BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CONOCIMIENTO DE UN PROFESOR Y EL QUE PREDICE PARA SUS ESTUDIANTES EN ACTIVIDADES DEL LÍMITE DE FUNCIONES, DESDE MTSK Y APOE

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

LIC. DAYANA ALEJANDRA DE LOS REYES CHARRIS

DIRECTOR DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

CO-DIRECTOR DE TESIS

DR. ERIC FLORES MEDRANO

PUEBLA, PUE. MAYO 2024

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que la C:

DAYANA ALEJANDRA DE LOS REYES CHARRIS

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 16 de noviembre de 2023, con la tesis titulada:

"CONOCIMIENTO DE UN PROFESOR Y EL QUE PREDICE PARA SUS ESTUDIANTES EN ACTIVIDADES DEL LÍMITE DE FUNCIONES, DESDE MTSK Y APOE"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 13 de mayo de 2024

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
COORDINADORA DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DRA´LAHR/I´agm*

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Esta investigación se realizó gracias al apoyo financiero otorgado por el Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) de México, mediante la beca de maestría asignada con CVU: 1180641, en el periodo comprendido de Enero de 2022 a Diciembre de 2023.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, doy gracias a Dios porque me llenó de fuerza y valentía durante todo este tiempo de estudio, más aún estando lejos de mi familia y de mi hogar, porque me regaló la sabiduría y el discernimiento para concretar de manera exitosa este posgrado.

A mis padres, Angela y Fernando, dueños de mi corazón, mi razón de ser, doy gracias porque debido a todas sus enseñanzas y valores inculcados pude convertirme en la mujer que hoy soy. Los amo con todo mi ser. Gracias por ser inspiración de superación. Gracias por darme alas para volar.

A mi familia colombiana, Karen, Sebastián, Julián, Romario, Alejandra, Ever, Keylla, Lorena, Adriana, Valentina y Lina, les agradezco porque lejos de nuestro país hicimos posible sentirnos como en casa, por todas las enseñanzas y momentos compartidos. A todos ustedes los atesoro en mi corazón. Sin duda alguna, ese vínculo que se formó entre cada uno de ustedes y yo, me ayudó a crecer y mejorar como persona y como amiga.

A mi novio René, mi amor, te agradezco con todo mi corazón, mi alma y mi ser, que hagas parte de mi vida, que hayas llegado en el momento más indicado y que te hayas convertido en mi mejor amigo y mi mejor compañía. Gracias por todo el apoyo, por escucharme y porque juntos estamos haciendo nuestros sueños realidad.

Agradezco profundamente a todos los profesores que hicieron parte de mi proceso de formación en la Maestría porque nos ayudan a ser mejor persona, mejores profesionales e investigadores. Así como a todo los miembros del jurado porque sin sus comentarios e intervenciones precisas este trabajo no hubiera sido posible.

Especialmente, Dra. Lidia Hernández, le agradezco infinitamente todo el apoyo brindado, su disponibilidad, amabilidad, generosidad y responsabilidad, no esta de más decir, que la admiro inmensamente. Al Dr. Eric Flores, agradezco su disposición y disponibilidad con nuestro trabajo porque la distancia nunca fue impedimento para llevar a cabo esta investigación.

A todos ustedes, infinitas gracias.

Con amor, Dayana.

ÍNDICE

RESUMEN 1
ABSTRACT 2
INTRODUCCIÓN 3
Capítulo 1 5
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 5
1.1. Antecedentes 5
1.2. Formulación del problema 8
1.2.1 Pregunta de la investigación 8
1.2.2 Preguntas específicas 8
1.2.3 Objetivo de la investigación 8
1.2.4 Objetivos específicos 8
1.2.5 Supuesto de la investigación 8
1.3 Justificación ..... **¡Error! Marcador no definido.**
Capítulo 2 11
MARCO TEÓRICO 11
2.1. Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) 11
2.1.1. El dominio de Conocimiento Matemático (MK) 13
2.1.1.1. Conocimiento de los Temas (KoT) 13
2.1.1.2. Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) 14
2.1.1.3. Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) 15
2.1.2. El dominio de Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) 16
2.1.2.1. Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) 16
2.1.2.2. Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) 17
2.1.2.3. Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) 18
2.1.3. Diferencias entre evidencia de conocimiento, indicios de conocimiento y oportunidades de exploración de conocimientos 19
2.2. Teoría APOE 20
2.2.1. Descomposición Genética 22
2.2.2. Ciclo de investigación 24
Capítulo 3 26
DISEÑO METODOLÓGICO 26
3.1. Paradigma de investigación 26
3.1.1. Perspectiva ontológica 27

3.1.2. Perspectiva epistemológica 27
3.1.3. Perspectiva axiológica 28
3.1.4. Perspectiva metodológica 28
3.1.5. Descripción del caso 29
3.1.6. Características del informante 29
3.1.7. Ciclo de investigación de la Teoría APOE 30
3.2. Técnicas e instrumentos de recolección, organización y análisis de la información 30
3.2.1. Actividades sobre el límite de una función 31
3.2.2. Entrevista semiestructurada 32
3.3. Procedimiento de recolección y análisis de los datos 33
Capítulo 4 35
RESULTADOS Y ANÁLISIS 35
4.1. Caracterización del conocimiento del profesor desde la perspectiva del Modelo MTSK 35
4.2. Análisis del conocimiento del profesor desde la perspectiva de la Teoría APOE 41
4.3. Caracterización del conocimiento del profesor desde dos perspectivas teóricas, la del Modelo MTSK y la de la Teoría APOE 48
4.3.1. El profesor como resolutor: Conocimiento Matemático (KoT) 48
4.3.2. El profesor como predictor: Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) 56
CONCLUSIONES 63
REFERENCIAS 68
ANEXOS 73

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas 12
Figura 2 Estructuras y mecanismos mentales 21
Figura 3 Ciclo de investigación de la Teoría APOE 24
Figura 4 Actividad N°1 resuelta por el profesor 31
Figura 5 Actividad N°2 resuelta por el profesor 32
Figura 6 Actividad N°3 resuelta por el profesor 32
Figura 7 Inciso (a) resuelto por el profesor en las tres actividades 41
Figura 8 Incisos (b) y (c) resueltos por el profesor en las tres actividades 43
Figura 9 Inciso (d) resuelto por el profesor en la actividad N°2 44
Figura 10 Inciso (d) resuelto por el profesor en las actividades N°1 y N°3 45
Figura 11 Inciso (e) resuelto por el profesor en las tres actividades 46
Figura 12 Manera en que el profesor describe la aproximación en las actividades 49
Figura 13 Respuesta del profesor sobre la aproximación coordinada 51
Figura 14 Respuesta del profesor sobre comportamiento de la función 52

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Categorías del Conocimiento de los Temas 14
Tabla 2 Categorías del Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas 15
Tabla 3 Categorías del Conocimiento de la Práctica Matemática 16
Tabla 4 Categorías del Conocimiento de Características del Aprendizaje de las Matemáticas .. 17
Tabla 5 Categorías del Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas 18
Tabla 6 Categorías del Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas 19
Tabla 7 Descomposición genética del concepto de límite 23
Tabla 8 Caracterización del conocimiento especializado del profesor 35
Tabla 9 Registros que utiliza el profesor para representar una función 54
Tabla 10 Registros de representación que el profesor utiliza para definir el límite 55
Tabla 11 Evidencias del KoT y estructuras mentales que exhibe el profesor 56
Tabla 12 Evidencias del KFLM y estructuras mentales que el profesor predice 61

RESUMEN

En esta tesis se presenta un análisis del conocimiento de un profesor y el que predice para sus estudiantes en actividades del límite de funciones, desde la perspectiva teórica del Modelo MTSK y de la Teoría APOE. Esto, con el propósito de caracterizar el conocimiento especializado de un profesor cuando predice el quehacer matemático de sus alumnos frente actividades sobre el límite de una función. Esta investigación tiene un enfoque cualitativo y un diseño metodológico de estudio de caso instrumental con un profesor de matemáticas de preparatoria. La recolección de datos se realizó por medio de tres actividades resueltas por el informante y una entrevista semiestructurada. Dentro de esta investigación el profesor participante tiene dos roles importantes, en el primero se desempeña como *resolutor* de las actividades propuestas y, por otra parte, toma un papel de *predictor* al anticipar los posibles comportamientos matemáticos que tendrían sus alumnos al resolver las actividades de este estudio. Como fruto del análisis realizado se expone un conjunto de descriptores que explican las evidencias de conocimiento exhibidas por el profesor. Se encontró que cuando el profesor es *resolutor* pone en juego conocimientos que corresponden a dos categorías de su Conocimiento Matemático caracterizados como Acciones o Procesos del concepto de límite. Cuando el profesor se desempeña como *predictor* pone en juego conocimientos de dos categorías de su Conocimiento de las Características de Aprendizaje y anticipa que sus estudiantes mostrarán Acciones o Procesos del límite. Esta propuesta es un acercamiento a una posible relación de trabajo entre la Teoría APOE y el MTSK.

Palabras Clave: Predicción, Aprendizaje del límite, Comportamiento matemático, Conocimiento especializado, Comprensión.

ABSTRACT

This thesis presents an analysis of a teacher's knowledge and what he predicts for his students in function limit activities, from the theoretical perspective of the MTSK Model and the APOE Theory. This, with the purpose of characterizing the specialized knowledge of a teacher when he predicts the mathematical work of his students regarding activities on the limit of a function. This research has a qualitative approach and a methodological design of an instrumental case study with a high school mathematics teacher. Data collection occurred through three activities solved by the informant and a semi-structured interview. Within this research, the participating teacher has two important roles, in the first he acts as a *solver* of the proposed activities and, on the other hand, he takes a role as a *predictor* by anticipating the possible mathematical behaviors that his students would have when solving the activities of this study. As a result of the analysis conducted, a set of descriptors was identified that explain the evidence of knowledge exhibited by the teacher. In the results, it was found that when the teacher is a *solver*, he puts into play knowledge that corresponds to two categories of his Mathematical Knowledge, showing Actions and Processes. When the teacher serves as a *predictor*, he puts into play knowledge of his Knowledge of Learning Characteristics, anticipating that his students will show Actions and Processes in two categories of this subdomain. This proposal is an approach to a possible working relationship between the APOE Theory and the MTSK.

Keywords: Prediction, Limit learning, Mathematical behavior, Specialized knowledge, Comprehension.

INTRODUCCIÓN

Actualmente, hablar del conocimiento del profesor de matemáticas, involucra a los saberes disciplinares y didácticos que le permiten llevar a cabo su práctica docente. El conocimiento del profesor de matemáticas ha sido objeto de estudio para muchos investigadores. Es así como se han creado varios modelos para caracterizarlo, como es el caso del Conocimiento para enseñar (MKT) y el Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) propuestos por Ball et al. (2008) y Carrillo et al. (2014), respectivamente.

En la actualidad, son diversas las investigaciones que indagan sobre el conocimiento del profesor de matemáticas fundamentándose en el MTSK, debido a que se utiliza como una herramienta para identificar y caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas desde su quehacer (Carrillo-Yáñez et al., 2018). Además, tomando en consideración lo dicho por Gómez (2019), se sabe que este modelo propone una clasificación en dominios, subdominios y categorías de los conocimientos que el profesor de matemáticas pone en acción para llevar a cabo su profesión. Cabe destacar, que este tiene una dualidad, ya que es un modelo teórico que estudia el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de forma analítica y es, a su vez, una herramienta metodológica que permite analizar distintas prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Flores et al., 2013).

En particular, es propósito de esta investigación caracterizar, desde el Modelo MTSK y la Teoría APOE, el conocimiento que pone en juego un profesor cuando predice lo que harán sus estudiantes al trabajar actividades sobre el límite de una función. Para alcanzar este objetivo se consideró el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) y la Teoría APOE como bases teóricas y herramientas de análisis, porque se tomó en cuenta que la teoría APOE permite describir la comprensión de los temas matemáticos desde un punto de vista cognitivo.

A grandes rasgos, la presente investigación está conformada por cinco capítulos, que conforman en su conjunto el eje central de este trabajo. A continuación, se presenta una breve descripción de cada uno de ellos.

El Capítulo 1 corresponde al Planteamiento del problema de este estudio, aquí se detallan los antecedentes de esta investigación, se describe en profundidad el problema a estudiar, así como las preguntas y los objetivos que orientan este trabajo, el supuesto y la justificación, mencionando aspectos como la relevancia, pertinencia y viabilidad de la investigación.

En el Capítulo 2 se describe el Marco Teórico de esta investigación, es decir, se presenta una descripción teórica del Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), así como la conceptualización de los dominios, subdominios y las categorías que constituyen este modelo. También, se describe a la Teoría APOE, así como las estructuras y mecanismos mentales que la componen, la descomposición genética y el ciclo de investigación que subyacen en esta teoría de aprendizaje.

El Capítulo 3 se compone del Diseño metodológico de este estudio. En este apartado se presenta el paradigma y cada una de sus perspectivas, así como el enfoque de la presente investigación. También, las características del informante, las técnicas e instrumentos con que fueron recolectados los datos, las actividades resueltas por el profesor, el análisis de los datos, entre otros aspectos más.

El Capítulo 4 se constituye de los Resultados obtenidos en esta investigación, así como del Análisis de estos. Es decir, se muestra la forma en que fueron interpretados los datos. En primer lugar, se presenta la caracterización del conocimiento del profesor por medio del Modelo MTSK, presentando la caracterización que fue posible gracias al sistema de categorías que lo componen. Luego, en otro apartado se presenta el análisis de la comprensión del profesor y la que predijo para sus estudiantes por medio de la Teoría APOE. Por último, se presenta la forma en que trabajaron ambos sustentos teóricos para caracterizar el conocimiento especializado del profesor participante de esta investigación.

En el último apartado, se presenta las Conclusiones derivadas de los resultados obtenidos. Primero, se muestran las conclusiones que resultan de la caracterización que se realizó con la perspectiva del Modelo MTSK. Luego, se dan a conocer las conclusiones sobre la compresión que mostró el profesor y la que predijo para sus estudiantes, desde la Teoría APOE. Finalmente, las conclusiones resultantes de haber establecido una forma de trabajo entre ambos marcos teóricos.

Capítulo 1
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Antecedentes

Desde hace tiempo se han venido desarrollando investigaciones en las que se estudia al profesor de matemáticas, particularmente, los conocimientos que pone en juego cuando desarrolla su práctica docente y la naturaleza de estos, es decir, se estudian los diferentes conocimientos que utiliza al llevar a cabo actividades específicas de su quehacer docente, como hacer planeaciones de clase (e.g. Pacheco et al., 2023), explicar un tema en específico (e.g. Sosa et al., 2015), al utilizar teorías de aprendizaje o de enseñanza en el desarrollo de sus clases (e.g. Sánchez, 2022), así como la manera en que interpreta las respuestas de sus estudiantes (e.g. Gómez, 2019), entre otros.

Dentro de estas investigaciones se pueden mencionar aquellas que, con la finalidad de caracterizar el conocimiento del profesor que enseña matemáticas, utilizan el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge - MTSK), el cual es un modelo que permite analizar las características específicas que tiene el conocimiento matemático y didáctico matemático que utiliza el profesor y, las creencias que permean estos dos conocimientos (Escudero, 2015). Este modelo fue planteado por el Semillero de Investigación en Educación Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva (Carrillo et al., 2013), fundamentados en los modelos de Shulman (1986) y Ball et al. (2008).

También, se encuentra el estudio de Gómez (2019), quien en su investigación considera importante explorar, mediante el modelo MTSK, el conocimiento empleado por el profesor cuando se anticipa al posible comportamiento matemático de sus estudiantes. Esta autora concluye que, anticiparse a la manera de pensar de los estudiantes y predecir las acciones de estos con respecto a cierta actividad, problema o ejemplo, son hechos que tienen detrás distintos conocimientos que las sustentan. Afirmando que el profesor de matemáticas utiliza un conocimiento característico de su profesión para realizar predicciones y que, para una misma predicción puede haber más de un conocimiento involucrado, algunos de estos serán parte del dominio matemático y otras del dominio didáctico del contenido.

Dentro del Modelo MTSK, se encuentra un subdominio llamado Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), que a su vez pertenece al dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). Dicho subdominio se refiere a la necesidad de que el docente sea consciente de la manera en que los estudiantes piensan y llevan a cabo la construcción del conocimiento al realizar tareas matemáticas, así como la comprensión por parte del docente del proceso por el cual pasan los alumnos al adaptarse a los diferentes elementos del contenido y las características de cada elemento, en las que pueden mostrar ventajas o, por el contrario, mostrar dificultades de aprendizaje (Carrillo-Yáñez et al., 2018).

De esta manera, y de acuerdo con Llinares et al. (2006), se considera importante y fundamental elaborar predicciones en la práctica docente, ya que estas le dan al docente la perspectiva de diversos y posibles escenarios a los cuales se puede enfrentar en el aula durante la implementación de ciertas actividades. Lo anterior le permite al docente identificar procedimientos, dificultades, errores típicos, fortalezas, habilidades, conocimientos previos, etc.

En esta sección se ha venido mencionando la importancia de que el profesor se anticipe al quehacer de sus alumnos, es decir, de que realice *predicciones*. Es por eso, que se quiere precisar qué se entiende por predicción del comportamiento matemático de los estudiantes, mencionando que se refiere a la declaración por conocimiento fundado o conjetura de algo que ha de suceder, respecto a las posibles maneras de proceder de los estudiantes ante una determinada tarea matemática (Gómez, 2019). Es decir, hace referencia a aquellas tareas de enseñanza en las que los docentes deben generar hipótesis sobre cómo se puede desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes ante un problema, actividad o tarea (Llinares et al., 2006).

Este ejercicio de predicción, por parte del docente, se convierte en un actor fundamental en la transformación de actitudes negativas a actitudes positivas en el estudiante, adoptando una postura y una práctica docente que concuerden con las expectativas, necesidades e intereses del estudiante, así como la metodología de enseñanza utilizada por el maestro (Daza y Garza, 2018).

Ahora, a estos aspectos se adiciona una problemática actual que hace referencia a la enseñanza del cálculo. Como se sabe, esta es una de las cátedras obligatorias de educación media superior, y su enseñanza es uno de los mayores retos de la educación en la actualidad, ya que su aprendizaje trae consigo diversas dificultades vinculadas a pensamientos de orden superior en el que se encuentran implicados procesos como la abstracción, el análisis, la demostración, entre otros (Vrancken et al., 2006).

Debido a esto, algunos estudiantes conciben la asignatura como muy compleja (Daza y Garza, 2018), esto se ve reflejado en los índices de reprobación elevados, falta de comprensión y actitud negativa hacia esta materia (Salinas y Alanís, 2009). Es por eso, que autores como Daza y Garza (2018), consideran que la metodología utilizada por el docente se ubica como una de las principales razones que generan incomodidad en la clase, considerando que los alumnos pusieron de manifiesto su incomodidad y desagrado debido a la manera rápida en que el docente explicaba un tema y a la falta de estrategias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de este.

Entonces, se observa claramente que en la enseñanza del cálculo se presentan dificultades de diferente naturaleza, particularmente, en esta investigación se considera relevante mencionar aquellas relacionadas con la conceptualización de límite, es decir, dificultades que se relacionan con el concepto de función, con el concepto de límite y con la conversión entre sistemas de representación (Hitt, 2003; Vrancken et al., 2006).

Con respecto a la conceptualización de límite, algunas investigaciones evidencian que una de las maneras más frecuentes en que se introduce el concepto de límite se basa en la idea de aproximación y movimiento. Aunque esta permite ir construyendo la concepción dinámica del concepto, a menudo se descuida la formalización de estas ideas y, en consecuencia, los razonamientos de los estudiantes suelen ser insuficientes en situaciones problemáticas que requieren de una comprensión sólida del concepto (Morante, 2020).

También, se han reportado dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto, para reconocer los límites laterales, para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución y, dificultad para encontrar situaciones en las que se apliquen los conceptos de límite (Fernández-Plaza, 2010).

Adicionalmente, La Plata (2014), en su investigación, concluye que los alumnos no vinculan claramente la existencia de un límite con la existencia e igualdad de los límites laterales y que determinaron con éxito el límite finito de una función real de variable real usando métodos algebraicos, lo cual hace ver lo limitado del manejo del concepto de límite, por los errores al responder otras preguntas dadas en el registro gráfico o simbólico.

De este modo, Vrancken et al. (2006) proponen que, para superar las dificultades de la enseñanza del límite de una función, se implemente una metodología más activa y una aproximación más intuitiva, ofreciéndoles mecanismos que proporcionen a los alumnos la

posibilidad de reconocer errores, detectar las causas de estos y los ayuden a proponer alternativas para solucionarlos.

1.2. Formulación del problema

1.2.1 Pregunta de la investigación

Desde el Modelo MTSK y la Teoría APOE, ¿cuál es el conocimiento que pone en juego un profesor cuando *predice* lo que harán sus estudiantes al resolver actividades sobre límite de una función?

1.2.2 Preguntas específicas

- ¿Cuál es el conocimiento de un profesor de matemáticas al predecir lo que hacen sus estudiantes en actividades sobre límite de una función desde el Modelo MTSK?
- ¿Cuál es la comprensión que muestra el profesor, de acuerdo con la teoría APOE, cuando resuelve actividades sobre límite de una función?
- ¿Cuál es la comprensión que predice el profesor que tendrán sus estudiantes, según la teoría APOE, cuando resuelven actividades sobre límite de una función?

1.2.3 Objetivo de la investigación

Caracterizar, desde el Modelo MTSK y la Teoría APOE, el conocimiento que pone en juego un profesor cuando *predice* lo que harán sus estudiantes al resolver actividades sobre el límite de una función.

1.2.4 Objetivos específicos

- Caracterizar el conocimiento de un profesor de matemáticas al predecir lo que hacen sus estudiantes en actividades sobre límite de una función desde el Modelo MTSK
- Identificar las estructuras y mecanismos mentales, desde la teoría APOE, que muestra el profesor cuando resuelve actividades sobre límite de una función.
- Identificar las estructuras y mecanismos mentales, desde la teoría APOE, que el profesor supone que pondrán en juego sus estudiantes al resolver actividades sobre límite de una función.

1.2.5 Supuesto de la investigación

El docente hará predicciones acerca de las respuestas de sus estudiantes al resolver actividades relacionadas con el concepto del límite de una función y mostrará cómo comprende él este concepto y cómo supone que lo comprenderán sus estudiantes. Además, este conocimiento

utilizado por el profesor para predecir dichas respuestas se ubicará en algunos subdominios del modelo MTSK.

1.2.6 Justificación

Como se ha venido mencionando, en esta investigación se considera de utilidad para el docente el análisis, la reflexión y la discusión previa de las actividades diseñadas, debido a que, durante este proceso, posiblemente logre formular predicciones sobre el comportamiento matemático de sus estudiantes. Esto, le permitirá ir modificando las actividades considerando dichas predicciones, al mismo tiempo, potencializar estas hipotéticas maneras de resolución (Gómez, 2019). Sin embargo, son pocas las investigaciones que se centran en la forma en la que los futuros profesores anticipan posibles respuestas de los estudiantes (Bergqvist, 2005, citado en Fernández et al., 2015).

Ahora, dentro de esta investigación cobra mucha relevancia el estudio de las estructuras mentales que muestra el profesor de matemáticas, por medio de la teoría APOE, teniendo en cuenta que esta teoría permite describir cómo se pueden aprender los conceptos matemáticos y se utiliza para explicar cómo las personas construyen mentalmente su comprensión de los conceptos matemáticos (Arnon et al., 2014). De aquí, la importancia de estudiar las estructuras que exhibe el profesor y las que va a predecir de sus alumnos, ya que él da sentido a los conceptos matemáticos mediante la construcción y el uso de estas estructuras mentales, las cuales, se consideran etapas en el aprendizaje de conceptos matemáticos (Piaget y García, 1989).

Aunado a esto, al ser fundamental el concepto de límite de una función, tanto a nivel pre como universitario, muchos investigadores han estudiado su naturaleza en el campo del proceso de su enseñanza y aprendizaje (Guerrero y Hernández-Rebollar, 2020). De esta manera, se puede decir que no es suficiente conocer las matemáticas que configuran la idea de límite, para ser capaz de reconocer diferentes niveles de desarrollo de la comprensión del límite (Fernández et al., 2015).

Dichas las consideraciones anteriores, es oportuno mencionar que en esta investigación se considera necesario indagar sobre la comprensión del concepto del límite de una función, específicamente, en profesores que imparten este tema. Se considera relevante estudiar las estructuras mentales del profesor de matemáticas y las que predecirá para sus estudiantes, usando el sustento teórico de la teoría APOE. Así como la caracterización del conocimiento que pone en juego el profesor al resolver las actividades y al realizar predicciones, esto será posible gracias al sistema de categorías que componen al modelo MTSK.

De esta manera, se espera que con la caracterización del conocimiento del profesor con el Modelo MTSK se pueda identificar qué conoce el profesor con respecto al límite de una función en un punto, tomando como base la forma en que resuelve las actividades y a su vez las predicciones que realice sobre lo que podrían hacer sus estudiantes. También, es interés de este estudio conocer la forma en cómo el profesor conoce el límite funcional, profundizando en la comprensión que tiene de este concepto y la que él espera que sus estudiantes tengan. Por esto último, se incluyó la Teoría APOE como sustento teórico, ya que nos da herramientas para describir en términos cognitivos cómo el profesor comprende el límite y cómo espera que lo comprendan sus estudiantes, es decir, como Acción, como un Proceso o como un Objeto. Para lograr describir esta comprensión se toma como base para el análisis una Descomposición Genética y la resolución de actividades sobre el límite que se diseñaron con esta misma teoría.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

A continuación, se presentará una descripción teórica del Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), el cual será utilizado en el análisis de la presente investigación, ya que este modelo permitirá caracterizar el cocimiento del profesor que participa en esta investigación. Por tal motivo, en las siguientes líneas se conceptualizarán los dominios, subdominios y las categorías que constituyen al modelo MTSK.

Más adelante, se describirá a la Teoría APOE, las estructuras y mecanismos mentales que la componen, así como la descomposición genética y el ciclo de investigación que subyacen en esta teoría de aprendizaje. Debido a que, la Teoría APOE permitirá realizar el análisis de comprensión del profesor y de la que predecirá para su alumnado.

2.1. Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El MTSK tiene una dualidad, en tanto es una propuesta teórica que modela el conocimiento núcleo del conocimiento profesional del profesor de matemáticas y, al mismo tiempo, es una herramienta metodológica que hace posible el análisis de las distintas prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Flores et al., 2013). De esta manera, se considera un modelo analítico del conocimiento del profesor de matemáticas descriptivo, que hace posible la interpretación del conocimiento especializado del profesor de manera integral, además, tiene en cuenta las distintas naturalezas del dominio matemático y del dominio didáctico específico, permitiendo así, considerar las diferencias que existen con respecto a los criterios de validez de uno y otro dominio y destacar las diferentes facetas en las que el profesor conoce el contenido matemático (Escudero-Ávila et al., 2015).

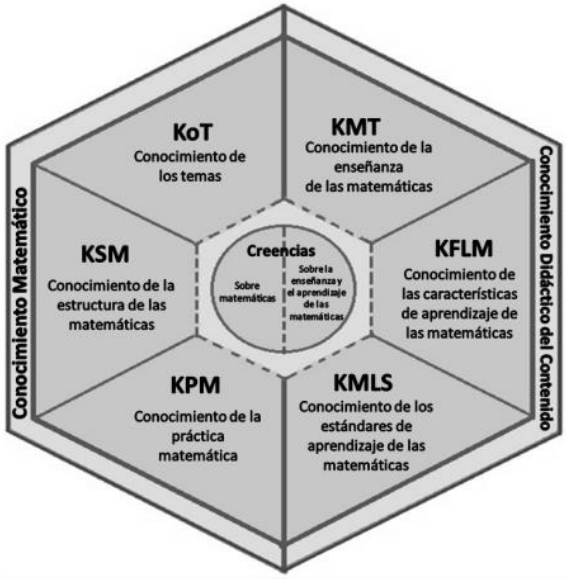
Las investigaciones que utilizan este modelo como marco teórico (incluido el presente estudio) definen el conocimiento de un individuo “como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo a esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!” (Schoenfeld, 2010, p. 25).

De acuerdo con Carrillo et al. (2013), se puede afirmar que el modelo MTSK nace con la finalidad de dar respuesta a las dificultades detectadas en el MKT, tomando como sustento teórico las potencialidades de este y de otros modelos que caracterizan el conocimiento del profesor de matemáticas. De hecho, este modelo mantiene la separación que hace Shulman (1986) en dos dominios de conocimiento, conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido matemático, y dota de contenido a cada uno de estos dominios incluyendo tres subdominios y categorías internas a estos.

Con respecto a estos dos dominios de conocimiento, por un lado, se tiene el conocimiento que tiene el profesor a cerca de las matemáticas como disciplina científica en un contexto escolar, que dentro del modelo se denomina *Mathematical Knowledge* (MK), o Conocimiento Matemático por su traducción al español; y el conocimiento de aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje, es decir, el *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), o Conocimiento Didáctico del Contenido, traducido al español (Carrillo et al., 2013).

Figura 1

Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas



Nota. La figura muestra el Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, el cual está compuesto por dominios del conocimiento con sus respectivos subdominios y las creencias del profesor. Fuente: Escudero (2015).

En los siguientes párrafos se presenta una descripción más detallada de estos dominios de conocimiento.

2.1.1. El dominio del Conocimiento Matemático (MK)

En el MTSK se entienden las matemáticas como una red de conocimientos sistémicos, estructurada según sus propias reglas. Se considera de vital importancia tener una buena comprensión de esta red, los nodos y las conexiones entre ellos, así como de las reglas y características relacionadas con el proceso de creación de conocimiento matemático, ya que todo esto le permite al docente enseñar contenido de manera conectada y validar sus propias conjeturas matemáticas y las de sus alumnos (Carrillo-Yáñez et al., 2018).

Este dominio es uno de los dos grandes dominios de conocimiento, debido a la necesidad de que el profesor conozca en profundidad el contenido matemático que enseñará (Escudero, 2015), pues se sabe que un elemento importante en el conocimiento del profesor es el conocimiento de la propia disciplina que enseña, por lo que es primordial plantearse como objeto de investigación saber qué y cómo conoce o debe conocer las matemáticas un profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2014).

El modelo MTSK propone para este dominio una división en tres subdominios, basada en las diferentes formas de conocer la matemática disciplinar, escolar y didáctica, los cuales son:

2.1.1.1. Conocimiento de los Temas (KoT)

El KoT hace referencia al conocimiento que tiene el profesor sobre los contenidos matemáticos escolares, lo cual implica más allá de solamente conocer el conocimiento de la matemática como disciplina. En este sentido, es necesario que el profesor conozca y entienda los contenidos de la matemática escolar, lo cual requiere que comprenda las propiedades y significados de manera fundamentada, los procedimientos, estándar y alternativos, que se emplean al abordar un determinado contenido, o las distintas formas de representación matemática o registros de representación asociados al mismo, además de los fenómenos que pudieran estar asociados a la naturaleza de los contenidos (Carrillo et al., 2013).

En efecto, en el KoT se describe qué y cómo el profesor de matemáticas conoce los temas que va a enseñar, partiendo de la idea de que el profesor conoce los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada (Flores-Medrano et al., 2015). Por ende, se considera ineludible que el profesor conozca el qué y el porqué de los contenidos que enseña. También, se pone especial atención en la forma en la que estos contenidos deben ser conocidos por el profesor, es decir, cómo manejarlos y trabajarlos matemáticamente hablando (Escudero, 2015).

Así, se puede decir que el KoT comprende un conocimiento profundo de los temas matemáticos, en el cual se incluye los conocimientos de procedimientos, definiciones y propiedades, representaciones y modelos, así como contextos, problemas y significados. En ese sentido, reconoce la complejidad de los objetos matemáticos que pueden surgir en el aula (Carrillo Yáñez et al., 2018), integrando al mismo tiempo el contenido que se quiere que aprenda el alumno y permitiendo la consideración de un conocimiento con un nivel de profundización mayor al esperado para los alumnos (Flores-Medrano et al., 2015).

Las categorías que permiten identificar y organizar el conocimiento del profesor sobre los temas matemáticos son:

Tabla 1

Categorías del Conocimiento de los Temas

Procedimientos	¿Cómo hacer algo? ¿Cuándo hacer algo? ¿Por qué algo se hace de esta manera?
Definiciones, propiedades y fundamentos	
Registros de representación	
Fenomenología y aplicaciones	

Fuente: Carrillo-Yáñez et al. (2018).

2.1.1.2. Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM)

El KSM es el conocimiento de las relaciones que el profesor hace entre distintos contenidos, ya sea del curso que está impartiendo o con contenidos de otros cursos o niveles educativos (Escudero-Ávila et al., 2015; Flores-Medrano et al., 2015).

Autores como Carrillo-Yáñez et al. (2018) afirman que este subdominio describe el conocimiento del maestro sobre las conexiones entre elementos matemáticos, teniendo en cuenta, que hay dos consideraciones diferentes que hacen referencia a conexiones. La primera de estas, son aquellas consideraciones temporales, que responden a cuestiones no curriculares, pero relacionadas con las matemáticas de secuenciación y que producen conexiones asociadas con un aumento de la complejidad o con la simplificación; por otro lado, están las consideraciones de demarcación de objetos matemáticos, que producen conexiones interconceptuales. Es pertinente aclarar, que el subdominio en cuestión solo considera conexiones interconceptuales, mientras que las conexiones intraconceptuales se consideran en el KoT.

De esta manera, el KSM toma en consideración el conocimiento que hace posible que el profesor enseñe los temas de un curso como fundamentación de cursos posteriores (Flores-

Medrano et al., 2015). En este subdominio se considera necesario que el conocimiento matemático del profesor incluya, no solo los temas como elementos aislados, sino que además reconozca la necesidad de integrarlos en un sistema de conexiones que le permita comprender otros contenidos matemáticos posteriores o anteriores, ligados a estos (Escudero, 2015).

Tabla 2
Categorías del Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas

Conexiones basadas en la simplificación
Conexiones basadas en el aumento de la complejidad
Conexiones auxiliares
Conexiones transversales

Fuente: Carrillo-Yáñez et al. (2018).

2.1.1.3. Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM)

En el KPM se enmarca la relevancia de que el profesor no sólo conozca resultados matemáticos establecidos, como ocurre con el conocimiento considerado en el KoT, sino, además, las diferentes maneras de proceder para llegar a dichos resultados y, a su vez, las características del trabajo matemático. Es decir, consiste en conocer cómo se explora y se genera conocimiento en matemáticas, cómo se establecen relaciones, correspondencias y equivalencias, cómo se argumenta, se razona y se generaliza, qué papel tiene el convenio, y qué características tienen algunos de los elementos con los que se hacen matemáticas, por ejemplo, una definición o una demostración (Flores-Medrano et al., 2015; Escudero-Ávila et al., 2015).

De esta manera, este subdominio se considera esencial para que el profesor, además de conocer los diferentes temas a impartir y su integración en la estructura matemática, tenga conciencia de cómo se razona y produce en matemáticas, para explorar y generar nuevos conocimientos en matemáticas, para dar solidez a su propio conocimiento, así como para saber gestionar los razonamientos matemáticos puestos en juego por sus alumnos, a la hora de aceptarlos, refutarlos o refinarlos, en caso de ser necesario (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Flores-Medrano et al., 2015).

En efecto, tal como afirma Delgado-Rebolledo (2020), este subdominio agrupa el conocimiento del profesor en tres prácticas matemáticas, las cuales son: *demostrar*, *definir* y *resolver problemas*. Además, el conocimiento del profesor con respecto al lenguaje matemático como elemento base para la realización de estas u otras prácticas.

Tabla 3
Categorías del Conocimiento de la Práctica Matemática

Conocimiento de la práctica de demostrar	Desarrollo de demostraciones Métodos y tipos de demostración Roles de la demostración
Conocimiento de la práctica de definir	Construcción de definiciones Características de la definición
Conocimiento de la práctica de resolver problemas	Estrategias heurísticas de resolución de problemas
Conocimiento del papel del lenguaje matemático	Significado y uso de símbolos Uso del lenguaje matemático

Fuente: Delgado-Rebolledo (2020).

2.1.2. El dominio de Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Dentro del MTSK se constituye el Conocimiento Didáctico del Contenido como un dominio, debido a la relevancia que tiene para el profesor el conocimiento del contenido matemático, pero entendido desde el punto de vista de un contenido a enseñar, desde el punto de vista de un contenido a aprender y desde una visión general de los estándares de aprendizaje que se pueden o que se pretenden alcanzar dentro del ámbito educativo (Escudero, 2015; Flores-Medrano et al., 2015).

Ahora, otra de las razones por las cuales el PCK se considera importante dentro del modelo es por su caracterización como un conocimiento particular del profesor, propio de la labor de enseñanza, ya que estas características le atribuyen un papel importante dentro de la conformación del conocimiento profesional (Flores-Medrano et al., 2015).

El modelo MTSK identifica tres subdominios de conocimiento para el dominio PCK, en los que el contenido matemático determina la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por lo que no se contemplan aquí conocimientos pedagógicos generales en contextos de actividades matemáticas (Escudero-Ávila et al., 2015), ya que se trata de un tipo específico de conocimiento de la pedagogía que deriva principalmente de las matemáticas (Carrillo-Yáñez et al., 2018).

2.1.2.1. Conocimiento de Características del Aprendizaje de las Matemáticas

Con respecto al KFLM es posible iniciar diciendo que este subdominio responde a la necesidad del profesor de conocer el modo de pensar del alumno frente a las actividades y tareas matemáticas. En este sentido, el KFLM se entiende que hace referencia al conocimiento de las características del proceso de aprehensión de los distintos contenidos por parte de los estudiantes,

y del conocimiento sobre teorías de aprendizaje, personales o institucionalizadas, que pueda tener el profesor; las fortalezas y dificultades, obstáculos o errores típicos, con relación al aprendizaje de un determinado contenido; como también, los conocimientos sobre las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Escudero, 2015; Flores-Medrano et al., 2015).

Adicionalmente, Flores-Medrano et al. (2015) afirman que, en este conocimiento sobre las características de aprendizaje inherentes al contenido matemático, se evita considerar al estudiante como el foco principal del proceso y se cambia la mirada hacia el contenido matemático como objeto de aprendizaje. Sin embargo, esto no significa que se deba restar importancia al rol del estudiante en dicho proceso, sino que es de sumo interés el conocimiento relacionado con las características de aprendizaje derivadas de su interacción con el contenido matemático y no las características del estudiante en sí mismo.

Entonces, es necesario reconocer la importancia de poseer un conocimiento que le permita al profesor interpretar las producciones de sus estudiantes o desarrollar la capacidad de anticipar razonamientos posibles, así como asociar distintos contextos que influyen sobre el aprendizaje. Todo lo anterior, con la finalidad de tener un control sobre el proceso de aprendizaje de sus estudiantes y entender la procedencia de estos razonamientos, de los errores y de las dificultades de aprendizaje o concepciones erróneas de sus estudiantes (Escudero, 2015).

Tabla 4

Categorías del Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas

Teorías del aprendizaje matemático
Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas
Formas en que los alumnos interactúan con el contenido matemático
Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas

Fuente: Carrillo-Yáñez et al. (2018).

2.1.2.2. Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)

En primer lugar, se tiene que el KMT hace referencia al conocimiento teórico específico de la enseñanza de las matemáticas, el cual puede ser personal o institucional, e implica conocer el potencial de las actividades, estrategias y técnicas para la enseñanza de contenidos matemáticos específicos. También, las posibles limitaciones y obstáculos que puedan surgir, así como el conocimiento de recursos y materiales didácticos, incluidos libros de texto, manipulativos, recursos tecnológicos, pizarras interactivas, entre otros (Carrillo-Yáñez et al., 2018). De igual

forma, el conocimiento de modos de presentar el contenido y el potencial que puede tener para la instrucción, así como el conocimiento de ejemplos adecuados para cada contenido, intención o contexto determinado (Flores-Medrano et al., 2015).

Cabe señalar que, para abarcar la evaluación crítica de cómo pueden mejorar la enseñanza de un elemento en particular y las limitaciones involucradas, este conocimiento debe ir más allá del conocimiento de los recursos mencionados y de cómo se utilizan. Además, es pertinente aclarar que este conocimiento proviene de muchas fuentes, tales como, publicaciones de investigación, especificaciones del plan de estudios, la propia experiencia en el aula y el legado formativo del maestro (Carrillo-Yáñez et al., 2018).

Tabla 5
Categorías del Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas

Teorías de la enseñanza de las matemáticas
Recursos didácticos (físicos y digitales)
Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos

Fuente: Carrillo-Yáñez et al. (2018).

2.1.2.3. Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)

De acuerdo con Escudero (2015), el KMLS se refiere a los conocimientos sobre los contenidos propuestos en las normativas curriculares institucionales, con el fin de conocer lo que se prescribe en cada etapa, es decir, dar una ubicación temporal y contextual al contenido abordado, así como introducir el conocimiento de objetivos y estándares de aprendizaje no oficiales que pueda tener el profesor. Además, incluye el conocimiento de objetivos y estándares procedentes de asociaciones profesionales o los que proceden de la experiencia del profesor respecto a los logros de aprendizaje, añadiendo un elemento de juicio y crítica en relación con lo prescrito por la administración educativa.

También, es de relevancia en este subdominio la secuenciación de temas, ya que lo que se exige a los alumnos, en cuanto a los conocimientos y habilidades necesarios para una determinada tarea, conlleva al profesor a ubicar los temas tanto retrospectivamente, en función de los conocimientos adquiridos previamente, como prospectivamente, en función de los conocimientos que será necesario adquirir para abordarlos posteriormente temas (Carrillo-Yáñez et al., 2018).

Ahora bien, el KMLS no se limita a conocer el currículo como documento oficial, sino que contempla la posibilidad de poseer un conocimiento sobre lo que el estudiante debe aprender en

un determinado nivel o momento de desarrollo, por lo cual, se habla del conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático, más que de un subdominio curricular, el cual le permita adoptar una postura crítica y reflexiva al momento de abordar un determinado contenido.

Tabla 6
Categorías del Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemática

Resultados de aprendizaje esperados
Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental
Secuencia de temas

Fuente: Carrillo-Yáñez et al. (2018).

2.1.3. Diferencias entre evidencia de conocimiento, indicios de conocimiento y oportunidades de exploración de conocimientos

Dentro del modelo MTSK se distinguen tres tipos de conocimiento que un profesor puede exhibir, estos son *evidencia*, *indicio* y *oportunidad*, dichos términos son implementados con el objetivo de poder explotar en el análisis la mayor cantidad de datos que permitan entender y caracterizar profundamente el conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas. A continuación, se presentará una diferenciación entre estos conocimientos, tomando en consideración lo expuesto por Escudero (2015).

Con respecto a las evidencias de conocimiento, se puede afirmar que, son los segmentos de información en los cuales no se tiene duda de que se puede observar un conocimiento del profesor y que este puede clasificarse como parte de su MTSK. De hecho, estos segmentos podrían ser considerados como los datos más potentes de la investigación y con más entidad para dar soporte a la construcción de un mapa general del conocimiento especializado del profesor que se estudia.

Luego, haciendo referencia a los indicios de conocimiento, se puede decir que, son fragmentos de información en los que parece percibirse cierto conocimiento matemático o didáctico de la matemática que los sustenta y que pudiera considerarse parte del MTSK. En este caso, la información no resulta contundente, por lo que se requerirá de una exploración más profunda para poder afirmar que el profesor posee dicho conocimiento.

Por último, Flores et al. (2013), se refieren a oportunidades para explorar conocimiento como un término que permite especular sobre la información que en una unidad de información o determinado contexto podría aportar a un futuro análisis de los datos. En este sentido, se puede

decir que en toda investigación surgen momentos que parecen potencialmente interesantes para profundizar en una idea, o para explorar cosas distintas a las que originalmente fueron pensadas para el análisis.

A continuación, se presentará una descripción de la teoría APOE, específicamente, de sus estructuras y mecanismos mentales, así como la descripción del concepto Descomposición genética y el Ciclo de investigación que subyacen en dicha teoría, esto se realizará utilizando como base lo dicho por Arnon et al. (2014).

2.2. Teoría APOE

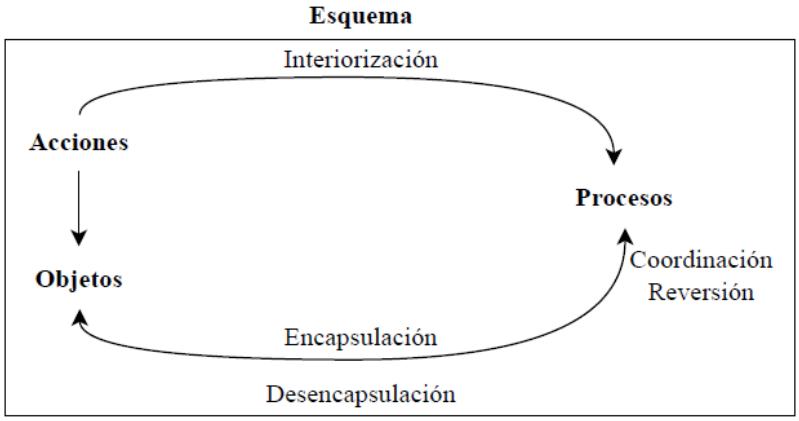
La teoría APOE es una teoría constructivista, también, es un modelo para describir cómo se pueden aprender los conceptos matemáticos y se utiliza para explicar cómo las personas construyen mentalmente su comprensión de los conceptos matemáticos.

Dentro de esta teoría se consideran cinco tipos de abstracción reflexiva o mecanismos mentales (Interiorización, Coordinación, Encapsulación, Desencapsulación y la Generalización) que conducen a la construcción de las estructuras mentales (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas). De hecho, su nombre se toma del acrónimo de estas estructuras mentales, que la teoría define para caracterizar el pensamiento de los individuos al estudiar un concepto. Es conveniente precisar que, la relación entre estructuras y mecanismos mentales es concebida dentro de la teoría como un sistema circular de retroalimentación. Aunque, la construcción del conocimiento no es lineal y el hecho de que parezca que así lo es, se deriva de la descripción jerárquica de la misma.

Así, desde este punto de vista, se asume que la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: Acción, Proceso y Objeto. Por lo que, cuando se habla de la comprensión de un concepto, es posible explicar en qué etapa de su construcción se encuentra el sujeto. También, cuando se habla de comprensión se hace referencia a un proceso de aprendizaje por parte del individuo que se relaciona con un conocimiento aprendido correctamente.

Figura 2

Estructuras y mecanismos mentales



Fuente: Arnon et al. (2014).

Ahora, se procede a describir cada uno de los mecanismos y estructuras mentales mencionados anteriormente. En primer lugar, se presentan las estructuras mentales:

- *Acciones:* Se dice que un estudiante posee una concepción Acción si realiza las transformaciones de un objeto dirigidas externamente, cada paso de dicha transformación debe realizarse explícitamente y guiado por instrucciones externas, estableciendo una analogía, se puede relacionar como cuando un individuo realiza una actividad mediante un instructivo.
- *Procesos:* Es la estructura mental en la que se realiza la misma operación que la Acción solo que totalmente en la mente del individuo, permitiendo que sea capaz de imaginar la realización de la trasformación sin tener que realizar cada paso de manera explícita.
- *Objetos:* Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un Proceso como un todo e identifica las transformaciones, además de construirlas (Acciones o Procesos), aplicando una Acción a un Proceso, se dice que el individuo posee una concepción Objeto del concepto y que el Proceso ha sido encapsulado en un Objeto.
- *Esquemas:* Un Esquema se construye como una colección coherente de las estructuras de Acción, Proceso, Objeto y otros Esquemas y las conexiones que se establecen entre ellas. Además, se caracterizan por su dinamismo, es decir, su reconstrucción continúa debido a la actividad matemática del individuo en situaciones específicas.

En segundo lugar, se describen los mecanismos mentales:

- *Interiorización:* Se puede considerar como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno del individuo, en otras palabras, el individuo pasa de tener ayudas externas a tener un control interno. El individuo posee la capacidad de imaginar la realización de los pasos sin realizarlos de manera explícita, puede saltar los pasos e incluso revertirlos.
- *Coordinación:* Este mecanismo es descrito como la coordinación general de Acciones, se refiere a todas las maneras de emplear una o más Acciones para formar nuevas Acciones u Objetos. Dos o más Procesos pueden coordinarse para formar nuevos Procesos.
- *Encapsulación:* Ocurre cuando un individuo aplica una Acción a un Proceso, de manera general, consiste en la conversión de un Proceso (estructura dinámica) en un Objeto (estructura estática). En otras palabras, es la transformación mental de un Proceso a un Objeto cognitivo. Este Objeto cognitivo puede ser considerado como un Objeto (físico o mental) y a su vez ser transformado por Acciones y Procesos.
- *Desencapsulación:* Una vez que un individuo ha encapsulado un Proceso en un Objeto, este puede ser desencapsulado para regresar al Proceso que lo generó, en otras palabras, reinvertir el mecanismo que lo generó. Así, el individuo puede regresar al Proceso siempre que lo desee.
- *Generalización:* Se relaciona con la capacidad del individuo para aplicar un determinado Esquema en un contexto distinto, se caracteriza por determinar los alcances de sus construcciones. En este mecanismo los Esquemas no cambian, pero los Objetos pueden ser asimilados por un Esquema para ser contextualizados en otros contextos.

2.2.1. Descomposición Genética

Una Descomposición Genética (DG) es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico. De acuerdo con Roa-Fuentes y Oktaç (2010), la DG además de describir cómo se podría construir mentalmente un concepto, podría incluir una descripción de las estructuras que un individuo necesita haber construido previamente y podría explicar las diferencias en el desarrollo de los estudiantes y sus variaciones en el rendimiento matemático. Así, una descomposición genética es un modelo de la epistemología y cognición de un concepto matemático.

En síntesis, es una herramienta mediante la cual los investigadores intentan dar sentido a cómo los estudiantes aprenden un concepto y explicar las razones detrás de las dificultades de los estudiantes, también, se puede utilizar para diseñar actividades que ayuden a los alumnos a realizar las construcciones propuestas.

Además, las descomposiciones genéticas juegan un papel central en la investigación basada en la Teoría APOE, ya que es necesario un modelo teórico que proporcione a los investigadores hipótesis que sean una base para el diseño de instrumentos que permitan obtener y analizar datos de los estudiantes. Esto, aumenta la confiabilidad del análisis, proporciona un medio para describir el pensamiento de los estudiantes y sirve como herramienta de diagnóstico y predicción.

Para efectos de esta investigación, se utilizará la descomposición genética diseñada por Cottrill et al. (1996), en esta los autores predicen y describen las construcciones mentales que un estudiante podría necesitar para aprender el concepto de límite. En total, esta DG se compone de siete construcciones mentales, en las tres primeras se describen aquella que un estudiante requiere desarrollar para concebir al límite de manera dinámica o informal, mientras que, de la cuarta a la séptima se detallan las estructuras y mecanismos mentales necesarios para decir que un estudiante aprendió la concepción métrica o formal del límite de una función. Esta información se puede ver en la Tabla 7.

Tabla 7

Descomposición genética del concepto de límite

Estructuras	**Descripción**
DG1	La Acción de evaluar f en un solo punto x que se considera cercano, o incluso igual al valor a.
DG2	La Acción de evaluar la función f en unos pocos puntos, cada punto sucesivo más cercano al valor a que el anterior.
DG3	Construcción de un Esquema Coordinado de la siguiente manera:
	(A) Interiorización de la Acción del paso 2 para la construcción de un Proceso en el dominio en el que x se aproxima al valor a.
	(B) Construcción de un Proceso en el rango en el que y se aproxima al valor L.
	(C) Coordinación de (A), (B) a través de f.
DG4	Encapsulación del Proceso del paso DG3(C) para que el límite se convierta en un Objeto al que se puedan aplicar Acciones.
DG5	Reconstruir el Proceso del paso DG3(3) en términos de intervalos y desigualdades. Esto se realiza mediante la introducción de estimaciones

	numéricas de la cercanía de las aproximaciones, en símbolos, $0 < \|x - a\| < \delta$ y $0 < \|f(x) - L\| < \varepsilon$.
DG6	Aplicación de un Esquema de cuantificación de dos niveles para conectar el Proceso reconstruido del paso DG5 con la definición formal de límite.
DG7	Aplicación de una concepción completa $\varepsilon - \delta$ a situaciones específicas.

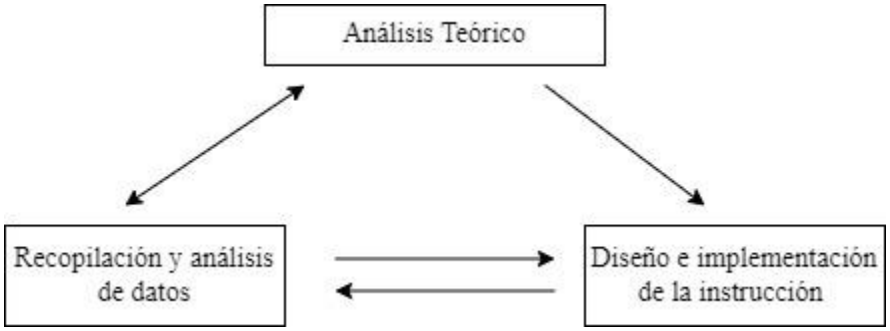
Fuente: Cottrill et al. (1996).

2.2.2. Ciclo de investigación

La metodología de investigación vinculada a la Teoría APOE se denomina Ciclo de Investigación y consta de tres componentes: *análisis teórico*, *diseño e implementación de estrategias de enseñanza*, y *análisis de datos*. El análisis teórico corresponde a la realización de un modelo viable de la construcción de algún concepto matemático en términos de construcciones mentales, a este modelo se le conoce como descomposición genética (Oktaç y Trigueros, 2010; Arnon et al., 2014).

Figura 3

Ciclo de investigación de la Teoría APOE



Fuente: Arnon et al. (2014).

Tal como se observa en la Figura 3, los tres componentes de este ciclo de investigación están relacionados. El *análisis teórico* fundamenta el *diseño y la implementación de la instrucción* a través de actividades destinadas a fomentar las construcciones mentales requeridas por el *análisis* (Arnon et al., 2014).

Como se mencionó, el análisis teórico de la cognición del concepto matemático en consideración da lugar a una descomposición genética preliminar del concepto. Asimismo, las actividades y ejercicios están diseñados para ayudar a los estudiantes a construir Acciones, interiorizarlas en Procesos, encapsular Procesos en Objetos y coordinar dos o más Procesos para

construir nuevos Procesos. De este modo, la implementación de la instrucción brinda una oportunidad para la recopilación y el análisis de datos, que se lleva a cabo utilizando la lente teórica de la teoría APOE.

Ahora, el propósito del análisis es responder a dos interrogantes. El primero, hace referencia a si los estudiantes hicieron las construcciones mentales requeridas por el análisis teórico. El segundo, enfatiza en qué tan bien aprendieron los estudiantes el contenido matemático. Ahora, si la respuesta a la primera pregunta es negativa, entonces la instrucción se reconsidera y revisa, pero si la respuesta a la primera pregunta es positiva y la respuesta a la segunda pregunta es negativa, se reconsidera y revisa el análisis teórico.

En cualquier caso, lo que ocurre es que el ciclo se repite hasta que estas preguntas se respondan positivamente y el instructor, o bien el investigador, esté satisfecho de que los estudiantes han aprendido los conceptos matemáticos lo suficientemente bien. Dicho de otra manera, el ciclo continúa hasta que la evidencia empírica y el análisis teórico apuntan hacia las mismas construcciones mentales.

Capítulo 3
DISEÑO METODOLÓGICO

En este apartado se presentará el diseño metodológico de esta investigación, de este modo, se describirá el paradigma y el enfoque de la presente investigación. También, las características del informante, las técnicas e instrumentos con que fueron recolectados los datos, las actividades resueltas por el profesor, el análisis de los datos, entro otros aspectos más.

Adicionalmente, en la descripción de la fundamentación metodológica de esta investigación se estará utilizando la primera persona del singular o del plural, tomando en cuenta lo recomendado por Muñoz-Catalán (2010), quien resalta la importancia de evitar expresiones impersonales en esta sección de las investigaciones, considerando que el investigador es una variable potencial de toda investigación, que manifiesta valores y posicionamientos.

3.1. Paradigma de investigación

Con el propósito de sustentar la coherencia entre los objetivos y el diseño metodológico de este estudio, así como el análisis de los datos, se procede a mencionar el paradigma que sustenta esta investigación. Para esto, hay que precisar a qué nos referimos con *paradigma de investigación*, tomando como sustento teórico lo dicho por Bassey (2003), se puede decir que, "es una red de ideas coherentes sobre la naturaleza del mundo y de las funciones de los investigadores que, aceptadas por una comunidad de investigadores, condicionan las pautas de razonamiento y sustentan las acciones en la investigación" (p. 42). En ese sentido, "el paradigma es un esquema teórico, un modo de percibir y comprender el mundo, que nos lleva a identificar determinadas áreas problemáticas e implica también una determinada forma de acercarse a ella, para analizarla e interpretarla" (Muñoz-Catalán, 2010, p. 149).

Ahora bien, en este estudio nos posicionamos en un paradigma *interpretativo*, ya que de acuerdo con Escudero (2015), este es coherente con los objetivos de describir, comprender e interpretar la naturaleza del conocimiento especializado del profesor de matemáticas y, se articula con la perspectiva de una realidad construida por las personas y que depende de la visión de cada uno de ellos.

De hecho, en concordancia con Bassey (2003), para el investigador interpretativo, el principal objetivo de investigar es avanzar en el conocimiento describiendo e interpretando los fenómenos presentes en el mundo, en su intento de obtener significados compartidos con otros. De esta manera, concibe la interpretación como una búsqueda de perspectivas profundas en eventos particulares y de conocimientos teóricos, lo cual puede ofrecer posibilidades, pero no certezas, en cuanto al resultado de futuros eventos.

Cabe resaltar que, este paradigma es el que se ajusta mejor a las necesidades que demanda un trabajo sobre los elementos y la naturaleza de una parte específica del conocimiento profesional del profesor, entendiendo que se construye como una realidad personal, situada y contextualizada, a la cual puede accederse sólo parcialmente (Escudero, 2015).

De este modo, la elección del paradigma interpretativo debe responder a las necesidades que demanda analizar la naturaleza del conocimiento especializado, el cual implica la búsqueda de un enfoque que permita entender el actuar de las personas como consecuencia de la interacción con los objetos y situaciones y los significados que atribuyen a esas interacciones, que se desarrollan a través de un proceso de interpretación (Muñoz-Catalán, 2010).

3.1.1. Perspectiva ontológica

En esta investigación adoptamos un enfoque ontológico relativista, que de acuerdo con Escudero (2015), es entendido como el que interpreta los fenómenos sociales y su significado en un proceso de definición constante por parte de los actores sociales, además de verlos como construcciones sociales soportadas sobre la base de las percepciones y acciones de los participantes. De este modo, en este estudio reconocemos la existencia de múltiples realidades situadas, que son producto de la actividad humana.

3.1.2. Perspectiva epistemológica

Ahora, con respecto a la perspectiva epistemológica del paradigma en mención, puedo decir que esta es consistente con la epistemología que Bassey (1999) y Brymann (2004) denominan *interpretativismo*, en la que conocer no consiste en la interiorización de una copia de la realidad exterior, sino que implica una interacción con el objeto de conocimiento, a través de la cual el sujeto interpreta y reconstruye los significados puestos en juego en dicho proceso. Además, pretendemos resaltar la relevancia que tiene la influencia de las actitudes o participaciones del

investigador en el escenario de recogida de datos y cómo los investigados modifican sus respuestas de acuerdo con las interacciones que se dan durante la investigación.

3.1.3. Perspectiva axiológica

Con relación al enfoque axiológico y, de acuerdo con Koetting (1984), en esta investigación tomamos en cuenta los valores, ya que estos influyen en el planteamiento del problema, la teoría, el método y el análisis realizado.

3.1.4. Perspectiva metodológica

Con respecto al enfoque metodológico de este estudio, este tiene una perspectiva cualitativa (Hernández-Sampieri et al., 2014) con un alcance interpretativo (Bassey, 2003), donde implementaremos como diseño metodológico un estudio de caso instrumental (Stake, 2007). En esta investigación, buscamos caracterizar desde dos perspectivas teóricas, la del Modelo MTSK y la de la Teoría APOE, el conocimiento que pone en juego un profesor cuando *predice* lo que harán sus estudiantes al trabajar actividades sobre el límite de una función.

El propósito de las investigaciones cualitativas es explorar la forma en que determinados individuos perciben, interpretan y experimentan fenómenos de su entorno, haciendo énfasis en sus perspectivas, opiniones, interpretaciones, concepciones y significados. Además, se fundamenta en una perspectiva interpretativa que se centra en entender las acciones que realizan ciertos individuos, sobre todo de los seres humanos y sus instituciones, interpretando lo que van captando (Hernández-Sampieri et al., 2014) y explorándolos desde la perspectiva de los participantes en su ambiente natural y en relación con el contexto (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018).

Para intereses de este estudio, nos acercamos al diseño de investigación por medio de un estudio de caso y desde la especificidad de la Educación Matemática como área de indagación y desde su objeto de estudio, los fenómenos educativos asociados al proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (Muñoz-Catalán, 2021). Es decir, consideramos como diseño de investigación más adecuado para este trabajo el estudio de caso, dado que, este se refiere a un estudio minucioso y profundo sobre características significativas del objeto de estudio, el cual tiene una forma específica de recoger, organizar y analizar los datos, recabados además en entornos naturales (Bassey, 2003).

De hecho, de acuerdo con Escudero (2015), la naturaleza misma del conocimiento profesional del profesor de matemáticas y el objetivo de profundizar en la comprensión y

caracterización de su conocimiento orienta hacia un estudio de caso como método natural, puesto que, hace posible capturar más y mejores características de este, como el carácter personal, situado y contextualizado que tiene este conocimiento.

Adicionalmente, se puede mencionar que, los estudios de caso en Educación Matemática son elegidos cuando la pretensión del investigador es la comprensión de un fenómeno social de índole educativo en los que están implicados los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (Muñoz-Catalán, 2021), como es el caso de esta investigación.

3.1.5. Descripción del caso

Como se ha venido mencionando, en esta investigación implementaremos un diseño metodológico de estudio de caso *instrumental*, debido a que este abarca la complejidad de un caso en específico con la intención de comprenderlo, pero no será el caso en sí mismo, antes bien, se busca comprender sobre otro tema (Stake, 2007). De hecho, de acuerdo con Muñoz-Catalán (2021), los estudios de caso instrumentales son pertinentes para indagar los fenómenos que preocupan en Educación Matemática.

Dicho estudio de caso se llevará a cabo con un profesor de matemáticas mexicano que imparte en el nivel medio superior, en dicho nivel los estudiantes tienen una edad promedio de 15 a 17 años. Recordemos que, el profesor es el caso y el fenómeno por estudiar es el conocimiento que pone en juego cuando predice lo que hacen sus estudiantes al resolver actividades relacionadas con el límite de una función, así como la comprensión que muestra y la que predecirá. La implementación de este diseño metodológico hará posible la caracterización de los conocimientos que exhibió el profesor desde el enfoque teórico del MTSK y desde la perspectiva de la teoría APOE.

Dentro de esta investigación, el profesor participante tiene dos roles importantes. En el primero se considera al profesor como un *resolutor*, en este caso, de las actividades propuestas (ver Figuras 4, 5 y 6). Luego, al anticipar los posibles comportamientos matemáticos que tendrían sus alumnos, el profesor desempeña un rol de *predictor*.

3.1.6. Características del informante

El informante de la investigación es un ingeniero químico, docente en servicio que imparte matemáticas en el nivel medio superior. Para el momento en que se llevó a cabo el caso, el profesor se encontraba cursando una maestría en Educación Matemática. Además, tiene quince años de

experiencia docente en nivel secundaria, medio superior y superior. Específicamente, ocho años de experiencia en el nivel medio superior. Ha impartido materias como Álgebra, Geometría, Trigonometría, Cálculo, Física, Química, Ecología, Razonamiento Matemático, Metodología de la investigación, Mecatrónica, Robótica, Dibujo técnico y Programación.

3.1.7. Ciclo de investigación de la Teoría APOE

Con respecto al ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE, en esta investigación se implementó el componente de *análisis y verificación de datos*, teniendo en cuenta que, en la implementación de las actividades sobre el límite de una función y en el análisis de lo dicho por el informante en la entrevista realizada, se pudieron recolectar datos y analizarlos, usando las actividades derivadas de la descomposición genética de Cotrill. El análisis se enfoca en conocer algunos aspectos de la comprensión del profesor y de la comprensión que él predice que mostrarán los estudiantes cuando resuelve las actividades propuestas. De este modo, los datos se utilizarán para complementar la investigación relacionada con el conocimiento especializado del profesor en este tema.

Se considera pertinente aclarar que, en el ciclo de investigación de APOE, este trabajo se ubica en la utilización de una DG del límite de una función para el análisis de datos que fueron recabados mediante la aplicación de actividades diseñadas bajo esta DG, pero no con la intención de validar la DG ni de rediseñar las actividades, sino de relacionar los resultados de este análisis con el realizado bajo la lente del MTSK.

3.2. Técnicas e instrumentos de recolección, organización y análisis de la información

Con respecto a la recolección de los datos se utilizó como instrumento un cuestionario con tres actividades sobre el límite de funciones, las cuales debían ser resueltas por el profesor de matemáticas, informante de esta investigación, luego, como técnica de recolección de datos se implementó una entrevista semiestructurada.

Es conveniente aclarar que, la intención de que el docente resuelva las actividades es que él conozca a detalle el problema y las posibles respuestas al mismo, para que pueda responder sobre lo que harían sus alumnos en el momento de la entrevista. Es decir, las actividades se convierten en el instrumento para recolectar la información. Se considera pertinente mencionar que, con las respuestas del profesor a estas actividades se pretende identificar las estructuras mentales que exhibe y las que predecirá implícitamente que van a mostrar sus estudiantes.

3.2.1. Actividades sobre el límite de una función

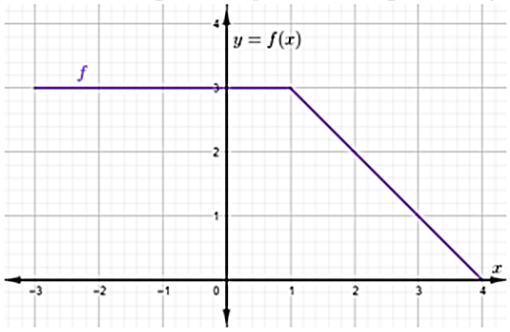
A continuación, se presentan las tres actividades que resolvió el profesor, las cuales fueron diseñadas por Morante (2020), quien además utilizó la Teoría APOE como sustento teórico de este diseño (ver Figura 4). Cabe mencionar que, en cada actividad se añadió un último ítem, el cual, se denomina inciso (e) y en el que se solicita calcular el límite de la función en un cierto valor de interés. Estas actividades hicieron posible la caracterización del conocimiento especializado del profesor cuando desempeñó tanto su papel de *resolutor* como el de *predictor*.

Figura 4

Actividad N°1 resuelta por el profesor

Actividad N°1:

Considera la siguiente representación gráfica de f



a) Determina los valores $f(x)$ de la función para los valores de x que se presentan en la tabla siguiente:

x	-3	0	0.8	...	**1**	...	1.4	2	4
$f(x)$				...	**3**	...			

b) Describa el comportamiento de los valores x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = 1$.

c) Describa el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(1) = 3$.

d) Describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x.

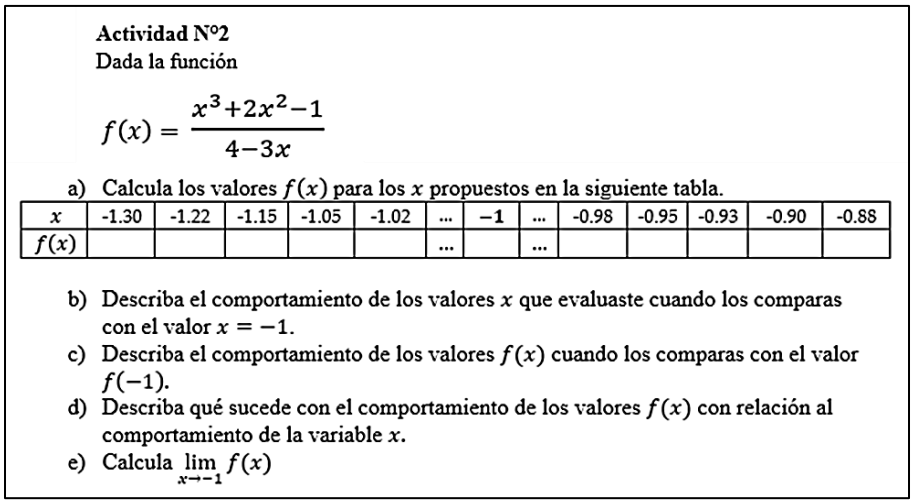
e) Calcula $\lim_{x \to 1} f(x)$

f) Calcula $\lim_{x \to 4} f(x)$

Fuente: Morante (2020).

Figura 5

Actividad N°2 resuelta por el profesor



Actividad N°2
Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2-1}{4-3x}$$

a) Calcula los valores $f(x)$ para los x propuestos en la siguiente tabla.

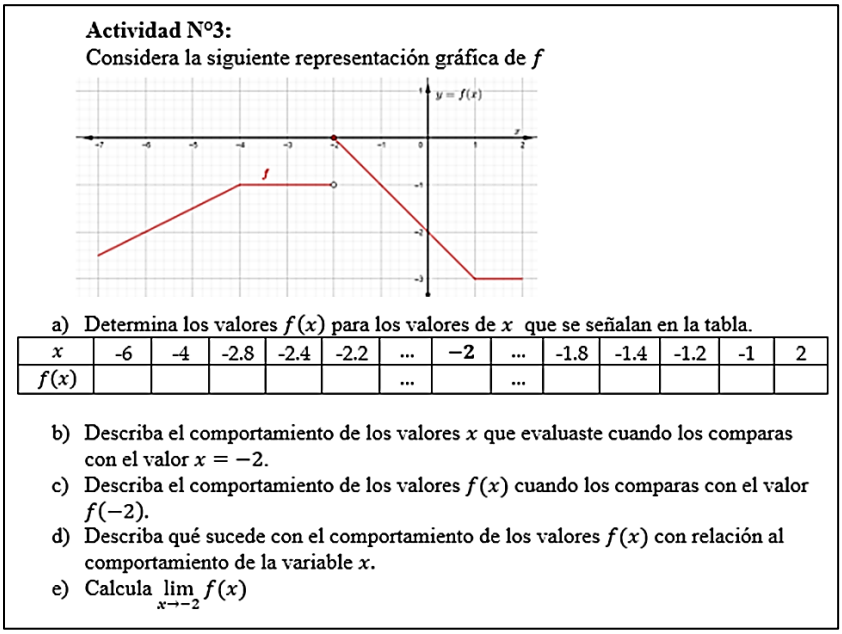
x	-1.30	-1.22	-1.15	-1.05	-1.02	...	-1	...	-0.98	-0.95	-0.93	-0.90	-0.88
$f(x)$						...		...					

b) Describa el comportamiento de los valores x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = -1$.
c) Describa el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(-1)$.
d) Describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x.
e) Calcula $\lim_{x\to -1} f(x)$

Fuente: Morante (2020).

Figura 6

Actividad N°3 resuelta por el profesor



Actividad N°3:
Considera la siguiente representación gráfica de f

a) Determina los valores $f(x)$ para los valores de x que se señalan en la tabla.

x	-6	-4	-2.8	-2.4	-2.2	...	-2	...	-1.8	-1.4	-1.2	-1	2
$f(x)$						...		...					

b) Describa el comportamiento de los valores x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = -2$.
c) Describa el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(-2)$.
d) Describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x.
e) Calcula $\lim_{x\to -2} f(x)$

Nota: Adecuación a las actividades propuestas por Morante (2020).

3.2.2. Entrevista semiestructurada

En un segundo momento se realizó una entrevista semiestructurada en la que, por medio de preguntas abiertas, se indagó la forma en la que el profesor resolvió las actividades la forma en que supone que sus estudiantes las resolverán, así como las estrategias que utilizarán, las fortalezas,

dificultades y errores que puedan tener, entre otros aspectos más que se detallan en el Capítulo 4 de esta investigación. Dichas preguntas abiertas se formularon tomando en consideración las categorías de los subdominios establecidos en el MTSK y los indicios de conocimiento que emergieron mientras el informante resolvía las actividades durante la entrevista, así como la descomposición genética con la que están diseñadas las actividades. El propósito de la entrevista fue indagar en el conocimiento del profesor y, a su vez, convertir los indicios de conocimiento en evidencias de conocimiento. Finalmente, esta entrevista tuvo una duración de dos horas y 15 minutos y fue realizada de manera virtual a través de la plataforma Zoom, por lo que fue videograbada y transcrita.

Esta entrevista permitió caracterizar el conocimiento especializado del profesor cuando se desempeñó como *predictor*, además, nos permitió identificar la forma en que el profesor espera que sus estudiantes comprendan el concepto del límite de una función.

3.3. Procedimiento de recolección y análisis de los datos

Como principal fuente de datos se utilizaron las actividades sobre el límite de una función en un punto (Sección 3.2.1), las cuales fueron resueltas por el profesor informante. Así, la resolución de estas actividades por parte del informante del presente estudio permitió identificar indicios de conocimiento que se esperaban evidenciar en el desarrollo de la entrevista.

Es decir, en paralelo a la resolución de las actividades se llevó a cabo la entrevista, en dicha entrevista, se preguntó al docente sobre los indicios de conocimiento que estaba mostrando, aspectos relacionados a las categorías de cada subdominio y sobre la forma en que predice que sus estudiantes resolverán las actividades y cómo cree que sus alumnos comprenden este tema.

El análisis de los datos comenzará con la transcripción de la entrevista, la cual, en una primera fase, se afrontará para comprender y caracterizar el conocimiento del profesor por medio los subdominios y las categorías del modelo MTSK propuestos por Carrillo-Yáñez et al. (2018). También se usarán los constructos *evidencia*, *indicio* u *oportunidad* descritos por Escudero (2015). En esta etapa emergió un conjunto de descriptores, que permitieron describir claramente los conocimientos movilizados por el profesor al resolver las actividades y al predecir el comportamiento matemático de sus estudiantes. Para la creación de dichos descriptores se consideraron las categorías de los subdominios correspondientes a cada evidencia de conocimiento.

Luego, en un segundo momento del análisis, se analizaron las respuestas del profesor a las actividades y a las preguntas de la entrevista, desde el enfoque de la teoría APOE, con la finalidad de identificar las estructuras y mecanismos mentales, tanto las que exhibió el profesor como las que predijo que mostrarán sus estudiantes al resolver dichas actividades. Ahora, esto fue posible debido a que dichas actividades se diseñaron bajo la perspectiva de esta teoría. De este modo, el análisis de las tres actividades seleccionadas se llevó a cabo tomando en cuenta cada ítem y considerando como base la descomposición genética de Cottrill et al. (1996).

De este modo, el análisis realizado con APOE se complementó bilateralmente con el realizado con el Modelo MTSK. Es decir, por un lado, de la caracterización que se realizó con el MTSK utilizando su sistema de categorías se identificaron conocimientos del profesor, correspondientes a cuatro subdominios del modelo (KoT, KFLM, KMLS, KMT), pero estos fueros acotados a dos subdominios (KoT y KFLM), debido a que los conocimientos que el profesor exhibió en estos subdominios eran los que podían ser profundizados con el análisis de APOE, de la comprensión del profesor y la que predijo para sus estudiantes, que se realizaron con la ayuda de la DG y de las actividades resueltas, así como de la información obtenida en la entrevista. De este modo, el KoT se relacionó con la comprensión del profesor y el KFLM se relacionó con la comprensión que predijo que podrían tener sus estudiantes con respecto al límite funcional.

Con el análisis realizado desde la Teoría APOE se pudo identificar la comprensión del profesor y la predicha para su alumnado, dicho análisis consiguió una acertada organización gracias a que el Modelo MTSK permitió categorizar todos los conocimientos exhibidos por el profesor que, como ya se mencionó, fueron profundizados por la comprensión que identificó en este análisis.

En resumen, ambos marcos fueron de mucha relevancia para poder conseguir los resultados obtenidos. El MTSK aportó el poder explicar qué conoce el profesor sobre el límite de una función y APOE nos dio las herramientas para decir en qué etapa de comprensión se encuentra aquello que exhibió como conocimiento. Así, coordinar ambas perspectivas permitió describir a profundidad el conocimiento especializado que emplea el informante al predecir lo que harían sus estudiantes en actividades sobre límite.

Capítulo 4
RESULTADOS Y ANÁLISIS

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en esta investigación, así como el análisis de estos. En primer lugar, se muestra la forma en que fueron interpretados los datos con el Modelo MTSK y, en segundo lugar, con la Teoría APOE. Luego, se presenta la forma en que se combinan ambos sustentos teóricos para caracterizar el conocimiento especializado del profesor que participó en esta investigación.

Como se mencionó en el capítulo anterior, el profesor informante tiene dos roles importantes, en el primero se desempeña como *resolutor* de las actividades propuestas y, en el segundo, toma el papel de *predictor* de los posibles comportamientos matemáticos que tendrían sus alumnos al resolver las actividades de este estudio.

4.1. Caracterización del conocimiento del profesor desde la perspectiva del Modelo MTSK

Este primer resultado corresponde a la caracterización del conocimiento del profesor por medio del Modelo MTSK. Se llevó a cabo por medio de la interpretación de las respuestas dadas por el profesor en las actividades y en la entrevista, además, se utilizó el sistema de categorías del modelo MTSK para caracterizar el conocimiento específico que exhibió el profesor. Adicionalmente, para cada subdominio evidenciado se da una descripción general de cómo el profesor utilizó la categoría de conocimiento correspondiente y se exhiben fragmentos de la entrevista como evidencia.

Cabe destacar que, como resultado del análisis emergió un conjunto de descripciones generales, de aquí en adelante *descriptores*, que permitieron explicar claramente los conocimientos movilizados por el profesor al resolver las actividades y al predecir el comportamiento matemático de sus estudiantes. Además, para la creación de dichos descriptores se consideraron las categorías de los subdominios correspondientes a cada evidencia de conocimiento. A continuación, en la Tabla 8 se presenta dicha caracterización.

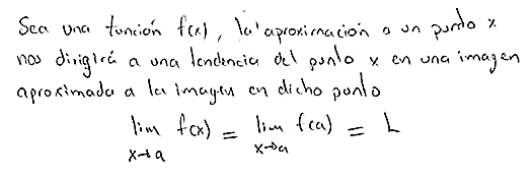
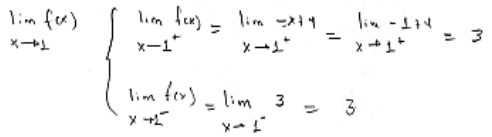
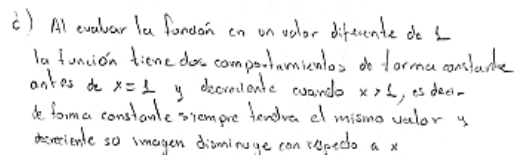
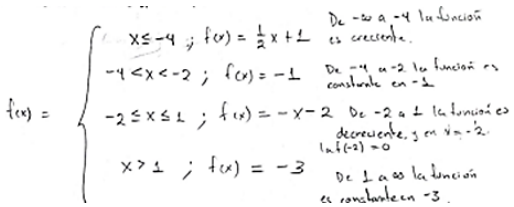
Tabla 8
Caracterización del conocimiento especializado del profesor

Subdominio	Segmento	Descriptor	Categorías de los subdominios
PCK\KFLM	*Considero que la parte un poco más complicada [para los estudiantes] sería tratarla como una función en forma algebraica, es decir, a través de expresiones matemáticas.*	Conoce y prevé que los estudiantes tienen dificultades en la manipulación de la expresión algebraica de una función.	Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)
PCK\KFLM	*…ellos [los estudiantes] intentarían encontrar una función que sea continua completa en todos los puntos…*	Conoce estrategias convencionales que los estudiantes utilizan en el tratamiento de una función.	Maneras en que los estudiantes Interactúan con el Contenido Matemático (KFLM)
PCK\KFLM	*Si le ponemos una función, saben que es una parábola, porque únicamente conocen el registro gráfico, pero no conocen cómo se aproximan los puntos, por ejemplo, cuando x tiende a cero o los puntos en donde son sus intersecciones, etcétera.*	Conoce y prevé si los estudiantes tendrán dificultades para identificar la aproximación de los valores de *x*, además, si reconocerán o no la función por su gráfica.	Maneras en que los estudiantes Interactúan con el Contenido Matemático (KFLM) Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)
PCK\KFLM	*Sé que si tienen algunas dudas seguramente se lo llevaran a un software, también al celular, podrían utilizarlo, GeoGebra, por ejemplo y graficarían su función con lo que han obtenido para ver que efectivamente coincida con la gráfica que tú les estás presentando.*	Conoce las formas cómo sus estudiantes verifican la expresión algebraica de una función, por ejemplo, mediante el uso de herramientas tecnológicas.	Maneras en que los estudiantes Interactúan con el Contenido Matemático (KFLM)
PCK\KFLM	*Siempre inician con la tabulación cuando les das una función, ellos inician de manera automática con la tabulación, después que han tabulado pasan a la parte gráfica y luego tienen identificada la imagen de la función, empiezan con la forma algebraica, ese sería su procedimiento al tratar una función.*	Conoce las diferentes formas en que los estudiantes interactúan con la gráfica de una función.	Maneras en que los estudiantes Interactúan con el Contenido Matemático (KFLM)
PCK\KFLM	*Pensar que el comportamiento de la función es singular, es único en todo el segmento, ese podría ser un error. De repente ellos van a querer involucrar a una función que nos dé esos valores de acuerdo con seguir los patrones de la tabla, ese sería uno de los errores más comunes que tienen. De igual manera, intentar o no definir correctamente el dominio, eso también sería uno de los errores que casi siempre cometen. Es decir, no identifiquen bien o correctamente de qué intervalo a qué intervalo es. Igual, en la evaluación del límite considero que no harían la evaluación del límite tanto por la izquierda como por la derecha.*	- Conoce y prevé los errores que pueden cometer los estudiantes en el aprendizaje del comportamiento de funciones, dominio, rango, y límite. - Conoce el procedimiento convencional de los estudiantes al calcular el límite de una función.	- Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) - Maneras en que los estudiantes Interactúan con el Contenido Matemático (KFLM)
PCK\KFLM	*Se guiarían mucho por la gráfica, de hecho, primero resolverían el límite, pero seguramente dirían que cuando x=4 la función es cero, cuando x=4 el punto es (4,0), sin embargo, todavía no se concibe el concepto de límite correctamente.*	- Conoce las diferentes formas en que los estudiantes resuelven el límite de una función. - Conoce y prevé donde los estudiantes tienen dificultades cuando calculan el límite de una función.	- Maneras en que los estudiantes Interactúan con el Contenido Matemático (KFLM) - Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)

PCK\KFLM	*Ellos definen que ese es el valor de ese punto, entonces, creo que eso es lo que les costaría un poco de trabajo, identificar que es una aproximación, que mientras más te aproximes a cuatro, pues más vas a llegar en tu imagen, vas a tender a cero, pero que no llegas a ese punto, sino digamos que vas a aproximarlo. Les cuesta un poco de trabajo y seguramente después de hacer el límite tendrán o recurrirán a la gráfica. Y entonces, cuando recurran a la gráfica, pues dirán: Ah, ahí está el punto y entonces asumirán que ese es el punto.*	Conoce y prevé dónde los estudiantes tienen dificultades en el aprendizaje del concepto de aproximación a un punto o del límite de una función.	Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) Maneras en que los estudiantes Interactúan con el Contenido Matemático (KFLM)
PCK\KFLM	*Una de las dificultades sería dividir sobre cero. Es una de las dificultades que siempre presentan, pero eso es en general, con los números racionales no tanto con el concepto de función sino con los números racionales.*	Conoce y prevé dónde los estudiantes tienen dificultades en la manipulación de números racionales o de una función racional.	Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)
PCK\KFLM PCK/KMT	*Con respecto a la tabulación, pues no, no tendrían inconveniente solo que lo metan mal a la calculadora, eso sería un inconveniente, porque no notarían el comportamiento de la función. Ese sería más con respecto al uso de la herramienta. No tanto al concepto de la función, pero consigo trae que, si no saben usar la herramienta, a lo mejor, no definirán correctamente la función y ahí traerá otro problema, que interpretarán de manera inadecuada el concepto.*	- Conoce las dificultades de los estudiantes en el uso de la calculadora cuando evalúan una función. - Conoce la tabulación como una forma de proceder de sus estudiantes en el tratamiento de la función. - Conoce las limitaciones y repercusiones de la calculadora al evaluar la función.	- Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) - Maneras en que los estudiantes Interactúan con el Contenido Matemático (KFLM) - Recursos Didácticos (Físicos y Digitales) (KMT)
PCK\KFLM	*Considero que esa parte si la pudiesen realizar, identificarían que x, en este caso lo que se le está pidiendo, cuando yendo a -1, s es que se está aproximando a ese -1.*	Conoce la manera en que los estudiantes interactúan con la aproximación de los valores de *x* en el dominio de la función.	Maneras en que los estudiantes Interactúan con el Contenido Matemático (KFLM)
PCK\KFLM	*Tal vez, describir la relación que tiene la función con respecto al cambio en x, ese sí sería una dificultad, por ver su comportamiento, no están acostumbrados y en este caso a ver una función racional.*	Conoce y prevé dónde los estudiantes tienen dificultades al identificar el comportamiento de una función racional.	Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)
PCK\KFLM	*De manera inicial, la tabulación, es con la primera parte que forzosamente tienden a irse a la manera tabular y gráfica, entonces, ya con la tabla, automáticamente forman una imagen mental sin necesidad de hacerlo en el papel, pero sí, forzosamente requieren o tienden a hacerlo en cualquiera de esos dos registros. Entonces, esa sería la primera idea, ya teniendo la tabla, ya ellos pueden describir cuál es el comportamiento de la función.*	- Conoce las estrategias convencionales que los estudiantes utilizan para resolver ejercicios relacionados con el límite de una función. - Conoce las distintas formas en que los estudiantes tratan una función cuando tienen su expresión algebraica.	Maneras en que los estudiantes Interactúan con el Contenido Matemático (KFLM)
PCK\KFLM	*El hecho de manejar funciones segmentadas o por partes podría presentar una dificultad*	Conoce y prevé dónde los estudiantes tienen dificultades con el tratamiento de determinada función, por ejemplo, de una función por partes.	Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)

PCK\KFLM	*Pero sí es posible identificar únicamente, si se los ponemos de manera escalonada, de manera secuencial, por ejemplo, si iniciamos con la actividad uno, luego pasamos a la actividad dos. El estudiante va a ser fácil que identifique, por ejemplo, los dominios, los rangos, este cómo se comporta la función alrededor de un punto.*	- Conoce y prevé dónde muestran sus fortalezas en el aprendizaje de dominio, rango y el comportamiento de la función. -Conoce las diferentes formas en que sus estudiantes identifiquen en el comportamiento de una función (ecuación, dominio, rango, etc.).	- Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) - Maneras en que los estudiantes Interactúan con el Contenido Matemático (KFLM)
PCK\KFLM	*La identificación de los puntos dentro de un espacio, esa sería una de sus fortalezas, eso les ayudaría muchísimo a construir el concepto de límite.*	Conoce y prevé las fortalezas de sus estudiantes en el aprendizaje del límite de una función en un punto.	Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)
PCK\KMT	*En cada paso, tú vas guiando de tal manera que el docente únicamente participa como un observador o como un guía sin necesidad de que se involucre, decirle: yo voy a evaluar en este punto, en este punto [otro punto], pero me voy a aproximar al punto uno, por ejemplo, voy a evaluar en 0.9, en 0.99, 0. 999 o en el punto 0.9999. O sea, ya no lo voy a hacer sino el alumno, lo voy a ir haciendo y lo va a ir descubriendo, entonces considero que esta es una buena forma de enseñarle cuál es el concepto de límite sin necesidad de que el profesor intervenga en su totalidad, el alumno puede construir correctamente con estas actividades.*	Conoce el acompañamiento docente como estrategia de enseñanza y su potencialidad.	Estrategia, técnica, tareas y ejemplo (KMT)
PCK\KMT	*Me enfoco más en los problemas de optimización porque abarca todo el concepto del cálculo, entonces, cuando estamos enseñando los límites por lo regular me enfoco en un problema en donde puedan situarlo, en donde puedan definir correctamente el límite a partir del conocimiento que ellos tienen, y que pueden retomar con anterioridad.*	Conoce tareas acordes en la enseñanza del límite de una función que propician el aprendizaje en los estudiantes.	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplo (KMT)
PCK\KMLS	*Me gusta que empiecen de manera inicial con lo primero que se les enseña, las imágenes de la función, sus dominios y sus rangos. Posteriormente, las gráficas de las funciones dentro de un plano de funciones compuestas y ya a partir de eso, nosotros vamos construyendo de gráficas que ya puedan tener o que se les proporcione, vayan generando el concepto de límite.*	Conoce la secuenciación del límite de una función con los temas previos y consecuentes.	Secuencia de temas (KMLS) Teoría personal de enseñanza (KMT)

PCK\KMLS	*Estoy suponiendo que hasta el tema que hemos manejado con los alumnos es hasta límites, en este momento. Porque bueno, si ya nos vamos a un poco más de complejidad, si ya han visto muchos más temas, por ejemplo, ahorita que los estudiantes ya saben derivada, y que ya saben máximos y mínimos, concavidad y convexidad.*	Conoce los contenidos matemáticos que se enseñan en el nivel medio superior con respecto al límite de una función, de manera retrospectiva y prospectiva.	Secuencia de temas (KMLS)
PCK\KMLS	*Si nosotros no tenemos o no hemos evaluado de manera diagnóstica que existen esos conceptos anteriormente, ahí va a existir una dificultad que muchas veces pasa que ya estamos en límites, pero aún no entienden ni siquiera qué es una función o qué es un dominio, qué es un rango, entonces, a veces no podemos dar esa transición al límite, pero si ya tiene esos conceptos definidos, pues ya puede construir o ir construyendo esta definición.*	Conoce los contenidos matemáticos que se enseñan en el nivel medio superior con respecto al límite de una función, de manera retrospectiva y prospectiva.	Secuencia de temas (KMLS)
PCK\KMLS	*Tenemos la gráfica, entonces sí esperase que identificaran puntos en la gráfica para poder completar la tabla, por ejemplo, para la definición de las dos funciones, esperaría que determinaran la función de la recta, que es decreciente, su pendiente, la intersección de la recta, con el objetivo de determinar la función a través del intervalo de uno a cuatro.*	Conoce lo que el estudiante debe o puede lograr en el nivel medio superior y los aprendizajes matemáticos previos y especificaciones para los niveles posteriores con respecto al comportamiento de una función.	Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico (KMLS)
PCK\KMLS	*Que identifique correctamente, por ejemplo, el dominio de la función, cómo es el comportamiento, en qué intervalo a qué intervalo, que identifiquen si es abierto o si es cerrado, de igual manera, el rango de la función.*	Conoce lo que el estudiante debe o puede lograr en el nivel medio superior y los aprendizajes matemáticos previos y especificaciones para los niveles posteriores con respecto al comportamiento de una función.	Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico (KMLS)
PCK\KMLS	*Para la definición de las dos funciones, esperaría que determinaran la función de la recta, por ejemplo, que es decreciente, que determinarán su pendiente, la intersección de la recta, con el objetivo de determinar la función a través del intervalo de uno a cuatro. Y antes igual pueden, ya sea únicamente de forma visual que identifiquen que es una función constante o que también utilicen la ecuación de la recta para definir que es una función constante. De igual manera, que identifique correctamente, por ejemplo, el dominio de la función, cómo es el comportamiento, en qué intervalo a qué intervalo, que identifiquen si es abierto o si es cerrado, de igual manera, el rango de la función.*	Conoce lo que el estudiante debe o puede lograr en el nivel medio superior y los aprendizajes matemáticos previos y especificaciones para los niveles posteriores con respecto al comportamiento de una función.	Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico (KMLS)

MK\KOT	*Como docente, siempre procuro manejar todos estos registros a la par, con el objetivo de que identifique siempre cómo es una función, tanto en su forma algebraica como su forma gráfica, con una tabla, de acuerdo, a través de coordenadas, entonces siempre es importante que lo distingan de esa forma.*	Conoce diferentes registros para representar una función.	Registros de Representación (KoT)
MK\KOT	*Todos los valores o las imágenes de la función tienden a 3, tanto los que están en la recta decreciente como los que son constantes, todos.*	Conoce la aproximación a un punto en el rango de la función.	Definiciones, propiedades y conocimientos (KoT)
MK\KOT	*Es una aproximación, que mientras más te aproximes a cuatro, más vas a llegar en tu imagen, vas a tender a cero, pero no llegas a ese punto, sino que vas a aproximarlo.*	Conoce el concepto de aproximación a un punto, en el dominio y en el rango de la función.	Definiciones, propiedades y conocimientos (KoT)
MK\KOT	*Identificarían que x, en este caso lo que se le está pidiendo, cuando yendo a -1, es que se está aproximando a ese -1.*	Conoce la aproximación a un punto y, ejemplifica.	Definiciones, propiedades y conocimientos (KoT)
MK\KOT	 Sea una función f(x), la aproximación a un punto x nos dirigirá a una tendencia del punto x en una imagen aproximada a la imagen en dicho punto $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(a) = L$	Conoce la concepción dinámica de límite.	Definiciones, propiedades y conocimientos (KoT)
MK\KOT	 $\lim_{x\to 1} f(x)$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -x+4 = \lim_{x\to 1^+} -1+4 = 3$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3 = 3$	Conoce la definición de límites laterales.	Definiciones, propiedades y conocimientos (KoT)
MK\KOT	 c) Al evaluar la función en un valor diferente de 1 la función tiene dos comportamientos de forma constante antes de x=1 y decreciente cuando x>1, es decir de forma constante siempre tendrá el mismo valor y decreciente su imagen disminuye con respecto a x	Conoce propiedades de una función que se relacionan con su comportamiento.	Definiciones, propiedades y conocimientos (KoT)
MK\KOT	 $f(x) = \begin{cases} x\le -4 ; f(x) = \frac{1}{2}x+1 & \text{De } -\infty \text{ a } -4 \text{ la función es creciente.} \\ -4<x<-2 ; f(x) = -1 & \text{De } -4 \text{ a } -2 \text{ la función es constante en } -1 \\ -2\le x\le 1 ; f(x) = -x-2 & \text{De } -2 \text{ a } 1 \text{ la función es decreciente, y en } x=-2 \text{ la } f(-2)=0 \\ x>1 ; f(x) = -3 & \text{De } 1 \text{ a } \infty \text{ la función es constante en } -3. \end{cases}$	Conoce propiedades de una función que se relacionan con su comportamiento.	Definiciones, propiedades y conocimientos (KoT)
MK\KOT	*…me tengo que aproximar tanto por la izquierda, como por la derecha, y entonces ya evaluará dos límites correspondientes, tanto la derecha como la izquierda.*	Conoce el concepto de límites laterales.	Definiciones, propiedades y conocimientos (KoT)

MK\KOT PCK\KMT	*<u>Me gusta comenzar por la definición abstracta de límite</u>, empezar a desarrollarla a través de los registros visuales como son el registro gráfico y tabular, ya posteriormente del registro gráfico y tabular, empieza con el registro de evaluación numérica en cada límite, entonces, ya empezar con esa y volver a regresar al registro simbólico en donde se les da la definición formal y ya lo relacionan con todo lo que han visto del registro visual.*	- Conoce diversos registros de representación para el concepto del límite de una función. - Conoce una estrategia de enseñanza para introducir y desarrollar el concepto de límite de una función.	- Registros de Representación (KoT) - Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT)

Fuente: Elaboración propia a partir de la producción del profesor.

Esta caracterización (Tabla 8) se analiza e interpreta con más detalle en la Sección 4.3.2, cuando las evidencias de conocimiento exhibidas por el profesor, explicadas en forma de descriptores, se interpretan para identificar tanto las estructuras y mecanismos mentales que muestra el profesor como las que predice para sus estudiantes.

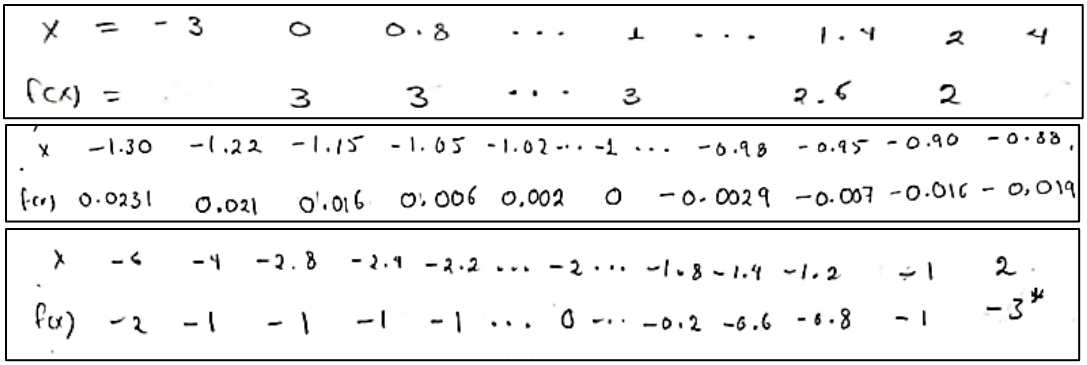
4.2. Análisis del conocimiento del profesor desde la perspectiva de la Teoría APOE

En las secciones siguientes se describen las estructuras y los mecanismos mentales que exhibe el profesor informante y las que predice que mostrarán sus estudiantes cuando resuelve las actividades diseñadas con la teoría APOE, que están relacionadas con la concepción dinámica del límite de una función. La obtención de estos resultados fue posible gracias al análisis realizado a las producciones del profesor en las tres actividades seleccionadas y a la descomposición genética de Cottrill et al. (1996). También, a las respuestas del profesor en casa inciso de las actividades y a las respuestas dadas durante la entrevista, así como a las predicciones que realizó.

En primer lugar, se encontró que el docente logró en cada una de las tres actividades completar de forma correcta la tabla proporcionada con los valores $f(x)$ correspondientes. Recordemos que en las actividades se le pedía en el inciso (a): "Determina los valores $f(x)$ para los valores de x que se señalan en la siguiente tabla". Así, se puede afirmar que el profesor realizó correctamente la tabulación. Con esto, el profesor muestra evidencia de la estructura mental Acción de evaluación de una función en valores sucesivos, lo cual corresponde a las estructuras DG1 y DG2, como se evidencia en la Figura 7.

Figura 7

Inciso (a) resuelto por el profesor en las tres actividades, respectivamente.



Fuente: Producción del profesor.

Adicionalmente, cuando se le preguntó al profesor lo que esperaría que hicieran sus estudiantes en este ítem, él respondió:

> *"...como ya tenemos la gráfica, entonces, si espero que identifiquen puntos en la gráfica para poder completar la tabla, (...) por lo regular, siempre inician con la tabulación cuando les das una función, ellos inician de manera automática con la tabulación, (...) entonces, con respecto a la tabulación, pues no, no tendrían inconveniente." (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

De este modo, el docente da evidencias de que él espera que sus estudiantes completen de forma correcta la tabulación en este mismo inciso, por lo que de manera implícita predice que sus estudiantes mostrarán evidencias de la estructura mental Acción correspondientes a las estructuras DG1 y DG2 de la DG, es decir, las Acciones de evaluar f, en un solo punto x cercano a a y en unos pocos puntos sucesivos, cada punto sucesivo más cercano al valor a que el anterior.

Luego, se observó que el profesor interiorizó las Acciones anteriormente mencionadas cuando resolvió los dos incisos siguientes, es decir, el inciso (b) y el (c). En estos, se le preguntó al profesor por la aproximación que ocurre tanto en el dominio como en el rango de la función.

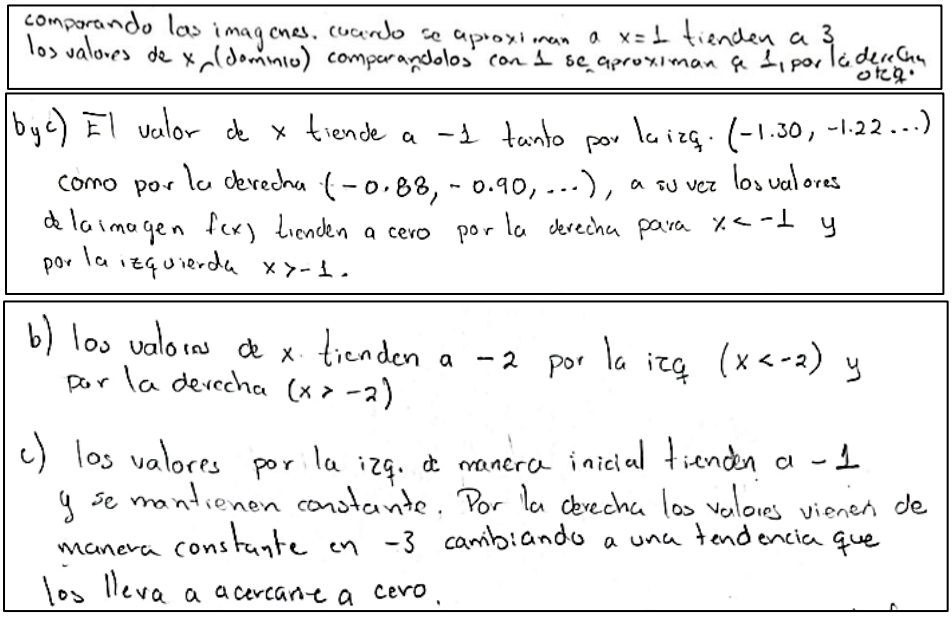
Específicamente, en el inciso (b) de las tres actividades se le pide al profesor: "Describa el comportamiento de los valores x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = a$", en las que respondió que los valores de x se aproximan cada vez más al valor $x = 1$, $x = -1$ y $x = -2$, respectivamente (ver Figura 8). Por lo que, el docente muestra la estructura mental Proceso de aproximación en el dominio de la función, en el que x se aproxima al valor de interés (DG3(A)).

Ahora, con respecto al inciso (c), en él se le pedía al informante: "Describa el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(a)$". Aquí afirmó que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más a $f(1)$, $f(-1)$ y $f(-2)$, de manera correspondiente a cada actividad, tal como se muestra en la Figura 8. Así, se puede decir que, mostró un Proceso

de aproximación en el rango de la función, pues intuyó el valor al cual los valores (x) confluyen, con lo que evidenció DG3(B).

Figura 8

Incisos (b) y (c) resueltos por el profesor en las tres actividades, respectivamente.



Fuente: Producción del profesor.

Cabe señalar que, cuando el docente describe el comportamiento de los valores de x o de los valores de $f(x)$, tiene en cuenta los valores cercanos por la derecha o por la izquierda al valor de interés, es decir, valores mayores o menores al punto de interés. En adición, vale la pena decir que, el profesor muestra este Proceso de aproximación en el dominio y el rango de la función en el registro algebraico, tabular y gráfico.

Ahora bien, con respecto a la predicción realizada por el profesor, específicamente, para el inciso (b) de la Actividad N°2 y, con relación a lo que harán sus estudiantes afirma lo siguiente:

> *"...no habría ningún problema, considero que esa parte si la pudiesen realizar, identificarían que x, en este caso lo que se le está pidiendo, cuando yendo a -1, pues es que se está aproximando a ese -1." (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

Con lo anterior, el profesor predice que sus estudiantes darán cuenta de la aproximación a $x = -1$ de valores en el dominio de la función, es decir, que mostrarán evidencia del Proceso de aproximación en el dominio. Sin embargo, no ocurre lo mismo para el rango de la función, ya que

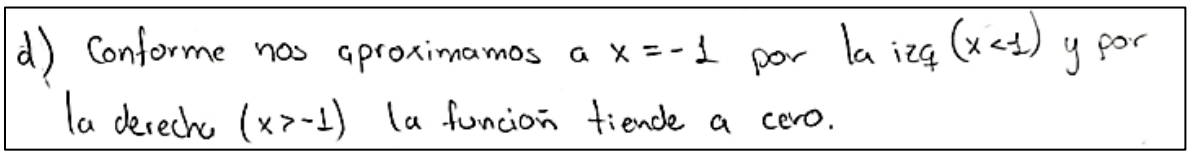
el profesor no informó de lo que podrían hacer sus estudiantes con respecto al inciso (c), es decir, con respecto al Proceso de aproximación en el rango de la función.

En las actividades 1 y 3, el docente aseguró que sus estudiantes calcularían una expresión algebraica, el dominio, el rango y las intersecciones de la función. A partir de esto, se puede afirmar que cuando el docente predice lo que harán sus estudiantes se ve influenciado por la gráfica de la función y, entonces, en su predicción se ven reflejados argumentos que están relacionados al comportamiento de la función pero que se alejan del Proceso de aproximación que ocurre en el dominio y en el rango de la función. Es decir, a pesar de que se le pregunta por el comportamiento en términos de la aproximación, el profesor responde en términos de otras propiedades que también se relacionan con el comportamiento de funciones (crecimiento, decrecimiento, etc.). Por lo que se cree que el docente considera que sus estudiantes responderán de acuerdo con las actividades que acostumbran a desarrollar, en las cuales calculan la expresión algebraica de la función, su dominio, rango, intersecciones, etc.

Ahora bien, en un momento determinado del desarrollo de las actividades se le pregunta implícitamente al profesor por la coordinación de los Procesos anteriormente mencionados, esto ocurre en el inciso (d) de las actividades, en el que se le solicitó: "Describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x". Sobre esto, se identificaron dos tipos de respuestas dadas por el docente. La primera, con lo que argumentó en este inciso para la actividad N°2, en donde el profesor asoció la causalidad de que el Proceso de aproximación en el dominio produce el proceso de aproximación en el rango a través de la aplicación de la función f, este hecho se puede verificar en la Figura 9. Con esto, se podría pensar que el profesor coordina los Procesos de aproximación en el dominio y en el rango a través de f.

Figura 9

Inciso (d) resuelto por el profesor en la actividad N°2



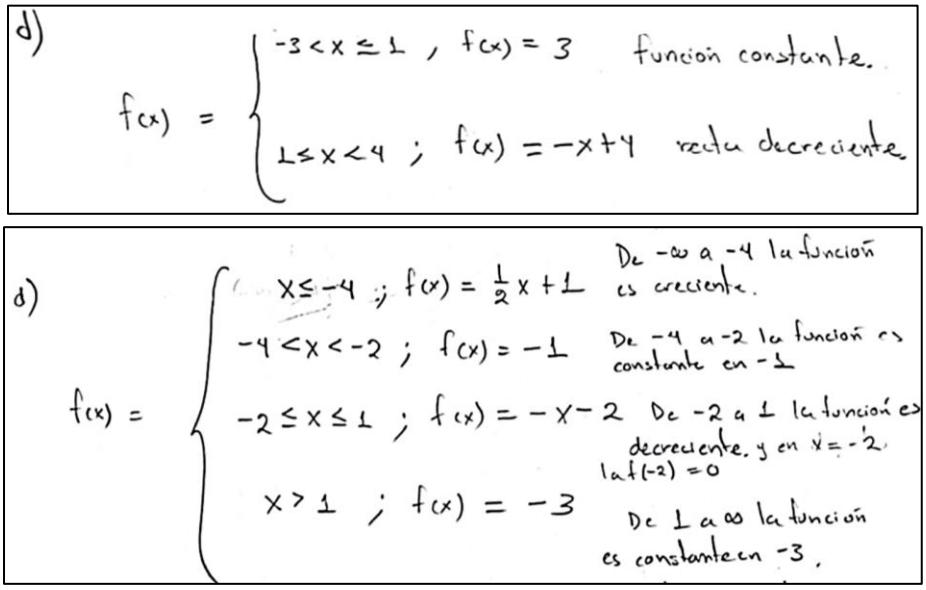
Fuente: Producción del profesor.

Sin embargo, en la primera y en la tercera actividad, en las que la función está representada en el registro gráfico, al preguntarle al profesor sobre el comportamiento de los valores $f(x)$ con

relación al comportamiento de la variable x, este respondió diciendo si la función era constante, creciente o decreciente, guiado por el comportamiento de la gráfica, detallando la ecuación y el dominio de esta (ver Figura 10).

Figura 10

Inciso (d) resuelto por el profesor en las actividades N°1 y N°3, respectivamente.



Fuente: Producción del profesor.

Ahora, el enunciado es igual en las tres actividades y se observa que el docente solo mostró la coordinación de los Procesos dominio y rango en la segunda actividad, en la que la función está representada en el lenguaje algebraico. Además, como se muestra en la Figura 9, el profesor no halla la ecuación para responder sobre el comportamiento de la función ni tampoco lo hace en términos de crecimiento o decrecimiento de esta. En una última instancia, el profesor, después de haber descrito el comportamiento de la función en términos de crecimiento o decrecimiento decide agregar en la tercera actividad, que la función tiene a -1 cuando x toma valores menores a -2 y tiende a 0 cuando x toma valores mayores a -2.

Cabe agregar que, el docente argumenta con respecto a la primera actividad y a lo que harán sus estudiantes, lo siguiente:

> *"Para la definición de las dos funciones, esperaría que determinaran la función de la recta, por ejemplo, que es decreciente, que determinarán su pendiente, la intersección de la recta, con el objetivo de determinar la función a través del intervalo de uno a cuatro. (...) De igual manera, que identifique correctamente, por ejemplo, el dominio de la función, cómo es el comportamiento, en qué intervalo a*

> *qué intervalo, que identifiquen si es abierto o si es cerrado, de igual manera, el rango de la función". (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

De este modo, se considera que la forma en que el profesor predice lo que harán sus estudiantes guarda relación con la manera en que resuelve las actividades, específicamente, este inciso, ya que en varias ocasiones mencionó la importancia de que sus estudiantes calculen a partir de la gráfica de la función: la pendiente, la ecuación, el dominio, etc.

También, con respecto al inciso (d), el profesor considera que este ítem sería el más complicado a resolver por sus estudiantes y, en el siguiente fragmento, se puede observar nuevamente que el profesor relaciona dicho ítem con realizar los cálculos ya mencionados.

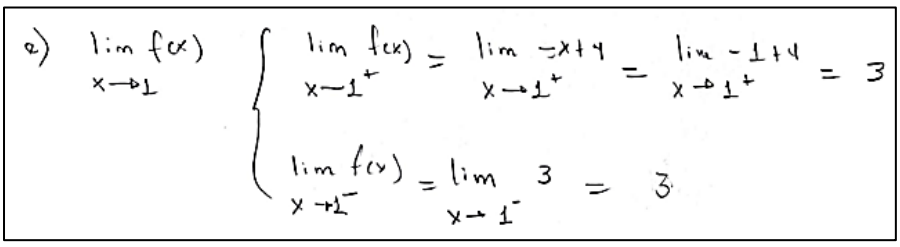
> *"Lo más probable sería que en el inciso (d) tengan una traba, pero no porque no identifiquen la función, a veces lo que más se les complica es el manejo algebraico" (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

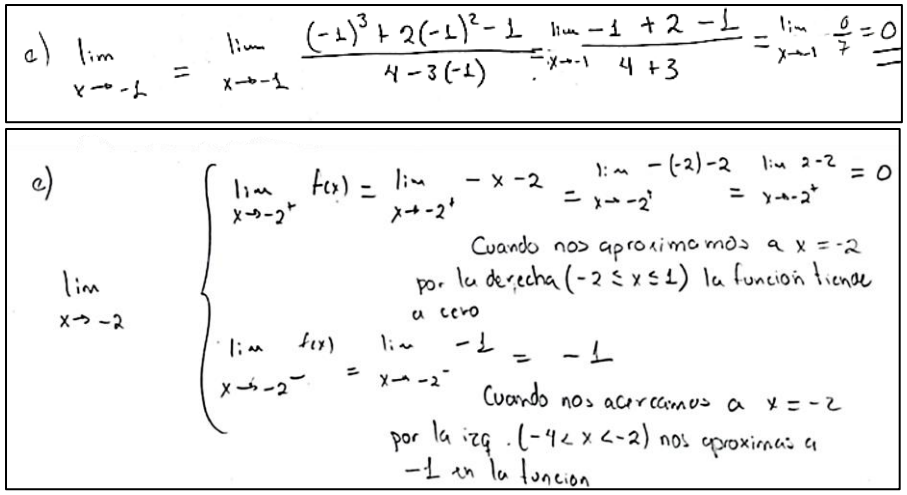
Finalmente, se tiene para la primera y para la tercera actividad, que el profesor no muestra evidencia de haber coordinado los Procesos DG3(A) y DG3(B), es decir, no identifica la relación de causalidad entre los procesos de aproximación en el dominio y el rango a través de f. Además, considera que será igual para sus estudiantes.

Por otro lado, cabe agregar que, a cada actividad se le agregó un ítem más aparte de los propuestos por Morante (2020), el cual denominamos inciso (e). Dicho ítem consiste en calcular el límite de la función cuando x tiende al punto de interés. Con relación a este, se observó que el docente calculó el límite de forma algebraica en todas las actividades, es decir, evaluando el punto de interés en la función. De esto, se puede inferir que para calcular el límite de la función él prescinde de la tabulación realizada en el inciso (a) y de los Procesos de aproximación, en el dominio o en el rango de la función, manifestados en los incisos (b) y (c). Se recomienda ver la Figura 11 para verificar este hecho.

Figura 11

Inciso (e) resuelto por el profesor en las tres actividades, respectivamente.





Fuente: Producción del profesor.

En la tercera actividad, en la que la función es presentada en el registro gráfico y siendo una función que está definida por partes, el profesor utilizando la gráfica y realizando la tabulación, identificó que los valores de la función tienden a dos números diferentes cuando se acerca a $x = -2$ por la izquierda y por la derecha. Sin embargo, en el ítem (e) cuando se le pide calcular el límite, no hace uso de esta información, sino que recurre a cálculos algebraicos. Aunque sus cálculos son correctos y obtiene que los límites laterales son diferentes, él no concluye sobre la no existencia del límite.

También, con respecto a la evaluación de límites laterales el profesor considera para sus alumnos que:

> *"(...) en la evaluación del límite considero que no harían la evaluación del límite tanto por la izquierda como por la derecha, ese también sería uno de los errores que posiblemente tengan". (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

Finalmente, se puede añadir que el profesor, en el transcurso de la entrevista, resaltó lo importante y necesario que es para sus estudiantes la tabulación, mencionando que, es lo primero que hacen. Sin embargo, un hecho que llama la atención es que, cuando la función es representada gráficamente, argumenta que sus alumnos no hacen uso de la gráfica para calcular las imágenes de la función, lo que hacen es usarla para seleccionar dos puntos, calcular la pendiente y, luego, la expresión algebraica de la función. Después, ellos usan dicha expresión para calcular las imágenes y completar la tabulación. Al parecer, el profesor nuevamente recuerda las actividades que usualmente trabaja con sus alumnos.

Falta hacer un análisis global de las respuestas del profesor, desde APOE. En opinión, el informante tiene una concepción Proceso del límite (pero se debe especificar si es el Proceso coordinado) influenciada fuertemente por el álgebra. Él entiende al límite como una operación sobre funciones y eso es lo que le impide concebirlo dinámicamente, es decir, en términos de las aproximaciones que ocurren en el dominio y en el rango.

4.3. Caracterización del conocimiento del profesor desde dos perspectivas teóricas, la del Modelo MTSK y la de la Teoría APOE

A continuación, se presentará la forma de trabajo, entre el Modelo MTSK y la Teoría APOE, con la que se pudo llevar a cabo la caracterización del conocimiento especializado del profesor. A grandes rasgos, en estos resultados se encontró que cuando el profesor es *resolutor* pone en juego conocimientos que corresponden a dos categorías de su KoT (Conocimiento Matemático) mostrando Acciones y Procesos. Por otro lado, cuando el profesor se desempeña como *predictor* pone en juego conocimientos de su KFLM (Conocimiento de las Características de Aprendizaje) anticipando que sus estudiantes mostrarán Acciones y Procesos en dos categorías de este subdominio.

4.3.1. El profesor como resolutor: Conocimiento Matemático (KoT)

Al resolver las actividades, el profesor mostró evidencias de su Conocimiento Matemático (MK) que se relaciona con el concepto y las propiedades que subyacen al límite de una función. Estas evidencias de conocimiento se sitúan en dos categorías de este subdominio. La primera, corresponde a Definiciones, propiedades y conceptos. La segunda, es la categoría de Registros de representación.

De este modo, se presenta de manera detallada el análisis que se realizó a cada una de las evidencias de conocimiento identificadas en la resolución de las actividades. Luego, se complementa este análisis con el sustento teórico que nos brinda la Teoría APOE, a través de las estructuras mentales que el profesor exhibe en cada evidencia de conocimiento.

KoT-1: Conoce el concepto de aproximación a un punto, en el dominio y en el rango de la función

Recordemos que, en el desarrollo de las actividades se le solicitó al profesor en el inciso (b): “Describa el comportamiento de los valores x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = a$”. Como se puede observar, aquí se le pregunta al profesor por la aproximación que está

ocurriendo en el dominio de la función, esto se le pidió en las tres actividades para cada valor de interés $x = 1$, $x = -1$ y $x = -2$, respectivamente.

En el inciso (c) de las actividades, se le pide al profesor: "Describa el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(a)$". En este caso, se esperaba que describiera la aproximación de las imágenes de la función hacia la imagen del valor de interés, es decir, la aproximación que se llevaba a cabo en el rango de la función. Nuevamente, este aspecto se le preguntó en las tres actividades, para $f(1) = 3$, $f(-1) = 0$ y para $f(-2) = 0$. La manera en que el profesor resolvió ambos incisos se presentó en la Figura 6.

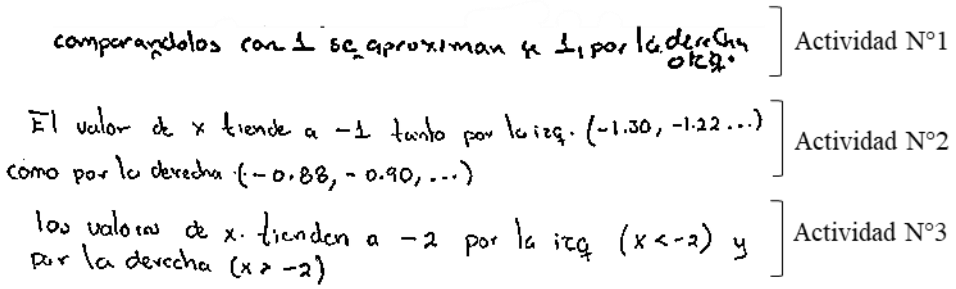
De acuerdo con lo resuelto, se identificó que el profesor da cuenta de reconocer la aproximación que ocurre tanto en el dominio como en el rango de la función, ya que identifica a qué valor se aproximan los valores de x y los $f(x)$ cuando son comparados con los valores de interés. Algo a destacar es que él utiliza tanto el término aproximación como tendencia. Esto también se verifica cuando el profesor afirma:

> *"Es una aproximación, que mientras más te aproximes a cuatro, pues más vas a llegar en tu imagen, vas a tender a cero, pero que no llegas a ese punto, sino digamos que vas a aproximarlo" (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

Adicionalmente, se identificó que cuando el docente describe el comportamiento de los valores de x o de los valores de $f(x)$, tiene en cuenta los valores cercanos por la derecha y por la izquierda al valor de interés, es decir, valores mayores o menores al punto de interés (ver Figura 12).

Figura 12

Manera en que el profesor describe la aproximación en las actividades



Fuente: Producción del profesor.

Con respecto a las estructuras mentales que el profesor exhibe al resolver estos dos incisos y al dar cuenta de la aproximación que está ocurriendo tanto en el dominio como el rango de la

función, se identificó que al responder en el inciso (b) de las tres actividades que los valores de x se aproximan cada vez más al valor x = 1, $x = -1$ y $x = -2$, respectivamente, muestra la estructura mental Proceso de aproximación en el dominio de la función (estructura DG3(A)).

En el inciso (c) se identificó que el profesor da cuenta de haber interiorizado las Acciones de calcular las imágenes de la función evaluando el valor de x en la expresión algebraica o a través de la gráfica de la función. Además, respondió que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más a $f(1) = 3$, $f(-1) = 0$ y $f(-2) = 0$, por lo que mostró un Proceso de aproximación en el rango de la función, pues intuyó el valor al cual los valores (x) confluyen. De este modo, se puede decir que evidenció la estructura DG3(B) de la descomposición genética. Con todo esto, el profesor mostró los Procesos de aproximación tanto en el dominio como en el rango de la función, esto lo hizo en los registros algebraico, tabular y gráfico.

KoT-2: Conoce la definición de límites laterales

En varios momentos de la resolución de las actividades el profesor mostró evidencias de analizar el comportamiento de las imágenes de la función para cada valor de interés, tanto para aproximaciones por la izquierda como por la derecha. Este hecho se aprecia en la evidencia KoT-1, ya que el profesor, al dar cuenta del Proceso de aproximación que está ocurriendo con los valores en el dominio y en el rango de la función, responde tomando en consideración los valores a la derecha y la izquierda de $x = a$.

Por otra parte, esto se verifica cuando el profesor resuelve el inciso (e) de las actividades, en el cual, se le solicita al profesor: "Calcula $\lim_{x \to a} f(x)$", como es notable, este ítem busca que el profesor calcule el límite de la función cuando x se aproxima a a, como se ha venido mencionando, esto se solicitó en las tres actividades para x = 1, $x = -1$ y $x = -2$, respectivamente. Lo que se pudo observar con la resolución que llevó a cabo el profesor, es que para la actividad N°1 y la N°3 el profesor utilizó los límites laterales para calcular el límite de la función, como se muestra en la Figura 11.

Así, se puede decir que el profesor conoce los límites laterales. Específicamente, se intuye que para la actividad N°1, el profesor cometió un error al calcular los límites laterales, pues al calcular el límite lateral derecho evaluó un valor que corresponde al límite lateral izquierdo y viceversa. Quizás, esto pudo ocurrir por las características de la gráfica de la función, en la cual, se observa que después de $x = 1$ los valores de la función empiezan a decrecer (ver Figura 4).

En cambio, para la actividad N°3 se puede ver que el profesor calcula los límites laterales usando la expresión algebraica de la función que calculó en un inciso anterior (ver Figura 10), por eso, para valores mayores a $x = -2$ utiliza la expresión $f(x) = -x - 2$ y para valores menores a $x = -2$ utiliza la expresión $f(x) = -1$.

Otro aspecto notable en la resolución del profesor es que luego de calcular los límites laterales y observar que son iguales (como ocurre en la primera actividad) o diferentes, (como es el caso de la tercera actividad), no concluye nada sobre la existencia del límite, esto coincide con lo que La Plata (2014) reportó en su investigación.

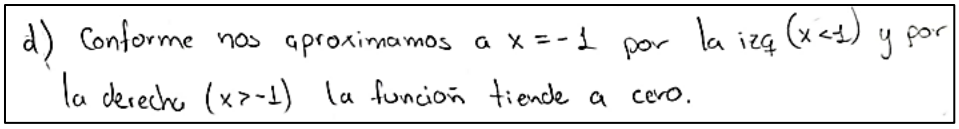
Con base en los resultados anteriores, se puede decir que el profesor realiza Acciones para calcular el límite de una función, tales como, evaluar la función en el valor de interés y calcular los límites laterales algebraicamente. Así como, coordinar los Procesos de aproximación en el dominio y el rango, considerando valores a la izquierda y a la derecha del valor de interés, al afirmar, por ejemplo: "Cuando nos aproximamos a $x = -2$ por la derecha $(-2 \leq x \leq 1)$ la función tiende a $f(x) = 0$ […] cuando nos acercamos a $x = -2$ por la izquierda $(-4 < x < -2)$ nos aproximamos a $f(x) = -1$ en la función" (*Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

KoT-3: Conoce propiedades de una función que se relacionan con su comportamiento

En diferentes momentos de la resolución de las actividades, el profesor mostró la forma en que él considera que se comportan las funciones. Por ejemplo, en el inciso (d) de las actividades, el cual solicita al profesor: "Describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x", el profesor exhibe diferentes propiedades de una función que se relacionan con el comportamiento de funciones. Por un lado, el que hace referencia a la causalidad que existe entre la aproximación que ocurre en el dominio y la que ocurre en el rango de la función. Para este caso, el profesor respondió en la segunda actividad que cuando los valores del dominio se aproximan a $x = -1$ por la izquierda y por la derecha entonces los valores en el rango de la función se aproximan a cero, dando cuenta de la causalidad mencionada, este hecho se puede verificar viendo la Figura 13.

Figura 13

Respuesta del profesor sobre la aproximación coordinada



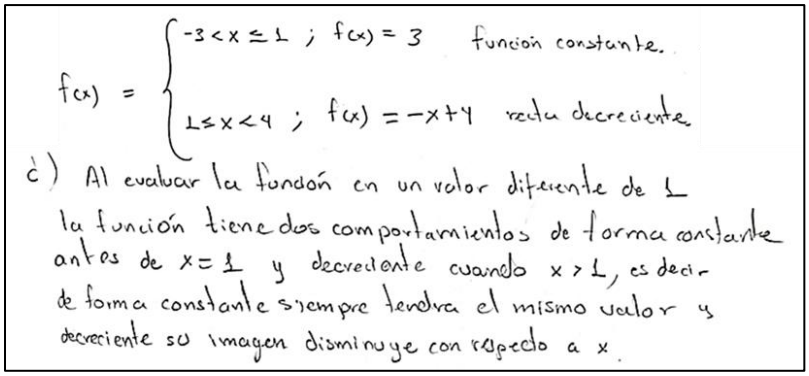
Fuente: Producción del profesor.

Con esto, el profesor da evidencias de la estructura DG3(C) de la descomposición genética (ver Tabla 7), es decir, coordina los Procesos de aproximación en el dominio y en el rango, dichos Procesos corresponden a las estructuras DG3(A) y DG3(B).

Por otro lado, el profesor, al responder este mismo inciso en la primera y la tercera actividad, detalla otro tipo de propiedades para describir el comportamiento de dichas funciones, como son el crecimiento o decrecimiento (ver Figura 14). En estas dos actividades la función se presentaba en el registro gráfico y se caracterizaron por ser funciones por partes, por lo que el comportamiento de la función cambiaba de acuerdo con el intervalo del dominio que se analizara. El profesor, con la finalidad de explicar dicho comportamiento, calculó la expresión algebraica de la función para cada intervalo y describió si en dicho intervalo la función crecía, decrecía o si era constante. Un ejemplo de esto es lo que resolvió en la actividad N°1. La forma en que el profesor resuelve este mismo inciso para la segunda actividad se presenta en la evidencia KoT-2. En este momento es importante mencionar que, en estas dos actividades, no era necesario obtener la expresión algebraica de las funciones para describir su comportamiento, pues tal información es posible obtenerla de la gráfica. Sin embargo, parecía que el profesor dependía del registro algebraico para responder, no solo sobre el comportamiento de la función, sino también sobre su límite, como se mostrará más adelante.

Figura 14

Respuesta del profesor sobre comportamiento de la función



Fuente: Producción del profesor.

KoT-4: Conoce diferentes registros para representar una función

En su resolución de las actividades, el profesor dio evidencias de un conocimiento matemático relacionado con las funciones, mostrando los diferentes registros de representación que él conoce sobre este contenido matemático.

> *Como docente, siempre procuro manejar todos estos registros a la par, con el objetivo de que identifique siempre cómo es una función, tanto en su forma algebraica como su forma gráfica o con una tabla (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

En el fragmento anterior, se observa que el profesor menciona que cuando se trata de funciones él utiliza diversos registros de representación para una función, con la finalidad de que sus estudiantes logren identificar a una función en cada uno de estos. Ahora, tomando como ejemplo las actividades utilizadas en esta investigación y lo que él resolvió, por un lado, se tiene que la actividad N°2 comienza con una tabla de valores en la que debió obtener las imágenes de la función a partir de la expresión algebraica de la función que proporcionaba la actividad, al realizar esto nos muestra su conocimiento de los registros de representación *algebraico* y *tabular* (ver Tabla 9, imagen A), así como la *conversión* realizada en los registros de representación, del registro algebraico al registro tabular.

Por otro lado, cuando el profesor resuelve la primera y la tercera actividad, estas también comienzan con tablas de valores en las que nuevamente el profesor da evidencias de su conocimiento de un registro de representación *tabular* (ver Tabla 9, imagen A). Luego, el profesor utiliza esta información para obtener la expresión algebraica de la función, mostrando su conocimiento de un registro de representación *algebraico* (ver Tabla 9, imagen B), con lo que se observa que realiza *conversiones* del registro algebraico al tabular, del registro gráfico al tabular y del registro gráfico al algebraico.

Adicionalmente, en otras ocasiones utiliza la gráfica de la función propuesta en las actividades para obtener la pendiente, puntos de la función, crecimiento y decrecimiento de la función, lo que da a conocer su uso del registro de representación *gráfico*, realizando una *conversión* del registro gráfico al registro algebraico.

Tabla 9
Registros que utiliza el profesor para representar una función

Nombre de la imagen	Evidencia	Registro de representación
A	$-1.05 \quad -1.02 \cdots -1 \cdots \quad -0.98 \quad -0.95$ $0.006 \quad 0.002 \quad 0 \quad -0.0029 \quad -0.007$	*Tabular*
B	$f(x) = \begin{cases} -3 < x \leq 1 \; ; \; f(x) = 3 \\ 1 \leq x < 4 \; ; \; f(x) = -x + 4 \end{cases}$	*Algebraico*

Fuente: Elaboración propia a partir de la producción del profesor.

Tomando en cuenta lo anterior, se puede decir que el profesor realiza la Acción DG (1) de asociar el valor de interés con su respectiva imagen $f(x)$ en el registro tabular y algebraico, esto se verifica cuando evalúa de forma correcta la función en puntos cada vez más próximos al valor de interés. Cuando asocia los valores que se presentan como parejas ordenadas de números conformadas por dos sucesiones, una en el dominio de la función y otra de las respectivas imágenes, realiza la Acción DG (2) en el registro numérico. Además, cuando utiliza la expresión algebraica de la función para evaluar valores próximos al valor de interés y obtener las imágenes correspondientes, el profesor está realizando la Acción DG (2) en el registro algebraico.

KoT-5: Conoce diversos registros de representación para el límite de una función

Cuando se le pide al profesor que escriba la definición del límite de una función, él utiliza los registros de representación *lenguaje natural* y *algebraico* (Tabla 10, imagen A). También, al calcular el límite en el inciso (e) de las actividades, el profesor dio evidencias de conocer el registro de representación *algebraico* del límite de una función, así como el registro de representación *lenguaje natural* (Tabla 10, imagen B) al decir el valor al cual tiende la función cuando x se aproxima al valor de interés. Sin embargo, vale la pena mencionar que la definición del límite en lenguaje natural no es clara, pues no logra precisar la relación entre la aproximación a $x = a$ y $f(a)$. También, él define el límite en términos de aproximaciones, no de manera abstracta, como

menciona más adelante que lo hace con sus alumnos. Además, se refiere solo al caso de una función continua pues él escribe: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Tabla 10

Registros de representación que el profesor utiliza para definir el límite

Nombre de la imagen	Evidencia	Registro de representación
A	Sea una función $f(x)$, la aproximación a un punto x nos dirigirá a una tendencia del punto x en una imagen aproximada a la imagen en dicho punto $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(a) = L$	*Natural y algebraico*
B	$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} -x+4 = \lim_{x \to 4} -4+4 = 0$ cuando nos aproximamos a x=4 la función tiende a cero. Conforme nos aproximamos a $x = -1$ por la izq $(x<1)$ y por la derecha $(x>-1)$ la función tiende a cero.	*Natural y algebraico*

Fuente: Elaboración propia a partir de la producción del profesor.

Con respecto a las estructuras mentales, se puede decir que, al definir el concepto del límite, el profesor muestra indicios del Proceso coordinado de la aproximación que ocurre en el dominio y en el rango de funciones continuas DG(3C) en el registro natural y algebraico, tomando en consideración que en su definición da a entender que cuando x tiende a a, $f(x)$ tiende a $f(a)$. Además, el profesor realiza la Acción DG(1) al evaluar el límite de una función en el registro algebraico.

Otro aspecto que verifica el conocimiento de los registros de representación del límite de una función del profesor es cuando al preguntarle: "Cuando enseña el límite de una función en un punto, ¿qué registros de representación emplea?" responde:

> *Me gusta comenzar por la definición abstracta de límite, posteriormente empezar a desarrollarla a través de los registros visuales como son el registro gráfico y tabular, […] con el registro de evaluación numérica en cada límite […] y regresar al registro simbólico en donde se les da la definición formal y ya lo relacionan con todo lo que han visto del registro visual (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

Finalmente, las evidencias de KoT exhibidas por el profesor, se presentan de manera resumida en la Tabla 11. En la primera columna se presentan las categorías del KoT para las cuales el profesor exhibió evidencias de conocimientos en la resolución de las actividades y en la entrevista. En la segunda columna se presentan los descriptores correspondientes a cada evidencia de conocimiento matemático del profesor. Finalmente, en la tercera columna se encuentran las estructuras mentales que el profesor exhibió en la resolución de las actividades y que se relacionan con su KoT.

Tabla 11
Evidencias del KoT y estructuras mentales que exhibe el profesor

Categorías KoT	Evidencias de conocimiento	Estructura mental que exhibe
Definiciones, propiedades y conocimientos	1. Conoce el concepto de aproximación a un punto, en el dominio y en el rango de la función.	*Procesos* DG(3A) y DG(3B)
	2. Conoce la definición de límites laterales.	*Acciones y Proceso* DG(3C)
	3. Conoce propiedades de una función que se relacionan con su comportamiento.	*Proceso* DG(3C)
Registros de representación	4. Conoce diferentes registros para representar una función	*Acciones* DG(1) y DG(2)
	5. Conoce diversos registros de representación para el límite de una función	*Acciones* DG(1) *y Proceso* DG(3C)

Fuente: Elaboración propia.

4.3.2. El profesor como predictor: Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)

A continuación, se presentan resultados obtenidos a partir del profesor informante, los cuales provienen de las actividades que resolvió, de las predicciones realizadas y de los argumentos que proporcionó durante la entrevista que se llevó a cabo luego de que el profesor resolviera las actividades. Dichos resultados corresponden específicamente al subdominio KFLM.

Dentro del Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas movilizado por el profesor, se evidenciaron dos categorías correspondientes al subdominio en

mención: Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas y Maneras en que los estudiantes interactúan con el Contenido Matemático.

De este modo, se procede a mostrar en detalle el análisis de los resultados correspondientes a la caracterización del KFLM, mostrando las respectivas evidencias de conocimiento obtenidas a través de un análisis realizado con el sistema de categorías del MTSK, luego, dichas evidencias serán descritas haciendo uso de la teoría APOE y de la DG.

KFLM-1: Conoce y prevé los errores y fortalezas que pueden evidenciar los estudiantes al describir el comportamiento de una función

Esta evidencia guarda relación con el inciso (d) de las tres actividades, en el que se pide al profesor que "describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x". El profesor considera que este ítem sería el más complicado a resolver por sus estudiantes, mencionando que:

> *"Lo más probable sería que en el inciso (d) tengan una traba, pero no porque no identifiquen la función, a veces lo que más se les complica es el manejo algebraico." (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

Queda en evidencia que, el profesor relaciona dicho ítem con que sus alumnos describan el comportamiento de la función en términos de procedimientos algebraicos, o como se evidencia a continuación, en describir su comportamiento en términos de crecimiento o decrecimiento, así como el cálculo de su ecuación, dominio y rango.

> *"Para la definición de las dos funciones, esperaría que determinaran la función de la recta, por ejemplo, que es decreciente, que determinarán su pendiente, la intersección de la recta, con el objetivo de determinar la función a través del intervalo de uno a cuatro…" (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

En las actividades 1 y 3, el docente aseguró que sus estudiantes calcularían una expresión algebraica, el dominio, el rango y las intersecciones de la función. A partir de esto, se puede afirmar que, cuando el docente intenta predecir lo que harán sus estudiantes se ve influenciado por la gráfica de la función y, entonces, en su predicción se ven argumentos que están relacionados con el comportamiento de la función, pero que se alejan del Proceso de aproximación que ocurre en el dominio y en el rango de la función (Procesos DG3(A) y DG3(B) de la DG). Es decir, a pesar de que se le pregunta por el comportamiento en términos de la aproximación, el docente considera que sus estudiantes calcularán la expresión algebraica de la función, su dominio, rango, intercepciones, etc., que posiblemente corresponda a lo que habitualmente hacen en clase. Todo

esto, corresponde a Acciones del concepto de función que el profesor considera que sus estudiantes realizarán para describir su comportamiento.

Del mismo modo, en diversas ocasiones el profesor da evidencias de un conocimiento que se relaciona con los errores que él considera que van a cometer sus estudiantes cuando describen el comportamiento de determinadas funciones en actividades similares a las aplicadas en esta investigación. Por ejemplo, errores al calcular el dominio o el rango de la función, al evaluar el límite de la función. Anticipa que, cometerán errores debido a que los alumnos esperan encontrar una sola expresión algebraica para una función, situación que no ocurre en la actividad N°1 pues es una función definida por partes:

> *"Pensar que el comportamiento de la función es único en todo el segmento, ese podría ser un error. De repente ellos van a querer involucrar a una función que nos dé esos valores de acuerdo con seguir los patrones de la tabla. De igual manera, intentar o no definir correctamente el dominio, es decir, que no identifiquen bien o correctamente de que intervalo a qué intervalo es. También, en la evaluación del límite considero que no harían la evaluación del límite tanto por la izquierda como por la derecha" (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

KFLM-2 y KFLM-5: Conoce y prevé si los estudiantes tendrán dificultades para identificar la aproximación de los valores de x, así como la manera en que perciben la aproximación en el dominio de la función

En este resultado se relacionan dos evidencias de conocimiento, pertenecientes a dos categorías diferentes del KFLM (ver Tabla 12) y que se vinculan con lo que se pide realizar en el inciso (b) de las actividades propuestas al profesor. El inciso en mención solicita al informante: "describa el comportamiento de los valores de x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = a$". En la segunda actividad el profesor predice que:

> *"…no habría ningún problema, considero que esa parte si la pudiesen realizar, identificarían que x, en este caso lo que se le está pidiendo, cuando yendo a -1, pues es que se está aproximando a ese -1." (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

Así, el profesor afirma que sus estudiantes darán cuenta de la aproximación a $x = -1$ en el dominio de la función, es decir, que mostrarán evidencia del Proceso de aproximación en el dominio (DG3(A)). Vale la pena mencionar que, el profesor no informa sobre lo que espera que sus estudiantes realicen para la estructura DG3(B), es decir, con respecto a la aproximación en el rango de la función que se solicita en el inciso (c) de las actividades.

KFLM-3 y KFLM-6: Conoce y prevé dónde los estudiantes tienen dificultades, así como las estrategias convencionales que los estudiantes utilizan cuando calculan el límite de una función

En esta ocasión, se identifica nuevamente una relación entre dos evidencias de conocimiento, cada una perteneciente a una de las dos categorías analizadas en este estudio (ver Tabla 12), que guardan al mismo tiempo relación con el inciso (e) de las actividades. En este inciso se pide al profesor que calcule el límite de la función en el valor de interés. Así, para la predicción, el profesor considera que sus estudiantes tendrán dificultad para comprender el concepto de límite como una aproximación, mencionando lo siguiente:

> *Se guiarían mucho por la gráfica, primero resolverían el límite, pero seguramente dirían que cuando* $x = 4$ *la función es cero, eso es lo que ellos asumirían que cuando* $x = 4$ *el punto es* $(4,0)$*, sin embargo, como que todavía no se concibe el concepto de límite correctamente. […] creo que eso es lo que les costaría un poco de trabajo, identificar que es una aproximación (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

Con respecto al proceder de sus estudiantes, el docente considera que para calcular el límite de la función pueden tener una dificultad, ya que para afirmar si este límite existe no lo harán estudiando el comportamiento de los valores cercanos al valor de interés por la izquierda y por la derecha, es decir, por límites laterales, afirmando que:

> *…En la evaluación del límite considero que no harían la evaluación del límite tanto por la izquierda como por la derecha, ese también sería uno de los errores que posiblemente tengan. (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

Con base en lo anterior, se puede afirmar que el profesor considera que sus estudiantes realizarán Acciones al calcular el límite de la función, pero que no coordinarían los Procesos de aproximación por la derecha y por la izquierda (DG3(C)).

El profesor continúa manifestando el hecho de que considera que el concepto de aproximación y la noción que tienen los alumnos de este representa una dificultad para sus estudiantes, afirmando nuevamente que ellos considerarán que el valor del límite es la imagen del punto de interés, anticipando que tendrán dificultad para entender la causalidad que se produce en la aproximación que ocurre tanto en el dominio como en el rango de la función.

> *Si le ponemos una función, los estudiantes saben que es una parábola, porque únicamente conocen el registro gráfico, pero no conocen cómo se aproximan los puntos […] ellos definen que ese es el valor de ese punto, entonces, creo que eso es lo que les costaría un poco de trabajo, identificar que es una aproximación, que mientras más te aproximes a cuatro, pues más vas a llegar en tu imagen, vas a tender*

> *a cero, pero que no llegas a ese punto, sino digamos que vas a aproximarlo. (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022)*

KFLM-4: Conoce la forma cómo interactúan sus estudiantes con una tabla de valores

Como en los casos anteriores, esta evidencia también se relaciona con uno de los incisos de las actividades, en esta oportunidad con el inciso (a), en el que se pide al profesor: "Determine los valores $f(x)$ para los valores de x que se señalan en la siguiente tabla", es decir, que evalúe en la función los valores de x propuestos en una tabla de valores. Cabe destacar que, la función es presentada en su forma algebraica (como es el caso de la actividad N°2) o en su registro gráfico (como ocurre con las actividades N°1 y N°3).

Sobre esto, el profesor considera que realizarlo será una fortaleza que tendrán sus estudiantes. Afirmando que, es un registro que conocen y que usualmente trabajan en las actividades que resuelven en el aula de clase. De hecho, argumenta que, en caso de que exista un error por parte de ellos, este puede atribuirse al uso de la calculadora en la evaluación de los valores de interés pertenecientes al dominio de la función. De aquí, el profesor da a conocer que él considera que, cuando la función es presentada en registro gráfico, entonces la tabulación no será un inconveniente pues ellos recurrirán a la gráfica de esta.

> *Con respecto a la tabulación, pues no, no tendrían inconveniente, solo que lo metan mal a la calculadora, eso sería un inconveniente, porque no notarían el comportamiento de la función. Ese sería más con respecto al uso de la herramienta". (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022)*

Así, para realizar esta tabulación el profesor espera que sus estudiantes no tengan ningún inconveniente y la realicen de manera correcta, por lo que, de manera implícita, predice que sus estudiantes mostrarán evidencias de la estructura mental Acción correspondientes a las estructuras DG(1) y DG(2). El profesor afirma:

> *"…como ya tenemos la gráfica, entonces, si espero que identifiquen puntos en la gráfica para poder completar la tabla, […] por lo regular, siempre inician con la tabulación cuando les das una función, ellos inician de manera automática con la tabulación, […] entonces, con respecto a la tabulación, pues no, no tendrían inconveniente." (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

De este modo, se evidencia que el profesor conoce la manera en que sus estudiantes interactúan con una tabla de valores, ya que él menciona que observando la gráfica de la función ellos podrán identificar las imágenes de la función para el valor de *x* en cuestión, esto sería en el caso de que la función venga representada en su registro gráfico o, en su defecto, que los

estudiantes hayan trazado un esbozo de la gráfica de la función. Ahora bien, para actividades en las cuales la función viene representada en el registro algebraico (como es el caso de la segunda actividad), el profesor espera que lleven a cabo la tabulación evaluando en la expresión algebraica los valores de x y que en caso de presentar un inconveniente en dicha evaluación estaría relacionado con el uso de la calculadora, al ingresar de forma incorrecta algún valor.

También, el profesor espera que, por medio de la tabulación, sus estudiantes puedan describir el comportamiento de la función, es decir, que utilizarían lo resuelto en el inciso (a) para responder lo solicitado en el inciso (d). El profesor hace énfasis en utilizar dos puntos de la tabla de valores para calcular la pendiente, la ecuación de la recta, y continuar con el dominio, el rango de la función. Esto lo enfatiza en la primera actividad donde los tramos de la función son rectas.

> *"Entonces, ya teniendo la tabla, ellos pueden describir cuál es el comportamiento de la función. Sería lo que más pudiesen hacer, utilizando dos puntos de las rectas […] habría que ver o sería interesante ver si le cambiamos la forma de la función, que no fuera una recta porque ahí sí cambiaría su definición de la función porque ya no sería la recta que ellos común o fácilmente pueden calcular, si le ponemos un segmento de parábola o un segmento de una función cúbica, pues sí cambiaría su definición y buscarían la forma de llegar a esa función" (Entrevistado, entrevista personal, abril de 2022).*

Con base en el fragmento anteriormente presentado, queda en evidencia que el profesor espera que sus estudiantes, usando la tabla, busquen la expresión algebraica de la función para describir su comportamiento.

En la Tabla 12 se resumen los resultados de este subdominio. Inicialmente, en la primera columna se observa las categorías del KFLM para las cuales el profesor exhibió evidencias de conocimientos en la resolución de las actividades y en la entrevista. En la segunda columna se puede observar dichas evidencias en forma de descriptores que nos exhiben ese conocimiento que es propio del profesor informante y que guarda relación con las predicciones que realizó. Finalmente, en la tercera columna se encuentran las estructuras mentales que el profesor considera que pueden exhibir sus estudiantes cuando resuelven las actividades sobre el límite de una función que él mismo resolvió previamente.

Tabla 12
Evidencias del KFLM y estructuras mentales que el profesor predice

Categorías del KFLM	Evidencias de conocimiento	Estructura mental a la que hace referencia

Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje de las Matemáticas	1. Conoce y prevé los errores y fortalezas que pueden evidenciar los estudiantes al describir el comportamiento de una función	*Acciones* (concepto de función)
	2. Conoce y prevé que los estudiantes tendrán dificultades para identificar la aproximación de los valores de *x*	*Proceso* DG(3A)
	3. Conoce y prevé que los estudiantes tienen dificultades cuando calculan el límite de una función	*Acciones*
Maneras en que los estudiantes Interactúan con el Contenido Matemático	4. Conoce la forma cómo interactúan sus estudiantes con una tabla de valores	*Acciones* DG(1) y DG(2*)*
	5. Conoce la manera en que los estudiantes perciben la aproximación de los valores de *x* en el dominio de la función	*Proceso* DG(3A)
	6. Conoce las estrategias convencionales que los estudiantes utilizan para resolver ejercicios relacionados con el límite de una función	*Acciones*

Fuente: Elaboración propia.

Algunas de las estructuras mentales que el profesor predijo que mostrarían sus estudiantes no están contempladas en la Descomposición Genética de Cottrill et al. (1996), como es el caso de la Acción de calcular la expresión algebraica, el dominio y el rango de la función a la que hace referencia para la evidencia KFLM-1 y la Acción de calcular el límite por sustitución que se relaciona con las evidencias KFLM-3 y KFLM-6.

Como se sabe, el profesor informante de esta investigación proporcionó predicciones con respecto al comportamiento matemático de sus estudiantes al resolver actividades relacionadas con el límite de una función. También, por las características del subdominio KFLM, sabemos que aquí el profesor debe anticiparse a la manera de proceder de sus estudiantes, identificando de esta manera sus conocimientos previos, errores, dificultades, fortalezas, estrategias, entre otros aspectos. Por ende, consideramos pertinente señalar que, de manera explícita, muchas de las evidencias de conocimiento proporcionadas por el profesor se ubican dentro de este subdominio.

CONCLUSIONES

En este apartado se presentan las conclusiones que se derivan de los resultados de la presente investigación. En primer lugar, se mostrarán las que resultan de la caracterización que se realizó con la perspectiva del Modelo MTSK. Luego, se darán a conocer las conclusiones sobre la comprensión que mostró el profesor y la que predijo para sus estudiantes, desde la Teoría APOE. Finalmente, las conclusiones resultantes de haber establecido una forma de trabajo entre ambos marcos teóricos y la caracterización que permitió realizar.

Primero, a partir de *la caracterización del conocimiento del profesor* por medio del Modelo MTSK, se puede afirmar que se evidenció la movilización de algunos elementos de su conocimiento, que se emplean cuando el profesor predice el quehacer matemático de sus alumnos, relacionados con los dos dominios de este conocimiento. En el caso del Conocimiento Matemático, el profesor evidenció el Conocimiento de los Temas, por ejemplo, se identificó que el profesor conoce propiedades de una función que se relacionan con su comportamiento y la definición de límites laterales, las demás evidencias se pueden observar en la Tabla 11.

Ahora, para el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido el profesor evidenció el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas, el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas. De este modo, para el KFLM, por ejemplo, evidenció conocer que los estudiantes tienen dificultades cuando calculan el límite de una función, así como la forma en que interactúan con una tabla de valores. En el KMT, mostró evidencias de conocer el acompañamiento docente como estrategia de enseñanza y tareas acordes con la enseñanza del límite de una función que propician el aprendizaje en los estudiantes. Luego, en el KMLS se tiene que el profesor conoce la secuenciación del límite de una función con los temas previos y consecuentes. Para una lista más detallada de las evidencias de conocimiento relacionadas con estos subdominios se recomienda ver la Tabla 12.

Con estos resultados se exhibe la importancia que tiene para el profesor llevar a cabo predicciones sobre el comportamiento matemático de sus estudiantes, teniendo en cuenta que, dentro de este proceso de predicción, el profesor pone en juego diversos tipos de conocimientos

(matemáticos y didácticos) que, a su vez, ponen de manifiesto su experiencia y práctica docente, este hecho se verifica en las investigaciones realizadas por Fernández et al. (2015), Llinares et al. (2016), Fernández et al. (2018), Montero y Callejo (2019) y Gómez (2019). En cada una de estas investigaciones, el objeto de estudio también se centra en la forma en que los profesores se anticipan a la posible manera de proceder de sus estudiantes.

Además, se considera que este proceso de anticipación que lleva a cabo el profesor enriquece su forma de enseñar matemáticas, ya que en acciones propias de este, como planear clases, diseñar actividades, proponer ejercicios, diseñar evaluaciones, explicar un nuevo tema, él estará pensando cómo actuarán sus estudiantes, pensará: ¿cuáles son sus conocimientos previos?, ¿cómo lo resolverán?, ¿qué errores pueden cometer?, ¿dónde tendrán dificultades?, ¿cómo identifico sus fortalezas?, ¿qué estrategias van a utilizar para resolver cierto ejercicio?, entre otras. Estos son cuestionamientos que, sin duda alguna, posibilitarán en gran manera el diseño de sus actividades académicas y que también se tienen en cuenta en el enfoque teórico del MTSK. Como consecuencia de esto, se espera contribuir en el aprendizaje de los alumnos.

Cabe destacar que, realizar esta caracterización por medio de descriptores que exhiben las evidencias de conocimiento mostradas por el profesor fue posible gracias al sistema de categorías que subyacen en el modelo MTSK. Recordemos que este conocimiento le permite al profesor secuenciar y anticiparse a cómo los estudiantes desarrollarán el trabajo matemático (Flores-Medrano et al., 2015), por lo que, sin duda alguna, el modelo MTSK hizo posible caracterizar cada uno de los conocimientos que el profesor puso en juego mientras predecía lo que matemáticamente harían sus estudiantes.

En adición, es oportuno mencionar el papel de los descriptores en esta investigación, teniendo en cuenta que, surgieron específicamente del análisis, como respuesta a la necesidad de describir las evidencias de conocimiento exhibidas por el profesor en sus respuestas de las actividades y en la entrevista. Asimismo, se destaca que las actividades resueltas por el profesor fueron una pieza clave en la caracterización de su conocimiento, ya que permitieron contextualizar al docente con el tema, con el tipo de ejercicios y, al mismo tiempo, le permitieron pensar cómo lo harían sus estudiantes, es decir, desde el punto de vista matemático cómo creía que iban a actuar sus alumnos. De este modo, en complemento con la entrevista semiestructurada, se pudo evidenciar el conocimiento que el profesor puso en juego.

Ahora, tomando como base *el análisis de la comprensión que mostró el profesor y la que predijo para sus estudiantes cuando resolvió las actividades*, a través de la Teoría APOE, en primer lugar, se puede afirmar que el profesor realiza la Acción de evaluar la función en puntos sucesivamente próximos al valor de interés en los registros algebraico y gráfico, además, predice que sus estudiantes no tendrán inconveniente en mostrar esta Acción.

En segundo lugar, se puede afirmar que el docente evidenció el Proceso de aproximación en el dominio y el rango de la función en el registro gráfico y numérico. Con respecto a la predicción del comportamiento matemático de sus estudiantes, el profesor considera que para el Proceso de aproximación en el dominio de la función sí podrán hacerlo, sin embargo, comenta que adicionalmente calcularán la pendiente, el dominio y el rango de la función, entre otros. Siguiendo con la predicción y haciendo énfasis en el Proceso de aproximación en el rango, se puede decir que el profesor no comentó al respecto, y este hecho se puede asociar a que el docente, a pesar de que se le preguntaba por el proceso de aproximación o por el límite de la función, sus respuestas apuntaban al tipo de actividades, que según lo mencionado por él, está acostumbrado a trabajar con sus estudiantes. Dichas actividades consisten en que, a partir de la gráfica, sus estudiantes describen el comportamiento de la función, en términos de su ecuación, dominio, rango, crecimiento, decrecimiento, entre otros.

Adicionalmente, se concluye que cuando la función viene dada en el registro gráfico, el docente describe el comportamiento de dicha función enfocándose en calcular su ecuación, el dominio, y argumenta en qué parte de este la función es creciente, constante o decreciente. Por el contrario, cuando la función viene dada en el registro algebraico, el profesor da evidencias de asociar que el Proceso de aproximación en el dominio produce el Proceso de aproximación en el rango a través de la función. Ahora bien, esta diferencia sustancial entre los dos tipos de descripción que da el docente, de acuerdo con el tipo de registro en el que viene dada la función, se considera que se debe a que, en el segundo caso, al no tener la gráfica de la función, el docente recurre a la tabulación que realizó, en la cual, aparecen los valores evaluados, lo cual le permite identificar a qué valor se aproximan, y a su vez, cómo se relacionan estos procesos de aproximación. Luego, con relación a lo que predice que harán sus estudiantes, se tiene que lo que el docente argumenta guarda relación con la forma en que él trabajó, ya que considera que sus alumnos utilizarán la gráfica para calcular la pendiente, la ecuación, su intercepción, el dominio, el rango, entre otros.

Cabe señalar que, estas actividades permiten analizar si el profesor reconoce las características dinámicas del límite de las funciones involucradas en el registro gráfico. Sin embargo, las actividades habituales como: dada la gráfica hallar la expresión algebraica, resultaron ser un obstáculo. Esto coincide con los resultados de otras investigaciones donde se han evidenciado dificultades para la comprensión del límite de una función en el registro gráfico (Pérez, 2019; Analco y Hernández-Rebollar, 2020; Hernández-Rebollar et al., 2023). Se puede añadir que el docente, al momento de calcular el límite de la función, prescinde de la tabulación realizada y de la gráfica de la función, y realiza el cálculo con métodos algebraicos, lo cual coincide con lo reportado por La Plata (2014).

Finalmente, *con relación a la caracterización del conocimiento del profesor desde el MTSK y la Teoría APOE*, se concluye que cuando el profesor es *resolutor* pone en juego su Conocimiento Matemático, mostrando evidencia del Conocimiento de los Temas, y exhibiendo estructuras mentales, tales como Acciones y Procesos. Por otro lado, cuando el profesor pone de manifiesto su rol de *predictor* exhibe su Conocimiento didáctico del Contenido, es decir, su Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas, específicamente, su conocimiento sobre las fortalezas y debilidades que tienen sus estudiantes cuando están aprendiendo, así como las maneras en que sus estudiantes interactúan con el contenido matemático que estén desarrollando. Además, él anticipa que sus estudiantes mostrarán las estructuras de Acción y Proceso en ambas categorías del KFLM. Para una explicación más detallada y resumida de esta relación se recomienda ver la Tabla 11 y la Tabla 12.

Es pertinente mencionar que, con la caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas y con la identificación de las estructuras y mecanismos mentales que mostró el profesor, así como las que predijo que pondrán en juego sus estudiantes, fue posible describir a profundidad los conocimientos exhibidos por el profesor. Tomando como base los descriptores que surgieron en el análisis del MTSK del profesor, los cuales se complementaron con las estructuras mentales identificadas en el análisis de los datos desde la Teoría APOE.

De este modo, se considera que este podría ser un primer acercamiento a una forma de trabajo que se puede dar entre la Teoría APOE y el Modelo MTSK, que permite explicar con mayor profundidad aquel conocimiento que es propio del profesor y que se puede caracterizar de manera sistemática con ayuda del sistema de categorías del MTSK y de las estructuras y mecanismos mentales que subyacen en la Teoría APOE.

Por último, se reitera la importancia de que en el profesorado se reconozca la necesidad de poseer un conocimiento específico que le posibilite al profesor de matemáticas interpretar lo que hacen sus estudiantes cuando resuelven ejercicios, tareas o actividades matemáticas, así como, anticipar el pensamiento de sus estudiantes y predecir su posible comportamiento ante las distintas tareas. Lo anterior es con la finalidad de tener un grado de control en cuanto a las formas en que sus estudiantes aprenden determinado contenido matemático, las causas de sus errores y/o dificultades y, a su vez, potencializar sus estrategias y fortalezas.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Analco, A., y Hernández-Rebollar, L. (2020). Comprensión del concepto de límite función en estudiantes de Actuaría, Física y Matemáticas. En F. Macías y D. Herrera. (Eds.). *Matemáticas y sus aplicaciones 15* (pp. 51-73). Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: ¿What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings.* Open university press.

Bassey, M. (2003). *Case study research in educational settings.* Open University Press

Bryman, A. (2004). *Social research methods* (2.ª ed.). Oxford University Press.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti. (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). ERME.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M.A. (Eds.). (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* Universidad de Huelva Publicaciones. https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Carrillo, J., Contreras, L. C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, y I. Segovia (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Comares.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Daza, G. y Garza, B. (2018). Actitudes hacia el Cálculo Diferencial e Integral: Caracterización de Estudiantes Mexicanos del Nivel Medio Superior. *Bolema, 32(*60), 279 – 302. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a14

Delgado-Rebolledo, R. (2020). *Una propuesta de categorización del Conocimiento de la Práctica Matemática de profesores universitarios.* [Tesis doctoral, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. Bibliotecas PUCV.

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Arias Montano. http://hdl.handle.net/10272/11456

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 10*(1), 53-77. https://doi.org/10.30827/pna.v10i1.6095

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L. y Moreno, M. (2015). ¿Cómo estudiantes para profesor comprenden el aprendizaje de límite de una función? En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 249-257). SEIEM

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., & Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las ciencias, 36*(1), 143-162. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2291

Fernández-Plaza, J. A. (2010). *Unidad didáctica: límite y continuidad de funciones.* [Tesis de maestría, Universidad de Granada]. Repositorio Institucional de la Universidad de Granada.

Flores, E., Escudero, D. I. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275- 282). SEIEM.

Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Montes, M., & Carrillo, J. (2015). ¿Cómo se relaciona el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de las matemáticas con su entendimiento sobre los espacios de trabajo matemático? En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, & P. R. Richard (Eds.), *Cuarto Simposio Internacional ETM* (pp. 473-484). Instituto de Matemática Interdisciplinar.

Gómez, D. (2019). *Conocimientos que utilizan los profesores al predecir el posible comportamiento matemático de estudiantes en una actividad de introducción a sólidos de revolución* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional BUAP.

Guerrero, J. y Hernández-Rebollar, L. (2020). Análisis de actividades didácticas para el estudio del límite de una función por medio de la teoría APOE. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 5*, 1-19.

Hernández-Rebollar, L.A., Trigueros-Gaisman, M., Ruiz-Estrada, H. y Juárez-Ruiz, E. (2023). La concepción dinámica del límite de una función desde APOE y los registros semióticos. *Enseñanza de las Ciencias*, *41*(2), 117-135. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5796

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed.). McGraw-Hill Interamericana.

Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la Investigación: Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.* Mc Graw Hill Education.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual*, 91-111.

Koetting, J. R. (1984). *Foundations of naturalistic inquiry: developing a theory base for understanding individual interpretations of reality.* Association for Educational Communications and Technology.

La Plata, C. S. (2014). *Errores en torno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real.* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio de Tesis PUCP.

Llinares, S., Fernández, C. & Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 12* (8), 2155-2170. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1295a

Montero, E. y Callejo, M. L. (2019). Cambios en cómo estudiantes para maestro anticipan respuestas de niños de Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 433-442). SEIEM.

Morante, J. (2020). *Una secuencia didáctica para la construcción de la definición formal del límite de una función basada en teoría APOE* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional BUAP. https://www.fcfm.buap.mx/posgrados/assets/docs/catalogo-tesis/mem/2020/JoseDavidMoranteRodriguez.pdf

Muñoz-Catalán, M.C. (2010). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Arias Montano.

Muñoz-Catalán, M. C. (2021). Reflexiones para una fundamentación del estudio de caso como diseño metodológico en Educación Matemática. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 65 – 80). Valencia: SEIEM

Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *RELIME, 13*(4-II), 373-385. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33558827009

Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruíz, E., & Flores-Medrano, E. (2023). Relaciones direccionales intra-dominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la localización en

el plano. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *24*, 57-74. https://doi.org/10.35763/aiem24.4360

Padilla-Escorcia, I. A. y Acevedo-Rincón, J. P. (2021). Conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno: Mediaciones con TIC. *Eco Matemático, 12*(1), 93-106. https://doi.org/10.22463/17948231.3072

Pérez (2019). Implementación de una secuencia didáctica para el concepto límite de una función basada en la Teoría APOE. [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional BUAP.

Piaget, J. & García. R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. (H. Feider, Trans.). Columbia University Press.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una Descomposición Genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(1), 89-112.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(3), 355-382.

Sánchez, J. (2022). *¿Cómo impacta el conocimiento que tiene un profesor acerca de la teoría APOE sobre su conocimiento especializado?* Tesis de maestría. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Schoenfeld, A. (2010). *How we think.* Routlege.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, *15*(2), 4-14

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos* (4.ª ed.). Morata.

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A. y Müller, D. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Premisa*, *29*, 9-19. http://funes.uniandes.edu.co/23103/1/Vrancken2006Dificultades.pdf

ANEXOS

Para acceder a los anexos de esta investigación se recomienda escanear el código QR.

Actividades resueltas por el profesor	Transcripción de la entrevista