



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estructura de norma de las teorías de Yang-Mills con
violación de Lorentz

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Amaury Misael Durán González

Asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Puebla Pue.
2 de diciembre de 2020



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estructura de norma de las teorías de Yang-Mills con
violación de Lorentz

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Amaury Misael Durán González

Asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Puebla Pue.
2 de diciembre de 2020

Título: Estructura de norma de las teorías de Yang-Mills con violación de Lorentz

Estudiante: AMAURY MISAEL DURÁN GONZÁLEZ

COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco Torres Del Castillo
Presidente

Dr. Héctor Novales Sánchez
Secretario

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Vocal

Dra. Iraís Bautista Guzmán
Vocal

Dr. J. Jesús Toscano Chávez
Asesor

Agradecimientos

La culminación de una etapa extraordinaria de mi vida no habría sido posible sin el apoyo incondicional de mi madre, quien siempre confió en mí cuando decidí perseguir mis sueños al estudiar física; sin la orientación y las lecciones que me ha brindado mi padre; sin el cariño, la compañía y la alegría con la que me llenó mi pequeña hermana durante todo este período.

A mis amigos y compañeros por su enorme comprensión, por el tiempo y el espacio compartido, por hacer de la facultad mi segunda casa y, sobre todo, por ser cada uno una gran fuente de motivación. A *Los Orugos*, *Los Compañeros*, Pepe, Fernando, al grupo de *Física 107*, *Los matemáticos*, *Los rufianes*, Tepale, Melissa, Antonia, Aldair, Sam, Samuel Caballero, Jazmín, Cynthia, Betzabeth, Netzalín, Bruno, Enrique...

Aunque tuve la oportunidad de conocer a muy pocos de mis profesores, todos influyeron sobre mi interés por ciertas áreas de la física. A Miguel Ángel García-Ariza y a Luis Alberto Guerrero Méndez me gustaría agradecerles la enorme ayuda que me brindaron en los momentos más difíciles de mi carrera, principalmente cuando pensé abandonarla. A mi jurado, conformado por algunos de los profesores de la facultad de ciencias que más admiro, quisiera agradecer las valiosas y constantes enseñanzas dentro y fuera del aula y la dirección en el desarrollo de este trabajo.

A continuación, me gustaría hacer algunas menciones especiales:

1. A Mario Alexis Ramírez Bautista, compañero y amigo de la licenciatura.
2. A los miembros de *Ballet Concierto de Puebla*, bajo la dirección de Flor De María Reina Toriz, quien siempre me abrió las puertas de su casa; en particular, a Catherine Jiménez Ruiz. Los breves momentos que compartí con los bailarines de la academia me mostraron que el arte y la ciencia son, en muchos aspectos, caras distintas de la misma moneda.
3. Por último, pero no menos importante, a la familia Morales Hernández, con quienes conviví muchos años y me enseñaron la importancia del trabajo duro.

A todos ustedes siempre los llevaré en mi memoria y en mi corazón.

Resumen

Introducimos de manera breve el formalismo de Dirac para analizar la estructura de norma de los sistemas singulares de la mecánica clásica y, posteriormente, aplicamos este método para estudiar las constricciones y las transformaciones de norma de la teoría de Yang-Mills extendida de Don Colladay y Alan Kostelecký, la cual facilita la investigación experimental de la simetría de Lorentz y CPT dentro de la extensión del modelo estándar. Por conveniencia y con el objetivo de ejemplificar la aplicación del algoritmo de Dirac-Bergmann a las teorías de campo, revisamos primero la estructura de norma de la teoría de Yang-Mills usual. Al final, encontramos que la acción y, por tanto, las ecuaciones del campo de la teoría extendida son invariantes bajo la transformación de norma que induce su correspondiente generador, la cual transforma al campo de norma del mismo modo que el generador de la teoría usual.

Palabras clave: *Algoritmo de Dirac-Bergmann, constricciones, geometría simpléctica, sistemas singulares, transformaciones de norma, Yang-Mills, Yang-Mills extendido.*

Índice general

| | |
|---|------------|
| Agradecimientos | v |
| Resumen | vii |
| Introducción | 1 |
| 1. Sistemas singulares | 3 |
| 1.1. Constricciones primarias | 4 |
| 1.2. El hamiltoniano primario | 5 |
| 1.3. Constricciones secundarias | 6 |
| 1.4. Constricciones de primera y segunda clase | 7 |
| 1.5. Transformaciones de norma | 8 |
| 2. Estructura de norma del lagrangiano de Yang-Mills | 11 |
| 2.1. Constricciones primarias | 12 |
| 2.2. El hamiltoniano canónico | 13 |
| 2.3. Constricciones secundarias | 14 |
| 2.4. Transformaciones de norma | 16 |
| 3. Estructura de norma del lagrangiano de Yang-Mills extendido | 19 |
| 3.1. Constricciones primarias | 20 |
| 3.2. El hamiltoniano canónico | 21 |
| 3.3. Constricciones secundarias | 22 |
| 3.4. Transformaciones de norma | 24 |
| Conclusiones | 27 |
| A. Descripción geométrica de la mecánica clásica | 29 |
| Bibliografía | 37 |

Introducción

No cabe duda de que la teoría de la relatividad de Albert Einstein junto con la mecánica cuántica constituyen algunos de los mayores logros intelectuales del siglo pasado. La enorme popularidad que iba alcanzando el trabajo de Einstein aumentaba las esperanzas entre varios miembros de la comunidad científica de poder unificar las fuerzas de la naturaleza conocidas en ese entonces. Sin embargo, el estudio constante del comportamiento de las partículas subatómicas, favorecido por el desarrollo tecnológico, fue revelando cada vez más nuevos enigmas que escapaban del esquema clásico.

Por supuesto, es natural que los retratos que las teorías cuántica y relativista exhiben de la realidad sean, algunas veces, contradictorios entre sí, debido a que el papel que desempeñan en ellas los observadores, el espacio y el tiempo son diferentes. Como consecuencia de esto, resultó necesario establecer una teoría que fuera capaz de explicar aquellos fenómenos en la intersección de sus correspondientes dominios de aplicabilidad. Estos esfuerzos sentaron las bases de la teoría cuántica de campos.

En un documento de 1954 [1], Chen Ning Yang y Robert Mills propusieron una clase más grande de teorías de campo clásicas que generalizaban al electromagnetismo y que eran invariantes con respecto a grupos de simetría locales. Las versiones cuantizadas de estas teorías, conocidas ahora con el nombre de *teorías de norma*, se convirtieron en el pilar para los tratamientos en física de partículas. Ejemplos de teorías de norma incluyen a varias que son de las más importantes y exitosas desde un punto de vista físico: electrodinámica cuántica (QED), teoría electrodébil, teorías de gran unificación (GUT) y el modelo estándar (SM). Ésta última es considerada como la teoría de las interacciones electromagnética y nucleares débil y fuerte, basada en el *grupo de norma* $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$.

Luego de demostrar la existencia de anisotropía en los modelos de teoría de cuerdas, Kostelecký y otros colegas suyos propusieron en 1989 una nueva versión del SM, llamada *extensión del modelo estándar* (SME) [2], una formulación efectiva del SM concebida para facilitar la investigación experimental de la simetría de Lorentz y CPT, donde la última consiste de transformaciones de conjugación de la carga e inversión del espacio y el tiempo. Aunque las rupturas de la simetría de Lorentz son motivadas por la teoría de cuerdas, la acción efectiva a bajas energías que aparece en el SME es independiente de la teoría subyacente.

Una posible fuente responsable de las desviaciones de las predicciones del grupo de Lorentz podría surgir de un rompimiento espontáneo del grupo $SO(1,3)$ en alguno de sus subgrupos, lo cual implicaría que los fotones son en realidad bosones de Nambu-Goldstone. Esta idea interesante ha sido estudiada por diversos autores en la literatura [3, 4, 5]. Otra fuente probable de violación de esta simetría surge de la posibilidad de que el espacio-tiempo sea no conmutativo [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

Por otro lado, la construcción del modelo cuántico correspondiente a cierta teoría clásica es lo que nosotros conocemos con el nombre de *cuantización* y representa un problema fundamental dentro de la teoría cuántica de campos. La mecánica cuántica de los sistemas más simples fue construída primero usando el método de *cuantización canónica*, desarrollado por Paul Dirac. A continuación, damos una explicación breve de este procedimiento:

Una vez que hemos supuesto que todas las cantidades físicas f son expresables en términos

de las coordenadas y los momentos, y que el estado del sistema cuántico está determinado por un vector ψ en un espacio de Hilbert \mathfrak{H} , asignamos a cada cantidad física $f(q, p)$ un operador $\hat{f} = f(\hat{q}, \hat{p})$ sobre \mathfrak{H} . Posteriormente, postulamos que los operadores de las coordenadas de q y p obedecen las relaciones de conmutación canónicas $[\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_j^i$ y $[\hat{q}^i, \hat{q}^j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$, siendo \hbar la constante de Planck. De esta manera, la evolución temporal del estado ψ está descrita por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi,$$

donde el operador \hat{H} , el hamiltoniano cuántico, corresponde al hamiltoniano clásico H .

La propensión de cuantizar canónicamente a los sistemas clásicos se debe al hecho de que este procedimiento es el más desarrollado y el más consistente. De hecho, aunque existen otras formulaciones disponibles de la teoría cuántica, las cuales pueden ser introducidas independientemente por un sistema de postulados, es posible derivar algunas de ellas a partir de la formulación de operadores basado en el método de cuantización canónica.

Sin embargo, en vista de que, a día de hoy, la mayoría de las teorías de campo de interés físico pertenecen a la clase de *teorías singulares*, aquéllas donde existen ciertas relaciones denominadas *constricciones*, existirán obstáculos para efectuar la *hamiltonización* de la teoría clásica en cuestión, esto es, la posibilidad de describir la dinámica clásica del sistema en la forma hamiltoniana.

A partir de sus trabajos [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21], Dirac y Bergmann establecieron un procedimiento, el *algoritmo de Dirac-Bergmann*, para estudiar las simetrías y la estructura hamiltoniana de las teorías singulares. No obstante, otros tratamientos extraordinarios sobre sistemas singulares se han publicado además del de Dirac. Unos se orientan al estudio de sistemas de dimensión finita [22]; otros, en teorías de campo [23, 24, 25, 26, 27].

Dada su importancia física y matemática, el propósito principal de este trabajo es el estudio de la estructura de norma de la teoría de Yang-Mills extendida (YME) en el marco del algoritmo de Dirac-Bergmann, método que, a su vez, permite estudiar aspectos modernos en teoría cuántica de campos, tales como cuantización en variedades con curvatura, teorías en el retículo, formulaciones no perturbativas, topología de los espacios de soluciones, geometría no conmutativa, métodos de cuantización algebraicos, etc. Para ello, hemos organizado el contenido de esta tesis de la siguiente manera.

En el capítulo 1 introducimos brevemente el formalismo de Dirac para tratar a los sistemas singulares de dimensión finita de la mecánica clásica. Como un ejemplo de la aplicación del algoritmo de Dirac-Bergmann en teorías de campo y con el objetivo de utilizar posteriormente los resultados obtenidos, revisamos en el capítulo 2 la estructura de norma de la teoría de Yang-Mills (YM). El objetivo central de nuestro trabajo se ubica dentro del capítulo 3, en el cual analizamos completamente las constricciones de la teoría de Yang-Mills extendida. Algunas de nuestras conclusiones más destacables son *i*) el número de grados de libertad de YME es el mismo que el número de grados de libertad de YM, *ii*) el conjunto de constricciones de YME está constituido únicamente por constricciones de primera clase y *iii*) la acción de esta teoría es invariante de norma hasta un término de superficie.

Por último, nos ha parecido sensato incluir en este proyecto un anexo sobre la descripción geométrica de los sistemas regulares de la mecánica clásica, ya que podemos entender a las teorías de norma usando ideas geométricas muy similares a aquéllas de la teoría de la relatividad general. No obstante, evitaremos en la medida de lo posible hacer uso de este formalismo, pues su introducción va más allá de las intenciones de esta tesis. Para un tratamiento más detallado de estos temas, recomendamos [28, 29, 30, 31, 32].

Capítulo 1

Sistemas singulares

El hecho de que los modelos clásicos iniciales que nos permiten construir la teoría cuántica de partículas elementales estén expresados en su forma lagrangiana se debe a que, en este formalismo, podemos exhibir explícitamente la covariancia de nuestra teoría bajo las transformaciones de Lorentz con el fin de mantener la compatibilidad con los principios de la relatividad especial.

Como es habitual en la mecánica clásica, tras haber propuesto un lagrangiano $L = L(q^i(t), \dot{q}^i(t))$ ($i = 1, \dots, n$), la evolución de la configuración de nuestro sistema bajo consideración está determinada por el *principio de mínima acción de Hamilton*, el cual enuncia que la curva en el espacio de configuraciones que realmente sigue el sistema y que pasa por un par de puntos a los tiempos t_1 y t_2 es aquella que es un extremo de la *acción*

$$S[q^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i(t), \dot{q}^i(t)) dt. \quad (1.1)$$

Una condición necesaria para que esto se cumpla es que tales curvas sean soluciones de las *ecuaciones de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = W_{ij} \ddot{q}^j - V_i = 0, \quad (1.2)$$

donde W y V son las matrices con entradas

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j},$$
$$V_i = -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q^i}.$$

Suponiendo que el rango r de W_{ij} es constante, la imagen de la transformación lineal asociada a W_{ij} tendrá codimensión igual a $n - r$. En particular, si el lagrangiano L es *regular*, es decir, si la matriz W_{ij} es invertible, tendremos un conjunto completo de ecuaciones diferenciales de segundo orden y entonces todas las aceleraciones \ddot{q}^i quedarán en términos de las coordenadas q^i y las velocidades \dot{q}^i :

$$\ddot{q}^i = (W^{-1})^{ij} V_j.$$

Cuando escribimos de esta manera a las ecuaciones de Euler-Lagrange, decimos que las hemos expresado en su *forma normal*.

En cambio, si W_{ij} no es invertible, sólo podremos despejar r aceleraciones \ddot{q}^a ($a = 1, \dots, r$) en términos de las aceleraciones \ddot{q}^b restantes:

$$\ddot{q}^a = \ddot{q}^a(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^b).$$

En este caso, decimos que L es *singular*.

Puesto que es el caso que más nos importa, en este capítulo trabajaremos con los sistemas singulares de la mecánica clásica que constan de un número finito de coordenadas generalizadas independientes. Posteriormente, cuando tratemos con teorías de campo, trasladaremos cuidadosamente los resultados que obtengamos.

1.1. Constricciones primarias

Tal y como mencionábamos, nos resulta necesario y conveniente recurrir a la forma hamiltoniana especialmente para propósitos de cuantización. Otra razón especial para esto es que, si Q es el espacio de configuraciones n dimensional de nuestro sistema, el espacio fase T^*Q del formalismo hamiltoniano es canónicamente una variedad simpléctica, mientras que el espacio de velocidades TQ del formalismo lagrangiano no lo es. La estructura simpléctica del espacio fase es la que da origen a la elegante simplicidad de la mecánica hamiltoniana (ver el apéndice A).

La transición de la formulación lagrangiana a la hamiltoniana está determinada por la transformada de Legendre $\mathbb{F}L$ asociada al lagrangiano L (ver A.31) definida localmente por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (1.4)$$

De acuerdo con el teorema de la función inversa, la transformada de Legendre será localmente invertible si, y sólo si,

$$\det \left[\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i} \right] = \det W_{ij} \neq 0. \quad (1.5)$$

Esto significa que, si el lagrangiano es regular, seremos capaces de invertir la expresión 1.4 para obtener a todas las velocidades generalizadas \dot{q}^i en términos de las coordenadas q^i y de los momentos canónicos p_i y, entonces, el *hamiltoniano canónico*

$$H = \dot{q}^i p_i - L(q^i, \dot{q}^i) \quad (1.6)$$

será una función bien definida de las variables q^i y p_i del espacio fase. Más aún, si tal lagrangiano es hiperregular ($\mathbb{F}L$ es un difeomorfismo global), ambas formulaciones serán globalmente equivalentes.

No obstante, la naturaleza singular de las teorías de nuestro interés implica que la imagen de la transformada de Legendre está propiamente contenida en el espacio fase. Dicho en otras palabras, existen $m = \text{nul } W$ relaciones independientes de la forma

$$\phi_a^{(1)}(q^i, p_i) = 0. \quad (1.7)$$

Una condición necesaria y localmente suficiente para que estas funciones sean independientes es que el rango de la matriz

$$\left[\frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial (q^i, p_i)} \right]$$

sea constante e igual a m . Llamaremos a las funciones $\phi_a^{(1)}$ *constricciones primarias*, las cuales definen localmente a una subvariedad encajada $\Gamma = \mathbb{F}L(TQ)$ del espacio fase de dimensión $2n - m$, la *subvariedad de constricciones primarias*.

De manera más general, decimos que una función real $\phi \in C^\infty(T^*Q)$ es una *constricción para* N si N es una subvariedad del espacio fase y $\phi|_N = 0$. Cuando sobreentendemos la subvariedad a la cual nos referimos, escribimos esto último usualmente con el signo de la *igualdad débil* de Dirac

$$\phi \approx 0$$

y decimos que ϕ es una función *débilmente igual a cero*. También diremos que dos funciones reales definidas sobre el espacio fase son *débilmente iguales* si su diferencia es débilmente igual a cero. Físicamente, la presencia de constricciones en nuestra teoría significa, como veremos más adelante, que su formulación presenta cierta redundancia.

1.2. El hamiltoniano primario

Cuando el sistema con el cual estamos trabajando es regular, la aplicación del principio de mínima acción conduce directamente a las ecuaciones de movimiento en el formalismo hamiltoniano:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(\dot{q}^i p_i - H) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{q}^i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \delta q^i + \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (p_i \delta q^i) dt. \end{aligned}$$

Usando el lema fundamental del cálculo de variaciones y el hecho de que δq^i se anula en t_1 y en t_2 , llegamos a las *ecuaciones de Hamilton*

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (1.8a)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (1.8b)$$

Por otra parte, en virtud de la discusión de la sección anterior, la presencia de relaciones entre las variables canónicas q^i y p_i nos dice que sus variaciones δq^i y δp_i no son independientes. Además, el hamiltoniano canónico H dado por 1.6 no está, por lo general, bien definido. Sin embargo, podemos abordar esta situación a través del método de multiplicadores de Lagrange.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que H está bien definido sobre la subvariedad de constricciones primarias. Desde luego, esto ocurre si, y sólo si, para cualquier par de puntos $u, v \in TQ$ tales que $\mathbb{F}L(u) = \mathbb{F}L(v)$ se cumple que $E_L(u) = E_L(v)$, donde E_L es la *función de energía* asociada a L dada por la expresión A.26. Definimos el *hamiltoniano primario*

$$H_1 = H + \lambda^a \phi_a^{(1)}, \quad (1.9)$$

donde las funciones $\lambda^a = \lambda^a(q^i, p_i)$ juegan el papel de multiplicadores de Lagrange. Notemos que el hamiltoniano primario es débilmente igual al hamiltoniano canónico en Γ (sus valores en la subvariedad de constricciones primarias no cambian cuando añadimos cualquier función débilmente igual a cero). Puesto que estamos incluyendo toda la información obtenida, el hamiltoniano primario extiende la descripción de la dinámica del hamiltoniano canónico.

Variando la acción que resulta de la introducción de este nuevo hamiltoniano, obtenemos, razonando del mismo modo que en el caso regular y utilizando las constricciones, lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{q}^i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \lambda^a \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial q^i} \delta q^i - \lambda^a \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial p_i} \delta p_i - \phi_a^{(1)} \frac{\partial \lambda^a}{\partial q^i} \delta q^i \right. \\ &\quad \left. - \phi_a^{(1)} \frac{\partial \lambda^a}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial q^i} \right) \delta q^i + \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] dt. \end{aligned}$$

De esto último, llegamos a las *ecuaciones de Hamilton-Dirac*

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial p_i}, \quad (1.10a)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a^{(1)}}{\partial q^i}. \quad (1.10b)$$

Notemos que si introducimos el paréntesis de Poisson que induce la estructura simpléctica de T^*Q (ver A.4), podemos reescribir a estas ecuaciones de una manera más sencilla:

$$\dot{q}^i = \{q^i, H_1\} = \{q^i, H\} + \lambda^a \{q^i, \phi_a^{(1)}\}, \quad (1.11a)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H_1\} = \{p_i, H\} + \lambda^a \{p_i, \phi_a^{(1)}\}, \quad (1.11b)$$

cuya veracidad se comprueba fácilmente de las propiedades del paréntesis de Poisson.

1.3. Constricciones secundarias

Debido a la no degeneración de la estructura simpléctica Ω del espacio fase, la versión geométrica de las ecuaciones de Hamilton (ver A.9)

$$X \lrcorner \Omega = dH_1$$

admite, al menos, una solución X a lo largo de Γ ; sin embargo, esta no es toda la historia. Con el objetivo de que nuestras soluciones sean consistentes, debemos demandar que sus curvas integrales estén completamente contenidas en la subvariedad de constricciones primarias [33]. Traducimos esto diciendo que X debe ser tangente a Γ ,

$$X[\phi_a^{(1)}] \approx 0,$$

lo cual implica, a su vez, que las constricciones primarias $\phi_a^{(1)}$ deben ser constantes de movimiento con respecto a la evolución generada por el hamiltoniano H_1 :

$$\dot{\phi}_a^{(1)} = \{\phi_a^{(1)}, H_1\} = \{\phi_a^{(1)}, H\} + \lambda^b \{\phi_a^{(1)}, \phi_b^{(1)}\} \approx 0. \quad (1.12)$$

Nos referimos a este conjunto de condiciones con el nombre de *condiciones de consistencia*, las cuales, comúnmente, nos dan información sobre las funciones λ^b y también un número adicional de constricciones. Consideramos a la relación 1.12 como un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo de la forma

$$P\lambda + h \approx 0,$$

siendo $P_{ab} = \{\phi_a^{(1)}, \phi_b^{(1)}\}$ y $h_a = \{\phi_a^{(1)}, H\}$, y discutimos a continuación los diferentes casos posibles:

- Si la matriz P es invertible entonces el valor de cada multiplicador λ^b es igual a $-(P^{-1})^{ab}h_a$. Luego, si $h \neq 0$, la evolución de cualquier función f definida sobre Γ está dada unívocamente por

$$\dot{f} = \{f, H\} - \{f, \phi_a^{(1)}\}(P^{-1})^{ab}\{\phi_b^{(1)}, H\}.$$

Sin embargo, si h es cero, el sistema de ecuaciones lineales tiene como única solución $\lambda = 0$. Pese a la dificultad de que nuestro sistema de ecuaciones sea de la forma $0 \approx 0$, usualmente podemos imponer la condición $\det P \approx 0$ y obtener una constricción adicional.

- Por otro lado, cuando P es una matriz singular, sólo podremos hallar el valor de $\text{ran } P$ multiplicadores en términos de los nul P restantes. Si además $h \neq 0$ y w es un vector nulo arbitrario de la matriz P de rango constante con componentes w^a entonces las condiciones de consistencia nos dicen que

$$\dot{\phi}_a^{(1)}w^a = h_a w^a + \lambda^b P_{ab}w^a = h_a w^a \approx 0.$$

Por lo general, estas ecuaciones sólo se cumplen en alguna subvariedad de Γ , por lo que las funciones de la forma

$$\{\phi_a^{(1)}, H\}w_s^a,$$

conducen a nuevas constricciones $\phi_a^{(2)}$, a las que llamamos secundarias, para algunos vectores nulos w_s de P . Probablemente este caso es el de más importancia dentro del estudio de las teorías de norma. De hecho, todas las teorías que estudiaremos en este trabajo entran en esta categoría.

Observamos ahora que, si obtuvimos un conjunto de constricciones secundarias, nos encontramos nuevamente con el problema inicial de encontrar los extremos para la acción junto con la condición de que deben satisfacer ciertas restricciones. Construyendo un hamiltoniano H_2 que contenga a todas las constricciones ϕ_σ que hemos obtenido hasta este punto, obtenemos que la evolución de cualquier función f definida sobre la subvariedad que definen las constricciones secundarias es

$$\dot{f} = \{f, H + \lambda^\sigma \phi_\sigma\} = \{f, H_2\}.$$

Tal como con las constricciones primarias, tenemos que forzar que las constricciones secundarias cumplan con las condiciones de consistencia, las cuales pueden generar, a su vez, nuevas constricciones. Suponiendo que el problema se resuelve, este procedimiento continúa hasta que todas las condiciones de consistencia sean completamente satisfechas en alguna *subvariedad final de constricciones* Σ . Por simplicidad, es común que en el formalismo de Dirac-Bergmann denominemos *constricciones secundarias* a todas las constricciones que resultan de aplicar este método.

1.4. Constricciones de primera y segunda clase

Puesto que la subvariedad final de constricciones está definida por el conjunto de todas las constricciones obtenidas en el procedimiento anterior, la distinción entre constricciones primarias y secundarias es físicamente irrelevante. No obstante, por motivos que ya discutiremos, es importante para nosotros distinguirlas de otra manera. Para ello, hagamos las siguientes observaciones.

Si denotamos con ϕ_μ a cualquier elemento del conjunto formado por todas las constricciones derivadas, definimos el *hamiltoniano total* H_T como

$$H_T = H + \lambda^\mu \phi_\mu, \quad (1.13)$$

el cual contiene la información completa del sistema. Por construcción, todas las constricciones ϕ_μ satisfacen las condiciones de consistencia

$$\dot{\phi}_\mu = \{\phi_\mu, H_T\} = \{\phi_\mu, H\} + \lambda^\nu \{\phi_\mu, \phi_\nu\} \approx 0. \quad (1.14)$$

Sea C la matriz de rango constante con entradas $C_{\mu\nu} = \{\phi_\mu, \phi_\nu\}$. Si $\det C \approx 0$, podemos tomar n vectores nulos independientes w_i de C tales que

$$\{w_i^\mu \phi_\mu, \phi_\nu\} = w_i^\mu \{\phi_\mu, \phi_\nu\} \approx 0, \quad (1.15)$$

con respecto a todas las constricciones ϕ_ν . Así que podemos escribir a cualquier solución λ del sistema de ecuaciones lineales 1.14 como suma de una solución particular u más una combinación lineal arbitraria de los vectores w_i :

$$\lambda^\nu = u^\nu + v^i w_i^\nu.$$

Por tanto, la evolución de cualquier función f definida sobre Σ está dada por

$$\dot{f} = \{f, H_T\} = \{f, H + u^\mu \phi_\mu + v^i \xi_i\} = \{f, H'\} + v^i \{f, \xi_i\}, \quad (1.16)$$

con $H' = H + u^\mu \phi_\mu$ y $\xi_i = w_i^\mu \phi_\mu$.

Si decimos entonces que una función definida sobre el espacio fase es de *primera clase* cuando su paréntesis de Poisson con todas las constricciones ϕ_μ es débilmente igual a cero, concluimos que

el hamiltoniano total es suma de un hamiltoniano de primera clase más una combinación lineal de constricciones de primera clase, ya que

$$\begin{aligned}\{\xi_i, \phi_\mu\} &= w'_i \{\phi_\nu, \phi_\mu\} + \{w'_i, \phi_\mu\} \phi_\nu = w'_i \{\phi_\nu, \phi_\mu\} \approx 0, \\ \{H', \phi_\mu\} &= \{H + u^\nu \phi_\nu, \phi_\mu\} = \{H, \phi_\mu\} + u^\nu \{\phi_\nu, \phi_\mu\} + v^i \{\xi_i, \phi_\mu\} = -\{\phi^\mu, H_T\} \approx 0.\end{aligned}$$

Además, la relación 1.15 nos muestra que las constricciones ξ_i forman un conjunto completo de nul C constricciones de primera clase.

Por otra parte, llamando simplemente funciones de *segunda clase* a aquéllas que no son de primera clase, la submatriz $D_{ij} = \{\chi_i, \chi_j\}$ de C conformada por los ran C paréntesis entre las constricciones restantes χ_i de segunda clase es invertible. Este hecho nos permite construir un nuevo paréntesis $\{, \}_D$, conocido con el nombre de *paréntesis de Dirac*, mediante la expresión

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{f, \chi_i\} (D^{-1})^{ij} \{\chi_j, g\}. \quad (1.17)$$

La utilidad de esta nueva estructura es que podemos promoverla a conmutador cuando cuantizamos nuestra teoría bajo estudio. Así mismo, este paréntesis nos ayuda a definir a las *observables clásicas* como las funciones cuyo paréntesis de Dirac con todas las constricciones de primera clase es débilmente igual a cero.

Además de que este nuevo paréntesis es bilineal, antisimétrico y satisface la regla de Leibniz y la identidad de Jacobi (ver la definición de un paréntesis de Poisson en el apéndice A), el paréntesis de Dirac de cualquier función con cualquier otra de primera clase (resp. cualquier constricción de segunda clase) es débilmente igual al paréntesis de Poisson usual entre ellas (resp. es igual a cero). Entonces podemos escribir también a la expresión 1.16 como

$$\dot{f} = \{f, H_T\}_D.$$

Por último, puesto que D es antisimétrica y

$$\det D = \det (D^t) = \det (-D) = (-1)^{\text{ran } C} \det D,$$

el número de constricciones de segunda clase es, necesariamente, par.

1.5. Transformaciones de norma

La forma en la que hemos escrito las soluciones del sistema 1.14 que resulta de las condiciones de consistencia nos permitió separar a los multiplicadores λ^ν en una parte que está fija y otra que permanece indeterminada debido a la arbitrariedad de las funciones v^i , lo cual nos indica que, dado un conjunto de condiciones iniciales de nuestro sistema, su evolución ya no es única. Sin embargo, en tanto que la mecánica clásica es una teoría determinista, debemos ser capaces de considerar a estas soluciones como dos representaciones diferentes de la misma configuración del sistema físico.

Una de las razones principales por las que hemos introducido el concepto de funciones de primera clase es que nos permite afirmar que sus campos vectoriales asociados son tangentes a Σ [34]. En efecto, si f es de primera clase entonces, para cualquier constricción ϕ_μ ,

$$0 \approx \{\phi_\mu, f\} = \Omega(X_{\phi_\mu}, X_f) = X_f[\phi_\mu],$$

siendo $X_{\phi_\mu} = (d\phi_\mu)^\sharp$ el campo vectorial asociado a ϕ_μ (ver A.1).

Análogamente, los campos vectoriales asociados a las constricciones toman valores en $T\Sigma^\perp$, es decir, son Ω -ortogonales a los campos vectoriales definidos sobre Σ . Esto es así porque

$$\Omega(X_{\phi_\mu}, Y) = Y[\phi_\mu] \approx 0,$$

para cualquier campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Por tanto, en vista de que los campos vectoriales asociados a constricciones de primera clase toman valores en $T\Sigma \cap T\Sigma^\perp = \ker(\Omega|_\Sigma)$, los campos vectoriales asociados al hamiltoniano total a lo largo de la subvariedad final de constricciones, o sea, las soluciones de la ecuación de Hamilton

$$(X \lrcorner \Omega - dH_T)|_\Sigma = 0,$$

son equivalentes módulo términos provenientes de las constricciones ξ_i .

A partir de este resultado decimos entonces que las constricciones de primera clase generan las *transformaciones de norma*. Una manera de convencernos de ello es la siguiente. Consideremos un estado de nuestro sistema cuya evolución bajo las mismas condiciones iniciales al tiempo t_0 está dada por dos representaciones distintas de los multiplicadores v^i . Haciendo un desarrollo en serie de Taylor a primer orden de la variable canónica $f = f(t)$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t_0) + \dot{f}(t)\delta t = f(t_0) + (\{f, H'\} + v_1^i\{f, \xi_i\})\delta t \\ &= f(t_0) + (\{f, H'\} + v_2^i\{f, \xi_i\})\delta t. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \delta f &= [f(t_0) + (\{f, H'\} + v_1^i\{f, \xi_i\})\delta t] - [f(t_0) + (\{f, H'\} + v_2^i\{f, \xi_i\})\delta t] \\ &= v^i\{f, \xi_i\}\delta t, \end{aligned} \tag{1.18}$$

donde $v^i = (v_1^i - v_2^i)$.

Con el objetivo de que nuestra teoría no presente ambigüedades al momento de hacer predicciones, concluimos que el flujo generado por $\{\cdot, \xi_i\}$ sólo cambia la representación matemática, pero no modifica la información física observable; es decir, el cambio de f es exclusivamente una transformación de norma.

Capítulo 2

Estructura de norma del lagrangiano de Yang-Mills

Para nosotros, una *teoría de norma* es simplemente una teoría de *haces principales* y sus correspondientes *haces vectoriales asociados*. El objeto geométrico fundamental en una teoría de norma es entonces un haz principal con *grupo de norma* G , cuya base es el *espacio-tiempo de Minkowski* \mathbb{M} dotado de la métrica $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Imaginamos a sus fibras como espacios internos en cada punto de \mathbb{M} que no están contenidos en él.

Desde un punto de vista físico y matemático, nos resulta importante definir cierta *1-forma de conexión* A con valores en el *álgebra de Lie* del grupo G , a la cual llamamos con frecuencia *campo de norma*. Las excitaciones del campo de norma en la teoría cuántica de campos asociada corresponden a los *bosones de norma* que transmiten las interacciones.

Por lo general, en teoría clásica de campos describimos la configuración de un campo A a través de sus componentes A_μ^a con respecto a unas bases específicas, las cuales están definidas en alguna región de \mathbb{M} . El papel que desempeñan estas componentes A_μ^a es el de variables independientes etiquetadas con un parámetro continuo.

Cada 1-forma de conexión define una *2-forma de curvatura* F , la cual identificamos con la *intensidad del campo* de norma. Podemos visualizar a la conexión A y a la curvatura F como generalizaciones del potencial clásico y la intensidad de campo del electromagnetismo (que es una teoría de norma con grupo de norma $U(1)$) a grupos de norma posiblemente no abelianos. Dicha curvatura está relacionada con el campo de norma por medio de la *ecuación de estructura*. Localmente,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c,$$

siendo g la *constante de acoplamiento* y f_{abc} las *constantes de estructura* del álgebra de Lie correspondiente.

Las teorías de norma puras, también conocidas con el nombre de *teorías de Yang-Mills*, involucran sólo al campo de norma y a su curvatura. En la física, un ejemplo de una teoría de norma sería la cromodinámica cuántica (QCD), la teoría de quarks, gluones y sus interacciones; mientras que una teoría de Yang-Mills sería una teoría exclusivamente de gluones.

Los campos de materia adicionales, tales como fermiones o escalares, corresponden a las secciones de los haces vectoriales asociados al haz principal. El punto crucial es que la conexión A define una *derivada covariante*

$$D_\mu^{ab} = \delta^{ab}\partial_\mu - gf_{abc}A_\mu^c$$

sobre estos haces vectoriales asociados, conduciendo a un acoplamiento entre el campo de norma y los campos de materia.

Definimos al *lagrangiano de Yang-Mills* L_{YM} a través de la siguiente *densidad lagrangiana*

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

A lo largo de este trabajo entenderemos por una *densidad* de un funcional I como una función \mathcal{I} tal que $I = \int \mathcal{I} d^3x$, donde d^3x es el elemento diferencial de volumen usual.

La forma explícita de las funciones A_μ^a viene dada por las ecuaciones del campo

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{YM}}}{\partial A_\mu^a} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{YM}}}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} \right) = 0, \quad (2.2)$$

las cuales constituyen las ecuaciones de Euler-Lagrange para el funcional

$$S_{\text{YM}}[A_\mu^a(x)] = \int \mathcal{L}_{\text{YM}}(A_\mu^a(x), \partial_\nu A_\mu^a(x)) d^4x. \quad (2.3)$$

Dicho de otro modo, de entre todas las funciones $A_\mu^a(x)$ sujetas a los mismos valores en la frontera de la región de integración de S_{YM} , aquéllas que son extremos de esta acción satisfacen necesariamente las ecuaciones anteriores.

Debido a que las derivadas parciales de \mathcal{L}_{YM} son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{YM}}}{\partial A_\beta^d} &= -\frac{1}{2}F_a^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}^a}{\partial A_\beta^d} = -\frac{1}{2}gf_{abc}F_a^{\mu\nu}(\delta_\mu^\beta \delta_\nu^d A_\nu^c + A_\mu^b \delta_\nu^\beta \delta_\nu^d) \\ &= -\frac{1}{2}(gf_{adb}F_a^{\beta\mu} A_\mu^b + gf_{adb}F_a^{\beta\mu} A_\mu^b) = -gf_{dbc}F_b^{\alpha\beta} A_\alpha^c, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{YM}}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta^d)} &= -\frac{1}{2}F_a^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}^a}{\partial (\partial_\alpha A_\beta^d)} = -\frac{1}{2}F_a^{\mu\nu}(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta \delta_\nu^d - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta \delta_\nu^d) = -F_d^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

las ecuaciones del campo adoptan la forma

$$D_\mu^{ab} F_b^{\mu\nu} = 0. \quad (2.5)$$

Llamamos a este conjunto de ecuaciones las *ecuaciones de Yang-Mills*.

A continuación, nos proponemos a revisar la estructura de norma de la teoría subyacente a \mathcal{L}_{YM} con el objetivo de compararla con la estructura descrita por el lagrangiano de Yang-Mills extendido del siguiente capítulo. Aun cuando un tratamiento riguroso de la extensión de los resultados previos a la teoría de campos clásica requiere de técnicas mucho más sofisticadas [35], podemos seguir la misma línea de los sistemas de la mecánica clásica con un número finito de coordenadas discutidos hasta el momento [24, 25, 21, 18, 36].

2.1. Constricciones primarias

En primer lugar, comprobemos que \mathcal{L}_{YM} es una densidad lagrangiana singular. Para ello, calculemos lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\text{YM}}}{\partial (\partial_\sigma A_\rho^e) \partial (\partial_\alpha A_\beta^d)} = -\frac{\partial F_d^{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\sigma A_\rho^e)} = (\delta^{\sigma\beta} \delta^{\rho\alpha} - \delta^{\sigma\alpha} \delta^{\rho\beta}) \delta_{de}.$$

Tratando a x^0 como la coordenada temporal, denotamos $\dot{A}_\mu^a = \partial_0 A_\mu^a = \partial A_\mu^a / \partial x^0$. Si $l = \dim G$ entonces la matriz W_{YM} por bloques

$$W_{\text{YM}} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1l} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{l1} & W_{l2} & \cdots & W_{ll} \end{bmatrix},$$

tal que, para cada a, b , la submatriz W_{ab} tiene como entradas

$$(W_{ab})^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\text{YM}}}{\partial \dot{A}_\mu^a \partial \dot{A}_\nu^b} = (\delta^{0\nu} \delta^{\mu 0} - \delta^{00} \delta^{\mu\nu}) \delta_{ab},$$

es una matriz diagonal cuyo determinante podemos calcular simplemente multiplicando a los determinantes de las matrices en su diagonal:

$$\det W_{\text{YM}} = \prod_a \det W_{aa}.$$

Sin embargo, cada uno de estos factores es cero, ya que cada una de las entradas de las primeras fila y columna de todas las matrices W_{aa} en la diagonal son idénticamente cero.

Siguiendo la analogía con los sistemas de la mecánica clásica analizados con anterioridad, definimos el momento conjugado π_a^μ a la componente A_μ^a mediante

$$\pi_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{YM}}}{\partial \dot{A}_\mu^a} = F_a^{\mu 0}, \quad (2.6)$$

cuyo valor obtenemos directamente de la segunda parte de la ecuación 2.4 al hacer $\alpha = 0$ y cambiar d y β por a y μ , respectivamente. De la antisimetría de $F_{\mu\nu}^a$ vemos que

$$\phi_a^{(1)} = \pi_a^0 = 0 \quad (2.7)$$

constituyen las $\text{nul } W_{\text{YM}} = \sum_a \text{nul } W_{aa} = \sum_a 1 = l$ constricciones primarias del sistema. Otro modo de concluir esto es notando que las expresiones F_{0i}^a y F_{ij}^a no contienen a las velocidades \dot{A}_0^a .

2.2. El hamiltoniano canónico

Para imponer la condición de consistencia sobre las constricciones primarias necesitamos encontrar antes la expresión del hamiltoniano canónico, el cual está dado por

$$H = \int \mathcal{H} d^3x = \int \left(\dot{A}_\mu^a \pi_a^\mu - \mathcal{L}_{\text{YM}} \right) d^3x, \quad (2.8)$$

donde hemos introducido a la *densidad hamiltoniana canónica* \mathcal{H} en términos de la densidad lagrangiana \mathcal{L}_{YM} .

Cuando μ es un índice espacial i , la expresión 2.6 toma la forma

$$\begin{aligned} \pi_a^i &= F_a^{i0} = \partial^i A_a^0 - \partial^0 A_a^i + g f_{abc} A_b^i A_c^0 = -\dot{A}_a^i + (\delta_{ac} \partial^i - g f_{acb} A_b^i) A_c^0 \\ &= -\dot{A}_a^i + D_{ab}^i A_b^0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, bajando algunos índices con ayuda del tensor métrico η ,

$$\dot{A}_i^a = \pi_a^i + D_i^{ab} A_0^b.$$

A partir de esta expresión, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{A}_\mu^a \pi_a^\mu - \mathcal{L}_{\text{YM}} = (\pi_a^i + D_i^{ab} A_0^b) \pi_a^i + \frac{1}{2} F_a^{i0} F_{i0}^a + \frac{1}{4} F_a^{ij} F_{ij}^a \\ &= (\pi_a^i + D_i^{ab} A_0^b) \pi_a^i - \frac{1}{2} \pi_a^i \pi_a^i + \frac{1}{4} F_a^{ij} F_{ij}^a = \frac{1}{2} \pi_a^i \pi_a^i + \frac{1}{4} F_a^{ij} F_{ij}^a + \pi_a^i D_i^{ab} A_0^b. \end{aligned}$$

Entonces, hasta un término de superficie, el hamiltoniano canónico queda como

$$\begin{aligned} H &= \int \left(\frac{1}{2} \pi_a^i \pi_a^i + \frac{1}{4} F_a^{ij} F_{ij}^a + \pi_a^i D_i^{ab} A_0^b \right) d^3x \\ &= \int \left(\frac{1}{2} \pi_a^i \pi_a^i + \frac{1}{4} F_a^{ij} F_{ij}^a - A_0^b D_i^{ba} \pi_a^i + \partial_i (\pi_a^i A_0^a) \right) d^3x \\ &= \int \left(\frac{1}{2} \pi_a^i \pi_a^i + \frac{1}{4} F_a^{ij} F_{ij}^a - A_0^b D_i^{ba} \pi_a^i \right) d^3x, \end{aligned}$$

usando el teorema de Gauss sobre el último término en la segunda línea y suponiendo que se anula en la frontera de integración. Así que, si redefinimos a \mathcal{H} como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi_a^i \pi_a^i + \frac{1}{4} F_a^{ij} F_{ij}^a - A_0^b D_i^{ba} \pi_a^i, \quad (2.9)$$

ella seguirá siendo una densidad de H .

Llegados a este punto, nos conviene introducir un par de conceptos. Si \mathcal{I} es una densidad de I que depende de las funciones $\varphi_\mu(x)$ y de sus primeras derivadas parciales $\partial_\nu \varphi_\mu$, definimos la *derivada funcional* de I con respecto a φ_μ mediante la expresión

$$\frac{\delta I}{\delta \varphi_\mu} = \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \varphi_\mu} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial (\partial_i \varphi_\mu)} \right). \quad (2.10)$$

Por ejemplo, las derivadas de H con respecto a las variables A_μ^a y π_a^μ son

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \pi_d^\alpha} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_d^\alpha} - \partial_j \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_j \pi_d^\alpha)} \right) = \left(\pi_a^i \frac{\partial \pi_a^i}{\partial \pi_d^\alpha} + g f_{bac} A_0^b A_i^c \frac{\partial \pi_a^i}{\partial \pi_d^\alpha} \right) - \partial_j \left(-A_0^b \delta^{ab} \frac{\partial (\partial_i \pi_a^i)}{\partial (\partial_j \pi_d^\alpha)} \right) \\ &= \delta_\alpha^i (\pi_d^i + D_i^{db} A_0^b), \\ \frac{\delta H}{\delta A_\alpha^d} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_\alpha^d} - \partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_k A_\alpha^d)} \right) \\ &= \left(g f_{abc} A_i^b F_a^{ij} \frac{\partial A_j^c}{\partial A_\alpha^d} - D_i^{ba} \pi_a^i \frac{\partial A_0^b}{\partial A_\alpha^d} + g f_{bac} A_0^b \pi_a^i \frac{\partial A_i^c}{\partial A_\alpha^d} \right) - \partial_k \left(\frac{1}{2} F_a^{ij} \frac{\partial (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a)}{\partial (\partial_k A_\alpha^d)} \right) \\ &= \delta_i^\alpha (-D_j^{da} F_a^{ji} + g f_{bad} A_0^b \pi_a^i) - \delta_0^\alpha D_i^{da} \pi_a^i. \end{aligned}$$

A partir de esta derivada definimos el *paréntesis de Poisson* entre los funcionales F y G que dependen de A_μ^a , π_a^μ y de sus primeras derivadas parciales como

$$\{F, G\} = \int \left(\frac{\delta F}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta G}{\delta \pi_a^\mu} - \frac{\delta G}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta F}{\delta \pi_a^\mu} \right) d^3x. \quad (2.11)$$

2.3. Constricciones secundarias

Usando las expresiones de las derivadas de H y suponiendo que $\phi_a^{(1)}$ es una densidad de $\Phi_a^{(1)}$, las condiciones de consistencia sobre las constricciones primarias conducen a

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_a^{(1)} &= \{\Phi_a^{(1)}, H_1\} = \{\Phi_a^{(1)}, H\} + \lambda^s \{\Phi_a^{(1)}, \Phi_s^{(1)}\} = \{\Phi_a^{(1)}, H\} \\ &= \int \left(\frac{\partial \pi_a^0}{\partial A_\alpha^d} \frac{\delta H}{\delta \pi_d^\alpha} - \frac{\delta H}{\delta A_\alpha^d} \frac{\partial \pi_a^0}{\partial \pi_d^\alpha} \right) d^3x = - \int \frac{\delta H}{\delta A_0^a} d^3x = \int D_i^{ab} \pi_b^i d^3x \approx 0, \end{aligned}$$

debido a que el paréntesis de Poisson entre las constricciones primarias es nulo:

$$\{\Phi_a^{(1)}, \Phi_s^{(1)}\} = \int \left(\frac{\partial \pi_a^0}{\partial A_\alpha^d} \frac{\partial \pi_s^0}{\partial \pi_d^\alpha} - \frac{\partial \pi_s^0}{\partial A_\alpha^d} \frac{\partial \pi_a^0}{\partial \pi_d^\alpha} \right) d^3x = 0.$$

De manera que las relaciones

$$\phi_a^{(2)} = D_i^{ab} \pi_b^i \approx 0 \quad (2.12)$$

constituyen las nl $W_1 = l$ constricciones secundarias, con W_1 la matriz con entradas $(W_1)_{ab} = \{\Phi_a^{(1)}, \Phi_b^{(1)}\}$.

Para averiguar si existe un conjunto de constricciones terciarias, debemos imponer ahora la condición de consistencia sobre las constricciones secundarias. Notemos antes lo siguiente:

$$\{\Phi_a^{(2)}, \Phi_s^{(1)}\} = \int \left(\frac{\delta \Phi_a^{(2)}}{\delta A_\alpha^d} \frac{\partial \pi_s^0}{\partial \pi_d^\alpha} - \frac{\partial \pi_s^0}{\partial A_\alpha^d} \frac{\delta \Phi_a^{(2)}}{\delta \pi_d^\alpha} \right) d^3x = \int \frac{\delta \Phi_a^{(2)}}{\delta A_0^s} d^3x = 0,$$

debido a que $\phi_a^{(2)}$, densidad de $\Phi_a^{(2)}$, no depende de las funciones A_0^a, π_a^0 ni de sus derivadas. Entonces

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_a^{(2)} &= \{\Phi_a^{(2)}, H_2\} = \{\Phi_a^{(2)}, H\} + \lambda^s \{\Phi_a^{(2)}, \Phi_s^{(1)}\} + \theta^s \{\Phi_a^{(2)}, \Phi_s^{(2)}\} \\ &= \{\Phi_a^{(2)}, H\} + \theta^s \{\Phi_a^{(2)}, \Phi_s^{(2)}\}. \end{aligned}$$

Calculando las derivadas de $\Phi_a^{(2)}$,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Phi_a^{(2)}}{\delta A_\alpha^d} &= \frac{\partial \phi_a^{(2)}}{\partial A_\alpha^d} - \partial_k \left(\frac{\partial \phi_a^{(2)}}{\partial (\partial_k A_\alpha^d)} \right) = -gf_{abc} \frac{\partial A_i^c}{\partial A_\alpha^d} \pi_b^i = -\delta_i^\alpha gf_{abd} \pi_b^i, \\ \frac{\delta \Phi_a^{(2)}}{\delta \pi_d^\alpha} &= \frac{\partial \phi_a^{(2)}}{\partial \pi_d^\alpha} - \partial_j \left(\frac{\partial \phi_a^{(2)}}{\partial (\partial_j \pi_d^\alpha)} \right) = -gf_{abc} A_i^c \frac{\partial \pi_b^i}{\partial \pi_d^\alpha} - \delta^{ab} \partial_j \left(\frac{\partial (\partial_i \pi_b^i)}{\partial (\partial_j \pi_d^\alpha)} \right) \\ &= -\delta_\alpha^i (\delta^{da} \partial_i - gf_{dac} A_i^c) = -\delta_\alpha^i D_i^{da}, \end{aligned}$$

el paréntesis de Poisson entre las constricciones secundarias, hasta un término de superficie, es

$$\begin{aligned} \{\Phi_a^{(2)}, \Phi_s^{(2)}\} &= \int \left(\frac{\delta \Phi_a^{(2)}}{\delta A_i^a} \frac{\delta \Phi_s^{(2)}}{\delta \pi_a^i} - \frac{\delta \Phi_s^{(2)}}{\delta A_i^a} \frac{\delta \Phi_a^{(2)}}{\delta \pi_a^i} \right) d^3x = \int \left(gf_{abd} D_i^{ds} \pi_b^i - gf_{sbd} D_i^{da} \pi_b^i \right) d^3x \\ &= \int \left(gf_{abd} \delta^{ds} \partial_i \pi_b^i - gf_{sbd} \delta^{da} \partial_i \pi_b^i + g^2 (f_{abd} f_{sdc} - f_{sbd} f_{adc}) A_i^c \pi_b^i \right) d^3x \quad (2.13) \\ &= \int \left(gf_{abs} \partial_i \pi_b^i + g^2 f_{bdc} f_{sab} A_i^c \pi_d^i \right) d^3x = gf_{sab} \int D_i^{bd} \pi_d^i d^3x = gf_{sab} \Phi_b^{(2)} = 0, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la identidad de Jacobi $f_{abd} f_{sdc} + f_{bsd} f_{adc} + f_{bcd} f_{sad} = 0$ sobre las constantes de estructura.

Por otra parte, el paréntesis de Poisson entre las constricciones secundarias y el hamiltoniano canónico es

$$\begin{aligned} \{\Phi_a^{(2)}, H\} &= \int \left(\frac{\delta \Phi_a^{(2)}}{\delta A_i^d} \frac{\delta H}{\delta \pi_d^i} - \frac{\delta H}{\delta A_i^d} \frac{\delta \Phi_a^{(2)}}{\delta \pi_d^i} \right) d^3x \\ &= \int \left((gf_{bad} \pi_b^i) (\pi_d^i + D_i^{dc} A_0^c) + (D_i^{da}) (-D_j^{dc} F_c^{ji} + gf_{bcd} A_0^b \pi_c^i) \right) d^3x, \end{aligned}$$

el cual, una vez que hemos agrupado adecuadamente a los términos en el integrando, podemos escribir como la suma de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} P_1 &= \int gf_{bad} \pi_b^i \pi_d^i d^3x, \\ P_2 &= - \int D_i^{da} D_j^{dc} F_c^{ji} d^3x, \\ P_3 &= \int \left(gf_{bcd} D_i^{da} (A_0^b \pi_c^i) - gf_{abd} \pi_b^i D_i^{dc} A_0^c \right) d^3x. \end{aligned}$$

Estudiemos con más detalle a cada uno de estos sumandos. Para comenzar, el primero es idénticamente cero, pues, al intercambiar los índices b y d , obtenemos $f_{bad}\pi_b^i\pi_d^i = -f_{bad}\pi_b^i\pi_d^i$:

$$P_1 = \int g f_{bad}\pi_b^i\pi_d^i d^3x = 0. \quad (2.14)$$

Igualmente,

$$\begin{aligned} P_2 &= - \int D_i^{da} D_j^{dc} F_c^{ji} d^3x = -\frac{1}{2} \int \left(D_i^{da} (D_j^{dc} F_c^{ji} - D_j^{dc} F_c^{ij}) \right) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int \left((D_i^{da} D_j^{dc} - D_j^{da} D_i^{dc}) F_c^{ij} \right) d^3x = \frac{1}{2} \int g f_{acd} F_{ij}^d F_c^{ij} d^3x \end{aligned} \quad (2.15)$$

es cero, ya que $F_{ij}^d F_c^{ij}$ es simétrico ante el cambio de los índices d y c , mientras que f_{adc} es antisimétrico. Hemos usado, desde luego, el hecho de que $D_\mu^{ab} D_\nu^{bc} - D_\nu^{ab} D_\mu^{bc} = g f_{abc} F_{\mu\nu}^b$.

Por último, con respecto al tercer sumando tenemos

$$\begin{aligned} P_3 &= \int \left(g f_{cbd} D_i^{da} (A_0^c \pi_b^i) - g f_{abd} \pi_b^i D_i^{dc} A_0^c \right) d^3x \\ &= \int \left(g f_{abc} A_0^c \partial_i \pi_b^i + g^2 (f_{abd} f_{dce} - f_{cbd} f_{dae}) A_i^e A_0^c \pi_b^i \right) d^3x \\ &= \int \left(g f_{adc} A_0^c (\delta^{db} \partial_i - g f_{bde} A_i^e) \pi_d^i \right) d^3x = g f_{abc} \int \phi_b^{(2)} A_0^c d^3x = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

hasta un término de superficie.

En otras palabras, $\{\Phi_a^{(2)}, H\} = P_1 + P_2 + P_3 = 0$ y entonces no existen constricciones terciarias.

2.4. Transformaciones de norma

En la sección anterior comprobamos que todas las constricciones de la teoría descrita por \mathcal{L}_{YM} son de primera clase. Entonces el generador de las transformaciones de norma será una combinación lineal de todas las constricciones $(\phi_\mu) = (\phi_a^{(1)}, \phi_a^{(2)})$ que obtuvimos:

$$G = v^a \Phi_a^{(1)} + v^b \Phi_b^{(2)}.$$

Considerando que A_μ^a es una densidad de \mathbf{A}_μ^a , tendremos que

$$\begin{aligned} \{\mathbf{A}_0^a, G\} &= \int \left(\frac{\delta \mathbf{A}_0^a}{\delta A_\alpha^d} \frac{\delta G}{\delta \pi_d^\alpha} - \frac{\delta G}{\delta A_\alpha^d} \frac{\delta \mathbf{A}_0^a}{\delta \pi_d^\alpha} \right) d^3x = \int \frac{\delta G}{\delta \pi_a^0} d^3x \\ &= \int \left(v^a \frac{\delta \Phi_a^{(1)}}{\delta \pi_a^0} + v^b \frac{\delta \Phi_b^{(2)}}{\delta \pi_a^0} \right) d^3x = \int v^a d^3x, \\ \{\mathbf{A}_i^a, G\} &= \int \left(\frac{\delta \mathbf{A}_i^a}{\delta A_\alpha^d} \frac{\delta G}{\delta \pi_d^\alpha} - \frac{\delta G}{\delta A_\alpha^d} \frac{\delta \mathbf{A}_i^a}{\delta \pi_d^\alpha} \right) d^3x = \int \frac{\delta G}{\delta \pi_a^i} d^3x \\ &= \int \left(v^a \frac{\delta \Phi_a^{(1)}}{\delta \pi_a^i} + v^b \frac{\delta \Phi_b^{(2)}}{\delta \pi_a^i} \right) d^3x = - \int D_i^{ab} v^b d^3x. \end{aligned}$$

Este resultado nos indica que $\delta A_0^a = v^a$ y $\delta A_i^a = -D_i^{ab} v^b$, por lo que debemos hacer $v^a = -D_0^{ab} v^b$ si queremos mantener la covariancia de la teoría. Por tanto, de la arbitrariedad de las funciones v^b , el generador G es de la forma

$$G = \int \left(D_0^{ab} v^b \pi_a^0 + v^b D_i^{bc} \pi_c^i \right) d^3x \quad (2.17)$$

y las ecuaciones de Yang-Mills son invariantes bajo el cambio

$$A_\mu^a \rightarrow \tilde{A}_\mu^a = A_\mu^a + D_\mu^{ab} v^b.$$

Esto es así porque el lagrangiano de Yang-Mills L_{YM} es invariante bajo la transformación de norma que genera G . En efecto, notando que, a primer orden en las funciones v^b y en sus derivadas parciales, la variación de $F_{\mu\nu}^a$ es

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu}^a &= \tilde{F}_{\mu\nu}^a - F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu(\tilde{A}_\nu^a - A_\nu^a) - \partial_\nu(\tilde{A}_\mu^a - A_\mu^a) + gf_{abc}(\tilde{A}_\mu^b \tilde{A}_\nu^c - A_\mu^b A_\nu^c) \\ &= -gf_{abc} v^b \partial_\mu A_\nu^c + gf_{abc} v^b \partial_\nu A_\mu^c - g^2 (f_{adc} f_{cbe} + f_{ace} f_{cbd}) A_\mu^d A_\nu^e v^b \\ &= -gf_{abc} v^b (\partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c + gf_{cde} A_\mu^d A_\nu^e) = gf_{abc} F_{\mu\nu}^b v^c, \end{aligned}$$

concluimos que la variación de \mathcal{L}_{YM} es cero:

$$\delta \mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} (F_a^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}^a + \delta F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a) = -\frac{1}{2} F_a^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}^a = -\frac{g}{2} f_{abc} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^b v^c = 0. \quad (2.18)$$

Capítulo 3

Estructura de norma del lagrangiano de Yang-Mills extendido

El análisis de las constricciones del lagrangiano de Yang-Mills del capítulo anterior nos servirá para estudiar la estructura de norma del lagrangiano de Yang-Mills extendido, el cual es el objetivo primordial de este trabajo.

El *lagrangiano de Yang-Mills extendido* \mathcal{L}_{YME} está definido por la siguiente densidad lagrangiana [37]:

$$\mathcal{L}_{\text{YME}} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-even}} + \mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-odd}}, \quad (3.1)$$

donde $\mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-even}}$ y $\mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-odd}}$ son términos que introducen violación de la simetría de Lorentz: el primero par bajo las simetrías discretas CPT; el segundo, impar. Localmente, estos términos están dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-even}} &= -\frac{1}{4}k_F^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}^aF_{\lambda\rho}^a, \\ \mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-odd}} &= -\frac{1}{4}(k_{AF})_\lambda\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu}\left(A_\rho^aF_{\mu\nu}^a - \frac{g}{3}f_{abc}A_\rho^aA_\mu^bA_\nu^c\right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde k_F es un tensor de tipo tensor de Riemann ($k_F^{\mu\nu\lambda\rho} = -k_F^{\nu\mu\lambda\rho} = -k_F^{\mu\nu\rho\lambda} = k_F^{\lambda\rho\mu\nu}$) y k_{AF} es un vector de $\text{SO}(1,3)$ constante.

Al igual que en el caso anterior, la forma explícita de las funciones A_μ^a viene dada por las ecuaciones del campo

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{YME}}}{\partial A_\mu^a} - \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{YME}}}{\partial(\partial_\nu A_\mu^a)}\right) = 0. \quad (3.3)$$

En vista de que las derivadas parciales de \mathcal{L}_{YME} son

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{YME}}}{\partial A_\beta^d} &= -gf_{abc}F_a^{\mu\nu}A_\mu^b\frac{\partial A_\nu^c}{\partial A_\beta^d} - gf_{abc}k_F^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}^aA_\lambda^b\frac{\partial A_\rho^c}{\partial A_\beta^d} - \frac{1}{4}(k_{AF})_\lambda\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu}F_{\mu\nu}^a\frac{\partial A_\rho^a}{\partial A_\beta^d} \\ &\quad - \frac{1}{2}gf_{abc}(k_{AF})_\lambda\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu}A_\rho^aA_\mu^b\frac{\partial A_\nu^c}{\partial A_\beta^d} + \frac{1}{4}gf_{abc}(k_{AF})_\lambda\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu}A_\rho^aA_\mu^b\frac{\partial A_\nu^c}{\partial A_\beta^d} \\ &= -gf_{abd}A_\lambda^b(F_a^{\lambda\beta} + k_F^{\mu\nu\lambda\beta}F_{\mu\nu}^a) + \frac{1}{2}(k_{AF})_\lambda\epsilon^{\lambda\rho\mu\beta}D_\mu^{da}A_\rho^a, \\ \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{YME}}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta^d)} &= -\frac{1}{2}F_a^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}^a}{\partial(\partial_\alpha A_\beta^d)} - \frac{1}{2}k_F^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}^a\frac{\partial F_{\lambda\rho}^a}{\partial(\partial_\alpha A_\beta^d)} - \frac{1}{4}(k_{AF})_\lambda\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu}A_\rho^a\frac{\partial F_{\mu\nu}^a}{\partial(\partial_\alpha A_\beta^d)} \\ &= -F_d^{\alpha\beta} - k_F^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}^d - \frac{1}{2}(k_{AF})_\lambda\epsilon^{\lambda\rho\alpha\beta}A_\rho^d, \end{aligned} \quad (3.4)$$

y agrupando los términos resultantes de una manera adecuada, escribimos a este conjunto de ecuaciones de manera compacta como

$$D_\mu^{da} \left(F_a^{\mu\nu} + k_F^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a + \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho\mu\nu} A_\rho^a \right) - \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\nu\mu\rho} \partial_\mu A_\rho^d = 0, \quad (3.5)$$

o bien,

$$D_\mu^{da} (F_a^{\mu\nu} + k_F^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a) - \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\nu\mu\rho} F_{\mu\rho}^d = 0. \quad (3.6)$$

Observamos que si omitimos la contribución de $\mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-even}}$ ($k_F = 0$) y de $\mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-odd}}$ ($k_{AF} = 0$) entonces recuperamos las ecuaciones de Yang-Mills 2.5.

3.1. Constricciones primarias

Siguiendo el procedimiento que utilizamos en el capítulo 2, primero debemos verificar que la densidad lagrangiana \mathcal{L}_{YME} es singular. Para ello, notamos que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\text{YME}}}{\partial(\partial_\sigma A_\rho^e) \partial(\partial_\alpha A_\beta^d)} = \left(\delta^{\sigma\beta} \delta^{\rho\alpha} - \delta^{\sigma\alpha} \delta^{\rho\beta} + k_F^{\mu\nu\alpha\beta} (\delta_\nu^\sigma \delta_\mu^\rho - \delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho) \right) \delta_{ed}.$$

Nuevamente, tratando a x^0 como la coordenada temporal, denotamos $\dot{A}_\mu^a = \partial_0 A_\mu^a = \partial A_\mu^a / \partial x^0$. Si $l = \dim G$ entonces el determinante de la matriz diagonal W_{YME} por bloques

$$W_{\text{YME}} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1l} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{l1} & W_{l2} & \cdots & W_{ll} \end{bmatrix},$$

tal que, para cada a, b , la submatriz W_{ab} tiene como entradas

$$(W_{ab})^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\text{YME}}}{\partial \dot{A}_\mu^a \partial \dot{A}_\nu^b} = \left(\delta^{0\nu} \delta^{\mu 0} - \delta^{00} \delta^{\mu\nu} + k_F^{\alpha\beta 0\nu} (\delta_\beta^0 \delta_\alpha^\mu - \delta_\alpha^0 \delta_\beta^\mu) \right) \delta_{ab},$$

es el producto de los determinantes de las matrices en su diagonal. No obstante, justo como en la teoría usual, cada uno de estos factores es cero, ya que cada una de las entradas de las primeras fila y columna de todas las matrices W_{aa} en la diagonal son idénticamente cero.

Siguiendo la analogía con los sistemas de la mecánica clásica, definimos el momento conjugado π_a^μ a la componente A_μ^a mediante

$$\pi_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{YME}}}{\partial \dot{A}_\mu^a} = F_a^{\mu 0} + k_F^{\alpha\beta\mu 0} F_{\alpha\beta}^a + \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho\mu 0} A_\rho^a, \quad (3.7)$$

cuyo valor obtenemos directamente de la segunda parte de la ecuación 3.4 al hacer $\alpha = 0$ y cambiar d y β por a y μ , respectivamente.

A partir de la antisimetría de $F_{\mu\nu}^a$, de k_F (en sus primeros y últimos dos índices) y de ϵ vemos que

$$\phi_a^{(1)} = \pi_a^0 = 0 \quad (3.8)$$

constituyen las $\text{nul } W_{\text{YME}} = \sum_a \text{nul } W_{aa} = \sum_a 1 = l$ constricciones primarias del sistema, justo como en la teoría de Yang-Mills usual. Otro modo de convencernos de esto es por medio de las expresiones

$$\begin{aligned} F_{0i}^a &= \partial_0 A_i^a - \partial_i A_0^a + g f_{abc} A_0^b A_i^c, \\ F_{ij}^a &= \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + g f_{abc} A_i^b A_j^c, \end{aligned}$$

ya que ellas no contienen a las velocidades \dot{A}_0^a .

3.2. El hamiltoniano canónico

Para imponer la condición de consistencia sobre las constricciones primarias necesitamos encontrar antes la expresión del hamiltoniano canónico, el cual está dado por

$$H = \int \mathcal{H} d^3x = \int \left(\dot{A}_\mu^a \pi_a^\mu - \mathcal{L}_{\text{YME}} \right) d^3x, \quad (3.9)$$

donde hemos introducido a la *densidad hamiltoniana canónica* \mathcal{H} en términos de la densidad lagrangiana \mathcal{L}_{YME} .

Cuando μ es un índice espacial i , la expresión 3.7 toma la forma

$$\begin{aligned} \pi_a^i &= F_a^{i0} + k_F^{\alpha\beta i0} F_{\alpha\beta}^a + \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho i0} A_\rho^a \\ &= \dot{A}_i^a - D_i^{ac} A_0^c - 2k_F^{0i0j} (\dot{A}_j^a - D_j^{ab} A_0^b) + k_F^{jk i0} F_{jk}^a + \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho i0} A_\rho^a \\ &= (\delta_{ij} - 2k_F^{0i0j}) \dot{A}_j^a - (\delta_{ij} - 2k_F^{0i0j}) D_j^{ab} A_0^b - k_F^{0ijk} F_{jk}^a - \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho 0i} A_\rho^a, \end{aligned}$$

donde hemos bajado algunos índices con ayuda del tensor métrico η . Por tanto, contrayendo ambos lados de esta ecuación con $\delta^{ij} + 2k_F^{0i0j}$ y manteniendo términos hasta primer orden en k_F y k_{AF} , tenemos

$$\dot{A}_i^a = (\delta^{ij} + 2k_F^{0i0j}) \pi_a^j + D_i^{ab} A_0^b + k_F^{0ijk} F_{jk}^a + \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho 0i} A_\rho^a.$$

A partir de este resultado, podemos escribir explícitamente al hamiltoniano canónico como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{A}_\mu^a \pi_a^\mu - \mathcal{L}_{\text{YME}} = \dot{A}_i^a \pi_a^i - \mathcal{L}_{\text{YM}} - \mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-even}} - \mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-odd}} \\ &= \dot{A}_i^a \pi_a^i - \frac{1}{2} \left(\pi_a^i - k_F^{0ijk} F_{jk}^a - \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho 0i} A_\rho^a \right) F_{0i}^a + \frac{1}{4} (\delta^{ik} \delta^{jm} + k_F^{ijkm}) F_{ij}^a F_{km}^a \\ &\quad + \frac{1}{4} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho ij} A_\rho^a F_{ij}^a - \frac{g}{12} f_{abc} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho\mu\nu} A_\rho^a A_\mu^b A_\nu^c. \end{aligned}$$

Observando que, a primer orden en los tensores k_F y k_{AF} , los primeros dos términos del penúltimo renglón de la expresión anterior son iguales a

$$\begin{aligned} &\dot{A}_i^a \pi_a^i - \frac{1}{2} \left(\pi_a^i - k_F^{0ijk} F_{jk}^a - \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho 0i} A_\rho^a \right) F_{0i}^a \\ &= \dot{A}_i^a \pi_a^i - \frac{1}{2} \left(\pi_a^i - k_F^{0ijk} F_{jk}^a - \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho 0i} A_\rho^a \right) (\dot{A}_i^a - D_i^{ab} A_0^b) \\ &= \frac{1}{2} (\delta^{ij} + 2k_F^{0i0j}) \pi_a^i \pi_a^j + \pi_a^i D_i^{ab} A_0^b + k_F^{0ijk} \pi_a^i F_{jk}^a + \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho 0i} A_\rho^a \pi_a^i, \end{aligned}$$

la densidad hamiltoniana canónica es igual, hasta un término de superficie, a

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} (\delta^{ij} + 2k_F^{0i0j}) \pi_a^i \pi_a^j + k_F^{0ijk} \pi_a^i F_{jk}^a + \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho 0i} A_\rho^a \pi_a^i - A_0^b D_i^{ba} \pi_a^i \\ &\quad + \frac{1}{4} (\delta^{ik} \delta^{jm} + k_F^{ijkm}) F_{ij}^a F_{km}^a + \frac{1}{4} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho ij} A_\rho^a F_{ij}^a - \frac{g}{12} f_{abc} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho\mu\nu} A_\rho^a A_\mu^b A_\nu^c, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde hemos obtenido el término $-A_0^b D_i^{ba} \pi_a^i$ al aplicar el mismo razonamiento que en la teoría usual.

3.3. Constricciones secundarias

Ahora procedemos a imponer las condiciones de consistencia sobre las constricciones primarias. Para ello, nos conviene calcular primero las derivadas funcionales de H con respecto a A_μ^a y π_a^μ . Éstas son

$$\begin{aligned}\frac{\delta H}{\delta A_\alpha^d} &= -\delta_0^\alpha D_i^{da} \pi_a^i + \frac{1}{4}(k_{AF})_\lambda (2\epsilon^{\lambda\alpha 0i} \pi_d^i + \epsilon^{\lambda\alpha ij} F_{ij}^d - g f_{abd} \epsilon^{\lambda\rho\mu\alpha} A_\rho^a A_\mu^b) \\ &\quad + \delta_m^\alpha \left(g f_{bad} \pi_a^m A_0^b - (\delta^{ik} \delta^{jm} + k_F^{ijkm}) D_k^{da} F_{ij}^a - 2k_F^{0ikm} D_k^{da} \pi_a^i - \frac{1}{2}(k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho km} D_k^{da} A_\rho^a \right), \\ \frac{\delta H}{\delta \pi_d^\alpha} &= \delta_\alpha^i \left((\delta^{ij} + 2k_F^{0i0j}) \pi_d^j + k_F^{0ijk} F_{jk}^d + \frac{1}{2}(k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho 0i} A_\rho^d + D_i^{db} A_0^b \right).\end{aligned}$$

Suponiendo que $\phi_a^{(1)}$ es una densidad de $\Phi_a^{(1)}$ y a partir del hecho de que $\{\Phi_a^{(1)}, \Phi_s^{(1)}\} = 0$, las condiciones de consistencia sobre las constricciones primarias conducen a

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_a^{(1)} &= \{\Phi_a^{(1)}, H_1\} = \{\Phi_a^{(1)}, H\} + \lambda^s \{\Phi_a^{(1)}, \Phi_s^{(1)}\} = \{\Phi_a^{(1)}, H\} \\ &= \int \left(\frac{\partial \pi_a^0}{\partial A_\alpha^d} \frac{\delta H}{\delta \pi_d^\alpha} - \frac{\delta H}{\delta A_\alpha^d} \frac{\partial \pi_a^0}{\partial \pi_d^\alpha} \right) d^3x = - \int \frac{\delta H}{\delta A_0^a} d^3x \\ &= \int \left(D_i^{ab} \pi_b^i - \frac{1}{2}(k_{AF})_k \epsilon^{k0ij} \partial_i A_j^a \right) d^3x \approx 0.\end{aligned}$$

Entonces las relaciones

$$\phi_a^{(2)} = D_i^{ab} \pi_b^i - \frac{1}{2}(k_{AF})_k \epsilon^{k0ij} \partial_i A_j^a \approx 0 \quad (3.11)$$

constituyen las $nul W_1 = l$ constricciones secundarias y percibimos que el término $\mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-even}}$ no introduce términos adicionales a las constricciones secundarias de la teoría usual, siendo W_1 la matriz con entradas $(W_1)_{ab} = \{\Phi_a^{(1)}, \Phi_b^{(1)}\}$.

Para averiguar si existe un conjunto de constricciones terciarias, debemos imponer ahora la condición de consistencia sobre las constricciones secundarias. Notemos antes que

$$\{\Phi_a^{(2)}, \Phi_s^{(1)}\} = \int \left(\frac{\delta \Phi_a^{(2)}}{\delta A_\alpha^d} \frac{\partial \pi_s^0}{\partial \pi_d^\alpha} - \frac{\partial \pi_s^0}{\partial A_\alpha^d} \frac{\delta \Phi_a^{(2)}}{\delta \pi_d^\alpha} \right) d^3x = \int \frac{\delta \Phi_a^{(2)}}{\delta A_0^s} d^3x = 0,$$

ya que $\phi_a^{(2)}$, densidad de $\Phi_a^{(2)}$, no depende de las funciones A_0^a, π_a^0 ni de sus derivadas. De esta manera,

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_a^{(2)} &= \{\Phi_a^{(2)}, H_2\} = \{\Phi_a^{(2)}, H\} + \lambda^s \{\Phi_a^{(2)}, \Phi_s^{(1)}\} + \theta^s \{\Phi_a^{(2)}, \Phi_s^{(2)}\} \\ &= \{\Phi_a^{(2)}, H\} + \theta^s \{\Phi_a^{(2)}, \Phi_s^{(2)}\}.\end{aligned}$$

Calculando las derivadas de $\Phi_a^{(2)}$,

$$\begin{aligned}\frac{\delta \Phi_a^{(2)}}{\delta A_\alpha^d} &= \frac{\partial \phi_a^{(2)}}{\partial A_\alpha^d} - \partial_m \left(\frac{\partial \phi_a^{(2)}}{\partial (\partial_m A_\alpha^d)} \right) = -g f_{abc} \frac{\partial A_i^c}{\partial A_\alpha^d} \pi_b^i + \frac{1}{2}(k_{AF})_k \epsilon^{k0ij} \partial_m \left(\frac{\partial (\partial_i A_j^a)}{\partial (\partial_m A_\alpha^d)} \right) \\ &= \delta_\alpha^i \left(g f_{bad} \pi_b^i - \frac{1}{2}(k_{AF})_k \epsilon^{k0ij} \delta^{ad} \partial_j \right), \\ \frac{\delta \Phi_a^{(2)}}{\delta \pi_d^\alpha} &= \frac{\partial \phi_a^{(2)}}{\partial \pi_d^\alpha} - \partial_j \left(\frac{\partial \phi_a^{(2)}}{\partial (\partial_j \pi_d^\alpha)} \right) = -g f_{abc} A_i^c \frac{\partial \pi_b^i}{\partial \pi_d^\alpha} - \delta^{ab} \partial_j \left(\frac{\partial (\partial_i \pi_b^i)}{\partial (\partial_j \pi_d^\alpha)} \right) \\ &= -\delta_\alpha^i (\delta^{da} \partial_i - g f_{dac} A_i^c) = -\delta_\alpha^i D_i^{da},\end{aligned}$$

el paréntesis de Poisson entre las constricciones secundarias, hasta un término de superficie, es

$$\begin{aligned}
\{\Phi_a^{(2)}, \Phi_s^{(2)}\} &= \int \left(\frac{\delta\Phi_a^{(2)}}{\delta A_i^a} \frac{\delta\Phi_s^{(2)}}{\delta\pi_a^i} - \frac{\delta\Phi_s^{(2)}}{\delta A_i^a} \frac{\delta\Phi_a^{(2)}}{\delta\pi_a^i} \right) d^3x \\
&= \int \left(gf_{abd} D_i^{ds} \pi_b^i - gf_{sbd} D_i^{da} \pi_b^i + \frac{1}{2} (k_{AF})_k \epsilon^{k0ij} g (f_{sab} - f_{asb}) \partial_j A_i^b \right) d^3x \quad (3.12) \\
&= gf_{sab} \int \left(D_i^{bd} \pi_d^i - \frac{1}{2} (k_{AF})_k \epsilon^{k0ij} \partial_i A_j^b \right) d^3x = gf_{sab} \Phi_b^{(2)} = 0,
\end{aligned}$$

donde hemos ocupado el resultado obtenido en 2.13.

Por otro lado, el paréntesis $\{\Phi_a^{(2)}, H\}$ entre las constricciones secundarias y el hamiltoniano canónico es igual a

$$\begin{aligned}
\{\Phi_a^{(2)}, H\} &= \int \left(\frac{\delta\Phi_a^{(2)}}{\delta A_m^a} \frac{\delta H}{\delta\pi_a^m} - \frac{\delta H}{\delta A_m^a} \frac{\delta\Phi_a^{(2)}}{\delta\pi_a^m} \right) d^3x = \int \left[gf_{bad} \left((\delta^{mj} + 2k_F^{0m0j}) \pi_d^j \pi_b^m + k_F^{0mjk} F_{jk}^d \pi_b^m \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho 0m} \pi_b^m A_\rho^d \right) + gf_{cad} \pi_c^m D_m^{db} A_0^b + \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda 0im} (\partial_i \pi_a^m + \partial_i D_m^{ab} A_0^b + D_m^{da} \pi_d^i) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda mij} D_m^{da} D_{ij}^d - \frac{g}{4} f_{cbd} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho\mu m} D_m^{da} (A_\rho^c A_\mu^b) + gf_{bcd} D_m^{da} (\pi_c^m A_0^b) \right. \\
&\quad \left. - (\delta^{ik} \delta^{jm} + k_F^{ijkm}) D_m^{da} D_k^{db} F_{ij}^b - 2k_F^{0ikm} D_m^{da} D_k^{db} \pi_b^i - \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\rho km} D_m^{da} D_k^{db} A_\rho^b \right] d^3x,
\end{aligned}$$

al cual, una vez que hemos agrupado adecuadamente a los términos que lo componen, podemos escribirlo como la suma de

$$\begin{aligned}
P_1 &= \int gf_{bad} (\delta^{ij} + 2k_F^{0i0j}) \pi_b^i \pi_d^j d^3x, \\
P_2 &= - \int (\delta^{ik} \delta^{jm} + k_F^{ijkm}) D_m^{da} D_k^{db} F_{ij}^b d^3x, \\
P_3 &= \int \left(gf_{bcd} D_i^{da} (A_0^b \pi_c^i) - gf_{acd} \pi_c^i D_i^{db} A_0^b \right) d^3x, \\
P_4 &= \int \frac{1}{2} (k_{AF})_k \epsilon^{k0ij} \left(\partial_i D_j^{ab} A_0^b - D_j^{da} (D_i^{db} A_0^b + gf_{dcb} A_i^c A_0^b) \right) d^3x, \\
P_5 &= \int k_F^{0ijk} (gf_{bad} F_{jk}^d - 2D_k^{da} D_j^{db}) \pi_b^i d^3x, \\
P_6 &= \int \frac{1}{2} (k_{AF})_k \epsilon^{k0ij} \left(D_j^{ba} \pi_b^i + \partial_i \pi_a^j - gf_{bad} A_i^d \pi_b^j \right) d^3x, \\
P_7 &= \int \frac{1}{4} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda kij} \left(D_k^{da} F_{ij}^d - gf_{cbd} D_k^{da} (A_i^c A_j^b) - 2D_k^{da} D_j^{db} A_i^b \right) d^3x.
\end{aligned}$$

Nos podemos dar cuenta que las primeras tres integrales son muy similares a 2.14, 2.15 y 2.16 que definen el paréntesis de Poisson entre las constricciones secundarias y el hamiltoniano canónico de YM, por lo que podemos aplicar los mismos argumentos para concluir que $P_1 = P_2 = 0$ y

$$\begin{aligned}
P_3 + P_4 &= gf_{abc} \int A_0^c D_i^{bd} \pi_d^i d^3x + \int \frac{1}{2} (k_{AF})_k \epsilon^{k0ij} \left(\partial_i D_j^{ab} A_0^b - D_j^{da} (\partial_i A_0^d) \right) d^3x \\
&= gf_{abc} \int A_0^c D_i^{bd} \pi_d^i d^3x + gf_{bac} \int \frac{1}{2} (k_{AF})_k \epsilon^{k0ij} \left(\partial_i (A_j^c A_0^b) + A_j^c \partial_i A_0^b \right) d^3x \\
&= gf_{abc} \int \left(A_0^c D_i^{bd} \pi_d^i - \frac{1}{2} (k_{AF})_k \epsilon^{k0ij} A_0^c \partial_i A_j^b \right) d^3x = gf_{abc} \int A_0^c \phi_b^{(2)} d^3x = 0.
\end{aligned}$$

Además, la antisimetría de k_F (en sus primeros y últimos dos índices) y de ϵ nos indica que

$$\begin{aligned}
P_5 &= \int k_F^{0ijk} (gf_{bad} F_{jk}^d + D_j^{da} D_k^{db} - D_k^{da} D_j^{db}) \pi_b^i d^3 x \\
&= \int k_F^{0ijk} (gf_{bad} F_{jk}^d + gf_{abd} F_{jk}^d) \pi_b^i d^3 x = 0, \\
P_6 &= \int \frac{1}{2} (k_{AF})_k \epsilon^{k0ij} (D_j^{ba} \pi_b^i + D_i^{ba} \pi_b^j) d^3 x = 0, \\
P_7 &= \int \frac{1}{4} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda k ij} \left(D_k^{da} F_{ij}^d - gf_{cbd} D_k^{da} (A_i^c A_j^b) + gf_{abd} F_{jk}^d A_i^b \right) d^3 x \\
&= \int \frac{1}{4} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda k ij} \left(\partial_k (F_{ij}^a - gf_{acb} A_i^c A_j^b) + gf_{cbd} f_{dae} A_i^c A_j^b A_k^e \right) d^3 x \\
&= \int \frac{1}{4} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda k ij} (\partial_k \partial_i A_j^a - \partial_k \partial_j A_i^a) d^3 x = 0,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la identidad de Jacobi en el término $\frac{1}{4} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda k ij} f_{cbd} f_{dae} A_i^c A_j^b A_k^e$ de P_7 .

En otras palabras, $\{\Phi_a^{(2)}, H\} = \sum_i P_i = 0$ y entonces no existen constricciones terciarias.

3.4. Transformaciones de norma

Acabamos de comprobar que todas las constricciones de la teoría descrita por \mathcal{L}_{YME} son de primera clase. Entonces el generador de las transformaciones de norma será una combinación lineal de todas las constricciones $(\phi_\mu) = (\phi_a^{(1)}, \phi_a^{(2)})$ que obtuvimos:

$$G = v^a \Phi_a^{(1)} + v^b \Phi_b^{(2)}.$$

Considerando que A_μ^a es una densidad de \mathbf{A}_μ^a , tendremos que

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{A}_0^a, G\} &= \int \left(\frac{\delta \mathbf{A}_0^a}{\delta A_\alpha^d} \frac{\delta G}{\delta \pi_d^\alpha} - \frac{\delta G}{\delta A_\alpha^d} \frac{\delta \mathbf{A}_0^a}{\delta \pi_d^\alpha} \right) d^3 x = \int v^a \frac{\delta \Phi_a^{(1)}}{\delta \pi_a^0} d^3 x \\
&= \int v^a d^3 x, \\
\{\mathbf{A}_i^a, G\} &= \int \left(\frac{\delta \mathbf{A}_i^a}{\delta A_\alpha^d} \frac{\delta G}{\delta \pi_d^\alpha} - \frac{\delta G}{\delta A_\alpha^d} \frac{\delta \mathbf{A}_i^a}{\delta \pi_d^\alpha} \right) d^3 x = \int v^b \frac{\delta \Phi_b^{(2)}}{\delta \pi_a^i} d^3 x \\
&= - \int D_i^{ab} v^b d^3 x.
\end{aligned}$$

Por tanto, este generador transforma de la misma manera a la conexión A y a su curvatura F que el generador de las transformaciones de norma de YM,

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu^a &= D_\mu^{ab} v^b, \\
\delta F_{\mu\nu}^a &= gf_{abc} F_{\mu\nu}^b v^c,
\end{aligned}$$

y toma la forma

$$G = \int \left[D_0^{ab} v^b \pi_a^0 + v^b \left(D_i^{bc} \pi_c^i - \frac{1}{2} (k_{AF})_k \epsilon^{k0ij} \partial_i A_j^b \right) \right] d^3 x. \quad (3.13)$$

Luego, las ecuaciones del campo 3.6 son invariantes bajo la transformación que induce G , pues la acción

$$S_{\text{YME}}[A_\mu^a(x)] = \int \mathcal{L}_{\text{YME}}(A_\mu^a(x), \partial_\nu A_\mu^a(x)) d^4 x$$

lo es hasta un término de superficie. Para convencernos de ello, recordemos que la discusión del capítulo anterior nos dice que $\delta\mathcal{L}_{\text{YM}} = \delta\mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-even}} = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_{\text{YME}} &= \delta\mathcal{L}_{\text{YM}} + \delta\mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-even}} + \delta\mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-odd}} = \delta\mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-odd}} \\ &= -\frac{1}{4}(k_{AF})_{\lambda}\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu} \left(\delta(A_{\rho}^a F_{\mu\nu}^a) - \frac{g}{3}f_{abc}\delta(A_{\rho}^a A_{\mu}^b A_{\nu}^c) \right).\end{aligned}$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned}\delta(A_{\rho}^a F_{\mu\nu}^a) &= F_{\mu\nu}^a \delta A_{\rho}^a + A_{\rho}^a \delta F_{\mu\nu}^a = \partial_{\rho}(v^a F_{\mu\nu}^a) - g f_{abc} v^a \partial_{\rho}(A_{\mu}^b A_{\nu}^c), \\ \frac{g}{3}f_{abc}\delta(A_{\rho}^a A_{\mu}^b A_{\nu}^c) &= g f_{abc} \left(\partial_{\rho}(v^a A_{\mu}^b A_{\nu}^c) - v^a \partial_{\rho}(A_{\mu}^b A_{\nu}^c) \right) - g(f_{abc}f_{adc} + f_{eac}f_{adb} + f_{eba}f_{adc})A_{\rho}^e A_{\mu}^b A_{\nu}^c v^d \\ &= g f_{abc} \left(\partial_{\rho}(v^a A_{\mu}^b A_{\nu}^c) - v^a \partial_{\rho}(A_{\mu}^b A_{\nu}^c) \right).\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_{\text{YME}} &= -\frac{1}{4}(k_{AF})_{\lambda}\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu} \left(\partial_{\rho}(v^a F_{\mu\nu}^a) - g f_{abc} \partial_{\rho}(v^a A_{\mu}^b A_{\nu}^c) \right) \\ &= -\partial_{\rho} \left(\frac{1}{2}(k_{AF})_{\lambda}\epsilon^{\lambda\rho\mu\nu} v^a \partial_{\mu} A_{\nu}^a \right).\end{aligned}\tag{3.14}$$

Conclusiones

Observamos que la estructura de norma de las teorías de Yang-Mills y Yang-Mills extendida son muy semejantes. Para comenzar, el conjunto de constrictiones de YM y de YME tienen la misma cardinalidad, con lo cual podemos afirmar que el número de grados de libertad, es decir, el número mínimo de variables físicas independientes necesarias para describir a estos sistemas, coincide en ambos casos.

Específicamente, las constrictiones de YME son

$$\begin{aligned}\phi_a^{(1)} &= \pi_a^0, \\ \phi_a^{(2)} &= D_i^{ab} \pi_b^i - \frac{1}{2} (k_{AF})_k \epsilon^{k0ij} \partial_i A_j^a,\end{aligned}$$

de las cuales solamente las secundarias difieren con respecto a las constrictiones de YM en un término proveniente de $\mathcal{L}_{\text{YMLV}}^{\text{CPT-odd}}$. Todas estas constrictiones son funciones de primera clase y satisfacen las mismas relaciones que las constrictiones de la teoría usual:

$$\begin{aligned}\{\Phi_a^{(1)}, \Phi_b^{(1)}\} &= 0, \\ \{\Phi_a^{(1)}, \Phi_b^{(2)}\} &= 0, \\ \{\Phi_a^{(2)}, \Phi_b^{(2)}\} &= gf_{bac} \Phi_c^{(2)}.\end{aligned}$$

De igual manera, notamos que las ecuaciones del campo

$$D_\mu^{da} (F_a^{\mu\nu} + k_F^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a) - \frac{1}{2} (k_{AF})_\lambda \epsilon^{\lambda\nu\mu\rho} F_{\mu\rho}^d = 0$$

(que se obtienen a partir de la densidad \mathcal{L}_{YME}) son invariantes, hasta un término de superficie, bajo la transformación que induce su generador de transformaciones de norma,

$$A_\mu^a \rightarrow \tilde{A}_\mu^a = A_\mu^a + D_\mu^{ab} v^b,$$

cuya forma explícita viene dada por la siguiente expresión:

$$G = \int \left[D_0^{ab} v^b \pi_a^0 + v^b \left(D_i^{bc} \pi_c^i - \frac{1}{2} (k_{AF})_k \epsilon^{k0ij} \partial_i A_j^b \right) \right] d^3x.$$

Apéndice A

Descripción geométrica de la mecánica clásica

Es común dentro de la mecánica clásica que, mediante un análisis cualitativo, seamos capaces de asociar a cierto sistema físico un espacio de estados y una función que determine su evolución de un estado a otro. En el formalismo lagrangiano, desde un punto de vista abstracto, el espacio de estados correspondiente está descrito en términos de todas las posiciones y velocidades posibles, y derivamos las ecuaciones que gobiernan el movimiento del sistema, las ecuaciones de Euler-Lagrange, a partir del lagrangiano.

Consideremos un sistema conformado por una partícula moviéndose libremente en un espacio de tres dimensiones. Cualquier estado físico de este sistema queda completamente descrito por la posición y el momento lineal de la partícula en algún instante de tiempo, así que el espacio de estados sería simplemente $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. No obstante, si ahora restringimos su movimiento sobre la superficie de una esfera, la cual posee una estructura de variedad suave de dimensión dos, el momento lineal de la partícula será siempre un vector tangente a la esfera; es decir, cualquier estado de este nuevo sistema sería un elemento del haz tangente TS^2 de la 2-esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, el cual no es isomorfo a $S^2 \times \mathbb{R}^2$.

El concepto de una variedad suave nos permite aplicar las ideas del cálculo sobre espacios arbitrarios. La definición básica de diferenciación involucra diferencias de los valores de una función en dos puntos cercanos. En el caso de la 2-esfera, sin embargo, no existe un modo natural de restar dos de sus elementos. Este problema se soluciona si le dotamos un conjunto de coordenadas locales, procedimiento que podemos visualizar como si cubriéramos a S^2 con pequeños pedazos de papel cuadriculado. Evidentemente la elección de los pedazos de papel es arbitraria y el hecho de cambiar un pedazo por otro representa a una transformación de coordenadas. Del mismo modo, una pequeña flecha pegada a S^2 puede ser descrita en términos de sus componentes con respecto a los ejes del pedazo de papel donde está pegada. Cuando cambiamos de pedazo, la flecha no cambia, pero sí sus componentes. Un vector tangente a la 2-esfera sería entonces la colección de estas componentes transformándose de una manera específica.

Suponiendo que Q es el *espacio de configuraciones* de dimensión n de un sistema mecánico, veremos a continuación que podemos modelar al espacio fase de cualquier sistema mecánico clásico como una variedad simpléctica, esto es, una variedad suave T^*Q junto con una forma simpléctica Ω , la cual generaliza al paréntesis de Poisson. El carácter físico de dicha variedad simpléctica es puramente cinemático; la dinámica del sistema está determinada por una función real H definida sobre el espacio fase, llamada *hamiltoniano*. Las curvas integrales del campo vectorial que soluciona las ecuaciones de Hamilton asociadas a H serán las trayectorias dinámicas del sistema en el espacio fase.

El formalismo hamiltoniano

Variedades simplécticas

Sean V un espacio vectorial real de dimensión finita y $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal sobre V . La forma ω se dice *no degenerada* si $\omega(v_1, v_2) = 0$, para todo $v_2 \in V$, implica que $v_1 = 0$. La transformación lineal $\omega^\flat : V \rightarrow V^*$ tal que $v_1 \mapsto \omega^\flat(v_1) = v_1^\flat \in V^*$ está definida por

$$v_1^\flat(v_2) = \omega(v_1, v_2),$$

es un isomorfismo si, y sólo si, ω es no degenerada. Si ω es, además, antisimétrica entonces decimos que es una *forma simpléctica* sobre V . Llamamos al par (V, ω) un *espacio simpléctico lineal*.

Definimos a los elementos de la matriz de ω con respecto a la base $\{e_i\}$ como $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$. En este caso, si $u = u^i e_i$ y $v = v^j e_j$ entonces $\omega(u, v) = u^i \omega_{ij} v^j$. Debido a que la representación matricial de ω^\flat con respecto a las bases $\{e_i\}$ y $\{e^j\}$ es igual a la traspuesta de la representación matricial de ω con respecto a la base $\{e_i\}$, esto es, $(\omega^\flat)_{ji} = \omega_{ij}$, la no degeneración de ω es equivalente a $\det \omega \neq 0$. En particular, todo espacio simpléctico lineal es de dimensión par, pues el determinante de una matriz antisimétrica con un número impar de filas y columnas es cero.

Esta definición se extiende fácilmente al caso de variedades. Sea M una variedad suave de dimensión finita. Cualquier 2-forma ω sobre M define un morfismo de haces vectoriales $\omega^\flat : TM \rightarrow T^*M$ tal que su restricción a cada fibra $\omega^\flat|_p : T_p M \rightarrow T_p^* M$ está definida del mismo modo que en el caso lineal. Éste, a su vez, induce un morfismo entre los módulos de las secciones de dichos haces vectoriales, el cual denotaremos con el mismo símbolo ω^\flat :

$$X \mapsto \omega^\flat(X) = X^\flat = X \lrcorner \omega.$$

El rango $\text{ran } \omega$ y el núcleo $\ker \omega$ de ω son, respectivamente, el rango y el núcleo ω^\flat . Llamaremos a cualquier 2-forma cerrada ω una *forma presimpléctica* (resp. *forma simpléctica*) sobre M si su rango es constante (resp. si es no degenerada), y decimos que el par (M, ω) es una *variedad presimpléctica* o una *variedad simpléctica* dependiendo del carácter de ω . Observamos que si ω es una estructura simpléctica sobre M entonces la variedad tiene dimensión par, digamos $2n$. En este caso, ω^\flat es un isomorfismo y denotaremos por ω^\sharp a su morfismo inverso.

Si (M, ω) es una variedad simpléctica, podemos asociar a cada función real $f \in C^\infty(M)$, salvo una constante, un único campo vectorial X_f sobre M mediante

$$X_f = (df)^\sharp. \tag{A.1}$$

Esta condición equivale a decir que la 1-forma $X_f \lrcorner \omega$ es exacta. Dado un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, diremos que es *hamiltoniano* si $X \lrcorner \omega$ es exacta y que es *localmente hamiltoniano* si $X \lrcorner \omega$ es cerrada o, equivalentemente, que $\mathcal{L}_X \omega = 0$.

Un resultado muy importante dentro de la geometría simpléctica es el *teorema de Darboux*, el cual afirma que alrededor de cada punto de una variedad simpléctica (M, ω) existe una carta en el cual ω es constante. Como consecuencia de esto, existe un sistema de *coordenadas canónicas* (q^i, p_i) alrededor de cualquiera de sus puntos tal que la expresión local de ω es

$$\omega = dq^i \wedge dp_i.$$

En toda variedad simpléctica (M, ω) , los isomorfismos ω^\flat y ω^\sharp están caracterizados localmente por

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right)^\flat &= dp_i, \\ \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \right)^\flat &= -dq^i, \end{aligned}$$

$$(dq^i)^\# = -\frac{\partial}{\partial p_i},$$

$$(dp_i)^\# = \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

Paréntesis de Poisson

El paréntesis de Poisson proporciona una estructura geométrica similar a la noción de geometría simpléctica. Sea M una variedad suave de dimensión finita. Definimos a continuación una función $\{, \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ bilineal y antisimétrica que satisface para cada $f, g, h \in C^\infty(M)$

- a) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (*identidad de Jacobi*),
- b) $\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$ (*regla de Leibniz*).

Nos referimos a $\{, \}$ como un *paréntesis de Poisson* sobre M . Puesto que existe una biyección entre campos vectoriales suaves sobre M y derivaciones de $C^\infty(M)$, la propiedad b) garantiza, para cada $f \in C^\infty(M)$, la existencia de un único campo $V_f \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $V_f g = \{g, f\}$. Denominamos a los campos V_f *hamiltonianos* y decimos que f es el *hamiltoniano* de V_f .

Usando la expresión en coordenadas de V_f , tenemos que

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial z^j} \{z^i, z^j\} \frac{\partial g}{\partial z^i}. \quad (\text{A.3})$$

Observamos entonces que la estructura del paréntesis de Poisson está capturada por un campo tensorial dos veces contravariante y antisimétrico \mathcal{P} sobre M , al cual llamaremos *tensor de Poisson* sobre M . Es claro que sus componentes satisfacen la identidad de Jacobi

$$\epsilon_{ijk} \mathcal{P}^{il} \frac{\partial \mathcal{P}^{jk}}{\partial z^l} = 0,$$

siendo ϵ_{ijk} el *símbolo de Levi-Civita* en tres dimensiones. Recíprocamente, cualquier campo 2-tensorial antisimétrico que satisfaga la identidad de Jacobi define un paréntesis de Poisson por medio de A.3. Llamamos al par (M, \mathcal{P}) una *variedad de Poisson* si \mathcal{P} es un tensor de Poisson.

Si (M, \mathcal{P}) es una variedad de Poisson, podemos definir un morfismo entre los haces T^*M y TM de una manera similar como lo hicimos para una 2-forma ω sobre M . Si el rango de este morfismo es constante y maximal (igual a $\dim M$) y si, para toda $g \in C^\infty(M)$, $\{f, g\} = 0$ entonces podemos concluir que la función f debe ser constante; por el contrario, existirán *funciones de Casimir* C tales que $\{C, g\} = 0$, para toda g .

Ahora bien, si (M, ω) es una variedad simpléctica, podemos aprovecharnos de la regularidad de ω^\flat para definir un paréntesis de Poisson¹ sobre M mediante

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g), \quad (\text{A.4})$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty(M)$. En efecto, la identidad de Jacobi equivale a la cerradura de ω .

Algunas de las propiedades que relacionan a este par de estructuras son las siguientes:

- i) Cualquier par de funciones $f, g \in C^\infty(M)$ satisfacen

$$\{f, g\} = X_g f = -X_f g,$$

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f, g\}}.$$

- ii) En coordenadas canónicas,

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}.$$

¹De hecho, toda variedad de Poisson (M, \mathcal{P}) con un tensor de Poisson invertible es equivalente a una variedad simpléctica (M, ω) [38, 34].

Las ecuaciones de Hamilton

Si (q^i) es un sistema de coordenadas sobre $U \subset Q$ y $\pi : T^*Q \rightarrow Q$ es la proyección canónica del haz cotangente de Q , las coordenadas fibradas inducidas (q^i, p_i) sobre $\pi^{-1}(U) \subset T^*Q$ son tales que

$$\begin{aligned} q^i(\nu_q) &= q^i(q), \\ p_i(\nu_q) &= \nu_q \left(\left. \frac{\partial}{\partial q^i} \right|_q \right), \end{aligned}$$

siendo $\nu_q \in \pi^{-1}(U)$.

Definimos la *1-forma de Liouville* Θ sobre T^*Q de modo que, para cada $\nu_q \in T^*Q$ y $X_{\nu_p} \in T_{\nu_q}(T^*Q)$,

$$\Theta_{\nu_q}(X_{\nu_q}) = \nu_q(\pi_*\nu_q(X_{\nu_q})),$$

donde $\pi_*\nu_q : T_{\nu_q}(T^*Q) \rightarrow T_qQ$. En coordenadas canónicas, la 1-forma de Liouville Θ está dada por

$$\Theta = p_i dq^i. \quad (\text{A.7})$$

A partir de ella, podemos definir la *2-forma canónica* $\Omega = -d\Theta$ sobre T^*Q , la cual es no degenerada. Por tanto, T^*Q posee una estructura simpléctica intrínseca donde todo sistema de coordenadas sobre Q induce coordenadas canónicas sobre T^*Q . Deducimos que la expresión local de Ω es

$$\Omega = dq^i \wedge dp_i. \quad (\text{A.8})$$

Dada cualquier función $f \in C^\infty(T^*Q)$, podemos interpretar al campo X_f como la dirección de cambio en el espacio fase generada por la función f . Si f corresponde a una de las coordenadas canónicas, X_f estará definido a lo largo de su momento canónico. En este sentido, el campo vectorial hamiltoniano generaliza la noción de momento para una función arbitraria del espacio fase.

Sea entonces $H \in C^\infty(T^*Q)$ un *hamiltoniano*. Entonces existe un único campo vectorial asociado a H tal que

$$X_H^\flat = X_H \lrcorner \Omega = dH. \quad (\text{A.9})$$

De A.8 y A.9 obtenemos la expresión local de X_H :

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Si $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow T^*Q$ es una curva cuya expresión local es $\gamma(t) = (q^i(t), p_i(t))$ entonces γ es una curva integral del campo vectorial X_H si, y sólo si, $\gamma(t)$ es solución de las *ecuaciones de Hamilton*

$$\left. \frac{dq^i}{dt} \right|_t = \left. \frac{\partial H}{\partial p_i} \right|_{\gamma(t)}, \quad (\text{A.10a})$$

$$\left. \frac{dp_i}{dt} \right|_t = - \left. \frac{\partial H}{\partial q^i} \right|_{\gamma(t)}. \quad (\text{A.10b})$$

Introduciendo el paréntesis de Poisson asociado a Ω , estas ecuaciones toman la forma

$$\left. \frac{dq^i}{dt} \right|_t = \left. \{q^i, H\} \right|_{\gamma(t)}, \quad (\text{A.11a})$$

$$\left. \frac{dp_i}{dt} \right|_t = \left. \{p_i, H\} \right|_{\gamma(t)}. \quad (\text{A.11b})$$

De esta manera, la ecuación A.9 es considerada la versión geométrica de las ecuaciones de Hamilton y la dinámica queda unívocamente determinada por el *sistema hamiltoniano* (T^*Q, Ω, H) .

El formalismo lagrangiano

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

La teoría que desarrollamos en la sección anterior nos permite obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange sin utilizar un principio variacional. En este caso trabajamos con el espacio de velocidades TQ del sistema en cuestión.

Si (q^i) es un sistema de coordenadas sobre $U \subset Q$ y $\tau : TQ \rightarrow Q$ es la proyección canónica del haz tangente de Q , el sistema de coordenadas inducido (q^i, v^i) sobre $\tau^{-1}(U) \subset TQ$ está dado por

$$\begin{aligned} q^i(v_q) &= q^i(q), \\ v^i(v_q) &= dq_q^i(v_q) = v_q(q^i), \end{aligned}$$

siendo $v_q \in \tau^{-1}(U)$.

Aprovechando la estructura de espacio vectorial sobre cada fibra T_qQ de TQ podemos definir el *levantamiento vertical* $(X_q)_{v_q}^v$ de $X_q \in T_qQ$ en el punto $v_q \in T_qQ$ como el vector tangente en cero de la curva $\gamma(t) = v_q + tX_q \in T_qQ \subset TQ$:

$$(X_q)_{v_q}^v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v_q + tX_q). \quad (\text{A.13})$$

En coordenadas locales, si $X_q = a^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_q$ entonces

$$(X_q)_{v_q}^v = a^i \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_q}. \quad (\text{A.14})$$

La definición se extiende fácilmente a campos vectoriales sobre Q . El *levantamiento vertical* de $X \in \mathfrak{X}(Q)$ es el elemento $X^v \in \mathfrak{X}(TQ)$ tal que, en cada punto $v_q \in TQ$, $X_{v_q}^v = (X_q)_{v_q}^v$. Observamos que X^v es un campo vectorial constante a lo largo de las fibras de TQ .

El *campo vectorial de Liouville* $\Delta \in \mathfrak{X}(TQ)$ es el generador infinitesimal del flujo $\Phi : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow TQ$ dado por

$$(t, v_q) \mapsto \Phi(t, v_q) = e^t v_q \in TQ. \quad (\text{A.15})$$

Debido a que $\Phi_{v_q}(t) = (q^i, e^t v^i)$, deducimos que, en coordenadas fibradas, el campo vectorial de Liouville está dado por

$$\Delta = v^i \frac{\partial}{\partial v^i}. \quad (\text{A.16})$$

Los levantamientos verticales nos permiten construir un tensor intrínseco sobre TQ de tipo $(1, 1)$, al que llamamos *endomorfismo vertical* y denotamos por S . Éste es el morfismo de haces fibrados $S : T(TQ) \rightarrow T(TQ)$ definido por

$$X_{v_q} \mapsto S_{v_q}(X_{v_q}) = (\tau_{*v_q}(X_{v_q}))_{v_q}^v, \quad (\text{A.17})$$

donde $X_{v_q} \in T_{v_q}(TQ)$ y $v_q \in T_qQ$. Notando que $\text{Im } S_{v_q} = \ker S_{v_q}$, para cada $v_q \in TQ$, tenemos que $S^2 = 0$. De las expresiones A.14 y A.17, podemos escribir a S como

$$S = \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes dq^i. \quad (\text{A.18})$$

Si bien podemos dotar a $T(TQ)$ con un par de estructuras de haz vectorial dadas por $\tau_{TQ} : T(TQ) \rightarrow TQ$ y $\tau_* : T(TQ) \rightarrow TQ$, son las secciones del segundo las que desempeñan un papel importante dentro de la formulación geométrica de la mecánica lagrangiana. Entonces llamaremos a cada una de estas secciones una *ecuación diferencial de segundo orden* (EDSO).

El *levantamiento tangente* de una curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q$ es la curva $\dot{\gamma} : I \rightarrow TQ$, donde $\dot{\gamma}(t)$ es el vector tangente a la curva γ . Localmente, si $\gamma(t) = (q^i(t))$ entonces $\dot{\gamma}(t) = (q^i(t), dq^i/dt)$.

APÉNDICE A. DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DE LA MECÁNICA CLÁSICA

Un cálculo directo nos muestra que la expresión local de una EDSO $X \in \mathfrak{X}(TQ)$ es

$$X = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X^i \frac{\partial}{\partial v^i}$$

y sus curvas integrales son levantamientos tangentes de curvas en Q . En efecto, sea $\gamma(t) = (q^i(t), v^i(t))$ una curva integral de X . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} \Big|_t \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\gamma(t)} + \frac{dv^i}{dt} \Big|_t \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{\gamma(t)} &= X(\gamma(t)) = \gamma_*(t) \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) \\ &= v^i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\gamma(t)} + X^i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{\gamma(t)}. \end{aligned}$$

De modo que $\gamma(t) = \dot{\alpha}(t)$, donde $\alpha(t) = (\tau \circ \gamma)(t) = (q^i(t))$, y esta curva $\alpha(t)$ es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\frac{d^2 q^i}{dt^2} \Big|_t = X^i \left(q^i(t), \frac{dq^i}{dt} \Big|_t \right). \quad (\text{A.20})$$

La afirmación recíproca también es cierta.

Usando las relaciones A.16 y A.18, un campo vectorial X sobre TQ será una EDSO si, y sólo si, $S(X) = \Delta$.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange

Sea $L \in C^\infty(TQ)$. Llamamos a la 1-forma Θ_L sobre TQ definida como

$$\Theta_L = dL \circ S \quad (\text{A.21})$$

la 1-forma de Euler-Poincaré, cuya expresión en coordenadas es

$$\Theta_L = \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i. \quad (\text{A.22})$$

Ahora definimos la 2-forma de Poincaré-Cartan Ω_L sobre TQ mediante

$$\Omega_L = -d\Theta_L, \quad (\text{A.23})$$

cuya expresión en coordenadas es

$$\Omega_L = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} dq^i \wedge dv^j. \quad (\text{A.24})$$

Claramente esta 2-forma es cerrada y es no degenerada si, y sólo si, la matriz W cuyas entradas son

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \quad (\text{A.25})$$

es no singular. En efecto, la matriz de Ω_L es

$$\begin{bmatrix} A & -W \\ W & 0 \end{bmatrix},$$

siendo A aquella con entradas

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial q^j}.$$

Si la 2-forma Ω_L es presimpléctica llamamos a la función L un *lagrangiano*. Decimos que L es un lagrangiano *regular* si Ω_L es una forma simpléctica sobre TQ ; en caso contrario, diremos que L es *singular*. Por lo general, llamamos *sistema con constricciones* a cualquier sistema con un lagrangiano singular. Evidentemente, la regularidad de L equivale a la de W en cualquier sistema de coordenadas.

A partir del lagrangiano $L \in C^\infty(TQ)$, podemos definir la *función de energía* $E_L \in C^\infty(TQ)$ subordinada a L dada por

$$E_L = \Delta L - L, \quad (\text{A.26})$$

a la que expresamos en coordenadas como

$$E_L = v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L. \quad (\text{A.27})$$

Similar al caso hamiltoniano, podemos asignarle a L un único campo vectorial lagrangiano $X_L \in \mathfrak{X}(TQ)$ a través de la ecuación

$$X_L \lrcorner \Omega_L = dE_L, \quad (\text{A.28})$$

siempre y cuando L sea regular. Si escribimos localmente a X_L como

$$X_L = a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b^i \frac{\partial}{\partial v^i},$$

donde $a^i, b^i \in (TQ)$, entonces X_L es una solución de la ecuación A.28 si, y sólo si, a^i y b^i satisfacen el sistema de ecuaciones

$$A_{ij}a^j - W_{ij}b^j(q, v) = v^j B_{ji} - \frac{\partial L}{\partial q^i}, \quad (\text{A.29a})$$

$$W_{ij}a^j(q, v) = W_{ij}v^j, \quad (\text{A.29b})$$

siendo B la matriz con entradas

$$B_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i}.$$

Por regularidad, $a^i = v^i$ y entonces existe una única solución X_L , la cual es una EDSO. Sea $\dot{\gamma}(t) = (q^i(t), dq^i/dt)$ una curva integral de X_L , donde $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = (q^i(t)) \in Q$. De A.20 sabemos que

$$\left. \frac{d^2 q^i}{dt^2} \right|_t = b^i \left(q^j(t), \left. \frac{dq^j}{dt} \right|_t \right)$$

y de A.20 y A.29 obtenemos que la curva $\gamma(t)$ satisface las *ecuaciones de Euler-Lagrange*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \circ \dot{\gamma} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \circ \gamma = 0. \quad (\text{A.30})$$

La ecuación A.28 es la versión geométrica de las ecuaciones de Euler-Lagrange y la dinámica queda unívocamente determinada por el sistema (TQ, Ω_L, E_L) cuando L es regular.

La transformada de Legendre

Las formulaciones hamiltoniana y lagrangiana de la mecánica están relacionadas por la *transformada de Legendre* $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$ asociada al lagrangiano L , la cual está definida de modo que, para cada $q \in Q$ y para cada $v_q, w_q \in T_q Q$, $\mathbb{F}L(v_q)(w_q)$ es la derivada de L en v_q a lo largo de la fibra $T_q Q$ en la dirección de w_q :

$$\mathbb{F}L(v_q)(w_q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(v_q + tw_q). \quad (\text{A.31})$$

APÉNDICE A. DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DE LA MECÁNICA CLÁSICA

Notamos que $\mathbb{F}L$ es un morfismo de haces fibrados, es decir, manda la fibra T_qQ a la fibra T_q^*Q . La expresión en coordenadas de la transformada de Legendre es

$$\mathbb{F}L(q^i, v^i) = \left(q^i, \frac{\partial L}{\partial v^i} \right),$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}.$$

Si Θ y Ω son, respectivamente, la 1-forma de Liouville y la 2-forma canónica sobre T^*Q , un pullback directo bajo $\mathbb{F}L$ revela que

$$\Theta_L = \mathbb{F}L^*\Theta, \tag{A.33a}$$

$$\Omega_L = \mathbb{F}L^*\Omega. \tag{A.33b}$$

Puesto que la representación matricial de $\mathbb{F}L_*$ es

$$\mathbb{F}L_* = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ B & W \end{bmatrix}$$

y en virtud del teorema de la función inversa, la transformada de Legendre es un difeomorfismo local si, y sólo si, L es regular. Si la transformada de Legendre $\mathbb{F}L$ es un difeomorfismo, decimos que el lagrangiano L es *hiperregular*.

En el caso hiperregular, tenemos que $H = (\mathbb{F}L^{-1})^*E_L \in C^\infty(T^*Q)$. Entonces el campo vectorial lagrangiano X_L sobre TQ y el campo vectorial hamiltoniano X_H sobre T^*Q están $\mathbb{F}L$ -relacionados, es decir,

$$\mathbb{F}L_*X_L = X_H,$$

ya que $\mathbb{F}L$ es, por construcción, canónica. Luego, los lagrangianos hiperregulares sobre TQ inducen sistemas hamiltonianos globales sobre T^*Q ².

²Más aún, podemos mostrar que los lagrangianos hiperregulares sobre TQ se corresponden de una manera biyectiva con los hamiltonianos hiperregulares sobre T^*Q [28].

Bibliografía

- [1] C.N. Yang and R.L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, Oct 1954.
- [2] V.A. Kostelecký and S. Samuel. Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory. *Phys. Rev. D*, 39:683–685, Jan 1989.
- [3] W. Heisenberg. Quantum theory of fields and elementary particles. *Rev. Mod. Phys.*, 29:269–278, Jul 1957.
- [4] C.D. Foggat and H.B. Nielsen. *Origin of symmetries*. World Scientific Publishing Company, 1991.
- [5] O.J. Franca, R. Montemayor, and L.F. Urrutia. Emergent electrodynamics from the nambu model for spontaneous lorentz symmetry breaking. *Phys. Rev. D*, 85:085008, Apr 2012.
- [6] H.S. Snyder. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, 71:38–41, Jan 1947.
- [7] N. Seiberg and E. Witten. String theory and noncommutative geometry. *Journal of High Energy Physics*, 1999(09):032–032, Sep 1999.
- [8] B.L. Cerchiai, J. Madore, S. Schraml, and J. Wess. Structure of the three-dimensional quantum euclidean space. *The European Physical Journal C*, 16(1):169–180, Aug 2000.
- [9] B. Jurčo, S. Schraml, P. Schupp, and J. Wess. Enveloping algebra-valued gauge transformations for non-abelian gauge groups on non-commutative spaces. *The European Physical Journal C*, 17(3):521–526, Nov 2000.
- [10] B. Jurčo, P. Schupp, and J. Wess. Nonabelian noncommutative gauge theory via noncommutative extra dimensions. *Nuclear Physics B*, 604(1-2):148–180, Jun 2001.
- [11] B. Jurčo, L. Möller, S. Schraml, P. Schupp, and J. Wess. Construction of non-abelian gauge theories on noncommutative spaces. *The European Physical Journal C*, 21(2):383–388, Jun 2001.
- [12] J. Wess. Non-abelian gauge theories on non-commutative spaces. *Communications in Mathematical Physics*, 219:247–257, 05 2001.
- [13] X. Calmet, B. Jurčo, P. Schupp, J. Wess, and M. Wohlgenannt. The standard model on non-commutative space-time. *The European Physical Journal C*, 23(2):363–376, Mar 2002.
- [14] P. Aschieri, B. Jurčo, P. Schupp, and J. Wess. Noncommutative guts, standard model and c,p,t. *Nuclear Physics B*, 651(1-2):45–70, Feb 2003.
- [15] J.L. Anderson and P.G. Bergmann. Constraints in covariant field theories. *Phys. Rev.*, 83:1018–1025, Sep 1951.

- [16] P.G. Bergmann, I. Goldberg, A. Janis, and E. Newman. Canonical transformations and commutators in the lagrangian formalism. *Phys. Rev.*, 103:807–813, Aug 1956.
- [17] P.G. Bergmann. Observables in general relativity. *Rev. Mod. Phys.*, 33:510–514, Oct 1961.
- [18] P.A.M. Dirac. *Lectures on quantum mechanics*. Dover Publications, 2001.
- [19] P.A.M. Dirac. Generalized hamiltonian dynamics. *Canadian Journal of Mathematics*, 2:129–148, 1950.
- [20] P.A.M. Dirac. The hamiltonian form of field dynamics. *Canadian Journal of Mathematics*, 3:1–23, 1951.
- [21] P.A.M. Dirac. Generalized hamiltonian dynamics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 246(1246):326–332, 1958.
- [22] E.C.G. Sudarshan and N. Mukunda. *Classical dynamics: a modern perspective*. John Wiley Sons Inc, 1974.
- [23] A. Hanson, T. Regge, and C. Teitelboim. Constrained hamiltonian systems. 01 1978.
- [24] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of gauge systems*. Princeton University Press, 1994.
- [25] K. Sundermeyer. *Constrained dynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982.
- [26] J. Govaerts. *Hamiltonian quantisation and constrained dynamics*. Informatization Developments and the Public Sector. Leuven University Press, 1991.
- [27] R.H. Cushman, H. Duistermaat, and J. ?niatycki. *Geometry of nonholonomically constrained systems*. Advanced series in neuroscience. World Scientific, 2010.
- [28] T.S. Ratiu and J.E. Marsden. *Introduction to mechanics and symmetry*. Springer, segunda edition, 1998.
- [29] M. De León, M. Salgado, and S. Vilariño. *Methods of differential geometry in classical field theories: k-symplectic and k-cosymplectic approaches*. World Scientific, 2015.
- [30] M.J.D. Hamilton. *Mathematical gauge theory*. Springer, 2018.
- [31] G.F. Torres. *Differentiable manifolds: a theoretical physics approach*. Birkhäuser Basel, 2012.
- [32] J.M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Graduate texts in mathematics 218. Springer New York, 2003.
- [33] M.J. Gotay, J.M. Nester, and G. Hinds. Presymplectic manifolds and the dirac–bergmann theory of constraints. *Journal of Mathematical Physics*, 19(11):2388–2399, 1978.
- [34] J.F. Carinena. Theory of singular lagrangians. *Fortschritte der Physik/Progress of Physics*, 38:641–679, 01 1990.
- [35] R. Schmid. *Infinite dimensional hamiltonian systems*. Lecture notes. Bibliopolis, 1987.
- [36] A. Komar. Field theoretic constraint formalism. *Foundations of Physics*, 15(4):473–485, 1985.
- [37] D. Colladay and V.A. Kostelecký. Lorentz-violating extension of the standard model. *Phys. Rev. D*, 58:116002, Oct 1998.
- [38] V.I. Arnold, A. Weinstein, and K. Vogtmann. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer, segunda edition, 1989.