



Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla



Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Modelo cosmológico anisótropo en 4 dimensiones

Tesis presentada al:
Colegio de Física

para obtener el grado de:
Licenciada en Física

por:
Jessica Ortiz Flores

Asesorada por:
Dr. Alfredo Herrera Aguilar

Puebla, Pue.
Noviembre 2019



Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla



Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Modelo cosmológico anisótropo en 4 dimensiones

Tesis presentada al:
Colegio de Física

para la obtener el grado de:
Licenciada en Física

por:
Jessica Ortiz Flores

Asesorada por:
Dr. Alfredo Herrera Aguilar

Puebla, Pue.
Noviembre 2019

Título: Modelo cosmológico anisótropo en 4 dimensiones.
Estudiante: Jessica Ortiz Flores
COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Presidente

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Secretario

Dr. Roberto Cartas Fuentes
Vocal

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Suplente

Dr. Alfredo Herrera Aguilar
Asesor

Agradecimientos

A mis padres Alejandra Flores y Adolfo Ortiz por todo su apoyo a lo largo de mi formación académica.

A mi hermano L. Armando Ortiz por todo el apoyo y el ánimo que me brindó a lo largo de la carrera.

A mis compañeros y profesores de quienes he aprendido mucho y a todos aquellos que han estado presentes en todo momento y que me han acompañado en este camino de aprendizaje.

Al Dr. Alfredo Herrera Aguilar por su dedicación en este trabajo y por su paciencia.

A CONACYT por el estímulo económico que me otorgó para esta tesis de investigación.

Contenido

1	Introducción	12
1.1	Oriente Próximo	12
1.2	Oriente lejano	12
1.3	Periodo cosmológico	13
1.4	La imagen del universo en Mesoamérica	13
1.5	La ciencia moderna	14
1.6	Cosmología física	14
1.7	Objetivos de este trabajo	15
2	Herramientas de la Relatividad General	16
2.1	Espacio-tiempo	16
2.2	Símbolos de Christoffel	16
2.3	Tensor de Riemann	17
2.3.1	Propiedades del Tensor de Riemann	17
2.4	Tensor de Ricci	17
2.5	Escalar de curvatura	17
3	Modelos cosmológicos	18
3.1	Modelos isótropos y homogéneos	18
3.1.1	Modelos tipo FLRW	18
3.1.2	Ecuaciones de Friedman	18
3.2	Modelos anisótropos	19
3.2.1	Universos de Bianchi I	19
3.2.2	Los modelos de Bianchi	19
4	Solución anisótropa a las ecuaciones de Einstein	22
4.1	Solución al sistema de ecuaciones	25
4.1.1	Caso 1: solución hiperbólica	25
4.1.2	Caso 2: solución trigonométrica	25
4.2	Escalar de curvatura	25
5	Interpretación física y conclusiones	27
5.1	Caso hiperbólico	27
5.2	Caso trigonométrico	27

List of Figures

5.1	Gráfica de la función $u(t, x_1)$	27
5.2	Gráfica de R tanto para t positivo como t negativo.	28
5.3	Gráfica del escalar de curvatura R , para t positivo.	28
5.4	Gráfica de $u(t, x_1)$	29
5.5	Gráfica del escalar de curvatura	29

Resumen

Se busca una solución a las ecuaciones de Einstein para un modelo cosmológico estudiado a partir de un campo gravitacional, con constante cosmológica positiva y acoplado a un campo escalar fantasma, mediante una métrica de cuatro dimensiones, una temporal y tres espaciales. El estudio se realiza en coordenadas rectangulares, la parte espacial es afectada por un factor de escala dependiente del tiempo, el cual describe la expansión del espacio; además cada dirección espacial contiene una función multiplicativa, dependiente del tiempo y de la primera coordenada espacial, que corresponde a la anisotropía. Después de hallar dicha solución, se analiza su evolución en el tiempo para darle interpretación física y se buscan las condiciones bajo las cuales el espacio se convierte en isótropo y homogéneo.

Palabras clave: *espacio anisótropo, ecuaciones de Einstein, modelo cosmológico.*

Capítulo 1

Introducción

El hombre, por naturaleza, siempre ha deseado comprender lo que le rodea: lo pequeño, lo grande, lo preciso, lo abstracto. En este anhelo, ha cuestionado su entorno desde diferentes perspectivas y al hacerlo ha tratado de obtener un verdadero conocimiento. La cultura y la época en la que cada hombre se ha desarrollado han influido en su perspectiva de la realidad, así como de la imagen que se ha formado del universo.

En la búsqueda de respuestas a los cuestionamientos sobre el origen y evolución del universo, el hombre comenzó por explicarse el origen de la tierra y su exterior. Las primeras explicaciones que se establecieron fueron compuestas por mitos y observaciones, estas dieron origen a las narraciones cosmogónicas de diferentes culturas.

A continuación, se enuncian brevemente algunas de estas ideas cosmogónicas en sus diferentes etapas, comenzando con el tiempo prehistórico en oriente próximo y lejano, continuando con el periodo cosmológico de acuerdo con los griegos [1] y posteriormente con culturas desarrolladas en Mesoamérica.

1.1 Oriente Próximo

Egipto. Los egipcios imaginaban la tierra como una plancha llamada Nun que flotaba sobre el agua. Nun tenía bordes ondulados los cuales constituían una cadena montañosa.

Caldea, Babilonia y Assur. Los habitantes de estas regiones se imaginaban la tierra como un disco plano, con los bordes rodeados de montañas y que flotaba.

Persia. Sus ideas se importaron de Mesopotamia, su creencia se fundó en un sol, una luna y 5 planetas; el sol y la luna tuvieron un sentido benéfico mientras que a los planetas se les atribuyó una influencia maléfica.

1.2 Oriente lejano

India. Se distinguen tres etapas: la Védica, la Brahmánica y la de las escuelas filosóficas (ortodoxas y heterodoxas).

Entre las narraciones cosmogónicas se encuentran: la que habla de un mundo creado por dos fuerzas, la que atribuye el origen del universo a un ser cósmico denominado Purusha y la

cosmogonía del Rig-Veda que atribuye a un ser misterioso el origen de los mundos a partir de un caos primitivo.

Los Upanishads se encargaron de averiguar si existe un origen del mundo, su enseñanza puede considerarse como una cosmología y una antropología filosófica.

1.3 Periodo cosmológico

En este periodo se tiene como objeto de estudio el universo mejor conocido como cosmos. En el pensamiento griego destaca Homero quien habla de los problemas de las fuerzas naturales y del cielo. Para él, el mundo es causado por fuerzas divinas que determinan en el universo un orden y una unidad. El primer grupo en estudiar sobre el origen del cosmos fueron los sabios de la ciudad de Mileto.

Tales (624-548 a. de C.) Aseguraba que el agua es el principio de las cosas justificando su postura con la condensación. Se interesó por cuestiones astronómicas y geométricas.

Anaximandro (610-547 a. de C.) Concebía el universo como una armonía regida de leyes necesarias e inflexibles.

Anaxímenes. (588-524 a. de C.) Creía que la causa de todo es el aire, del cual se forman todas las cosas a través de la rarefacción y la condensación.

Parménides. Tenía la idea de que el Universo no nace ni perece, no se mueve.

Heráclito (536-470 a. de C.) Enseña que no hay nada estable en el universo en general. Todo fluye, nada permanece.

Pitágoras de Samos (580-500 a. de C.) Creía que había una armonía en los cuerpos celestes en la que las esferas del universo giran alrededor de un punto común y a distancias determinables. Los pitagóricos hallaron necesarios los principios numéricos matemáticos para entender el mundo.

1.4 La imagen del universo en Mesoamérica

Los Zapotecas y Mixtecas establecían el origen de lo existente a partir de divinidades concebidas de forma diferente en cada una de estas culturas [2]. Otra cultura de interés es la Maya, ya que cuenta con una gran riqueza de narraciones sobre su concepción del mundo y del universo.

El Popol- Vuh es un libro sagrado escrito después de la conquista española, se origina de las historias mayas mezcladas con ideas posteriores. Este libro habla de una superficie terrestre cuadrada y dividida en cuadrantes, con cuatro puntos solsticiales y un quinto punto que traza el paso del sol por el cenit, estos cinco puntos forman el quintero y se utilizan para representar la estructura del universo [3].

Se sabía que, para los mayas, el universo tenía la forma de un cubo, en el centro crecía el árbol de la vida, llamado Yaxché con raíces dirigidas a cada punto cardinal y con ramas que se

conectaban con el firmamento [2]. Sin embargo, otras contribuciones interpretan que los mayas concebían la idea de un plano terrestre de forma alargada con puntos cardinales que difieren de los de otras culturas [3].

Otra interpretación describe un universo dentro de una casa formada por cuatro iguanas con la cola en cada uno de los puntos cardinales. Sobre la dimensión vertical del universo hay dos modelos uno estrictamente perpendicular y el otro con forma de escalera [3].

1.5 La ciencia moderna

La postura crítica del hombre se ha ido perfilando a lo largo de la historia. En diferentes países de Europa como Francia e Inglaterra se inició un trabajo intelectual del cual surgió una ciencia autónoma [1][4]. Los representantes principales y sus aportaciones se enuncian a continuación.

Nicolás Copérnico (1473-1543) formuló la teoría de un sistema solar heliocéntrico.

Tycho Brahe (1546-1601) fortaleció la idea de Copérnico con datos experimentales.

Johannes Kepler (1571-1630) da la explicación matemática del descubrimiento de Copérnico en sus tres leyes sobre el movimiento de los planetas alrededor del Sol.

Galileo Galilei (1564-1642) dio nuevas perspectivas sobre el universo a partir de la construcción de su propio telescopio y gracias a este instrumento pudo hacer descubrimientos, entre ellos: las lunas de Júpiter y los cúmulos de estrellas.

Isaac Newton (1642-1727) formuló la ley de la gravitación universal que describe la fuerza que actúa entre dos objetos y con ella explica el movimiento de los planetas alrededor del Sol y de la Luna alrededor de la Tierra.

Albert Einstein (1879-1955) publicó en 1905 la Teoría Especial de la Relatividad y en 1915 la Teoría General de la Relatividad en la cual se apoya la cosmología moderna para estudiar el universo.

Edwin Hubble (1889-1953) mediante mediciones del corrimiento al rojo propone que el universo se está expandiendo.

1.6 Cosmología física

La cosmología se ocupa del estudio de la evolución del universo a partir de observaciones de galaxias, cúmulos de galaxias, fuentes de radio, y otros objetos astronómicos observables. Actualmente, podemos decir que la cosmología estudia a gran escala la estructura observable del universo [5].

El quehacer de los cosmólogos es explicar en términos físicos y matemáticos las observaciones astronómicas para tener una mejor comprensión del universo, su estudio se basa en teorías

gravitacionales como la Relatividad General. En este ámbito el modelo más común es el de Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW).

La cosmología también tiene limitaciones como el no poder comparar el universo con otros, y la falta de experimentos repetibles. Una investigación del universo, como hemos visto tiene implicaciones filosóficas, no obstante, la ciencia no se ocupa de buscar razones de la existencia del universo y las leyes físicas. Sin embargo, estos problemas forman la base de la cosmología [5].

1.7 Objetivos de este trabajo

En este trabajo se busca una solución a las ecuaciones de Einstein para un modelo cosmológico estudiado a partir de un campo gravitacional, con constante cosmológica positiva y acoplado a un campo escalar fantasma, mediante una métrica de cuatro dimensiones, una temporal y tres espaciales. El estudio se realiza en coordenadas rectangulares, la parte espacial es afectada por un factor de escala dependiente del tiempo, el cual describe la expansión del espacio; además cada dirección espacial contiene una función multiplicativa, dependiente del tiempo y de la primera coordenada espacial, que corresponde a la anisotropía. Después de hallar dicha solución, se analiza su evolución en el tiempo para darle interpretación física.

Se tiene como antecedente el estudio de los efectos cosmológicos como inflación, expansión acelerada y la isotropización en el tiempo de un *ansatz* estudiado en cinco dimensiones y modelado por gravedad acoplada a un campo escalar fantasma, como en este modelo, el cual contiene anisotropía en la parte espacial, así como un factor de escala dependiente del tiempo. En dicha investigación se resolvieron las ecuaciones de Einstein y se encontraron las condiciones bajo las cuales se isotropiza el espacio [6]. Los resultados reportados motivaron el desarrollo de esta investigación en 4 dimensiones.

Capítulo 2

Herramientas de la Relatividad General

2.1 Espacio-tiempo

En el contexto de la Relatividad General el espacio y el tiempo no se conciben de forma independiente sino que están relacionados y se introduce el concepto de espacio-tiempo en el que sucede toda la dinámica de los fenómenos físicos.

El espacio-tiempo se representa como (M, g) donde M es una variedad diferenciable y g es una métrica. La variedad es pseudoriemanniana, cuya métrica no es definida positiva; además, es no degenerada en cada punto de la variedad. Usando la convención de suma de Einstein con $\mu = 1, \dots, n$ y $\nu = 1, \dots, n$, esta se expresa como

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad (2.1)$$

las componentes $g_{\mu\nu}$ se pueden representar en la matriz

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

En este contexto, se pueden usar de forma indistinta la métrica y el elemento de línea, definido como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.2)$$

2.2 Símbolos de Christoffel

A partir de la derivada covariante de $g_{\mu\nu}$, si se iguala a cero, se pueden obtener, en términos de la métrica, las siguientes cantidades:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (2.3)$$

conocidos como símbolos de Christoffel, los cuales cumplen con la propiedad de simetría en sus índices inferiores, es decir

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho. \quad (2.4)$$

2.3 Tensor de Riemann

El tensor de Riemann también es conocido como tensor de curvatura; es un tensor de cuarto orden y se define en términos de los símbolos de Christoffel de la siguiente manera

$$R_{\rho\nu\sigma}^{\mu} = \frac{\partial\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma_{\rho\nu}^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\delta\nu}^{\mu}\Gamma_{\rho\sigma}^{\delta} - \Gamma_{\delta\sigma}^{\mu}\Gamma_{\rho\nu}^{\delta} \quad (2.5)$$

Usando $g_{\mu\lambda}$ para bajar el índice contravariante, se puede escribir

$$R_{\mu\rho\nu\sigma} = g_{\mu\lambda}R_{\rho\nu\sigma}^{\lambda}. \quad (2.6)$$

Este tensor nos permite saber si un espacio es plano o curvo.

2.3.1 Propiedades del Tensor de Riemann

Presenta antisimetría ya sea al intercambiar los primeros dos índices o los dos últimos

$$R_{\mu\rho\nu\sigma} = -R_{\mu\rho\sigma\nu} = -R_{\rho\mu\nu\sigma} \quad (2.7)$$

es simétrico frente al intercambio del primer par de índices con el segundo

$$R_{\mu\rho\nu\sigma} = R_{\nu\sigma\mu\rho} \quad (2.8)$$

Mediante una permutación cíclica, las dos relaciones siguientes son válidas:

$$R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_{\mu\sigma\rho\nu} + R_{\mu\nu\sigma\rho} = 0 \quad (2.9)$$

y

$$R_{\rho\nu\sigma}^{\mu} + R_{\sigma\rho\nu}^{\mu} + R_{\nu\sigma\rho}^{\mu} = 0, \quad (2.10)$$

es decir, el tensor es antisimétrico en cada par de índices $\mu\rho$ y $\nu\sigma$ y es simétrico bajo el intercambio de los dos pares entre sí.

Si $\nu = \sigma$ o $\mu = \rho$, entonces

$$R_{\mu\rho\nu\sigma} = 0. \quad (2.11)$$

2.4 Tensor de Ricci

Al tensor de segundo rango que se obtiene de la contracción del primer y tercer índices del tensor de Riemann se le conoce como tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}; \quad (2.12)$$

en términos de los símbolos de Christoffel, el tensor Ricci se escribe como

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^{\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} \quad (2.13)$$

además, este tensor es simétrico

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (2.14)$$

2.5 Escalar de curvatura

Se obtiene el escalar de curvatura contrayendo los dos índices del tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

Capítulo 3

Modelos cosmológicos

3.1 Modelos isótropos y homogéneos

3.1.1 Modelos tipo FLRW

Cuando se observan los cúmulos de galaxias, se observa que a grandes escalas están distribuidas uniformemente por esto se piensa que no estamos en un lugar del universo privilegiado, además se observa que las galaxias se están alejando entre sí, esto último indica que el universo no es estático. Esto nos lleva a construir modelos cosmológicos a partir de suponer que el universo es homogéneo e isótropo en espacio, pero no en el tiempo. Los modelos cosmológicos FLRW, son aquellos modelos del universo basados en la isotropía y homogeneidad del espacio [5]. Los siguientes hechos se conocen como los dos principios cosmológicos:

No hay un punto especial en el universo, las galaxias están distribuidas uniformemente en el espacio a gran escala. Se dice que el universo es homogéneo a grandes escalas.

No hay una dirección espacial especial en el universo, las galaxias son distribuidas uniformemente en diferentes direcciones a grandes escalas. Se dice que el universo es isotrópico.

Estos dos principios no son ciertos a pequeña escala, pues se conservan regiones no homogéneas: hay galaxias, sistemas solares y planetas. Sin embargo, a escalas más grandes, se dice que el universo es homogéneo e isotrópico. Estos principios nos proporcionan modelos homogéneos e isotrópicos del universo, los modelos más simples de la evolución del universo [9].

3.1.2 Ecuaciones de Friedman

Se parte de la suposición de un espacio isótropo y homogéneo generado por gravedad con constante cosmológica y cierto tensor de energía impulso, cuyas ecuaciones de Einstein son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

donde

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p) \quad (3.2)$$

representa un fluido perfecto con densidad de energía ρ y presión p . Estas ecuaciones se transforman en el siguiente par de ecuaciones

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{-\Lambda}{3} = \frac{\rho}{3}, \quad (3.3)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -p, \quad (3.4)$$

donde en la última igualdad $2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}$ corresponde a la gravedad atractiva, mientras que Λ a la gravedad repulsiva (expansión del espacio tiempo).

Al sustituir la ecuación 3.3 en 3.4 y de la derivación con respecto al tiempo de la igualdad:

$$\dot{a}^2 + k - \frac{a^2\Lambda}{3} = \frac{a^2\rho}{3} \quad (3.5)$$

se llega a las ecuaciones

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}\left(p + \frac{\rho}{3}\right) + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.6)$$

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) \quad (3.7)$$

conocidas como las **ecuaciones de Friedman** y son las que rigen la dinámica de los modelos cosmológicos de Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker, cuya métrica está dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (3.8)$$

donde $a(t)$ es denominado factor de escala y codifica la expansión acelerada del universo, k es el escalar de curvatura espacial y $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$.

3.2 Modelos anisótropos

3.2.1 Universos de Bianchi I

Los modelos de Bianchi son las generalizaciones más simples de los modelos FLRW con diferentes factores de expansión $l_i(t)$ en las tres direcciones ortogonales. De forma general, la métrica está dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + l_1^2(t)dx^2 + l_2^2(t)dy^2 + l_3^2(t)dz^2, \quad (3.9)$$

El factor de escala de expansión promedio es $l(t) = (l_1 l_2 l_3)^{\frac{1}{3}}$. Los modelos de Bianchi conforman un conjunto de modelos cosmológicos donde uno puede estudiar la dinámica exacta con ecuaciones de campo no lineales.

3.2.2 Los modelos de Bianchi

Se propone la métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{ij}(e_\alpha^i dx^\alpha)(e_\beta^j dx^\beta) \quad (3.10)$$

en la cual se puede elegir una tétrada de vectores \mathbf{e}_a , con $\mathbf{n} = \mathbf{e}_0$, siendo \mathbf{n} un vector unitario normal a las hipersuperficies espaciales homogéneas en un punto dado p . En la métrica, $e_\alpha^i dx^\alpha$ son las 1-formas inversas a los vectores espaciales de la triada \mathbf{e}_i , los índices α, β denotan las coordenadas en las hipersuperficies espaciales (a diferencia de los índices de la tétrada) y $\gamma_{ij}(t)$

es la métrica espacial que codifica por completo la dependencia en el tiempo en el denominado enfoque métrico¹. En el marco del enfoque métrico, el elemento de línea se escribe como

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{ij}(t)(e^i_\alpha(x^\gamma)dx^\alpha)(e^j_\beta(x^\gamma)dx^\beta), \quad (3.11)$$

donde $e^i_\alpha(x^\gamma)$ tienen como conmutadores:

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k, \quad [e_0, e_i] = 0 \quad (3.12)$$

y C_{ij}^k son las constantes de estructura del álgebra de Lie y satisfacen las identidades de Jacobi.

En el enfoque de tétradas ortonormales se toma una tétrada ortonormal invariante bajo el grupo de isometrías, donde las componentes de la métrica son constantes de espacio-tiempo $g_{ab} = \eta_{ab}$. Si $\mathbf{e}_0 = \mathbf{n}$ tenemos una base ortonormal $\{\mathbf{e}_a, a = 0, 1, 2, 3\}$, tal que

$$[e_a, e_b] = \gamma_{ab}^c(t)e_c, \quad [e_0, e_i] \neq 0. \quad (3.13)$$

En este enfoque, las variables dinámicas son las funciones de conmutación $\gamma_{ab}^c(t)$ y las variables de la materia.

Las funciones espaciales de conmutación $\gamma_{jk}^i(t)$ pueden descomponerse en una matriz simétrica dependiente del tiempo $n^{ij}(t)$ y un vector $a_i(t)$, que son equivalentes a las constantes de estructura C_{jk}^i del grupo de simetrías en cada punto. En este enfoque, las identidades de Jacobi se pueden escribir como:

$$n^{ij}a_j = 0. \quad (3.14)$$

Se puede elegir la base de tétradas para diagonalizar n_{ij} , es decir, para obtener $n_{ij} = \text{diag}(n_1, n_2, n_3)$ y $a_i = (a, 0, 0)$ y las identidades de Jacobi se reducen simplemente a $n_1 a = 0$. Por lo tanto, se pueden definir dos clases principales de constantes de estructura (y de álgebras de Lie): Clase A: $a = 0$.

Clase B: $a \neq 0$.

La clasificación de Bianchi del grupo G_3 es como en la siguiente tabla:

¹En la bibliografía se encuentran tres enfoques que difieren entre sí por las cantidades en las cuales se codifica la dependencia temporal. Si dicha dependencia se tiene exclusivamente en \mathbf{e}_i , se tiene el enfoque de tétradas ortonormales. Si tanto la dependencia del tiempo se comparte tanto por $\gamma_{ij}(t)$ como por \mathbf{e}_i , tenemos el llamado enfoque de automorfismos

Constantes de estructura canónica para diferentes tipos de Bianchi. El parámetro h es a^2/n_2n_3 .					
Clase	Tipo	n_1	n_2	n_3	a
A	I	0	0	0	0
	II	+	0	0	0
	VI ₀	0	+	-	0
	VII ₀	0	+	+	0
	VIII	-	+	+	0
	IX	+	+	+	0
B	V	0	0	0	+
	IV	0	0	+	+
	VI _h	0	+	-	+
	III	0	+	-	$(-n_2n_3)^{1/2}$
	VIII _h	0	+	+	+

Dado el tipo de grupo específico en un instante dado, este será preservado por las ecuaciones de evolución para las cantidades $n_i(t)$ y $a(t)$.

La siguiente tabla muestra los grupos de simetría de Bianchi que admiten subcasos con grupos de simetría mayores, en particular las soluciones de FLRW:

Modelos de Bianchi que permiten subclases de alta simetría.		
Modelos de Bianchi Isótropos		
FLRW	$K=+1$:	Bianchi IX
FLRW	$k=0$:	Bianchi I, Bianchi VII ₀
FLRW	$k=-1$:	Bianchi V, Bianchi VII _h

Capítulo 4

Solución anisótropa a las ecuaciones de Einstein

Se parte de la siguiente acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - 2\Lambda - \frac{\epsilon}{2} (\nabla\phi)^2 \right] \quad (4.1)$$

donde R es el escalar de curvatura, Λ es la constante cosmológica, $\phi = \phi(t, x_1)$ es un campo escalar y $\epsilon = \pm 1$. A partir de esta acción se obtienen las Ecuaciones de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (4.2)$$

que en forma reducida se pueden escribir como:

$$T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T + \Lambda g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

En este trabajo proponemos la siguiente métrica con mínimo de anisotropía basando esta elección en la suposición de que el universo parte de un estado anisótropo. Usamos coordenadas cartesianas (t, x_1, x_2, x_3) :

$$ds^2 = e^{2A(x_1)} \left\{ -dt^2 + a^2(t) \left[e^{2u_1(t, x_1)} dx_1^2 + e^{2u_2(t, x_1)} dx_2^2 + e^{2u_3(t, x_1)} dx_3^2 \right] \right\} \quad (4.4)$$

donde $e^{2A(x_1)}$ es un factor conforme y $a(t)$ es el factor de escala. La métrica muestra anisotropía debido a que cada dirección espacial es afectada por una función exponencial distinta y dependiente de t y x_1 , lo que la hace más general que la mostrada para los modelos de Bianchi.

El tensor métrico se puede escribir de la siguiente manera:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(-e^{2A}, a^2 e^{2(A+u_1)}, a^2 e^{2(A+u_2)}, a^2 e^{2(A+u_3)} \right), \quad (4.5)$$

con su inverso:

$$g^{\mu\nu} = \text{diag} \left(-e^{-2A}, a^{-2} e^{-2(A+u_1)}, a^{-2} e^{-2(A+u_2)}, a^{-2} e^{-2(A+u_3)} \right). \quad (4.6)$$

Los símbolos de Christoffel distintos de cero son:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 &= A', & \Gamma_{11}^0 &= e^{2u_1}(a\dot{a} + a^2\dot{u}_1), & \Gamma_{22}^0 &= e^{2u_2}(a\dot{a} + a^2\dot{u}_2), \\
\Gamma_{33}^0 &= e^{2u_3}(a\dot{a} + a^2\dot{u}_3), & \Gamma_{00}^1 &= a^{-2}e^{-2u_1}A', & \Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{a}}{a} + \dot{u}_1, \\
\Gamma_{11}^1 &= A' + u'_1, & \Gamma_{22}^1 &= -e^{2(u_2-u_1)}(A' + u'_2), & \Gamma_{33}^1 &= e^{2(u_3-u_1)}(A' + u'_3), \\
\Gamma_{02}^2 &= \frac{\dot{a}}{a} + \dot{u}_2, & \Gamma_{12}^2 &= A' + u'_2, & \Gamma_{03}^3 &= \frac{\dot{a}}{a} + \dot{u}_3, \\
\Gamma_{13}^3 &= A' + u'_3.
\end{aligned}$$

Las Con lo anterior se procede a calcular las componentes del tensor de Ricci, se muestran aquellas que son distintas de cero que corresponden a las componentes R_{ij} con $i = j$, además la componente R_{01} no es nula por la dependencia de la métrica en t y x_1 .

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} + a^{-2}e^{-2u_1}(A'' + 2A'^2 - 2u'_1A') - \dot{u}_1^2 - \dot{u}_2^2 - \dot{u}_3^2 \quad (4.7)$$

$$R_{01} = 2A' \left(\frac{\dot{a}}{a} + \dot{u}_1 \right) - \dot{u}_1u'_1 - \dot{u}_2u'_2 - \dot{u}_3u'_3 + \dot{u}'_1 \quad (4.8)$$

$$R_{11} = e^{2u_1}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 3a\dot{a}\dot{u}_1 + a^2\ddot{u}_1) - 3A'' + u''_1 + 4A'u'_1 - (u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2) \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= e^{2u_2}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 3a\dot{a}\dot{u}_2 + a^2\ddot{u}_2) + e^{2(u_2-u_1)}[-2A'^2 - A'' + \\
&\quad u'_2(u'_1 - u'_3) + 2A'(u'_1 - u'_2) - u_2'^2 - u_2''] \quad (4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= e^{2u_3}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 3a\dot{a}\dot{u}_3 + a^2\ddot{u}_3) + e^{2(u_3-u_1)}[-2A'^2 - A'' \\
&\quad 2A'(u'_1 - u'_3) + u'_3(u'_1 - u'_2) - u_3'^2 - u_3'']. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Por otra parte, si se define $\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T$ se puede escribir $R_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$, donde $\tilde{T}_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento reducido. En este caso $\tilde{T}_{\mu\nu} = \epsilon(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi)$. Se llega a las siguientes ecuaciones:

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} + a^{-2}e^{-2u_1}(A'' + 2A'^2 - 2u'_1A') - \dot{u}_1^2 - \dot{u}_2^2 - \dot{u}_3^2 = \epsilon\dot{\phi}^2 - \Lambda e^{2A} \quad (4.12)$$

$$2A' \left(\frac{\dot{a}}{a} + \dot{u}_1 \right) - \dot{u}_1u'_1 - \dot{u}_2u'_2 - \dot{u}_3u'_3 + \dot{u}'_1 = \epsilon\dot{\phi}\phi' \quad (4.13)$$

$$e^{2u_1}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 3a\dot{a}\dot{u}_1 + a^2\ddot{u}_1) - 3A'' + u''_1 + 4A'u'_1 - (u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2) = \epsilon\phi'^2 + \Lambda a^2 e^{2(A+u_1)} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
e^{2u_2}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 3a\dot{a}\dot{u}_2 + a^2\ddot{u}_2) + e^{2(u_2-u_1)}[-2A'^2 - A'' + \\
u'_2(u'_1 - u'_3) + 2A'(u'_1 - u'_2) - u_2'^2 - u_2''] = \Lambda a^2 e^{2(A+u_2)} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

$$e^{2u_3} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 3a\dot{a}\dot{u}_3 + a^2\ddot{u}_3) + e^{2(u_3-u_1)}[-2A'^2 - A'' + 2A'(u'_1 - u'_3) + u'_3(u'_1 - u'_2) - u_3'^2 - u_3''] = \Lambda a^2 e^{2(A+u_3)}. \quad (4.16)$$

Se impone la siguiente condición para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^3 u_i = 0 \quad (4.17)$$

y se define: $u_1 = \alpha u$, $u_2 = \beta u$ y $u_3 = -(\alpha + \beta)u$, con α, β constantes numéricas.

A partir de la ecuación (4.13) se obtiene la relación:

$$\phi = \gamma u$$

con

$$\gamma = \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)}$$

y se obtiene que $\epsilon = -1$. Con estas restricciones se llega al siguiente sistema de ecuaciones de Einstein:

$$3\frac{\ddot{a}}{a} + a^{-2}e^{-2\alpha u} (-A'' - 2A'^2 + 2\alpha A'u') = \Lambda e^{2A} \quad (4.18)$$

$$2A' \left(\frac{\dot{a}}{a} + \alpha \dot{u} \right) + \alpha \dot{u}' = 0 \quad (4.19)$$

$$\alpha \left(\ddot{u} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{u} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + a^{-2}e^{-2\alpha u} (-3A'' + \alpha u'' + 4\alpha A'u') = \Lambda e^{2A} \quad (4.20)$$

$$\beta \left(\ddot{u} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{u} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + a^{-2}e^{-2\alpha u} [-A'' - 2A'^2 - \beta u'' + 2(\alpha - \beta)A'u' + 2\alpha\beta u'^2] = \Lambda e^{2A} \quad (4.21)$$

$$-(\alpha + \beta) \left(\ddot{u} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{u} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + a^{-2}e^{-2\alpha u} [-A'' - 2A'^2 + 2(2\alpha + \beta)A'u' + 2\alpha(\alpha + \beta)u'^2 + (\alpha + \beta)u''] = \Lambda e^{2A} \quad (4.22)$$

con la ecuación de campo:

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - a^{-2}e^{-2\alpha u} [\phi'' + 2(A' - \alpha u')\phi'] = 0. \quad (4.23)$$

que se obtiene a partir de la ecuación de Klein-Gordon deducida de la acción.

4.1 Solución al sistema de ecuaciones

Para resolver el sistema, primero se desacopla la variable a a partir de restar (4.18) a (4.21), obteniendo la ecuación

$$\dot{a}^2 - a\ddot{a} = 0, \quad (4.24)$$

cuya solución es:

$$a = e^{Ht} \quad (4.25)$$

con H constante.

Luego, despejando $A'(x_1)$ de la ecuación (4.19) y resolviendo se obtiene la siguiente relación para el factor de deformación:

$$A = -\frac{1}{2} \ln(H + \alpha\dot{u}). \quad (4.26)$$

Ahora imponemos $\alpha = 0$, lo que permite que la función $A(x_1)$ no dependa del tiempo y sea consistente con lo propuesto en la métrica.

Por consiguiente, en la ecuación de campo (4.23) se sustituyen $a = e^{Ht}$, $A = -\frac{1}{2} \ln H$ y $\alpha = 0$ y se llega a la ecuación:

$$\ddot{u} + 3H\dot{u} - e^{-2Ht}u'' = 0. \quad (4.27)$$

4.1.1 Caso 1: solución hiperbólica

Resolviendo por método de separación de variables se obtiene como solución

$$u(t, x_1) = 4H\sqrt{c_1c_2c_3c_4} \cosh\left(\sqrt{c_1}x_1 + \ln\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\right) \left[\cosh\left(\frac{\sqrt{c_1}}{H}e^{-Ht} + \ln\sqrt{\frac{c_3}{c_4}}\right) - \frac{\sqrt{c_1}}{H}e^{-Ht} \sinh\left(\frac{\sqrt{c_1}}{H}e^{-Ht} + \ln\sqrt{\frac{c_3}{c_4}}\right) \right] \quad (4.28)$$

donde c_1 y c_2 son constantes positivas, asimismo, c_3 y c_4 son constantes con igual signo, esto con la finalidad de tener una solución real.

4.1.2 Caso 2: solución trigonométrica

Se puede obtener otra solución bajo ciertas condiciones en las constantes de la solución anterior, esto es, si elegimos $c_1 = c_2 < 0$ y $c_3 = c_4$, obtenemos una solución en términos de funciones trigonométricas

$$u(t, x_1) = 4H\sqrt{c_1c_2c_3c_4} \cos(\sqrt{c_1}x_1) \left[\cos\left(\frac{\sqrt{c_1}}{H}e^{-Ht}\right) - \frac{\sqrt{c_1}}{H}e^{-Ht} \sin\left(\frac{\sqrt{c_1}}{H}e^{-Ht}\right) \right]. \quad (4.29)$$

4.2 Escalar de curvatura

Con las condiciones $\alpha = 0$ y $A = 0$, de forma genérica el escalar de curvatura se puede escribir de la siguiente manera:

$$R = 2e^{-2Ht}\beta^2u'^2 + 2\beta\dot{u}^2 + 12H^2; \quad (4.30)$$

sustituyendo en R la primera solución $u(t, x)$ encontrada se llega a la expresión:

$$\begin{aligned}
R = 12H^2 + 32\beta^2 c_1^2 c_2 c_3 c_4 e^{-2Ht} & \left\{ H^2 \left[\cosh^2 \left(\frac{\sqrt{c_1}}{H} e^{-Ht} + \ln \sqrt{\frac{c_3}{c_4}} \right) + \right. \right. \\
\frac{c_1}{H^2} e^{-2Ht} \sinh^2 \left(\frac{\sqrt{c_1}}{H} e^{-Ht} + \ln \sqrt{\frac{c_3}{c_4}} \right) & - \sinh \left(2 \frac{\sqrt{c_1}}{H} e^{-Ht} + 2 \ln \sqrt{\frac{c_3}{c_4}} \right) \\
\left. \frac{\sqrt{c_1}}{H} e^{-Ht} \right] \sinh^2 \left(\sqrt{c_1} x_1 + \ln \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \right) & + \cosh^2 \left(\sqrt{c_1} x_1 + \ln \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \right) \\
& \left. \cosh^2 \left(\frac{\sqrt{c_1}}{H} e^{-Ht} + \ln \sqrt{\frac{c_3}{c_4}} \right) e^{-2Ht} c_1 \right\}; \tag{4.31}
\end{aligned}$$

se procede de la misma manera con la segunda solución, en este caso R está dado por:

$$\begin{aligned}
R = 12H^2 + 32\beta^2 c_1^3 c_3^2 e^{-4Ht} & \left\{ \left[H^2 \cos^2 \left(\frac{\sqrt{c_1}}{H} e^{-Ht} \right) \right. \right. \\
+c_1 \sin^2 \left(\frac{\sqrt{c_1}}{H} e^{-Ht} \right) - \sin \left(2 \frac{\sqrt{c_1}}{H} e^{-Ht} \right) & H \sqrt{c_1} e^{-Ht} \left. \right] \\
\sinh^2 (\sqrt{c_1} x_1) + \cosh^2 (\sqrt{c_1} x_1) \cos^2 \left(\frac{\sqrt{c_1}}{H} e^{-Ht} \right) & \left. c_1 \right\}. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Interpretación física y conclusiones

5.1 Caso hiperbólico

Con las condiciones antes señaladas (c_1 y c_2 positivas, así como c_3 y c_4 con igual signo), se grafican la función $u(t, x_1)$ y el escalar de curvatura $R(t, x_1)$ como sigue:

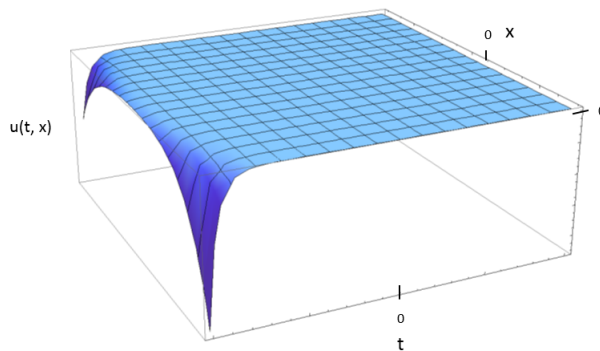


Figura 5.1: Gráfica de la función $u(t, x_1)$.

5.2 Caso trigonométrico

De igual manera, con las condiciones $c_1 = c_2 < 0$ y $c_3 = c_4$ se grafican la función $u(t, x_1)$ y el escalar de curvatura $R(t, x_1)$:

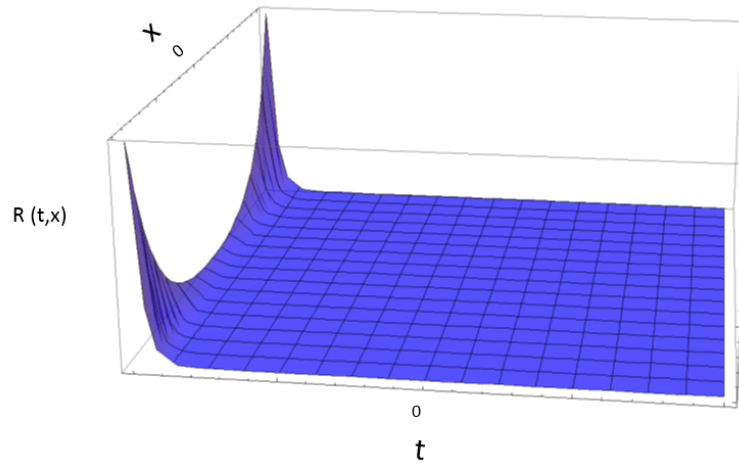


Figura 5.2: Gráfica de R tanto para t positivo como t negativo.

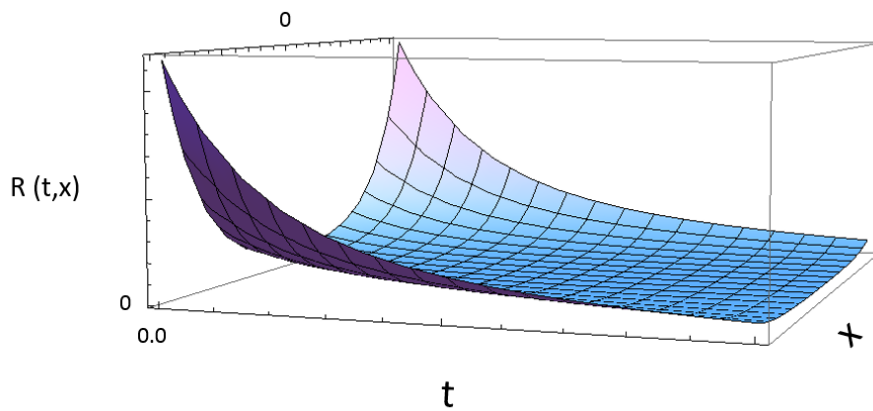


Figura 5.3: Gráfica del escalar de curvatura R , para t positivo.

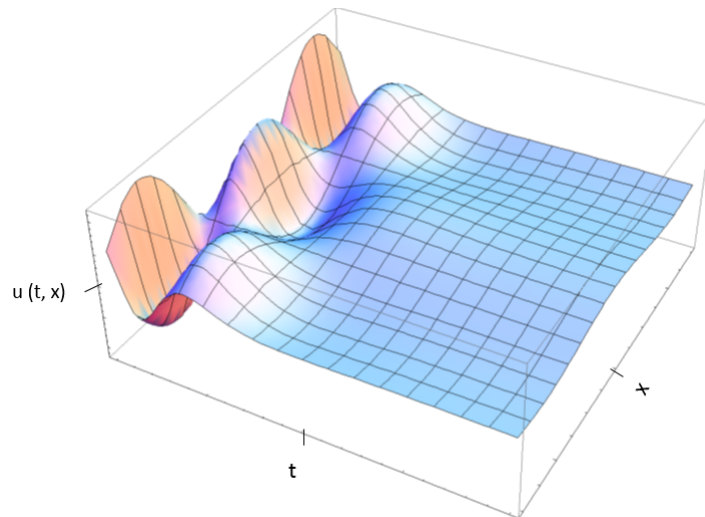
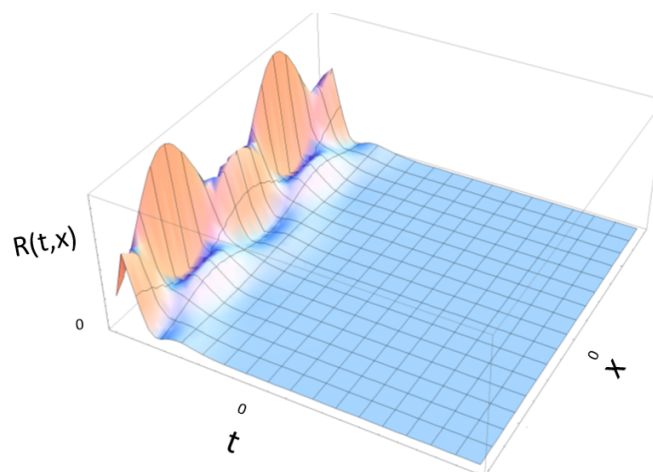
Figura 5.4: Gráfica de $u(t, x_1)$.

Figura 5.5: Gráfica del escalar de curvatura

Una peculiaridad interesante de estos modelos cosmológicos radica en que ambos admiten una evolución con tiempos negativos infinitos, de tal modo que no hay un tiempo inicial como en la mayoría de los modelos cosmológicos conocidos.

Asimismo, en ambos casos se observa que $u(t, x_1)$ tiende a una función espacial a medida que el tiempo transcurre (para valores positivos de t), por consiguiente, los factores exponenciales que aparecen multiplicando cada dirección espacial en la métrica también tienden a una función espacial, dando la impresión de que la anisotropía no desaparece en la métrica.

Por el contrario, para valores negativos de t , se observa que la función $u(t, x_1)$ diverge dejando claro que el espacio tiempo es altamente anisótropo tanto en el tiempo como en el espacio.

Ahora, al realizar un análisis del escalar de curvatura se observa que en ambos casos R se acerca asintóticamente al valor constante $12H^2$ si t es positivo, esto gracias a que el factor e^{-Ht} decae rápidamente en el tiempo, lo que significa que tenemos un espacio tiempo de de Sitter.

De forma contraria, si analizamos el comportamiento de este invariante cuando t es menor que cero, la función diverge a infinito en ambos casos.

En conclusión, en este modelo cosmológico hemos obtenido una solución exacta en la que el universo parte de un estado altamente anisótropo y no homogéneo en el pasado infinito temporal (cuando $t \rightarrow \infty$) y a medida que transcurre el tiempo va evolucionando hasta llegar a un estado que corresponde al universo de Sitter, que es homogéneo e isótropo, para tiempos positivos. Este análisis indica que a nivel de la métrica se requiere realizar una transformación de las coordenadas espaciales y el tiempo que dejen explícito el carácter homogéneo que el espacio tiempo adopta para tiempos positivos.

Bibliografía

1. Larroyo, F. Introducción a la filosofía de la cultura (2ª ed.) Porrúa, México (1974).
2. Toro, A. Historia de México (Ed. rev.) México (1951).
3. Villa Rojas, A. Nociones preliminares sobre cosmología maya. Revista del Instituto de Investigaciones Antropológicas, UNAM, vol 22, núm 1, pp. 230-249 (1985). Disponible en: <http://revistas.unam.mx/index.php/antropologia/article/view/15850/15050>
4. Torres Rojas, J. García Salcedo, R. y Agüero Granados, M. A. Astronomía, gravitación y modelos cosmológicos. Ciencia Ergo Sum, vol. 11, núm. 2, pp.191-198 (2004). Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10411209>
5. Ellis, G. F. R., Maartens, R. y MacCallum, M. A. H. Relativistic cosmology. Cambridge University Press, New York, United States of America (2012).
6. Gogberashvili, M., Herrera-Aguilar, A., Malagón-Morejón, D., Mora-Luna, R.R. y Nucamendi, U. Thick Brane Isotropization in a Generalized 5D Anisotropic Standing Wave Braneworld Model, Phys. Rev. D 87 (2013) 084059, arXiv:1201.4569v2 [hep-th].
7. Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. The Classical Theory of Fields, Vol 2, 3 ed. Pergamon Press (1971).
8. Carroll S. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. Addison Wesley (2003).
9. Øyvind G. y Sigbjorn H. Einstein's General Theory of Relativity With Modern Applications in Cosmology. Springer (2007).