta última se genera por una corriente inducida en el plasma, a la que se le conoce como corriente toroidal J_ϕ , la cual se induce mediante un *transformador central*, utilizando al plasma como secundario(1,3). Para el campo toroidal (que es el de mayor intensidad en esta configuración) es producido por *bobinas poloidales*(1,4). De la ley de Ampère se puede ver que la magnitud del campo toroidal disminuye como $1/R$. Donde I_b es la corriente que pasa por las bobinas poloidales que generan el campo B_ϕ . Adicionalmente, para la estabilización de la columna del plasma, se anexan las *bobinas de campo vertical* (1,5).

En la práctica, debido a la inevitable interacción del plasma con las paredes de la cámara de vacío que lo contiene, en el plasma penetran muchas impurezas que pueden aumentar excesivamente las pérdidas de energía por radiación, lo que puede enfriar el plasma a tal grado de que se pierdan las condiciones para que la fusión, por lo que son extraídas por los *divertores* (1,6) que desvían en campo magnético localizado cerca de la superficie del plasma hacia el exterior, las impurezas se desvían a lo largo de esas líneas de fuerza hacia cámaras de bombeo en el exterior, además saca las partículas α que ya han cedido su energía para calentar el plasma y que ya no aportan nada a la reacción y pueden enfriar el plasma de quedarse en el reactor.

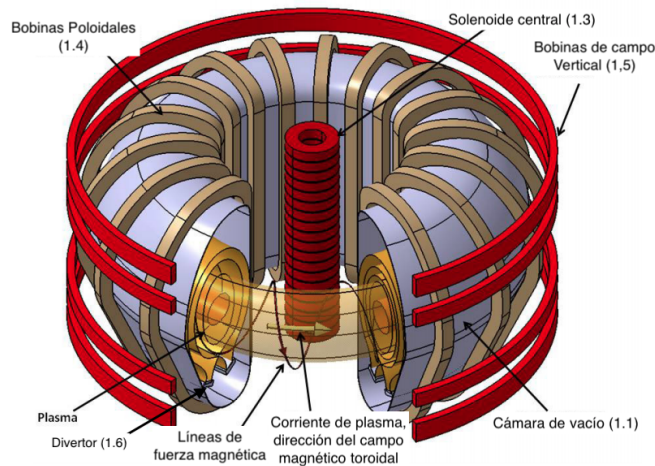


Figura 4.11: Estructura de un Tokamak. Tomada de [IAEA, [16]]

Note que en un tokamak la corriente toroidal del plasma es necesaria para la existencia

4.3. Sistemas toroidales

de superficies magnéticas (a diferencia de otras configuraciones como el Stellarator donde no son necesarias). Esta configuración da como resultado líneas de campo magnético helicoidales cerradas.

CAPÍTULO 4. CONFINAMIENTO MAGNÉTICO

Capítulo 5

Equilibrio

En este capítulo se hará una transformación del perfil del plasma de tal manera que, al escribirlo en coordenadas cilíndricas podamos reducirla a dos únicas variables: el ángulo toroidal (ϕ) y encontrar una función Ψ (llamada función de flujo poloidal) que englobe las coordenadas (r, z) . Esta transformación es necesaria pues el perfil del plasma ya no es circular, por lo que es menester simplificar su representación.

Para ello escribiremos el campo magnético (y por ende la corriente, de acuerdo a la ley de Ampère), primero en su forma de potencial vectorial, para después encontrar la forma de Ψ y escribir el campo en última instancia sólo en cuestión de Ψ y ϕ de modo que al sustituir en la ecuación de equilibrio que es esencialmente vectorial encontremos su equivalencia como una ecuación diferencial.

5.1. Función de flujo

Usaremos las coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) donde $r = 0$ es el eje de rotación del cilindro. Por lo que r denotará la coordenada radial, ϕ el ángulo toroidal y z la altura, cada uno con sus vectores unitarios.

Sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = r \cos \phi \tag{5.1}$$

$$y = r \sin \phi \tag{5.2}$$

$$z = z \tag{5.3}$$

También definiremos $\Gamma(r)$ la circunferencia por la rotación de r , siendo $S(r)$ la superficie de tal circunferencia. Podemos observar que $S(r)$ esta caracterizado por ϕ y el plano perpendicular a esta región es la poloidal, como se ve en la figura:

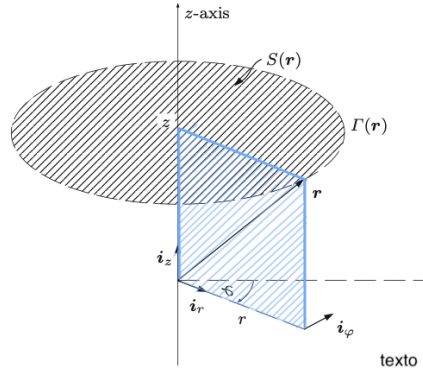


Figura 5.1: Sistema cilíndrico de coordenadas. Tomada de [Ariola y Pironti,[1]]

Es posible escribir el campo magnético como el rotacional de un potencial:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (5.4)$$

Dónde $\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\phi \hat{\phi} + A_z \hat{z}$, entonces aplicando el rotacional en las coordenadas ya mencionadas, obtenemos:

$$\vec{B} = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \hat{z} \quad (5.5)$$

De la figura podemos ver que el plano en azul es el plano poloidal, es decir el plano $R-Z$ y la dirección $\hat{\phi}$ es la toroidal, por lo tanto podemos escribir el campo magnético como sigue:

$$\vec{B} = \vec{B}_\phi \hat{\phi} + \vec{B}_\theta \hat{\theta} \quad (5.6)$$

El último término, el poloidal es equivalente a $B_\theta = B_z + B_r$ y B_ϕ es el campo toroidal, de acuerdo a la ecuación 5.5 y sabiendo que el campo poloidal esta en el plano $R-Z$, tenemos que el campo poloidal esta dado por:

$$B_\theta = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \hat{z} \quad (5.7)$$

Lo cual es equivalente al rotacional de A_ϕ :

$$B_\theta = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_\phi & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial r} \hat{z} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \hat{r} \right) \quad (5.8)$$

De lo cual queda claro que $B_\theta = \nabla \times A_\phi$, por lo que podemos definir una función $\Psi(r, z)$:

$$\Psi \equiv rA_\phi(r, z) \quad (5.9)$$

Lo que nos permite reescribir las componentes del campo toroidal:

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (5.10)$$

Antes de proceder debemos tomar en cuenta las siguientes relaciones vectoriales:

$$\nabla \phi = \frac{\hat{\phi}}{r}, \quad \nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{z} \quad (5.11)$$

El campo en la dirección toroidal, no es afectado por Ψ , que es la función de flujo, por lo que simplemente se denotará como B_ϕ . Debemos asegurar que Ψ sea constante a lo largo de una línea magnética, es decir que cumpla $\vec{B} \cdot \nabla \Psi = 0$, para lo cual procederemos a hacer la demostración:

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \nabla \Psi &= \vec{B} \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{z} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Análogamente, es posible demostrar que $\vec{B} \cdot \nabla p = 0$, lo cual se ilustra gráficamente en la figura:

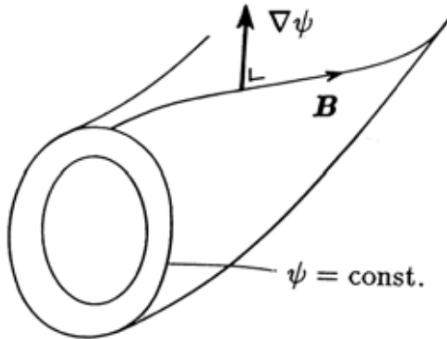


Figura 5.2: Superficie magnética Ψ y línea de campo magnético [Miyamoto, [28]]

Por lo tanto ya estamos en forma para escribir el campo en términos de Ψ :

$$\vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \hat{z} + B_\phi \hat{\phi} \quad (5.13)$$

Que a su vez, se puede sintetizar si lo escribimos como rotacional:

$$\vec{B} = \nabla \Psi \times \nabla \phi + B_\phi \hat{\phi} \quad (5.14)$$

Definimos :

$$f = rB_\phi \quad (5.15)$$

Por lo que escribimos el campo completo como sigue:

$$\vec{B} = \nabla \Psi \times \nabla \phi + f \nabla \phi \quad (5.16)$$

Considerando la axisimetría escribimos la ley de Gauss:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial r} = 0 \quad (5.17)$$

El flujo magnético a través de cualquier *listón* toroidal entre dos superficies es equivalente. Ahora calculemos un caso en el que el flujo magnético poloidal sea perpendicular a \hat{z} , esto es, únicamente B_z contribuye al flujo poloidal:

$$\Psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} B_z(r, z) r dr d\phi = \int_0^r B_z(r, z) r dr \quad (5.18)$$

Es necesario calcular la corriente utilizando la ley de Ampère:

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{J} \mu_0 \quad (5.19)$$

Al sustituir 5.16 en la ecuación anterior obtenemos:

$$\vec{J} = \mu_0^{-1} \nabla \times \left(\nabla \Psi \times \nabla \phi + f \nabla \phi \right) \quad (5.20)$$

Distribuyendo el paréntesis y usando las definiciones de $\nabla \Psi$ y $\nabla \phi$:

$$\vec{J} = \mu_0^{-1} \left(\nabla \times \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{z} \times \frac{1}{r} \hat{\phi} \right) + \nabla \times f \nabla \phi \right) \quad (5.21)$$

Lo que nos deja del lado derecho con:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)\right) \hat{\phi} + \nabla \times f \nabla \phi \quad (5.22)$$

Considerando que $\hat{\phi} = \nabla \phi r$ y que $\nabla \times f \nabla \phi = \nabla f \times \nabla \phi$ reescribimos la ecuación anterior como sigue:

$$\vec{J} = -\mu_0^{-1} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \nabla \phi + \mu_0^{-1} \nabla f \times \nabla \phi \quad (5.23)$$

Lo que es equivalente a:

$$\vec{J} = -\mu_0^{-1} \Delta^* \Psi \nabla \phi + \mu_0^{-1} \nabla f \times \nabla \phi \quad (5.24)$$

Donde Δ^* es el operador de Grad Shafranov, que se define como:

$$\Delta^* F \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad (5.25)$$

Donde F es una función arbitraria. De la ecuación 5.24 podemos ver que, si consideramos únicamente la dirección toroidal para la corriente, obtenemos:

$$\Delta^* \Psi = -\mu_0 r J_\phi \hat{\phi} \quad (5.26)$$

Utilizando la ley de Faraday en su forma integral:

$$\oint_{\Gamma(s)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S(r)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (5.27)$$

Donde de acuerdo a la figura 5.1 es notorio que $\vec{S} = S\hat{z}$ y que $\vec{l} = l\hat{\phi}$ Por lo que nos queda la integral de la siguiente manera:

$$\int E_\phi dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^r B_z r d\phi dr \quad (5.28)$$

Resolviendo ambos lados de la ecuación y despejando E_ϕ tenemos:

$$E_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (5.29)$$

5.2. Ecuación de Grad Shafranov

La condición básica de equilibrio es cuando se considera al plasma en un estado estacionario, donde su velocidad es cero, por lo que la ecuación 3.67 se reduce a:

$$\nabla p = \vec{J} \times \vec{B} \quad (5.30)$$

De la ecuación anterior se sigue que. $\vec{B} \cdot \nabla p = 0$ y $\vec{J} \cdot \nabla p = 0$. Lo que muestra que las líneas de campo magnético inducido y la densidad de corriente están sobre superficies isobáricas como se demostró con la figura 5.1. En general la presión es máxima cerca del centro de la sección poloidal. Estas superficies son concéntricas y se les conoce como superficies magnéticas.

De la demostración 5.12 se sigue que las superficies magnéticas coinciden con el flujo poloidal constante. En el plano poloidal la densidad de corriente, inducción magnética y la presión es constante para cada nivel de Ψ . Lo que hace posible tomar estas cantidades como dependientes del flujo poloidal:

$$\vec{B} = \vec{B}(\Psi), \quad \vec{J} = \vec{J}(\Psi) \quad (5.31)$$

Procedemos a calcular el producto cruz de la corriente y el campo magnético:

$$\vec{J} \times \vec{B} = (J_\phi \hat{\phi} + J_\theta \hat{\theta}) \times (B_\phi \hat{\phi} + B_\theta \hat{\theta}) \quad (5.32)$$

De esta ecuación sólo nos hace falta calcular J_θ , de la cual sabemos que $J_\theta = J_r + J_z$ y se sigue de la aplicación de la ley de Ampère en cilíndricas que

$$J_r = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_\phi}{\partial z}, \quad J_z = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial r B_\phi}{\partial r} \quad (5.33)$$

Así que de la ecuación 5.32 distribuyendo los paréntesis obtenemos:

$$\nabla p = J_\phi \hat{\phi} \times B_\theta \hat{\theta} + J_\theta \hat{\theta} \times B_\phi \hat{\phi} \quad (5.34)$$

Escribimos entonces la corriente en dirección poloidal:

$$J_\theta = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial B_\phi}{\partial z} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r B_\phi}{\partial r} \hat{z} \right) \quad (5.35)$$

Lo cual es equivalente, en términos de f a:

$$J_\theta = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f}{r} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \hat{z} \right) \quad (5.36)$$

Es posible encontrar que:

$$J_\theta = \frac{1}{\mu_0} \left(\nabla f \times \hat{\phi} \right) \quad (5.37)$$

Ahora calcularemos el primer sumando de 5.34:

$$J_\phi \hat{\phi} \times B_\theta \hat{\theta} = J_\phi \hat{\phi} \times (\nabla \Psi \times \nabla \phi) \quad (5.38)$$

Haciendo primero el producto cruz del paréntesis, obtenemos:

$$J_\phi \hat{\phi} \times \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \hat{z} \right) = -\frac{J_\phi}{r} \nabla \Psi \quad (5.39)$$

Y del sumando restante, tenemos que, considerando la ecuación 5.37:

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\nabla f \times \hat{\phi} \right) \times \left(f \nabla \phi \right) \quad (5.40)$$

Haciendo su respectivo producto cruz obtenemos:

$$-\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f}{r} \right) f + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial z} f \right) \quad (5.41)$$

Lo que nos da:

$$-\frac{1}{\mu_0 r^2} f \nabla f \quad (5.42)$$

Por lo que podemos escribir la ecuación completa como sigue:

$$\nabla p = -\frac{J_\phi}{r} \nabla \Psi - \frac{1}{\mu_0 r^2} f \nabla f \quad (5.43)$$

Consideremos

$$\nabla p = \frac{d}{d\Psi} (p \nabla \Psi) \quad (5.44)$$

Y

$$\nabla f = \frac{d}{d\Psi} (f \nabla \Psi) \quad (5.45)$$

Despejamos entonces J_ϕ de la ecuación 5.43 obtenemos:

$$J_\phi = \frac{-r}{\nabla \Psi} \left(\frac{dp}{d\Psi} \nabla \Psi + \frac{1}{\mu_0 r^2} f \frac{d}{d\Psi} (f \nabla \Psi) \right) \quad (5.46)$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.44 y 5.45 en la ecuación anterior:

$$J_\phi = -r \frac{dp}{d\Psi} - \frac{1}{\mu_0 r} f \frac{df}{d\Psi} \quad (5.47)$$

Sustituimos la ecuación anterior en 5.26 obtenemos:

$$\Delta^* \Psi = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\Psi} - f \frac{df}{d\Psi} \quad (5.48)$$

Que es la ecuación de *Grad-Shafranov*, donde p es la presión del plasma y f la corriente poloidal, la cual es posible ver como un problema de diferenciación parcial:

$$\Delta^* \Psi = \begin{cases} 0, & \text{si } \vec{r} \in \Omega_v \cup \Omega_a \\ \mu_0 r J_\phi, & \text{si } \vec{r} \in \Omega_m \\ -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\Psi} - f \frac{df}{d\Psi}, & \text{si } \vec{r} \in \Omega_p \end{cases} \quad (5.49)$$

Donde Ω'_i son las regiones dentro del tokamak, como se ilustra en la siguiente imagen:

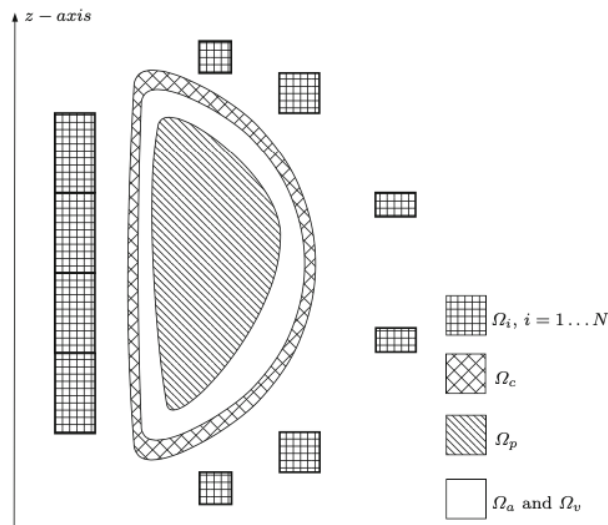


Figura 5.3: Sección transversal de un tokamak, dividida en regiones. Tomada de [Ariola y Pironti [1]]

Con Ω_p es la región ocupada por el plasma, Ω_c es la estructura conductora, Ω_i con $i = 1 \dots N$ las bobinas poloidales, Ω_a región de aire, Ω_v región de vacío y Ω_m es la unión de Ω_c y Ω_i . Es importante notar que esta figura es en el caso del problema de equilibrio con frontera libre.

Y las condiciones de frontera son:

$$\Psi(r, z)|_{r=0} = 0 \quad (5.50)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(r, z) = 0 \quad (5.51)$$

La ecuación de *Grad- Shafranov* es una ecuación en derivadas parciales en coordenadas cilíndricas, no lineal, multivariable que describe el equilibrio del MHD ideal, fue desarrollada por H. Grad y H. Rubin Vitalii en 1958 y Dmitrievich Shafranov en 1966.

Existen diferentes métodos para encontrar soluciones aproximadas a ésta, uno de ellos es por separación de variables, volviendo al problema de equilibrio en un problema de condiciones de frontera de la ecuación diferencial, donde lo principal es encontrar el valor de los coeficientes numéricos que se generan debido a las constantes de integración.

Capítulo 6

Métodos de Solución

La ecuación de *Grad-Shafranov* presenta dificultades intrínsecas para encontrar una solución analítica, pues como se ilustra en 5.48 las funciones de presión p y la de flujo f son a su vez funciones de Ψ , que es la incógnita de la ecuación. Una ecuación diferencial elíptica, no lineal, bidimensional.

Generalmente se soluciona numéricamente, aunque es posible hacerlo analítico, con los perfiles de Solov'ev, para el caso numérico hay varios procedimientos. En este capítulo se revisará el método presentado por [Zheng et al., 1996] y [Cerfon and Freidberg, 2010] y la propuesta del método variacional descrita por [Haney, et al., 1995].

6.1. Método de Solov'ev

Tomando la ecuación 5.48 como:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\Psi} - f \frac{df}{d\Psi}, \quad (6.1)$$

Esta puede ser resuelta si el lado derecho es lineal, lo cual es posible si:

$$\begin{aligned} p(\Psi) &= \bar{a}\Psi^2 + \bar{b}\Psi \\ f^2 &= \bar{\alpha}\Psi^2 + \bar{\beta}\Psi + f_0^2, \end{aligned} \quad (6.2)$$

Propuesta por Atanasiu [2] que considera que la presión y la corriente poloidal dependen de Ψ . Esto lleva a un procedimiento cuyas soluciones son 2 familias de funciones hipergeométricas convergentes que satisfacen la ecuación homogénea, utilizando una frontera

rectangular, su análisis permite que β_{pol} , la corriente I , q y l (inductancia) sean dados de forma independiente, es decir sean parámetros libres.

Es posible simplificar este análisis si tomamos los perfiles de Solov'ev, con $p(\Psi)$ y $f(\Psi)$ tal que 6.1 se convierta en una ecuación diferencial lineal no homogénea parcial, que es más sencilla de resolver.

Tomando la siguiente parametrización:

$$r = r_0 X, \quad z = r_0 Y, \quad \Psi = \Psi_0 \tilde{\Psi}. \quad (6.3)$$

Nos queda entonces la ecuación de *Grad-Shafranov* :

$$X \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{X} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial^2 Y} = -\mu_0 \frac{r_0^4}{\Psi_0^2} X^2 \frac{dp}{d\tilde{\Psi}} - \frac{r_0^2}{\Psi_0^2} f \frac{df}{d\tilde{\Psi}}, \quad (6.4)$$

Notemos que ya la ecuación anterior es adimensional. Elegimos que:

$$-\mu_0 \frac{r_0^4}{\Psi_0^2} \frac{dp}{d\tilde{\Psi}} = C, \quad -\frac{r_0^2}{\Psi_0^2} f \frac{df}{d\tilde{\Psi}} = A. \quad (6.5)$$

Es importante ver que esta es la notación de [Cerfon, [8]] (es la que seguiremos utilizando en este capítulo), equivalente en [Zheng] a $A_1 = A$ y $-A_2 = C$ y se cumple $A + C = 1$, en ambos casos esto representan a dos constantes.

Las consideraciones de Zheng y Cerfon, sólo permiten escribir el plasma con cuatro parámetros, la forma del perfil de corriente es esencialmente plano y quedan únicamente dos parámetros libres: la corriente del plasma y β_{pol} .

En este trabajo seguiremos la línea de Zheng y Cerfon, por lo que sustituimos en la ecuación 6.5 en 6.4

$$X \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{X} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial^2 Y} = (1 - A)X^2 + A \quad (6.6)$$

Del lado derecho, debemos hacer notar, que por la ecuación 5.47, estos perfiles hacen referencia a la densidad de corriente toroidal:

$$J_\phi = (1 - A)X^2 + A \quad (6.7)$$

Ahora, la ecuación 6.1 el lado izquierdo, tiene una solución de tipo:

$$\Psi = \Psi_p + \Psi_h \quad (6.8)$$

Donde Ψ_p es una solución particular y Ψ_h es la solución a la ecuación homogénea. Para la solución particular [Zheng] (Ψ_z) y [Cerfon] (Ψ_c) proponen dos soluciones diferentes:

$$\Psi_z = \frac{A_1}{8} X^4 - \frac{A_2}{2} Y^2 \quad \Psi_c = \frac{X^4}{8} + A \left(\frac{1}{2} X^2 \ln X - \frac{X^4}{8} \right) \quad (6.9)$$

Para el caso de la solución de la ecuación homogénea:

$$X \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{X} \frac{\partial \Psi}{\partial X} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = 0 \quad (6.10)$$

La solución la propone [Zheng] de la forma:

$$\Psi_h = \sum_{n=0,2} f_n(X) Y^n \quad (6.11)$$

Que satisface:

$$X \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{X} \frac{\partial f_n(X)}{\partial X} \right) = -(n+1)(n+2) f_{n+2} \quad (6.12)$$

Dónde el lado derecho de la ecuación anterior es una relación de recurrencia que queda truncada para $3 \leq n$ pues para tales términos $f_n(X) = 0$.

Zheng generaliza la función Ψ_h a una función generatriz donde se hace una distinción en los coeficientes entre pares e impares, ya que es usual que al tener simetría ecuatorial se consideran únicamente los términos pares, ya que los impares están asociados a un plasma no simétrico ecuatorialmente.

$$\Psi_h = \sum_{n=0,2,\dots} \sum_{k=0}^{k=n/2} G(n, k, X) Y^{n-2k} \quad (6.13)$$

Ahora G debe cumplir que:

$$X \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{X} \frac{\partial G(n, 0, X)}{\partial X} \right) = 0 \quad (6.14)$$

Y

$$X \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{X} \frac{\partial G(n, k, X)}{\partial X} \right) = -(n-2k+1)(n-2k+2) G(n, k-1, X) \quad (6.15)$$

Entonces la función generatriz tiene la siguiente forma:

$$G(n, k, X) = g_{n1} G1(n, k, X) + g_{n2} G2(n, k, X) \quad (6.16)$$

Se propone que $G1(n, 0, X) = 1$.

Escribimos pues, las G:

$$G1(n, k > 0, X) = (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!} (2^k k! (k-1)!)^{-1} X^{2k} \times \left(2 \ln X + \frac{1}{k} - 2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \right) \quad (6.17)$$

Y

$$G2(n, k, X) = (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!} (2^k k! (k+1)!)^{-1} X^{2k+2} \quad (6.18)$$

Las constantes g_{n1} y g_{n2} , están por determinarse con las condiciones a la frontera, es usual definir la forma del plasma usando las funciones generadora. Entre más términos sean necesarios, más compleja es la forma de la columna de plasma; estas pueden ser descritas como *formas de D* por su sección transversal, que posean al menos un punto cuyas características se incorporen a las condiciones de frontera.

Estamos ya en posibilidades de escribir la función de flujo completa:

$$\Psi(X, Y) = \frac{X^4}{8} - A \left(\frac{1}{2} X^2 \ln X - \frac{X^4}{8} \right) + c_1 \Psi_1 + \dots + c_7 \Psi_7 \quad (6.19)$$

Donde Ψ_i es [8]:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= 1, \\ \Psi_2 &= X^2, \\ \Psi_3 &= Y^2 - X^2 \ln X, \\ \Psi_4 &= X^4 - 4X^2 Y^2, \\ \Psi_5 &= 2Y^4 - 9Y^2 X^2 + 3X^4 \ln X - 12X^2 Y^2 \ln X, \\ \Psi_6 &= X^2 12X^4 Y^2 + 8X^2 Y^4, \\ \Psi_7 &= 8Y^6 - 140Y^4 X^2 + 75Y^2 X^4 - 15X^6 \ln X + 180X^4 Y^2 \ln X - 120X^2 Y^4 \ln X \end{aligned} \quad (6.20)$$

Ahora las constantes c_i son valores a determinar a partir de las condiciones de frontera. Dependiendo de las simetrías a la frontera se necesitan más o menos términos, en algunos textos [Zheng [35]] paran en el cuarto término y otros [Cerfon [8]] en el séptimo, que es el que seguiremos. En este momento, tenemos simetría ecuatorial, ilustrado en la figura 6.1, lo que permite especificar las condiciones únicamente en tres puntos: los extremos ecuatoriales (interno y externo) y el punto más alto. Cada uno de estos puntos contiene 3 condiciones de frontera, aunque gracias a la simetría 2 no son relevantes, por lo que tenemos entonces manera de encontrar las 7 constantes buscadas.

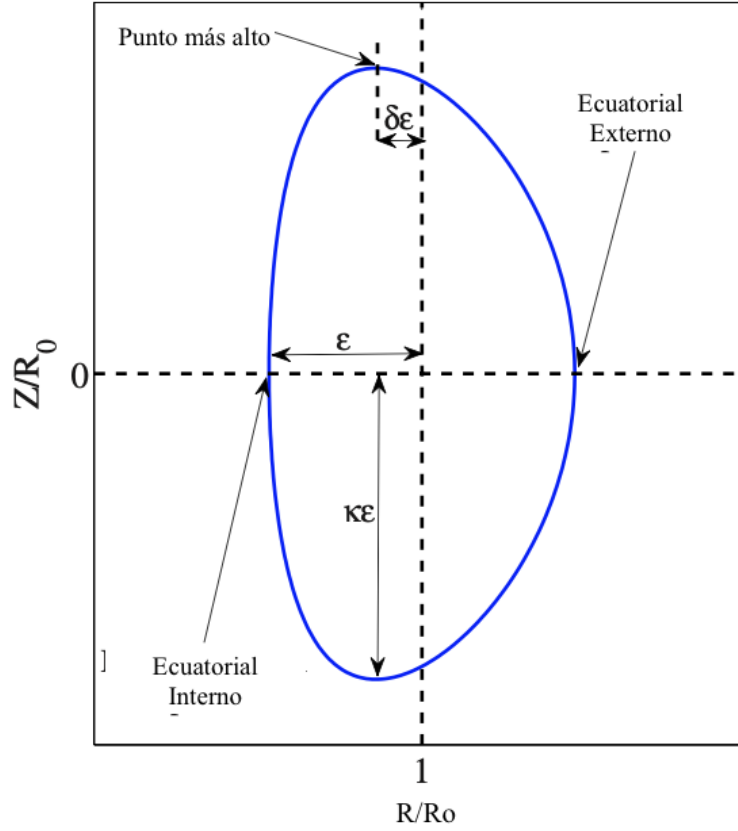


Figura 6.1: Frontera de un plasma axisimétrico. Tomada de [Cerfon [8]]

Por su geometría, las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} X &= 1 + \epsilon \cos(\tau + \alpha \operatorname{sen} \tau) \\ Y &= \epsilon \kappa \operatorname{sen}(\tau) \end{aligned} \tag{6.21}$$

Dónde, $0 \leq \tau \leq 2\pi$ el ángulo respecto al eje X , $\epsilon = a/R_0$ llamado aspecto de radio inverso, $\kappa = \frac{b}{a}$, la elongación, con a es el radio menor y b es la altura del plasma tomada desde el plano ecuatorial y $\operatorname{sen} \alpha = \delta$ que es la triangularidad.

Podemos ver que esta parametrización es en particular la de un círculo en el caso de $\kappa = 1$ y $\alpha = 0$. Si $\kappa \neq 1$ y $\alpha = 0$ se transforma al círculo en una elipse, que dependiendo del signo de κ será vertical para $\kappa > 1$ y horizontal para $\kappa < 1$, por lo que es intuitivo ver que la triangularidad (y de ello su nombre) es un parámetro que en el lado ecuatorial externo *jala* a la elipse.

CAPÍTULO 6. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

La frontera delimita el espacio donde esta confinado el plasma, por lo que Ψ a lo largo de la frontera es cero, es decir,

Psi debe ser nula en tres puntos:

Ecuatorial externo:

$$\Psi(1 + \varepsilon, 0) = 0 \quad (6.22)$$

Ecuatorial interno:

$$\Psi(1 - \varepsilon, 0) = 0 \quad (6.23)$$

El punto máximo:

$$\Psi(1 - \delta\varepsilon, \kappa\varepsilon) = 0 \quad (6.24)$$

Y el punto crítico del punto más alto de la frontera:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial X}(1 - \delta\varepsilon, \kappa\varepsilon) = 0 \quad (6.25)$$

Ahora, al hacer las segundas derivadas, escribimos la curvatura de cada punto: Ecuatorial externo:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}(1 + \varepsilon, 0) + N_1 \frac{\partial\Psi}{\partial x}(1 + \varepsilon, 0) = 0 \quad (6.26)$$

Ecuatorial interno:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}(1 - \varepsilon, 0) + N_2 \frac{\partial\Psi}{\partial X}(1 - \varepsilon, 0) = 0 \quad (6.27)$$

Punto más alto:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}(1 - \delta\varepsilon, \kappa\varepsilon) + N_3 \frac{\partial\Psi}{\partial Y}(1 - \delta\varepsilon, \kappa\varepsilon) = 0 \quad (6.28)$$

Los coeficientes. N_j pueden ser calculados de la parametrización como sigue:

$$\begin{aligned} N_1 &= \left[\frac{d^2 X}{dY^2} \right]_{\tau=0} = -\frac{(1+\alpha)^2}{\varepsilon\kappa} \\ N_2 &= \left[\frac{d^2 X}{dY^2} \right]_{\tau=\pi} = \frac{(1-\alpha)^2}{\varepsilon\kappa} \\ N_3 &= \left[\frac{d^2 X}{dY^2} \right]_{\tau=\pi/2} = -\frac{\kappa}{\varepsilon\cos^2(\alpha)} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Lo cual nos deja con un sistema lineal no homogéneo para c_i , en función de la geometría de la frontera, este sistema tiene solución para valores dados de A , donde esta constante es capaz de modificar en gran manera a la forma de Ψ .

Hay parámetros mérito que se deben discutir, ya que describen propiedades básicas del equilibrio del MHD con los perfiles de Solov'ev. Para ello es importante recalcar que B_0 es el campo magnético en $r = r_0$ y I_p es la corriente del plasma. Calcularemos primeramente el B_θ promedio en la superficie del plasma utilizando una trayectoria cerrada a lo largo de

la misma:

$$\bar{B}_\theta = \frac{\oint B_\theta dl_\theta}{\oint dl_\theta} \quad (6.30)$$

Notemos que el numerador es equivalente a:

$$\oint B_\theta dl_\theta = \oint \mu_0 J_\phi dS_\phi = \mu_0 I_p \quad (6.31)$$

El denominador lo escribimos de la siguiente manera:

$$\oint dl_\theta = r_0 C_p, \quad C_p = \frac{1}{r_0} \oint dl_\theta \quad (6.32)$$

Recalcando que I_p esta bien definido cuando se decide el perfil A , entonces Ψ_0 es un parámetro fijo.

Los parámetros de mérito son:

$$\beta = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_0^2 + \bar{B}_\theta^2} \quad (6.33)$$

Beta toroidal

$$\beta = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_0^2} \quad (6.34)$$

Beta Poloidal:

$$\beta = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{\bar{B}_\theta^2} \quad (6.35)$$

Factor de seguridad:

$$q = \frac{\varepsilon B_0}{\bar{B}_\theta} \quad (6.36)$$

Donde $\langle p \rangle$ es

$$\langle p \rangle = \frac{\int p d\vec{r}}{\int d\vec{r}} \quad (6.37)$$

Lo que nos interesa es obtener los términos meritorios en términos de A , Ψ , ε , κ y δ . integrando 6.5 y tomando en cuenta que $\Psi = 0$ en la superficie del plasma, obtenemos:

$$p(x,y) = \frac{-\Psi_0^2}{\mu_0 r_0^4} (A - 1) \Psi \quad (6.38)$$

Y

$$F^2 = C' - \frac{2\Psi_0^2 A \Psi}{r_0^2} \quad (6.39)$$

Donde C' es una constante de integración, la cual si consideramos el punto $X, Y = (1, 0)$ es equivalente a $(B_0 r_0)^2$, tomando en cuenta que $F^2 = r^2 B_\phi^2$, encontramos que el campo toroidal es:

$$B_\phi^2 = \frac{r_o^2}{r^2} \left(B_0^2 - \frac{2\Psi_0^2 A \Psi}{r_o^4} \right) \quad (6.40)$$

Definimos el factor de seguridad como sigue:

$$\frac{1}{q} = -\left(\frac{\Psi_0}{ar_0B_0}\right) \frac{1}{C_p} \int \frac{dxdy}{x} [A + (1-A)x^2] \quad (6.41)$$

En el caso del promedio de la presión y la corriente del plasma, es posible escribirlos en términos de A:

$$\langle p \rangle = \frac{-\Psi_0^2(1-A) \int \Psi x dx dy}{\mu_0 r_0^4 \int x dx dy} \quad (6.42)$$

y

$$I_p = \frac{-\Psi_0}{\mu_0 r_0} \left(\int (1-A)x dx dy + \int \frac{A}{x} dx dy \right) \quad (6.43)$$

Con lo cual ya podemos escribir β_θ :

$$\beta_\theta = 2(1-A) \frac{C_p^2}{V} \frac{\int \Psi x dx dy}{\left(\int \frac{dxdy}{x} [A + (1-A)X^2] \right)^2} \quad (6.44)$$

Donde:

$$V = \frac{1}{2\pi r_0^3} \int d\vec{r} = \int x dx dy \quad (6.45)$$

Que es el volumen normalizado del plasma. Con este parámetro meritorio podemos escribir los demás:

$$\beta_\phi = \frac{\varepsilon^2 \beta_\theta}{q^2} \quad (6.46)$$

Y

$$\beta = \frac{\varepsilon^2 \beta_\theta}{q^2 + \varepsilon^2} \quad (6.47)$$

Lo cual completa nuestro análisis y lo hace apto para ser aplicado a la configuración magnética de interés.

6.2. Solución Variacional

En esta sección seguiremos una forma de resolver el problema numéricamente. Cabe recalcar que, la ecuación de *Grad-Shafranov* en general se resuelve de manera numérica, existen varias formas de encontrarla, es posible hacerlo utilizando una malla del plasma que se quiere modelar como lo propuso Jardin [18]. Aunque a manera de ejemplo usaremos el cálculo de [Haney, et al., 1995][12], donde primeramente normaliza la ecuación de *Grad Shafranov* definiendo:

$$\Psi = \Psi_b \tilde{\Psi} \quad (6.48)$$

Dónde $\tilde{\Psi}$ es una nueva variable de flujo poloidal normalizada i.e. $\tilde{\Psi} = 0$ en el eje magnético y $\tilde{\Psi} = 1$ en la superficie del plasma, Ψ_b es el valor del Ψ en la frontera del plasma: $\Psi_p = 2\pi\Psi_b$.

Las escalas también son normalizadas: $R = R_0 + x$ y $Z = Z_0 + y$ aquí (usando la notación de Haney) R_0 es el radio mayor Z_0 es la elevación del plasma y a es el radio menor; análogamente se consideran las versiones normalizadas de: $p(\Psi) = p_0 h(\tilde{\Psi})$, $f^2(\Psi) = R_0^2 B_0^2 (1 + k_0 k(\tilde{\Psi}))$ donde p_0 es la presión en el eje, B_0 el campo toroidal en $r = R_0$ y k_0 es un parámetro que representa el paramagnétismo ($k_0 > 0$) o el diamagnetismo ($k_0 < 0$) en el eje magnético. Las funciones h y k contienen la información del perfil y están a su vez, normalizadas: $h(0) = k(0) = 1 - \tilde{\Psi}$.

Con lo anterior, es posible reescribir 5.48 como:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} \right) = -2 \left(C_0 \frac{R_0}{R} \frac{dk}{d\tilde{\Psi}} + \frac{\beta_0}{l_0^2} \frac{R}{R_0} \frac{dh}{d\tilde{\Psi}} \right) \quad (6.49)$$

Con:

$$C_0 = \frac{k_0 B_0^2 a^2 R_0^2}{2\Psi_b^2}, \quad \beta_0 = \frac{8\phi^2 a^2 p_0}{\mu_0 I^2}, \quad l_0 = \frac{4\pi\Psi_b}{\mu_0 I R_0} \quad (6.50)$$

Las cantidades R_0 , a , B_0 , I y β_0 [12] son ya conocidas, el parámetro l_0 es una medida de la inductancia normalizada interna por unidad de longitud y β_0 es la razón entre la presión del plasma y la presión magnética.

Se debe de cumplir también la ecuación:

$$\int \mu_0 J_\phi dA = \int -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\Psi} - f \frac{df}{d\Psi} dA \quad (6.51)$$

El parámetro C_0 es determinado por las condiciones de normalización en $\tilde{\Psi}$. Haciendo las consideraciones necesarias, hechas en detalle por [Haney, et al., 1995] y resolviendo la ecuación diferencial obtenemos que:

$$\tilde{\Psi} = C_1 + C_2 \ln r + \left(C_0 + \frac{\beta_0}{l_0^2} \right) \frac{r^2}{2} \quad (6.52)$$

Aplicando las condiciones siguientes condiciones para el flujo poloidal $\tilde{\Psi}(0) = 0$, $\tilde{\Psi}(1) = 1$ y la condición de la ecuación 6.51, nos deja con:

$$l_0 = 1, \quad C_0 = 2 - \beta_0 \quad (6.53)$$

CAPÍTULO 6. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Una vez asumido que l_0 y C_0 son conocidas es posible encontrar la Lagrangiana:

$$L = \int \left\{ \frac{R_0}{R} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - 4 \left(C_0 \frac{R_0}{R} k + \frac{\beta_0}{l_0^2} \frac{R}{R_0} h \right) \Big\} dx dy \quad (6.54)$$

Que es equivalente a la ecuación 6.49 si la integral varía con respecto a $\tilde{\Psi}$, manteniendo β_0 , C_0 y l_0 fijas. La ecuación anterior debe a su vez cumplir con la constricción dada 6.51 para l_0 y la relación $C_0 = C_0(\beta_0, l_0)$. Si una $\tilde{\Psi}$ exacta es conocida, cualquier momento que se elija produciría la misma C_0 . Es importante elegir algún momento relevante para estimar esta constante.

Se utilizará una forma de conservación de energía en magnetostática:

$$\int \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{J} dV \quad (6.55)$$

Donde \vec{A} es el vector potencial que cumple $\vec{B}(\vec{A} \times \vec{n}) = 0$, la cual junto con la ecuación 6.51 serán nuestras constricciones, las cuales permitirán calcular C_0 y l_0 .

Dada la simetría cilíndrica, es conveniente escribir 6.54 en coordenadas cilíndricas:

$$L = \int \left\{ \frac{R_0}{R J^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 \right] \left(\frac{d\tilde{\Psi}}{d\rho} \right)^2 - 4 \left(C_0 \frac{R_0}{R} k + \frac{\beta_0}{l_0^2} \frac{R}{R_0} h \right) \right\} J d\rho d\theta \quad (6.56)$$

Donde J es el Jacobiano de la transformación ($J = \partial(x, y)/\partial(\rho, \theta)$), escrita de esta manera, $\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}(\rho)$. De forma análoga se calculan las relaciones entre C_0 y l_0 :

$$\frac{1}{l_0} + C_0 S_0 + \frac{\beta_0}{l_0^2} U_0 = 0 \quad (6.57)$$

Y

$$C_1 S_1 + \frac{\beta_0}{l_0^2} U_1 = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{R_0}{R J^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 \right] \times \left(\frac{d\tilde{\Psi}}{d\rho} \right)^2 J d\rho d\theta \quad (6.58)$$

Donde:

$$S_n = \frac{1}{2} \int (1 - \tilde{\Psi})^n \frac{R_0}{R} \frac{dk}{d\tilde{\Psi}} J d\rho d\theta \quad (6.59)$$

y

$$U_n = \frac{1}{2} \int (1 - \tilde{\Psi})^n \frac{R}{R_0} \frac{dh}{d\tilde{\Psi}} J d\rho d\theta \quad (6.60)$$

Consideremos unas funciones de prueba para la superficie de flujo, para ello veamos la siguiente parametrización:

$$X(\rho, \theta) = S(\rho) + M(\rho, \theta) + X_R(\rho, \theta), \quad Y(\rho, \theta) = K(\rho, \theta) + X_Z(\rho, \theta) \quad (6.61)$$

Por simplicidad tomamos un plasma simétrico ecuatorial, las funciones S, M, K, X_R, X_Z

6.2. Solución Variacional

determinarán la forma del plasma, estan descritas de la siguiente manera:

$S(\rho)$ describe el desplazamiento hacia fuera de la superficie de flujo (identación)debida a la toroidicidad:

$$S(\rho) = \sigma(1 - \rho^2) \quad (6.62)$$

Donde σ es un parámetro variacional, y S cumple que $S(0) = 0$.

$M(\rho)$ tiene la información del radio, la triangularidad y la separación de las superficies de flujo:

$$M(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta + D(\rho) \sin \theta) - \gamma_a \rho^5 \sin \theta^2 \quad (6.63)$$

Donde:

$$D(\rho) = \rho[\eta + (1 - \eta)\rho^2] \sin^{-1} \eta_a \quad (6.64)$$

Y η es el parámetro variacional, γ_a es relativo a la identación, η_a esta relacionado a la triangularidad del plasma: $\delta_a = \eta_a + \gamma_a$, cabe resaltar que η_a y γ_a son conocidas.

$K(\rho, \theta)$ es la función ligada a la elongación de la superficie de flujo:

$$K(\rho, \theta) = \rho[\kappa_0 + (\kappa_a - \kappa_0)\rho^4] \sin(\theta) \quad (6.65)$$

El parámetro variacional es κ_0 y κ_a es la elongación ya conocida de la superficie.

Las funciones X_R y X_z están para describir una posible separatriz, por lo que deben de cumplir con ciertas constricciones: producir una estructura X-point en $\rho = 1$ y $\theta = \pm\pi/2$ en configuraciones con divertor, se deben fijar 4 ángulos al rededor del X-point en $\pi/2$ y finalmente B_z y B_R deben ser cero en el X-point. En el caso de tener una sola separatriz simple obtenemos:

$$\begin{aligned} X_R(\rho, \theta) &= C_R X(\rho, \theta) \rho^4 [\xi + (1 - \xi)\rho^2] \sin \theta \\ X_Z(\rho, \theta) &= C_Z X(\rho, \theta) \rho^4 [\zeta + (1 - \zeta)\rho^2] \end{aligned} \quad (6.66)$$

Donde:

$$C_R = (2 - 2\eta_a^2)^{\frac{1}{2}} \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}, \quad C_Z = -(2 - 2\eta_a^2)^{\frac{1}{2}} \frac{m}{m^2 + 1} \quad (6.67)$$

$$X(\rho, \theta) = \left(\sqrt{1 + \alpha} - \sqrt{1 - \alpha} \right) \rho \sin \theta + \sqrt{1 - \alpha \rho \sin \theta} - \sqrt{1 + \alpha \rho \sin \theta} \quad (6.68)$$

ζ y ξ son los parámetros variacionales, m es el valor absoluto de la pendiente de la tangente de la parte interna del X-point Y fija la orientación de X-point y es determinada por el punto de desvío del divertor, α controla la proximidad del X-point con la superficie del plasma. X_R y X_Z son cero si $\alpha = 0$ (condición de un plasma limitado), si $\alpha = 1$ el X-point aparece en la superficie del plasma. Se toma que α y m son conocidos.

CAPÍTULO 6. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Una forma más general (aunque para efectos de este ejemplo nos quedaremos con el casi simétrico) es considerar sistemas no simétricos respecto al ecuador, para lo cual sólo es necesario hacer adecuaciones a las funciones ya antes mencionadas:

$$\delta_a(\theta) = \frac{\delta_u + \delta_l}{2} + \frac{\delta_u - \delta_l}{2} \Theta(\theta) \quad (6.69)$$

Definimos entonces:

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} 2\exp[-\frac{1}{\pi N}(\theta - \frac{\pi}{2})^N] - 1 & \text{si } \theta < \frac{3\pi}{2} \\ 2\exp[-\frac{1}{\pi N}(\theta - \frac{5\pi}{2})^N] - 1 & \text{si } \theta \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (6.70)$$

N es un número par grande, al no tener la simetría entonces se producirán dos triangulaciones: δ_u una superior y δ_l una inferior que tendrán una transición suave.

Usemos una función prueba simple:

$$\tilde{\Psi}(\rho) = \nu\rho^2 + (1 - \nu)\rho^4 \quad (6.71)$$

ν es el parámetro variacional. De acuerdo a lo anterior, las cantidades que son conocidas son:

$$R_0, Z_0, a, I, B_0, \delta_a, \gamma_a, \kappa_a, \alpha, m, \beta_0, f(\tilde{\Psi}), h(\tilde{\Psi}) \quad (6.72)$$

Por lo que sólo nos resta encontrar a:

$$\sigma, \eta, \kappa_0, \xi, \zeta, \nu \quad (6.73)$$

Estas extremizan la Lagrangiana, junto con C_0 y l_0 que satisfacen 6.57 y 6.58.

Existen dos aproximaciones: La búsqueda numérica para todos los parámetros 6.73 sujetos a las constricciones de corriente y energía. Calculando las derivadas parciales de L respecto a los parámetros variacionales, que se reduce a un problema convencional de constricciones. La otra opción es calcular explícitamente las derivadas parciales de 6.56 respecto a 6.73 que combinado con las constricciones de corriente y energía conlleva a un set de ecuaciones no lineales que se resuelve por métodos numéricos estándar.

Sea la variación del Lagrangiano de la forma:

$$\delta L = -2 \int L_{\tilde{\Psi}} \delta \tilde{\Psi} \, d\rho d\theta \quad (6.74)$$

Donde

$$L_{\tilde{\Psi}} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \frac{R_0}{RJ} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 \right] \frac{d\tilde{\Psi}}{d\rho} \right\} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{R_0}{RJ} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \rho} \right) \frac{d\tilde{\Psi}}{d\rho} \right] + 2J \left(C_0 \frac{R_0}{R} \frac{dk}{d\tilde{\Psi}} + \frac{\beta_0}{l_0^2} \frac{R}{R_0} \frac{dh}{d\tilde{\Psi}} \right) \quad (6.75)$$

Aquí $L_{\tilde{\Psi}}$ es la ecuación de *Grad-Shafranov* en coordenadas de flujo y $\delta\tilde{\Psi}$ esta relacionado a los parámetros variacionales:

$$\delta_{\tilde{\Psi}} = \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\nu} + \delta\nu + \sum_i \left(\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial\lambda_i} + \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial\lambda_i} \right) \delta\lambda_i \quad (6.76)$$

λ_i representa a cualquiera de los parámetros 6.73, como estos parámetros son independientes los unos de los otros $\delta\nu$ y $\delta\lambda_i$ son independientes cada una de sus parciales individuales $\frac{\delta L}{\delta\nu}$ y $\frac{\delta L}{\delta\lambda_i}$ deben desaparecer separadamente. En este ejemplo, el equilibrio se mantiene gracias a las bobinas externas. Dentro del plasma sigue el problema de resolver la ecuación de *Gras-Shafranov*. En la región circundante de vacío, es posible usar el teorema de Green en su forma vectorial para determinar el campo magnético producido por el plasma y las bobinas. Como el plasma es un conductor perfecto, la normal del campo del plasma debe ser cero en la superficie del mismo

El plasma estará en equilibrio sí y sólo sí no hay cambios bruscos en el campo tangencial a través de la superficie. Esto es posible si se perturba la superficie, es decir al modificar los parámetros 6.72.

Como solo hay seis parámetros de forma, no se puede hacer que el salto en el campo magnético tangencial desaparezca, excepto si lo tomamos con el análisis de los mínimos cuadrados, usando este análisis en las ecuaciones no lineales, éstas podrían resolverse simultáneamente con los que producen los parámetros variacionales.

Capítulo 7

Conclusiones

Partiendo del problema de la barrera de potencial, en este trabajo se hizo el cálculo del entunelamiento cuántico para pasar la barrera de Coulomb y comprobar la viabilidad de la fusión nuclear.

Se establecieron las condiciones necesarias para la producción de energía, de manera rentable energéticamente a un caso ya conocido, el de D-T. Para medir la energía ganada con la reacción, considerando pérdidas por radiación de Bremsstrahlung, se definió la ganancia Q . También se encontró el tiempo de confinamiento, que es el tiempo que tarda en escapar la energía del plasma. Usamos el criterio de Lawson, que es el límite mínimo de densidad, tiempo de confinamiento y temperatura para lograr el equilibrio $Q = 1$ (las ganancias de energía igualan a las pérdidas) y la posible ignición 3.1.

Posteriormente calculamos el movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos y eléctricos uniformes y no uniformes como primera aproximación al confinamiento. Se tomo el confinamiento por espejos magnéticos, de ese análisis concluimos que es necesario un sistema cerrado, es decir, tener líneas de campo cerradas B_ϕ . Además, se encontró que es insuficiente el campo toroidal, por lo que se debe de anexar un campo poloidal B_θ , que mejora considerablemente el confinamiento. Estas descripciones se heredan a la descripción de fluido.

El plasma es un gas cuasi neutro de partículas cargadas y neutras, que experimenta un comportamiento colectivo. Se entiende por *comportamiento colectivo* a que, podemos tomar dos regiones de un plasma y estas interaccionan eléctrica o magnéticamente sin importar su distancia. Se revisó la forma más simple con la aproximación magnetohidrodinámica ideal, la cual considera bajas frecuencias, donde predomina la dinámica de los iones, se toma como cuasineutro localmente y no repara en las contribuciones de las colisiones de

las partículas. Junto a las ecuaciones de Maxwell permiten describir ciertos aspectos del estado de equilibrio del plasma.

Se exploraron algunos tipos de confinamiento donde se hace hincapié en los sistemas toroidales, se hizo distinción entre el RFP (Reversal Field Pinch) y Tokamak, que heredan del análisis de partículas independientes la necesidad de B_θ y B_ϕ . En seguida, pensando en sistemas toroidales axisimétricos, se transformaron los perfiles del plasma, para hacerlo más general, encontrando una ecuación de equilibrio en su forma diferencial, la ecuación de *Grad-Shafranov*. Finalmente se mostraron ejemplos sobre las posibles soluciones a la ecuación, una en forma analítica, usando el análisis de [Cerfon and Freidberg [8]] y [Zheng et. al. [35]] y otra de forma variacional adaptada a un problema numérico tomada de [Haney, et al. [12]], ésta última es la más general pues la ecuación de *Grad-Shafranov* es una ecuación diferencial elíptica, no lineal, bidimensional. En ambos casos sólo se consideró el caso de frontera fija.

El objetivo de este trabajo fue llegar a la ecuación de equilibrio iniciando desde los conceptos básicos de la cuántica, en el análisis de las barreras y el electromagnetismo con las propiedades de partículas en campos, para construir las bases de la teoría del confinamiento en un plasma congelado y llegar a las ecuaciones de equilibrio con propuestas de solución. Éstas propuestas tal como se presentaron tienen problemas considerables, los análisis de Cerfon y Zheng, por su simplicidad son útiles para la verificación de códigos numéricos, pero por sí mismos son insuficientes para predecir resultados experimentales, una mejora fue la hecha por Atanasiu [2] con perfiles de presión y flujo de segundo orden, pero la solución que arroja se vuelve extremadamente complicada analítica y computacionalmente.

Una línea de investigación a seguir es comparar sus resultados, haciendo un código en el que se puedan ver los alcances del perfil de Solov'ev utilizado y analizar qué tan diferente es con respecto a la literatura. También es posible encontrar criterios para la elección de parámetros tales como A . Determinar la estabilidad de el equilibrio de estos perfiles. Y analizar perfiles más complejos que permitan acercarse más a lo encontrado experimentalmente.

Es importante recalcar que al tomar como bases la MHD ideal se excluyeron los casos dinámicos (tomando dos plasmas con las características individuales de iones y electrones), no se consideró la viscosidad, se tomó al plasma como un conductor perfecto con frecuencias bajas, en consecuencia se descartaron los fenómenos de escalas de tiempo cortas (frecuencias altas) asociadas a algunas propiedades ondulatorias y turbulencia, ésta última también puede encontrarse en el marco de la MHD en el caso en que se pierde la axisimetría.

En la misma tónica, el equilibrio también puede ser analizado de forma más completa

agregando casos, como el de frontera libre, pérdida de axisimetría (caso del Stellerator), entre otras. Además se han encontrado inestabilidades que van más allá del modelo antes presentado, donde se debe de considerar la resistividad del plasma, y otras inestabilidades como islas magnéticas (por reconexión o por pérdida de axisimetría), que son frecuentes en los experimentos.

Apéndice A

Integral

Tomando la integral que quedó pendiente en el capítulo 2:

$$\int_a^1 \sqrt{\frac{1}{z} - 1} \quad (\text{A.1})$$

Haciendo la siguiente sustitución u

$$u = \sqrt{z} \quad (\text{A.2})$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{z}} \quad (\text{A.3})$$

Sustituyendo en A.1 obtenemos:

$$2 \int_a^1 \sqrt{1 - u^2} du \quad (\text{A.4})$$

Es necesario hacer otra sustitución, ahora:

$$u = \cos(s) du = -\text{sen}(s) ds \quad (\text{A.5})$$

Donde $s = \cos^{-1}(u)$, volvemos a escribir la integral

$$-2 \int \sqrt{1 - \cos^2(s)} \text{sen}(s) ds = 2 \int \text{sen}^2(s) ds \quad (\text{A.6})$$

Haciendo un poco de álgebra llegamos a:

$$\int \text{sen}(2s) + \int 1 ds = \frac{\cos(2p)}{2} + s = s + \text{sen}(s)\cos(s) \quad (\text{A.7})$$

Sustituimos $s = \cos^{-1}(u)$ y sabiendo que $\text{sen}(\cos^{-1}(u)) = \sqrt{1 - u^2}$ escribimos:

$$\cos^{-1}(u) + \sqrt{1 - u^2} \times u \tag{A.8}$$

Sustituyendo u finalmente obtenemos:

$$\cos^{-1}(\sqrt{a}) - \sqrt{a(1 - a)} \tag{A.9}$$

Apéndice B

Decaimiento Alfa

Cálculo de la probabilidad del decaimiento alfa mediante el factor de Gamow para el potencial adecuado. La probabilidad esta dada por:

$$\prod_i \exp(-2G) \quad (\text{B.1})$$

Donde G es el factor de Gamow, que es el que calcularemos para este decaimiento, donde G se define por:

$$G = \int_R^{R'} \frac{2m(\sqrt{V(r) - E_0}}{\hbar} dr \quad (\text{B.2})$$

Donde R es el radio del núcleo de masa Z_1 , R' es el radio para el cual las partículas α ya son capaces de escapar del núcleo, m es la masa, E_0 es la energía usada en el decaimiento y el potencial para este caso esta dado por:

$$V(r) = \frac{2(z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{B}{r} \quad (\text{B.3})$$

La partícula α escapa cuando $r = R'$ por lo tanto:

$$V(R') = E_0 \quad R' = \frac{B}{E_0} \quad (\text{B.4})$$

Lo que nos permite reescribir al factor de Gamow como sigue:

$$G = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_R^{R'} \sqrt{\frac{B}{r} - E_0} \, dr \quad (\text{B.5})$$

Sabiendo que $E_0 = \frac{B}{R'}$ reescribimos la integral de la siguiente manera:

$$G = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_R^{R'} \sqrt{\frac{B}{r} - \frac{B}{R'}} \, dr \quad (\text{B.6})$$

Que es equivalente a:

$$G = \left(\frac{2mB}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_R^{R'} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R'}} \, dr \quad (\text{B.7})$$

Hacemos la siguiente sustitución: $r = R' \cos^2(\theta)$, donde $B' = \left(\frac{2mB}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ y tenemos:

$$B'(-2) \int_R^{R'} \sqrt{\frac{1}{R' \cos^2 \theta} - \frac{1}{R'}} \, R' \cos \theta \, \text{sen} \theta \, d\theta \quad (\text{B.8})$$

Haciendo el álgebra correspondiente obtenemos:

$$\int (-R' + R' \cos \theta)^{\frac{1}{2}} 2 \text{sen} \theta \, d\theta = -2 \int \sqrt{R'} \text{sen}^2 \theta \, d\theta = \sqrt{R'} (\text{sen} 2\theta - \theta) \quad (\text{B.9})$$

Usando que $\theta = \sqrt{\frac{r}{R'}} \rightarrow \text{sen} \theta = (1 - \frac{r}{R'})^{\frac{1}{2}}$ y $\text{sen} 2\theta = 2 \text{sen} \theta \cos \theta$, sustituyendo en B.9 y haciendo la evaluación respectiva:

$$\sqrt{R'} (\cos^{-1}(\frac{r}{R'}))^{\frac{1}{2}} - 2 \left[\left(1 - \frac{R}{R'}\right) \left(\frac{R}{R'}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.10})$$

Sustituyendo entonces en el factor de Gamow B.5 escribimos:

$$G = \left(\frac{2mB}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{R'} \left(\cos^{-1}(\frac{r}{R'})^{\frac{1}{2}} - 2 \left[\left(1 - \frac{R}{R'}\right) \left(\frac{R}{R'}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{B.11})$$

Haciendo unos pocos pasos de álgebra obtenemos:

$$G = \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{B}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left[(\cos^{-1}(\frac{r}{R'}))^{\frac{1}{2}} - 2 \left[\left(1 - \frac{R}{R'}\right) \left(\frac{R}{R'}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{B.12})$$

En la práctica $R \ll R'$ por lo que el término entre corchetes es aproximadamente $\frac{\pi}{2}$, así que tenemos:

$$G = \left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{B}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\pi}{2} \right] \quad (\text{B.13})$$

Lo que significa que la probabilidad de transmisión es de:

$$P = \prod_i \exp\left(-\left[\frac{2m}{E_0}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{B}{\hbar} \pi\right) \quad (\text{B.14})$$

Bibliografía

- [1] ARIOLA M, PIRONTI, A(2016),«*Magnetic Control of Tokamak Plasmas*», 2th ed.,Springer, Switzerland.
- [2] ATANASIU,C. V. AND GÜNTER,S. AND LACKNER,K. AND MIRON,I. G. (2004),«*Analytical Solutions to the Grad-Shafranov equation*», Journal of Physics of Plasmas, Vol. 11, No. 7, pp. 3510-3518.
- [3] BELLAN, P. M. (2006)«*Fundamentals of Plasma Physics*»,Cambridge University Press, London.
- [4] BOYD, T. J. M.,& SANDERSON, J. J.(2003),«*The Physics of Plasmas*»,Cambridge University Press, London.
- [5] BRAUN,E.(1997),«*Una Faceta Desconocida de Einstein*»,Fondo de Cultura Económica, México.
- [6] CASADO VÁZQUEZ, J. M.(1999),«*La teoría cinética antes de Maxwell*», ,Depto. de Física Atómica, Molecular y Nuclear, Argumentos de Razón Técnica N. 2, pp. 97-120, España.
- [7] CHEN, F. F(1984),«*Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*», 2th, edition, Plenum Press, USA.
- [8] CERFON, A. J. AND FRIEDBERG, J. P.(2010),«*“One size fits all” analytic solutions to the Grad-Shafranov equation. Physics of Plasmas, Vol. 17, No. 3, pp. 032502.*»,Oxford University Press, 3rd Edition.
- [9] LEOPOLDO GARCÍA COLÍN(1982),«*Ciento Diez Años de la Teoría Cinética de los Gases* », CDMX, México, Revista Mexicana de Física, No. 28, pp 121-148.
- [10] CUBERO CAMPOS, M. A.(2013),«*Estudio de la dispersión del ^9Li y ^{11}Li sobre un blanco de ^{208}Pb a energías en torno a la barrera Columbiana*», Tesis de Doctorado, Universidad Complutense de Madrid, España.

-
- [11] DREICER, H.(1985),« *Topics in Reversal-Field-Pinch Physics*», Physica Scripta, pps 435-443
- [12] HANEY,S. W. AND FREIDBERG,J. P. AND SOLOMON,C. J. (1995),«*A fast, user-friendly code for calculating magnetohydrodynamic equilibria*». Journal of Computers in Physics, Vol. 9, No. 2, pp 216-224.
- [13] FOWLER, M.(1997),«*Historical Beginnings of Theories of Electricity and Magnetism*» Virginia University Press, USA.
- [14] GONZALO EDUARDO, O.(2017),«*Curso Básico de Fusión Nuclear*», Sociedad Nuclear Española, Madrid, España.
- [15] HAUBOLD, HANS AND KUMAR, DILIP,(2011) «*Analytical Results Connecting Stellar Structure Parameters and Extended Reaction Rates*», Journal of Astrophysics.
- [16] IAEA(2012),«*Fusion Physics*», INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY. <https://www.iaea.org/publications/8879/fusion-physics>
- [17] ILIADIS, C.(2007)«*Nuclear Physics of Stars*»,Wiley-VCH,North Carolina, USA.
- [18] JARDIN, SREPHENT (2010),«*Computational Methods in plasma Physics*»,CRC Press, USA.
- [19] KAUFFMAN, K.(2007),«*Inestabilidades Paramétricas de una Onda de Alvéen Circularmente Polarizada en un Plasma de Varias Especies Iónicas: Efectos Cinéticos (Tesis de maestría)*», Universidad de Concepción, Chile.
- [20] LANZOS, C.(2015),«*The variational principles of mechanics 4th edition*», Dover Publications, USA.
- [21] LI SHU-HUA(1954),«*Origine de la Boussole 11. Aimant et Boussole*», Isis Vol. 45 No. 2, Francia.
- [22] LÓPEZ VALVERDE, R.(2011),«*Historia del Electromagnetismo*», Universidad de las Palmas de Gran Canaria, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
- [23] MACEDA RUÍZ, O.(2020),«*Estudio de Soluciones de tipo Solov'ev en Tokamaks con Diversas Razones de Aspecto y sus Propiedades de Estabilidad (tesis de Licenciatura)*», Universidad Autónoma de México, México.
- [24] KRASSIMIRA M.(2013),«*Nuclear Charge Radii*», Joint Institute for Nuclear Research, Moscú, Rusia.
-

-
- [25] MARTINELL BENITO J.(1995),«*Los Prometeos Modernos o el Esfuerzo para Controlar la Fusión Nuclear*»,CDMX, México, Fondo de Cultura Económica.
- [26] MENCHACA ROCHA A.(2011),«*El Discreto Encanto de las partículas Elementales*», Fondo de Cultura Económica, México.
- [27] MINOTTI, F(2012),«*Notas de Física de Plasmas*»,Departamento de Física de Plasmas de la Universidad de Buenos Aires.
<http://materias.df.uba.ar/plasmasa2012c2/files/2012/07/PLASMA.pdf>
- [28] MIYAMOTO, K.(2005),«*Plasma Physics and Controlled Fusion*», Springer, Alemania.
- [29] MONTES P.E.(1976),«*Cálculo de equilibrios toroidales en plasmas de fusión nuclear*», Volume 3 of Collected Works, North Holland, Amsterdam.
- [30] OTERO, D. Y PROTO, A. N.(1979). «*Equilibrio y Estabilidad MHD en el confinamiento Magnético para Fusión Termonuclear*», Comisión Nacional de Energía Atómica, Argentina.
- [31] SÁNCHEZ NIETO MANUEL M.(1999),«*Procesos de Ignición en Fusión por Confinamiento Inercial*», Tesis de Doctorado, Universidad Politécnica de Madrid.
- [32] SCHAFELNER, A.(2016). «*Introduction to magnetohydrodynamics*». Johannes Kepler Universitat, Alemania.
- [33] STERN P. DAVID(2001),«*La energía solar*»,Maryland, United States of America, The Physics Teacher.
- [34] WESSON, J. (2004),«*Tokamaks*»,Clarendon Press,3rd edition.
- [35] ZHENG, S. B., WOOTTON, A. J., AND SOLANO, E.R. (1996),«*Analytical Tokamak Equilibrium for Shaped Plasmas*», Journal of Physics of Plasmas, Vol. 3, No. 3, pp. 1176-1178.