F

C

F

M

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemático

Derivación de la fase de un frente de onda con el experimento de Young

Por:

Luis Mario Arellano Gonzalez

Como requisito para la obtención del grado de

Licenciatura en Física

Asesor de tesis:

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez

Fecha de entrega:

Agosto del 2022

Resumen

Los interferómetros son instrumentos ópticos que nos permiten producir interferencia de una manera controlada. Podemos clasificar a los interferómetros en dos tipos; por división de frente de onda y por división de amplitud. Para nuestro proyecto de tesis nos enfocaremos en analizar el experimento de Young que se encuentra clasificado en los interferómetros de división de frente de onda. El patrón de franjas observado en el experimento de Young pone de manifiesto la naturaleza ondulatoria de la luz. Se puede explicar usando dos principios físicos. El primero, conocido como principio de Huygens, sugiere que cada punto de un frente de onda se puede considerar como una fuente esférica secundaria. El segundo, conocido como principio de Fresnel, sugiere que el frente de onda propagado es el resultado de la superposición de los frentes de onda generados por las fuentes secundarias de Huygens.

Aplicaremos estos dos principios para obtener el resultado conocido de patrón de interferencia de la doble rendija de Young, como una superposición de dos frentes de onda esféricos en el plano de observación y aunado a este resultado se realizará una explicación teórica comprobada con simulación en MATLAB donde se explica que el patrón de Young se obtiene como la derivada de un frente de onda esférico.

Agradecimientos

En este trabajo quiero agradecer a las siguientes personas y entidades.

A LA BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Por brindarme una educación gratuita y de calidad.

A LA FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Que a través de su planta académica e instalaciones me permitieron adquirir conocimientos y habilidades para desarrollar este trabajo y formarme como físico.

A MI ASESOR

Al Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez

Por su tiempo, dedicación y esfuerzo para terminar esta tesis y sus conocimientos transmitidos.

A MIS SINODALES

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar, Dr. W. Fermín Guerreo Sánchez, Dra. M. Maribel Méndez Otero y al M.C Luis Alberto Rendón Delgado

Por su valioso tiempo y buenos comentarios al revisar este trabajo

A MIS COMPAÑEROS DE LA FCFM

A mis compañeros y amigos que compartieron momentos importantes en la licenciatura, en especial a Guadalupe Sandoval, Diana L. García, Itzel Díaz, Ricardo Paredes y Ricardo Rendón.

Dedicatorias

A mis padres

Luis Antonio Arellano Ramírez y Lilia Gonzalez López por su apoyo incondicional y siempre confiar en mí.

A mi tía

Luisa Gonzalez López por su respaldo y apoyo total en toda la carrera.

Índice General

Capítulo 1

1 Introducción y justificación del trabajo 1

1.1 Introducción 1

1.2 Antecedentes históricos 2

1.2.1 Reseña biográfica de Thomas Young 3

1.2.2 Principio de Huygens y aportación de Fresnel 4

1.3 Motivación del trabajo 5

1.4 Objetivos generales 6

1.5 Objetivos particulares 6

Capítulo 2

2 Interferencia de ondas 8

2.1 Introducción 8

2.2 Ondas 8

2.3 Ecuación de onda 9

2.4 Ondas armónicas y superposición 9

2.5 Irradiancia 11

2.6 Interferencia 12

2.7 Interferómetro de Young 13

2.8 Frentes de onda desde el fenómeno de difracción 15

2.8.1 Teoría escalar de la difracción 15

2.8.2 Difracción de Fresnel 16

2.9 Frentes de onda esféricos obtenidos con difracción 17

Capítulo 3

3 Derivación numérica del frente de onda 20

3.1 Introducción 20

3.2 Definición de derivada numérica 20

3.3 Formulas centrales 21

Capítulo 4

4 Resultados 23

4.1 Introducción 23

4.2 Experimento de Young 23

4.3 Experimento de Young explicado geométricamente como la derivada del frente de onda 24

4.4 Simulación de diferenciación de frentes de onda 29

4.4.1 Diferenciación de un frente de onda esférico 29

4.4.2 Experimento de Young con frentes de onda deformados 32

4.4.2.1 Derivación de un frente de onda esférico afectado con aberración esférica 32

4.4.2.2 Derivación de un frente de onda esférico afectado con una aberración esférica + coma 35

Capítulo 5

Conclusiones 37

Bibliografía 39

Capítulo 1

Introducción y justificación del trabajo

1.1 Introducción

Al inicio del siglo XIX en 1805 el médico inglés Thomas Young dedicó sus esfuerzos a establecer la naturaleza ondulatoria de la luz. Antes de él, Grimaldi realizó experimentos semejantes a los de Young sin éxito en sus resultados, al no conseguir que la coherencia espacial de la fuente de iluminación le permitiera observar indicios de interferencia. Young tuvo éxito en sus resultados haciendo pasar primeramente la luz solar por un pequeño orificio, mejorando la coherencia espacial. La luz dispersada por el orificio ilumina las dos rendijas. En la región de superposición, las dos ondas que se dispersaban por las rendijas interferían entre sí y crean un patrón de franjas brillantes y oscuras. El esquema platicado antes corresponde al experimento original de Young, una fuente extensa, incoherente que requiere las condiciones propuestas de Young para obtener interferencia. Como resultado de la interferencia provocada por las dos ondas se observa un patrón de interferencia de tipo cosenoidal. Las franjas cosenoidales se obtiene de la irradiancia

$$\boldsymbol{I} = 4I_0 cos^2\left(\frac{\pi x a}{s\lambda}\right) \qquad 1.1$$

Aquí la a es la separación entre rendijas, s la distancia de las rendijas al plano de observación y λ la longitud de onda usada. Con el experimento de

Young se pone de manifiesto la naturaleza ondulatoria de la luz dando un cuadro de interferencia bien establecido.

El experimento de Young tiene en nuestros días otras variantes. Se usan ondas planas monocromáticas que iluminan un par de rendijas pero también se emplean orificios circulares.

Un tratamiento diferente del experimento de Young incorpora la teoría de la difracción usando el Principio de Huygens y el Principio de Fresnel.

Tomando en cuenta el Principio de Huygens-Fresnel se puede encontrar en algunos casos sencillos cuales son las ondas que emanan de orificios, rendijas o filos de navajas y para algunas aberturas complicadas se puede usar técnicas numéricas.

Con estas ideas se propone en este trabajo de tesis interpretar que el experimento de Young pone de manifiesto que la luz no solo es un fenómeno ondulatorio sino que igualmente el experimento de Young permite obtener de forma analógica una operación matemática como es la derivada del frente de onda generada por los dos orificios. Se realiza un experimento donde se demuestra experimentalmente esta tesis.

1.2 Antecedentes históricos

En este capítulo se hace una reseña bibliográfica del científico Thomas Young, así como de su trabajo más importante titulado: “El experimento de Young” o “Experimento de la doble rendija”. También mencionaremos el principio de Huygens y aportación de Fresnel.

1.2.1 Reseña biográfica de Thomas Young

Thomas Young nació el 13 de junio de 1773 en Milverton, al suroeste de Inglaterra. Fue un médico, científico y matemático que debe su fama, sobre todo, a sus trabajos acerca de la óptica física y fisiología.

En 1801 realiza la primera prueba convincente de difracción, que consistía en dividir un frente de onda mediante una doble rendija y observar que patrón aparecía, esperando obtener solo dos bandas de luz sin interferencia, pues aún se creía que la luz eran partículas como lo propuso Newton, sin embargo lo que se observo fue un patrón de franjas que solo podían ser explicadas en términos de la teoría ondulatoria. Lo que significó que los físicos de su época comenzaran a dudar que la luz consistiera en partículas que se desplazaban en líneas rectas [1].

Figura 2.1: Thomas Young

1.2.2 Principio de Huygens y aportación de Fresnel

El principio de Huygens nos permite explicar fenómenos ondulatorios relacionados con la propagación de la onda y nos ayudara a fundamentar nuestro trabajo, pues da información sobre reflexión, la refracción y la difracción. Fue desarrollado en 1678 por Christian Huygens (1629 - 1695), físico, astrónomo y matemático holandés en su obra *"Tratado de la luz"* y es una descripción geométrica del fenómeno de la propagación de las ondas a través del espacio.

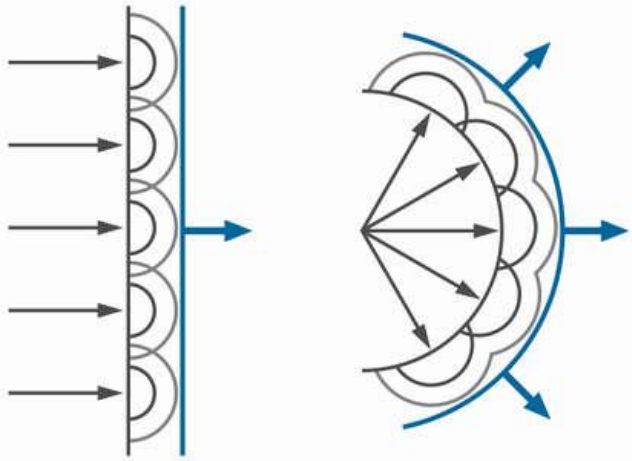

Figura 1.3 Principio de Huygens Fresnel

Enunciado.

- Cada punto de un frente de ondas puede considerarse un foco de ondas secundarias que se propagan en la misma dirección de la perturbación.

La velocidad de propagación y frecuencia de estas ondas secundarias es la misma que la de la onda original.

- La superficie tangente (conocida como envolvente) a todas las ondas secundarias en un determinado instante es el siguiente frente de ondas [2].

En 1818, Agustin-Jean Fresnel modifico esta teoría, suponiendo que los frentes de onda secundarios no solamente se unían para formar una envolvente del frente de onda, sino que además interferían unos con otros según los principios de interferencia. Dicho de otro modo, las perturbaciones ópticas debidas a cada frente de onda secundario deben sumarse sobre la pantalla iluminada, tomando en cuenta su amplitud y fase en cada punto.

El principio de Huygens aplicado de esta manera se conoce con el nombre de principio de Huygens-Fresnel [6].

1.3 Motivación del trabajo

La física y las matemáticas sostienen una relación muy estrecha, la física es una ciencia que necesita de las matemáticas para existir, si queremos analizar un fenómeno físico, necesitamos traducirlo de algún modo a una expresión matemática, como una ecuación.

Un ejemplo muy claro de lo anterior son las aplicaciones del cálculo diferencial como cómputos que involucran velocidad, aceleración, la pendiente de una recta tangente a una curva y optimización. Las aplicaciones del cálculo integral están en cómputos que incluyen elementos de área, volumen, centro de masa, longitud de arco, trabajo y presión. Aplicaciones más avanzadas incluyen series de potencias y series de Fourier. Aunque las aplicaciones de la derivada son conocidas y el experimento de Young es famoso y ha sido

estudiado, nunca se ha explicado que el experimento de Young realiza la derivada del frente de onda, objetivo principal en esta tesis.

1.4 Objetivos generales

- Demostrar teóricamente y por simulación que el experimento de Young realiza la derivada del frente de onda.

1.5 Objetivos particulares

- Revisar el experimento de Young.
- Analizar la explicación teórica clásica del experimento de Young.
- Analizar la matemática para obtener derivadas numéricas.
- Desarrollar la teoría de la difracción de Fresnel para obtener un frente de onda propagado en la distancia z.
- Hacer simulación de la superposición de dos frentes de onda esféricos desplazados lateralmente.
- Corroborar la teoría con la simulación.

Capítulo 2

Interferencia de ondas

2.1 Introducción

En la física tenemos, al menos, dos metodologías para describir los fenómenos. Una de estas alternativas es describir alguna propiedad física o un parámetro físico directamente. Es decir, describir su cinemática o dinámica de acuerdo a leyes físicas. Otro punto de vista es no describirlos directamente; para este caso, y es uno de los métodos actuales de la física; describimos algún sistema físico con una función de onda o también llamada Función de Estado.

En este capítulo presentamos la descripción del campo eléctrico por funciones de estado empezando con la ecuación de onda. Posteriormente se hace una revisión del fenómeno de la interferencia y el experimento de Young.

2.2 Ondas

Se define como la perturbación autónoma del medio en el cual se propaga. Las más fáciles de ver son las ondas mecánicas, por ejemplo las ondas en una cuerda, las superficies en los líquidos, las ondas sonoras en el aire y las ondas de compresión, tanto en solidos como en líquidos.

Las ondas sonoras son longitudinales (el medio se desplaza en la dirección del movimiento de la onda). Las ondas en una cuerda y las electromagnéticas son transversales (el medio se desplaza en una dirección perpendicular a la del movimiento de la onda).

Como la perturbación está en movimiento, debe ser una función tanto de la posición como del tiempo y por lo tanto se puede escribir como

$$\Psi = f(x,t) \tag{2.1}$$

Cuando queremos representar el fenómeno anterior en 3 dimensiones debemos remplaza la x por un vector de posición $\boldsymbol{r}$.

2.3 Ecuación de onda

Según la teoría electromagnética una onda luminosa es un campo eléctrico E y un campo magnético H mutuamente perpendiculares y periódicos. Cuando se propaga una onda transversal, sin importar su naturaleza, encontraremos una ecuación diferencial muy conocida con el nombre de ecuación de onda. Por ser que la Ψ puede representar el campo eléctrico, podemos tener $\Psi = E$.

En general sabemos que se trata de una ecuación de onda cuando ocurre lo siguiente:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}. \tag{2.2}$$

Esta es la ecuación de onda. Y como se sabe las soluciones son funciones armónicas seno o coseno y también una combinación de ellas. En general podemos tener que la solución es del tipo $Ae^{i(kr-\omega t)}$.Donde $A(r,t)$ es la amplitud vectorial del parámetro físico considerado, puede ser campo eléctrico $\boldsymbol{E}$. En lo que sigue solo usaremos el tratamiento escalar del campo eléctrico y por lo tanto solo emplearemos una función de estado escalar [3].

2.4 Ondas armónicas y superposición

La función de onda adecuada que es solución de la Ec. [2.2], es $\Psi(r,t) = A(r)e^{i(kr-\omega t)}$

En esta función de onda la A es la amplitud de la onda, r el radio vector desde un punto r a r_0, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega =$ velocidad angular, t es el tiempo.

Una característica muy importante de la expresión anterior es su linealidad. Entonces se cumple que, si $\Psi_1(r,t)$, $\Psi_2(r,t), \dots, \Psi_n(r,t)$ son soluciones individuales cualquier combinación lineal de estas también es solución. Por lo tanto la expresión

$$\Psi(r,t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \Psi_i(r,t) \qquad (2.3)$$

satisface la ecuación de onda, donde C_i son constantes arbitrarias. Lo que significa que la perturbación final en cualquier punto de un medio es la suma algebraica de sus ondas constitutivas, a esto se le denomina principio de Superposición.

Aunque también existen ondas de gran amplitud, ya sean sonoras o en una cuerda, que no generan una respuesta lineal. Nos enfocaremos en la situación de que cada una de las ondas luminosas se propague a lo largo de una misma línea, compartiendo un mismo plano de vibración [4].

Como la perturbación óptica puede ser el campo eléctrico $E(r,t)$ se puede analizar el transporte de energía con el uso del campo eléctrico.

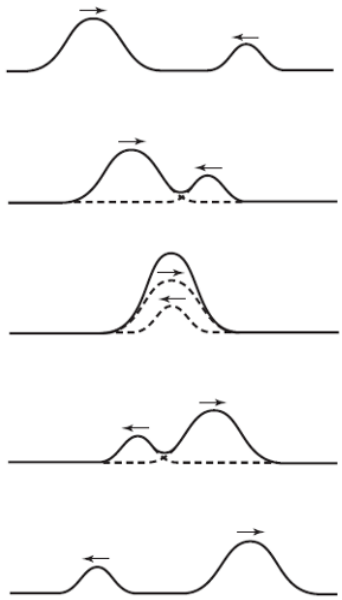

Figura 2.1 superposición de ondas

Las ondas transportan energía y este transporte se realiza con el vector de Poynting.

2.5 Irradiancia

La irradiancia es la magnitud utilizada para describir la potencia incidente por unidad de superficie de todo tipo de radiación electromagnética. La irradiancia es la cantidad promedio de energía que incide por unidad de área por unidad de tiempo sobre una superficie. Las unidades en que se mide son las unidades radiométricas y es en $\frac{W}{m^2}$

$$I = \langle S \rangle_T = \frac{c\varepsilon_0}{2} {E_0}^2 \tag{2.4}$$

La irradiancia es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico

2.6 Interferencia

Es preciso hablar de interferencia, el fenómeno de interferencia es observado cotidianamente y rara vez nos damos cuenta de ello. Muchos colores de la naturaleza se deben a este fenómeno, un ejemplo muy claro sería una mancha de aceite sobre el pavimento. La interferencia es una herramienta en la ciencia en general, no solo en la física o en la óptica., también se puede ver su utilidad en los experimentos de detección de ondas gravitacionales o en los microscopios interferenciales.

La interferencia de la luz se afirma como una redistribución de la magnitud luminosa y su especificación se hace basado en la teoría ondulatoria de la luz y el principio de superposición. La irradiancia producida por 2 haces luminosos monocromáticos, coherentes, en la aproximación escalar, está dada por:

$$I_T(\vec{r}) = I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r}) + 2\sqrt{I_1(\vec{r})I_2(\vec{r})}\, cos\delta(\vec{r}) \qquad (2.5)$$

Donde δ es la diferencia de la fase de las ondas en el punto donde se evalúa la irradiancia, es fácil notar que los máximos están definidos por la condición

$$\delta = 2m\pi \qquad (2.6)$$

Y por lo tanto los mínimos están definidos por

$$\delta = (2m + 1)\pi \qquad (2.7)$$

Para ambos casos m es un índice entero (positivo o negativo), denominado orden de interferencia. Por lo regular δ es una función de la posición del punto de observación, el conjunto de puntos que satisfacen las ecuaciones anteriores para un mismo orden de interferencia, dan lugar a superficies (en 3 dimensiones) o a curvas (en 2 dimensiones, usualmente

espacios planos); dichas superficies o curvas se conocen como franjas de interferencia. Tales franjas deben su forma y localización al método particular que se use para producirlas. Para crear interferencia de una manera controlada se utilizan unos instrumentos llamados interferómetros y existen gran cantidad de ellos¸ cada uno ha sido ideado para resolver algún problema específico y algunos de ellos tienen una amplia gama de posibilidades de uso. Para hacer haces monocromáticos se usan láseres de la longitud de onda que se requiera y para que estos haces sean mutuamente coherentes ambos deben generarse a partir de un mismo haz [5].

2.7 Interferómetro de Young

Es un interferómetro por división del frente de onda, consiste en dos aberturas idénticas muy pequeñas, en una pantalla opaca. La división de frente de onda se puede lograr por medio de difracción, reflexión o refracción.

La división del frente de onda se puede lograr de manera simple mediante una doble rendija como se muestra en la Fig. (2.2). Al incidir el frente de onda de la fuente puntual a las rendijas la luz difractada se propaga de cada rendija a la pantalla de observación.

La diferencia de camino óptico desde la rendija 1 hasta el punto de observación es $r_1 - r_2$. El patrón de interferencia que se obtiene es una serie de franjas paralelas, esquematizadas en la Fig. (2.2). La condición para localizar una franja brillante es cuando

$$DCO = r_1 - r_2 = m\lambda \tag{2.8}$$

La expresión resultante para la irradiancia Ec. (3.2) cuando las irradiancias

de las dos rendijas son iguales está dada por

$$I = 2I_0[1 + \cos(k\ DCO)]. \tag{2.9}$$

$$I = 4I_0[\cos 2(k\ DCO)]. \tag{2.10}$$

Esta irradiancia da la posición de las franjas de interferencia del experimento de Young. En este experimento la aparición de las franjas de interferencia se explica por el fenómeno de interferencia o superposición de las ondas emanadas desde las rendijas puntuales. Desde el punto de vista del fenómeno de difracción cada rendija genera un nuevo frente de onda esférico en el espacio que incide en la pantalla de observación, como se muestra en la siguiente figura

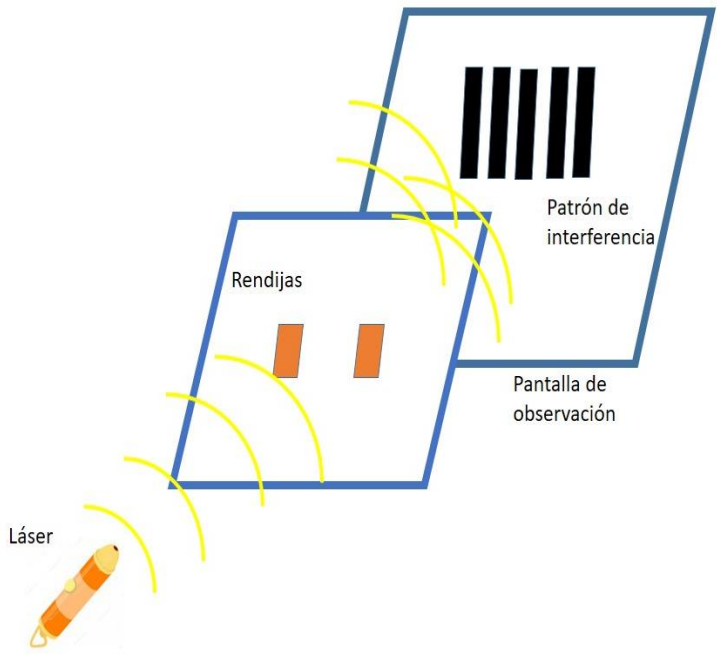

Figura 2.2 Patrón de franjas en el Experimento de Young

Después se hace incidir un haz de luz monocromática proveniente de una fuente puntual, cada abertura produce por difracción, un frente de onda. Ambos haces se propagan más allá de la pantalla opaca interfieren de modo que, si hay una pantalla de observación paralela a la pantalla anterior, se podrá observar las franjas de interferencia características de este arreglo, como se analizará a continuación.

2.8 Frentes de Onda desde el fenómeno de difracción

El fenómeno de difracción juega un papel importante en la óptica para tratar o estudiar la propagación de ondas. La propagación de ondas se emplea para estudiar muchos otros procesos tales como la formación de imágenes y el tratamiento óptico de señales. En esta sección se presenta una revisión de la teoría de la difracción de Fresnel para obtener frentes de onda generados por ciertas aberturas. El análisis se hace solo para las aberturas de interés que es la abertura descrita por una función impulsiva de Dirac.

2.8.1 Teoría escalar de la difracción

Sommerfeld define la difracción como cualquier desviación de los rayos de luz de su propagación rectilínea, y que no puedan ser interpretados como reflexión o refracción. Sin embargo, el primero en reportar dicho fenómeno fue Grimaldi en 1665. Grimaldi observó que al iluminar una varilla con una fuente puntual, la sombra recogida sobre la pantalla poseía sombras brillantes en su interior, lo cual iba en contra de la propagación rectilínea de la luz, postulada por la teoría corpuscular de aquel entonces. La difracción es un fenómeno que se produce cuando un frente de onda queda truncado por un obstáculo o una abertura que se interpone en su camino. La difracción que se genera cuando

una abertura es iluminada depende del montaje óptico: longitud de onda, distancia de la fuente-abertura, abertura-pantalla y la geometría de la abertura. Cuando la abertura difractante y la pantalla de observación se localizan a distancias muy grandes, la difracción es conocida como Difracción de Fraunhofer, el otro caso sucede cuando la pantalla difractante y la pantalla de observación se localizan a una distancia cercana, pero mayor que la longitud de onda, en este caso nos referimos a la Difracción de Fresnel o de campo cercano.

2.8.2 Difracción de Fresnel

Si se considera la distancia Z al plano de observación mucho mayor que el tamaño de una abertura, siendo el caso en que el ángulo entre los vectores **n** y **r** no exceda a $\frac{\pi}{10}$ rad (18°), entonces, bajo estas condiciones son válidas las siguientes aproximaciones

$$\cos(n, r) \cong 1. \tag{2.11}$$

$$\frac{1}{r} \cong \frac{1}{z_0} \tag{2.12}$$

por lo tanto el campo $\Psi_0(x, y, z_0)$ en la abertura se propagara como $\Psi(x, y, z_0)$ en la pantalla de observación dado

$$\Psi(x, y, z_0) = \frac{1}{i\lambda z_0} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(x, y, 0)\, e^{ikr} dx\, dy. \tag{2.13}$$

La magnitud del vector **r** está dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + {z_0}^2}\,. \tag{2.14}$$

Aplicando series de Taylor a 2.14

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots \tag{2.15}$$

Tomando únicamente los dos primeros términos de la serie, obtenemos una aproximación paraxial de $\boldsymbol{r}$

$$r = z_0 + \left[\frac{x^2 + y^2}{2z_0}\right] \tag{2.16}$$

al sustituir 2.14 en la integral de difracción dada por 2.13 se obtiene

$$\Psi(x, y, z_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z_0} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(x, y, 0)\, e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2z_0}} dx\, dy. \tag{2.17}$$

A la ecuación 2.17 se le conoce como la integral de difracción de Fresnel o de campo cercano. Esta integral representa una superposición de ondas esféricas en la aproximación paraxial.

2.9 Frentes de onda esféricos obtenidos con difracción

Si Consideramos una abertura en el plano $x_0, y_0, z = 0$ de la forma

$$\Psi_0 = \delta\left(x - \frac{a}{2}\right)\delta(y). \tag{2.18}$$

La expresión de difracción de Fresnel nos origina que en el plano x, y, z_0

Una función de onda de la forma

$$\Psi_1(x,y,z_0) = \frac{e^{ikz_0}}{i\lambda z_0}\, e^{\frac{ik\left(\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\right)}{2z_0}}. \tag{2.19}$$

Que representa una onda esférica con centro en la rendija.

Si se tuvieran dos rendijas colocadas en $x=-\frac{a}{2}$ y en $x=\frac{a}{2}$ entonces aparecería la presencia de otra onda de la misma forma, por lo tanto en el plano x,y,z_0 tendríamos dos ondas esféricas, una de la forma de (2.19) y otra como

$$\Psi_2(x,y,z_0) = \frac{e^{ikz_0}}{i\lambda z_0}\, e^{\frac{ik\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2\right)}{2z_0}}. \tag{2.20}$$

Entonces el campo total en el plano x,y,z_0 es

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2. \tag{2.21}$$

La expresión (2.21) indica que en el plano de observación se tienen dos ondas esféricas.

En el capítulo siguiente se demostrará que la superposición de estas dos ondas esféricas producen un patrón de interferencia que se puede explicar cómo una derivada del frente de onda esférico y por este motivo se observan franjas rectas en el dominio paraxial.

Capítulo 3

Derivación numérica del frente de onda

3.1 Introducción

En este capítulo revisaremos la teoría matemática necesaria para relacionar a la derivada numérica con el fenómeno físico que ocurre en el Experimento de Young, para esto también será importante revisar los polinomios de Taylor y la relación que tiene con la derivada numérica.

La derivación numérica es una técnica de análisis numérico para calcular una aproximación a la derivada de una función en un punto utilizando los valores y propiedades de la misma.

3.2 Definición de derivada numérica

La diferenciación numérica es una técnica de análisis numéricos utilizada para calcular una aproximación de la derivada de una función en un punto utilizando el valor y las propiedades de la función.

La idea principal de las técnicas de derivación numérica está estrechamente relacionada con la interrogación y se puede resumir de la siguiente manera: si se conoce el valor de una función *f(x)* en un punto de apoyo dado, entonces la función puede “aproximarse” a *f(x)* por otra función

p(x) que lo interpole en dicho soporte y sustituir el valor de las derivadas de *f(x)* en un punto x' por el valor de las correspondientes derivadas de p(x) en dicho punto x'.

Por definición la derivada de una función es $f(x)$ es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.1}$$

3.3 Formula central

Dada una función $f(x)$, si queremos calcular una aproximación al valor de su derivada en $x = x_0$, usaremos dos valores de la función, un $(x_0 + h)$ y otro $(x_0 - h)$, donde h es un incremento en x.

Aplicamos el desarrollo de Taylor para ambos valores

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f''(x_0) + \cdots \tag{3.2}$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \frac{h^3}{3!} f''(x_0) + \cdots \tag{3.3}$$

Después restamos 3.2 y 3.3, y despejamos $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} f'''(x_0) + O(h^4). \tag{3.4}$$

El primer término es el único que nos da información relevante pues estamos analizando un h muy pequeño, entonces podemos escribir (3.4) como

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \tag{3.5}$$

Más adelante llegaremos a una expresión equivalente a (3.5) y de esta manera cumplir con uno de los objetivos de este trabajo.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados de dos propuestas para explicar cómo se deriva la fase del frente de onda con el experimento de Young y con la ayuda de la simulación comprobar dichos resultados.

La primera se basa en la explicación tradicional del experimento de Young como fenómeno de interferencia pero con la ayuda de la difracción de Fresnel.

La segunda propuesta se origina por la cuestión, Sí la onda que sale de la fuente puntual es en principio esférica ¿Por qué, en el experimento de Young, vemos líneas rectas en la pantalla? De ahí que pensemos que el experimento de Young deriva la fase del frente de onda. Para esta propuesta se realiza una análisis de trazo de rayos para obtener cual es el patrón de irradiancia obtenido con el experimento de Young. Se puede considerar que este análisis es usando trazo de rayos o usando el concepto de frente de onda.

4.2 Experimento de Young

Hemos visto en el capítulo 2 que las ondas generadas en el experimento de Young produce dos ondas Ψ_1 y Ψ_2 . Entonces la Irradiancia se representa como

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\, cos(\Phi_1 - \Phi_2\,). \qquad (4.1)$$

Donde I_1 y I_2 son las irradiancias de cada haz, A_1 y A_1 las amplitudes de cada onda y $(\Phi_1 - \Phi_2)$ la diferencia de las fases.

Cuando las amplitudes de las ondas son iguales, las irradiancias también y si $I_0 = I_1 = I_2$, la ecuación (4.1) se vuelve

$$I = 2I_0(1 + \cos(\delta)) \tag{4.2}$$

Al usar las expresiones de Ondas (2.19) y (2.20)

$\Psi_1 = A_1 e^{i\Phi_1}$ y $\Psi_2 = A_2 e^{i\Phi_2}$

Donde $A_1 = A_2 = \frac{e^{ikz_0}}{i\lambda z_0}$ son las amplitudes, y $\Phi_1 = \frac{k}{2z_0}((x - \frac{a}{2})^2 + y^2)$, $\Phi_2 = \frac{k}{2z_0}((x + \frac{a}{2})^2 + y^2)$ las fases de las dos ondas. Como la diferencia de fases es igual a $\frac{kax}{z_0}$, la Irradiancia es igual a

$$I = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{kax}{z_0}\right)\right) \tag{4.3}$$

Esta irradiancia es la característica principal del experimento de Young: un patrón de franjas de tipo cosenoidal. La expresión (4.3) se obtuvo considerando que las expresiones Φ_1 y Φ_2 se obtuvieron por difracción.

Según los visto en la definición de derivada numérica, el termino que está dentro del coseno se puede escribir como la derivada en x.

$$I = 2I_0\left(1 + \cos\left(a\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\right) \tag{4.4}$$

4.3 Experimento de Young explicado geométricamente como la derivada del frente de onda

A continuación analizaremos el experimento de Young desde un punto de vista geométrico. Aunque el tratamiento es similar al resultado de la sección anterior, creemos es importante hacerlo con esta otra idea.

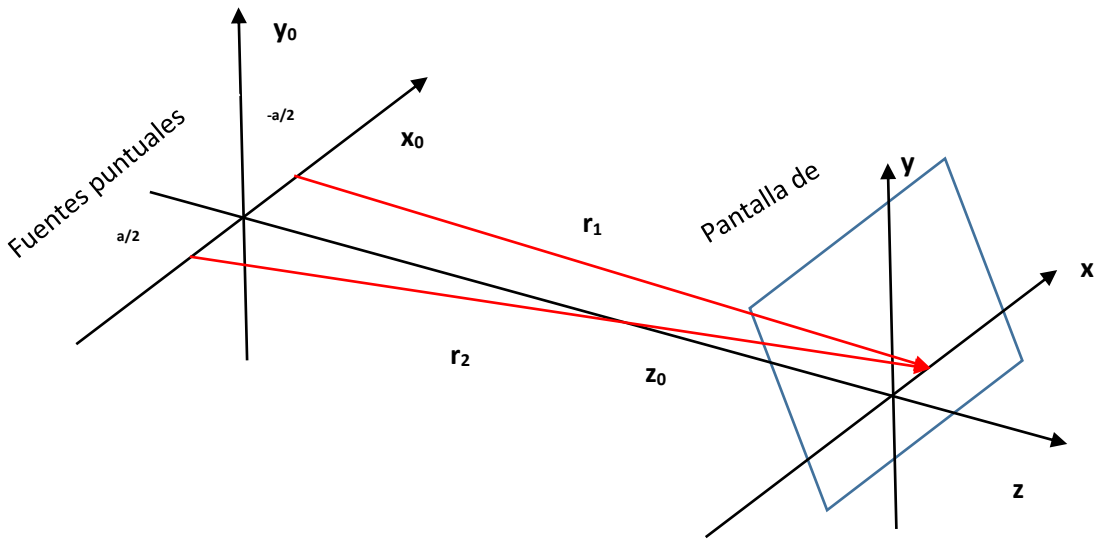

Figura 4.1 Diagrama del experimento de Young

En la Figura 4.1 se considera que los orificios de Young se pueden considerar como dos fuentes puntuales que generan dos frentes de onda esféricas centradas en $x = \frac{a}{2}$ y $x = -\frac{a}{2}$. Estos dos frentes de onda esféricos se pueden representar matemáticamente como

$$r_1{}^2 = (x + \frac{a}{2})^2 + y^2 + z^2 \qquad (4.5)$$

Esto sucede porque r_1 se desplazo en x una distancia $\frac{a}{2}$ positiva lateralmente, de la misma manera tenemos el caso de r_2 pero aquí hay un desplazamiento lateral pero esta vez negativa.

$$r_2{}^2 = (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 + z^2 \tag{4.6}$$

Aquí que r_1 y r_2 son:

$$r_1 = \sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{4.7}$$

$$r_2 = \sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{4.8}$$

Con estas $r_2\, y\, r_2$ se obtiene la Diferencia de Camino Óptico $(DCO = r_1 - r_2)$.

Ahora que tenemos estas nuevas expresiones procedemos a restarlas, pero antes debemos aplicarles un tratamiento algebraico para obtener expresiones más fáciles de operar. Considerando la aproximación (2.15) y usando solo los dos primeros términos, por ser el resto de términos muy pequeños, tenemos

$$r_1 = \sqrt{z^2[\frac{(x+\frac{a}{2})^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} + 1]} \tag{4.9}$$

$$r_1 = \sqrt{z^2}\sqrt{\frac{(x + \frac{a}{2})^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} + 1} \tag{4.10}$$

Y aplicando el teorema de Taylor como en 2.14

$$r_1 = z\left(1 + \frac{\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}{2}\right) \tag{4.11}$$

$$r_1 = z + \left[\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2z}\right] \tag{4.12}$$

De manera análogo tenemos a r_2

$$r_2 = z + \left[\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2z}\right] \tag{4.13}$$

Gracias a los cálculos anteriores sabemos ahora cuáles son las expresiones algebraicas para las r_1 y r_2 de las fases de los nuevos frentes de onda.

Regresando a la desigualdad de:

$$\Delta\delta = k * (r_1 - r_2) \tag{4.14}$$

Sustituyendo las *r* que encontramos y cambiando $\frac{a}{2}$ por *c* tenemos:

$$\Delta\delta = k * \left[\left(z + \left[\frac{(x+c)^2 + y^2}{2z}\right]\right) - \left(z + \left[\frac{(x-c)^2 + y^2}{2z}\right]\right)\right]$$

$$\Delta\delta = k * \left[\frac{4xc}{2z}\right] = k * \left[\frac{2xc}{z}\right] \tag{4.15}$$

Podemos ver entonces la irradiancia como

$$I = 2\left(1 + \cos\left(k\frac{2xc}{z}\right)\right). \tag{4.16}$$

Este resultado es equivalente al encontrado en la ecuación (4.3). En la ec. (4.16) se observa la dependencia lineal en la coordenada x del experimento de Young.

De los resultados obtenidos en (4.3) y (4.15) se puede ver que la dependencia lineal del experimento de Young también se puede obtener si derivamos el frente de onda esférico con respecto a x

$$\Phi(x,y) = \frac{k}{2z_0}(x^2 + y^2). \tag{4.17}$$

Y ahora si derivamos

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = \frac{k}{z_0}x. \tag{4.18}$$

Este resultado también se puede obtener si usamos la aproximación (3.5). Donde

$$\Phi\left(x + \frac{a}{2}\right) - \Phi\left(x - \frac{a}{2}\right) = a\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{4.19}$$

Así que usando la Ec. (4.18) podemos ver que las Ecs. (4.3) o la (4.15) se pueden escribir como

$$I = 2I_0\left(1 + \cos(a\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \tag{4.20}$$

Dándonos la información de que el Experimento de Young de doble rendija nos muestra la derivada del frente de onda. Como el frente de onda es esférico su derivada es lineal y por esa razón nos muestra un patrón cosenoidal de líneas rectas.

Vamos a usar la expresión (4.20) para realizar algunas simulaciones y ver el rango de validez de la derivación numérica con la derivación matemática. Adicionalmente se presentarán algunos otros resultados de Diferenciación de frentes de onda aberrados con polinomios de Seidel.

4.4 Simulación de diferenciación de frentes de onda

En la sección 4.2 confirmamos a través de cálculos teóricos que el experimento de Young da como resultado la derivada de la fase del frente de onda, ahora con la ayuda del software MATLAB y haciendo uso de algunos ejemplos vamos a diferenciar algunos frentes de onda y producir sus patrones de irradiancia si pensamos que esos frentes de onda se generaran en algunas aberturas de tipo Young.

4.4.1 Diferenciación de un frente de onda esférico

Del frente de onda esférico $\Phi(x,y) = \frac{k}{2z_0}(x^2 + y^2)$ se grafico las fases

$$\Phi_1\left(x + \frac{a}{2}, y\right) = \frac{k}{2z_0}(\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2\right) \tag{4.21}$$

Y

$$\Phi_2\left(x - \frac{a}{2}, y\right) = \frac{k}{2z_0}(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2\right) \tag{4.22}$$

En las siguientes graficas podemos ver las fases, su diferencia y la irradiancia dada por 5.3

$$I = 2I_0(\left(1 + cos(\delta)\right) \tag{4.23}$$

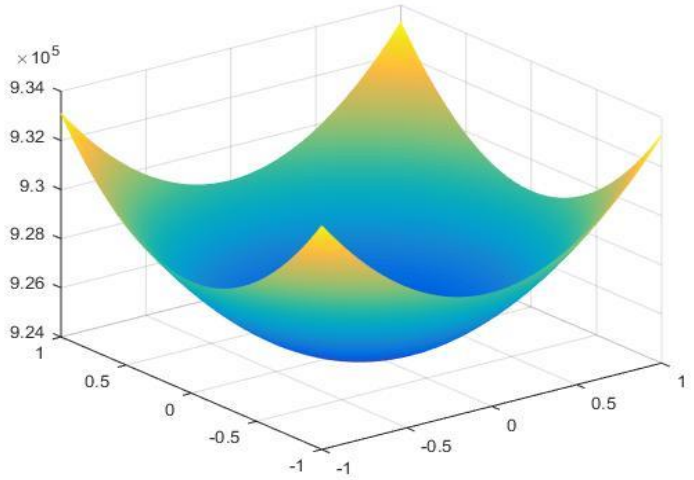

Figura 4.2 Frente de onda esférico con desplazamiento lateral, ecuación 4.21

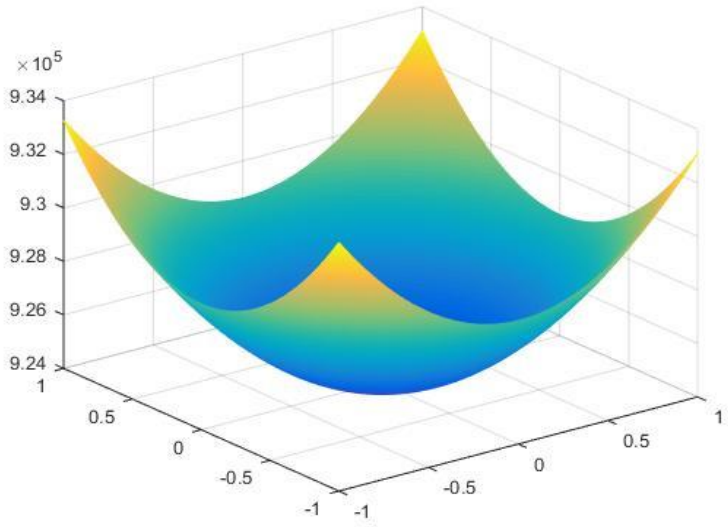

Figura 4.3. Frente de onda esférico con desplazamiento lateral, ecuación 4.22.

A continuación presentamos la gráfica de la diferencia de fases, aquí podemos notar que el resultado es el resultado conocido del Experimento de Young.

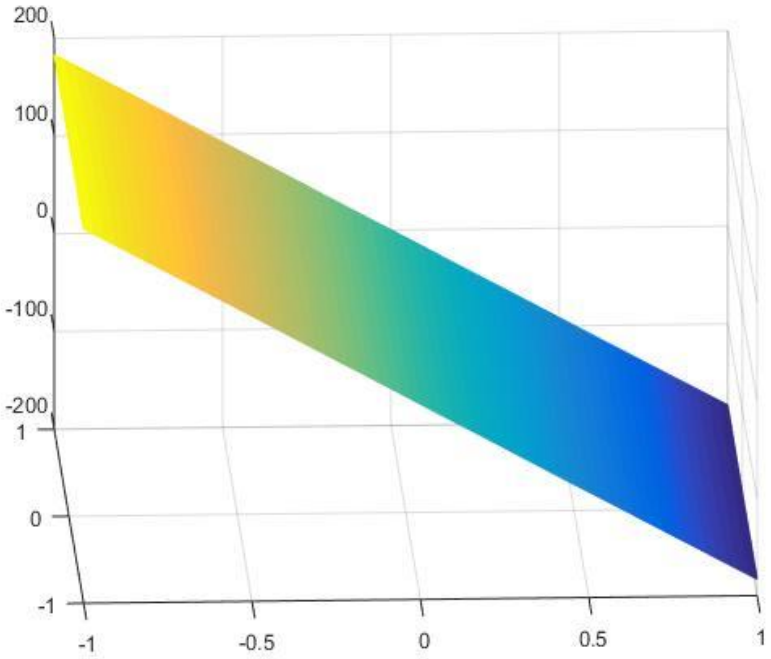

Figura 4.4. Diferencia de fases

Finalmente presentamos la irradiancia de la diferencia de fases,

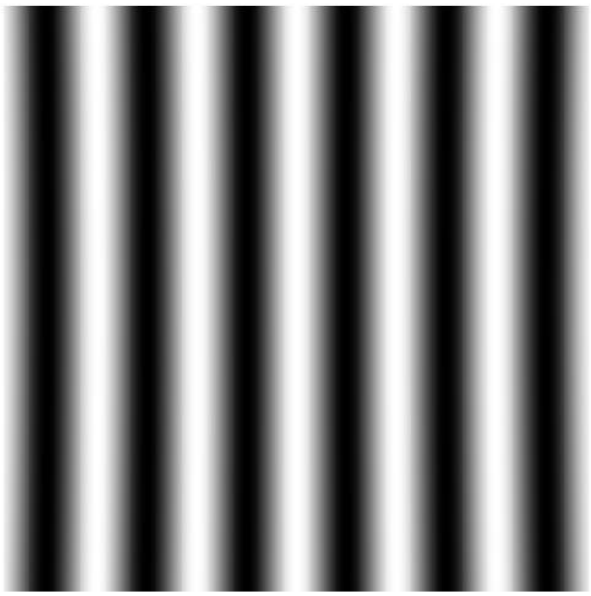

Figura 4.5 Irradiancia de la diferencia de fases

La figura 4.5 muestra un patrón muy parecido al patrón de franjas resultantes del Experimento de Young

4.4.2 Experimento de Young con frentes de ondas deformados

Los frentes de onda que usamos anteriormente son ideales, pero ahora pensemos en un caso no tan controlado, para esto usaremos las aberraciones de tipo Seidel.

Usamos como función de aberración un frente de onda esférico aberrado con las Aberraciones de Seidel.

Aberraciones de Seidel

$$W = (x, y) = A((x^2 + y^2))^2 + By(x^2 + y^2) + C(x^2 + 3y^2) + D(x^2 + y^2). \quad (4.24)$$

Donde los coeficientes: A es la aberración esférica, B la aberración de coma, C astigmatismo y D Desenfoque. Para este caso consideramos que

$$\Phi(x, y) = \Phi_{esferico} + W(x, y) \quad (4.25)$$

4.4.2.1 Derivación de un frente de onda esférico afectado con aberración esférica.

Para el frente de onda afectado por una aberración esférica vamos a analizar el caso donde una aberración afecta a la diferencia de fases de los frentes de onda que se originan después de pasar por las rendijas.

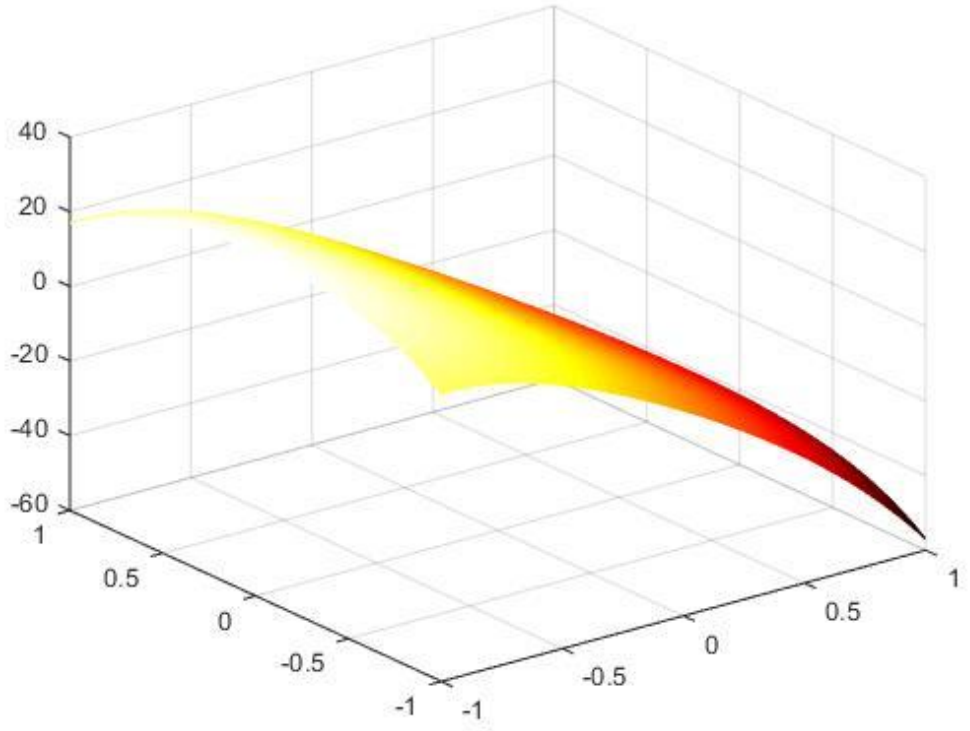

Figura 5.5 Diferencia de fases con aberración esférica

En la figura 5.5 no es muy claro observar cómo afecta una aberración a la diferencia de fases pero podemos graficar la irradiancia.

De 5.4 tomamos el primer término que representa la aberración esférica

$$W = (x, y) = A((x^2 + y^2))^2 . \qquad (4.26)$$

Y se lo sumamos a la diferencia de fases, por último el resultado lo usamos para graficar 5.3 con $A = 5\ k = \frac{2\pi}{\lambda}, \lambda = 630\ nm$

Figura 5.6 Irradiancia con aberración esférica

Aquí el patrón de interferencia se ve afectado ligeramente por aberración esférica, pero se logra identificar una semejanza al patrón mostrado en el caso anterior.

4.4.2.2 Derivación de un frente de onda esférico afectado con esférica + coma.

De manera análoga vamos a visualizar como afecta a la resta de fases una aberración esférica con coma.

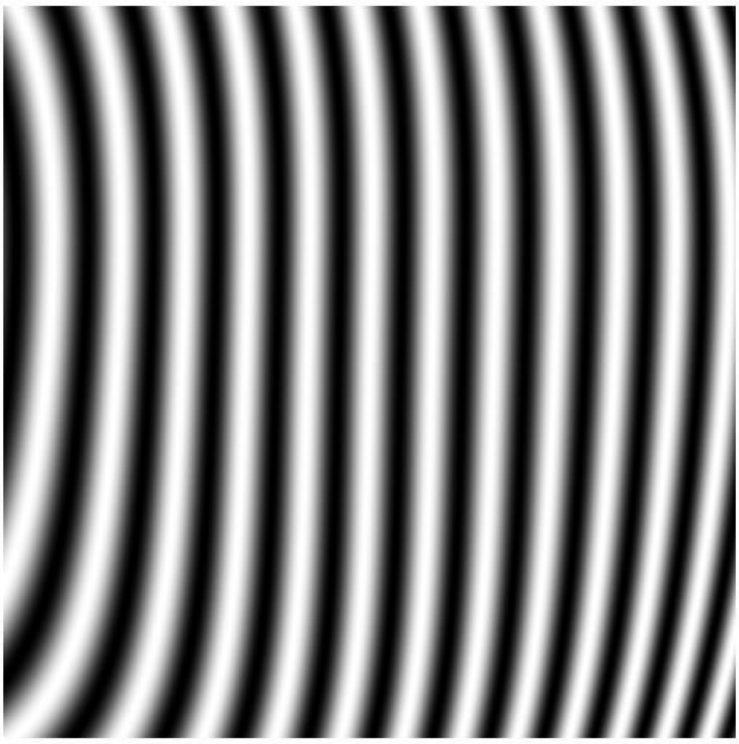

Figura 5.7 Irradiancia con aberración esférica

Aquí $k = \frac{2\pi}{\lambda}, \lambda = 630\ nm$ y $z_0 = 100\ cm\ y\ A = 2\ y\ B = 0.005$

También podemos ver que hay un ligero cambio en el patrón de franjas pero aún guarda un parecido al patrón original.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo se describen las conclusiones generales y particulares del proyecto de tesis que se obtuvieron en el proceso de investigación, de igual manera se menciona algunos posibles trabajos que puedan surgir a futuro de este proyecto.

Analizando el experimento con la difracción de Fresnel, de forma geométrica y auxiliándonos con la simulación pudimos comprobar que el experimento de Young da información de la derivada de la fase del frente de onda. Esto es un nuevo enfoque donde podemos explicar que la aparición de las franjas en el experimento de Young son explicadas por la derivación que realiza el experimento. Podemos constatar de los resultados numéricos el efecto de la derivada en uno de los experimentos más interesantes de la óptica, pero además vemos la relación estrecha entre la física y las matemáticas y la importancia de la óptica para hacer visibles esta herramienta matemática.

En el presente trabajo rescatamos un experimento clásico e importante de la física y le dimos un nuevo enfoque, porque ahora además de obtener el resultado del Experimento de Young como un fenómeno ondulatorio también lo podemos ver como una derivada en la fase de onda.

Bibliografía

[1] Tippens P. (2011). Interferencia, difracción y polarización. En Fisica, conceptos y aplicaciones (pp. 715-716). México: McGraw-Hill Interamericana editores.

[2] Martínez, J. (2018). Principio de Huygens-Fresnel. 10 de abril de 2020, de PRORED Sitio web: https://www.prored.es/el-principio-de-huygens-fresnel/

[3] Hecht, E. (2000). Teoría electromagnética, fotones y luz. En Óptica (pp. 43-44). Madrid: Addison Wesley Iberoamericana.

[4] Hecht, E. (2000). La superposición de ondas. En Óptica (pp. 290-291). Madrid: Addison Wesley Iberoamericana.

[5] Hecht, E. (2000). La superposición de ondas. En Óptica (pp. 386-387). Madrid: Addison Wesley Iberoamericana.

[6] Malacara D. (2015).Difracción. En Óptica básica (pp. 275-276). México: Ediciones Científicas Universitarias.

[7] Michael I. (2002 Octubre). Algebraic Treatment of Two-Slit Interference. *The Physics Teacher*, 20, pp. 402-404.

[8] Canales B. (2012). Prueba de superficies ópticas por interferómetria de división del frente de onda, tipo Chalmers. [Tesis para doctorado, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica]

[9]Mahmoud E. (2016, Agosto). The Double Slit Experiment Re- Explained. *Journal of Applied Physics*, 8, pp.86-98.

[10]Dick C. (2002, Noviembre). How Good Is the Approximation ″Path Difference≈ d sin θ*″?*. *The Physics Teacher* , 40, pp. 460-462.

[11] Halliday D., Resnick R. & Walker J. (2009). Fundamentos de Física. México: Grupo Editorial Patria.

[12] Haaser N., LaSalle J., Sullivan J.. (1970). Análisis matemático. México: Trillas.

[13] Rueckner W., Peidle J. (2013, Diciembre). Young's double-slitexperim ent with single photons and quautum eraser. *Am J. Phys*, 81, pp. 951-958.