



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Acoplamiento triple del bosón de Higgs a 1 lazo en
presencia de neutrinos de Majorana

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Mario Espinosa Martínez

Asesorado por

Dr. Héctor Novales Sánchez

Puebla Pue.
3 de diciembre de 2024

Título: Acoplamiento triple del bosón de Higgs a 1 lazo en presencia de neutrinos de Majorana

Estudiante: MARIO ESPINOSA MARTÍNEZ

COMITÉ

Dr. José de Jesús Toscano Chávez
Presidente

Dra. Mónica Salinas Ibáñez
Secretario

Dr. José Enrique Barradas Guevara
Vocal

Dr. Enrique Ramírez Flores
Vocal

Dr. Héctor Novales Sánchez
Asesor

Índice general

1. Introducción	1
2. Modelo Estándar y Física nueva	3
2.1. Modelo Estándar Electrodébil	3
2.2. Rompimiento espontáneo de la simetría y mecanismo de Higgs	4
2.3. Quiralidad y campos de Majorana	13
2.3.1. Matriz de quiralidad γ_5 y matrices de proyección quiral	13
2.3.2. Conjugación de carga	14
2.3.3. Condición de Majorana	15
2.3.4. Términos de masa y lagrangiana de Majorana	17
2.4. Masa de los neutrinos	18
2.5. Fermiones en el Modelo Estándar	19
2.6. Modelo de Pilaftsis. Masas inducidas radiativamente	21
2.7. Diagramas y reglas de Feynman	23
3. Cálculo de hhh	27
4. Perspectivas de trabajo y conclusiones	39
A. Diagramas de Majorana restantes	41
Bibliografía	47

Capítulo 1

Introducción

Durante los años 1930s se comenzó a trabajar en formular a la teoría cuántica como una teoría relativista. La cuantización de los campos clásicos relativistas fue lo que dio origen a la Teoría Cuántica de campos, que es la teoría más empleada en el área de estudio de la Física de partículas. A lo largo del siglo pasado y las primeras décadas del siglo XXI, la Física de partículas tanto teórica como experimental han brindado un sinfín de resultados que han enriquecido nuestros conocimientos en Física y por consiguiente impulsado avances tecnológicos. Todo esto ha consolidado al Modelo estándar de la Física de partículas [1, 2, 3] como una teoría que describe excelentemente a las interacciones fundamentales de la naturaleza. Uno de los hallazgos más notables, predicho por el Modelo Estándar (SM) fue la detección de una partícula de tipo bosón de Higgs, en 2012 [4, 5]. Si bien fue un descubrimiento monumental para la Física de partículas, lo que aún no se sabe con certeza es si la partícula de tipo bosón de Higgs descubierta es exactamente como la que se propone en el SM. Se ha comprobado que el Higgs descubierto comparte características esenciales con el teorizado, como el mismo espín, carga neutra, ser partículas escalares, etc. Sin embargo los detalles finos de la partícula están relacionados con sus acoplamientos. En este sentido sería necesario comparar todos los acoplamientos teóricos y experimentales para comprobar si la partícula encontrada es el bosón de Higgs del SM. Conocer todos los acoplamientos del bosón de Higgs nos permitiría reproducir el potencial escalar tras el rompimiento espontáneo de la simetría, para ver si caracteriza fielmente a los experimentos, sin embargo no es tarea sencilla, pues para cada acoplamiento se tienen que considerar las correcciones radiativas (procesos a lazos). Debido a que el Modelo Estándar Electro débil es una teoría perturbativa, los acoplamientos de menor orden son los que tienen una mayor contribución a los resultados teóricos, por lo que al hablar de los autoacoplamientos del bosón de Higgs, es el doble acoplamiento hh el que más contribuye; sin embargo hh ya está muy estudiado, por lo que el triple autoacoplamiento hhh es el que le sigue en relevancia, y sobre el que están puestas algunas esperanzas de descubrir Física más allá del Modelo Estándar (BSM: Beyond Standard Model), cuando entren en funcionamiento los futuros colisionadores, como el LHC de alta luminosidad.

Una de las correcciones radiativas del hhh que no está contemplada en el SM es el triple acoplamiento del bosón de Higgs mediado por un lazo de neutrinos. Esto se debe a que en el SM los neutrinos no tienen masa, sin embargo algunos resultados experimentales [6, 7], como las oscilaciones de neutrinos respaldan el hecho de que los neutrinos deben de tener masa. Sin embargo son masas muy pequeñas. Se puede estudiar este proceso empleando modelos BSM, lo cual resulta necesario, pues ha resultado evidente que aunque el SM es una teoría bastante aproximada a los fenómenos fundamentales, no es la última palabra en el estudio de la Física fundamental.

Durante el desarrollo de este trabajo se recurre a un mecanismo de generación de masas para los neutrinos, que es una variante del mecanismo de Seesaw [8, 9], con el objetivo de calcular el

acoplamiento hhh a 1 lazo, donde el lazo está formado únicamente por los neutrinos masivos que surgen al emplear el modelo [10]. En el capítulo 2 se presenta este modelo y conocimientos esenciales del lagrangiano del SM, el bosón de Higgs, campos de Majorana y los diagramas de Feynman, que le permitirán al lector principiante en estos temas poder llevar un buen seguimiento de los posteriores desarrollos. En el capítulo 3 se revisa qué diagramas de Feynman tienen contribuciones a la amplitud del proceso, y se realizan los cálculos explícitos de dichas contribuciones, tanto de forma analítica como con la asistencia de herramientas de Wolfram Mathematica[®]. Se revisa si el cálculo es finito, y si no es así, cuáles serían las divergencias y qué se podría hacer respecto a ellas. En el capítulo 4 se presentan las conclusiones.

Capítulo 2

Modelo Estándar y Física nueva

2.1. Modelo Estándar Electrodébil

El Modelo Estándar de la Física de partículas es la teoría más ampliamente aceptada para describir los fenómenos relacionados con tres interacciones fundamentales de la naturaleza: La interacción electromagnética, interacción débil e interacción fuerte. Toda esta teoría se resume en una elegante ecuación conocida como lagrangiano del Modelo Estándar de la Física de partículas. El lector debe recordar que el primer acercamiento a la formulación lagrangiana que se suele tener es en la mecánica clásica, en donde para muchos de los sistemas estudiados, la función lagrangiana se considera que es $L = T - V$ (energía cinética menos energía potencial). Sin embargo en general eso no es la función lagrangiana. Basta con estudiar las ecuaciones de Euler-Lagrange desde el punto de vista del cálculo variacional mediante el principio de Hamilton para darse cuenta de que la función lagrangiana puede representar gran variedad de sistemas, y la lagrangiana se construye dependiendo de las características que se le quieren atribuir a dicho sistema. En el caso de la Física de partículas nos interesa que la teoría cumpla con una serie de simetrías que se han encontrado en la naturaleza, las cuales están representadas mediante grupos. Se podría decir que las simetrías son los planos con los que se construye el lagrangiano del SM. Lo que se busca es que el lagrangiano sea invariante bajo los grupos de simetría; más aún, que la acción sea invariante. Esto significa que si los elementos que componen el lagrangiano sufren una transformación, ya sea global o local, de acuerdo con las reglas de transformación bajo alguno de estos grupos, el lagrangiano seguirá siendo el mismo que antes de transformarse.

El lagrangiano del SM es invariante bajo $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. El grupo $SU(3)_C$ caracteriza las simetrías de la cromodinámica cuántica (QCD), teoría principalmente desarrollada por Murray Gell-Mann y George Zweig. El subíndice C hace referencia al “color”, una propiedad de los quarks. La interacción electrodébil está gobernada por el grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, donde el subíndice L nos indica que los campos quirales izquierdos de materia se transforman como dobletes de $SU(2)$. El subíndice Y hace referencia a la hipercarga, que es un análogo de la carga eléctrica, pero asociada a un grupo $U(1)$ distinto del $U(1)_{EM}$ (el grupo al que se asocia se le llama $U(1)_Y$). Debido a que se pueden tratar las interacciones fuertes y las electrodébiles de forma independiente, el SM se puede dividir en dos sectores

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{QCD} + \mathcal{L}_{EW} .$$

El sector de la QCD y el sector electrodébil. El sector electrodébil es el resultado de la teoría GSW, atribuida a Glashow, Salam y Weinberg [1, 2, 3]. De igual manera, el sector electrodébil puede dividirse en varios sectores, los cuales se dividen principalmente de la siguiente forma: Sector de corrientes, sector de Yukawa, sector de Yang-Mills y el sector escalar, al que después del

rompimiento espontáneo de la simetría se le llama sector de Higgs.

$$\mathcal{L}_{\text{EW}} = \mathcal{L}_C + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_h .$$

En todo lo que prosigue en este trabajo cuando nos reframos al SM, estaremos hablando del Modelo Estándar Electróbil, ya que es en este sector en donde ocurren los fenómenos que nos interesarán.

2.2. Rompimiento espontáneo de la simetría y mecanismo de Higgs

El rompimiento espontáneo de la simetría (RES) es un mecanismo muy poderoso y ampliamente usado en varios campos de la Física moderna. Se asocia con las transiciones de fase en la mecánica estadística, se emplea en modelos de Física de estado sólido, también tiene un papel central en la Física de partículas, y es lo que permite unificar la interacción débil con la electromagnética. El RES es un tópico profundo y hay libros enteros al respecto, por lo que hablaremos de la idea central de este mecanismo sin detenernos demasiado en sus sutilezas, y veremos cómo se aplica en el SM. El desarrollo de los temas de esta sección se basa en la presentación de dicho contenido en los libros escritos por Schwartz, Guidry y Strocchi [11, 12, 13], respectivamente. La idea central detrás del RES es que los generadores de un grupo se rompen espontáneamente en el sentido de que la simetría manifiesta que presentaba el grupo queda oculta y ahora la simetría que es manifiesta es de un subgrupo del grupo que se rompió espontáneamente. En términos simples, esto ocurre debido a que aunque la lagrangiana de la teoría sea simétrica bajo un grupo, su estado base de energía no lo es. Si inicialmente la lagrangiana es invariante bajo un grupo G , entonces al romperse a un grupo H ($H \subset G$), el estado base de energía (también llamado valor de expectación del vacío) será invariante bajo H . Podríamos preguntarnos, si la teoría está plasmada en la lagrangiana y esta ya es invariante bajo un grupo de simetría ¿por qué habríamos de fijarnos en la invariancia del estado base? La cuestión es que en la teoría cuántica de campos perturbativa, los estados se construyen a partir del estado base y por lo tanto la teoría requiere información sobre las simetrías del valor de expectación en el vacío al igual que de las simetrías de la lagrangiana.

Los generadores rotos de G son aquellos que no forman parte del conjunto de generadores de H . Cuando la simetría bajo G es global, al romperse G en H , por cada generador roto se obtendrá un campo escalar de masa cero. Esto es la esencia del teorema de Goldstone, y a los campos escalares sin masa se les llama bosones de Goldstone. Debido a que en el Modelo Estándar nos interesa la invariancia de norma, y por lo tanto tratamos con campos de norma, una simetría global como la que produce bosones de Goldstone tras el RES no nos resultará tan útil como una simetría de norma. En el caso de tener una simetría de norma bajo G , tras romperse espontáneamente en H , los bosones de norma adquieren masa, y se puede tomar una norma la cual hace que los bosones de Goldstone sean absorbidos por los bosones de norma. Con fines ilustrativos se mostrará primero el caso más sencillo, que es el caso abeliano.

Considere la lagrangiana

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} ,$$

con ϕ un campo escalar complejo y $V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$. Esta lagrangiana es invariante bajo el grupo $U(1)$ local, de forma que la derivada covariante se define en la ecuación 2.1, el campo escalar y la conexión se transforma como se indica en 2.2 y 2.3 respectivamente.

$$D^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu , \tag{2.1}$$

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = e^{iq\alpha(x)} \phi(x) , \tag{2.2}$$

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x) . \tag{2.3}$$

Explícitamente la lagrangiana es

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger - iqA_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi + iqA^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Queremos conocer el mínimo del potencial, por lo que buscamos sus puntos críticos:

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi^\dagger} = \mu^2 \phi + 2\lambda \phi^\dagger \phi^2 = \phi(\mu^2 + 2\lambda \phi^\dagger \phi).$$

Si $\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi^\dagger} \Big|_{\phi_0} = 0$, entonces

$$\phi_0(\mu^2 + 2\lambda|\phi_0|^2) = 0.$$

Note que la única forma de que tengamos una solución diferente de la trivial ($\phi_0 = 0$) es que $\mu^2 < 0$. Consideramos la solución siguiente

$$\begin{aligned} \mu^2 + 2\lambda|\phi_0|^2 &= 0, \\ \implies |\phi_0| &= \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}}, \end{aligned}$$

definimos $v^2 \equiv \frac{-\mu^2}{\lambda}$, entonces

$$|\phi_0| = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Este resultado nos dice que el mínimo de $V(\phi)$ tiene degeneración infinita en los puntos de una circunferencia centrada en el origen, de radio $v/\sqrt{2}$. En la figura 2.1 se puede ver la gráfica del potencial $V(\phi)$, la cual tiene un máximo local en el punto $(0, 0)$ y mínimos absolutos en los puntos de la circunferencia que se mencionó. A esta gráfica se le conoce popularmente en la Física de partículas como la gráfica del sombrero mexicano. Volviendo al tema de los mínimos de energía, podríamos elegir cualquiera de estos puntos como el estado base, pero consideremos ϕ_0 de forma más general

$$\phi_0(x) = |\phi_0| e^{i\xi(x)} = \frac{v}{\sqrt{2}} e^{i\xi(x)}.$$

Podemos desarrollar $\phi(x)$ alrededor de $\phi_0(x)$ de la siguiente forma

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \phi(x) - \phi_0(x) = |\phi_0| e^{i\xi(x)} + (|\phi(x)| - |\phi_0|) e^{i\xi(x)},$$

definimos $\frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} \equiv |\phi(x)| - |\phi_0|$, que es un campo real, entonces

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta(x)) e^{i\xi(x)}.$$

Recordando que la transformación de norma del campo escalar, bajo $U(1)$ local está dada por la ecuación 2.2, se puede tomar la norma en la que $\alpha(x) = -\xi(x)/q$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= e^{-i\xi(x)} \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta(x)) e^{i\xi(x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta(x)). \end{aligned}$$

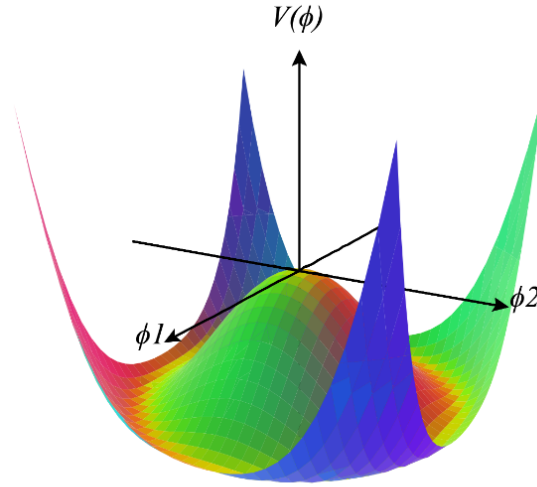


Figura 2.1: Gráfica del potencial del sombrero mexicano

Tras la transformación de norma, se define el campo $\mathcal{A}_\mu(x)$, de manera que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\mu(x) &= A_\mu(x) + \frac{1}{q} \partial_\mu \xi(x) , \\ \mathcal{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu(x) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu(x) .\end{aligned}$$

A esta elección de norma se la llama “la norma unitaria”. Sustituyendo $\phi'(x)$, $\mathcal{A}_\mu(x)$ y $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ en 2.4, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu \phi'^{\dagger}(x) \partial^\mu \phi'(x) + iq \partial_\mu \phi'^{\dagger}(x) \mathcal{A}^\mu(x) \phi'(x) - iq \mathcal{A}_\mu(x) \phi'^{\dagger}(x) \partial^\mu \phi'(x) + \\ &\quad + q^2 \mathcal{A}_\mu(x) \mathcal{A}^\mu(x) \phi'^{\dagger}(x) \phi'(x) - \mu^2 \phi'^{\dagger}(x) \phi'(x) - \lambda (\phi'^{\dagger}(x) \phi'(x))^2 - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu \phi'^{\dagger}(x) \partial^\mu \phi'(x) + q^2 \mathcal{A}_\mu(x) \mathcal{A}^\mu(x) \phi'^{\dagger}(x) \phi'(x) - \mu^2 \phi'^{\dagger}(x) \phi'(x) - \lambda (\phi'^{\dagger}(x) \phi'(x))^2 - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu (v + \eta(x)) \partial^\mu (v + \eta(x)) + q^2 \mathcal{A}_\mu(x) \mathcal{A}^\mu(x) \frac{1}{2} (v + \eta(x))^2 - \\ &\quad - \mu^2 \frac{1}{2} (v + \eta(x))^2 - \lambda \frac{1}{4} (v + \eta(x))^4 - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \eta(x) \partial^\mu \eta(x) + \frac{q^2}{2} (v^2 + 2v\eta(x) + \eta^2(x)) \mathcal{A}_\mu(x) \mathcal{A}^\mu(x) - \\ &\quad - \frac{\mu^2}{2} (v^2 + 2v\eta(x) + \eta^2(x)) - \frac{\lambda}{4} (v^4 + \eta^4(x) + 6v^2\eta^2(x) + 4v^3\eta(x) + 4v\eta^3(x)) - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} .\end{aligned}$$

Si escribimos sólo los términos cuadráticos en campos (pues son los que nos interesan para obtener términos de masa), se obtiene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta(x) \partial^\mu \eta(x) + \frac{q^2 v^2}{2} \mathcal{A}_\mu(x) \mathcal{A}^\mu(x) - \left(\frac{\mu^2}{2} + \frac{3}{2} \lambda v^2 \right) \eta^2(x) + \dots ,$$

y recordando que $v^2 = -\mu^2/\lambda$, simplificamos el coeficiente de $\eta^2(x)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta(x)\partial^\mu\eta(x) - \left(\frac{\mu^2}{2} - \frac{3}{2}\mu^2\right)\eta^2(x) + \frac{q^2v^2}{2}\mathcal{A}_\mu(x)\mathcal{A}^\mu(x) + \dots \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta(x)\partial^\mu\eta(x) + \mu^2\eta^2(x) + \frac{q^2v^2}{2}\mathcal{A}_\mu(x)\mathcal{A}^\mu(x) + \dots \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta(x)\partial^\mu\eta(x) - \frac{1}{2}(-2\mu^2)\eta^2(x) + \frac{q^2v^2}{2}\mathcal{A}_\mu(x)\mathcal{A}^\mu(x) + \dots\end{aligned}$$

Se identifica al campo $\eta(x)$ como el bosón de Higgs h

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h - \frac{1}{2}(-2\mu^2)h^2(x) + \frac{q^2v^2}{2}\mathcal{A}_\mu(x)\mathcal{A}^\mu(x) + \dots, \quad (2.5)$$

y es sencillo notar de la ecuación 2.5 que tenemos un término de masa para el bosón de Higgs, y dicha masa es $m_h = \sqrt{-2\mu^2}$. Además el bosón de Goldstone $\xi(x)$ ya no aparece, ya que fue absorbido por el bosón $\mathcal{A}_\mu(x)$, como se había mencionado cuando se explicó el mecanismo de Higgs.

En el SM electrodébil, el rompimiento espontáneo de la simetría que nos interesa es el de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{EM}}$. Debido a las representaciones que puede tomar $SU(2)_L$, que forma parte de nuestra simetría inicial, podemos deducir que en este caso, el mecanismo de Higgs se aplica en el modo no abeliano. A partir de ahora, por simplicidad en la notación, se omite escribir la dependencia en x de los campos ($\phi(x)$, $A_\mu(x)$, etc.), simplemente se mantendrá en mente que los campos dependen de las coordenadas. La lagrangiana del sector escalar es muy similar a la que se mostró en el caso abeliano, y es la siguiente:

$$\mathcal{L}_h = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2,$$

con $V(\phi) = \mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$. La diferencia es la estructura de cada elemento que compone esta lagrangiana. Ahora el campo escalar ϕ es un doblete de $SU(2)_L$ con hipercarga $C_\phi = \frac{1}{2}$.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix},$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son campos complejos

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{1,1} + i\phi_{1,2}), \\ \phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{2,1} + i\phi_{2,2}).\end{aligned}$$

Además la derivada covariante tiene una estructura de matriz 2×2 . Su forma específica se obtiene del estudio de las teorías de Yang-Mills, y se define como

$$D_\mu = \partial_\mu \mathbb{1}_2 - igW_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} - ig' B_\mu Y_\phi, \quad (2.6)$$

donde W_μ^j son las conexiones de $SU(2)_L$, B_μ es la conexión de $U(1)_Y$, $\mathbb{1}_2$ es la matriz identidad de dimensión 2×2 , $Y_\phi \equiv C_\phi \mathbb{1}_2$ es la matriz de hipercarga, y g, g' son las constantes de acoplamiento de $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$, respectivamente.

Al igual que antes, requerimos obtener los mínimos de $V(\phi)$ para implementar el RES, pero comenzaremos escribiendo el potencial de una manera más sencilla. Nos fijamos en el producto

$\phi^\dagger\phi$:

$$\begin{aligned}\phi^\dagger\phi &= (\phi_1^* \ \phi_2^*) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \phi_1^*\phi_1 + \phi_2^*\phi_2 \\ &= |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = \frac{1}{2}(\phi_{1,1}^2 + \phi_{1,2}^2 + \phi_{2,1}^2 + \phi_{2,2}^2) \\ &= \frac{1}{2}\phi_{\ell,a}\phi_{\ell,a} \ ,\end{aligned}$$

con lo cual, el potencial queda expresado como

$$\begin{aligned}V(\phi) &= \frac{\mu^2}{2}\phi_{\ell,a}\phi_{\ell,a} + \frac{\lambda}{4}(\phi_{\ell,a}\phi_{\ell,a})^2, \\ \implies \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_{j,b}} &= \mu^2\phi_{j,b} + \lambda\phi_{j,b}(\phi_{\ell,a}\phi_{\ell,a}) \\ &= \phi_{j,b}(\mu^2 + 2\lambda\phi^\dagger\phi) \ , \\ \implies \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_{j,b}} \Big|_{\phi_0} &= \phi_{0j,b}(\mu^2 + 2\lambda|\phi_0|^2) = 0 \ .\end{aligned}$$

La solución no trivial nos lleva a

$$|\phi_0|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2} \ ,$$

lo cual geoméricamente representa la superficie de una hiperesfera de radio $v/\sqrt{2}$. Podemos considerar una elección simple de las componentes de ϕ , que cumplan la ecuación 2.7:

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

Al desarrollar ϕ alrededor de ϕ_0 , obtenemos

$$\phi = \phi_0 + (\phi - \phi_0) = \phi_0 + \xi \ ,$$

con $\xi = \phi - \phi_0$, y definido como

$$\xi \equiv \begin{pmatrix} G_W^\dagger \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(h + iG_Z) \end{pmatrix} .$$

En el campo ξ , G_W es complejo y h y G_Z son reales. G_W y G_Z son los pseudo bosones de Goldstone que serán absorbidos por los campos de materia W y Z . Podríamos proseguir considerando al campo ξ como se definió en un principio, sin embargo también podemos tomar una norma conveniente en el sentido de que aporte simplicidad en los siguientes cálculos, para lo cual, se tomará la norma unitaria, en la cual ξ es de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\xi &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}h \end{pmatrix} , \\ \implies \phi &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h) \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Se procede a implementar este campo escalar en la lagrangiana. Se realiza por partes. Primero observe el producto $\phi^\dagger\phi$:

$$\phi^\dagger\phi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$= \frac{1}{2}(v + h)^2 = \frac{1}{2}(v^2 + 2vh + h^2) \ . \tag{2.8}$$

Ahora calculamos $(\phi^\dagger\phi)^2$:

$$(\phi^\dagger\phi)^2 = \frac{1}{4}(v^4 + h^4 + 4vh^3 + 6v^2h^2 + 4v^3h). \quad (2.9)$$

Sustituimos las ecuaciones 2.8 y 2.9 en $V(\phi)$:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{\mu^2}{2}(v^2 + 2vh + h^2) + \frac{\lambda}{4}(v^4 + h^4 + 4vh^3 + 6v^2h^2 + 4v^3h) \\ &= \left(\frac{\mu^2}{2} + \frac{3}{2}\lambda v^2\right)h^2 + (\mu^2v + \lambda v^3)h + \lambda vh^3 + \frac{\lambda}{4}h^4 + \frac{\mu^2}{2}v^2 + \frac{\lambda}{4}v^4 \\ &= \left(\frac{\mu^2}{2} - \frac{3}{2}\mu^2\right)h^2 + (\mu^2v - \mu^2v)h - \frac{\mu^2}{v}h^3 - \frac{\mu^2}{4v^2}h^4 + \left(\frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^2}{4}\right)v^2, \\ V(\phi) &= -\mu^2h^2 - \frac{\mu^2}{v}h^3 - \frac{\mu^2}{4v^2}h^4 + \frac{\mu^2v^2}{4}. \end{aligned}$$

Ya se tiene el potencial, ahora faltan los términos que involucran la derivada covariante del campo escalar. Para esos términos, primero nos fijamos en la ecuación 2.6; en específico en el término con las conexiones de $SU(2)_L$

$$\begin{aligned} W_\mu^1 \frac{\sigma^1}{2} + W_\mu^2 \frac{\sigma^2}{2} &= \frac{1}{2}W_\mu^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}W_\mu^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(W_\mu^1 + iW_\mu^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora definimos las matrices $\sigma^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\sigma^- \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; y los campos $W_\mu^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2)$ y $W_\mu^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2)$. Note que $W_\mu^- = W_\mu^{+\dagger}$. Empleamos estas nuevas definiciones en el cálculo y se obtiene

$$W_\mu^1 \frac{\sigma^1}{2} + W_\mu^2 \frac{\sigma^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \sigma^+ + \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^- \sigma^-. \quad (2.10)$$

Sustituimos el resultado de la ecuación 2.10 en 2.6, y aplicamos la derivada covariante a ϕ

$$\begin{aligned} D_\mu\phi &= \left(\partial_\mu \mathbb{1}_2 - \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \sigma^+ - \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^- \sigma^- - igW_\mu^3 \frac{\sigma^3}{2} - ig'B_\mu Y_\phi\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \end{pmatrix} \\ &= \partial_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \end{pmatrix} - \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \end{pmatrix} - \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \end{pmatrix} - \\ &\quad - igW_\mu^3 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \end{pmatrix} - ig'B_\mu \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \end{pmatrix}, \\ D_\mu\phi &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu h \end{pmatrix} - \frac{ig}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(igW_\mu^3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \end{pmatrix} - ig'B_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{ig(v+h)}{2}W_\mu^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i(v+h)}{2\sqrt{2}}(gW_\mu^3 - g'B_\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calculamos el adjunto hermitiano

$$(D_\mu \phi)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu h \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{ig(v+h)}{2} W_\mu^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i(v+h)}{2\sqrt{2}} (gW_\mu^3 - g'B_\mu) \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora podemos calcular el producto $(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi)$

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu h \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{ig(v+h)}{2} W_\mu^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i(v+h)}{2\sqrt{2}} (gW_\mu^3 - g'B_\mu) \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \times \\ &\times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{ig(v+h)}{2} W^{+\mu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i(v+h)}{2\sqrt{2}} (gW^{3\mu} - g'B^\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \partial_\mu h \frac{i(v+h)}{4} (gW^{3\mu} - g'B^\mu) + \frac{g^2(v+h)^2}{4} W_\mu^- W^{+\mu} - \\ &- \partial^\mu h \frac{i(v+h)}{4} (gW_\mu^3 - g'B_\mu) + \frac{(v+h)^2}{8} (gW_\mu^3 - g'B_\mu) (gW^{3\mu} - g'B^\mu), \end{aligned}$$

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g^2(v+h)^2}{4} W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{(v+h)^2}{8} (g^2 W_\mu^3 W^{3\mu} - 2gg' W_\mu^3 B^\mu + g'^2 B_\mu B^\mu). \quad (2.11)$$

Nos fijamos en el término que involucra a los campos W_μ^3 y B_μ

$$g^2 W_\mu^3 W^{3\mu} - 2gg' W_\mu^3 B^\mu + g'^2 B_\mu B^\mu = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Sería deseable que no aparecieran términos cruzados de campos, por lo que se procede a diagonalizar la matriz $\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}$. Comenzamos hallando los eigen valores y eigen vectores:

$$\begin{aligned} \det \left\{ \begin{pmatrix} g^2 - \lambda & -gg' \\ -gg' & g'^2 - \lambda \end{pmatrix} \right\} &= 0, \\ \implies \lambda^2 - \lambda(g^2 + g'^2) &= 0 \implies \lambda_1 = g^2 + g'^2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Eigen vector para λ_1

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= (g^2 + g'^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ g^2 x_1 - gg' x_2 &= (g^2 + g'^2) x_1, \\ -gg' x_1 + g'^2 x_2 &= (g^2 + g'^2) x_2, \\ \implies x_2 &= -\frac{g'}{g} x_1 \implies x = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{g'}{g} x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Normalizando el eigen vector, se obtiene

$$x = \begin{pmatrix} \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\ -\frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \end{pmatrix}.$$

Para el eigen vector correspondiente a λ_2

$$\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} g^2 y_1 - gg' y_2 &= 0, \\ -gg' y_1 + g'^2 y_2 &= 0, \\ \implies y_2 &= \frac{g}{g'} y_1 \implies y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{g}{g'} y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Normalizando este eigen vector, se obtiene

$$y = \begin{pmatrix} \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\ \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \end{pmatrix}.$$

Por lo cual, nuestra matriz de diagonalización es

$$\begin{pmatrix} \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} & \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\ -\frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} & \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \end{pmatrix}.$$

La cual es fácil darse cuenta que es una matriz ortogonal, por lo que la podemos relacionar con una matriz de rotación en 2 dimensiones:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix},$$

donde θ_W es el ángulo de mezcla débil, o ángulo de Weinberg, como se le conoce popularmente. Entonces definimos

$$\begin{aligned} s_W = \sin\theta_W &\equiv \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, & y & \quad c_W = \cos\theta_W \equiv \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \\ \implies \frac{s_W}{c_W} &= \frac{g'}{g} = \tan\theta_W. \end{aligned}$$

Ahora es posible diagonalizar la matriz en la ecuación 2.12, y queda como

$$\begin{aligned} (W_\mu^3 \quad B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} &= \\ = (W_\mu^3 \quad B_\mu) \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\ = \left(\begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Es evidente que en la ec. 2.13, la matriz de rotación provoca un cambio de base, que nos lleva de unos campos a otros $W_\mu^3, B_\mu \rightarrow Z_\mu, A_\mu$, que corresponden al bosón Z y al fotón. Por lo que la transformación de W_μ^3 y B_μ queda como

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix},$$

y así, retomando 2.13, se obtiene

$$(W_\mu^3 \quad B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$= (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu. \quad (2.15)$$

Finalmente, sustituimos la ecuación 2.15 en 2.11, lo que da como resultado

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g^2 (v+h)^2}{4} W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{(v+h)^2}{8} (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu.$$

En este punto ya se tienen todos los cálculos necesarios para obtener la lagrangiana tras el RES, la cual corresponde al sector de Higgs del SM:

$$\mathcal{L}_h = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g^2 (v+h)^2}{4} W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{(v+h)^2}{8} (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu + \mu^2 h^2 + \frac{\mu^2}{v} h^3 + \frac{\mu^2}{4v^2} h^4 - \frac{\mu^2 v^2}{4}. \quad (2.16)$$

Podemos darnos cuenta de la ecuación 2.16 que hay varios términos de masa. La masa del bosón de Higgs es la misma que la que se halló en el caso abeliano (pues no es un distinto tipo de bosón de Higgs), y también los campos de norma W_μ^\pm y Z_μ se hicieron masivos, lo cual corresponde con la cantidad de generadores rotos de $SU(2)_2 \otimes U(1)_Y$, y el hecho de que los campos adquieren masa mediante el mecanismo de Higgs. Sólomente el fotón no adquirió masa, como era de esperarse. Reescribiendo la lagrangiana del sector de Higgs en términos de las masas, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{m_h^2}{2} h^2 + m_W^2 \left(1 + \frac{gh}{2m_W} \right)^2 W_\mu^- W^{+\mu} + \\ + \frac{m_Z^2}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2m_Z} h \right)^2 Z_\mu Z^\mu - \frac{m_h^2}{2v} h^3 - \frac{m_h^2}{8v^2} h^4 + \frac{m_h^2 v^2}{8}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sabemos de la teoría de campos relativistas que los productos de campos en una lagrangiana representan vértices en un diagrama de Feynman. Cuando una partícula aparece en un término lagrangiano a orden mayor que 1, se dice que está teniendo una autointeracción. El caso de la autointeracción del bosón de Higgs ha sido muy interesante durante años. En buena medida debido a que como el mecanismo de Higgs le da masa a todas las partículas con las que interactúa, también se da masa a sí mismo. Más aún, los acoplamientos del Higgs son importantes porque conforman el potencial escalar después del rompimiento espontáneo de la simetría; en este punto ya se debería tener una idea de la gran importancia que tiene el potencial escalar en la teoría; en el sector de Higgs dota de masa a los bosones y en el sector de Yukawa dota de masa a los fermiones. Reiterando la importancia del potencial escalar, es necesario conocer todos los acoplamientos del bosón de Higgs en el sector de Higgs, para poder reconstruir $V(\phi)$ y comprobar si la partícula de tipo Higgs descubierta en el LHC es la que propuso Higgs, Englert y Brout. Como mencionamos antes, el acoplamiento hh es el que más contribuye al potencial escalar, pero a pesar de que hay muchos estudios sobre él, en los últimos años las mediciones de este acoplamiento no han dado señales de nueva Física. El acoplamiento que le sigue en importancia es hhh , que se observa en la figura 2.2. Además de que el triple acoplamiento tiene posibilidades de encontrar nueva Física cuando sea medido en los futuros aceleradores, resulta que hay similitudes significativas en algunos aspectos que tendrían cierta conexión en la producción de hh y hhh , además ambos acoplamientos son sensibles a modelos BSM similares, en particular en extensiones del modelo escalar [14].

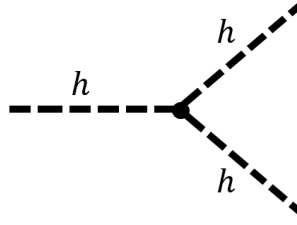


Figura 2.2: Triple acoplamiento del bosón de Higgs

2.3. Quiralidad y campos de Majorana

2.3.1. Matriz de quiralidad γ_5 y matrices de proyección quiral

Se comentó en la sección anterior que los elementos de $SU(2)$ que se emplean en la lagrangiana del SM son dobletes con quiralidad izquierda e hipercarga. Si bien, no se recurre también al uso de dobletes con quiralidad derecha, si aparecen espinores como singletes derechos. Los campos izquierdos y derechos se pueden encontrar en el sector de Yukawa y en el sector de corrientes, ambos de gran importancia, por lo que es necesario indagar en la quiralidad de los campos, los operadores que nos permiten introducir la quiralidad en la teoría y las propiedades de estos operadores y de los campos quirales. Este tema y otros relacionados están muy estudiados y reportados en la literatura, por lo que sobran fuentes de consulta, sin embargo se optó por basarse en el libro de Giunti y Kim [15], debido al enfoque de su obra en los neutrinos, que es tema central de este trabajo. Para comenzar, nos ubicamos en el contexto de la teoría de Dirac; en donde se introducen las matrices gamma de Dirac γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), estando definidas por su álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_4 .$$

A partir de ellas se define la matriz γ_5

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 , \quad (2.18)$$

La matriz γ_5 tiene propiedades importantes, algunas de las cuales son

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5 , \quad (2.19)$$

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 , \quad (2.20)$$

$$(\gamma_5)^2 = \mathbb{1}_4 . \quad (2.21)$$

Las propiedades anteriores se pueden probar con la definición 2.18 y con el álgebra de Clifford de las matrices gamma. Es conveniente definir las matrices de proyección quiral izquierda y derecha:

$$P_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 - \gamma_5) , \quad y \quad P_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 + \gamma_5) .$$

Algunas propiedades de las matrices de proyección quiral son

$$(P_L)^2 = P_L , \quad (2.22)$$

$$(P_R)^2 = P_R , \quad (2.23)$$

$$P_L P_R = P_R P_L = 0 , \quad (2.24)$$

$$P_L + P_R = \mathbb{1}_4 . \quad (2.25)$$

Podemos darnos cuenta de que

$$\begin{aligned}\gamma_5 P_L \psi &= \gamma_5 \left(\frac{1}{2} (\mathbb{1}_4 - \gamma_5) \right) \psi \\ &= \frac{1}{2} (\gamma_5 - \mathbb{1}_4) \psi \\ &= -P_L \psi ,\end{aligned}$$

lo cual nos indica que $P_L \psi$ es un eigen espinor de γ_5 , al cual se le llama $\psi_L \equiv P_L \psi$, cuyo correspondiente eigen valor es -1 . Aplicando el mismo procedimiento se encuentra que $\gamma_5 P_R \psi = P_R \psi$, por lo que $\psi_R \equiv P_R \psi$ es otro eigen espinor de γ_5 , cuyo eigen valor es $+1$. A ψ_L y ψ_R se les llama espinores izquierdo y derecho, respectivamente. También es de interés ver cómo actúan las matrices de proyección quiral sobre las matrices gamma de Dirac:

$$\begin{aligned}P_L \gamma^\mu &= \frac{1}{2} (\mathbb{1}_4 - \gamma_5) \gamma^\mu = \frac{1}{2} (\gamma^\mu - \gamma_5 \gamma^\mu) \\ &= \frac{1}{2} (\gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma_5) = \gamma^\mu \frac{1}{2} (\mathbb{1}_4 + \gamma_5) , \\ \therefore P_L \gamma^\mu &= \gamma^\mu P_R .\end{aligned}\tag{2.26}$$

Ahora veamos el mismo caso pero para la matriz de proyección quiral derecha

$$\begin{aligned}P_R \gamma^\mu &= \frac{1}{2} (\mathbb{1}_4 + \gamma_5) \gamma^\mu = \frac{1}{2} (\gamma^\mu + \gamma_5 \gamma^\mu) \\ &= \frac{1}{2} (\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_5) = \gamma^\mu \frac{1}{2} (\mathbb{1}_4 - \gamma_5) , \\ \therefore P_R \gamma^\mu &= \gamma^\mu P_L .\end{aligned}\tag{2.27}$$

2.3.2. Conjugación de carga

Para comenzar a discutir sobre los campos de Majorana, es necesario hablar de una transformación conocida como la conjugación de carga:

$$\psi \longrightarrow \psi^C = \xi C \bar{\psi}^T ,$$

donde ξ es una fase y C es la matriz de conjugación de carga, la cual cumple que

$$C^\dagger = C^{-1} ,\tag{2.28}$$

$$C(\gamma^\mu)^T C^\dagger = -\gamma^\mu ,\tag{2.29}$$

$$C^T = -C .\tag{2.30}$$

De las propiedades anteriores se halla que

$$C^\dagger \gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T ,\tag{2.31}$$

$$C^\dagger \gamma_5 C = \gamma_5^T .\tag{2.32}$$

La noción de la conjugación de carga viene de considerar una base para los espinores de Dirac en el marco de reposo, dada por

$$u \uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad u \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad v \uparrow = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad v \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

y note que si definimos la transformación $(u \uparrow)^C \equiv -i\gamma^2(u \uparrow)^*$, entonces

$$-i\gamma^2(u \uparrow)^* = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = v \downarrow ,$$

$$\implies (u \uparrow)^C = v \downarrow ,$$

Conjugando la carga de los demás espinores se encuentra que

$$(u \downarrow)^C = v \uparrow , \quad (v \uparrow)^C = u \downarrow , \quad (v \downarrow)^C = u \uparrow .$$

Lo que quieren decir estos resultados es que la conjugación de carga transforma una partícula en su antipartícula e invierte su espín. Efectivamente podemos ver que en la representación de Dirac, el producto $-i\gamma^2\psi^*$ se escribe como

$$\begin{aligned} -i\gamma^2\psi^* &= -i\gamma^2\gamma^0\gamma^0\psi^* = -i\gamma^2\gamma^0((\gamma^0)^*\psi^*)^{TT} \\ &= -i\gamma^2\gamma^0(\psi^\dagger\gamma^0)^T \\ &= -i\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^T . \end{aligned}$$

De forma que $-i\gamma^2\gamma^0$ es la matriz de conjugación de carga, y en efecto es fácil comprobar que en la representación de Dirac cumple las propiedades 2.28, 2.29 y 2.30. La matriz C en la representación de Weyl tiene la misma forma que en la de Dirac, y de manera general, para una representación arbitraria, la matriz C simplemente debe cumplir las propiedades 2.28, 2.29 y 2.30, pues ellas definen totalmente a C .

2.3.3. Condición de Majorana

De la propiedad 2.25 resulta evidente que un espinor puede escribirse como la suma de su parte izquierda más su parte derecha.

$$\psi = \mathbb{1}_4\psi = (P_L + P_R)\psi ,$$

$$\psi = \psi_L + \psi_R . \tag{2.33}$$

La ecuación 2.33 aunque es sencilla, tiene consecuencias muy importantes, pues como recalca Giunti en [15], los espinores quirales son la representación irreducible más pequeña del grupo de Lorentz, por lo que a partir de ellos se pueden construir todas las demás representaciones. Si utilizamos la forma quiral de un espinor en la ecuación de Dirac, se obtiene

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m\mathbb{1}_4)\psi &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m\mathbb{1}_4)(\psi_L + \psi_R) = 0 , \\ i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L - m\psi_L + i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R - m\psi_R &= 0 . \end{aligned}$$

Si multiplicamos por P_L , se obtiene

$$iP_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L - mP_L\psi_L + iP_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R - mP_L\psi_R = 0 ,$$

y empleando las ecuaciones 2.26 y 2.24, resulta que

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R = m\psi_L . \tag{2.34}$$

De la misma manera, si se hubiese multiplicado por P_R se obtiene

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R, \quad (2.35)$$

De modo que se tienen dos ecuaciones diferenciales acopladas. Si los espinores son partículas de masa 0, entonces las ecuaciones se desacoplan, y se obtienen las ecuaciones de Weyl, las cuales nos indican que la ecuación de Dirac de una partícula sin masa sólo requiere de un campo quiral para caracterizarla, ya sea izquierdo o derecho. Cada campo quiral tiene sólo dos componentes independientes, por lo que podríamos pensar que para partículas masivas (ecuaciones 2.34 y 2.35), se requerirían 4 componentes para describir fermiones masivos, sin embargo Ettore Majorana descubrió que bastaría con 2 componentes al asumir que ψ_L y ψ_R están relacionados; lo cual podríamos sospechar al observar que las ecuaciones 2.34 y 2.35 tienen la misma forma. Se encontró que al proponer que $\psi_R = \xi C \bar{\psi}_L^T$, las ecuaciones 2.34 y 2.35 son exactamente la misma. Veamos como ocurre. Se toma el adjunto de Dirac de la ec. 2.34

$$-i\partial_\mu \bar{\psi}_R \gamma^\mu = m\bar{\psi}_L.$$

Se saca la transpuesta de la ecuación resultante y se multiplica el por C por la izquierda

$$-iC\gamma^{\mu T} \partial_\mu \bar{\psi}_R^T = mC\bar{\psi}_L^T.$$

Se procede a utilizar la propiedad de unitariedad de C , para multiplicar por la identidad

$$-iC\gamma^{\mu T} C^\dagger C \partial_\mu \bar{\psi}_R^T = mC\bar{\psi}_L^T,$$

y se emplea la propiedad 2.29

$$-i\gamma^\mu \partial_\mu C\bar{\psi}_R^T = mC\bar{\psi}_L^T. \quad (2.36)$$

Ahora se calcula $C\bar{\psi}_R^T$ a partir de la propuesta $\psi_R = \xi C \bar{\psi}_L^T$:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_R &= \left(\xi C \bar{\psi}_L^T \right)^\dagger \gamma^0 = \xi^* \bar{\psi}_L^* C^\dagger \gamma^0 = \xi^* \psi_L^T \gamma^{0*} C^\dagger \gamma^0, \\ \implies \bar{\psi}_R^T &= \xi^* (\gamma^0)^T C^* (\gamma^0)^\dagger \psi_L = \xi^* (\gamma^0)^T (-C^\dagger) \gamma^0 \psi_L = -\xi^* (\gamma^0)^T C^\dagger \gamma^0 \psi_L, \\ \implies C\bar{\psi}_R^T &= -\xi^* C (\gamma^0)^T C^\dagger \gamma^0 \psi_L = \xi^* \gamma^0 \gamma^0 \psi_L = \xi^* \psi_L. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Al sustituir 2.37 en la ecuación 2.36, y multiplicar por ξ , considerando que $\xi\xi^* = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} -i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L &= m\xi C\bar{\psi}_R^T \\ &= m\psi_R. \end{aligned}$$

Lo que se acaba de probar es que de la ecuación 2.34 se llega a la 2.35, al considerar que los campos quirales están relacionados mediante la ec. $\psi_R = \xi C \bar{\psi}_L^T$, lo que implica que las ecuaciones son equivalentes.

Volviendo a la ecuación 2.33, la reescribimos como

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_L + \xi C \bar{\psi}_L^T, \\ \implies \xi C \bar{\psi}^T &= \xi C \bar{\psi}_L^T + \xi C \xi^* ((C \bar{\psi}_L^T)^\dagger \gamma^0)^T \\ &= \xi C \bar{\psi}_L^T + C (\bar{\psi}_L^* C^\dagger \gamma^0)^T \\ &= \xi C \bar{\psi}_L^T + C (\gamma^0)^T C^* \bar{\psi}_L^\dagger \\ &= \xi C \bar{\psi}_L^T - C (\gamma^0)^T C^\dagger \gamma^{0\dagger} \psi_L \\ &= \xi C \bar{\psi}_L^T + \gamma^0 \gamma^0 \psi_L, \end{aligned}$$

$$= \xi C \overline{\psi_L}^T + \psi_L = \psi , \quad (2.38)$$

$$\therefore \psi^C = \psi . \quad (2.39)$$

La ecuación 2.39 es la condición de Majorana. Aquellos campos que la cumplen, se dice que son campos de Majorana, y físicamente lo que esto quiere decir es que la antipartícula de una partícula de Majorana es ella misma.

2.3.4. Términos de masa y lagrangiana de Majorana

En la extensión mínima del SM, se consideran neutrinos derechos como singletes derechos de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, de manera que los campos neutrinos se pueden escribir como

$$\nu = \nu_L + \nu_R ,$$

de forma que la lagrangiana de Dirac para algún espinor se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1}_4)\psi \\ &= (\overline{\psi_L} + \overline{\psi_R})(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1}_4)(\psi_L + \psi_R) \\ &= i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m(\overline{\psi_L} + \overline{\psi_R})(\psi_L + \psi_R) \\ &= i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m(\overline{\psi_L}\psi_L + \overline{\psi_L}\psi_R + \overline{\psi_R}\psi_L + \overline{\psi_R}\psi_R) \\ &= i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m((P_L\psi)^\dagger \gamma^0 \psi_L + (P_L\psi)^\dagger \gamma^0 \psi_R + (P_R\psi)^\dagger \gamma^0 \psi_L + (P_R\psi)^\dagger \gamma^0 \psi_R) \\ &= i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m(\psi^\dagger P_L \gamma^0 \psi_L + \psi^\dagger P_L \gamma^0 \psi_R + \psi^\dagger P_R \gamma^0 \psi_L + \psi^\dagger P_R \gamma^0 \psi_R) . \end{aligned}$$

Recordando el resultado $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$, tenemos:

$$\mathcal{L}_D = i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m(\psi^\dagger \gamma^0 P_R \psi_L + \psi^\dagger \gamma^0 P_R \psi_R + \psi^\dagger \gamma^0 P_L \psi_L + \psi^\dagger \gamma^0 P_L \psi_R) ,$$

y debido a $P_L P_R = P_R P_L = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m(\psi^\dagger \gamma^0 P_R \psi_R + \psi^\dagger \gamma^0 P_L \psi_L) \\ &= i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m(\psi^\dagger P_L \gamma^0 \psi_R + \psi^\dagger P_R \gamma^0 \psi_L) \\ &= i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m(\overline{\psi_L}\psi_R + \overline{\psi_R}\psi_L) . \end{aligned}$$

De manera que el término de masa de Dirac, es

$$\mathcal{L}_{\text{masa}}^D = -m(\overline{\psi_R}\psi_L + \overline{\psi_L}\psi_R) . \quad (2.40)$$

Si consideramos que el espinor en cuestión es un campo neutrino, entonces

$$\mathcal{L}_{\text{masa}}^D = -m_\nu(\overline{\nu_L}\nu_R + \overline{\nu_R}\nu_L) . \quad (2.41)$$

Al tener un término de masa para los campos de Dirac, se puede promover a hallar un término de masa empleando campos de Majorana. Entonces si ψ_L es un campo de Majorana, lo que se requiere es hallar un campo quiral derecho que bajo transformaciones de Lorentz se transforme igual que ψ_L . Al fijarnos en la ecuación 2.38 y considerar la fase $\xi = 1$, resulta evidente que $C \overline{\psi_L}^T = \psi_L^C$ es un campo quiral derecho, el cuál también cumple la condición de transformarse como lo hace ψ_L , por lo cual el término de masa de Majorana es

$$\mathcal{L}_{\text{masa}}^M = -\frac{1}{2}m \left(\overline{\psi_L^C} \psi_L + \overline{\psi_L} \psi_L^C \right) .$$

De forma que la lagrangiana de Majorana completa se define como

$$\mathcal{L}^M = \frac{1}{2} \left[\overline{\psi}_L i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_L + \overline{\psi}_L^C i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_L^C - m \left(\overline{\psi}_L^C \psi_L + \overline{\psi}_L \psi_L^C \right) \right],$$

donde $\overleftrightarrow{\partial}_\mu \equiv \frac{\overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu}{2}$. En particular, si el espinor es un campo neutrino, se tiene que

$$\mathcal{L}_{\text{masa}}^M = -\frac{1}{2} m_\nu \left(\overline{\nu}_L^C \nu_L + \overline{\nu}_L \nu_L^C \right), \quad (2.42)$$

$$\mathcal{L}^M = \frac{1}{2} \left[\overline{\nu}_L i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \nu_L + \overline{\nu}_L^C i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \nu_L^C - m_\nu \left(\overline{\nu}_L^C \nu_L + \overline{\nu}_L \nu_L^C \right) \right]. \quad (2.43)$$

2.4. Masa de los neutrinos

Actualmente, el SM describe muy bien la mayoría de procesos entre partículas, sin embargo aún hay algunos fenómenos que su explicación queda fuera del alcance de esta teoría. Un claro ejemplo es la masa de los neutrinos. En el SM se considera que los neutrinos son partículas elementales neutras sin masa, y en un inicio las mediciones de experimentos parecían indicar que no eran partículas masivas. Sin embargo al observarse el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos [6, 7] quedó respaldado que los neutrinos deben de tener masa. Como se vio en la sección 2.1, el mecanismo de generación de masas que se emplea en el SM (y el más conocido), es el mecanismo de Higgs. En las teorías donde los fermiones adquieren su masa mediante el mecanismo de Higgs, es necesario implementar tales campos fermiones tanto con quiralidad izquierda como derecha, lo cual coincide con que se han medido dichas partículas en ambas quiralidades. Uno de los impedimentos para dotar de masa a los neutrinos mediante el mecanismo de Higgs es que sólo se han encontrado neutrinos con quiralidad izquierda; nunca derecha, por lo cual en el SM no se considera que hayan neutrinos derechos. Incluso si suponemos que existen neutrinos con quiralidad derecha, aún se tendría el problema de que para que las masas sean del orden de las cotas que se ha encontrado en experimentos, se necesitan introducir constantes de Yukawa con valores asignados ad hoc, por lo que no parece natural que esta sea la forma de generar las masas de los neutrinos. Consecuentemente se han propuesto mecanismos alternativos enfocados especialmente en generar términos de masa para neutrinos. Uno de los más conocidos es el mecanismo de Seesaw [8, 9], el cual parte de considerar la presencia de neutrinos con quiralidad derecha, además de una escala de energía más elevada que la considerada en el SM, y tras dos rompimientos espontáneos de simetría, genera los términos de masa de los neutrinos. Por la forma en que está construido este mecanismo, naturalmente surgen nuevos fermiones neutros (en el SM no se tenían) a los que se les suele llamar neutrinos pesados, los cuales sus masas están relacionadas con las masas de los neutrinos convencionales (neutrinos ligeros). La masa de los neutrinos ligeros es aproximadamente $m_\nu \sim \frac{v^2}{\Lambda}$, donde v es el valor de expectación del vacío, el cual es de aproximadamente 246GeV, por lo que la escala de energía Λ tendría que ser demasiado alta, para que $m_\nu \sim 0,8\text{eV}$, acotada superiormente, según mediciones relativamente recientes [16]. El problema recae en que las masas de los neutrinos pesados son directamente proporcionales a la escala de energía Λ . Lo cual les daría una masa del orden de $m_N \sim 10^{13}\text{GeV}$, lo cual es una escala de energía inviable de alcanzar en los experimentos de colisiones de partículas, además de que no parece natural la diferencia tan grande de masas de dos tipos de partículas para las cuales se emplea el mismo mecanismo para generar sus términos de masa, por lo que parece poco probable que en verdad ocurra de esta forma. De cualquier manera lo que parece innegable es que los neutrinos tienen masa, ya sea que sepamos explicar este hecho de forma teórica o no. Precisamente el tener masa les permite interactuar con el bosón de Higgs. Existen algunas variantes de mecanismo de Seesaw, que buscan suavizar estas diferencias colosales en las masas, y una de ellas es la que se abordará en la sección 2.6.

2.5. Fermiones en el Modelo Estándar

Es bastante necesario que antes de ir más lejos, hablemos de los fermiones en el SM, en especial en el sector de Yukawa, ya que las interacciones que ocurren ahí son de vital importancia para el acoplamiento que se va a estudiar. Esta sección se desarrolla basándose en las notas escritas por el asesor de este trabajo, el Dr. Héctor Novales Sánchez.

El conjunto de partículas fermónicas del SM está formado por leptones y quarks. Cada una de estas partículas está representada por un campo de Dirac, los cuales se introducen en el SM como campos quirales. Además los leptones y quarks se dividen en familias, donde cada una está formada por 2 campos fermiones, de modo que cada familia se introduce en el SM como un doblete de $SU(2)_L$ con hipercarga C_L . Las partículas con quiralidad derecha se introducen como singletes de $SU(2)_L$ con hipercarga C_R . Los dobletes izquierdos son

$$L_{\alpha,L} = \begin{pmatrix} \nu_{\alpha,L} \\ l_{\alpha,L} \end{pmatrix}, \quad Q_{\beta,L} = \begin{pmatrix} u_{\beta,L} \\ d_{\beta,L} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

donde los índices griegos son índices de sabor que toman los valores $\alpha = e, \mu, \tau$ y $\beta = u, c, t$. Las etiquetas de los quarks hacen referencia a los nombres de los quarks *up*, *charm* y *top*, que distinguen cada familia de quarks. Por otro lado, los singletes derechos son

$$l_{\alpha,R}, \quad u_{\beta,R}, \quad d_{\beta,R}, \quad (2.45)$$

donde los índices griegos toman los mismos valores que se indicaron en el caso de los dobletes. Como habrá notado, no se incluyen singletes derechos de campos neutrinos, debido a lo discutido en la sección 2.4.

Los dobletes izquierdos se transforman bajo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ como

$$L_{\alpha,L} \longrightarrow L'_{\alpha,L} = e^{i\frac{C_L^l}{2}\rho(x)}U(x)L_{\alpha,L}, \quad (2.46)$$

$$Q_{\beta,L} \longrightarrow Q'_{\beta,L} = e^{i\frac{C_L^q}{2}\rho(x)}U(x)Q_{\beta,L}, \quad (2.47)$$

y los singletes derechos son invariantes bajo $SU(2)_L$, por lo que su transformación bajo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ es

$$l_{\alpha,R} \longrightarrow l'_{\alpha,R} = e^{i\frac{C_R^l}{2}\rho(x)}l_{\alpha,R}, \quad (2.48)$$

$$u_{\beta,R} \longrightarrow u'_{\beta,R} = e^{i\frac{C_R^q}{2}\rho(x)}u_{\beta,R}, \quad (2.49)$$

$$d_{\beta,R} \longrightarrow d'_{\beta,R} = e^{i\frac{C_R^q}{2}\rho(x)}d_{\beta,R}. \quad (2.50)$$

Ya que hemos establecido las leyes de transformación de los fermiones, podemos estudiar los sectores fermiónicos del SM, los cuales son 2, el sector de las corrientes y el de Yukawa. Desarrollaremos sólo el sector de Yukawa, pues para este trabajo tiene mayor relevancia, al ser en ese sector donde se generan las masas de los fermiones; y debido a que no se trabaja con quarks en desarrollos posteriores, podemos enfocarnos sólo en los términos que involucran leptones. El sector de Yukawa para leptones está dado como

$$\mathcal{L}_Y^l = \sum_{\alpha,\alpha'} [-\mathcal{Y}_{\alpha\alpha'}^l \overline{L_{\alpha,L}} \phi_{\alpha',R} - \mathcal{Y}_{\alpha\alpha'}^{l*} \overline{l_{\alpha',R}} \phi_{\alpha,L}^\dagger], \quad (2.51)$$

donde $\mathcal{Y}_{\alpha\alpha'}^l$ son las constantes de Yukawa asociadas con los leptones. Las cuales, sus dos subíndices nos sugieren que estas constantes se pueden ordenar en una matriz 3×3 . Además ϕ es un doblete de $SU(2)_L$, con hipercarga C_ϕ . ϕ se transforma bajo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ como

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{i\frac{C_\phi}{2}\rho(x)}U(x)\phi, \quad (2.52)$$

donde $U(x)$ es la misma matriz de transformación de los dobletes izquierdos de fermiones. De forma que para que $\overline{L_{\alpha,L}}\phi l_{\alpha',R}$ sea invariante bajo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, se requiere que las hipercargas están relacionadas de la forma $C_\phi - C_L^l + C_R^l = 0$.

Al aplicar el rompimiento espontáneo de la simetría, se tiene que $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \end{pmatrix}$, de forma que la ec. 2.51 se reescribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y^l &= \sum_{\alpha,\alpha'} \left[-\mathcal{Y}_{\alpha\alpha'}^l (\overline{\nu_{\alpha,L}} \quad \overline{l_{\alpha,L}}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \end{pmatrix} l_{\alpha',R} - \mathcal{Y}_{\alpha\alpha'}^{l*} \overline{l_{\alpha',R}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\alpha,L} \\ l_{\alpha,L} \end{pmatrix} \right] \\ &= \sum_{\alpha,\alpha'} \left[-\mathcal{Y}_{\alpha\alpha'}^l \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \overline{l_{\alpha,L}} l_{\alpha',R} - \mathcal{Y}_{\alpha\alpha'}^{l*} \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \overline{l_{\alpha',R}} l_{\alpha,L} \right]. \end{aligned}$$

Al considerar que las sumas sobre los índices α, α' , se pueden representar como productos matriciales, se obtiene

$$\mathcal{L}_Y^l = -\frac{v}{\sqrt{2}} \overline{l_L} \mathcal{Y}^l l_R - \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{l_R} \mathcal{Y}^{l\dagger} l_L - \frac{h}{\sqrt{2}} \overline{l_L} \mathcal{Y}^l l_R - \frac{h}{\sqrt{2}} \overline{l_R} \mathcal{Y}^{l\dagger} l_L,$$

donde l_L y l_R se definen como

$$l_L = \begin{pmatrix} l_{e,L} \\ l_{\mu,L} \\ l_{\tau,L} \end{pmatrix}, \quad l_R = \begin{pmatrix} l_{e,R} \\ l_{\mu,R} \\ l_{\tau,R} \end{pmatrix}.$$

Si escribimos sólo los términos que nos dan términos de masa, se tiene

$$\mathcal{L}_Y^l = -\frac{v}{\sqrt{2}} \overline{l_L} \mathcal{Y}^l l_R - \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{l_R} \mathcal{Y}^{l\dagger} l_L + \dots \quad (2.53)$$

Debido a que la matriz de Yukawa para leptones (así como también las de quarks), es una matriz en general, nada nos dice que sea diagonal, y eso implica que en la ecuación 2.53 hay mezclas de leptones. Es necesaria una diagonalización, y se puede hallar que las matrices de Yukawa se pueden diagonalizar a través de transformaciones biunitarias [17], las cuales para los leptones están dadas por las matrices unitarias V_L^l y V_R^l , de manera que la diagonalización queda como

$$V_L^{l\dagger} \mathcal{Y}^l V_R^l = \mathcal{Y}_D^l,$$

donde la matriz \mathcal{Y}_D^l es diagonal, de dimensión 3×3 y con elementos de matriz reales positivos en la diagonal. Esta diagonalización implica una transformación de los tripletes de fermiones l_L y l_R , lo cual ocurre como sigue

$$\begin{aligned} l'_L &= V_L^{l\dagger} l_L, \quad y \quad l'_R = V_R^{l\dagger} l_R, \\ \implies l'_L &= \begin{pmatrix} l'_{e,L} \\ l'_{\mu,L} \\ l'_{\tau,L} \end{pmatrix}, \quad y \quad l'_R = \begin{pmatrix} l'_{e,R} \\ l'_{\mu,R} \\ l'_{\tau,R} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De manera que la ecuación 2.53 se escribe como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y^l &= -\frac{v}{\sqrt{2}}\overline{l'_L}\mathcal{Y}_D^l l'_R - \frac{v}{\sqrt{2}}\overline{l'_R}\mathcal{Y}_D^l l'_L + \dots \\ &= -\frac{v}{\sqrt{2}}\sum_{\alpha}(\mathcal{Y}_D^l)_{\alpha\alpha}\overline{l'_{\alpha,L}}l'_{\alpha,R} - \frac{v}{\sqrt{2}}\sum_{\alpha}(\mathcal{Y}_D^l)_{\alpha\alpha}\overline{l'_{\alpha,R}}l'_{\alpha,L} + \dots, \\ \implies \mathcal{L}_Y^l &= \sum_{\alpha}\left[-\frac{v}{\sqrt{2}}(\mathcal{Y}_D^l)_{\alpha\alpha}\left(\overline{l'_{\alpha,L}}l'_{\alpha,R} + \overline{l'_{\alpha,R}}l'_{\alpha,L}\right)\right] + \dots,\end{aligned}$$

de esta última ecuación, podemos darnos cuenta de que tenemos un término de masa de Dirac como el de la ecuación 2.40. De manera que la masa de los leptones está dada como

$$m_{\alpha} = \frac{v}{\sqrt{2}}(\mathcal{Y}_D^l)_{\alpha\alpha} \quad (2.54)$$

Se ha dotado de masa a todos los leptones del SM.

2.6. Modelo de Pilaftsis. Masas inducidas radiativamente

El modelo con el que se desarrolló el trabajo fue propuesto por Apostolos Pilaftsis [10]. En él, introduce neutrinos con quiralidad derecha, y después del RES, del sector de Yukawa se trabaja con los términos de masa de Dirac y de Majorana:

$$-\mathcal{L}_{\text{masa}}^{\nu} = \overline{\nu}_{Ri}^0(m_D^{\dagger})_{ij}\nu_{Lj}^0 + \overline{\nu}_{Li}^0(m_D)_{ij}\nu_{Rj}^0 + \frac{1}{2}\overline{\nu}^{0C}_{Ri}(m_M^{\dagger})_{ij}\nu_{Rj}^0 + \frac{1}{2}\overline{\nu}_{Ri}^0(m_M^{\dagger})_{ij}\nu_{Rj}^{0C}.$$

Las constantes $(m_D)_{ij}$ surgen tras aplicar el mecanismo de Higgs, y se relacionan con v . Las constantes $(m_M)_{ij}$ surgen del RES a una escala de energía mayor Λ y se relacionan con ella. $-\mathcal{L}_{\text{masa}}^{\nu}$ se puede reescribir en términos de los campos de Majorana:

$$-\mathcal{L}_{\text{masa}}^{\nu} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overline{f}_L & \overline{F}_L \end{pmatrix}_i M_{ij}^{\nu} \begin{pmatrix} f_R \\ F_R \end{pmatrix}_j + h.c.,$$

donde los campos de Majorana son

$$\begin{aligned}f &= \nu_L^0 + (\nu_L^0)^C, \\ F &= \nu_R^0 + (\nu_R^0)^C,\end{aligned}$$

y la matriz compleja M^{ν} está dada como

$$M^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & m_M \end{pmatrix}.$$

Además M^{ν} es simétrica. Se procede a diagonalizar M^{ν} , mediante una matriz unitaria U^{ν} , de forma que

$$\hat{M}^{\nu} = U^{\nu T} M U^{\nu},$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \overline{f}_L & \overline{F}_L \end{pmatrix} M^{\nu} \begin{pmatrix} f_R \\ F_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{f}_L & \overline{F}_L \end{pmatrix} U^{\nu*} U^{\nu T} M^{\nu} U^{\nu} U^{\nu\dagger} \begin{pmatrix} f_R \\ F_R \end{pmatrix}.$$

Ahora \hat{M}^ν es una matriz que contiene en su diagonal las masas de n_G neutrinos ligeros ν_i y de n_G neutrinos pesados N_i , donde n_G es la cantidad de generaciones de neutrinos consideradas (normalmente 3). A continuación se deben identificar los nuevos campos base, los cuales son los neutrinos masivos mencionados hace un momento. Se prosigue de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nu_R \\ N_R \end{pmatrix} &= U^{\nu\dagger} \begin{pmatrix} f_R \\ F_R \end{pmatrix}, \\ (\bar{\nu}_L \quad \bar{N}_L) &= (\bar{f}_L \quad \bar{F}_L) U^{\nu*}, \\ \implies \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_L \end{pmatrix}^\dagger \gamma^0 &= \begin{pmatrix} f_L \\ F_L \end{pmatrix}^\dagger \gamma^0 U^{\nu*}. \end{aligned}$$

Multiplicamos por la derecha por γ^0 , y vea que γ^0 y $U^{\nu*}$ conmutan, pues son de espacios diferentes, siendo γ^0 una matriz de dimensión 4×4 y $U^{\nu*}$ una matriz de dimensión $2n_G \times 2n_G$. Al conmutar las matrices mencionadas, se tiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_L \end{pmatrix}^\dagger &= \begin{pmatrix} f_L \\ F_L \end{pmatrix}^\dagger U^{\nu*}, \\ \implies \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_L \end{pmatrix} &= U^{\nu T} \begin{pmatrix} f_L \\ F_L \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Al tener los campos de Majorana en términos de los nuevos campos neutrinos masivos, se pueden obtener los términos lagrangianos de interacción entre neutrinos y los bosones W^\pm , Z y h , en términos de eigen estados de masa. Los términos lagrangianos que halla Pilaftsis son los siguientes.

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{W-\nu M-l} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} W^{-\mu} [\bar{l}_i \gamma_\mu 2P_L B_{l_i \nu_j} \nu_j + \bar{l}_i \gamma_\mu 2P_L B_{l_i N_j} N_j] + h.c. , \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{Z-\nu M-\nu M} &= -\frac{g}{4\cos\theta_W} Z^{0\mu} [\bar{\nu}_i \gamma_\mu [i\text{Im}(\mathcal{C}_{\nu_i \nu_j}) \mathbb{1}_4 - \gamma_5 \text{Re}(\mathcal{C}_{\nu_i \nu_j})] \nu_j + \\ &\quad + (\bar{\nu}_i \gamma_\mu [i\text{Im}(\mathcal{C}_{\nu_i N_j}) \mathbb{1}_4 - \gamma_5 \text{Re}(\mathcal{C}_{\nu_i N_j})] N_j + h.c.) + \\ &\quad + \bar{N}_i \gamma_\mu [i\text{Im}(\mathcal{C}_{N_i N_j}) \mathbb{1}_4 - \gamma_5 \text{Re}(\mathcal{C}_{N_i N_j})] N_j] , \quad (2.56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{h-\nu M-\nu M} &= -\frac{g}{4m_W} h [\bar{\nu}_i [(m_{\nu_i} + m_{\nu_j}) \text{Re}(\mathcal{C}_{\nu_i \nu_j}) \mathbb{1}_4 + i\gamma_5 (m_{\nu_j} - m_{\nu_i}) \text{Im}(\mathcal{C}_{\nu_i \nu_j})] \nu_j + \\ &\quad + 2\bar{\nu}_i [(m_{\nu_i} + m_{N_j}) \text{Re}(\mathcal{C}_{\nu_i N_j}) \mathbb{1}_4 + i\gamma_5 (m_{N_j} - m_{\nu_i}) \text{Im}(\mathcal{C}_{\nu_i N_j})] N_j + \\ &\quad + \bar{N}_i [(m_{N_i} + m_{N_j}) \text{Re}(\mathcal{C}_{N_i N_j}) \mathbb{1}_4 + i\gamma_5 (m_{N_j} - m_{N_i}) \text{Im}(\mathcal{C}_{N_i N_j})] N_j] , \quad (2.57) \end{aligned}$$

donde g es la constante de acoplamiento de $SU(2)_L$, que se mencionó en la sección 2.2. Las matrices B y \mathcal{C} se definen como

$$B_{lij} = \sum_{k=1}^{n_G} V_{ik}^l U_{kj}^{\nu*}, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, 2n_G , \quad (2.58)$$

$$\mathcal{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{n_G} U_{ki}^\nu U_{kj}^{\nu*}, \quad \text{con } i, j = 1, 2, \dots, 2n_G , \quad (2.59)$$

$$(2.60)$$

donde la matriz V^l corresponde a la matriz CKM para el sector leptónico.

Las masas de los neutrinos ligeros en 2.57 en general son distintas de 0, sin embargo una condición necesaria y suficiente para que el j -ésimo neutrino tenga masa 0 a nivel árbol, es

$$\sum_{k=1}^{2n_G} M_{ik}^\nu U_{kj}^\nu = 0, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, 2n_G. \quad (2.61)$$

Justamente en este modelo se considera que las masas de los neutrinos ligeros sólo son distintas de 0 a nivel de lazos. A nivel árbol los neutrinos ligeros siguen teniendo masa 0, y por lo tanto, de 2.57 se observa que los acoplamientos proporcionales a m_{ν_i} desaparecen en ese caso.

2.7. Diagramas y reglas de Feynman

Es más que evidente que en las teorías cuánticas de campos, es de vital importancia estudiar los fenómenos de interacción en la teoría (pues en la naturaleza todo el tiempo estamos observando interacciones, y estas se dan mediante los campos). En general, matemáticamente, las interacciones entre partículas se representan como productos de los campos que caracterizan a esas partículas, los cuales actúan sobre bras y kets, para representar la transición de un estado a otro. Como se ha mencionado antes, en la QFT, todos los estados se construyen a partir del estado base. Consideremos que en la teoría con interacciones tenemos una transición de un estado arbitrario $|\Omega_n\rangle$ a otro estado arbitrario $\langle\Omega_m|$, de la siguiente forma

$$\langle\Omega_m|\phi(x_2)\phi(x_1)\phi(x_3)\phi(x_4)|\Omega_n\rangle,$$

siendo x_1, x_2, x_3, x_4 , 4-vectores, en los cuales $x_2^0 > x_1^0 > x_3^0 > x_4^0$. Se puede relacionar esta función de onda con otra en la cual $|\Omega_n\rangle$ y $\langle\Omega_m|$ están en términos del estado base $|\Omega\rangle$, de manera que

$$\langle\Omega_m|\phi(x_2)\phi(x_1)\phi(x_3)\phi(x_4)|\Omega_n\rangle \sim \langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\}|\Omega\rangle,$$

donde además hemos introducido el operador de ordenamiento en el tiempo T , el cual ordena los campos de manera que de derecha a izquierda vayan primero los campos con una coordenada temporal menor. Uno de los resultados de la teoría cuántica de campos es que el estado base en la teoría con interacción $|\Omega\rangle$, se puede escribir en términos del estado base de la teoría libre $|0\rangle$ [18], como se muestra a continuación:

$$|\Omega\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{iE_\Omega(\tau+t_0)}}{\langle\Omega|0\rangle} \tilde{\mathcal{U}}(t_0, -\tau)|0\rangle, \quad (2.62)$$

donde $\tilde{\mathcal{U}}(t_0, -\tau)$ es el operador de evolución en el tiempo, en la teoría con interacciones, el cual se define como:

$$\tilde{\mathcal{U}}(t, t_0) \equiv e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}, \quad (2.63)$$

donde $H = H_0 + H_{\text{int}}$ es el operador hamiltoniano, H_0 es el operador hamiltoniano de la teoría libre, y H_{int} es el operador hamiltoniano de la teoría con interacciones. También se puede hallar que $\tilde{\mathcal{U}}(t, t_0)$ se puede expresar como una serie de Dyson:

$$\tilde{\mathcal{U}}(t, t_0) = T \left(\exp \left\{ -i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right\} \right). \quad (2.64)$$

De manera similar a como Peskin obtiene la ecuación 2.62, se halla que

$$\langle\Omega| = \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{iE_\Omega(\tau-t_0)}}{\langle\Omega|0\rangle^*} \langle 0|\tilde{\mathcal{U}}(\tau, t_0), \quad (2.65)$$

Para n campos, se tiene

$$\langle \Omega | \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{iE_\Omega(2\tau)}}{|\langle \Omega | 0 \rangle|^2} \langle 0 | \tilde{\mathcal{U}}(\tau, t_0) \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \dots \phi(x_n) \tilde{\mathcal{U}}(t_0, -\tau) | 0 \rangle ,$$

considerando que la relación entre los campos $\phi(x)$ y los campos en la imagen de interacción $\phi_I(x)$, está dada como

$$\phi(x) = \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(x^0, t_0) \phi_I(x) \tilde{\mathcal{U}}(x^0, t_0) ,$$

entonces nos queda

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle &= \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{iE_\Omega(2\tau)}}{|\langle \Omega | 0 \rangle|^2} \langle 0 | \tilde{\mathcal{U}}(\tau, t_0) \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(x_1^0, t_0) \phi_I(x_1) \tilde{\mathcal{U}}(x_1^0, t_0) \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(x_2^0, t_0) \phi_I(x_2) \times \\ &\times \tilde{\mathcal{U}}(x_2^0, t_0) \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(x_3^0, t_0) \phi_I(x_3) \tilde{\mathcal{U}}(x_3^0, t_0) \dots \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(x_n^0, t_0) \phi_I(x_n) \tilde{\mathcal{U}}(x_n^0, t_0) \tilde{\mathcal{U}}(t_0, -\tau) | 0 \rangle . \end{aligned}$$

Los puntos del espacio-tiempo x_1, x_2, \dots, x_n , son arbitrarios. Por lo que es apropiado usar el operador de ordenamiento en el tiempo:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle &= \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{iE_\Omega(2\tau)}}{|\langle \Omega | 0 \rangle|^2} \langle 0 | T \{ \tilde{\mathcal{U}}(\tau, t_0) \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(x_1^0, t_0) \phi_I(x_1) \tilde{\mathcal{U}}(x_1^0, t_0) \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(x_2^0, t_0) \phi_I(x_2) \times \\ &\times \tilde{\mathcal{U}}(x_2^0, t_0) \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(x_3^0, t_0) \phi_I(x_3) \tilde{\mathcal{U}}(x_3^0, t_0) \dots \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(x_n^0, t_0) \phi_I(x_n) \tilde{\mathcal{U}}(x_n^0, t_0) \tilde{\mathcal{U}}(t_0, -\tau) \} | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (2.66)$$

Los campos y operadores sobre los que actúa en operador de ordenamiento en el tiempo, pueden conmutar, pues precisamente T se encarga de ordenarlos, por lo que podemos reunir los operadores de evolución en el tiempo:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}(\tau, t_0) \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(x_1^0, t_0) \tilde{\mathcal{U}}(x_1^0, t_0) \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(x_2^0, t_0) \tilde{\mathcal{U}}(x_2^0, t_0) \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(x_3^0, t_0) \tilde{\mathcal{U}}(x_3^0, t_0) \dots \tilde{\mathcal{U}}^\dagger(x_n^0, t_0) \tilde{\mathcal{U}}(x_n^0, t_0) \tilde{\mathcal{U}}(t_0, -\tau) &= \\ &= \tilde{\mathcal{U}}(\tau, t_0) \tilde{\mathcal{U}}(t_0, -\tau) = \tilde{\mathcal{U}}(\tau, -\tau) \\ &= T \left(\exp \left\{ -i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_I(t) \right\} \right) \\ &= T \left(\mathbb{1} - i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_I(t) + \dots \right) , \end{aligned}$$

donde $\mathbb{1}$ es el operador identidad. Sustituyendo estos resultados en 2.66, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle &= \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{iE_\Omega(2\tau)}}{|\langle \Omega | 0 \rangle|^2} \langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3) \dots \phi_I(x_n) \left(\mathbb{1} - i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_I(t) + \dots \right) \right\} | 0 \rangle . \end{aligned}$$

Considerando la normalización $\langle \Omega | \Omega \rangle = 1$, se encuentra que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{iE_\Omega(2\tau)}}{|\langle \Omega | 0 \rangle|^2} = \frac{1}{\lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | \tilde{\mathcal{U}}(\tau, -\tau) | 0 \rangle} .$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle &= \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{1}{\langle 0 | T \left(\exp \left\{ -i \int_{-\tau}^{\tau} dt H_I(t) \right\} \right) | 0 \rangle} \left(\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3) \dots \phi_I(x_n) \} | 0 \rangle - \right. \\ &\quad \left. - i \langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3) \dots \phi_I(x_n) \int_{-\tau}^{\tau} dt H_I(t) \right\} | 0 \rangle + \dots \right) . \end{aligned} \quad (2.67)$$

En las teorías perturbativas, normalmente el orden igual o mayor a 2 ya no es significativo en los resultados. En resumen, el problema se reduce a resolver

$$\langle 0|T \{ \phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\dots\phi_I(x_n) \} |0\rangle , \quad (2.68)$$

junto con los campos adicionales que pudieran haber dentro de T , debido al hamiltoniano de interacción. Para resolverlo, se emplea el teorema de Wick [19], el cual nos dice que

$$\begin{aligned} T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\dots\phi_I(x_n)\} &= \\ &= N\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\dots\phi_I(x_n) + \text{todas las contracciones posibles entre campos}\} , \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde N es el operador de ordenamiento normal. Por lo que aplicando el teorema en 2.68, se obtiene que

$$\langle 0|T \{ \phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\dots\phi_I(x_n) \} |0\rangle = \sum \text{ todos los campos contraídos .}$$

Como menciona Peskin, la contracción de 2 campos es igual al producto del propagador de Feynman en el espacio de posiciones por el operador identidad:

$$\overline{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)} = D_F(x_1 - x_2)\mathbb{1} , \quad (2.70)$$

el cual es el diagrama de Feynman más simple de todos, y a partir de él se forman todos los demás. El producto entre propagadores de Feynman forma diagramas más complejos, y la suma de todos estos diagramas que se obtengan en algún caso particular, da como resultado la correspondiente función de correlación. En la QFT, lo más común es utilizar los diagramas de Feynman en el espacio de momentos, al cual se pasa desde el espacio de posiciones al aplicar la transformada de Fourier. El diagrama fundamental en ambos espacios son como se muestran en la figura 2.3.

$$\overline{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)} = \begin{cases} \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ x_1 \qquad x_2 \\ (a) \end{array} = D_F(x_1 - x_2)\mathbb{1} , \\ \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{p} \bullet \\ (b) \end{array} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\mathbb{1} . \end{cases}$$

Figura 2.3: (a) Diagrama fundamental en el espacio de posiciones. (b) Diagrama fundamental en el espacio de momentos.

En el espacio de momentos, cada línea de los diagramas representa una partícula. Las líneas se van uniendo entre sí para representar interacciones entre las partículas. El valor numérico de cada diagrama está determinado por las reglas de Feynman; dichas reglas varían dependiendo de qué teoría se esté estudiando. Por ejemplo, son distintas las reglas de Feynman de la QED que las de la teoría de Yukawa. Precisamente las reglas de Feynman de la teoría de Yukawa son las que nos conciernen en este trabajo, por lo que se enuncian a continuación.

$$\begin{aligned} \overline{\psi(x)\psi(y)} &= \bullet \xrightarrow{p} \bullet = \frac{i(\not{p} + m\mathbb{1}_4)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\mathbb{1} , \\ \overline{\phi(x)\phi(y)} &= \bullet \text{---} \bullet = \frac{i}{q^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}\mathbb{1} . \end{aligned}$$

Figura 2.4: 1. Reglas para propagadores



Figura 2.5: 2. Regla para vértices

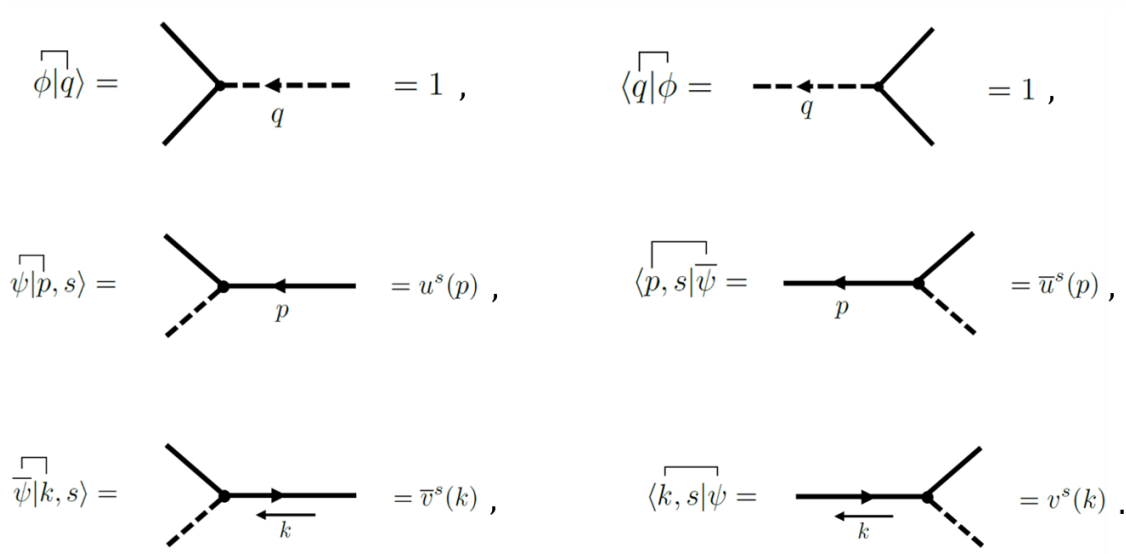


Figura 2.6: 3. Reglas para las contracciones con patas externas

Además de estas 3 reglas diagramáticas, también se deben considerar otras 3.

4. Se impone la conservación del momento en cada vértice.
5. En cada lazo cerrado se debe integrar respecto al momento indeterminado.
6. Se debe buscar el signo adecuado del diagrama.

Por último, cabe resaltar que las flechas que están sobre propagadores indican el flujo del número de partícula (número fermiónico o número bosónico), y para partículas, el sentido del momento debe ser el mismo que el de este flujo. También tome en cuenta que las partículas que se encuentran como líneas internas de un lazo, son partículas virtuales, y por lo tanto no se encuentran en la capa de masa (de ahí que el momento en el lazo esté indeterminado). Ya se tienen claras la mayoría de las herramientas necesarias para estudiar el proceso de interés, pero aún falta mencionar a la amplitud \mathcal{M} . La definición precisa suele ser bastante compleja, por lo que normalmente pensamos en \mathcal{M} como una cantidad relacionada con la probabilidad de que ocurra una transición de un estado inicial a uno final, entre partículas. El cuadrado de su magnitud $|\mathcal{M}|^2$ está relacionado directamente con la probabilidad antes mencionada, y es un resultado necesario para obtener la cross section del proceso. $i\mathcal{M}$ también puede considerarse simplemente como la suma de todas las contribuciones de los diagramas que surgen de un proceso. En ocasiones, si el número de diagramas es muy grande, nos tomaremos la libertad de llamar $i\mathcal{M}$ a la contribución a la amplitud que se esté calculando, pero sin olvidar que la amplitud total requiere sumar todas las contribuciones.

Capítulo 3

Cálculo de hhh

Para calcular la amplitud del acoplamiento hhh mediado por neutrinos masivos a 1 lazo, primero se debe tener claro cómo estará conformado el diagrama. Sabemos que en el interior habrán 3 propagadores, donde cada uno corresponde a un neutrino masivo. Para saber qué expresión analítica le corresponde a cada vértice del diagrama, nos fijamos en la ecuación 2.57, vemos que sólo se requiere una función vértice, pues sólo nos interesa el acoplamiento de dos neutrinos masivos con un bosón de Higgs. La función vértice se obtiene del lagrangiano en la ec. 2.57 y está dada como:

$$\Gamma_{ij}^\sigma = -\frac{g}{4m_W} [(m_{N_i} + m_{N_j})\text{Re}(\mathcal{C}_{N_i N_j})\mathbb{1}_4 + i\gamma_5(m_{N_j} - m_{N_i})\text{Im}(\mathcal{C}_{N_i N_j})]. \quad (3.1)$$

Podemos ver el diagrama de este vértice en la figura 3.1. Como se mencionó en la sección sobre diagramas de Feynman, para obtener la amplitud se debe sumar la contribución de los diagramas con todas las posibles combinaciones de neutrinos masivos que pueden formar el lazo. En vez de realizar el cálculo para cada combinación particular de neutrinos masivos, lo más conveniente es hacer cálculos más generales, en el sentido de que nos den resultados que contemplen cualquier combinación posible. Para lo cual, se consideraron neutrinos masivos arbitrarios N_i, N_j, N_ℓ , con $i, j, \ell = 1, 2, 3$.

Ya que sabemos cómo son los vértices del diagrama, fijémonos en el diagrama completo, que se encuentra en la figura 3.2. En cada vértice del diagrama está acoplado un bosón de Higgs h , que cumple la condición de capa de masa. Uno puede preguntarse, ¿Cómo saber en qué vértice estará acoplado cada bosón de Higgs? La simetría de Bose nos dice que es indistinto cómo se acomoden las partículas externas en un lazo mientras todas sean partículas escalares (como lo es el bosón de Higgs). Sin embargo, para obtener la amplitud del proceso se tienen que considerar las contribuciones de los diagramas de todas las permutaciones que se puedan hacer en el acoplamiento de las partículas externas. Al tener 3 partículas externas, esto resultaría en 6 diagramas distintos, a los que denominamos diagramas de tipo Dirac, los cuales se muestran en la figura 3.3; sin embargo

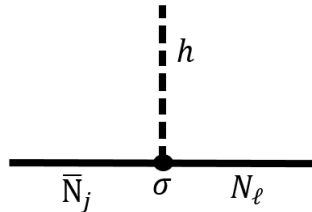


Figura 3.1: Acoplamiento $h\bar{N}_j N_\ell$

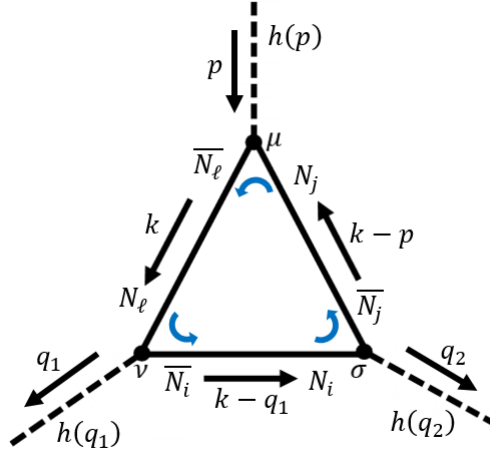


Figura 3.2: Diagrama genérico del proceso en cuestión

no son los únicos diagramas. Veremos que también hay diagramas de tipo Majorana que contribuyen a la amplitud, los cuales se explicarán más adelante.

Para calcular la contribución de un diagrama de tipo Dirac, podemos fijarnos directamente en las reglas de Feynman para la teoría de Yukawa, en la sección 2.7. Al hacerlo así, nos damos cuenta de que se obtiene una función de onda, la cual corresponde a la transición de un estado inicial a un estado final del proceso. Consideramos que el estado inicial es un bosón de Higgs con algún 4-momento y el estado final son dos bosones de Higgs cada uno con algún 4-momento; además es fundamental que se conserve el 4-momento. Lo que se busca es contraer los campos escalares con sus 4-momentos y contraer los campos neutrinos con su correspondiente campo antineutrino, para expresar la transición de estados en términos de la traza de contracciones de campos neutrinos; contracciones las cuales se vuelven propagadores al aplicar las reglas de Feynman. Para calcular la contribución del diagrama 1, de manera explícita se procede como sigue

$$\begin{aligned}
 \langle q_1, q_2 | h(q_2) \overline{N}_j \Gamma_{ji}^\sigma N_i h(q_1) \overline{N}_i \Gamma_{i\ell}^\nu N_\ell h(p) \overline{N}_\ell \Gamma_{\ell j}^\mu N_j | p \rangle &= \\
 &= \langle q_1, q_2 | h(q_2) h(q_1) (\overline{N}_j)_a (\Gamma_{ji}^\sigma)_{ab} (N_i)_b (\overline{N}_i)_c (\Gamma_{i\ell}^\nu)_{cd} (N_\ell)_d (\overline{N}_\ell)_e (\Gamma_{\ell j}^\mu)_{ef} (N_j)_f h(p) | p \rangle \\
 &= \langle q_1, q_2 | h(q_2) h(q_1) (-1)^5 (\Gamma_{ji}^\sigma)_{ab} (N_i)_b (\overline{N}_i)_c (\Gamma_{i\ell}^\nu)_{cd} (N_\ell)_d (\overline{N}_\ell)_e (\Gamma_{\ell j}^\mu)_{ef} (N_j)_f (\overline{N}_j)_a h(p) | p \rangle \\
 &= \langle q_1, q_2 | h(q_2) h(q_1) (-1) (\Gamma_{ji}^\sigma N_i \overline{N}_i \Gamma_{i\ell}^\nu N_\ell \overline{N}_\ell \Gamma_{\ell j}^\mu N_j \overline{N}_j)_{aa} h(p) | p \rangle \\
 &= \langle q_1, q_2 | h(q_2) h(q_1) [-tr(\Gamma_{ji}^\sigma N_i \overline{N}_i \Gamma_{i\ell}^\nu N_\ell \overline{N}_\ell \Gamma_{\ell j}^\mu N_j \overline{N}_j)] h(p) | p \rangle . \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Las reglas de Feynman en el espacio de momentos nos dicen que las contracciones de campos escalares con momentos son iguales a 1, por lo que de la ec. 3.2 sólo nos queda la traza, la cual se debe integrar respecto al momento indeterminado k , debido a que se tiene un lazo. Como se hace uso de la regularización dimensional, lo adecuado es integrar en “ D ” dimensiones. De forma que $d^D k = dk^1 dk^2 \dots dk^D$, y para que se conserven las unidades de la integral en D dimensiones, se introduce un factor μ^{4-D} , donde μ es la escala de renormalización, y tiene unidades de masa. También por las reglas de Feynman, las matrices $N_i \overline{N}_i$ son sustituidas por su respectivo propagador. Finalmente la amplitud del diagrama 1 es:

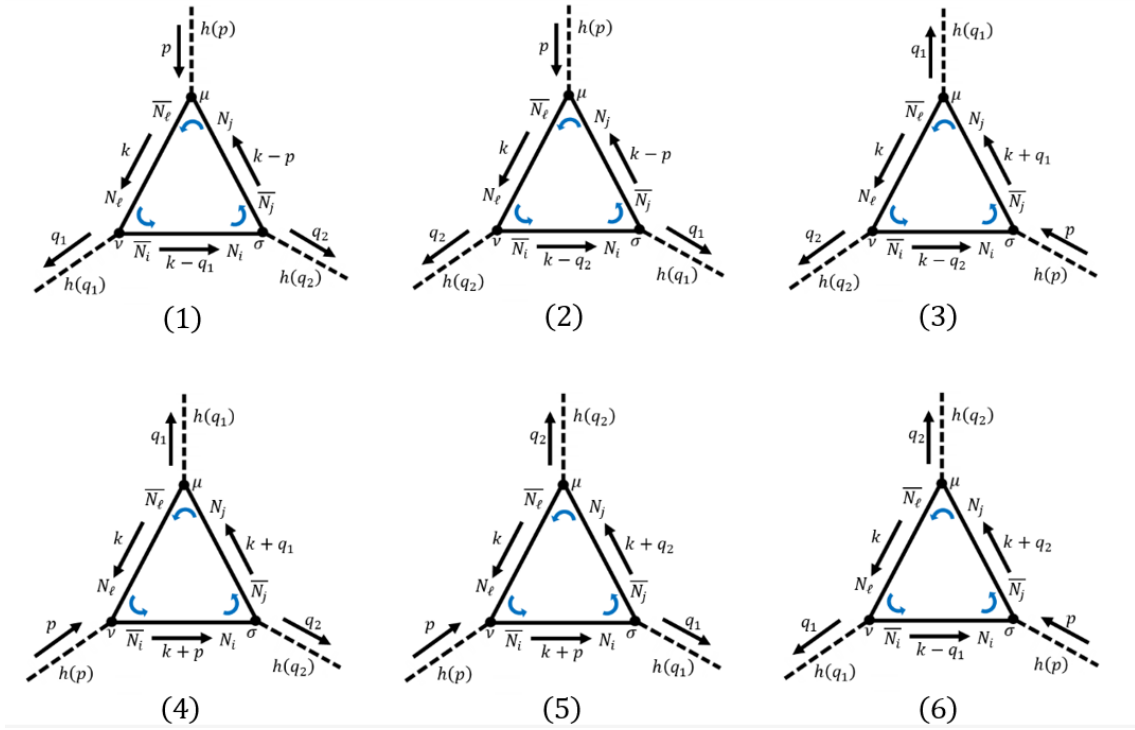


Figura 3.3: Diagramas de tipo Dirac

$$i\mathcal{M} = -\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \text{tr} \left(\Gamma_{ji}^\sigma \frac{i(\not{k} - \not{q}_1 + m_i \mathbb{1}_n)}{(k - q_1)^2 - m_i^2} \Gamma_{i\ell}^\nu \frac{i(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n)}{k^2 - m_\ell^2} \Gamma_{\ell j}^\mu \frac{i(\not{k} - \not{p} + m_j \mathbb{1}_n)}{(k - p)^2 - m_j^2} \right). \quad (3.3)$$

Simplificamos para obtener

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma (\not{k} - \not{q}_1 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^\nu (\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^\mu (\not{k} - \not{p} + m_j \mathbb{1}_n))}{((k - q_1)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k - p)^2 - m_j^2)}. \quad (3.4)$$

Es fácil darnos cuenta de que la amplitud de los demás diagramas de tipo Dirac tendrán la misma forma, con diferencias concernientes a los momentos de algunos propagadores, esto debido a que se exige la conservación del momento tras permutar los bosones en los vértices del loop. Así, siguiendo el mismo procedimiento con los demás diagramas de tipo Dirac, obtenemos los siguientes resultados:

Diagrama 2

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma (\not{k} - \not{q}_2 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^\nu (\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^\mu (\not{k} - \not{p} + m_j \mathbb{1}_n))}{((k - q_2)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k - p)^2 - m_j^2)}. \quad (3.5)$$

Diagrama 3

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma (\not{k} - \not{q}_2 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^\nu (\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^\mu (\not{k} + \not{q}_1 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k - q_2)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k + q_1)^2 - m_j^2)}. \quad (3.6)$$

Diagrama 4

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma(\not{k} + \not{p} + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^\nu(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^\mu(\not{k} + \not{q}_1 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k+p)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k+q_1)^2 - m_j^2)}. \quad (3.7)$$

Diagrama 5

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma(\not{k} + \not{p} + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^\nu(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^\mu(\not{k} + \not{q}_2 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k+p)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k+q_2)^2 - m_j^2)}. \quad (3.8)$$

Diagrama 6

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma(\not{k} - \not{q}_1 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^\nu(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^\mu(\not{k} + \not{q}_2 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k-q_1)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k+q_2)^2 - m_j^2)}. \quad (3.9)$$

Del diagrama de Dirac 1 se pueden obtener tres diagramas de tipo Majorana. Esto ocurre debido a que al considerar que los campos neutrinos son de Majorana se deben tomar en cuenta otras dos tipos de contracciones de campos, las cuales son de la forma:

$$\overline{N_i N_i}, \quad \overline{N_i} \overline{N_i},$$

en vez de solamente la contracción $\overline{N_i} N_i$. No hay que perder de vista que aunque a unos diagramas los llamamos “de tipo Dirac”, todos los neutrinos considerados son de Majorana. Realizar las contracciones de campos no usuales que se acaban de mencionar implica que se implementa una transformación en uno de los vértices del diagrama. Se transforma el vértice en el sentido de que en uno de los neutrinos con los que interactúa se necesita aplicar directamente la condición de Majorana, lo cual causa que obtengamos un tipo de vértice distinto a los otros dos. Como se explica en [20], en el diagrama no hay un flujo fermiónico realmente, ya que los campos de Majorana violan el número fermiónico, pero las flechas curvadas dentro del diagrama nos ayudan a saber qué vértice está transformado en un diagrama de tipo Majorana, pues la flecha apunta en el sentido contrario a como convencionalmente va el flujo fermiónico. Estas consideraciones se hacen en cada vértice para obtener 3 diagramas de tipo Majorana por cada diagrama de tipo Dirac. Los tres diagramas de tipo Majorana que surgen del diagrama 1 de tipo Dirac se pueden observar en la figura 3.4. Del diagrama de tipo Dirac 1, comenzamos considerando la flecha que va en sentido opuesto a un flujo fermiónico convencional en el vértice etiquetado con la letra ν , de manera que la transición entre estados está dada por el bra-ket:

$$\begin{aligned} \langle q_1, q_2 | h(q_2) \overline{N_j} \Gamma_{ji}^\sigma N_i h(q_1) \overline{N_\ell} \Gamma_{\ell i}^\nu N_i h(p) \overline{N_\ell} \Gamma_{\ell j}^\mu N_j | p \rangle = \\ = \langle q_1, q_2 | h(q_2) h(q_1) \overline{N_j} \Gamma_{ji}^\sigma N_i \overline{N_\ell} \Gamma_{\ell i}^\nu N_i \overline{N_\ell} \Gamma_{\ell j}^\mu N_j h(p) | p \rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De la ecuación 3.10 nos fijamos en el producto $\overline{N_\ell} \Gamma_{\ell i}^\nu N_i$:

$$\begin{aligned} \overline{N_\ell} \Gamma_{\ell i}^\nu N_i &= (\overline{N_\ell})_a (\Gamma_{\ell i}^\nu)_{ab} (N_i)_b \\ &= -(N_i)_b (\Gamma_{\ell i}^\nu)_{ab} (\overline{N_\ell})_a = -(N_i^T)_b (\Gamma_{\ell i}^\nu)^T_{ba} (\overline{N_\ell}^T)_a \\ &= -N_i^T \Gamma_{\ell i}^\nu \overline{N_\ell}^T. \end{aligned} \quad (3.11)$$

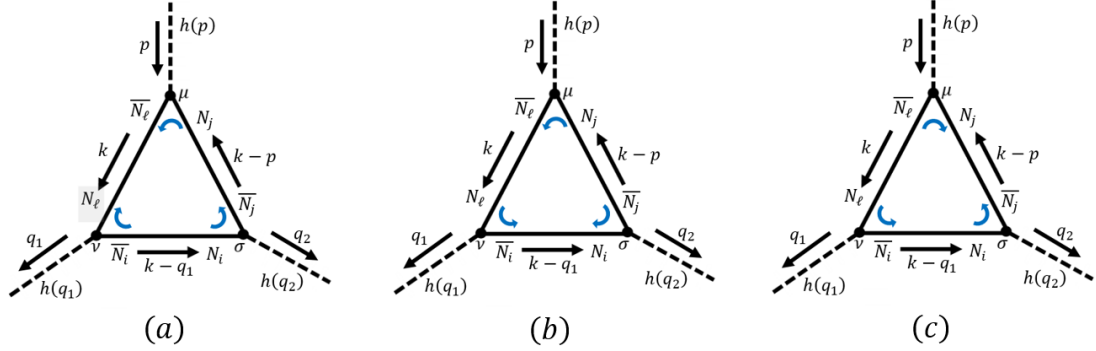


Figura 3.4: Diagramas de tipo Majorana derivados del diagrama 1 de tipo Dirac. (a) Diagrama con transformación del vértice ν . (b) Diagrama con transformación del vértice σ . (c) Diagrama con transformación del vértice μ .

Hacemos uso de la condición de Majorana $\psi^C = \psi$, y la propiedad de unitariedad de la matriz de conjugación de carga $C^\dagger C = \mathbb{1}_4$, en la ecuación 3.11

$$\begin{aligned} \implies \bar{N}_\ell \Gamma_{\ell i}^\nu N_i &= -N_i^{cT} \Gamma_{\ell i}^{\nu T} C^\dagger C \bar{N}_\ell^T \\ &= -(C \bar{N}_\ell^T)^T \Gamma_{\ell i}^{\nu T} C^\dagger N_\ell^c = -\bar{N}_i C^T \Gamma_{\ell i}^{\nu T} C^\dagger N_\ell, \end{aligned}$$

y recordando de las propiedades de la matriz de conjugación de carga que $C^T = -C$, tenemos

$$\bar{N}_\ell \Gamma_{\ell i}^\nu N_i = \bar{N}_i C \Gamma_{\ell i}^{\nu T} C^\dagger N_\ell,$$

$$\therefore \bar{N}_\ell \Gamma_{\ell i}^\nu N_i = \bar{N}_i \Gamma_{i\ell}^{\nu'} N_\ell, \quad (3.12)$$

con $\Gamma_{i\ell}^{\nu'} \equiv C \Gamma_{\ell i}^{\nu T} C^\dagger$. Sustituimos el resultado 3.12 en la ecuación 3.10, y obtenemos

$$\begin{aligned} \langle q_1, q_2 | h(q_2) h(q_1) \bar{N}_j \Gamma_{ji}^\sigma N_i \bar{N}_i \Gamma_{i\ell}^{\nu'} N_\ell \bar{N}_\ell \Gamma_{\ell j}^\mu N_j h(p) | p \rangle &= \\ &= \langle q_1, q_2 | h(q_2) h(q_1) (\bar{N}_j)_a (\Gamma_{ji}^\sigma)_{ab} (N_i)_b (\bar{N}_i)_c (\Gamma_{i\ell}^{\nu'})_{cd} (N_\ell)_d (\bar{N}_\ell)_e (\Gamma_{\ell j}^\mu)_{ef} (N_j)_f h(p) | p \rangle \\ &= \langle q_1, q_2 | h(q_2) h(q_1) (-1)^5 (\Gamma_{ji}^\sigma)_{ab} (N_i)_b (\bar{N}_i)_c (\Gamma_{i\ell}^{\nu'})_{cd} (N_\ell)_d (\bar{N}_\ell)_e (\Gamma_{\ell j}^\mu)_{ef} (\bar{N}_j)_a h(p) | p \rangle \\ &= \langle q_1, q_2 | h(q_2) h(q_1) (-1) (\Gamma_{ji}^\sigma N_i \bar{N}_i \Gamma_{i\ell}^{\nu'} N_\ell \bar{N}_\ell \Gamma_{\ell j}^\mu N_j \bar{N}_j)_{aa} h(p) | p \rangle \\ &= \langle q_1, q_2 | h(q_2) h(q_1) [-\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma N_i \bar{N}_i \Gamma_{i\ell}^{\nu'} N_\ell \bar{N}_\ell \Gamma_{\ell j}^\mu N_j \bar{N}_j)] h(p) | p \rangle. \end{aligned}$$

Nuevamente apelamos a las reglas de Feynman, como se hizo con los diagramas de tipo Dirac para obtener 3.3 y las subsecuentes amplitudes de los otros 5 diagramas. Así, se obtiene que la amplitud del diagrama 1 con transformación en el vértice ν , de tipo Majorana es

$$i\mathcal{M} = -\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \text{tr} \left(\Gamma_{ji}^\sigma \frac{i(\not{k} - \not{q}_1 + m_i \mathbb{1}_n)}{(k - q_1)^2 - m_i^2} \Gamma_{i\ell}^{\nu'} \frac{i(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n)}{k^2 - m_\ell^2} \Gamma_{\ell j}^\mu \frac{i(\not{k} - \not{p} + m_j \mathbb{1}_n)}{(k - p)^2 - m_j^2} \right).$$

Simplificando, obtenemos

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma(\not{k} - \not{q}_1 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^{\nu'}(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^\mu(\not{k} - \not{p} + m_j \mathbb{1}_n))}{((k - q_1)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k - p)^2 - m_j^2)}. \quad (3.13)$$

Para obtener los otros dos diagramas de tipo Majorana que se obtienen del diagrama 1, invertimos el sentido de la flecha curvada ya sea en el vértice etiquetado por μ o por σ , para indicar que el tipo de vértice es distinto a los otros, y seguimos el procedimiento realizado para la amplitud del diagrama de tipo Majorana calculado anteriormente. Luego se repite el procedimiento para el vértice que hiciera falta. Este procedimiento se continua aplicando para los demás diagramas de tipo Dirac, del 2 al 6, para tener un total de 24 diagramas genéricos. Es evidente que como el resto de diagramas de tipo Majorana se calculan de la misma manera que el que ya mostramos, la amplitud de cada uno tendrá una forma muy similar a 3.13, con ciertas diferencias respecto a la matriz vértice que estará primada, dependiendo del vértice que se elija transformar; o con cambios en los momentos involucrados, dependiendo de cual diagrama de Dirac partamos. De manera que las amplitudes son las siguientes:

Diagrama 1, vértice σ

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^{\sigma'}(\not{k} - \not{q}_1 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^{\nu}(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^\mu(\not{k} - \not{p} + m_j \mathbb{1}_n))}{((k - q_1)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k - p)^2 - m_j^2)}. \quad (3.14)$$

Diagrama 1, vértice μ

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma(\not{k} - \not{q}_1 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^{\nu'}(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^{\mu'}(\not{k} - \not{p} + m_j \mathbb{1}_n))}{((k - q_1)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k - p)^2 - m_j^2)}. \quad (3.15)$$

Los otros 15 diagramas de tipo Majorana se encuentran en el apéndice, al igual que el cálculo de la amplitud de dichos diagramas. En este punto en el que se tiene una expresión analítica de las integrales a resolver para obtener la contribución de cada diagrama, se podría calcular “a mano” las trazas que se requieren en los integrandos, sin embargo este tipo de tareas de la Física de partículas es mejor realizarlas de manera automatizada mediante el uso de software. Se aprovechan estas tecnologías al enfrentarse a cálculos extensos y repetitivos, pues programar un algoritmo es más rápido y se previenen errores en los cálculos, de manera que se optó por emplear esta opción para calcular las contribuciones de los resultados analíticos obtenidos. Sin embargo, en el caso de los diagramas de tipo Majorana, primero se requiere encontrar una expresión explícita para las matrices vértice que definimos como $\Gamma_{j\ell}^{\sigma'} \equiv C \Gamma_{j\ell}^{\sigma T} C^\dagger$. Para esto, será útil que primero expresemos $\Gamma_{j\ell}^{\sigma}$ en términos de las matrices de proyección quiral.

En la ec. 3.1 se define $\Gamma_{j\ell}^{\sigma}$, y podemos ver que lo que le da estructura de matriz son las matrices $\mathbb{1}_4$ y γ_5 , por lo que expresaremos dichas matrices en términos de P_L y P_R .

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 - \gamma_5), & \text{y} & & P_R &= \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 + \gamma_5), \\ \implies \mathbb{1}_4 &= P_L + P_R, & \text{y} & & \gamma_5 &= P_R - P_L. \end{aligned}$$

Considerando la ecuación 3.1, definimos

$$A_{j\ell} = -\frac{g}{4m_W}(m_\ell + m_j)\text{Re}\{\mathcal{C}_{N_j N_\ell}\}, \quad \text{y} \quad B_{j\ell} = -\frac{g}{4m_W}i(m_\ell - m_j)\text{Im}\{\mathcal{C}_{N_j N_\ell}\},$$

de manera que la ecuación 3.1 se puede escribir como

$$\begin{aligned} \Gamma_{j\ell}^\sigma &= A_{j\ell}(P_R + P_L) + B_{j\ell}(P_R - P_L) \\ &= (A_{j\ell} + B_{j\ell})P_R + (A_{j\ell} - B_{j\ell})P_L. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Definimos

$$\xi_{j\ell} \equiv A_{j\ell} - B_{j\ell} , \quad y \quad \zeta_{j\ell} \equiv A_{j\ell} + B_{j\ell} . \quad (3.17)$$

Ahora veamos que

$$\begin{aligned} A_{j\ell} + B_{j\ell} &= -\frac{g}{4m_W} [m_\ell(\text{Re}\{\mathcal{C}_{N_j N_\ell}\} + i\text{Im}\{\mathcal{C}_{N_j N_\ell}\}) + m_j(\text{Re}\{\mathcal{C}_{N_j N_\ell}\} - i\text{Im}\{\mathcal{C}_{N_j N_\ell}\})] \\ &= -\frac{g}{4m_W} [m_\ell \mathcal{C}_{N_j N_\ell} + m_j \mathcal{C}_{N_j N_\ell}^*] , \\ A_{j\ell} - B_{j\ell} &= -\frac{g}{4m_W} [m_\ell(\text{Re}\{\mathcal{C}_{N_j N_\ell}\} - i\text{Im}\{\mathcal{C}_{N_j N_\ell}\}) + m_j(\text{Re}\{\mathcal{C}_{N_j N_\ell}\} + i\text{Im}\{\mathcal{C}_{N_j N_\ell}\})] \\ &= -\frac{g}{4m_W} [m_\ell \mathcal{C}_{N_j N_\ell}^* + m_j \mathcal{C}_{N_j N_\ell}] , \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \xi_{j\ell} &= -\frac{g}{4m_W} [m_\ell \mathcal{C}_{N_j N_\ell}^* + m_j \mathcal{C}_{N_j N_\ell}] , \\ \zeta_{j\ell} &= -\frac{g}{4m_W} [m_\ell \mathcal{C}_{N_j N_\ell} + m_j \mathcal{C}_{N_j N_\ell}^*] . \end{aligned}$$

Consideremos ahora el complejo conjugado de $\xi_{j\ell}$

$$\begin{aligned} \xi_{j\ell}^* &= -\frac{g}{4m_W} [m_\ell \mathcal{C}_{N_j N_\ell} + m_j \mathcal{C}_{N_j N_\ell}^*] , \\ \implies \xi_{j\ell}^* &= \zeta_{j\ell} . \end{aligned}$$

Sustituimos estos resultados en la ecuación 3.16 y nos queda

$$\Gamma_{j\ell}^\sigma = \xi_{j\ell} P_L + \xi_{j\ell}^* P_R . \quad (3.18)$$

En este punto ya nos encontramos en condiciones de calcular $\Gamma_{\ell j}^{\sigma'} = C \Gamma_{j\ell}^\sigma C^\dagger$. Considerando la ecuación 3.18

$$\Gamma_{\ell j}^{\sigma'} = C(\xi_{j\ell} P_L^T + \xi_{j\ell}^* P_R^T) C^\dagger = \xi_{j\ell} C P_L^T C^\dagger + \xi_{j\ell}^* C P_R^T C^\dagger , \quad (3.19)$$

nos fijamos en los productos $C P_L^T C^\dagger$ y $C P_R^T C^\dagger$:

$$C P_L^T C^\dagger = \frac{1}{2} C (\mathbb{1}_4 - \gamma_5^T) C^\dagger = \frac{1}{2} (C C^\dagger - C \gamma_5^T C^\dagger) ,$$

pero recordando que $\gamma_5^T = C^\dagger \gamma_5 C$ y que C es unitaria, se obtiene

$$C P_L^T C^\dagger = \frac{1}{2} (\mathbb{1}_4 - \gamma_5) ,$$

$$\therefore C P_L^T C^\dagger = P_L . \quad (3.20)$$

Similarmente, para $C P_R^T C^\dagger$:

$$\begin{aligned} CP_R^T C^\dagger &= \frac{1}{2} C(\mathbb{1}_4 + \gamma_5^T) C^\dagger = \frac{1}{2} (C C^\dagger + C \gamma_5^T C^\dagger) = \frac{1}{2} (\mathbb{1}_4 + \gamma_5) , \\ \therefore CP_R^T C^\dagger &= P_R . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Empleando los resultados de 3.20 y 3.21 en la ecuación 3.19, se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma_{\ell j}'^\sigma &= \xi_{j\ell} P_L + \xi_{j\ell}^* P_R , \\ \therefore \Gamma_{\ell j}'^\sigma &= \Gamma_{j\ell}^\sigma . \end{aligned} \quad (3.22)$$

En resumen, podemos darnos cuenta de que las funciones vértice transformadas mediante la matriz de conjugación de carga son iguales a las funciones vértice que aparecen en los diagramas de tipo Dirac, con la diferencia de que los subíndices que caracterizan la interacción dada aparecen intercambiados en posición (compare $\Gamma_{i\ell}'^\nu = \Gamma_{\ell i}^\nu$ con $\Gamma_{i\ell}^\nu$, que aparece en el diagrama 1). Por lo cual es deseable establecer la relación entre $\Gamma_{\ell i}^\nu$ y $\Gamma_{i\ell}^\nu$. Debido a que en el lagrangiano de interacción no se requieren agregar conjugados hermitianos de las interacciones entre dos tipos de neutrinos y un bosón de Higgs, podríamos asumir que $\Gamma_{\ell i}^\nu$ y $\Gamma_{i\ell}^\nu$ describen la misma interacción, ya sea que los dos neutrinos sean masivos, neutrinos ordinarios (en cuyo caso la interacción sólo es posible en lazos) o un masivo con uno ordinario. Sin embargo, se procede a mostrar esto explícitamente, lo cual no sería evidente sólo con ver la ecuación.

Considerando la ecuación 3.18, nos damos cuenta de que lo que diferencia a $\Gamma_{\ell i}^\nu$ de $\Gamma_{i\ell}^\nu$ reside únicamente en el coeficiente $\xi_{\ell i}$, por lo que debe analizarse a detalle.

$$\xi_{\ell i} = A_{\ell i} - B_{\ell i} .$$

Recordamos que la definición de $A_{\ell i}$ y $B_{\ell i}$ es

$$A_{\ell i} = -\frac{g}{4m_W} (m_\ell + m_i) \text{Re}\{\mathcal{C}_{N_\ell N_i}\} , \quad B_{\ell i} = -\frac{g}{4m_W} i(m_i - m_\ell) \text{Im}\{\mathcal{C}_{N_\ell N_i}\} .$$

Por definición

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\ell i} &= \sum_{k=1}^{n_G} U_{k\ell}^\nu U_{ki}^{\nu*} , \\ \implies \mathcal{C}_{\ell i} &= \sum_{k=1}^{n_G} (U_{k\ell}^\nu U_{ki}^{\nu*})^* = \left(\sum_{k=1}^{n_G} U_{k\ell}^\nu U_{ki}^{\nu*} \right)^* = \left(\sum_{k=1}^{n_G} U_{ki}^\nu U_{k\ell}^{\nu*} \right)^* = \mathcal{C}_{i\ell}^* . \end{aligned}$$

Dicho resultado $\mathcal{C}_{\ell i} = \mathcal{C}_{i\ell}^*$ es equivalente a decir que \mathcal{C} es hermitiana, $\mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}$.

Debido a que \mathcal{C} es hermitiana, entonces $\mathcal{C}_{N_\ell N_i} = \mathcal{C}_{N_i N_\ell}^*$. Notamos que para cualquier número complejo $\mathcal{C}_{N_i N_\ell}^*$ se cumple que

$$\text{Re}\{\mathcal{C}_{N_i N_\ell}^*\} = \text{Re}\{\mathcal{C}_{N_i N_\ell}\} , \quad \text{y} \quad \text{Im}\{\mathcal{C}_{N_i N_\ell}^*\} = -\text{Im}\{\mathcal{C}_{N_i N_\ell}\} .$$

Sustituyendo en $A_{\ell i}$ y $B_{\ell i}$ y usando la hermiticidad de \mathcal{C} , obtenemos

$$\begin{aligned} A_{\ell i} &= -\frac{g}{4m_W}(m_\ell + m_i)\text{Re}\{\mathcal{C}_{N_\ell N_i}^*\} = -\frac{g}{4m_W}(m_i + m_\ell)\text{Re}\{\mathcal{C}_{N_i N_\ell}\} = A_{i\ell} , \\ \implies A_{\ell i} &= A_{i\ell} , \\ B_{\ell i} &= -\frac{g}{4m_W}i(m_i - m_\ell)(-\text{Im}\{\mathcal{C}_{N_\ell N_i}^*\}) = -\frac{g}{4m_W}i(m_\ell - m_i)\text{Im}\{\mathcal{C}_{N_i N_\ell}\} = B_{i\ell} , \\ \implies B_{\ell i} &= B_{i\ell} , \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \xi_{\ell i} &= A_{\ell i} - B_{\ell i} = A_{i\ell} - B_{i\ell} = \xi_{i\ell} , \\ \implies \xi_{\ell i} &= \xi_{i\ell} \quad , \quad \xi_{\ell i}^* = \xi_{i\ell}^* . \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\Gamma_{\ell i}^\nu = \xi_{\ell i} P_L + \xi_{\ell i}^* P_R = \xi_{i\ell} P_L + \xi_{i\ell}^* P_R = \Gamma_{i\ell}^\nu ,$$

y recordando que

$$\Gamma_{i\ell}^{\nu'} = \Gamma_{\ell i} ,$$

se concluye que

$$\Gamma_{i\ell}^{\nu'} = \Gamma_{i\ell}^\nu . \tag{3.23}$$

Este resultado es de gran importancia, porque nos dice que todos los diagramas de tipo Majorana que se derivan de un diagrama de tipo Dirac nos aportan una contribución igual a la contribución que el diagrama de tipo Dirac del que se derivaron.

Resulta pertinente que a partir de este punto se realicen los cálculos siguientes con herramientas de software. Para ello se utilizaron herramientas de la paquetería FeynCalc, del programa Wolfram Mathematica[®], pero antes es necesario calcular las condiciones cinemáticas, las cuales son necesarias para el programa al calcular las trazas de cada contribución. Para esto se parte de la conservación del 4-momento:

$$\begin{aligned} p &= q_1 + q_2 \implies q_2 = p - q_1 , \\ \implies q_2^2 &= (p - q_1)^2 . \end{aligned}$$

Además, la condición de capa de masa nos dice que

$$\begin{aligned} q_2^2 &= q_1^2 = p^2 = m_h^2 , \\ \implies m_h^2 &= p^2 + q_1^2 - 2p \cdot q_1 \\ &= 2m_h^2 - 2p \cdot q_1 , \\ \implies p \cdot q_1 &= \frac{1}{2}m_h^2 . \end{aligned}$$

Al conocer $p \cdot q_1$ y tener q_2 en términos de p y q_1 , podemos conocer los demás productos escalares

$$\begin{aligned} p \cdot q_2 &= p \cdot (p - q_1) = p^2 - p \cdot q_1 = m_h^2 - \frac{1}{2}m_h^2, \\ \implies p \cdot q_2 &= \frac{1}{2}m_h^2, \\ q_1 \cdot q_2 &= q_1 \cdot (p - q_1) = q_1 \cdot p - q_1^2 = \frac{1}{2}m_h^2 - m_h^2, \\ \implies q_1 \cdot q_2 &= -\frac{1}{2}m_h^2. \end{aligned}$$

Si consideramos que cada una de las contribuciones de diagramas con neutrinos masivos tiene la siguiente forma

$$\int d^D k (\text{tr}\{P_a(k, p, q_1, q_2)\}),$$

donde $P_a(k, p, q_1, q_2)$ representa el producto de los propagadores y vértices de dicha contribución, entonces la amplitud tiene como estructura general la siguiente forma

$$\mathcal{M} = \sum_a \int d^D k (\text{tr}\{P_a(k, p, q_1, q_2)\}),$$

donde a corre sobre todas las contribuciones consideradas. Sin embargo, es conveniente reescribir la ecuación anterior como

$$\mathcal{M} = \text{tr} \left\{ \sum_a \int d^D k P_a(k, p, q_1, q_2) \right\},$$

y definimos $\widetilde{\mathcal{M}}$ como

$$\widetilde{\mathcal{M}} \equiv \sum_a \int d^D k P_a(k, p, q_1, q_2),$$

de manera que $\mathcal{M} = \text{tr}\{\widetilde{\mathcal{M}}\}$. Utilizando el programa escrito con FeynCalc se obtuvo $\widetilde{\mathcal{M}}$, cuya estructura general se escribe como

$$\widetilde{\mathcal{M}} = [\beta_1 p_\mu + \beta_2 q_{1\mu} + \beta_3 q_{2\mu}] \gamma^\mu P_R + [\beta_4 p_\mu + \beta_5 q_{1\mu} + \beta_6 q_{2\mu}] \gamma^\mu P_L + \beta_7 P_R + \beta_8 P_L,$$

donde β_i son coeficientes que están en términos de funciones de Passarino-Veltman [21, 22] y de las masas del Higgs y de los neutrinos masivos. Nos interesa ver la estructura de la matriz $\widetilde{\mathcal{M}}$ porque se usó regularización dimensional y tenemos matrices γ_5 , lo cual es importante porque la matriz γ_5 no es compatible con la regularización dimensional [23]. En específico se presenta un problema cuando se tiene $\text{tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma_5\}$, ya que en $D = 4$, esta traza es distinta de cero, por lo que si se pretende utilizar regularización dimensional, al tomar el límite cuando $D \rightarrow 4$, se debería recuperar el resultado $\text{tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma_5\} = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. El problema surge al ver que en D dimensiones, el resultado $\text{tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma_5\} \neq 0$ y las propiedades $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$, $\text{tr}\{ABC\} = \text{tr}\{CAB\}$ (ciclicidad), no son compatibles. Si se preservan 2 de ellas, la tercera no puede cumplirse. Si $\text{tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma_5\} \neq 0$ y $\text{tr}\{ABC\} = \text{tr}\{CAB\}$, entonces $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} \neq 0$, lo cual viola la simetría quiral, y por lo tanto la invariancia de norma. Si quisieramos preservar la ciclicidad de la traza y $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$, entonces se requeriría que $\text{tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma_5\} = 0$, lo cual no nos permitiría recuperar el resultado al tomar el límite $D \rightarrow 4$. Este problema no tendría mayor importancia en nuestros cálculos si no aparece en ellos el producto $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma_5$, pues se puede seguir considerando la propiedad de ciclicidad y la anticonmutatividad de γ_5 con γ^μ . Efectivamente vemos que en $\widetilde{\mathcal{M}}$ no aparece este tipo de

productos, por lo que se puede proceder a calcular su traza para obtener \mathcal{M} . Se puede hacer de forma analítica o computacional. Se procede con el método computacional para mayor facilidad de manejo de los resultados, que se utilizan en los siguientes cálculos. La amplitud es

$$\mathcal{M} = \rho_1 C_0 + \alpha_1 B_0^1 + \alpha_2 B_0^2 + \alpha_3 B_0^3, \quad (3.24)$$

donde C_0 y B_0^j son funciones de Passarino Veltman [21, 22]. Siendo C_0 la función de 3 puntos y B_0 la función de 2 puntos. Están definidas de la siguiente forma.

$$B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) = \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 - m_1^2)((q+p)^2 - m_2^2)}, \quad (3.25)$$

$$C_0(p_1^2, p^2, (p_1 - p)^2, m_a^2, m_b^2, m_c^2) = \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 - m_a^2)((q+p_1)^2 - m_b^2)((q+p_1-p)^2 - m_c^2)}. \quad (3.26)$$

Podemos argumentar, basándonos en el grado superficial de divergencia cuando $D \rightarrow 4$, que B_0 es divergente, y C_0 es convergente. En particular, cuando $D \rightarrow 4$, el grado superficial de divergencia de B_0 es 0; lo que significa que tiene diferencias logarítmicas, por lo que B_0 se puede escribir de forma general como

$$B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) = \Delta_\epsilon - \log(\mu^2) + f(p^2, m_1^2, m_2^2), \quad (3.27)$$

donde el primer término es la parte divergente, y el segundo y tercer término son la parte finita, en la cuál f está en función de los argumentos de B_0 , y $\log(\mu^2)$ no depende de los argumentos de B_0 . Debido a que la parte divergente de B_0 no depende de los argumentos en B_0 , podemos darnos cuenta de que para B_0 con cualesquiera argumentos, la parte divergente es exactamente la misma. Explícitamente, el término divergente es $\Delta_\epsilon \equiv \frac{2}{4-D} - \gamma_E + \log(4\pi)$, donde γ_E es la constante de Euler-Mascheroni. El hecho de que Δ_ϵ sea igual para cualquier B_0 abre una posibilidad de eliminar las divergencias. Nos fijamos nuevamente en la ecuación 3.24, específicamente en la suma de B_0^j , donde $B_0^1 = B_0(m_h^2, m_i^2, m_j^2)$, $B_0^2 = B_0(m_h^2, m_i^2, m_\ell^2)$ y $B_0^3 = B_0(m_h^2, m_j^2, m_\ell^2)$. La suma de las funciones de dos puntos se puede escribir como

$$\begin{aligned} \alpha_1 B_0^1 + \alpha_2 B_0^2 + \alpha_3 B_0^3 &= \alpha_1 B_0^1 + \alpha_2 B_0^2 + \alpha_3 B_0^3 + \alpha_1 B_0^2 - \alpha_1 B_0^2 \\ &= \alpha_1 (B_0^1 - B_0^2) + (\alpha_1 + \alpha_2) B_0^2 + \alpha_3 B_0^3 \\ &= \alpha_1 (B_0^1 - B_0^2) + (\alpha_1 + \alpha_2) B_0^2 + \alpha_3 B_0^3 + (\alpha_1 + \alpha_2) B_0^3 - (\alpha_1 + \alpha_2) B_0^3 \\ &= \alpha_1 (B_0^1 - B_0^2) + (\alpha_1 + \alpha_2) (B_0^2 - B_0^3) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) B_0^3. \end{aligned}$$

Vemos que en los primeros dos términos se anulan las divergencias al restarse una función B_0^j de la otra. Sólo en el tercer término no se anulan las divergencias, sin embargo, en caso de que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, nuestro resultado sería finito. Los resultados del programa nos dan los valores de los coeficientes

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{3}{2\pi^2} (\xi_{lj} \xi_{il}^* (m_i \xi_{ji}^* + m_j \xi_{ji}) + \xi_{il} \xi_{lj}^* (m_j \xi_{ji}^* + m_i \xi_{ji})), \\ \alpha_2 &= -\frac{3}{2\pi^2} (\xi_{lj} \xi_{ji}^* (m_i \xi_{il}^* + m_l \xi_{il}) + \xi_{ji} \xi_{lj}^* (m_l \xi_{il}^* + m_i \xi_{il})), \\ \alpha_3 &= -\frac{3}{2\pi^2} (\xi_{il} \xi_{ji}^* (m_j \xi_{lj}^* + m_l \xi_{lj}) + \xi_{ji} \xi_{il}^* (m_l \xi_{lj}^* + m_j \xi_{lj})). \end{aligned}$$

Por lo que la suma nos da

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{3}{\pi^2} (\xi_{il}^* (m_i \xi_{lj} \xi_{ji}^* + m_l \xi_{ji} \xi_{lj}^* + m_j \xi_{ji} \xi_{lj}) + m_i \xi_{il} \xi_{ji} \xi_{lj}^* + \xi_{il} \xi_{ji}^* (m_j \xi_{lj}^* + m_l \xi_{lj})),$$

lo cual en general no es 0. Esto muestra que se tiene una divergencia ultravioleta, la cual es:

$$\frac{6}{\pi^2(D-4)}(\xi_{il}^*(m_i\xi_{lj}\xi_{ji}^* + m_l\xi_{ji}\xi_{lj}^* + m_j\xi_{ji}\xi_{lj}) + m_i\xi_{il}\xi_{ji}\xi_{lj}^* + \xi_{il}\xi_{ji}^*(m_j\xi_{lj}^* + m_l\xi_{lj})) . \quad (3.28)$$

En esta situación, lo más adecuado es seguir un proceso de renormalización, para tratar de obtener un resultado finito. Se planteó seguir el esquema de renormalización MS (Minimal subtraction), el cual consiste en hallar contratérminos que anulen las divergencias que se obtuvieron. Desafortunadamente, tras un cuidadoso análisis, se encontró que la cantidad de contratérminos involucrados serían demasiados, lo cual está respaldado por [24]. Es probable que sólo para renormalizar esta corrección radiativa se tuviera que renormalizar una buena parte del sector de Higgs, sino es que todo el sector de Higgs.

Capítulo 4

Perspectivas de trabajo y conclusiones

Recapitulando lo que se realizó a lo largo del trabajo. Se calculó la amplitud de hhh a nivel de un lazo, formado por neutrinos masivos de Majorana, los cuales surgen del modelo [10]. Estos neutrinos son virtuales, y se halló que en efecto estos neutrinos generan contribuciones a hhh incluso si todos los bosones de Higgs se encuentran en la capa de masa. Se encontró que los diagramas de tipo Majorana generan la misma contribución que los diagramas de tipo Dirac. Lo que significa que los resultados que se obtengan serán los mismos ya sea que se use o no la condición de Majorana en los campos neutrinos. Desafortunadamente las contribuciones tienen divergencias ultravioletas, las cuales no resultan sencillas de eliminar. Para eliminar las divergencias es necesario renormalizar; sin embargo una renormalización en el esquema MS (minimal subtraction) no fue conveniente a estas alturas del trabajo, pues de acuerdo con [24] se obtienen demasiados contratérminos, los cuales no son fáciles de hallar. Es probable que para poder obtener todos los contratérminos, hubiera que renormalizar todo el sector de Higgs. Aunque para el presente trabajo, una renormalización como la que se plantea sería muy problemática, la renormalización del sector de Higgs es un trabajo de gran interés, por lo que se podría considerar como proyecto a futuro la renormalización de este sector y en dado caso, retomar las divergencias ultravioletas halladas, para verificar si se podrían eliminar. Personalmente, este trabajo me resultó muy enriquecedor, pues me vi en la situación de aprender a calcular procesos a 1 lazo, sin mencionar que ahora me parece claro la forma en que se utiliza el teorema de Wick en cálculos de diagramas de Feynman. De igual manera, anteriormente no estaba familiarizado con las simetrías discretas de la Física de partículas, y para el desarrollo del trabajo tuve que trabajar mucho con la conjugación de carga y todas las propiedades muy útiles de esta transformación. Por último, pero no menos importante, el realizar este trabajo me permitió adquirir experiencia en la búsqueda de información de fuentes científicas, consulta de papers, y discriminación de información que me fuera útil; todas estas habilidades son de suma importancia para realizar investigación. Tras ver los resultados obtenidos, las perspectivas futuras de trabajo y el enriquecimiento personal, considero que se alcanzaron suficientemente los objetivos planteados en el protocolo de trabajo.

Apéndice A

Diagramas de Majorana restantes

A continuación se presentan los diagramas 2-6, incluyendo en cada imagen el diagrama de tipo Dirac y sus correspondientes diagramas de tipo Majorana que se derivan de él. Así como también la contribución de cada diagrama.

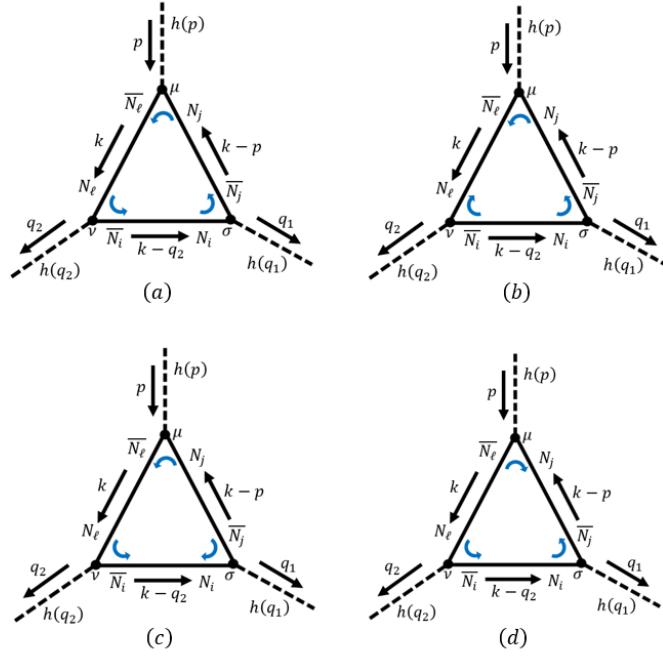


Figura A.1: Diagramas que surgen del diagrama 2 de tipo Dirac. (a) Diagrama 2 de tipo Dirac. (b) Diagrama 2 de tipo Majorana con transformación del vértice ν . (c) Diagrama 2 de tipo Majorana con transformación del vértice σ . (d) Diagrama 2 de tipo Majorana con transformación del vértice μ .

Diagrama 2 de Majorana, vértice ν

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma (\not{k} - \not{q}_2 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^{\nu'} (\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^\mu (\not{k} - \not{p} + m_j \mathbb{1}_n))}{((k - q_2)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k - p)^2 - m_j^2)}, \quad (\text{A.1})$$

Diagrama 2 de Majorana, vértice σ

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^{\sigma'}(\not{k} - \not{q}_2 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^{\nu}(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^{\mu}(\not{k} - \not{p} + m_j \mathbb{1}_n))}{((k - q_2)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k - p)^2 - m_j^2)}, \quad (\text{A.2})$$

Diagrama 2 de Majorana, vértice μ

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^{\sigma}(\not{k} - \not{q}_2 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^{\nu}(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^{\mu'}(\not{k} - \not{p} + m_j \mathbb{1}_n))}{((k - q_2)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k - p)^2 - m_j^2)}, \quad (\text{A.3})$$

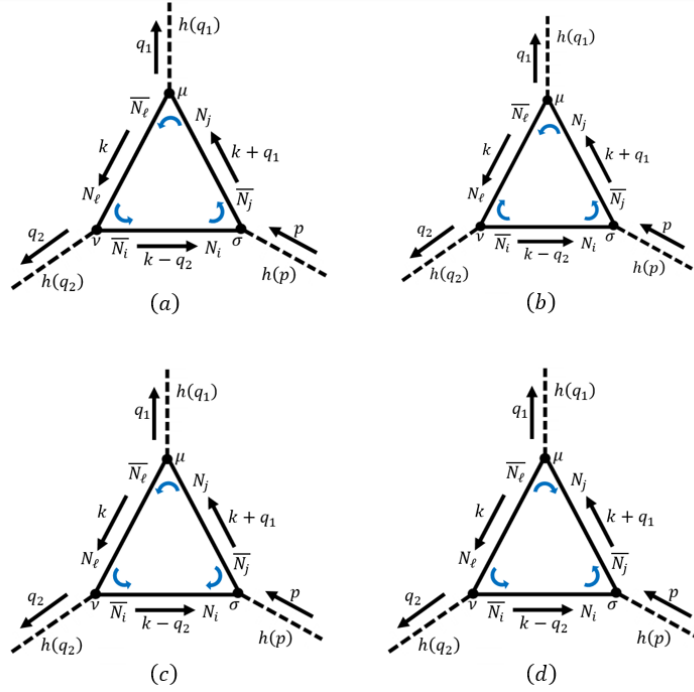


Figura A.2: Diagramas que surgen del diagrama 3 de tipo Dirac. (a) Diagrama 3 de tipo Dirac. (b) Diagrama 3 de tipo Majorana con transformación del vértice ν . (c) Diagrama 3 de tipo Majorana con transformación del vértice σ . (d) Diagrama 3 de tipo Majorana con transformación del vértice μ .

Diagrama 3 de Majorana, vértice ν

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^{\sigma}(\not{k} - \not{q}_2 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^{\nu'}(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^{\mu}(\not{k} + \not{q}_1 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k - q_2)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k + q_1)^2 - m_j^2)}, \quad (\text{A.4})$$

Diagrama 3 de Majorana, vértice σ

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^{\sigma'}(\not{k} - \not{q}_2 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^{\nu}(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^{\mu}(\not{k} + \not{q}_1 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k - q_2)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k + q_1)^2 - m_j^2)}, \quad (\text{A.5})$$

Diagrama 3 de Majorana, vértice μ

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^{\sigma}(\not{k} - \not{q}_2 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^{\nu}(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^{\mu'}(\not{k} + \not{q}_1 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k - q_2)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k + q_1)^2 - m_j^2)}, \quad (\text{A.6})$$

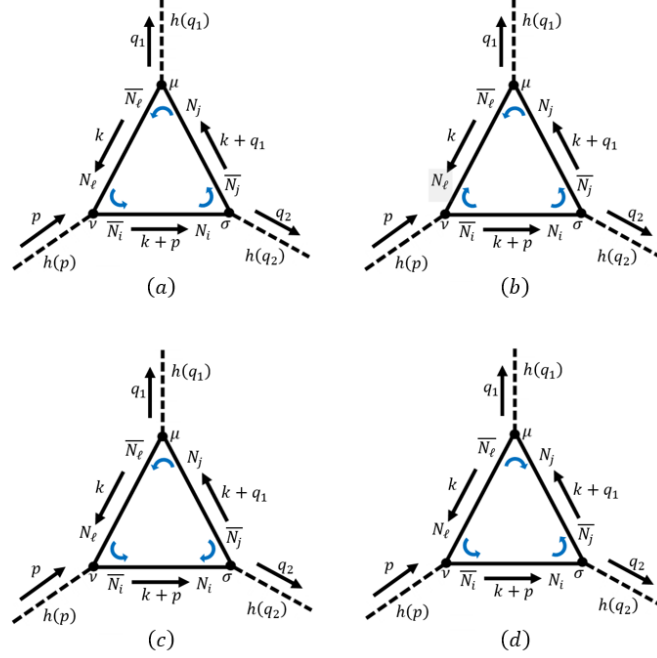


Figura A.3: Diagramas que surgen del diagrama 4 de tipo Dirac. (a) Diagrama 4 de tipo Dirac. (b) Diagrama 4 de tipo Majorana con transformación del vértice ν . (c) Diagrama 4 de tipo Majorana con transformación del vértice σ . (d) Diagrama 4 de tipo Majorana con transformación del vértice μ .

Diagrama 4 de Majorana, vértice ν

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma(\not{k} + \not{p} + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^\nu(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^\mu(\not{k} + q_1 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k+p)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k+q_1)^2 - m_j^2)}, \quad (\text{A.7})$$

Diagrama 4 de Majorana, vértice σ

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^{\sigma'}(\not{k} + \not{p} + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^\nu(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^\mu(\not{k} + q_1 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k+p)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k+q_1)^2 - m_j^2)}, \quad (\text{A.8})$$

Diagrama 4 de Majorana, vértice μ

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma(\not{k} + \not{p} + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^\nu(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^{\mu'}(\not{k} + q_1 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k+p)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k+q_1)^2 - m_j^2)}, \quad (\text{A.9})$$

Diagrama 5 de Majorana, vértice ν

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma(\not{k} + \not{p} + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^\nu(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^\mu(\not{k} + q_2 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k+p)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k+q_2)^2 - m_j^2)}, \quad (\text{A.10})$$

Diagrama 5 de Majorana, vértice σ

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^{\sigma'}(\not{k} + \not{p} + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^\nu(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^\mu(\not{k} + q_2 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k+p)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k+q_2)^2 - m_j^2)}, \quad (\text{A.11})$$

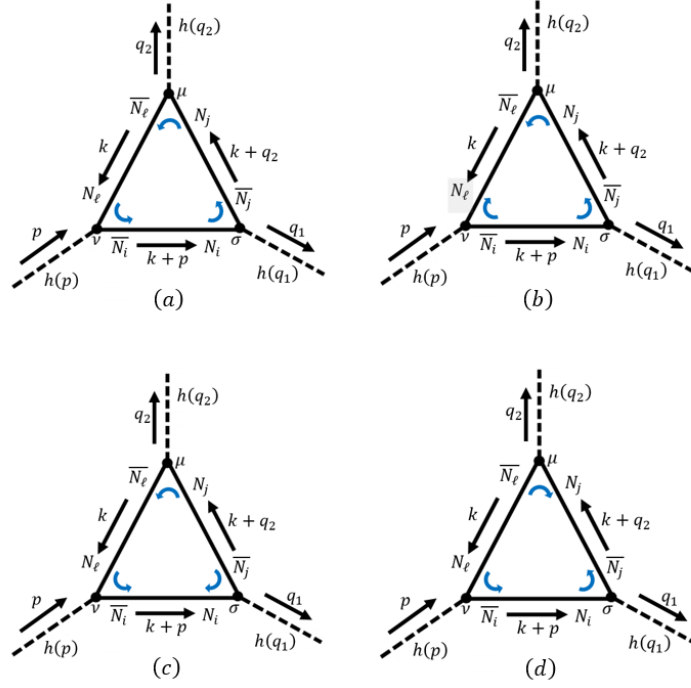


Figura A.4: Diagramas que surgen del diagrama 5 de tipo Dirac. (a) Diagrama 5 de tipo Dirac. (b) Diagrama 5 de tipo Majorana con transformación del vértice ν . (c) Diagrama 5 de tipo Majorana con transformación del vértice σ . (d) Diagrama 5 de tipo Majorana con transformación del vértice μ .

Diagrama 5 de Majorana, vértice μ

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma(\not{k} + \not{p} + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^\nu(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^{\mu'}(\not{k} + \not{q}_2 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k+p)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k+q_2)^2 - m_j^2)}, \quad (\text{A.12})$$

Diagrama 6 de Majorana, vértice ν

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma(\not{k} - \not{q}_1 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^{\nu'}(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^\mu(\not{k} + \not{q}_2 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k-q_1)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k+q_2)^2 - m_j^2)}, \quad (\text{A.13})$$

Diagrama 6 de Majorana, vértice σ

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^{\sigma'}(\not{k} - \not{q}_1 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^\nu(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^\mu(\not{k} + \not{q}_2 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k-q_1)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k+q_2)^2 - m_j^2)}, \quad (\text{A.14})$$

Diagrama 6 de Majorana, vértice μ

$$i\mathcal{M} = i\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}(\Gamma_{ji}^\sigma(\not{k} - \not{q}_1 + m_i \mathbb{1}_n) \Gamma_{i\ell}^\nu(\not{k} + m_\ell \mathbb{1}_n) \Gamma_{\ell j}^{\mu'}(\not{k} + \not{q}_2 + m_j \mathbb{1}_n))}{((k-q_1)^2 - m_i^2)(k^2 - m_\ell^2)((k+q_2)^2 - m_j^2)}. \quad (\text{A.15})$$

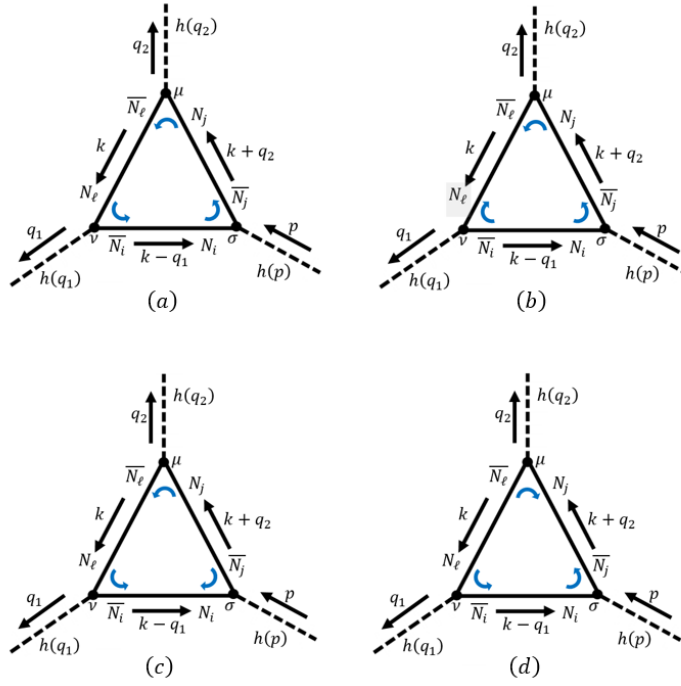


Figura A.5: Diagramas que surgen del diagrama 6 de tipo Dirac. (a) Diagrama 6 de tipo Dirac. (b) Diagrama 6 de tipo Majorana con transformación del vértice ν . (c) Diagrama 6 de tipo Majorana con transformación del vértice σ . (d) Diagrama 6 de tipo Majorana con transformación del vértice μ .

Bibliografía

- [1] S. L. Glashow, *Partial-symmetries* Nucl. Phys. 22, 579 (1961).
- [2] A. Salam, *Weak and electromagnetic interactions*, Conf. Proc. C 680519, 367 (1968).
- [3] S. Weinberg, *A model of leptons*, Phys. Rev. Lett. 19, 1264 (1967).
- [4] G. Aad et al. (The ATLAS Collaboration), *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, Phys. Lett. B 716, 1 (2012).
- [5] S. Chatrchyan et al. (The CMS Collaboration), *Observation of a new boson at mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*, Phys. Lett. B 716, 30 (2012).
- [6] Y. Fukuda et al. (Super-Kamiokande Collaboration), *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, Phys. Rev. Lett. 81, 1562 (1998).
- [7] Q. R. Ahmad et al. (SNO Collaboration), *Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*, Phys. Rev. Lett. 89, 011301 (2002).
- [8] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, *Neutrino mass and spontaneous parity nonconservation*, Phys. Rev. Lett. 44, 912 (1980).
- [9] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, *Neutrino masses and mixings in gauge models with spontaneous parity violation*, Phys. Rev. D 23, 165 (1981).
- [10] A. Pilaftsis, *Radiatively induced neutrino masses and large Higgs-neutrino couplings in the standard model with Majorana fields*, Z. Phys. C 55, 275 (1992).
- [11] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model* (Cambridge University Press, 2014), pp. 561-579.
- [12] M. Guidry, *Gauge Field Theories. An introduction with applications* (Wiley-VCH, 1991), pp. 246-269.
- [13] F. Strocchi, *Symmetry Breaking* 3rd edition (Springer-Verlag, 2021), pp. 7-9, 47-51.
- [14] H. Abouabid et al., *HHH Whitepaper*, HHH Workshop, (2024).
- [15] C. Giunti y C. W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics* (Oxford University Press, 2007), pp. 18, 19, 48, 188-190.
- [16] M. Aker et al. (The KATRIN Collaboration), *Direct neutrino-mass measurement with sub-electronvolt sensitivity*, Nat. Phys. 18, 160 (2022).
- [17] T. -P. Cheng and L. -F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics* (Oxford University Press, Oxford, 1988).

- [18] M. E. Peskin y D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Perseus Books Publishing, 1995), pp. 82-123.
- [19] G. C. Wick, *The Evaluation of the Collision Matrix* Physical Review, 80(3), 268–272 (1950).
- [20] H. Novales-Sánchez and M. Salinas, *Majorana neutrinos in the triple gauge boson coupling ZZZ^** , Phys. Rev. D 108, 075032 (2023).
- [21] G. Passarino and M. Veltman, *One-loop corrections for $e^+ e^-$ annihilation into $\mu^+ \mu^-$ in the Weinberg-Salam model*, Phys. Rev. D 19, 1966 (1979).
- [22] G. Passarino and M. Veltman, *The simplification of loop integrals*, Nucl. Phys. B 187, 432 (1980).
- [23] F. Jegerlehner, *Facts of life with γ_5* , The European Physical Journal C-Particles and Fields, 18(4), 673-679 (2001).
- [24] A. Arhrib, R. Benbrik, J. El Falaki, & A. Jueid, *Radiative corrections to the triple Higgs coupling in the inert Higgs doublet model*, Journal of High Energy Physics, 12, 1-23 (2015).