



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA**



**INSTITUTO DE FÍSICA
"LUIS RIVERA TERRAZAS"**

**"ENFOQUE ALGEBRAICO A LA FUNCIÓN DE ONDA
DE GORDON-VOLKOV."**

**TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

No. de CVU: 1078428

**PRESENTA
ISAÍAS LÓPEZ GARCÍA**

JULIO 2022

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA**

**INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"
"ENFOQUE ALGEBRAICO A LA FUNCIÓN DE ONDA DE
GORDON-VOLKOV."**



**TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

No. de CVU: 1078428

**PRESENTA
ISAÍAS LÓPEZ GARCÍA**

JULIO 2022



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"ENFOQUE ALGEBRAICO A LA FUNCIÓN DE
ONDA DE GORDON-VOLKOV."**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
**MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA
ISAÍAS LÓPEZ GARCÍA

DIRECTORES DE TESIS
DR. ALEJANDRO PALMA ALMENDRA

No. de CVU: 1078428

JULIO 2022

Dedicatoria

Esta tesis esta dedicada a mi familia.

Agradecimiento

Le agradezco de todo corazón a la paciencia eterna de mi asesor Dr. Palma Almendra, y el apoyo que me brindo durante esta experiencia.

También agradezco al apoyo emocional de mi familia, incluyendo a mi abuelita Beatriz Peniche, siempre con palabras de apoyo y un refugio a donde huir.

Agradezco a mis amigos Obed Pérez, Luecero Torres, Abraham Carrillo, Rodrigo Mojica, Montserrat Crespo, Fabiola Flores, Isabel Ávila, y todas las demás almas que me mantuvieron cuerdo y mi mente a flote durante toda la maestría.

Finalmente quiero agradecer a la vida, que, a pesar de tener tantas posibilidades distintas, me llevan siempre a donde tengo que estar.

Índice general

Dedicatoria	1
Agradecimiento	2
Índice	4
Lista de Figuras	5
1. Resumen	6
2. Introducción	8
2.1. Objetivos	9
2.2. Hipótesis	9
3. Marco Teórico	10
3.1. Puntos Importantes y Notación	10
3.2. Invarianza, Simetría y Covarianza	13
3.3. Transformaciones de Lorentz	14
3.4. Grupos	15
3.4.1. Generadores	17
3.4.2. Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff	18
3.4.3. Lemas de Baker-Campbell-Hausdorff	19
3.4.4. Grupos de Lie/Álgebra de Lie	22
3.4.5. Espacios Topológicos	24
3.4.6. Variedad Matemática	24
3.4.7. Grupo de Lie	25
3.5. Teoría Electromagnética	26
3.5.1. Función Hamiltoniana de Campos Electromagnéticos	
Clásicos	26
3.5.2. Norma de Coulomb	30
3.5.3. Energía Ponderomotriz de un Electrón	31
3.6. Mecánica Cuántica	33

3.6.1. Momento Angular y Spin en Mecánica Cuántica	36
3.6.2. Ecuación de Schrödinger con Potencial Eléctrico	38
3.6.3. Transformaciones de Norma	40
3.6.4. Marco de Kramers-Henneberger	43
3.6.5. Ecuaciones de Pauli	45
3.7. Ecuaciones Relativistas de Klein-Gordon y Dirac	47
3.7.1. Ecuación de Klein-Gordon	47
3.7.2. Ecuación de Dirac, Soluciones de Gordon-Volkov	51
3.7.3. Función de Onda de Gordon-Volkov	59
4. Metodología	62
4.0.1. Método de Wei-Norman	62
5. Resultados	65
5.1. Sistema Físico	65
5.1.1. Nuestro Sistema	66
5.2. Norma de Velocidad Reducida	69
5.3. Norma de Velocidad	71
5.4. Norma de Longitud	74
5.5. Marco de Kramers-Henneberger	77
6. Conclusiones	80
6.1. Discusión	80
6.1.1. General	80
6.1.2. Norma de Velocidad Reducida	80
6.1.3. Norma de Velocidad	81
6.1.4. Norma de Longitud	81
6.1.5. Marcos de Kramers-Henneberger	81
6.2. Conclusiones	82
6.3. Futuras Investigaciones	83
A. Integrales Necesarias	88

Índice de figuras

3.1. Cuadrado en espacio cartesiano	16
3.2. Cuadro sin rotar y cuadro rotado 45 grados, $\frac{\pi}{4}$ radianes.	16

Capítulo 1

Resumen

En esta tesis se explican varios conceptos teóricos necesarios para el entendimiento de los estados de Volkov no relativistas. Por ejemplo, se desarrollan conceptos matemáticos como grupos, notaciones tensoriales, invariancia, etc. Además, se plantean las teorías físicas necesarias para el entendimiento del tema, como son las teorías electrodinámicas necesarias, culminando con una revisión de los puntos de interés de la ecuación de Klein-Gordon y la ecuación de Dirac, sobre la cual provienen las soluciones de Volkov, pero puntualizando la función de Gordon-Volkov no relativista.

Posteriormente, se presenta la base del desarrollo matemático de la tesis, basado en el método de Wei-Norman, el cual es un método algebraico para encontrar soluciones a cierto tipo de ecuaciones diferenciales de manera exacta. El método será aplicado a una ecuación de Schrödinger dependiente de tiempo, bajo influencia electrodinámica, en tres distintas normas (longitud, velocidad y velocidad reducida), así como en el marco de referencia de Kramers-Henneberger. Dicha solución algebraica se le aplica la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, para obtener una solución única en forma de función de onda de Gordon-Volkov.

Finalmente se concluye con una discusión de los resultados, las conclusiones del autor y futuras posibles avenidas de investigación.

Epígrafe

No one understands quantum mechanics.

-The Character of Physical Law, Richard P. Feynman

The best that most of us can hope to achieve in physics is simply to misunderstand at a deeper level.

-Wolfgang E. Pauli, Berkeley, California (May 1958)

Capítulo 2

Introducción

La función de onda de Gordon-Volkov no relativista es equivalente a las expresiones relativistas derivadas por Gordon [1] y Volkov [2] para partículas cargadas sin spin y spin un medio, respectivamente. Estos hallazgos, tienen su origen en la década de 1920; sin embargo, siguen siendo temas de interés en la mecánica cuántica.

La inspiración para esta tesis nació del estudio de resonancia en tunelamiento cuántico, en particular del artículo de Lefebvre [3], donde por medios clásicos, principalmente, utilizando ansatz encuentran las soluciones a funciones de onda que son estados de Volkov. El sistema que se analiza es el de barreras de potencial, por donde se realiza el tunelamiento, inmersas en dos campos electrodinámicos distintos, uno oscilante y otro estático.

Considerando lo anterior, esta tesis tiene como objetivo dar el primer paso en el hallazgo de los estados de Volkov exactos utilizando el método algebraico desarrollado por James Wei y Edward Norman [4], para encontrar la solución a la ecuación dependiente del tiempo de Schrödinger. Se procura obtener una comprensión necesaria de la teoría física en cuestión, incluyendo temas de mecánica cuántica electrodinámica, así como de mecánica cuántica relativista.

A través de esta tesis, se obtuvieron resultados factibles y utilizables sobre el sistema en cuestión. Se ejemplifica el método de Wei-Norman como una herramienta útil y versátil, que se puede emplear sobre una gran variedad de distintos sistemas, más allá del espectro del artículo de Lefebvre, y se adentra en tópicos de intereses variados para la mecánica cuántica.

2.1. Objetivos

Esta tesis tiene como objetivo encontrar de manera algebraica el operador de evolución temporal de una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo bajo 3 normas distintas y un cambio de marco de referencia para un sistema constituido por una barrera de potencial constante inmerso en dos campos eléctricos, uno constante y otro oscilante.

En particular para poder realizar este encargo se debe de primero identificar la ecuación de Schrödinger del sistema propuesto para las 3 normas: longitud, velocidad y velocidad reducida; así como para el marco de referencia que es el de Kramers-Henneberger.

Estas diferentes transformaciones dejan invariantes las observables, por lo cual deberían pertenecer a un grupo de Lie, el siguiente objetivo sería identificar el álgebra de Lie asociado a este grupo y confirmar que son un álgebra soluble.

Finalmente, utilizando lo obtenido anteriormente, el objetivo final es hallar el operador de evolución temporal utilizando el método algebraico desarrollado por James Wei y Edward Norman [4].

2.2. Hipótesis

La hipótesis de este trabajo es que se puede utilizar el método matemáticos desarrollado por Edward Wei y James Norman [4] al sistema propuesto por Lefevbre [3] para hallar de manera sencilla el operador de evolución temporal, la cual, debido a su naturaleza no relativista, es descrita por una función de onda de Gordon Volkov. Habiendo cumplido esto, se propone que este camino analítico sea aplicable a un número considerable de sistemas.

Capítulo 3

Marco Teórico

3.1. Puntos Importantes y Notación

Se usará la notación de cuatrivector contravariante:

$$x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} \equiv \{ct, x, y, z\}$$

Además, se utilizará la convención de Einstein para las sumatorias. Los índices con letras griegas indican una sumatoria desde el 0 hasta el 3, mientras que las letras latinas suman del 1 hasta el 3.

Notamos a cuatrivectores con letras normales y a los vectores con letras en negritas:

$$a = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$$

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

Se introduce el tensor métrico, en su forma covariante:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El vector de longitud se define como:

$$ds^2 = dx dx = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Y el tensor métrico contravariante, $(g^{\mu\nu})$, es de la forma:

$$g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\sigma} = (g^{-1})_{\mu\sigma} = \frac{\Delta_{\mu\sigma}}{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En donde $\Delta_{\mu\sigma}$ es el cofactor de $g_{\mu\sigma}$. Siendo éste un sub determinante, se calcula al eliminar la fila μ -ésima y la columna σ -ésima, se obtiene su determinante y se multiplica por la fase $(-1)^{\mu+\sigma}$. La "g" es sólo el determinante del tensor métrico. Para la métrica de Lorentz, el tensor métrico covariante y contravariante son idénticos:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$$

Para obtener el vector covariante desde la contravariante, se utiliza el tensor métrico para bajar los índices, esto es:

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = \{ct, -x, -y, -z\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$$

De manera similar, se puede obtener la forma contravariante de la covariante al subir los índices con el tensor métrico:

$$x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$$

La definición del cuatrivector de momento es:

$$p^\mu = \{E/c, p_x, p_y, p_z\}$$

El producto escalar, o interno, en cuatro dimensiones se define como:

$$p_1 \cdot p_2 = p_1^\mu p_{2\mu} = \frac{E_1}{c} \frac{E_2}{c} - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$$

Similarmente:

$$x \cdot p = x^\mu p_\mu = x_\mu p^\mu = Et - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$$

En su forma covariante, el operador de cuatri-momento se denota como:

$$\begin{aligned} \hat{p}^\mu &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\} \\ &\equiv i\hbar \nabla^\mu = i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial(ct)}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right\} \\ &= i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla \right\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Usando esas definiciones, el producto escalar del cuatri operador de momento se obtiene como:

$$\begin{aligned}\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu &= -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right) \\ &\equiv -\hbar^2 \square = -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right)\end{aligned}$$

en donde \square es el d'Alembertiano de cuatro dimensiones.

El cuatri potencial del campo electromagnético se define como:

$$A^\mu = \{A_0, \mathbf{A}\} = \{A_0, A_x, A_y, A_z\} = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (3.2)$$

También se pueden obtener las relaciones de conmutación entre el momento y la posición.

$$\begin{aligned}[\hat{p}^\mu, x^\nu] &= i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}, g^{\nu\sigma} x_\sigma \right] = i\hbar g^{\nu\sigma} \frac{\partial x_\sigma}{\partial x_\mu} \\ &= i\hbar g^{\nu\sigma} \delta_\sigma^\mu = i\hbar g^{\nu\mu}\end{aligned}$$

3.2. Invarianza, Simetría y Covarianza

Un objeto es invariante si no cambia bajo transformaciones, esto es:

$$F(\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}', \dots) = F(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots)$$

bajo la transformación $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots \rightarrow \mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}', \dots$ F es invariante.

La simetría es la invarianza bajo una clase de transformación, por ejemplo, si un sistema físico es invariante bajo rotaciones, entonces es simétrico bajo rotaciones.

Covarianza significa que el objeto toma una forma igual al ser transformado. Entonces, una ecuación covariante sería:

$$E = ax^2 + bxy + cz^4 \rightarrow E = ax'^2 + bx'y' + xz'^4$$

Bajo la transformación $x, y, z \rightarrow x', y', z'$ E es covariante.

3.3. Transformaciones de Lorentz

La relatividad espacial tiene dos postulados base:

- **El principio de Relatividad:** Las leyes de la física no cambian entre marcos de referencia inerciales (aquellos que se mueven a velocidad constante)
- **Invariancia de la velocidad de la luz:** La velocidad de la luz es la misma en todos los marcos de referencia inerciales.

Esto quiere decir que $ds^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ es la misma para todos los marcos de referencia, esto es:

$$ds'^2 = dx'_\mu dx'_\nu g^{\mu\nu} = ds^2 = dx_\mu dx_\nu g^{\mu\nu} \quad (3.3)$$

Las transformaciones permitidas en la relatividad especial son aquellas que dejan este producto escalar de Minkowski en el espacio-tiempo invariante.

Si Λ es una transformación que describe el cambio de un marco de referencia a otro, las coordenadas transformadas dx'_μ se pueden describir como:

$$dx_\mu \rightarrow dx'_\mu = \Lambda_\mu^\sigma dx_\sigma$$

Aplicando lo anterior a la condición de invariancia (3.3), tenemos que:

$$\begin{aligned} dx \cdot dx &= dx' \cdot dx' \\ \Rightarrow dx_\mu dx_\nu g^{\mu\nu} &= dx'_\mu dx'_\nu g^{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\sigma dx_\sigma \Lambda_\nu^\gamma dx_\gamma g^{\mu\nu} \\ \Rightarrow dx_\mu dx_\nu g^{\mu\nu} &= \Lambda_\sigma^\mu dx_\mu \Lambda_\gamma^\nu dx_\nu g^{\sigma\gamma} \\ \Rightarrow g^{\mu\nu} &= \Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\gamma^\nu g^{\sigma\gamma} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Considerando este tipo de transformaciones se definen las transformaciones de Lorentz. Escrita en su forma matricial, una transformación de Lorentz cumple que:

$$g = \Lambda^T g \Lambda \quad (3.5)$$

3.4. Grupos

La rama de las matemáticas que trata las simetrías, que son transformaciones que dejan invariantes a los objetos bajo dichas transformaciones, es la teoría de grupos. Los grupos tienen reglas (\circ) bajo las cuales los elementos del grupo interactúan, por ende, se define un grupo como un conjunto G , sobre el cual se le define una operación binaria \circ que actúa sobre esta, tal que el grupo (G, \circ) cumple con los siguientes axiomas:

- **Elemento identidad:** Si la transformación que se aplica es aquella que no cambia nada, esta transformación siempre es simétrica, por lo cual todo grupo necesita un elemento de identidad. Técnicamente, esto se expresa como: $\forall g \in G \exists e \in G \setminus g \circ e = g = e \circ g$.
- **Elemento inverso:** Si se transforma un objeto y luego se aplica una transformación que revierte la primera transformación, ésta siempre es simétrica, por lo cual todo grupo debe tener un elemento inverso. Técnicamente, esto se describe como: $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G \setminus g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$.
- **Cerradura:** Si se realiza una transformación simétrica y posteriormente otra transformación simétrica, en su totalidad se transformó simétricamente, esto significa que los grupos deben ser cerrados en sus transformaciones. Técnicamente, este se describe como: $\forall g_1, g_2 \in G \setminus g_1 \circ g_2 \in G$.
- **Asociatividad:** La combinación de transformaciones debe ser asociativa. Técnicamente, esto se describe como: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G \setminus g_1 \circ g_2 \circ g_3 = (g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$.

En relatividad especial, el grupo más famoso es el Grupo de Poincaré, el cual deja invariante la métrica de Minkowski. [\[5\]](#).

Un ejemplo sencillo de un grupo es un cuadrado en el espacio cartesiano, siendo G el conjunto de todos los puntos dentro del cuadro, como se muestra en la figura [3.1](#).

Si se define la operación de rotación respecto al origen de este conjunto, las simetrías se dan con las transformaciones que rotan el conjunto $\pm n\frac{\pi}{2}$ radianes. Esto crea un grupo en donde la operación identidad es la falta de rotación y, la operación inversa es rotar en el sentido contrario.

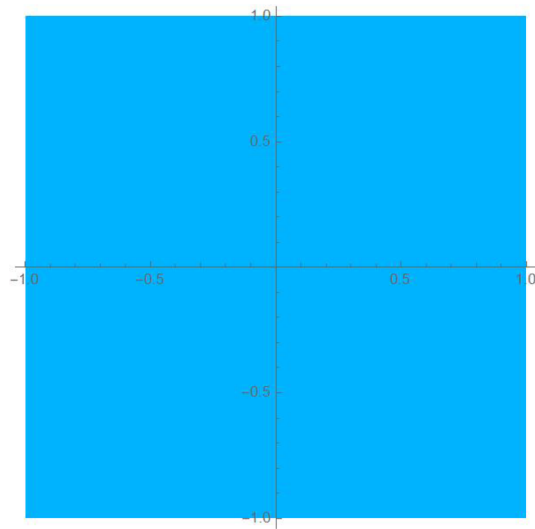


Figura 3.1: Cuadrado en espacio cartesiano

Se debe notar que en este ejemplo sencillo no todas las rotaciones dan transformaciones simétricas; por ejemplo rotar el cuadro de la figura [3.1](#) $\frac{\pi}{4}$ radianes con respecto al origen, no resulta en una invariancia, como se aprecia en la figura [3.2](#). A los grupos como estos se les denomina grupos discretos debido a que solo se obtienen transformaciones invariantes con algunas operaciones discretas.

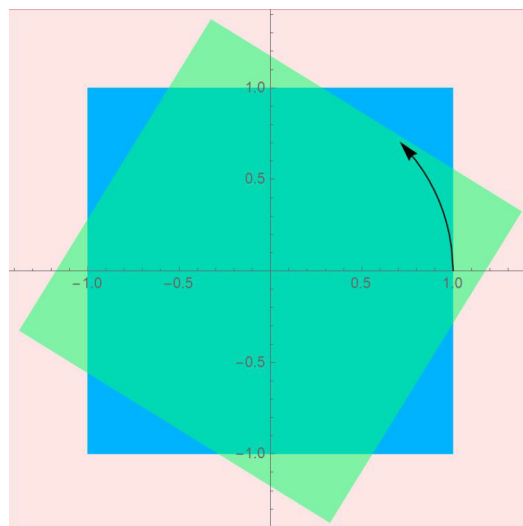


Figura 3.2: Cuadro sin rotar y cuadro rotado 45 grados, $\frac{\pi}{4}$ radianes.

En cambio, si se define la misma transformación de rotación con respecto al origen de un círculo, por ejemplo, éste queda invariante sin importar cuantos grados se rota. A estos grupos, en donde el parámetro de transformación es arbitrario, se les llaman grupos continuos.

3.4.1. Generadores

Para comprender el concepto de grupo, es necesario definir a los generadores de grupo y, por consiguiente, el concepto de continuidad. Continuidad significa que hay elementos del grupo que están arbitrariamente cercanos a la transformación de identidad (I), es decir:

$$g(\epsilon) = I + \epsilon X \quad (3.6)$$

En donde $g(\epsilon)$ es dicho elemento del grupo cercano a la identidad y ϵ es una cantidad diminuta, tendiendo a cero. En este caso, a X se le denomina generador. ϵ es sólo un número muy chico, por lo que se puede definir como el parámetro de alguna transformación θ dividida entre un número enorme, N , tan grande que éste tiende al infinito. Entonces, la ecuación (3.6) se puede escribir como:

$$g(\theta) = I + \frac{\theta}{N} X \quad (3.7)$$

Debido a las propiedades de los grupos, se puede obtener una transformación finita de esta transformación infinitesimal si se aplica una cantidad infinita de veces, o dicho de manera matemática:

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + \frac{\theta}{N} X \right)^N \\ \Rightarrow h(\theta) &= e^{\theta X} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por otro lado, si podemos utilizar la expansión de Taylor sobre $h(\theta)$ alrededor de la identidad, resulta que:

$$\begin{aligned} h(\theta) &= I + \frac{dh}{d\theta} \Big|_{\theta=0} \theta + \frac{d^2 h}{d\theta^2} \Big|_{\theta=0} \frac{\theta^2}{2} + \dots = \sum_n \frac{d^n h}{d\theta^n} \Big|_{\theta=0} \frac{\theta^n}{n!} \\ &= e^{\frac{dh}{d\theta} \Big|_{\theta=0} \theta} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Comparando las ecuaciones (3.8) y (3.9), podemos encontrar una relación para el generador:

$$\begin{aligned} e^{\theta X} &= e^{\frac{dh}{d\theta} \Big|_{\theta=0} \theta} \\ \Rightarrow X &= \frac{dh}{d\theta} \Big|_{\theta=0} \end{aligned}$$

3.4.2. Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

La fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff establece que:

$$\text{Si } X, Y \in L \Rightarrow e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X,[X,Y]]-\frac{1}{12}[Y,[X,Y]]+\dots} \quad (3.10)$$

En donde L es un álgebra de Lie.

Demostración

Para comenzar la demostración de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, se empieza por su logaritmo:

$$\begin{aligned} \log(e^A e^B) &= \log\left(\left(\sum_n \frac{A^n}{n!}\right)\left(\sum_m \frac{B^m}{m!}\right)\right) \\ &= \log\left(1 + A + B + AB + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}A^2B + \frac{1}{2}AB^2 + \dots\right) \\ &= \log\left(1 + \left(A + B + AB + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}A^2B + \frac{1}{2}AB^2 + \dots\right)\right) \\ &= \log(1 + C) \end{aligned} \quad (3.11)$$

en donde se define que $C \equiv A + B + AB + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}A^2B + \frac{1}{2}AB^2 + \dots$. A continuación utilizamos la expansión de Taylor para escribir la ecuación (3.11), de tal forma que:

$$\begin{aligned} \log(1 + C) &= \log(1 + C) \Big|_{C=0} + \frac{d(\log(1 + C))}{dC} \Big|_{C=0} C + \frac{1}{2!} + \frac{d^2(\log(1 + C))}{dC^2} \Big|_{C=0} C^2 + \dots \\ &= \log(1) + \frac{1}{C+1} \Big|_{C=0} C + \frac{1}{2} \frac{-1}{(C+1)^2} \Big|_{C=0} C^2 + \dots \\ &= C - \frac{1}{2}C^2 + \frac{1}{3}C^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Escrito de manera explícita, la ecuación (3.12) queda como:

$$\begin{aligned}
\log(e^A e^B) &= \left(A + B + AB + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + \dots \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(A + B + AB + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + \dots \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(A + B + AB + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + \dots \right)^3 + \dots \\
&= \left(A + B + AB + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 + \dots \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(A^2 + AB + A^2B + \frac{1}{2}A^3 + \frac{1}{2}AB^2 + \dots \right. \\
&\quad \left. BA + B^2 + BAB + \frac{1}{2}BA^2 + \frac{1}{2}B^3 + \dots \right. \\
&\quad \left. + ABA + AB^2 + \dots + \frac{1}{2}A^3 + \frac{1}{2}A^2B + \dots + \frac{1}{2}B^2A + \frac{1}{2}B^3 \right) \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(A^3 + A^2B + \dots + ABA + AB^2 + \dots \right. \\
&\quad \left. + BA^2 + BAB + \dots + B^2A + B^3 + \dots \right) \\
&= A + B + \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}BA + \frac{1}{12}AB^2 - \frac{1}{6}BAB + \frac{1}{12}BA^2 \\
&\quad - \frac{1}{6}ABA + \frac{1}{12}A^2B + \frac{1}{12}B^2A \\
&= A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[B, [A, B]] + \dots \\
&\Rightarrow e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]+\dots}
\end{aligned}$$

Con lo que queda demostrada la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff.

3.4.3. Lemas de Baker-Campbell-Hausdorff

En la metodología de esta tesis se hará uso de dos lemas provenientes de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, por lo cual se expone en esta sección demostraciones.

Lema 1

El primer lema que deseamos demostrar es:

$$\text{Si } X, Y \in \mathcal{L} \Rightarrow e^X Y e^{-X} = (e^{\text{ad}X}) Y \quad (3.13)$$

tal que:

$$\begin{aligned} (\text{ad}X)Y &= [X, Y] \\ (\text{ad}X)^2 Y &= [X, [X, Y]] \\ &\text{etc.} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Demostración

Propongamos una función general: $f(t) = e^{tA} B e^{-tA}$, de tal manera que $f(0) = B$. Posteriormente se expande la función usando la expansión de Taylor:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n t^n \quad (3.15)$$

Derivamos a $f(t)$ con respecto a t en su forma exacta y en su expresión expandida por la serie de Taylor, de tal forma que se obtiene:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} f_n t^{n-1} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= A e^{tA} B e^{-tA} - e^{tA} B A e^{-tA} \\ &= e^{tA} [A, B] e^{-tA} = [A, e^{tA} B e^{-tA}] \\ &= [A, f(t)] = \left[A, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n t^n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [A, f_n] t^n \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} [A, f_{m-1}] t^{m-1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

en donde se cambió $n \rightarrow (m-1)$ en (3.17), y (3.16) es la derivada de $f(t)$ en su forma expandida por Taylor.

Se igualan a (3.17) y (3.16), con lo que obtenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} f_n t^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} [A, f_{m-1}] t^{m-1} \\ \Rightarrow f_n &= [A, f_{n-1}] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Esto quiere decir que:

$$\begin{aligned} f(t) &= f_0 + f_1 t + \frac{1}{2!} f_2 t^2 + \dots \\ &= B + [A, B] t + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] t^2 + \dots \\ \Rightarrow f(1) &= e^A B e^{-A} \\ &= B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots \\ &= (e^{\text{ad}A}) B \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado este primer lema de Baker-Campbell-Hausdorff.

Lema 2

Se desea demostrar que:

$$\left(\prod_{i=1}^r \exp(g_i H_i) \right) H_j \left(\prod_{i=r}^1 \exp(-g_i H_i) \right) = \sum_{k=1}^n \xi_{ki} H_k \quad (3.19)$$

$r = 1, \dots, n$

De tal forma que $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ son los elementos de la base del grupo de Lie \mathcal{L} y ξ_{ki} es una función de las "g"s.

Demostración

$$\begin{aligned}
& \left(\prod_{i=1}^r \exp(g_i H_i) \right) H_j \left(\prod_{i=r}^1 \exp(-g_i H_i) \right) = \\
& \left(\prod_{i=1}^{r-1} \exp(g_i H_i) \right) (e^{\text{ad}(g_r H_r)}) H_j \left(\prod_{i=r-1}^1 \exp(-g_i H_i) \right) = \\
& \left(\prod_{i=1}^{r-2} \exp(g_i H_i) \right) (e^{\text{ad}(g_{r-1} H_{r-1})}) (e^{\text{ad}(g_r H_r)}) H_j \left(\prod_{i=r-2}^1 \exp(-g_i H_i) \right) = \\
& \dots \\
& = \sum_{k=1}^r (e^{\text{ad}(g_k H_k)}) H_j
\end{aligned}$$

Dado que, como se mencionó anteriormente, $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ son elementos de la base del grupo de Lie, se logra obtener que:

$$\left(\prod_{i=1}^r \exp(g_i H_i) \right) H_j \left(\prod_{i=r}^1 \exp(-g_i H_i) \right) = \sum_{k=1}^n \xi_{ki} H_k$$

Quedando demostrado el segundo lema de Baker-Campbell-Hausdorff.

3.4.4. Grupos de Lie/Álgebra de Lie

El álgebra de Lie se define con base en un grupo de Lie, pero a favor de la facilitación de la comprensión de los temas, primero se presentará lo que es un álgebra de Lie y, posteriormente, se definirá lo que es un grupo de Lie. Esto último puede llegar a ser matemáticamente complicado, pero por fines físicos, tiene una explicación relativamente sencilla de entender.

Álgebra de Lie

Un álgebra de Lie es un espacio vectorial \mathfrak{g} , con una operación binaria $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Esta operación binaria satisface los siguientes axiomas:

- **Bilinealidad:** $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} : [aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \wedge [Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$ para cualquier escalar a, b .
- **Alternatividad:** $\forall X \in \mathfrak{g} : [X, X] = 0$
- **La identidad de Jacobi:**
 $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} : [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

Utilizando la bilinealidad y la alternatividad se puede demostrar una propiedad importante del álgebra de Lie:

- **Anticonmutatividad:** $\forall X, Y \in \mathfrak{g} : [X, Y] = -[Y, X]$

Para grupos de Lie G , en donde G son matrices $n \times n$, un álgebra de Lie \mathfrak{g} de G es dada por las matrices X ($n \times n$), tal que $e^{tX} \in G$, con $t \in \mathfrak{R}$. Esto quiere decir que para los grupos de Lie matriciales, el álgebra de Lie correspondiente es una colección de objetos que dan un elemento del grupo al ser operados por una función exponencial.

Para grupos de Lie matriciales, la operación binaria que los define es la multiplicación matricial sencilla. Por otro lado, esto no es generalmente correcto para el álgebra de Lie, debido a que las operaciones con funciones exponenciales dependen de la conmutatividad de los elementos exponentiados:

$$e^X \circ e^Y, \text{ tal que } X, Y \in \mathfrak{g}$$

Para poder definir la operación binaria del álgebra de Lie, se hace uso de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (3.10):

$$e^X \circ e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X,[X,Y]]-\frac{1}{12}[Y,[X,Y]]+\dots} \in G$$

Del lado izquierdo de la ecuación, $X, Y \in \mathfrak{g}$ son generadores y del lado derecho tenemos una suma de generadores. Se denomina el símbolo $[,]$ como braquets de Lie, y para grupos de Lie matriciales, estos braquets representan a conmutadores. Por ende, el operador binario para el álgebra de Lie en grupos de Lie matriciales es el conmutador.

Cabe mencionar algunos conceptos relacionados con el álgebra de Lie [6]:

- **Subálgebra de Lie:** Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Entonces, un subespacio lineal $U \subseteq \mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie si U es cerrado bajo el braquet de Lie de \mathfrak{g} , esto es:

$$\forall x, y \in U : [x, y] \in U$$

- **Álgebra de Lie derivada:** Es la subálgebra de un álgebra de Lie, \mathfrak{g} , que consiste de todas las combinaciones lineales de los pares de elementos sobre braquets de Lie, esto es:

$$\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \dots$$

En esta tesis se denomina \mathcal{L}' como la primera subálgebra derivada de Lie, \mathcal{L}'' como la segunda subálgebra derivada de Lie, etc.

- **Álgebra de Lie soluble:** Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es soluble si su serie derivada termina en la subálgebra cero, esto es:

$$\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \cdots \{0\}$$

Cada subálgebra de Lie y cociente de un álgebra de Lie solubles son solubles también.

3.4.5. Espacios Topológicos

Un espacio topológico es un par ordenado (X, T) en donde X es un conjunto y T es una topología sobre X . Cuando T es una topología sobre X , significa que es una colección de subconjuntos de X que cumplen tres propiedades [7]:

- **Conjunto vacío:** El conjunto vacío y X están en T :
 $\emptyset \in T, X \in T$
- **Intersección:** La intersección de cualquier sub colección finita de conjuntos de T está en T :
 $(O_1 \in T, O_2 \in T) \Rightarrow (O_1 \cap O_2 \in T)$
- **Unión:** La unión de cualquier sub colección de conjuntos de T está en T .

Las variedades y espacios métricos son casos especiales de espacios topológicos [9].

3.4.6. Variedad Matemática

Una variedad M es una serie de puntos tal que existe un mapa continuo uno a uno de cada vecindad a un conjunto abierto de \mathfrak{R}^n . Una variedad de dimensión n es, entonces, un espacio que se parece localmente a \mathfrak{R}^n . Dicho de otra manera, una variedad es el objeto geométrico estándar en matemática que generaliza la noción intuitiva de curva (1-variedad) y superficie (2-variedad) a cualquier dimensión y sobre cuerpos diversos, no solamente los reales, sino también los complejos y matriciales.

Un ejemplo de una variedad es la superficie de una esfera tridimensional, llamada S^2 . Se puede construir la esfera por una serie de triángulos diminutos, la suma de los ángulos de estos triángulos no es igual a 180° , por estar curvos, pero localmente las leyes de la geometría euclidiana son buenas aproximaciones, por lo que la esfera puede ser representada por una colección de mapas bidimensionales, llamada una variedad Riemanniana.

Finalmente, se definen las variedades diferenciables, las cuales son superficies lisas o suaves y generalmente reales, donde se pueden definir en cualquier punto vectores (o planos) tangentes; están utilizadas por la teoría de los grupos de Lie, por el cálculo diferencial sobre los espacios topológicos más generales. [8]

3.4.7. Grupo de Lie

Un grupo de Lie es una variedad infinitamente diferenciable. Una función infinitamente diferenciable, o función suave, es una función que admite derivadas de cualquier orden, por lo que todas sus derivadas son continuas. Esto quiere decir que: existe la derivada de g en cualquier punto " x ", y en ese punto se cumple que:

$$g(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (3.20)$$

Además, la operación del grupo, \circ , debe inducir un mapa diferencial de la variedad en sí mismo. Esto es un requisito de compatibilidad que asegura que la propiedad del grupo es compatible con la propiedad de variedad. Lo que significa que cada elemento del grupo " a " induce un mapa que toma cualquier elemento del grupo b a otro elemento del grupo $c=ab$, y que este mapa debe ser diferenciable. Al usar coordenadas, esto significa que las coordenadas de ab deben ser funciones diferenciables de las coordenadas de b .

Hay exactamente un grupo de Lie distinguido para cada álgebra de Lie. Esto significa que hay solamente un grupo de Lie que es conectado, correspondiente a cada álgebra de Lie. Dicho de otra forma, cualquier curva cerrada de la variedad puede ser reducida suavemente a un punto. Todos los demás grupos con la misma álgebra de Lie, se dice que son cubiertos por un álgebra de Lie simplemente conectada. $SU(2)$, por ejemplo, cubre a $SO(3)$ dos a uno. Es decir, que hay un mapa de $SU(2)$ a $SO(3)$ dos a uno.

En física, los grupos de Lie son grupos de simetría y las álgebras de Lie asociadas son movimientos infinitesimales simétricos.

3.5. Teoría Electromagnética

El sistema a tratar en este trabajo es un sistema bajo campos electromagnéticos oscilantes, así como campos constantes. Para esto, sirve describir la función Hamiltoniana de un sistema clásico, para entonces poder describir la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Finalmente, se podrán desarrollar las diferentes normas para simplificar el problema de manera correcta.

3.5.1. Función Hamiltoniana de Campos Electromagnéticos Clásicos

Un campo electromagnético que viaja en un vacío obedece las siguientes ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot E = 0 \quad (3.21)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (3.22)$$

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (3.23)$$

$$\nabla \times B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (3.24)$$

tal que c es la velocidad de la luz en el vacío.

Por otro lado, los campos eléctricos E y magnéticos B se pueden generar a partir de un potencial escalar y un potencial vectorial ϕ y A , respectivamente, por medio de las siguientes relaciones:

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.25)$$

$$B = \nabla \times A \quad (3.26)$$

También se sabe que la fuerza de Lorentz no relativista se expresa como:

$$F = z [E + (v \times B)] \quad (3.27)$$

en donde z es una carga eléctrica. Se puede desarrollar más este concepto utilizando las ecuaciones (3.25) y (3.26) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F &= z [E + (v \times B)] \\ &= z \left[-\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} + (v \times (\nabla \times A)) \right] \\ &= z \left[-\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla(v \cdot A) - (v \cdot \nabla) A \right] \end{aligned}$$

Dado que:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial A}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + (v \cdot \nabla) A\end{aligned}$$

La fuerza de Lorentz por fin se puede escribir como:

$$F = z \left[-\nabla\phi - \frac{dA}{dt} + \nabla(v \cdot A) \right] \quad (3.28)$$

Se puede utilizar la teoría Lagrangiana, en donde recordamos que:

$$\mathcal{L} = T - U \quad (3.29)$$

$$\nabla\mathcal{L} - \frac{d}{dt}(\nabla_v\mathcal{L}) = 0 \quad (3.30)$$

Siendo la ecuación (3.29) el Lagrangiano, \mathcal{L} , del sistema, T , la energía cinética y U , la energía potencial. La ecuación (3.30) es la ecuación de movimiento. Aplicando esta teoría a nuestro sistema:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - U(q, \dot{q}, t)$$

Por tanto, las ecuaciones de movimiento resultan ser:

$$\begin{aligned}m \frac{d\cancel{v}}{dt} + \nabla U - \frac{d}{dt}(\nabla_v U) &= 0 \\ \Rightarrow F &= \frac{d}{dt}(\nabla_v U) - \nabla U\end{aligned} \quad (3.31)$$

Entonces, se sustituye la ecuación (3.28) en la ecuación (3.31) para obtener:

$$\begin{aligned}z \left[-\nabla\phi - \frac{dA}{dt} + \nabla(v \cdot A) \right] &= \frac{d}{dt}(\nabla_v U) - \nabla U \\ \Rightarrow U &= z [\phi - (v \cdot A)]\end{aligned}$$

Por lo que el Lagrangiano termina siendo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + z [-\phi + (v \cdot A)] \quad (3.32)$$

La Hamiltoniana se define a partir del Lagrangiano, de la siguiente manera:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (3.33)$$

En donde p_i es el momento generalizado, definido como:

$$p_i = \nabla_v \mathcal{L} \quad (3.34)$$

Sustituyendo los resultados correspondientes de nuestro sistema en la ecuación (3.33), se obtiene que:

$$\begin{aligned} H &= mv^2 + zA \cdot v - \frac{1}{2}mv^2 - z[-\phi + (v \cdot A)] \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + z\phi \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dado que la Hamiltoniana se define con los momentos característicos, hay que sustituir:

$$\begin{aligned} p &= mv + zA \\ \Rightarrow v &= \frac{p - zA}{m} \end{aligned}$$

En la ecuación (3.35), resultando en que:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}m \frac{|p - zA|^2}{m^2} + z\phi \\ &= \frac{1}{2m} |p - zA|^2 + z\phi \end{aligned} \quad (3.36)$$

Por otro lado, el potencial vectorial tiene la agregada característica de que satisface la ecuación de onda homogénea:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (3.37)$$

Un resultado inmediato de esta ecuación es que la solución para una onda monocromática tiene la siguiente forma:

$$A(r, t) = \hat{\epsilon} A_0 \sin(K_L \cdot R - \omega t - \varphi) \quad (3.38)$$

en donde K_L es el vector de propagación, $\omega = ck_L$ y φ es una fase constante.

Ahora se puede utilizar la ecuación (3.26), además de la característica de que el rotacional de un gradiente es igual a cero, y sus propiedades distributivas, para obtener el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \nabla \times (A + \nabla f) &= (\nabla \times A) + \cancel{(\nabla \times \nabla f)}^0 \\ &= \nabla \times A \\ &= B \end{aligned}$$

en donde f es una función diferenciable real, dependiente de la posición y el tiempo.

Sustituyendo la transformación de A en la ecuación (3.25), obtenemos que:

$$\begin{aligned} -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}(A + \nabla f) &= \left(\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \right) - \frac{\partial \nabla f}{\partial t} \\ &= E - \frac{\partial \nabla f}{\partial t} \end{aligned}$$

Lo anterior quiere decir que esta transformación no es invariante, pero si agregamos un $-\frac{\partial f}{\partial t}$, se logra que la transformación en ϕ sea invariante. Jun-tando estos resultados, se obtiene que se pueden tener transformaciones que dejan invariantes a los campos electromagnéticos, llamados transformaciones de norma, si éstos tienen la siguiente estructura:

$$A \rightarrow A' = A + \nabla f \quad (3.39)$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.40)$$

Cuando no se considera que hay una fuente presente cerca del sistema, se toma que $\phi = 0$, por lo que las ecuaciones de los campos electromagnéticos quedan reducidas a:

$$E = - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.41)$$

$$B = \nabla \times A \quad (3.42)$$

Aplicando la solución de la ecuación de onda homogénea (3.38) a las ecua-ciones (3.41) y (3.42), se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} E &= - \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\epsilon} A_0 \sin(K_L \cdot R - \omega t - \varphi)) \\ &= - \hat{\epsilon} A_0 (-\omega \cos(K_L \cdot R - \omega t - \varphi)) \\ &= \hat{\epsilon} A_0 \omega \cos(K_L \cdot R - \omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} B &= \nabla \times A \\ &= \nabla \times (\hat{\epsilon} A_0 \sin(K_L \cdot R - \omega t - \varphi)) \\ &= A_0 (K_L \times \hat{\epsilon}) \cos(K_L \cdot R - \omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (3.44)$$

3.5.2. Norma de Coulomb

En este trabajo se utilizará de manera extensiva la norma de Coulomb, por lo que es útil empezar por describir esta transformación. Se utiliza principalmente cuando no hay fuentes presentes, y se define por cumplir la ecuación:

$$\nabla \cdot A = 0 \quad (3.45)$$

Si se aplica esta definición a la ecuación (3.38), que es la solución a la ecuación homogénea para una onda plana monocromática obtenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A &= \nabla \cdot (\hat{\epsilon} A_0 \sin(K_L \cdot R - \omega t - \varphi)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{x}_1 \cdot (\hat{\epsilon} A_0 \sin(K_L \cdot R - \omega t - \varphi)) + \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{x}_2 \cdot (\hat{\epsilon} A_0 \sin(K_L \cdot R - \omega t - \varphi)) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{x}_3 \cdot (\hat{\epsilon} A_0 \sin(K_L \cdot R - \omega t - \varphi)) \\ &= A_0 [\epsilon_1 k_1 \cos(K_L \cdot R - \omega t - \varphi) + \epsilon_2 k_2 \cos(K_L \cdot R - \omega t - \varphi) \\ &\quad + \epsilon_3 k_3 \cos(K_L \cdot R - \omega t - \varphi)] \\ &= A_0 (\hat{\epsilon} \cdot K_L) \cos(K_L \cdot R - \omega t - \varphi) = 0 \\ &\Rightarrow \hat{\epsilon} \cdot K_L = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Quiere decir que las ondas monocromáticas que son solución a la ecuación de onda homogénea deben ser ondas transversales para cumplir con la norma de Coulomb.

Utilizando el resultado de (3.46), podemos analizar las normas de las ecuaciones (3.43) y (3.44) bajo la norma de Coulomb:

$$\begin{aligned} |B| &= A_0 |K_L| \overbrace{\cos(K_L \cdot \hat{\epsilon})}^1 \cos(K_L \cdot R - \omega t - \varphi) \\ &= A_0 \frac{\omega}{c} |\cos(K_L \cdot R - \omega t - \varphi)| \\ |E| &= A_0 \omega |\cos(K_L \cdot R - \omega t - \varphi)| \\ \Rightarrow |B| &= \frac{|E|}{c} \end{aligned} \quad (3.47)$$

A continuación, se expone la ecuación de Lorentz para un electrón, utilizando el resultado de la ecuación (3.47):

$$\begin{aligned} F &= -e [E + (V \times B)] \\ &= -e \left[|E| \hat{E} + |B| |V| (\hat{V} \times \hat{B}) \right] \\ &= -e |E| \left[\hat{E} + \frac{|V|}{c} (\hat{V} \times \hat{B}) \right] \end{aligned}$$

Dado que la presente tesis trabajará en términos no relativistas, $\frac{|v|}{c} \ll 1$, podemos despreciar la contribución magnética a la fuerza de Lorentz, por lo que ésta queda expresada como:

$$F = -eE \quad (3.48)$$

3.5.3. Energía Ponderomotriz de un Electrón

De la ecuación (3.48), se puede encontrar la velocidad de un electrón con velocidad inicial v_0 en un tiempo t_0 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F &= -eE \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -eE \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) &= -eE \\ \Rightarrow \mathbf{v} &= -\frac{e}{m} \int_{t_0}^t E(\mathbf{r}_0, t') dt' + \mathbf{v}_0 \\ &= \frac{e}{m} (\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t_0)) + \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.49)$$

en donde se utilizó la ecuación (3.41) en el último paso.

Como se había visto, en la ecuación (3.36), el momento canónico es:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)$$

Sustituyendo esto en la ecuación (3.49), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} - \frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) &= \mathbf{v}_0 - \frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t_0) \\ \Rightarrow \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}(t_0) \end{aligned}$$

lo cual es la conservación de momento canónico del electrón en la aproximación de larga longitud de onda. Siguiendo los cálculos, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) + \mathbf{v}_d \\ \Rightarrow \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') dt' &= \int_{t_0}^t \left(\frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t') + \mathbf{v}_d \right) dt' \\ \Rightarrow \mathbf{r}(t) &= \int_{t_0}^t \left(\frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t') \right) dt' + \mathbf{v}_d(t - t_0) + \mathbf{r}_0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

En donde se utilizó la notación de:

$$\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_0 - \frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t_0)$$

La ecuación (3.50) se puede deconstruir en dos partes, una que se denomina el movimiento pondero motriz, y la otra es el movimiento de deriva (por ello el subíndice d). Entonces, el movimiento pondero motriz debido a radiación por láser se establece como:

$$\alpha(t, t_0) = \frac{e}{m} \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t') dt' \quad (3.51)$$

3.6. Mecánica Cuántica

La mecánica cuántica surgió en el inicio del siglo XX para complementar la física, que se había considerado resuelta durante mucho tiempo, hasta que surgieron problemas que no se podían resolver por medio de un enfoque de mecánica clásica, electrodinámica o termodinámica. Estos problemas incluyen la radiación de cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico, la estabilidad atómica y la espectrometría atómica.

Los primeros pasos para resolver algunas de estas problemáticas se dieron en el año 1900, cuando Max Planck originó el concepto de "cuantos" de energía o, dicho en otras palabras, que en un cuerpo negro el intercambio de energía entre la radiación y el alrededor se da por paquetes discretos, a diferencia de lo que suponía la mecánica clásica newtoniana, que establecía que era un proceso continuo.

En 1905, Einstein utilizó este concepto para cuantizar la energía de la luz y así encontrar una teoría adecuada para explicar el efecto fotoeléctrico. Bajo esta visualización, la luz se podría ver como fotones, cada uno con energía $E = h\nu$, en donde ν es la frecuencia de la luz y h es la constante de Planck.

En 1911 Lord Ernest Rutherford descubrió experimentalmente el núcleo en un átomo. Y en 1913, Niels Henrik David Bohr creó el modelo del átomo de Hidrógeno, el cual seguía una serie de reglas. Entre las cuales, se establece que un átomo sólo se puede encontrar en ciertos estados discretos de energía y que la interacción de la energía radiante con el átomo también se da sólo en cantidades discretas. Esta teoría creada por una mente brillante aun tenía limitaciones; sin embargo, ésta explicaba de manera satisfactoria los problemas de estabilidad atómica y espectrometría.

En 1923, Arthur Holly Compton descubrió que los rayos X (radiación electromagnética de alta energía) se comportan como partículas con un momento lineal igual a $\frac{h\nu}{c}$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Potencialmente, con base en ello, Louis-Victor de Broglie postuló ese mismo año en su tesis doctoral que la radiación puede presentar propiedades de partícula y que la materia, a su vez, puede presentar propiedades de onda. Esto no fue demostrado experimentalmente sino hasta 1927, cuando Davisson y Germer crearon un patrón de interferencia (suceso plenamente ondulatorio) usando electrones (los cuales eran considerados partículas).

Gracias a todos estos avances se desarrollaron dos ramas paralelas del nue-

vo árbol llamado física cuántica, uno por Werner Karl Heisenberg, llamada mecánica matricial, en 1925, y otro por Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, llamada mecánica ondulatoria, en 1926.

La mecánica matricial de Heisenberg proviene de la noción de que sólo algunos valores permitidos de energía discreta se pueden intercambiar en sistemas microscópicos, por lo que sus propiedades dinámicas (energía, momento, posición, momento angular, etc.) se pueden describir como matrices. La solución del problema de eigenvalores describe la dinámica del sistema y la diagonalización de la matriz de la Hamiltoniana establece el espectro de energías disponibles y sus vectores de estado. Gracias a esto, se pudo describir la estructura atómica a partir de líneas espectrales.

La mecánica de ondas de Schrödinger es una generalización del postulado de de Broglie. Éste describe el sistema usando la ecuación de Schrödinger, que es una ecuación diferencial de una función de onda, y al resolverla obtenemos el espectro de energía y la función de onda. No fue hasta 1927 cuando Max Born propuso una interpretación probabilística de la mecánica ondulatoria, en donde el cuadrado del módulo de la función de onda se considera una densidad de probabilidad. Bajo inspección, se vio claro que las mecánica de Heisenberg y de Schrödinger son equivalentes.

Estas teorías cuánticas, sin embargo, no consideraban la relatividad especial, la cual a su vez apenas había sido descubierta por Einstein en 1905. Ante este reto se encontró Dirac, quien halló una ecuación que describe el movimiento de un electrón utilizando la relatividad especial de Einstein, en 1928. También veremos que hay otra ecuación relativista, la de Klein-Gordon, pero es menos conocida en la colectiva popular que la de Dirac.

A lo largo de los años, la mecánica cuántica ha avanzado la ciencia desde varias disciplinas, entre ellas, el estudio de sólidos, semiconductores, superconductores, plasmas y muchas más. Entre los temas que son más señalados dentro de esta tesis, se encuentra el de los láseres, debido a las aproximaciones dipolares que se usarán para describir el problema y el tipo de campos que se insertarán en el sistema.

Postulados de la Mecánica Cuántica

La mecánica cuántica tiene algunos postulados base sobre los que se construyen sus teorías. Éstos sirven como fundamentos, y con ellos se puede obtener información del sistema por medio de dichas teorías. Como lo establece Zettili

en su libro [10], los postulados son los siguientes:

1. **Estado del sistema:** El estado de un sistema físico está especificado en el tiempo t , por un vector de estado $|\Psi(t)\rangle$ del espacio de Hilbert. Éste contiene toda la información necesaria sobre el sistema. La superposición de vectores de estado también es un vector de estado.
2. **Observables y operadores:** Cualquier cantidad medible A , la cual es denominada como un observable o variable dinámica, le corresponde un operador Hermitiano \mathbf{A} , cuyos eigenvectores forman una base completa.
3. **Medidas y eigenvalores de operadores:** El acto de medir una observable A puede ser representado formalmente por la acción de \mathbf{A} sobre un vector de estado $|\Psi(t)\rangle$. El único resultado posible de tal medición es el de un eigenvalor $a_n \in \Re$ del operador \mathbf{A} . El resultado de dicha medición de A en el estado $|\Psi(t)\rangle$ resulta en el inmediato colapso del sistema a

$$\mathbf{A}|\Psi(t)\rangle = a_n|\Psi_n\rangle$$

tal que $a_n = \langle\Psi_n|\Psi(t)\rangle$.

4. **Resultado probabilístico de una medición:**

- a) **Espectro discreto:** La probabilidad de obtener un eigenvalor no degenerado a_n de una observable A en un sistema en estado $|\Psi\rangle$ se calcula por:

$$P_n(a_n) = \frac{|\langle\Psi_n|\Psi\rangle|^2}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = \frac{|a_n|^2}{\langle\Psi|\Psi\rangle}$$

Si el eigenvalor a_n es degenerado m veces, esto es, si hay m posibles formas de obtener el mismo eigenvalor, P_n se vuelve:

$$P_n(a_n) = \frac{\sum_{j=1}^m |\langle\Psi_n^j|\Psi\rangle|^2}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = \frac{\sum_{j=1}^m |a_n^{(j)}|^2}{\langle\Psi|\Psi\rangle}$$

En cualquiera de los dos caso, al medir el sistema el estado cambia de $|\Psi\rangle$ a $|\Psi_n\rangle$, representando un colapso desde una función de onda probabilística, a un estado completamente establecido.

- b) **Espectro continuo:** La densidad de probabilidad de que la medida de A caiga entre a y $a+da$ en un sistema con vector de estado $|\Psi\rangle$ es:

$$\frac{dP(a)}{da} = \frac{|\Psi(a)|^2}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = \frac{|\Psi(a)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(a')|^2 da'}$$

5. **Evolución temporal del sistema:** La evolución temporal del vector de estado $|\Psi(t)\rangle$ de un sistema es dado por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \mathbf{H}|\Psi(t)\rangle$$

en donde \mathbf{H} es el operador Hamiltoniano correspondiente a la energía total del sistema.

3.6.1. Momento Angular y Spin en Mecánica Cuántica

Para hablar de rotaciones, tanto en mecánica clásica, como en mecánica cuántica, debemos hablar de operadores de rotación, $\mathfrak{D}(R)$, tal que éstos caracterizan la operación de rotación R sobre un estado α , tal que:

$$|\alpha\rangle_R = \mathfrak{D}(R)|\alpha\rangle$$

en donde $|\alpha\rangle_R$ es el estado rotado, mientras que $|\alpha\rangle$ es el estado original. Para poder construir el operador $\mathfrak{D}(R)$, se debe partir de rotaciones infinitesimales. Los operadores infinitesimales cumplen la condición de:

$$U_\epsilon = \mathbb{1} - iG\epsilon \quad (3.52)$$

tal que G es llamado generador del operador y es Hermitiano, mientras que ϵ es la cantidad infinitesimal.

Clásicamente, el momento angular es el generador de las rotaciones, por lo que se puede definir un operador de momento angular J_k , en donde la sub k expresa que se rota sobre el eje k -ésimo en un ángulo $d\phi$, esto es:

$$G \rightarrow \frac{J_k}{\hbar}, \quad \epsilon \rightarrow d\phi$$

Por lo que, utilizando la ecuación (3.52), el operador de rotación resulta ser:

$$\mathfrak{D}(\hat{\mathbf{n}}, d\phi) = 1 - i \left(\frac{\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\hbar} \right) d\phi$$

tal que $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario sobre el cual rota un ángulo infinitesimal $d\phi$.

En mecánica cuántica, a diferencia de la mecánica clásica, el momento angular total no es equivalente al producto cruz del operador de posición con el operador de momento lineal. Se ha demostrado por experimentos, como el

de Ster-Gerlach [11], que hay una cualidad intrínseca de las partículas que le dan momentos angulares, por lo que el momento angular total se puede escribir como:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

en donde L es el momento angular orbital, clásicamente reconocido, y S es el operador de Spin, que no es clásico, y es intrínseco de algunas partículas. El operador de momento angular total cumple relaciones de conmutacion, las cuales pueden ser escritas como:

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{i,j,k}J_k \quad (3.53)$$

donde $\varepsilon_{i,j,k}$ es el símbolo de Levi-Civita. Debido a esto, no cumple la propiedad conmutativa, por lo que no forman un grupo Abeliano.

Spin

Los conceptos de spin y spin un medio nacieron del experimento de Stern-Gerlach, en donde se halló que las partículas, que clásicamente no tienen momento angular, mostraban interacción con campos magnéticos, lo cual suponía una contradicción clásica. Bajo estos experimentos, se puede inferir que existe un momento angular intrínseco para algunas partículas, el cual es el spin un medio. A todas las partículas con spin un medio se les denomina Fermiones, diferente a los Bosones, que no tienen spin.

Los operadores que definen el spin del sistema son:

$$\begin{aligned} S_x &= \left(\frac{\hbar}{2}\right) \{(|+\rangle\langle-|) + (|-\rangle\langle+|)\} \\ S_y &= \left(\frac{i\hbar}{2}\right) \{- (|+\rangle\langle-|) + (|-\rangle\langle+|)\} \\ S_z &= \left(\frac{\hbar}{2}\right) \{(|+\rangle\langle+|) - (|-\rangle\langle-|)\} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Estos operadores cumplen con las relaciones de conmutación dados en la ecuación (3.53), y a partir de éstos se pueden definir las matrices de Pauli:

$$\langle\pm|S_k|+\rangle \equiv \left(\frac{\hbar}{2}\right) (\sigma_k)_{\pm,+} \quad \wedge \quad \langle\pm|S_k|-\rangle \equiv \left(\frac{\hbar}{2}\right) (\sigma_k)_{\pm,-} \quad (3.55)$$

Usando la relación de (3.54) y la definición de (3.55), podemos concluir que las matrices de Pauli tienen forma matricial:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Además, las matrices de Pauli cumplen con las siguientes propiedades:

- **Relación de Anticonmutador:** $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$
- **Relación de Conmutación:** $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$
- **Hermitiano:** $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$
- **Unitario:** $\sigma_i^\dagger\sigma_i = \sigma_i\sigma_i^\dagger = 1$
- **Determinante:** $\text{Det}(\sigma_i) = -1$
- **Traza:** $\text{Tr}(\sigma_i) = 0$
- **Identidad Importante:** $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbb{1} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Formalismo de Pauli, Espinores

Debido a que los sistemas con spin un medio tienen una base de dimensión 2, las cuales son $|+\rangle$ y $|-\rangle$, éstas se pueden sustituir por un formalismo de dos componentes llamado espinor:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \chi_+ & |-\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_- \\ \langle +| &= (1 \ 0) = \chi_+^\dagger & \langle -| &= (0 \ 1) = \chi_-^\dagger \end{aligned}$$

Para estados arbitrarios, el espinor de dos componentes se escribe como:

$$\begin{aligned} \chi &= \begin{pmatrix} \langle +|\alpha\rangle \\ \langle -|\alpha\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \\ &= c_+\chi_+ + c_-\chi_- \\ \chi^\dagger &= (\langle \alpha|+) \ \langle \alpha|-) = (c_+^* \ c_-^*) \end{aligned}$$

en donde las constantes $c_+, c_- \in \mathbb{C}$.

3.6.2. Ecuación de Schrödinger con Potencial Eléctrico

La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(X, t) = H\Psi(X, t) \quad (3.56)$$

Sustituyendo la Hamiltoniana (3.36) en la ecuación, se obtiene que para un electrón:

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(X, t) &= \left[\frac{1}{2m} (P - eA)^2 + e\phi \right] \Psi(X, t) \\
&= \left[\frac{1}{2m} (P^2 - e(P \cdot A + A \cdot P) + e^2 A^2) + e\phi \right] \Psi(X, t) \\
&= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{i\hbar e}{2m} (\nabla \cdot A + A \cdot \nabla) + \frac{e^2}{2m} A^2 + e\phi \right] \Psi(X, t)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Cuando se cumple la norma de Coulomb, $\nabla \cdot A = 0$, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (A\Psi) &= A \cdot (\nabla\Psi) + (\nabla \cdot A)\Psi \\
&= A \cdot (\nabla\Psi)
\end{aligned}$$

Ademas, suponemos que no hay fuentes cercanas, $\phi = 0$, por lo que obtenemos una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (TDSE por sus siglas en inglés) de la siguiente forma:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(X, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{i\hbar e}{m} (A \cdot \nabla) + \frac{e^2}{2m} A^2 \right] \Psi(X, t)$$

Para considerar interacciones con algún potencial, se puede agregar:

$$U(X) = \text{Energía Potencial}$$

Por lo que el TDSE queda como:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(X, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(X) + \frac{i\hbar e}{m} A \cdot \nabla + \frac{e^2}{2m} A^2 \right] \Psi(X, t)$$

En esta ecuación se puede hacer la separación $H = H_0 + H_{int}$, tal que H_0 es la Hamiltoniana independiente del tiempo, mientras que H_{int} es la Hamiltoniana de la interacción con un campo radiante:

$$\begin{aligned}
H_0 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(X) \\
H_{int} &= \frac{i\hbar e}{m} A \cdot \nabla + \frac{e^2}{2m} A^2
\end{aligned}$$

Su forma generalizada, a partir del caso de N partículas, es entonces:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(X, t) = \left[\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N P_i^2 + V - \frac{e}{m} \sum_{i=1}^N A(r_i, t) \cdot P_i + \frac{e^2}{2m} \sum_{i=1}^N A(r_i, t)^2 \right] \Psi(X, t) \tag{3.58}$$

En este momento es útil introducir la aproximación dipolar. Esta aproximación se puede utilizar toda vez que se cumplan dos condiciones:

- La longitud de onda de la radiación incidente al sistema tiene una longitud de onda larga comparada con el tamaño del sistema atómico estudiado; y
- La intensidad de la radiación no es tan alta como para tener que considerar efectos relativistas.

La aproximación dipolar establece que el potencial vectorial de la radiación incidente es independiente de la posición, $A = A(t)$. Con esta aproximación se cumple de inmediato la norma de Coulomb, y bajo la misma, la TDSE queda como:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(X, t) = \left[H_0 - \frac{e}{m} A(t) \cdot P + \frac{e^2 N}{2m} A^2(t) \right] \Psi(X, t) \quad (3.59)$$

en donde se define que $P = \sum_{i=1}^N P_i$.

A la ecuación de Schrödinger sobre la que se le aplica la aproximación dipolar y la norma de Coulomb se le denomina la TDSE bajo la norma de velocidad. Para el sistema estudiado en esta tesis es escrito explícitamente como:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(X, t) = \left[\frac{1}{2m} (\mathbf{P} - e\mathbf{A}(t))^2 + V - Fx \right] \Psi(X, t) \quad (3.60)$$

3.6.3. Transformaciones de Norma

La TDSE de un electrón bajo radiación sin aplicar la norma de Coulomb (3.57), tiene la cualidad de que es invariante bajo las siguientes transformaciones [12]:

$$A \rightarrow A' = A + \nabla f \quad (3.61)$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.62)$$

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{-\frac{ief}{\hbar}} \Psi \quad (3.63)$$

en donde f es una función real diferenciable.

Estas transformaciones se pueden generalizar dado las cantidades medibles, como valores esperados o probabilidades de transición, deben de mantenerse invariantes.

En esta tesis utilizaremos estas transformaciones, aun cuando hagamos uso de la aproximación dipolar, y por ende de la ecuación (3.59).

Norma de Velocidad Reducida

Esta norma queda especificada con la función f :

$$f = -\frac{eN}{2m} \int_{-\infty}^t A^2(t') dt'$$

Con esto se puede escribir el potencial eléctrico vectorial, el potencial eléctrico escalar y la función de onda transformados como:

$$\begin{aligned} A' &= A + \nabla \left(-\frac{eN}{2m} \int_{-\infty}^t A^2(t') dt' \right) \\ &= A + -\frac{eN}{2m} \int_{-\infty}^t \nabla A^2(t') dt' \\ &= A \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{eN}{2m} \int_{-\infty}^t A^2(t') dt' \right) \\ &= \frac{eN}{2m} A^2 \\ \Psi' &= \exp \left(\frac{-ie^2 N}{2m\hbar} \int_{-\infty}^t A^2(t') dt' \right) \Psi \end{aligned} \quad (3.64)$$

Aplicando estas transformaciones a la ecuación (3.59), se obtiene:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\exp \left(\frac{-ie^2 N}{2m\hbar} \int_{-\infty}^t A^2(t') dt' \right) \Psi \right) &= \left[H_0 - \frac{e}{m} A \cdot P + \frac{e^2 N}{2m} A^2 \right] \\ &\quad \times \exp \left(\frac{-ie^2 N}{2m\hbar} \int_{-\infty}^t A^2(t') dt' \right) \Psi \end{aligned} \quad (3.65)$$

Desarrollando el lado izquierdo de la ecuación obtenemos:

$$i\hbar \left[\left(-\frac{ie^2 N}{2m\hbar} A^2 \right) \exp \left(\frac{-ie^2 N}{2m\hbar} \int_{-\infty}^t A^2(t') dt' \right) \Psi \right. \quad (3.66)$$

$$\left. + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \exp \left(\frac{-ie^2 N}{2m\hbar} \int_{-\infty}^t A^2(t') dt' \right) \right] = \left(\frac{e^2 N}{2m} A^2 \Psi + i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \exp \left(\frac{-ie^2 N}{2m\hbar} \int_{-\infty}^t A^2(t') dt' \right) \quad (3.67)$$

Insertando el lado derecho de la ecuación (3.67) en la ecuación (3.65) y simplificando, se obtiene:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^v}{\partial t} = \left[H_0 - \frac{e}{m} A \cdot P \right] \Psi^v \quad (3.68)$$

Esta es la TDSE bajo la norma de velocidad reducida, en donde se sustituyó la notación primada por "v" en las Ψ para diferenciar la norma de velocidad. Esta presentación de la TDSE tiene la gran ventaja de haber eliminado el término cuadrático del potencial vectorial. Esta norma se denomina norma de velocidad reducida debido a que la Hamiltoniana de interacción sólo es el acoplamiento del potencial vectorial con el momento dividido entre la masa, resultando en una semejanza al acoplar el potencial con la velocidad.

Norma de Longitud

La norma de longitud se puede obtener con la función específica:

$$f = -A \cdot R$$

Por lo que los términos transformados resultan ser:

$$\begin{aligned}
 A' &= A + \nabla(-A \cdot R) \\
 &= A - \left[A \times (\nabla \times R) + R \times (\nabla \times A) + (A \cdot \nabla)R + (R \cdot \nabla)A \right] \\
 &= A - \left[R \times (\nabla \times A) + (A \cdot \nabla)R + (R \cdot \nabla)A \right] = 0 \\
 \phi' &= \phi - \frac{\partial}{\partial t}(-A \cdot R) \\
 &= \frac{\partial A}{\partial t} \cdot R + A \cdot \frac{\partial R}{\partial t} = -E \cdot R \\
 \Psi^L &= \exp\left(\frac{ie}{\hbar} A \cdot R\right) \Psi \tag{3.69}
 \end{aligned}$$

en donde se nota que el potencial vectorial se simplifico significativamente al tener a $R = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, y utilizar la aproximación dipolar debido a que se deduce que:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times R &= \epsilon_{ijk} \partial_j r_k = \epsilon_{ijk} \delta_{jk} = \epsilon_{ijj} = 0 \\
 \nabla \times A &= \epsilon_{ijk} \partial_j a_k = 0 \\
 (R \cdot \nabla) A &= r_i \partial_i a_j = r_i (\partial_i a_j) = 0
 \end{aligned}$$

Introduciendo estos valores en la ecuación (3.59), se obtiene:

$$\begin{aligned}
& i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{\frac{ie}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}} \Psi \right] = H_0 e^{\frac{ie}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}} \Psi \\
\Rightarrow i\hbar \left[\frac{ie}{\hbar} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{R} \right) \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] e^{\frac{ie}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}} &= H_0 e^{\frac{ie}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}} \Psi \\
\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= [H_0 + e\mathbf{E} \cdot \mathbf{R}] \Psi \quad (3.70)
\end{aligned}$$

La cual es la TDSE aplicada a la norma de longitud. Esta lleva el nombre de norma de longitud porque la parte de la Hamiltoniana donde interactúa la radiación es un acoplamiento entre el campo eléctrico y el operador de posición de los electrones.

3.6.4. Marco de Kramers-Henneberger

En la transformación de Kramers-Henneberger, se transforma para cambiar el marco de referencia desde el laboratorio a un marco acelerado, específicamente centrado sobre el movimiento pondero motriz del electrón. El procedimiento utilizado para realizar esto se obtiene del artículo de W.C. Henneberger [13], por lo cual por simplicidad, se toma un átomo de Hidrógeno bajo la aproximación dipolar no relativista, similar a como lo haremos también en esta tesis. La ecuación de Schrödinger es:

$$\frac{1}{2m} \left[-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}(t) \right]^2 \varphi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Se introduce una función de onda transformada:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \Omega \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (3.71)$$

Tal que:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \left[\frac{i\hbar e}{mc} \mathbf{A}(\tau) \cdot \nabla + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}(\tau) \right] d\tau \right\} \\
&= \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^2 H_{\text{int}}(\tau) d\tau \right]
\end{aligned}$$

Debido a la aproximación dipolar, Ω se puede escribir como:

$$\Omega = \Omega_1 \Omega_2$$

En donde

$$\Omega_1 = \exp \left[- \int_{-\infty}^t \frac{e}{mc} \mathbf{A}(\tau) d\tau \cdot \nabla \right]$$

$$\Omega_2 = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}(\tau) d\tau \right]$$

Aquí se nota que Ω_1 es un operador de traslación, tal que su operación realiza el cambio:

$$\Omega_1 f(\mathbf{r}) = f \left(\mathbf{r} - \int_{-\infty}^t \frac{e}{mc} \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)$$

Por lo que la ecuación (3.71) es un cambio a un marco de referencia acelerado.

Retomamos la ecuación de movimiento ponderomotriz (3.51):

$$\boldsymbol{\alpha} = - \int_{-\infty}^t \frac{e}{mc} \mathbf{A}(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow \ddot{\boldsymbol{\alpha}} = - \frac{e}{mc} \ddot{\mathbf{A}}(\tau) = \frac{e}{m} \mathbf{E}(t)$$

De nuevo confirmando que $\boldsymbol{\alpha}$ es el desplazamiento de un electrón libre desde el centro de su oscilación en un campo de radiación $\mathbf{E}(t)$.

La función de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r} + \boldsymbol{\alpha}) \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3.72)$$

la cual es la TDSE en el marco de Kramers-Henneberger.

Este procedimiento se puede realizar más rápidamente partiendo de la ecuación (3.68); habiendo ya utilizado la aproximación dipolar, se le agrega la transformación unitaria adicional:

$$\Psi^A(X, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \boldsymbol{\alpha}(t) \cdot \mathbf{P}} \Psi^V(X, t) \quad (3.73)$$

en donde $\boldsymbol{\alpha}(t)$ es el desplazamiento ponderomotriz definido en la ecuación (3.51) bajo la aproximación dipolar.

Por lo tanto, la transformación de Kramers-Henneberger corresponde a una traslación espacial caracterizada por el desplazamiento ponderomotriz, tal que oscila con respecto al "laboratorio", así como haría un electrón clásico en un campo electromagnético E . Bajo esta transformación, la ecuación de Schrödinger presenta la siguiente forma:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^A = \left[\frac{1}{2m} \mathbf{P}^2 + V(\mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\alpha}(t), \dots, \mathbf{r}_N + \boldsymbol{\alpha}(t)) \right] \Psi^A \quad (3.74)$$

3.6.5. Ecuaciones de Pauli

Partícula Libre

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es:

$$\mathbf{H}|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle$$

Para una partícula libre, esto se traduce a:

$$\frac{\mathbf{P}^2}{2m}|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle$$

Haciendo el cambio a la notación spinorial en el formalismo de Pauli, esta ecuación independiente del tiempo es:

$$\frac{\mathbf{P}^2}{2m}\chi = E\chi \quad (3.75)$$

$$\frac{\mathbf{P}^2}{2m}(\mathbb{1})(\chi) = E\chi \quad (3.76)$$

Posteriormente, se puede utilizar la identidad importante especificada en las propiedades de las matrices de Pauli, $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbb{1} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, de tal manera que:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}) = \mathbf{P}^2\mathbb{1} + 0$$

Este resultado lo sustituimos en la ecuación (3.76), para obtener:

$$\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P})}{2m}\chi = E\chi$$

Introduciendo el Campo Electromagnético

Se introduce en este momento la partícula en un sistema electromagnético en una aproximación dipolar, por lo que $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})$, y $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} - q\mathbf{A}$. La q es la carga total, pero para simplificar el desarrollo, se considera la carga de un electrón, e .

En este caso, la identidad importante de las propiedades de las matrices de Pauli queda como:

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} - e\mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} - e\mathbf{A}) = \\ &(\mathbf{P} - e\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{P} - e\mathbf{A})\mathbb{1} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot ((\mathbf{P} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{P} - e\mathbf{A})) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Descomponiendo esto por partes, analizamos el producto cruz de la segunda parte de ecuación:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{P} - e\mathbf{A}) &= \varepsilon_{ijk} (p_i - ea_i) (p_j - ea_j) \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} [(p_i - ea_i), (p_j - ea_j)] \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (p_j p_k - p_k p_j - ep_j a_k + ea_k p_j \\
&\quad - ea_j p_k + ep_k a_j + \cancel{e^2 a_j a_k} - \cancel{e^2 a_k a_j}) \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (i\hbar e \partial_j a_k - i\hbar e a_k \partial_j + i\hbar e a_j \partial_k - i\hbar e \partial_k a_j)
\end{aligned}$$

realizando la derivada parcial con conciencia de que se opera sobre una función esto se desarrolla a:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P} - e\mathbf{A}) \times (\mathbf{P} - e\mathbf{A}) &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (i\hbar e (a_k \partial_j + \partial_j a_k) - \cancel{i\hbar e a_k \partial_j} \\
&\quad + \cancel{i\hbar e a_j \partial_k} - i\hbar e (a_j \partial_k + \partial_k a_j)) \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (i\hbar e \partial_j a_k - i\hbar e \partial_k a_j) \\
&= \frac{1}{2} i\hbar e (\varepsilon_{ijk} \partial_j a_k - \varepsilon_{ijk} \partial_k a_j) \\
&= \frac{1}{2} i\hbar e (\varepsilon_{ijk} \partial_j a_k + \varepsilon_{ikj} \partial_k a_j) \\
&= i\hbar e \nabla \times A = i\hbar e B
\end{aligned}$$

En donde \mathbf{B} es el campo magnético, y se utilizó (3.26) en el último paso. Sustituimos este resultado en la ecuación (3.77) para obtener:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} - e\mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} - e\mathbf{A}) = (\mathbf{P} - e\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{P} - e\mathbf{A}) \mathbb{1} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (e\mathbf{B})$$

Sustituyendo estos resultados en nuestra ecuación de Schrödinger, se obtiene la ecuación de Pauli:

$$\left(\frac{(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2}{2m} - \hbar e \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right) \chi = E \chi$$

3.7. Ecuaciones Relativistas de Klein-Gordon y Dirac

Las ecuaciones relativistas de la mecánica cuántica fueron desarrolladas poco tiempo después de la mecánica cuántica no relativista, aún en la década de 1920. Las dos ecuaciones que se desarrollaron fueron las de Klein-Gordon (o Klein-Gordon-Fock) para bosones y la ecuación de Dirac para fermiones. En esta sección se presenta lo elemental de estos temas.

3.7.1. Ecuación de Klein-Gordon

Ecuación de Klein-Gordon

La ecuación elemental de Schrödinger se escribe:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + \mathbf{V}(\mathbf{x}) \right] \Psi \quad (3.78)$$

Que corresponde al operador de energía no relativista:

$$\hat{E} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0}$$

Para obtener una ecuación de onda relativista, comenzaremos con un caso más sencillo: el de una partícula libre. En este caso la energía relativista se escribe como:

$$E^2 = c^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + m_0^2 c^4$$

Se sustituye el cuatri momento por el cuatri operador de momento, (3.1), y lo sustituimos en la ecuación de Schrödinger (3.78):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4} \Psi \quad (3.79)$$

Esta ecuación es poco útil debido a que si se expande es capaz de contener todas las potencias derivadas del operador, por lo cual contiene teoría no local y sus soluciones son muy complicadas [14]. En vez de eso, es preferible utilizar:

$$H^2 = \hat{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

Para esto se utiliza el hecho de que si A , B son operadores que conmutan entre ellos, y además $A\Psi = B\Psi$, entonces $A^2\Psi = B^2\Psi$, por lo que podemos

reescribir la ecuación (3.79) como:

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi &= [-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4] \Psi \\ \Rightarrow \left[\square + \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

A la ecuación (3.80) se le llama la ecuación de Klein-Gordon para una partícula libre. Las soluciones de esta ecuación tienen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \Psi &= e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} = e^{-\frac{i}{\hbar} (p_0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Sustituyendo la ecuación (3.81) en (3.80), se llega a que $E = \pm \sqrt{m_0^2 c^2 + \mathbf{p}^2}$, por lo que hay soluciones positivas y negativas de energía. Esto se debe a que las energías negativas están asociadas a las antipartículas. Además de esto, la ecuación de Klein Gordon es una ecuación de segundo grado en el tiempo, por lo que se necesitaría saber $\partial\Psi/\partial t$ además de la función de estado Ψ en un tiempo dado t . Por estas razones, esta ecuación parecía carecer de sentido matemático y, de hecho, cuando Oskar Klein publicó su artículo al respecto, puso mayor énfasis en su teoría relativista de cinco dimensiones que de sus resultados.

Esta primera versión de la ecuación de Klein-Gordon fue publicada en 1926 por el físico suizo Oskar Klein [15], quien otorga la primera parte del nombre de la ecuación. Sin embargo, existe evidencia escrita en el cuaderno de Schrödinger, que indica que fue éste último el primero en obtener una ecuación parecida a la de Klein-Gordon [16], basado fuertemente en la fórmula de onda-materia de Broglie, mientras que, la teoría de Klein involucraba una teoría relativista de 5 dimensiones.

Vladimir Fock también encontró la ecuación de Klein-Gordon en 1926 [17], por lo que a veces se le llama la ecuación Klein-Gordon-Fock, aunque es más conocida por el nombre de Klein-Gordon, a pesar de la injusticia del nombre. Schrödinger mismo referenciaba a la ecuación por el nombre de Gordon.

Aunque fue Fock el primero en resolver la ecuación de energía para el átomo de hidrógeno, no fue capaz de reproducir la estructura fina correcta, resaltando una debilidad en la ecuación de Klein-Gordon: no interpreta de manera correcta a los fermiones.

Mientras tanto, Walter Gordon derivó la ecuación de Klein-Gordon en 1926 [1], siguiendo de cerca el método de Schrödinger, en donde aplicó mecánica de ondas relativistas al efecto Compton, por lo que encontró las densidades de carga y corriente.

Límite no Relativista

Para estudiar el límite no relativista de la ecuación de Klein Gordon (3.80), primero se debe hacer un ansatz, en el cual dividimos la dependencia temporal de Ψ en dos términos, en donde uno contiene la masa de la partícula en descanso:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad (3.82)$$

Posteriormente, y recordando que la diferencia entre la energía total E de una partícula y su masa en descanso $m_0 c^2$ es chica, podemos definir la energía no relativista como:

$$E' = E - m_0 c^2$$

tal que $E' \ll m_0 c^2$.

Ya que en el esquema de Schrödinger el operador de E es $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, tenemos que:

$$|i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}| \approx E' \varphi \ll m_0 c^2 \varphi \quad (3.83)$$

Ahora derivamos la ecuación (3.82) una y dos veces y se sustituye el resultado encontrado en la ecuación (3.83):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \approx -i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \right] \\ &\approx \left[-i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right] e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \\ &= - \left[i \frac{2m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right] e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación de Klein-Gordon (3.80) se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \left[i \frac{2m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right] e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} &= \left(\nabla^2 - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \varphi e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \\ \Rightarrow i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \varphi \quad (3.84) \end{aligned}$$

Este resultado es la ecuación de Schrödinger para una partícula libre sin spin, por lo que se puede suponer que la ecuación de Klein Gordon trata de partículas de spin cero.

Ecuación de Klein-Gordon con Campo Electromagnético

Como ya se estableció en la ecuación (3.2), el cuatrivector del potencial electromagnético se describe como:

$$A^\mu = \{A_0, \mathbf{A}\} = g^{\mu\nu} A_\nu$$

Asimismo, como se describió en la ecuación (3.36), el potencial se puede introducir en el momento, tal que:

$$\hat{p}^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu - \frac{e}{c} A^\mu$$

Con estos cambios, la ecuación de Klein-Gordon para una partícula libre se transforma en la ecuación de Klein-Gordon con un campo electromagnético:

$$\begin{aligned} & \left(\hat{p}^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \left(\hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \Psi = m_0^2 c^2 \Psi \\ \Rightarrow & \left[g^{\mu\nu} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{e}{c} A_\nu \right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right) \right] \Psi = m_0^2 c^2 \Psi \end{aligned} \quad (3.85)$$

Ecuación no Relativista de Klein-Gordon con Campo Electromagnético

Una vez más, para conseguir el caso no relativista de la ecuación (3.85), se utiliza el ansatz:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad (3.86)$$

En donde se cumple la condición pasada, además de una nueva:

$$\begin{aligned} |i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}| & \ll m_0 c^2 |\varphi| \\ |e A_0 \varphi| & \ll m_0 c^2 |\varphi| \end{aligned} \quad (3.87)$$

en donde la segunda condición proviene del hecho de que los potenciales deben ser planos para no lidiar con la creación de pares, lo cual es un fenómeno relativista.

Similar al caso sencillo, se deriva la ecuación (3.86) con respecto al tiempo, y además se le resta eA_0 :

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right) \Psi = \left(i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} - eA_0 \varphi + m_0 c^2 \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}$$

Posteriormente, a este resultado se le saca su cuadrado y se le aplican las aproximaciones de la (3.87) para obtener:

$$\begin{aligned}
\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - eA_0\right)^2 \Psi &= \left(-\hbar^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - i\hbar e\frac{\partial A_0}{\partial t}\varphi - i\hbar eA_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} + i\hbar m_0c^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right. \\
&\quad \left.- i\hbar e\frac{\partial\varphi}{\partial t}A_0 + eA_0^2\varphi - eA_0m_0c^2\varphi\right. \\
&\quad \left.+ i\hbar m_0c^2\frac{\partial\varphi}{\partial t} - eA_0\varphi m_0c^2 + m_0^2c^4\varphi\right) e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t} \\
&\approx \left(m_0^2c^4 - 2m_0c^2eA_0 + 2m_0c^2i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar e\frac{\partial A_0}{\partial t}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}
\end{aligned}$$

Si se inserta este resultado en la ecuación (3.85), se obtiene que:

$$\begin{aligned}
&\left(m_0^2c^2 - 2m_0eA_0 + 2m_0i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar e}{c^2}\frac{\partial A_0}{\partial t}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}\varphi \\
&= \left[\left(i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + m_0^2c^2\right] e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}\varphi \\
\Rightarrow i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \left[\frac{1}{2m_0}\left(i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + eA_0 + \frac{i\hbar e}{2m_0c^2}\frac{\partial A_0}{\partial t}\right]\varphi \quad (3.88)
\end{aligned}$$

lo cual es la ecuación de Schrödinger para potenciales electromagnéticos.

3.7.2. Ecuación de Dirac, Soluciones de Gordon-Volkov

Ecuación de Dirac

Si recordamos la ecuación (3.79), que es la ecuación de Klein-Gordon en su forma de raíz cuadrada. Como se mencionó anteriormente, esta ecuación tenía desventaja debido a que la raíz cuadrada de los operadores diferenciales son difíciles de manejar, al punto de que Dirac no pudo incluir en ella a los campos electromagnéticos externos de manera invariante, relativista. Esto propició que Dirac hallara una nueva ecuación, preferentemente de primer grado en su derivada temporal, estableciendo la parte temporal al mismo nivel que la parte espacial. La ecuación resultante podría describir la estructura interna de un electrón, la cual tiene un spin de un medio, que la ecuación de Klein-Volkov (3.80) era incapaz de hacer [18].

Partiendo de la ecuación (3.79):

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4} \Psi \\ \Rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= c \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m_0^2 c^2} \Psi \end{aligned} \quad (3.89)$$

Para linealizar esta expresión encontró que se cumple la identidad:

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3$$

En donde las $\{p_1, p_2, p_3\}$ conmutan entre ellas y las $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ son las matrices de Pauli:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esto Dirac lo quiso expandir para incluir cuatro cuadrados dentro de la raíz, en vez de tres, para que se pueda utilizar en la ecuación (3.89), de tal forma que:

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + (m_0 c)^2} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 m_0 c$$

Dado que el propósito de la ecuación de Dirac era contener la ecuación de Klein-Gordon (3.80), debería cumplir las condiciones necesarias, tal que:

$$(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 m_0 c)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + (m_0 c^2)^2$$

Esto quiere decir que:

$$\begin{aligned} \alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu &= \mathbf{0} & (\mu \neq \nu) \\ \alpha_\mu^2 &= \mathbf{1} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Las condiciones de las ecuaciones (3.90) definen el álgebra de Clifford, que Dirac no conocía en ese entonces, por lo que derivó expresiones para estas alfas. Estas matrices α deberían ser Hermitianas para que la energía sea autoadjunta. Utilizando la ecuación (3.90), se puede observar que:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\alpha_\mu) &= \text{Tr}(\alpha_\nu^2 \alpha_\mu) \\ &= \text{Tr}(\alpha_\nu \alpha_\nu \alpha_\mu) \\ &= -\text{Tr}(\alpha_\nu \alpha_\mu \alpha_\nu) \\ &= -\text{Tr}(\alpha_\mu \alpha_\nu \alpha_\nu) \\ &= -\text{Tr}(\alpha_\mu) \Rightarrow \text{Tr}(\alpha_\mu) = 0 \end{aligned}$$

Considerando que $\alpha_\mu^2 = 1$, es decir, que el eigenvalor de α_μ es 1 ó -1 , por lo que la dimensión de las matrices debe ser par. Para una dimensión de 2, sólo hay hasta 3 matrices linealmente independientes que autoconmutan, representadas principalmente por las matrices de Dirac, lo cual es insuficiente, por lo que se escoge una matriz de 4 dimensiones:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ \alpha_4 \equiv \beta &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{3.91}$$

en donde β es la matriz correspondiente a la energía de descanso, por lo que recibe su propio nombre. Estas matrices se llaman matrices de Dirac, y son expresadas en específico con sólo una opción posible. Cada matriz $\alpha'_i = U\alpha_i U^{-1}$ es una matriz de Dirac, tal que U es una transformación unitaria. Insertándolas en la ecuación (3.89), se obtiene la ecuación de Dirac libre, que es:

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= H_0 \Psi \\ \text{tal que } H_0 &= -i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m c^2\end{aligned}\tag{3.92}$$

La cual describe un electrón libre relativista. La función de onda es un vector tal que:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Psi_1(t, \mathbf{x}) \\ \dots \\ \Psi_4(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

En muchos casos, será útil dividir esta función de cuatro componentes a una sola con dos espinores de dos componentes cada uno, esto es:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}\tag{3.93}$$

tal que:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}\tag{3.94}$$

$$\chi = \begin{pmatrix} \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}\tag{3.95}$$

Los estados estacionarios de la ecuación (3.92) tradicionalmente se encuentran usando un ansatz:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi(\mathbf{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon t} \quad (3.96)$$

Por lo que la ecuación (3.92) queda como:

$$\epsilon \Psi(\mathbf{x}) = H_0 \Psi(\mathbf{x}) \quad (3.97)$$

Se utiliza la notación de la ecuación (3.93), junto con las matrices de Dirac (3.91), para reescribir la ecuación (3.97) como:

$$\epsilon \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + m_0^2 c^2 \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

Esto se reduce a resolver el sistema de ecuaciones:

$$(\epsilon - m_0 c^2) \mathbf{1} \varphi_0 - c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi_0 = 0 \quad (3.98)$$

$$-c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \varphi_0 + (\epsilon + m_0 c^2) \mathbf{1} \chi_0 = 0 \quad (3.99)$$

Los estados con momento definitivos \mathbf{p} son:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.100)$$

El sistema de ecuaciones (3.99) sólo tiene soluciones no triviales si su determinante es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} (\epsilon - m_0 c^2) \mathbf{1} & -c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -c \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & (\epsilon + m_0 c^2) \mathbf{1} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene que:

$$(\epsilon - m_0 c^2) (\epsilon + m_0 c^2) \mathbf{1} - c^2 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = 0 \quad (3.101)$$

$$\Rightarrow (\epsilon^2 - m_0^2 c^4) \mathbf{1} - c^2 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = 0 \quad (3.102)$$

Para resolver esta ecuación se ocupa la relación:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbf{1} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (3.103)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.102), se obtiene que:

$$\begin{aligned} & (\epsilon^2 - m_0^2 c^4) \mathbf{1} - c^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \mathbf{1} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{p})) = 0 \\ \Rightarrow & \epsilon^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2 \Rightarrow \epsilon \equiv \pm E_p = c \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2} \end{aligned}$$

Lo cual resalta que hay dos soluciones para el factor ϵ , una positiva y otra negativa. Con estas soluciones, se puede escribir la ecuación (3.99) como:

$$\chi_0 = \frac{c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{m_0 c^2 + \epsilon} \varphi_0 \quad (3.104)$$

Luego se normaliza el espinor φ_0 , de tal forma que:

$$\varphi_0 = U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

tal que:

$$U^\dagger U = U_1^* U_1 + U_2^* U_2 = 1$$

Sustituyendo la ecuación (3.100) en la ecuación (3.96), se obtiene que:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon t}$$

a esta ecuación se le insertan los valores encontrados en las ecuaciones (3.104) y (3.105), por lo cual se obtiene que:

$$\Psi_{\mathbf{p}\lambda} = N \begin{pmatrix} U \\ \frac{c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{m_0 c^2 + \lambda E_p} U \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \lambda E_p t)} \quad (3.106)$$

en donde se agregó a N como factor de normalización y $\lambda = \pm 1$ que es la solución positiva o negativa del factor ϵ . Para hallar el factor de normalización se hace el procedimiento usual, utilizando la condición:

$$\int \Psi_{\mathbf{p}\lambda}^\dagger(\mathbf{x}, t) \Psi_{\mathbf{p}'\lambda'}(\mathbf{x}, t) d^3x = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

Sustituyendo los valores de la ecuación 3.106 se obtiene que:

$$N^2 \left(U^\dagger U + U^\dagger \frac{c^2 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2} U \right) = 1$$

Utilizamos de nuevo la ecuación (3.103) para reducir la ecuación, tal que:

$$\begin{aligned}
N^2 \left(U^\dagger U + U^\dagger \frac{c^2 (\mathbf{p}^2 + \mathbf{p} \times \mathbf{p})^0}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2} U \right) &= 1 \\
\Rightarrow N &= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2 + c^2 \mathbf{p}^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{m_0^2 c^4 + \lambda^2 E_p^2 + 2m_0 c^2 \lambda E_p + c^2 \mathbf{p}^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{\cancel{m_0^2 c^4} + \cancel{c^2 \mathbf{p}^2} + 2m_0 c^2 \lambda E_p + \lambda^2 E_p^2}} \\
&\text{Debido a que } \lambda^2 = 1, \text{ se desarrolla:} \\
&= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{\lambda^2 E_p^2 + 2m_0 c^2 \lambda E_p + \lambda^2 E_p^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{2(m_0 c^2 + \lambda E_p) \lambda E_p}} \\
&= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)}{2\lambda E_p}}.
\end{aligned}$$

Con este factor de normalización se encuentran las soluciones a la ecuación libre de Dirac. Cabe mencionar que se encuentran en una forma exponencial. Esta solución también tiene un espectro de energías negativas, similar al caso de la ecuación de Klein-Gordon.

Ecuación de Dirac en Campo Electromagnético

Para resolver la ecuación de Dirac con campo electromagnético, se introduce el cuatripotencial electromagnético en la ecuación de Dirac (3.92) usando el principio de acoplamiento mínimo:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \equiv \Pi^\mu \quad (3.107)$$

tal que Π^μ es el momento cinético, y p^μ el momento canónico. Esto significa que la ecuación de Dirac cambia a:

$$\begin{aligned} c \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} - \frac{e}{c} A_0 \right) \Psi &= \left(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta m_0 c^2 \right) \Psi \\ \Rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \left(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + eA_0 + \beta m_0 c^2 \right) \Psi \end{aligned} \quad (3.108)$$

Esto se denomina como ecuación de Dirac con potencial electromagnético. Estas ecuaciones tienen soluciones exactas, llamadas soluciones de Volkov, o de Gordon-Volkov. Las funciones de Gordon-Volkov tienen aplicaciones en la ionización de átomos [19], excitación en bandas de semiconductores [20] y dispersión de partículas cargadas [21].

Límite no Relativista

Para encontrar el límite no relativista de la ecuación (3.108), se utiliza la representación de la función de onda con dos espinores (3.93), i.e.:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$$

Utilizando las matrices de Dirac (3.91), la ecuación (3.108) queda como:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} & \tilde{\chi} \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} & \tilde{\varphi} \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{pmatrix}$$

Similar al caso del límite no relativista de Klein-Gordon, se toma el ansatz (3.82), tal que:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}$$

Introduciendo ésta a la ecuación, se obtiene que:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} &= \left[\begin{pmatrix} c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} & \chi \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} & \varphi \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} \right] e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \\ \Rightarrow i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - \frac{im_0 c^2}{\hbar} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \right] e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} &= \left[\begin{pmatrix} c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} & \chi \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} & \varphi \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} \right] e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \\ \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} & \chi \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} & \varphi \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} - m_0 c^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \\ \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} & \chi \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} & \varphi \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2m_0 c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.109)$$

en donde el ultimo elemento $\begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$ proviene del despeje en el penúltimo paso que resulta en la resta de $m_0c^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} - m_0c^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$.

Posteriormente, se analiza la parte inferior de la ecuación pasada:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi &= c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} \varphi + eA_0\chi - 2m_0c^2\chi \\ \Rightarrow \left(2m_0c^2 - eA_0 + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \chi &= c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} \varphi \end{aligned} \quad (3.110)$$

Luego se le aplican las condiciones no relativistas:

$$|i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t}| \ll |m_0c^2\chi| \quad (\text{Energía cinética mucho menor que la energía de masa en descanso})$$

$$|eA_0\chi| \ll |m_0c^2\chi| \quad (\text{Energía potencial mucho menor que la energía en descanso})$$

Tal que la ecuación (3.110) es:

$$\begin{aligned} \left(2m_0c^2 - eA_0 + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \chi &= c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi} \varphi \\ \Rightarrow \chi &= \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi}}{2m_0c^2} \varphi \end{aligned} \quad (3.111)$$

Debido al factor que se le tiene que agregar a φ para obtener χ , se nota que es una componente chica de la función de onda.

Ahora podemos analizar la parte superior de la ecuación (3.109), introduciendo el valor de χ de la ecuación (3.111):

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Pi})}{2m_0} \varphi + eA_0\varphi \quad (3.112)$$

Utilizamos nuevamente la relación de la ecuación (3.103) y sustituimos el valor del momento cinético usando la ecuación (3.7.2) para obtener que el primer elemento del lado derecho de la ecuación pasada se pueda reescribir como:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \left[\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \times \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right] \\ &= \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \left[-\hbar^2 (\nabla \times \nabla) + \frac{e^2}{c^2} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) + \frac{ie\hbar}{c} ((\mathbf{A} \times \nabla) + (\nabla \times \mathbf{A})) \right] \\ &= \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (3.112), obtenemos:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2}{2m_0} - \frac{e\hbar}{2m_0 c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + eA_0 \right] \varphi \quad (3.113)$$

Esta es la famosa ecuación de Pauli, por lo que los dos componentes de φ describen los grados de libertad del spin. Esta ecuación brinda el factor giromagnético correcto para un electrón libre ($g = 2$). Debido a que el spin no depende de la velocidad de la partícula estudiada, la ecuación de Dirac es útil para describir partículas de spin un medio.

3.7.3. Función de Onda de Gordon-Volkov

Para una partícula libre a la que se le aplica un potencial vectorial bajo la aproximación dipolar $A(t)$, la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (p + eA(t))^2 \Psi \quad (3.114)$$

Como se vio en la sección 3.6.3, bajo la norma de velocidad reducida esto se expresa como:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^V}{\partial t} = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{e}{m} A(t) \cdot p \right) \Psi^V. \quad (3.115)$$

A esta ecuación se le puede buscar una solución en forma de:

$$\Psi^V = C \exp(k \cdot r) f_k(t) \quad (3.116)$$

Sustituimos la ecuación (3.116) en (3.115) y desarrollamos:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (C \exp(k \cdot r) f_k(t)) &= \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{-i\hbar e}{m} A(t) \nabla \right) C \exp(k \cdot r) f_k(t) \\ \Rightarrow i\hbar \frac{\partial f_k(t)}{\partial t} &= \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{-i\hbar e}{m} A(t) \nabla \right) f_k(t) \end{aligned}$$

Dado que $\exp(k \cdot p)$ es eigenfunción de p , con un eigenvalor de $\hbar k$, se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_k(t)}{\partial t} &= \left(-\frac{i\hbar k^2}{2m} - \frac{ie}{m} k \cdot A(t) \right) f_k(t) \\
\Rightarrow \frac{df_k(t)}{f_k(t)} &= \left(-\frac{i\hbar k^2}{2m} - \frac{ie}{m} k \cdot A(t) \right) dt \\
\ln f_k(t) + C &= \left(-\frac{i\hbar k^2}{2m} t - ik \cdot \int \frac{e}{m} A(t') dt' \right) \\
\Rightarrow f_k(t) &= C \exp \left(-\frac{iE_k t}{\hbar} - ik \cdot \alpha(t) \right) \tag{3.117}
\end{aligned}$$

en donde $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ es la energía cinética y $\alpha(t)$ es el movimiento ponderomotriz visto en la sección [3.5.3](#).

Sustituyendo la ecuación [\(3.117\)](#) en [\(3.116\)](#) se obtiene el resultado:

$$\Psi^V = N \exp \left(ik \cdot (r - \alpha(t)) - \frac{iE_k}{\hbar} \right) \tag{3.118}$$

en donde N es un factor de normalización.

La ecuación [\(3.118\)](#) es la función de onda de Gordon-Volkov para la norma de velocidad reducida. Para obtener la función de Gordon-Volkov bajo la aproximación dipolar (o, dicho de otra manera, la función de la norma de velocidad), se debe sustituir la ecuación [\(3.118\)](#) en la ecuación [\(3.64\)](#) para obtener:

$$\Psi = N \exp \left(ik \cdot (r - \alpha(t)) - \frac{iE_k}{\hbar} - \frac{ie^2}{2\hbar m} \int A^2(t') dt' \right). \tag{3.119}$$

De forma similar, se puede hallar la función de Gordon-Volkov sustituyendo la ecuación [\(3.119\)](#) en la ecuación [\(3.69\)](#) para obtener:

$$\Psi^L = N \exp \left(\frac{i}{\hbar} [\hbar k + eA(t)] \cdot r - \frac{i}{2m\hbar} \int (\hbar k + eA(t'))^2 dt' \right). \tag{3.120}$$

Finalmente, se sustituye la ecuación [\(3.119\)](#) en la ecuación [\(3.73\)](#) para obtener la función de Gordon-Volkov bajo el marco de Kramers-Henneberger:

$$\Psi^A = N \exp \left[i \left(k \cdot r - \frac{E_k t}{\hbar} \right) \right]. \tag{3.121}$$

Esto aplica para casos no relativistas. Con respecto a las funciones derivadas de la solución de la ecuación de Dirac se pueden leer los artículos de Gordon [\[1\]](#) y de Volkov [\[2\]](#), disponibles en idioma alemán, en donde éstas a veces se conocen como funciones de Dirac-Volkov y representan las soluciones para partículas relativistas de spin cero y un medio, respectivamente.

Capítulo 4

Metodología

4.0.1. Método de Wei-Norman

La teoría fundamental establecida en esta sección es como la propuesta por James Wei y Edward Norman en su artículo [4], en donde comienza proponiendo que un operador lineal $H(t)$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$H(t) = \sum_{i=1}^m a_i(t)H_i, \quad \text{con } m \text{ finito} \quad (4.1)$$

En donde $a_i(t)$ son operadores escalares dependientes del tiempo y H_i son operadores independientes del tiempo. Sea el álgebra de Lie L generada por $H(t)$ de una dimensión finita n . Esto implica que existe una vecindad de $t = 0$ en la cual la solución a la siguiente ecuación:

$$\frac{dU}{dt} = H(t)U, \quad U(0) = I \quad (4.2)$$

Se puede expresar así:

$$U(t) = e^{g_1(t)H_1} e^{g_2(t)H_2} \dots e^{g_n(t)H_n} \quad (4.3)$$

en donde H_1, \dots, H_n son la base de L y $g_i(t)$ son funciones escalares dependientes del tiempo. Ya que $n \leq m$, sabemos que: $a_i(t) \equiv 0$ si $i > m$, por lo que podemos definir:

$$A(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t)H_i$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.2) y utilizando la (4.1), obtenemos que:

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^n a_i(t)H_i \cdot U \quad (4.4)$$

Por otro lado, se deriva la ecuación (4.3) para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{d\left(\prod_{i=1}^n e^{g_i(t)H_i}\right)}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{g}_i(t) \left[\prod_{j=1}^{i-1} e^{g_j H_j} \right] H_i \left[\prod_{j=i}^n e^{g_j H_j} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Luego, sustituimos la ecuación (4.5) en la (4.4) y operamos por el lado derecho U^{-1} usando la definición de (4.3):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i(t)H_i \cdot U \cdot U^{-1} &= \sum_{i=1}^n a_i(t)H_i \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{g}_i(t) \left[\prod_{j=1}^{i-1} e^{g_j H_j} \right] H_i \left[\prod_{j=i}^n e^{g_j H_j} \right] \cdot \left[\prod_{j=1}^n e^{-g_j H_j} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{g}_i(t) \left[\prod_{j=1}^{i-1} e^{g_j H_j} \right] H_i \left[\prod_{j=i-1}^1 e^{-g_j H_j} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$= \sum_{i=1}^n \dot{g}_i(t) \left[\prod_{j=1}^{i-1} e^{g_j \text{ad} H_i} \right] H_i \quad (4.7)$$

A pesar de que la ecuación (4.7) es clave en esta tesis, podemos aplicar la ecuación (3.19) del Lema 2 en la ecuación (4.6) para obtener que:

$$\sum_{k=1}^n a_k(t)H_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \dot{g}_i(t) \xi_{ki} H_k$$

Los operadores H_k pertenecen a la base de L , por lo que son linealmente independientes. Observando la ecuación anterior, esto establece que hay una relación lineal entre $a_k(t)$ y $\dot{g}_i(t)$, esto es:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2n} \\ & & & \\ & & & \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{g}_n \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Aquí ξ es invertible dado que ξ_{ki} es una función analítica de g , por lo que su determinante también es analítico. En el tiempo $t = 0$ $\xi = I$, lo cual implica

que su determinante en tiempo cero es distinto a cero. Por lo tanto, existe una vecindad de $t = 0$ en donde la determinante es distinta a cero. Usando la invertibilidad, operamos ξ^{-1} en el lado izquierdo y obtenemos que:

$$\frac{dg}{dt} = \xi^{-1}a$$

Capítulo 5

Resultados

5.1. Sistema Físico

Desde su concepción, esta tesis estaba ligada al artículo de Lefebvre [3], en donde se estudia la resonancia de transmisión de una partícula a través de varias barreras de potencial, además de 2 campos eléctricos, uno estático y otro fluctuante. Sin embargo, para la comunidad científica el estudio de estados de Volkov es de mayor interés [22, 23].

Para los propósitos de esta tesis, se decidió considerar el caso de una partícula en un potencial, como podría ser una barrera de potencial constante, que llamaremos V en la presente. Además, al sistema se le agregan dos potenciales vectoriales: uno que actúa como un campo eléctrico constante y será representado por el potencial vectorial Fx , y el otro siendo un potencial vectorial oscilante, el cual se anotará como $A_0 \cos(\omega t)$, siendo omega la frecuencia angular.

El sistema que estudiaremos aquí considera los casos en los que existe una aproximación dipolar, lo que reduce la complejidad del potencial vectorial oscilante a depender sólo del tiempo. Este tipo de sistemas se dan al cumplir las dos siguientes condiciones:

- La longitud de onda de la radiación incidente al sistema tiene una longitud de onda larga comparada con el tamaño del sistema atómico estudiado; y
- La intensidad de la radiación no es tan alta como para tener que considerar efectos relativistas.

En general, la investigación sobre la resonancia de tunelamiento es un tema de interés [24–26], así como la dispersión de partículas por láser de alta intensidad [27–32], física de láseres [33–39], ionización multifotónica [40–42], y hasta de semiconductores [43], en esos casos se analizan sistemas similares a los que se estudian en esta tesis, por lo que podría ser concebible utilizar el método desarrollado en esta tesis para estudiar dichos sistemas.

5.1.1. Nuestro Sistema

Todas las ecuaciones de Schrödinger que se resolverán en esta tesis contienen una Hamiltoniana que se puede descomponer en un producto entre un operador escalar dependiente de tiempo y un operador independiente del tiempo como sigue:

$$H_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad H_2 = \frac{\partial}{\partial x} \quad H_3 = x \quad H_4 = \mathbb{1}$$

$a_1 \qquad a_2 \qquad a_3 \qquad a_4$

en donde se asocia el operador independiente del tiempo con un operador escalar no especificado aún.

Se asegura que los operadores $\{H_i\}$ son la base de un álgebra de Lie soluble. Para ésto, es necesario encontrar los valores de sus conmutaciones, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [H_1, H_2] &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x} \right] = 0 \\ [H_1, H_3] &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, x \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial x} \right) - x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ &= x \cancel{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} + 2 \frac{\partial}{\partial x} - x \cancel{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} = 2H_2 \\ [H_1, H_4] &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \mathbb{1} \right] = 0 \\ [H_2, H_3] &= \left[\frac{\partial}{\partial x}, x \right] = \mathbb{1} = H_4 \\ [H_2, H_4] &= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \mathbb{1} \right] = 0 \\ [H_3, H_4] &= [x, \mathbb{1}] = 0 \end{aligned}$$

Ésto quiere decir que $\mathfrak{L}' = \{H_2, H_4\}$. Si se repite el procedimiento para los elementos de \mathfrak{L}' , notamos que H_2 no conmuta con H_4 , por lo que $\mathfrak{L}'' = \{0\}$ y por ende, $\{H_i\}$ genera un álgebra de Lie soluble al segundo grado.

Utilizando la ecuación (4.7):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i(t)H_i &= \sum_{i=1}^n \dot{g}_i(t) \left[\prod_{j=1}^{i-1} \exp \{g_j \text{ad}H_j\} \right] H_i \\ &= \dot{g}_1 H_1 + \dot{g}_2 [\exp \{g_1 \text{ad}H_1\}] H_2 + \dot{g}_3 [\exp \{g_1 \text{ad}H_1\} \exp \{g_2 \text{ad}H_2\}] H_3 \\ &\quad + \dot{g}_4 [\exp \{g_1 \text{ad}H_1\} \exp \{g_2 \text{ad}H_2\} \exp \{g_3 \text{ad}H_3\}] H_4 \end{aligned}$$

Para proceder, se debe notar que:

$$\begin{aligned} e^{\text{ad}X} &= 1 + \text{ad}X + \frac{(\text{ad}X)^2}{2!} + \frac{(\text{ad}X)^3}{3!} + \dots \\ \Rightarrow e^{\text{ad}X}Y &= Y + [X, Y] + \frac{[X, [X, Y]]}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Sustituimos esta definición en la ecuación anterior, por lo que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 a_i H_i &= \dot{g}_1 H_1 + \dot{g}_2 e^{g_1 \text{ad}H_1} H_2 + \dot{g}_3 e^{g_1 \text{ad}H_1} e^{g_2 \text{ad}H_2} H_3 \\ &\quad + \dot{g}_4 e^{g_1 \text{ad}H_1} e^{g_2 \text{ad}H_2} e^{g_3 \text{ad}H_3} H_4 \\ &= \dot{g}_1 H_1 + \dot{g}_2 \left(H_2 + g_1 \overrightarrow{[H_1, H_2]} + \dots \right) \\ &\quad + \dot{g}_3 e^{g_1 \text{ad}H_1} \left(H_3 + g_2 \overrightarrow{[H_2, H_3]} + \frac{g_2^2}{2} \overrightarrow{[H_2, [H_2, H_3]]} + \dots \right) \\ &\quad + \dot{g}_4 e^{g_1 \text{ad}H_1} e^{g_2 \text{ad}H_2} \left(H_4 + g_3 \overrightarrow{[H_3, H_4]} + \frac{g_3^2}{2} \overrightarrow{[H_3, [H_3, H_4]]} + \dots \right) \\ &= \dot{g}_1 H_1 + \dot{g}_2 H_2 + \dot{g}_3 e^{g_1 \text{ad}H_1} (H_3 + g_2 H_4) + \dot{g}_4 e^{g_1 \text{ad}H_1} e^{g_2 \text{ad}H_2} H_4 \end{aligned}$$

Aquí cabe aclarar que no se indagará sobre la expansión más allá del término cuadrático, debido a que los operadores son un álgebra de Lie soluble a segundo grado, por lo que los términos mayores al cuadrático deben dar igual a cero. También nos apoyamos del hecho de que H_4 no conmuta con ningún término, por lo que se resuelve rápidamente el último elemento de la sumatoria de la ecuación.

Continuando la simplificación:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 a_i H_i &= \dot{g}_1 H_1 + \dot{g}_2 H_2 + \dot{g}_3 (e^{g_1 \text{ad} H_1} H_3 + g_2 e^{g_1 \text{ad} H_1} H_4) + \dot{g}_4 H_4 \\
&= \dot{g}_1 H_1 + \dot{g}_2 H_2 + \dot{g}_3 \left(H_3 + g_1 \cancel{[H_1, H_3]} + g_1^2 [H_1, [H_1, H_3]] + \cdots + g_2 H_4 \right) + \dot{g}_4 H_4 \\
&= \dot{g}_1 H_1 + \dot{g}_2 H_2 + \dot{g}_3 (H_3 + 2g_1 H_2 + g_2 H_4) + \dot{g}_4 H_4
\end{aligned}$$

Reacomodando de una manera práctica, esto termina siendo:

$$a_1 H_1 + a_2 H_2 + a_3 H_3 + a_4 H_4 = \dot{g}_1 H_1 + (\dot{g}_2 + 2\dot{g}_3 g_1) H_2 + \dot{g}_3 H_3 + (\dot{g}_4 + \dot{g}_3 g_2) H_4$$

Se utiliza el hecho de que $\{H_i\}$ son base para escribir la ecuación pasada en su forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2g_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dot{g}_3 \\ \dot{g}_4 \end{pmatrix}$$

Usamos cualquier método para hallar la matriz inversa (el autor utilizó el método de Gauss-Jordan) y multiplicamos esta inversa por el lado izquierdo, para obtener:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2g_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -g_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dot{g}_3 \\ \dot{g}_4 \end{pmatrix}$$

Por lo que hay que resolver las cuatro ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \dot{g}_1 \\
a_2 - 2g_1 a_3 &= \dot{g}_2 \\
a_3 &= \dot{g}_3 \\
a_4 - g_2 a_3 &= \dot{g}_4
\end{aligned} \tag{5.1}$$

La última parte de esta sección será dedicada a convertir el resultado que obtenemos con el método de Wei-Norman (4.3) a una solución única usando la fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff (fórmula BCH de ahora en adelante) (3.10) considerando las relaciones de conmutación para nuestro sistema.

Las primeras dos funciones exponenciales que juntaremos son los que contienen los operadores H_4 y H_3 principalmente porque el operador H_4 conmuta con todos los demás operadores y la fórmula BCH se simplifica:

$$e^{g_3 H_3} e^{g_4 H_4} = e^{g_3 H_3 + g_4 H_4}$$

a este resultado ahora se le agrega la función exponencial que asociada al operador H_2 :

$$\begin{aligned} e^{g_2 H_3} e^{g_3 H_3 + g_4 H_4} &= e^{g_2 H_2 + g_3 H_3 + g_4 H_4 + \frac{1}{2}[g_2 H_2, g_3 H_3 + g_4 H_4] + \dots} \\ &= e^{g_2 H_2 + g_3 H_3 + g_4 H_4 + \frac{1}{2} g_2 g_3 H_4} \end{aligned}$$

en este paso se usó el hecho de que H_2 conmuta con todos los operadores exceptuando H_3 y dicha conmutación resulta en H_4 , la cual ya se estableció que conmuta con todos los operadores, por lo cual no es necesario escribir mas términos de la formula BCH mas allá de los escritos explícitamente.

Finalmente, se le suma el último término de la solución:

$$\begin{aligned} e^{g_1 H_1} e^{g_2 H_2 + g_3 H_3 + g_4 H_4 + \frac{1}{2} g_2 g_3 H_4} &= \\ &= e^{g_1 H_1 + g_2 H_2 + g_3 H_3 + g_4 H_4 + \frac{1}{2} g_2 g_3 H_4} \times \\ &e^{\frac{1}{2} [g_1 H_1, g_2 H_2 + g_3 H_3 + g_4 H_4 + \frac{1}{2} g_2 g_3 H_4]} \times \\ &e^{\frac{1}{12} [g_1 H_1, [g_1 H_1, g_2 H_2 + g_3 H_3 + g_4 H_4 + \frac{1}{2} g_2 g_3 H_4]]} \times \\ &e^{\frac{1}{12} [g_2 H_2 + g_3 H_3 + g_4 H_4 + \frac{1}{2} g_2 g_3 H_4, [g_2 H_2 + g_3 H_3 + g_4 H_4 + \frac{1}{2} g_2 g_3 H_4, g_1 H_1]]} \dots \\ &= e^{g_1 H_1 + g_2 H_2 + g_3 H_3 + g_4 H_4 + \frac{1}{2} g_2 g_3 H_4 + \frac{1}{2} (2g_1 g_3 H_2)} \times \\ &e^{\frac{1}{12} \left(\overrightarrow{[g_1 H_1, g_1 g_3 H_2]} + [g_2 H_2 + g_3 H_3 + g_4 H_4 + \frac{1}{2} g_2 g_3 H_4, -2g_1 g_3 H_2] \right)} \\ &= e^{g_1 H_1 + g_2 H_2 + g_3 H_3 + g_4 H_4 + \frac{1}{2} g_2 g_3 H_4 + g_1 g_3 H_2 + \frac{1}{12} (-2g_1 g_3^2 (-H_4))} \\ \Rightarrow e^{g_1 H_1} e^{g_2 H_2} e^{g_3 H_3} e^{g_4 H_4} &= e^{g_1 H_1 + (g_2 + g_1 g_3) H_2 + g_3 H_3 + \left(g_4 + \frac{1}{2} g_2 g_3 + \frac{1}{6} g_1 g_3^2 \right) H_4} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Este será la solución única que se utilizará en esta tesis en la sección de resultados.

5.2. Norma de Velocidad Reducida

La TDSE bajo la norma de velocidad reducida, definida bajo la ecuación Hamiltoniana (3.68) cuando tenemos una barrera de potencial y dos campos

eléctricos actuando sobre el sistema, uno fijo y otro oscilante, es :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V + \frac{iFx}{\hbar} + \frac{e}{m} A_0 \cos(\omega t) \frac{\partial}{\partial x} \right] \Psi \quad (5.3)$$

Tal y como establece la metodología, la Hamiltoniana se separa en varios operadores independientes del tiempo y sus escalares dependientes del tiempo:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} & H_2 &= \frac{\partial}{\partial x} & H_3 &= x & H_4 &= \mathbb{1} \\ a_1 &= \frac{i\hbar}{2m} & a_2 &= \frac{eA_0 \cos(\omega t)}{m} & a_3 &= \frac{iF}{\hbar} & a_4 &= -\frac{iV}{\hbar} \end{aligned}$$

Los valores de los operadores escalares, "a", se utilizan en la ecuación (5.1), de donde se deben desarrollar las cuatro ecuaciones diferenciales, empezando por la ecuación referente a g_1 :

$$\dot{g}_1 = a_1 = \frac{i\hbar}{2m} \Rightarrow g_1 = \frac{i\hbar t}{2m}$$

A continuación se pasa a la ecuación g_3 , debido a su sencillez:

$$\dot{g}_3 = a_3 = \frac{iF}{\hbar} \Rightarrow g_3 = \frac{iFt}{\hbar}$$

Ahora se resuelve g_2 , utilizando el resultado encontrado en g_1 :

$$\begin{aligned} \dot{g}_2 &= a_2 - 2g_1 a_3 = \frac{eA_0 \cos(\omega t)}{m} - 2 \left(\frac{i\hbar t}{2m} \right) \left(\frac{iF}{\hbar} \right) \\ \Rightarrow g_2 &= \frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} + \frac{Ft^2}{2m} \end{aligned}$$

Finalmente se encuentra g_4 , con el resultado obtenido en g_2 :

$$\begin{aligned} \dot{g}_4 &= a_4 - g_2 a_3 = -\frac{iV}{\hbar} - \left(\frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} + \frac{Ft^2}{2m} \right) \left(\frac{iF}{\hbar} \right) \\ \Rightarrow g_4 &= -\frac{iVt}{\hbar} + \frac{ieA_0 F \cos(\omega t)}{m\omega^2 \hbar} - \frac{iF^2 t^3}{6m\hbar} \end{aligned}$$

Por lo que la función de onda es simplemente:

$$U = e^{g_1 H_1} e^{g_2 H_2} e^{g_3 H_3} e^{g_4 H_4} \quad (5.4)$$

Como establece la ecuación (4.3). Ahora utilizamos el resultado encontrado en la ecuación (5.2):

$$U = e^{g_1 H_1 + (g_2 + g_1 g_3) H_2 + g_3 H_3 + (g_4 + \frac{1}{2} g_2 g_3 + \frac{1}{6} g_1 g_3^2) H_4}. \quad (5.5)$$

Resolviendo por secciones se calcula primero:

$$\begin{aligned} g_2 + g_1 g_3 &= \frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} + \frac{Ft^2}{2m} - \frac{Ft^2}{2m} \\ &= \frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} \end{aligned}$$

y segundo:

$$\begin{aligned} g_4 + \frac{1}{2}g_2 g_3 + \frac{1}{6}g_1 g_3^2 &= -\frac{iVt}{\hbar} + \frac{ieA_0 F \cos(\omega t)}{m\omega^2 \hbar} - \frac{iF^2 t^3}{6m\hbar} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} + \frac{Ft^2}{2m} \right) + \frac{1}{6} \frac{i\hbar t}{2m} \left(-\frac{F^2 t^2}{\hbar^2} \right) \\ &= -\frac{iVt}{\hbar} + \frac{ieA_0 F \cos(\omega t)}{m\omega^2 \hbar} - \cancel{\frac{iF^2 t^3}{6m\hbar}} \\ &\quad + \frac{iA_0 Ft \sin(\omega t)}{2m\omega \hbar} + \cancel{\frac{iF^2 t^3}{Am\hbar}} - \cancel{\frac{iF^2 t^3}{2m\hbar}} \\ &= -\frac{iVt}{\hbar} + \frac{ieA_0 F \cos(\omega t)}{m\omega^2 \hbar} + \frac{iA_0 Ft \sin(\omega t)}{2m\omega \hbar} \end{aligned}$$

Usando estos resultados obtenemos que la el operador de evolución temporal único es:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= U \Psi(x, 0) \\ &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} t E_n + \frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{ieA_0 F \cos(\omega t)}{m\omega^2 \hbar} + \frac{iA_0 Ft \sin(\omega t)}{2m\omega \hbar} \right] \varphi_n \end{aligned}$$

En donde φ_n es la solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V - Fx \right) \varphi_n = E_n \varphi_n.$$

5.3. Norma de Velocidad

La TDSE bajo la norma de velocidad se da por la ecuación [3.60](#), establecida como:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + eA_0 \cos(\omega t) \right)^2 + V - Fx \right] \Psi \\ \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \left[\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{ie^2 A_0^2 \cos^2(\omega t)}{2m\hbar} + \frac{A_0 e \cos(\omega t)}{m} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{iV}{\hbar} + \frac{iFx}{\hbar} \right] \Psi \end{aligned} \quad (5.6)$$

En esta TSDE, los operadores escalares temporales son:

$$a_1 = \frac{i\hbar}{2m} \quad a_2 = \frac{eA_0 \cos(\omega t)}{m} \quad a_3 = \frac{iF}{\hbar} \quad a_4 = -\frac{iV}{\hbar} - \frac{ie^2 A_0^2 \cos^2(\omega t)}{2m\hbar}$$

Y, debido a que la Hamiltoniana se divide en los mismos operadores independientes del tiempo, podemos utilizar las mismas ecuaciones diferenciales de la sección anterior, definidos por la ecuación (5.1):

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= a_1 \\ \dot{g}_2 &= a_2 - 2g_1 a_3 \\ \dot{g}_3 &= a_3 \\ \dot{g}_4 &= a_4 - g_2 a_3 \end{aligned}$$

Se resuelve la primera ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= \frac{i\hbar}{2m} \\ \Rightarrow g_1 &= \frac{i\hbar}{2m} t \end{aligned} \quad (5.7)$$

Posteriormente resolvemos la tercera ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{g}_3 &= \frac{iF}{\hbar} \\ \Rightarrow g_3 &= \frac{iF}{\hbar} t \end{aligned} \quad (5.8)$$

Utilizamos ahora el resultado de la primera ecuación diferencial para resolver la segunda ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{g}_2 &= \frac{eA_0 \cos(\omega t)}{m} - 2 \left(\frac{i\hbar}{2m} t \right) \frac{iF}{\hbar} \\ \Rightarrow g_2 &= \frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} + \frac{F}{2m} t^2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Resolvemos la ecuación diferencial 4 utilizando lo encontrado en la ecuación 3:

$$\begin{aligned} \dot{g}_4 &= -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{e^2 A_0^2 \cos^2(\omega t)}{2m} + V \right) - \left(\frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} + \frac{F}{2m} t^2 \right) \frac{iF}{\hbar} \\ \Rightarrow g_4 &= -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{e^2 A_0^2}{2m} \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right) + Vt \right) - \left(-\frac{eA_0 \cos(\omega t)}{m\omega^2} + \frac{F}{6m} t^3 \right) \frac{iF}{\hbar} \\ \Rightarrow g_4 &= -\frac{i}{\hbar} \left[\frac{e^2 A_0^2}{4m} \left(t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right) + Vt - F \left(\frac{eA_0 \cos(\omega t)}{m\omega^2} - \frac{Ft^3}{6m} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Finalmente utilizamos la solución única hallada en la ecuación (5.2):

$$U = e^{g_1 H_1 + (g_2 + g_1 g_3) H_2 + g_3 H_3 + (g_4 + \frac{1}{2} g_2 g_3 + \frac{1}{6} g_1 g_3^2) H_4}. \quad (5.11)$$

De similar manera al caso anterior se resuelve por partes:

$$\begin{aligned} g_2 + g_1 g_3 &= \frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} + \frac{Ft^2}{2m} - \frac{Ft^2}{2m} \\ &= \frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} \end{aligned}$$

y posteriormente:

$$\begin{aligned} g_4 + \frac{1}{2} g_2 g_3 + \frac{1}{6} g_1 g_3^2 &= -\frac{ie^2 A_0^2}{4m\hbar} \left(t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right) - \frac{iVt}{\hbar} + \frac{iFeA_0 \cos(\omega t)}{m\omega^2 \hbar} - \frac{iF^2 t^3}{6m\hbar} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} + \frac{Ft^2}{\hbar} \right) \frac{iFt}{\hbar} + \frac{1}{6} \frac{i\hbar t}{2m} \left(\frac{-F^2 t^2}{\hbar^2} \right) \\ &= -\frac{ie^2 A_0^2}{4m\hbar} \left(t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right) - \frac{iVt}{\hbar} + \frac{iFeA_0 \cos(\omega t)}{m\omega^2 \hbar} - \frac{iF^2 t^3}{6m\hbar} \\ &\quad + \frac{ieA_0 Ft \sin(\omega t) i}{2m\omega \hbar} + \frac{iF^2 t^3}{4m\hbar} - \frac{iF^2 t^3}{12m\hbar} \\ &= -\frac{ie^2 A_0^2}{4m\hbar} \left(t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right) - \frac{iVt}{\hbar} + \frac{iFeA_0}{m\omega \hbar} \left(\frac{\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{t \sin(\omega t)}{2} \right). \end{aligned}$$

Con esto deducimos que el operador de evolución temporal único es:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= U \Psi(x, 0) \\ &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} t E_n + \frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{\hbar} \left[\frac{e^2 A_0^2}{4m} \left(t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right) + \frac{FeA_0}{m\omega} \left(\frac{\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{t \sin(\omega t)}{2} \right) \right] \right] \varphi_n \end{aligned}$$

En donde φ_n es la solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V - Fx \right) \varphi_n = E_n \varphi_n.$$

5.4. Norma de Longitud

La TDSE bajo la norma de longitud se da por la ecuación (3.70), y se establece como:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V - Fx - \frac{eA_0\omega \sin(\omega t)}{\omega} x \right] \Psi \\ \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \left[\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{iF}{\hbar} + \frac{ieA_0\omega \sin(\omega t)}{\hbar} \right) x - \frac{iV}{\hbar} \right] \Psi \end{aligned}$$

Los operadores escalares temporales resultan ser:

$$a_1 = \frac{i\hbar}{2m} \quad a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{iF}{\hbar} + \frac{ieA_0\omega \sin(\omega t)}{\hbar} \quad a_4 = -\frac{iV}{\hbar}$$

Se utilizan ecuaciones diferenciales (5.1) para hallar las g_i :

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= a_1 \\ \dot{g}_2 &= a_2 - 2g_1 a_3 \\ \dot{g}_3 &= a_3 \\ \dot{g}_4 &= a_4 - g_2 a_3 \end{aligned}$$

Se resuelve primero para g_1 :

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= \frac{i\hbar}{2m} \\ \Rightarrow g_1 &= \frac{i\hbar}{2m} t \end{aligned}$$

Posteriormente se resuelve la siguiente ecuación sencilla, g_3 :

$$\begin{aligned} \dot{g}_3 &= \frac{iF}{\hbar} + \frac{ieA_0\omega \sin(\omega t)}{\hbar} \\ \Rightarrow g_3 &= \frac{iFt}{\hbar} - \frac{ieA_0 \cos(\omega t)}{\hbar} \end{aligned}$$

Ahora se resuelve la ecuación diferencial para g_2 , utilizando lo encontrado en g_1 :

$$\dot{g}_2 = 0 - 2 \left(\frac{i\hbar}{2m} t \right) \left[\frac{iF}{\hbar} + \frac{ieA_0\omega \sin(\omega t)}{\hbar} \right]$$

Para resolver esta ecuación se utiliza una integral del apéndice A, de tal forma que g_2 resulta ser:

$$g_2 = \frac{1}{m} \left[\frac{Ft^2}{2} + eA_0 \left(-t \cos(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) \right]$$

Finalmente, se resuelve la ecuación diferencial para g_4 con lo encontrado para g_2 , por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{g}_4 &= -\frac{iV}{\hbar} - \frac{1}{m} \left\{ \frac{Ft^2}{2} + eA_0 \left[-t \cos(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right] \right\} \left\{ \frac{iF}{\hbar} + \frac{ieA_0 \omega \sin(\omega t)}{\hbar} \right\} \\ &= -\frac{iV}{\hbar} - \frac{1}{m} \left\{ \frac{iF^2 t^2}{2\hbar} + \frac{ieFA_0 \omega t^2 \sin(\omega t)}{2\hbar} + \frac{ieFA_0}{\hbar} \left(-t \cos(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{ie^2 A_0^2 \omega}{\hbar} \left(-t \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \frac{\sin^2(\omega t)}{\omega} \right) \right\} \end{aligned}$$

Se utilizan las integrales del apéndice [A](#) para resolver esta ecuación diferencial, resultando en:

$$\begin{aligned} g_4 &= -\frac{iVt}{\hbar} - \frac{1}{m} \left\{ \frac{iF^2 t^3}{6\hbar} + \frac{ieFA_0}{2\hbar} \left(-t^2 \cos(\omega t) + \frac{2}{\omega} \left(t \sin(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{ieFA_0}{\omega \hbar} \left(-t \sin(\omega t) - \frac{\cos(\omega t)}{\omega} - \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{ie^2 A_0^2}{\hbar} \left(\left(t \cos(2\omega t) - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right) + \frac{1}{2} \left(t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right) \right) \right\} \\ &= -\frac{iVt}{\hbar} - \frac{1}{m} \left\{ \frac{iF^2 t^3}{6\hbar} + \frac{ieFA_0}{2\hbar} \left[-t^2 \cos(\omega t) + \frac{2}{\omega} \left(t \sin(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2}{\omega} \left(t \sin(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right) - \frac{2 \cos(\omega t)}{\omega^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{ie^2 A_0^2}{\hbar} \left[t \cos(2\omega t) - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} + \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right] \right\} \\ &= -\frac{iVt}{\hbar} - \frac{1}{m} \left\{ \frac{iF^2 t^3}{6\hbar} + \frac{ieFA_0}{2\hbar} \left[-\cos(\omega t) \left(t^2 + \frac{2}{\omega^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{ie^2 A_0^2}{\hbar} \left[t \left(\cos(2\omega t) + \frac{1}{2} \right) - \frac{3 \sin(2\omega t)}{4\omega} \right] \right] \right\} \end{aligned}$$

Nuevamente se recurre a la ecuación [\(5.2\)](#) para hallar la solución única del operador de evolución temporal. Con este objetivo se realiza primero la operación:

$$\begin{aligned} g_2 + g_1 g_3 &= \frac{Ft^2}{2m} - \frac{eA_0 t \cos(\omega t)}{m} + \frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} + \frac{i\hbar t}{2m} \left(\frac{iFt}{\hbar} - \frac{ieA_0 \cos(\omega t)}{\hbar} \right) \\ &= \frac{Ft^2}{2m} - \frac{eA_0 t \cos(\omega t)}{m} + \frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} - \frac{Ft^2}{2m} + \frac{eA_0 t \cos(\omega t)}{2m} \\ &= \frac{eA_0}{m} \left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - \frac{t \cos(\omega t)}{2} \right). \end{aligned}$$

Posteriormente se efectúa la operación:

$$\begin{aligned}
g_4 + \frac{1}{2}g_2g_3 + \frac{1}{6}g_1g_3^2 &= -\frac{iVt}{\hbar} - \frac{1}{m} \left\{ \frac{iF^2t^3}{6\hbar} - \frac{ieFA_0t^2 \cos(\omega t)}{2\hbar} - \frac{ieFA_0}{\hbar\omega} \cos(\omega t) \right. \\
&\quad \left. \frac{ie^2A_0^2t \cos(2\omega t)}{\hbar} + \frac{ie^2A_0^2t}{2\hbar} - \frac{3ie^2A_0^2 \sin(2\omega t)}{4\omega\hbar} \right\} \\
&+ \frac{1}{2m} \left[\frac{Ft^2}{2} + eA_0 \left(-t \cos(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right) \right] \left[\frac{iFt}{\hbar} - \frac{ieA_0 \cos(\omega t)}{\hbar} \right] \\
&+ \frac{i\hbar t}{12m} \left(\frac{iFt}{\hbar} - \frac{ieA_0 \cos(\omega t)}{\hbar} \right)^2 \\
&= -\frac{iVt}{\hbar} - \frac{iF^2t^3}{6m\hbar} + \frac{ieFA_0t^2 \cos(\omega t)}{2m\hbar} + \frac{ieFA_0 \cos(\omega t)}{m\hbar\omega} \\
&\quad - \frac{ie^2A_0^2t \cos(2\omega t)}{m\hbar} - \frac{ie^2A_0^2t}{2m\hbar} + \frac{3ie^2A_0^2 \sin(2\omega t)}{m\omega\hbar} \\
&+ \frac{1}{2m} \left[\frac{iF^2t^3}{2\hbar} - \frac{ieA_0Ft^2 \cos(\omega t)}{2\hbar} - \frac{ieA_0Ft^2 \cos(\omega t)}{\hbar} \right. \\
&\quad \left. + \frac{ie^2A_0^2t \cos^2(\omega t)}{\hbar} + \frac{ieA_0Ft \sin(\omega t)}{\hbar\omega} - \frac{ie^2A_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{\hbar\omega} \right] \\
&\quad \frac{i\hbar t}{12m} \left(-\frac{F^2t^3}{\hbar^2} - \frac{e^2A_0^2 \cos^2(\omega t)}{\hbar^2} + \frac{eA_0Ft \cos(\omega t)}{\hbar^2} \right) \\
&= -\frac{iVt}{\hbar} + \frac{ieFA_0t^2 \cos(\omega t)}{3m\hbar} + \frac{ieFA_0 \cos(\omega t)}{m\hbar\omega} - \frac{ie^2A_0^2t \cos(2\omega t)}{m\hbar} \\
&\quad - \frac{ie^2A_0^2t}{2m\hbar} + \frac{3ie^2A_0^2 \sin(2\omega t)}{4m\omega\hbar} - \frac{ieA_0Ft^2 \cos(\omega t)}{2m\hbar} \\
&\quad + \frac{5e^2A_0^2t \cos^2(\omega t)}{12m\hbar} + \frac{ieA_0Ft \sin(\omega t)}{\hbar\omega} - \frac{ie^2A_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{\hbar\omega}
\end{aligned}$$

Finalmente, el último paso que se hará para reducir la ecuación sería utilizando identidades trigonométricas conocidas:

$$\begin{aligned}
g_4 + \frac{1}{2}g_2g_3 + \frac{1}{6}g_1g_3^2 &= -\frac{iVt}{\hbar} + \frac{ieFA_0t^2 \cos(\omega t)}{3m\hbar} + \frac{ieFA_0 \cos(\omega t)}{m\hbar\omega} \\
&\quad - \frac{ie^2A_0^2t(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t))}{m\hbar} - \frac{ie^2A_0^2t}{2m\hbar} \\
&\quad + \frac{3ie^2A_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{2m\omega\hbar} - \frac{ieA_0Ft^2 \cos(\omega t)}{2m\hbar} \\
&\quad + \frac{5e^2A_0^2t \cos^2(\omega t)}{12m\hbar} + \frac{ieA_0Ft \sin(\omega t)}{\hbar\omega} - \frac{ie^2A_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{\hbar\omega} \\
&= -\frac{iVt}{\hbar} - \frac{ieFA_0t^2 \cos(\omega t)}{6m\hbar} + \frac{ieFA_0 \cos(\omega t)}{m\hbar\omega} \\
&\quad + \frac{ie^2A_0^2t}{m\hbar} \left(-\frac{7 \cos^2(\omega t)}{12} + \sin^2(\omega t) - \frac{1}{2} \right) \\
&\quad + \frac{ie^2A_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{2m\hbar\omega} + \frac{ieA_0Ft \sin(\omega t)}{m\hbar\omega}
\end{aligned}$$

Introduciendo estos valores en la ecuación (5.2), el operador evolución temporal único es:

$$\begin{aligned}
\Psi(x, t) &= U\Psi(x, 0) \\
&= \exp \left[-\frac{i}{\hbar}tE_n + \frac{eA_0}{m} \left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - \frac{t \cos(\omega t)}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{ieA_0 \cos(\omega t)}{\hbar}x \right. \\
&\quad - \frac{ieFA_0t^2 \cos(\omega t)}{6m\hbar} + \frac{ieFA_0 \cos(\omega t)}{m\hbar\omega} + \frac{ie^2A_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{2m\hbar\omega} \\
&\quad \left. + \frac{ie^2A_0^2t}{m\hbar} \left(-\frac{7 \cos^2(\omega t)}{12} + \sin^2(\omega t) - \frac{1}{2} \right) + \frac{ieA_0Ft \sin(\omega t)}{m\hbar\omega} \right] \varphi_n
\end{aligned}$$

En donde φ_n es la solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V - Fx \right) \varphi_n = E_n \varphi_n.$$

5.5. Marco de Kramers-Henneberger

Para definir la TDSE bajo este marco, se necesita primero el movimiento ponderomotriz de la partícula. Este se calcula utilizando la ecuación (3.51). Para nuestro sistema, el potencial vectorial es sencillo, por lo que el movimiento

podemos escribir es:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} &= \frac{e}{m} \int_t A(t') dt' \\
&= \frac{e}{m} \int_t A_0 \cos(\omega t') dt' \\
\Rightarrow \alpha &= \frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Se sustituye este resultado en la ecuación (3.74) para obtener la TDSE:

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V - F \left(x - \frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} \right) \right] \psi \\
\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \left[\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{iV}{\hbar} + \frac{iF}{\hbar} \left(x - \frac{eA_0 \sin(\omega t)}{m\omega} \right) \right] \psi
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Aquí es necesario considerar que, si $V = V(\mathbf{x})$ en el marco de laboratorio, en el marco de Kramers-Henneberger éste cambiará a $V = V(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha})$.

Utilizaremos nuevamente la misma base del álgebra de Lie, por lo que:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} & H_2 &= \frac{\partial}{\partial x} & H_3 &= x & H_4 &= \mathbb{1} \\
a_1 &= \frac{i\hbar}{2m} & a_2 &= 0 & a_3 &= \frac{iF}{\hbar} & a_4 &= -\frac{iV}{\hbar} - \frac{iFeA_0 \sin(\omega t)}{\hbar m\omega}
\end{aligned}$$

Debido a que es la misma base que en los casos anteriores, podemos utilizar las ecuaciones diferenciales (5.1) de nuevo:

$$\begin{aligned}
\dot{g}_1 &= a_1 \\
\dot{g}_2 &= a_2 - 2a_3 g_1 \\
\dot{g}_3 &= a_3 \\
\dot{g}_4 &= a_4 - a_3 g_2
\end{aligned}$$

Resolviendo g_1 primero se tiene que:

$$\begin{aligned}
\dot{g}_1 &= \frac{i\hbar}{2m} \\
\Rightarrow g_1 &= \frac{i\hbar t}{2m}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Posteriormente se resuelve la ecuación diferencial de g_3 :

$$\begin{aligned}
\dot{g}_3 &= \frac{iF}{\hbar} \\
\Rightarrow g_3 &= \frac{iFt}{\hbar}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

A continuación se resuelve la ecuación diferencial para g_2 :

$$\begin{aligned} \dot{g}_2 &= -\cancel{2} \left(\frac{i\cancel{h}t}{\cancel{2}m} \right) \frac{iF}{\cancel{h}} = \frac{Ft}{m} \\ \Rightarrow g_2 &= \frac{Ft^2}{2m} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Y por último se resuelve la ecuación diferencial referente a g_4 :

$$\dot{g}_4 = -\frac{iV}{\hbar} - \frac{iFeA_0 \sin(\omega t)}{\hbar m \omega} - \frac{iF^2 t^2}{2m\hbar} \quad (5.17)$$

$$\Rightarrow g_4 = -\frac{i}{\hbar} Vt + \frac{iFeA_0 \cos(\omega t)}{m\hbar\omega^2} - \frac{iF^2 t^3}{6m\hbar} \quad (5.18)$$

Finalmente, se desarrollamos la ecuación (5.2) componente por componente, empezando por la ecuación:

$$g_2 + g_1 g_3 = \frac{Ft^2}{2m} + \left(\frac{i\hbar t}{2m} \right) \left(\frac{iFt}{\hbar} \right) = 0$$

Y después la ecuación:

$$\begin{aligned} g_4 + \frac{1}{2}g_2 g_3 + \frac{1}{6}g_1 g_3^2 &= -\frac{iVt}{\hbar} + \frac{iFeA_0 \cos(\omega t)}{m\omega^2\hbar} - \frac{iF^2 t^3}{6m\hbar} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{Ft^2}{2m} \right) \left(\frac{iFt}{\hbar} \right) + \frac{1}{6} \frac{i\hbar t}{2m} \left(\frac{iFt}{\hbar} \right)^2 \\ &= -\frac{iVt}{\hbar} + \frac{iFeA_0 \cos(\omega t)}{m\omega^2\hbar} - \cancel{\frac{iF^2 t^3}{6m\hbar}} + \cancel{\frac{iF^2 t^3}{4m\hbar}} - \cancel{\frac{iF^2 t^3}{12m\hbar}} \\ &= -\frac{iVt}{\hbar} + \frac{iFeA_0 \cos(\omega t)}{m\omega^2\hbar} \end{aligned}$$

Sustituimos los resultados en la ecuación (5.2) para obtener el operador de evolución temporal único:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= U\Psi(x, 0) \\ &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} t E_n + \frac{iFeA_0 \cos(\omega t)}{m\omega^2\hbar} \right] \varphi_n \end{aligned}$$

En donde φ_n es la solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V - Fx \right) \varphi_n = E_n \varphi_n.$$

Capítulo 6

Conclusiones

6.1. Discusión

6.1.1. General

El desarrollo matemático realizado para la obtención del operador de evolución temporal de nuestro sistema ha sido desde un inicio bastante elemental, aunque extenso en ciertas secciones. Esta extensión laboral es manejable debido, en parte, a la capacidad de reutilizar ciertas fórmulas para una gran cantidad de sistemas, principalmente las cuatro ecuaciones diferenciales a resolver y la solución única del operador de evolución temporal.

Referente a la solución única, el resultado fueron operadores adimensionales, y cabe notar que en los cuatro casos estudiados el resultado se simplificó en cuanto al número de términos sobrevivientes, resultando en las funciones de Gordon-Volkov.

6.1.2. Norma de Velocidad Reducida

Matemáticamente, esta norma resultó ser la más directa a realizar, debido a la concentración del potencial vectorial en una sola sección de la función Hamiltoniana (como más adelante pasará con el marco de Kramers-Henneberger) y a que todos los elementos de a_i tienen un solo término.

A su vez, el cálculo del operador de evolución temporal único se realizó con brevedad y aún en este caso se simplificó el resultado.

6.1.3. Norma de Velocidad

Este caso fue uno de extensión matemática media debido a que existe el componente relacionado con el vector potencial en dos elementos de la Hamiltoniana. Aun siendo este el caso, las operaciones fueron elementales y el operador de evolución temporal único presentado en este caso termina simplificando el resultado de manera significativa.

6.1.4. Norma de Longitud

Esta norma, a pesar de eliminar el término $A \cdot p$ de la ecuación de Schrödinger, resultó ser matemáticamente extenso. Considerando esto, se puede ver en el apéndice [A](#) que las herramientas matemáticas requeridas son las que se podrían esperar para estudios de nivel superior en adelante en áreas exactas.

Aquí, la solución única también es la más extensa, pero se simplificó en gran medida con respecto a nuestro resultado primario. Es también en el resultado donde el operador H_3 sobrevive fuera del elemento E_n , restándole algo de elegancia.

Al obtener el resultado final, las limitaciones de este método quedan claramente observables, ya que, dependiendo de cuál elemento de la función Hamiltoniana contiene el elemento variable en el tiempo, la respuesta final se puede simplificar o extender.

6.1.5. Marcos de Kramers-Henneberger

El marco de Kramers-Henneberger es utilizado principalmente en el área de física con pulsos de láseres de alta intensidad y de ionización multifónica debido a que ayuda a facilitar los cálculos en fronteras de dichos sistemas. Aunque la presente tesis no busca estudiar condiciones de frontera, cabe mencionar que el marco de Kramers-Henneberger, al introducir toda la dependencia temporal en el potencial de la función Hamiltoniana, así como igualar la frecuencia de dicha dependencia al de la radiación incidente, crea una localización de los efectos del campo de láser debido a que en lo que decrecen los efectos del campo potencial también disminuye el efecto que crea el láser. Debido a esto, llegar a una frontera ayuda a evitar problemas de rebote en estos puntos críticos [\[44\]](#), [\[45\]](#).

Es evidente que la labor matemática más directa dentro de la presente fue en este marco, en buena parte debido a que, como se mencionó anteriormente,

se elimina el término $A \cdot p$ de la ecuación de Schrödinger, simplificando las cuatro ecuaciones diferenciales a resolver a solamente tres. Además, se traslada el factor oscilatorio a la última ecuación diferencial del elemento operador lineal H_4 , haciendo que ningún otro resultado dependa de su solución.

6.2. Conclusiones

Se hallaron fácilmente soluciones exactas a la TDSE que se propusieron en esta tesis. Dicha facilidad proviene de la utilización de herramientas elementales, como sería el cálculo matricial y ecuaciones diferenciales básicas, para resolver el problema.

Se ha demostrado que el método es fácil de entender y llevar a cabo, con la ventaja de poderse resolver un número grande de sistemas con las mismas ecuaciones diferenciales. Esto es debido a la amplia utilización de sistemas con aproximación dipolar y al número de casos en donde la Hamiltoniana en la ecuación de Schrödinger llega cuando mucho a la segunda derivada con respecto a la posición.

En particular, para el sistema escogido, los casos de la norma de velocidad y velocidad reducida fueron bastante accesibles de resolver, requiriendo únicamente la solución a unas cuantas integrales sencillas, debido a la manera en que se separan las diferentes ecuaciones diferenciales en estos casos. Para estos dos casos, las ecuaciones diferenciales a resolver resultaron ser elementales y de realización rápida. A su vez, el operador de evolución resultante no posee una extensión excesiva.

Para la norma de longitud, se halló que el camino para obtener la solución es tedioso cuando se usa este método. A pesar de ello, las integrales que se tuvieron que resolver eran integrales conocidas ampliamente, por lo que mantiene la característica de ser una vía sencilla de hallar el operador de evolución, a pesar de que éste finalmente es vasto, por lo que los cálculos que se presentan a continuación resultan ser bastante extensos .

Por último, el marco de Kramers-Henneberger en el sistema propuesto por esta tesis es sencillo, debido a que V se propone como un potencial constante que representa una barrera de potencial. Este marco se utiliza a menudo para átomos, especialmente Hidrogenoides, en donde la V dependería inversamente de la posición, por lo que el nivel de complejidad subiría, pero aun siendo éste el caso, es una integral trigonométrica conocida, y aún podría hallarse

la respuesta de manera directa.

La presente tesis de maestría logró una recopilación de los temas necesarios para su entendimiento, incluyendo electrodinámica y temas de relatividad cuántica. Por medio de la presente se reúne una serie de conocimientos necesarios que son base para llegar a una primera comprensión completa de los temas expuestos, y potencialmente, un primer paso para investigaciones subsecuentes.

6.3. Futuras Investigaciones

Dado de que la función de onda de Gordon Volkov solo acredita la parte temporal, un posible desarrollo subsecuente a esta tesis sería completar los pasos seguidos por el artículo de Lefebvre [3] y ver que la solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo conlleva la utilización de las funciones de Airy, cuyo desarrollo requiere matrices de transferencia, u otros métodos. En efecto, esto involucraría el estudio de las condiciones de frontera.

En opinión del autor, podría ser interesante investigar sistemas prácticos a los cuales se podría aplicar este método, integrándolo a otras investigaciones incluso en áreas fuera de la física-matemática, por ejemplo los antes mencionados temas de láseres de alta intensidad, ionización multifotónica, entre otros.

Bibliografía

- [1] Gordon, W. (1926), Zeitschrift Für Physik, 40, 117-133.
- [2] Wolkow, D.M.,(1935), Über eine Klasse von Lösungen der Diracschen Gleichung, Z. Physik 94, 250–260 .
- [3] Lefebvre, R., (2000), Resonant tunneling in the presence of two electric fields: One static and the other oscillating, International Journal of Quantum Chemistry, 80. 110 - 116.
- [4] Wei, James & Norman, Edward, (1963), Lie Algebraic Solution of Linear Differential Equations, Journal of Mathematical Physics, 4, 575-581.
- [5] Schwichtenberg, J. (2017). Physics from Symmetry, Springer.
- [6] P. Imani, Introduction To Lie algebras
- [7] M.A. Armstrong, Basic Topology, Undergrad. Texts Math., Springer, 1983
- [8] Variedad (Matemática), 2012, Enciclopedia Universal, https://enciclopedia_universal.es-academic.com/4396/Variedad_%28matem%C3%A1ticas%29
- [9] Kuratowski, Kazimierz, (2022), Introducción a la teoría de conjuntos y a la topología / K. Kuratowski, SERBIULA (sistema Librum 2.0).
- [10] N. Zettili, Quantum Mechanics, Concepts and Applications, Wiley, Chichester, 2001.
- [11] Gerlach, Walther & Stern, Otto, (1922), Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld, Z. Physik. 9, 349-352.
- [12] Joachain, Charles & Kylstra, N. & Potvliege, R., (2014), Atoms in Intense Laser Fields.

- [13] Henneberger, Walter, (1968), Perturbation Method for Atoms in Intense Light Beams, *Physical Review Letters - PHYS REV LETT*, 21, 838-841.
- [14] Bjorken, James & Drell, Sidney, (1984), *Relativistic Quantum Mechanics*.
- [15] Klein, Oskar, (1926), Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie, *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 37, 895-906.
- [16] Kragh, Helge, (1984), Equation with the many fathers, *The Klein-Gordon equation in 1926*, *American Journal of Physics*, 52.
- [17] Fock, V., (1926), Zur Schrödingerschen Wellenmechanik, *European Physical Journal A - EUR PHYS J A*, 38, 242-250.
- [18] Kragh, Helge, (1981), The genesis of dirac's relativistic theory of electrons, *Archive for History of Exact Sciences*.
- [19] Keldysh, L., (1964), Ionization in field of a strong electromagnetic wave. *JETP*. 20. 1307.
- [20] Jones, Hermenzo & Reiss, Howard, (1977), Intense-field effects in solids, *Phys. Rev. B*. 16.
- [21] Rahman, N., (1974), Effect of intense electromagnetic wave in charged-particle scattering, *Physical Review A*. 10, 440-441.
- [22] Jones, Hermenzo & Reiss, Howard, (1977), Intense-field effects in solids, *Phys. Rev. B*. 16.
- [23] Gao, Ju and Shen, F. and Eden, J.. (2000), Interpretation of high-order harmonic generation in terms of transitions between quantum Volkov states, *Phys. Rev. A*. 61.
- [24] Pinaud, Olivier. (2002), Transient simulations of a resonant tunneling diode, *Journal of Applied Physics - J APPL PHYS*. 92.
- [25] Roy, D. & Ghatak, A., (1970), On the calculation of the tunnelling probability in a heavily-doped p-n junction, *Radiation Effects and Defects in Solids - RADIAT EFF DEFECT SOLID*, 4, 303-304.
- [26] Yang, Rui & Sweeny, Mark & Day, D. & Xu, J.M., (1991), Interband Tunneling in Heterostructure Tunnel Diodes, *Electron Devices, IEEE Transactions on*. 38, 442 - 446.

- [27] Kamiński, J., (1990), Resonant scattering in the presence of strong laser fields, *Zeitschrift für Physik D Atoms, Molecules and Clusters*.
- [28] Kroll, Norman & Watson, Kenneth, (1973), Charged-Particle Scattering in the Presence of a Strong Electromagnetic Wave, *Phys. Rev. A*. 8.
- [29] Howland, J., (2012), Scattering theory for Hamiltonians periodic in time, *Ind Univ Math J*. 28.
- [30] Sacks, Richard & Szöke, A, (1989), Electron scattering assisted by an intense electromagnetic field: Exact solution of a simplified model, *Physical review. A*. 40, 5614-5632.
- [31] Nakamura, Shu, (1986), Structure of the scattering operator for time-periodic Schrödinger equations, *Journal of The Mathematical Society of Japan - J MATH SOC JPN*. 38.
- [32] Prakash, Hari & Chandra, Nungky, (1968), Use of volkov solutions of electron wave equations in electromagnetic wave for scattering problems, *Il Nuovo Cimento B*. 55, 404-412.
- [33] Xu, Renjing & Zhang, Donghao & Kheifets, A. & Ivanov, I., (2014), Review of Strong Field Approximation and Investigating Semiclassical Evolution Approach.
- [34] Reiss, Howard and Krainov, Vladimir. (1994), Approximation for a Coulomb-Volkov solution in strong fields, *Physical review. A*. 50, R910-R912.
- [35] Reiss, Howard, (1980), Effect of an intense electromagnetic field on a weakly bound system, *Phys. Rev. A*. 22.
- [36] G. Buica (2015), Inelastic scattering of electrons by metastable hydrogen atoms in a laser field, *Phys. Rev. A*, 92, 3.
- [37] Bauer, Jarosław and Deng, Min, (2018), Numerical tests of theoretical models describing ionization of H(1s) atom by linearly polarized flat pulse of laser radiation, *Chinese Physics B*. 27, 093202.
- [38] Yuce, Cem, (2006), Free electron in a laser field: The nonrelativistic solution, *Physical Review A*. 74.
- [39] Yudin, G and Patchkovskii, S and Corkum, P and Bandrauk, Andre, (2007), Attosecond photoelectron interference in the separable Coulomb-Volkov continuum, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 40, F93.

- [40] Guo, D & Aberg, T, (1999), Quantum electrodynamical approach to multiphoton ionisation in the high-intensity H field, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 21, 4577.
- [41] Rau, A. and Unnikrishnan, K., (1996), Evolution operators and wave functions in a time-dependent electric field, *Physics Letters A - PHYS LETT A*, 222, 304-308.
- [42] Iqbal, Azmat & Humayun, Kiran & Jawaid, Saba & Ahmad, Afaq & Rahman, Amin & Bacha, Bakht, (2019), Quantum photodetachment of hydrogen negative ion in a harmonic potential subjected to static electric field, *Chinese Physics B*. 28, 023201.
- [43] Wang, Wei & Shu, Chi-Wang, (2009), The WKB Local Discontinuous Galerkin Method for the Simulation of Schrödinger Equation in a Resonant Tunneling Diode, *J. Sci. Comput.*, 40, 360-374.
- [44] Reed, V., Burnett, Keith. (1991). Role of resonances and quantum-mechanical interference in the generation of above-threshold-ionization spectra. *Physical review. A*. 43. 6217-6226. 10.1103/PhysRevA.43.6217.
- [45] Reed, V., Burnett, Keith. (1990). Ionization of atoms in intense laser pulses using the Kramers-Henneberger transformation. *Physical review. A*. 42. 3152-3155. 10.1103/PhysRevA.42.3152.

Apéndice A

Integrales Necesarias

Se resolverán de manera detallada 5 integrales que son utilizadas en las soluciones de las diferentes ecuaciones diferenciales usadas en la sección de resultados:

- $\int t \sin(\omega t) dt$

Esta integral se resolverá por partes, tal que:

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= \sin(\omega t) dt \\ du &= dt & v &= -\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Esto quiere decir que:

$$\begin{aligned} \int t \sin(\omega t) dt &= -\frac{t \cos(\omega t)}{\omega} + \int \frac{\cos(\omega t)}{\omega} dt \\ &= -\frac{t \cos(\omega t)}{\omega} + \frac{\sin(\omega t)}{\omega^2} \end{aligned}$$

- $\int t \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt$ Primero se utiliza una propiedad de senos y cosenos:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \tag{A.2}$$

Sustituimos esto en la integral, por lo que queda:

$$\int t \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = \int t \sin(2\omega t) dt \tag{A.3}$$

Posteriormente, se resuelve por partes esta integral, tal que:

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= \sin(2\omega t) dt \\ du &= dt & v &= -\frac{\cos(2\omega t)}{2\omega} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Por lo que se tiene que la integral es:

$$\begin{aligned}\int t \sin(2\omega t) dt &= -t \frac{\cos(2\omega t)}{2\omega} + \int \frac{\cos(2\omega t)}{2\omega} dt \\ &= \frac{1}{\omega} \left[-t \cos(2\omega t) + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]\end{aligned}$$

▪ $\int \sin^2(\omega t) dt$

Se utiliza otra propiedad de los senos y cosenos en este caso, específicamente:

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \Rightarrow \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}\end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la integral, y resolviendo se obtiene que:

$$\begin{aligned}\int \sin^2(\omega t) dt &= \int \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]\end{aligned}$$

▪ $\int t \cos(\omega t) dt$

De nuevo, se resuelve por partes esta integral, tal que:

$$\begin{aligned}u &= t & dv &= \cos(\omega t) dt \\ du &= dt & v &= \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\end{aligned}\tag{A.5}$$

Sustituyendo en la integral, se obtiene que:

$$\begin{aligned}\int t \cos(\omega t) dt &= \frac{t \sin(\omega t)}{\omega} - \int \frac{\sin(\omega t)}{\omega} dt \\ &= \frac{1}{\omega} \left[t \sin(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]\end{aligned}$$

▪ $\int t^2 \sin(\omega t) dt$

Esta integral se resolverá utilizando el método de partes dos veces, esto es:

$$\begin{aligned}u &= t^2 & dv &= \sin(\omega t) \\ du &= 2t dt & v &= -\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\end{aligned}\tag{A.6}$$

Sustituyendo queda la integral como:

$$\int t^2 \sin(\omega t) dt = -\frac{t^2 \cos(\omega t)}{\omega} + \frac{2}{\omega} \int t \cos(\omega t) dt$$

Para resolver el segundo término del lado derecho de la ecuación, de nuevo se utiliza el método de partes, por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned} z &= t & dw &= \cos(\omega t) dt \\ dz &= dt & w &= \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

La integral se resuelve entonces como:

$$\begin{aligned} \int t^2 \sin(\omega t) dt &= -\frac{t^2 \cos(\omega t)}{\omega} + \frac{2}{\omega} \int t \cos(\omega t) dt \\ &= -\frac{t^2 \cos(\omega t)}{\omega} + \frac{2}{\omega} \left[\frac{t}{\omega} \sin(\omega t) - \int \frac{\sin(\omega t)}{\omega} dt \right] \\ &= -\frac{t^2 \cos(\omega t)}{\omega} + \frac{2}{\omega^2} \left[t \sin(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right] \end{aligned}$$