BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA “LUIS RIVERA TERRAZAS”

“ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES ESPECTRALES, DE AUTOESTADOS Y DE TRANSPORTE DE SISTEMAS DESORDENADOS”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS
(FÍSICA)

PRESENTA:
ANDREI JESUS MARTÍNEZ MENDOZA

ASESOR(ES):
JOSÉ ANTONIO MÉNDEZ BERMÚDEZ
IMRE VARGA

NOVIEMBRE 2015

©2015 - Andrei Jesus Martínez Mendoza

Derechos Reservados

Agradecimientos

Quiero agradecer al Doctor José Antonio Méndez Bermúdez por haber depositado su confianza en mi, también por su tiempo y dedicación para dirigir el presente trabajo de Tesis. Además quiero agradecer por haberme aceptado como su estudiante durante la Licenciatura y Maestría.

Agradezco al Instituto de Física "Luis Rivera Terrazas" por permitirme llevar a cabo la realización de mis estudios de Posgrado en doctorado en ciencias y además de prestarme todas las facilidades que tuve durante mi estancia.

Agradezco al Dr. Imre Varga y al Departamento de Física Teórica de la Universidad de Tecnología y Economía de Budapest por la atención y facilidades que se me otorgaron durante una estancia que se realizó por el periódo de un año.

Agradezco a los Doctores Jonathan Torres, Elías López y Eduardo Cantoral por la revisión de esta Tesis, por sus comentarios y sugerencias.

Quiero también agradecer a mis padres por el apoyo moral y económico que me brindaron para poder finalizar esta Tesis.

Finalmente, agradezco la beca otorgada por Conacyt durante el periódo del doctorado, de igual forma agradezco a la VIEP-BUAP para la conclusión de este trabajo.

Dedicada a mis padres Emma y Vicencio, y
a mis hermanos Nayeli y Marco.

Estudio de las propiedades espectrales, de autoestados y de transporte de sistemas desordenados

Resumen

En esta Tesis estudiamos las propiedades espectrales, de autoestados y de transporte de dos modelos de sistemas desordenados: una generalización del modelo de Lloyd unidimensional y redes aleatorias de tipo Erdős-Rényi.

En la primer parte de esta Tesis realizamos un estudio numérico de la conductancia G a través de alambres unidimensionales (1D) de tipo enlace fuerte con desorden de sitio. Las configuraciones del desorden de las energías de los sitios se caracterizan por una distribución de probabilidad con colas que decaen lentamente como una ley de potencias: para ϵ grande, $P(\epsilon) \sim 1/\epsilon^{1+\alpha}$ con $\alpha \in (0, 2)$. Este modelo es una generalización del modelo de Lloyd 1D, que corresponde a $\alpha = 1$. Para comenzar, verificamos que el promedio $\langle -\ln G \rangle$ (tomado sobre realizaciones de desorden) es proporcional a la longitud del alambre L para todos los valores de α; esto nos proporciona la longitud de localización l_∞ por medio de la expresión $\langle -\ln G \rangle = 2L/l_\infty$. Entonces, mostramos que la distribución de probabilidad $P(G)$ está completamente determinada por el exponente α y $\langle -\ln G \rangle$. En contraste con alambres 1D con desorden de tipo ruido blanco, nuestro modelo exhibe distribuciones de conductancia bimodales con picos en $G = 0$ y 1. Además, mostramos que $P(\ln G)$ es proporcional a G^β, cuando $G \to 0$, con $\beta \leq \alpha/2$.

En la segunda parte de este trabajo mostramos que la distribución de probabilidad de los espaciamientos entre energías consecutivas $P(s)$ y la longitud de localización entrópica de las matrices de adyacencia que corresponden a redes completamente desordenadas de tipo Erdős-Rényi (ER) son universales para un grado promedio $\xi \equiv pN$ fijo (p y N son la conectividad promedio de la red y el número de vértices que la forman, respectivamente). También demostramos que la distribución de Brody caracteriza a $P(s)$ en la transición de $p = 0$, cuando los vértices de la red están aislados, a $p = 1$, cuando la red está completamente conectada. Además, exploramos la validez de nuestros hallazgos cuando relajamos el grado de desorden en nuestro modelo de redes y mostramos que, en contraste con redes de tipo ER estándar, las redes de tipo ER con *desorden diagonal* también muestran universalidad. Adicionalmente, también estudiamos las propiedades espectrales y de autoestados de redes de mundo pequeño. También estudiamos numéricamente las propiedades de dispersión y transporte de redes de ER desordenadas de tipo enlace fuerte. Nos concentramos en el caso de un número pequeño de terminales acopladas. Observamos una transición suave desde el régimen aislante al régimen metálico en el promedio de los elementos de la matriz de dispersión $\langle |D_{mn}|^2 \rangle$, la distribución de probabilidad de la conductancia $w(T)$, la conductancia promedio $\langle T \rangle$ y el factor de dispersión elástica F al variar p de pequeña ($p \to 0$) a grande ($p \to 1$). También mostramos que todas estas cantidades son invariantes para un valor fijo de $\xi = pN$. Además, proponemos una relación universal

entre $\langle |D_{mn}|^2 \rangle$, $\langle T \rangle$ y el parámetro ξ.

Study of spectral, eigenfunction and transport properties of disordered systems

Abstract

In this Thesis work we study spectral, eigenfunction, and transport properties of two disordered models: A generalization of the one-dimensional 1D Lloyd's model and random networks of the Erdős-Rényi type.

On the one hand, we perform a detailed numerical study of the conductance G through one-dimensional (1D) tight-binding wires with on-site disorder. The random configurations of the on-site energies of the tight-binding Hamiltonian are characterized by long-tailed distributions: For large ϵ, $P(\epsilon) \sim 1/\epsilon^{1+\alpha}$ with $\alpha \in (0, 2)$. Our model serves as a generalization of 1D Lloyd's model, which corresponds to $\alpha = 1$. First, we verify that the ensemble average $\langle -\ln G \rangle$ is proportional to the length of the wire L for all values of α, providing the localization length ξ from $\langle -\ln G \rangle = 2L/\xi$. Then, we show that the probability distribution function $P(G)$ is fully determined by the exponent α and $\langle -\ln G \rangle$. In contrast to 1D wires with the standard white-noise disorder, our wire model exhibits bimodal distributions of the conductance with peaks at $G = 0$ and 1. In addition, we show that $P(\ln G)$ is proportional to G^{β}, for $G \to 0$, with $\beta \leq \alpha/2$.

On the other hand, by the use of extensive numerical simulations we show that the nearest-neighbor energy level spacing distribution $P(s)$ and the entropic eigenfunction localization length of the adjacency matrices of Erdős-Rényi (ER) *fully* random networks are universal for fixed average degree $\xi \equiv pN$ (p and N being the average network connectivity and the network size, respectively). We also demonstrate that Brody distribution characterizes well $P(s)$ in the transition from $p = 0$, when the vertices in the network are isolated, to $p = 1$, when the network is fully connected. Moreover, we explore the validity of our findings when relaxing the randomness of our network model and show that, in contrast to standard ER networks, ER networks with *diagonal disorder* also show universality. Finally, we also discuss the spectral and eigenfunction properties of small-world networks. We also study scattering and transport statistical properties of tight-binding random networks of the ER type. We use a scattering approach to electronic transport and concentrate on the case of a small number of single-channel attached leads. We observe a smooth crossover from insulating to metallic behavior in the average scattering matrix elements $\langle |D_{mn}|^2 \rangle$, the conductance probability distribution $w(T)$, the average conductance $\langle T \rangle$, and the elastic enhancement factor F by varying p from small ($p \to 0$) to large ($p \to 1$) values. We also show that all these quantities are invariant for fixed $\xi = pN$. Moreover, we proposes a heuristic and universal relation between $\langle |D_{mn}|^2 \rangle$, $\langle T \rangle$, and the disorder parameter ξ.

Publicaciones

Los resultados reportados en el Capítulo 3 están incluidos en el manuscrito

- "A Lloyd model generalization: Conductance fluctuations in one-dimensional disordered quantum wires", J. A. Méndez-Bermúdez, A. J. Martínez-Mendoza, V. A. Gopar, and I. Varga.

que será enviado a la revista Physical Review E para su evaluación.

Los resultados reportados en el Capítulo 4 fueron publicados en

- "Universality in the spectral and eigenfunction properties of random networks", J. A. Méndez-Bermúdez, A. Alcazar-López. A. J. Martínez-Mendoza, F. A. Rodrigues, and T. K. DM. Peron, Phys. Rev. E **91**, 032122 (2015).

Los resultados reportados en el Capítulo 5 fueron publicados en

- "Scattering and transport properties of tight-binding random networks", A. J. Martínez-Mendoza, A. Alcazar-López, and J. A. Méndez-Bermúdez, Phys. Rev. E **88**, 122126 (2013).

Contenido

1 Introducción **1**

1.1 Antecedentes y motivación 1

1.1.1 Generalización del modelo de Lloyd unidimensional 1

1.1.2 Redes aleatorias de tipo Erdős-Rényi 4

I Modelo de Anderson unidimensional con desorden tipo Lévy **7**

2 Modelo de Anderson unidimensional **9**

2.1 Modelo de Anderson unidimensional 9

2.1.1 Matriz de dispersión 10

2.2 Conductancia del modelo de Anderson unidimensional 11

3 Modelo de Anderson unidimensional con desorden tipo Lévy **15**

3.1 Distribución de probabilidad de tipo Lévy 15

3.2 Modelo de Anderson unidimensional con desorden tipo Lévy 17

3.2.1 Otras distribuciones tipo Lévy 21

II Modelo de redes desordenadas **25**

4 Modelo de redes desordenadas **27**

4.1 Conceptos generales de redes 27

4.2 Modelo de redes de tipo Erdős-Rényi estándar 28

4.3 Redes completamente desordenadas de tipo Erdős-Rényi 29

4.3.1 Distribución de probabilidad de espaciamientos entre energías consecutivas 29

4.3.2 Longitud de localización entrópica de las autofunciones 33

4.4 Otras redes desordenadas de tipo Erdős-Rényi 35

4.4.1 Redes desordenadas de Erdős-Rényi estándar 36

4.4.2 Redes de tipo Erdős-Rényi con desorden diagonal 37

4.5 Redes de mundo pequeño 38

5 Tansporte en redes aleatorias **43**
5.1 Redes desordenadas de tipo enlace fuerte 43
5.2 Predicciones de la teoría de matrices aleatorias 44
5.3 Cantidades de transporte 46
5.3.1 Promedio de los elementos de matriz 46
5.3.2 Conductancia 50
5.3.3 Factor de dispersión elástica 51

6 Conclusiones **55**
6.1 Parte I 55
6.2 Parte II 55

Bibliografía **59**

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes y motivación

1.1.1 Generalización del modelo de Lloyd unidimensional

El estudio de las propiedades de sistemas desordenados ha sido un tema de investigación muy activo por más de cincuenta años [1]. Uno de los resultados mas relevantes [2–5] muestra que en sistema desordenados infinitos bidimensionales no se permite la propagación de ondas y sus autoestados son exponencialmente localizados si el desorden es suficientemente fuerte. En el caso unidimensional cualquier cantidad de desorden produce localización. En particular en el modelo de Anderson unidimensional (1DAM), modelo de enlace fuerte compuesto por sitios conectados con primeros vecinos con acoplamientos constantes y potenciales de sitio aleatorios, todos los autoestados son exponencialmente localizados. Localización exponencial significa que la envolvente del autoestado $\Psi(n)$ está centrada alrededor de algún sitio con posición n_0 con colas que decaen aproximadamente de manera exponencial con la distancia desde n_0:

$$|\Psi(n)| \sim \exp(-|n - n_0|/l_\infty)$$

donde l_∞ es la longitud de localización de la autofunción. Para el 1DAM con desorden débil, Thouless obtuvo una expresión para la longitud de localización

$$l_\infty^{-1}(E) = \sigma^2/(8(1 - E^2/4))$$

en términos de la varianza σ^2 de los potenciales de sitio y la energía E del sistema [6]. En general, para el modelo de Anderson, en una o más dimensiones, los potenciales de sitio ϵ_n se escogen como números aleatorios obtenidos de una distribución uniforme.

Aunque la fórmula de Thouless, proporciona la longitud de localización para el 1DAM de longitud infinita, ésta ecuación es de gran importancia cuando se consideran muestras con un número finito de sitios L. Ésto es porque las propiedades de dispersión de muestras de tamaño finito están determinadas por la razón L/l_∞. Ésto se conoce en la literatura como *escalamiento de un sólo parámetro* [7].

Ahora, si consideramos al 1DAM de longitud L con dos terminales unimodales acopladas de manera perfecta a los dos sitios extremos del sistema, en el caso de transmisión

(o conductacia adimensional G) exponencialmente pequeña, el promedio del logaritmo de G se relaciona con la razón L/l_∞ como [8]:

$$\langle -\ln G \rangle = 2L/l_\infty \ . \tag{1.1}$$

Ésta expresión es válida para cualquier razón L/l_∞. Adicionalmente, se sabe que [10] la distribución de la conductancia $P(G)$ para el 1DAM también depende solamente de la razón L/l_∞. Es importante notar que la longitud de localización l_∞ depende explícitamente de σ^2, la varianza de la distribución uniforme de los potenciales de sitio ϵ_n. De hecho, si la distribución no es uniforme pero Gaussiana, por ejemplo, dicha expresión sigue siendo válida para encontrar l_∞. Ahora, una de las preguntas que nos hicimos al abordar este trabajo fué: ¿Cuáles son las propiedades de los autoestados y de transporte del 1DAM si los potenciales ϵ_n son números aleatorios obtenidos de una distribución sin varianza definida?

La implementación, que recientemente se realizó, de los llamados *vidrios de Lévy* [11] así como de las "guías de ondas de Lévy" [12], ha revivido el interés en el estudio de sistemas caracterizados por desorden de tipo Lévy (ver por ejemplo las refs. [13, 14]). Desorden de tipo Lévy se refiere a desorden generado por variables aleatorias $\{\epsilon\}$ cuya distribución de probabilidad tiene colas que decaen lentamente:

$$P(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^{1+\alpha}} \ , \tag{1.2}$$

para ϵ grande, con $0 < \alpha < 2$. De hecho, el estudio de esta clase de sistemas desordenados tiene sus orígenes en los trabajos de Lloyd [15] quien estudió analíticamente las propiedades espectrales de una red tridimensional (3D), descrita por el Hamiltoniano de enlace fuerte 3D, con potenciales de sitio caracterizados por una distribución de Cauchy [lo que corresponde al valor $\alpha = 1$ en la ec. (1.2)]. Desde entonces, un número considerable de trabajos han sido dedicados al estudio de las propiedades espectrales, de autofunciones y de transporte del modelo de Lloyd en su configuración 3D original [16–26] pero también en versiones de dimensiones menores [25–43].

En particular, es interesante la comparación entre el modelo de Anderson 1D (1DAM) y el modelo de Lloyd 1D, ya que el primero es el modelo de alambres desordenados más popular [1]. De hecho, ambos modelos están descritos por el Hamiltoniano 1D de enlace fuerte:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=1}^{L} [\epsilon_n \mid n\rangle\langle n \mid \\ &\quad -\nu_{n,n+1} \mid n\rangle\langle n+1 \mid -\nu_{n,n-1} \mid n\rangle\langle n-1 \mid] \, ; \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde L es la longitud del alambre dada como el número total de sitios n que lo componen, ϵ_n son potenciales de sitio y $\nu_{n,m}$ son las integrales de acoplamiento entre sitios consecutivos (que se fijan en un valor constante $\nu_{n,n\pm1} = \nu$). Sin embargo, mientras que para el 1DAM estándar (con potenciales de sitio tales que $\langle \epsilon_n \epsilon_m \rangle = \delta_{nm}$ y $\langle \epsilon_n \rangle = 0$) los potenciales de sitio están caracterizados por una varianza $\sigma^2 = \langle \epsilon_n^2 \rangle$ (donde la distribución de probabilidad $P(\epsilon)$ se elige como plana o normal), en el modelo de Lloyd la varianza σ^2 de las energías ϵ_n diverge.

Es también relevante mencionar que ya han sido reportados algunos estudios de cantidades de transporte en alambres con desorden de tipo Lévy, pero diferentes al modelo de Lloyd en 1D. Por ejemplo, en las refs. [13, 14, 47, 48] se estudiaron alambres con dispersores espaciados aleatoriamente (a lo largo del mismo alambre) donde los espaciamientos son caracterizados por una distribución de probabilidad de tipo Lévy. Un resultado importante de dichos estudios es que la distribución de la conductancia $P(G)$ está completamente determinada por el exponente α (que caracteriza el decaimiento en forma de ley de potencia de las colas de la distribución de tipo Lévy) y el promedio (sobre realizaciones del desorden) $\langle -\ln G \rangle$ [47, 48]; es decir, todos los demás detalles del desorden son irrelevantes. En este sentido, $P(G)$ muestra *universalidad*. Además, este resultado ha sido verificado experimentalmente en guías de ondas de microondas [12] y validado numéricamente para el modelo de enlace fuerte de la ec. (1.3) con $\epsilon_n = 0$ y desorden no diagonal de tipo Lévy [49] (es decir, con $\nu_{n,m}$ de la ec. (1.3) caracterizados por una distribución de probabilidad de tipo Lévy).

Adicionalmente se ha realizado un estudio sobre propiedades de localización de electrones en sistemas desordenados usando el método de Grupo de Renormalización (RG) en el espacio-posición [50]. En este estudio se encuentra un borde de localización en tres dimensiones, con un punto fijo en el centro de la banda ($E = 0$) y desorden crítico $\sigma_c = 7.0$. Además, en la vecindad del punto fijo la longitud de localización L diverge como $L \sim (\sigma - \sigma_c{+}^2)^{-\nu}$. Los ingredientes básicos de un procedimiento sistemático de RG puede ser resumido de la siguiente manera: Comenzando con un sistema con un gran número (N) de grados de libertad, caracterizado por un Hamiltoniano H. La propiedad que se quiere calcular esta relacionado a un nuevo sistema, con $N' = Nb^d < N$ grados de libertad. El nuevo sistema está caracterizado por un nuevo Hamiltoniano H', adicionalmente todas las longitudes L asociadas con el problema original son rescaladas por b, el factor de escalamiento espacial, es decir, $L' = L/b$. El mapeo $H \to H'$ constituye una transformación RG o relación de recursión.

Es importante enfatizar que alambres 1D de tipo enlace fuerte con potenciales de sitio caracterizados por distribuciones de probabilidad que siguen leyes de potencias, con potencias diferentes de $\alpha = 1$ (que corresponde al modelo de Lloyd 1D), han sido estudiados muy poco (como excepción ver [41]). Entonces, en esta Tesis nos damos a la tarea de estudiar numéricamente la conductancia de alambres desordenados definidos como una generalización del modelo de Lloyd en 1D. Es decir, estudiaremos alambres 1D descritos por el Hamiltoniano de la ec. (1.3) con integrales de acoplamiento constantes, $\nu_{n,n\pm1} = \nu = 1$, y potenciales de sitio ϵ_n aleatorios caracterizados por una distribución de probabilidad de tipo Lévy, como en la ec. (1.2) con $0 < \alpha < 2$. Nosotros llamamos a este modelo el 1DAM con desorden de tipo Lévy.

Por lo tanto, en la Parte I de esta Tesis mostraremos que (i) la distribución de la conductancia $P(G)$ está completamente determinada por el exponente α y el promedio $\langle -\ln G \rangle$; (ii) para $\alpha \leq 1$ y $\langle -\ln G \rangle \sim 1$, $P(G)$ muestra una forma bimodal con picos en $G \sim 0$ y $G \sim 1$, lo que indica la coexsistencia de los regímenes aislante y metálico; y (iii) la distribución de probabilidad $P(\ln G)$ es proporcional a G^β, cuando G tiende a cero, con $\beta \leq \alpha/2$.

1.1.2 Redes aleatorias de tipo Erdős-Rényi

Los modelos de redes han sido utilizados para representar sistemas complejos tales como redes sociales, Internet y ecosistemas [62, 63]. Dependiendo de la aplicación, los vértices y aristas de una red pueden tener diferentes significados [62, 64]. Por ejemplo, en física de la materia condensada los vértices y aristas de la red ordenada conocida como modelo de enlace fuerte de Anderson son los sitios y las integrales de acoplamiento entre sitios consecutivos, respectivamente [2]. Las redes pueden ser deterministas, fractales o desordenadas [65]. Las redes deterministas y fractales se construyen siguiendo reglas específicas, mientras que las redes desordenadas están caracterizadas por un conjunto de parámetros que toman valores fijos pero la red misma presenta una estructura desordenada. En éste último caso, no tiene relevancia el estudio de una sola red, en cambio se requiere de un análisis estadísticos de un ensamble de redes con las mismas propiedades en promedio. En la literatura se reportan varios modelos de redes desordenadas [64, 66], entre los más populares podemos mencionar: los grafos aleatorios de Erdős-Rényi (ER), las redes de escala libre de Barabási y Albert y las redes de mundo pequeño de Watts y Strogatz. Se dice que estos modelos reproducen propiedades de redes del mundo real tales como la Internet, redes eléctricas de potencia y redes sociales y biológicas [62,64,66]. Aún cuando los grafos aleatorios no logran predecir algunas propiedades observadas en redes del mundo real, éste es un modelo que se ha podido estudiar ampliamente de forma teórica [67] por lo que algunas de las propiedades de redes de tipo ER se conocen analíticamente [64, 67].

En este trabajo consideramos al modelo de grafos aleatorios de ER, que fué introducido por Solomonoff y Rapoport [68] y estudiado después a fondo por Erdős y Rényi [69,70]. Este modelo también se conoce como el modelo de grafos descorrelacionados. Las redes de ER se construyen de la siguiente manera: partiendo de N vértices aislados, cada par de vértices se conecta mediante una arista con probabilidad p.

Independientemente del campo, clasificación o aplicación, la representación matemática generalmente aceptada de una red es la matriz de adyacencia. La matriz de adyacencia $\mathbf{A}$ de una red simple, es decir, una red sin aristas múltiples o aristas que conectan al mismo vértice definirá mas adelante. La conectividad de $\mathbf{A}$ se cuantifica con el parámetro p que es la fracción de elementos no diagonales diferentes de cero. Así, los vértices de la red están aislados cuando $p = 0$, mientras que la red está completamente conectada cuando $p = 1$. Una vez que la matriz de adyacencia de una red se construye, es natural tratar de obtener sus propiedades espectrales y de autoestados; lo cual es el objetivo principal de este trabajo. En adelante, como es costumbre en la literatura especializada, nos referimos a las propiedades espectrales y de autoestados de la matriz de adyacencia como a las propiedades espectrales y de autoestados de la red correspondiente.

Además, vale la pena añadir que existe una correspondencia uno a uno entre la matriz de adyacencia $\mathbf{A}$ y la matriz Hamiltoniana $\mathbf{H}$ de un sólido en ξ dimensiones descrito por el modelo de enlace fuerte de Anderson [2] con potenciales de sitio iguales a cero ($H_{ii} = 0$) e integrales de acoplamiento constantes ($H_{ij} = 1$). Aquí, ξ es proporcional al número promedio de elementos no diagonales diferentes de cero por renglón de la matriz de adyacencia y, por lo tanto, puede ser considerada como la dimensión efectiva de la red representada por $\mathbf{A}$; como se discutió en [71] desde el punto de vista de la Teoría de Matrices Aleatorias (RMT por sus siglas en inglés). Ésta correspondencia permite la

aplicación directa de resultados originalmente motivados en sistemas físcos, representados por matrices Hamiltonianas aleatorias y dispersas, al problema de las redes complejas. En la literatura especializada, ξ se conoce como el grado promedio de una red, dado por

$$\xi = p \times N \ . \tag{1.4}$$

Desde un punto de vista físico-matemático, y en el marco de la RMT, en 1988 Rodgers y Bray [72] propusieron un ensamble de matrices aleatorias dispersas caracterizadas por la conectividad ξ. Desde entonces, varios trabajos han sido dedicados al estudio analítico y numérico de matrices aleatorias simétricas dispersas (ver por ejemplo [71–87]).

Entre los resultados mas relevantes de dichos estudios podemos nombrar los siguientes: (i) en el límite muy escaso, $\xi \to 1$, se encontró que la densidad de estados se desvía significativamente del semicírculo de Wigner al aparecer singularidades cerca del centro de la banda y en las orillas de la región delimitada por el semicírculo [72–81]; (ii) se encontró la transición a un régimen delocalizado en $\xi \approx 1.4$ [74–76,82]; (iii) se observó que la forma de la distribución de probabilidad del espaciamiento entre energías consecutivas $P(s)$ evoluciona de Poisson a la predicción que corresponde al Ensamble Gausiano Ortogonal (GOE por sus siglas en inglés) al incrementar ξ [71, 74, 76] (la misma transición fué reportada para otras cantidades espectrales [71]). Más recientemente, el problema del primer autovalor (y primera autofunción) fué atacado en la ref. [83]. También, matrices dispersas no Hermitianas fueron estudiadas en las refs. [85].

Es relevante enfatizar que el modelo de matrices dispersas aleatorias introducido por Rodgers y Bray [72] es equivalente a matrices de adyacencia de redes de tipo ER. De hecho, motivados por ésta equivalencia y con base en el modelo de ER, en este trabajo estudiamos propiedades espectrales y de autoestados del siguiente modelo de redes aleatorias: Comenzando con el modelo de redes de ER *estándar*, añadimos auto aristas (autoconexiones) y además consideramos pesos aleatorios para todas las aristas.[1] Hemos nombrado a éste modelo el modelo de redes *completamente desordenadas* de tipo ER. Entonces, como en el modelo de redes de ER *estándar*, el modelo de redes *completamente desordenadas* de tipo ER está caracterizado solamente por los parámetros N y p. Sin embargo, las matrices de adyacencia correspondientes forman un ensamble de matrices dispersas reales y simétricas de tamaño $N \times N$ cuyos elementos diferentes de cero son variables aleatorias estadísticamente independientes caracterizadas por una distribución de probabilidad normal con media cero $\langle A_{ij} \rangle = 0$ y varianza $\langle |A_{ij}|^2 \rangle = (1 + \delta_{ij})/2$. De acuerdo con esta definición se obtiene una matriz aleatoria diagonal cuando $p = 0$ (caso de Poisson), mientras que el GOE corresponde a $p = 1$.

Nuestra motivación en el estudio de las propiedades espectrales y de autoestados de redes *completamente desordenadas* de tipo ER redes se puede dividir en dos partes. Por un lado, Jackson y colaboradores [71] mostraron que el parámetro ξ fija algunas propiedades espectrales de matrices aleatorias dispersas equivalentes a las matrices de adyacencia del modelo de redes *completamente desordenadas* de tipo ER que definimos arriba. Además, también se sabe que el grado promedio ξ fija algunas de las propiedades espectrales de grafos aletorios [88]. Por otro lado, existe un número grande de artículos que reportan propiedades

[1] Justificamos el uso de variables aleatorias como magnitudes de las aristas al reconocer que en las redes del mundo real las conexiones y/o interacciones entre elementos no son en general constantes.

espectrales y de autoestados de redes complejas [89–121]. Sin embargo, la mayoría de ellos se especializan en combinaciones específicas de N y p. Por ejemplo, en las refs. [94–99, 112] se investigan modelos de redes desordenadas con valores fijos de N y α utilizando conceptos de RMT, aún cuando se incorporan propiedades topológicas adicionales tales como el coeficiente de agrupamiento de vértices [94] y estructura modular [98]. También, Palla y Vallay [89] investigaron las propiedades espectrales del modelo de ER *estándar* cerca del punto crítico de percolación, por lo que restringieron el análisis a los valores $1 < \xi < 2.4$.

Entonces, nos dimos cuenta que la universalidad (en el sentido de identificar los parámetros relevantes de la red) de las propiedades espectrales y de autoestados de redes desordenadas de tipo ER no ha sido explorada a detalle. Por ello, en esta tesis nos damos a la tarea de realizar dicho estudio utilizando como referencia predicciones de la RMT. Además, nuestro estudio generaliza resultados reportados previamente y no se restringe a una combinación específica de parámetros.

Por lo tanto en la Parte II de esta Tesis analizamos $P(s)$, es decir, la distribución de probabilidad de espaciamientos entre energías consecutivas, la entropía de Shannon promedio $\langle S\rangle$ de autoestados y la longitud de localización entrópica de autoestados ℓ_N del modelo de redes completamente desordenadas de tipo ER como función de la conectividad p. Es bien sabido que $P(s)$ juega un papel fundamental en la descripción y análisis de sistemas desordenados y caóticos cuantizados [122, 123]. Nosotros mostraremos que $P(s)$, $\langle S\rangle$ y ℓ_N son cantidades invariantes para un valor fijo del grado promedio ξ. Adicionalmente, demostraremos que la distribución de Brody describe bien a $P(s)$ en la transición de vértices aislados a redes completamente conectadas. Después verificaremos nuestros hallazgos al relajar el grado de desorden de nuestro modelo de redes. De este modo mostramos que el modelo de redes de tipo ER con desorden diagonal (es decir, el modelo ER que incluye auto aristas con pesos aleatorios) también exhibe universalidad para ξ fijo. Finalmente aplicamos nuestra metodología a un modelo de redes de mundo pequeño.

Además, es relevante añadir que en contraste con la gran cantidad de trabajos que se pueden encontrar en la literatura dedicados al estudio de las propiedades espectrales y de autoestados de redes complejas, solo unos cuantos se enfocan en sus propiedades de dispersión y/o transporte [65, 110, 148, 153–159]. Por ello, en la Parte II de esta Tesis, también estudiamos algunas propiedades de la matriz de dispersión y del transporte electrónico a través de redes desordenadas de tipo enlace fuerte que se describen por medio de matrices reales y simétricas dispersas. Enfatizamos que utilizaremos el enfoque de dispersión al problema del transporte; ver por ejemplo [160]. Adicionalmente nos concentraremos en el caso de un número pequeño de terminales acopladas, donde cada una de ellas soporta un modo abierto. Analizamos el promedio de los elementos de la matriz de dispersión $\langle|D_{mn}|^2\rangle$, la distribución de probabilidad de la conductancia $w(T)$, la conductancia promedio $\langle T\rangle$, y el factor F (que será definido mas adelante) como función de N y p para redes de tipo enlace fuerte. Mostraremos que todas las cantidades de dispersión y transporte son invariantes para ξ fijo. Además, propondremos una relación universal entre $\langle|D_{mn}|^2\rangle$, $\langle T\rangle$ y el parámetro ξ que cuantifica el grado de desorden de la red.

Parte I

Modelo de Anderson unidimensional con desorden tipo Lévy

Capítulo 2

Modelo de Anderson unidimensional

En este capítulo se introducen conceptos generales sobre el modelo de Anderson unidimensional, también la metodología que se utiliza para calcular sus propiedades de transporte. Además se incluyen resultados numéricos, los cuales se comparan con las correspondientes predicciones teóricas.

2.1 Modelo de Anderson unidimensional

Un simple modelo que es usado frecuentemente para describir la propagación de electrones en arreglos periódicos es el modelo de enlace fuerte. En una dimensión (1D), el Hamiltoniano de enlace fuerte con interacción con los primeros vecinos está representado por, ver la ec. (1.3)

$$H = \sum_{n}^{L} \epsilon_n |n\rangle\langle n| - \nu_{n,n+1}|n\rangle\langle n+1| - \nu_{n,n-1}|n\rangle\langle n-1| \ ,$$

donde L es la longitud del alambre dada como el número total de sitios que lo componen n, ϵ_n son potenciales de sitio y $\nu_{n,m}$ son las integrales de acoplamiento entre sitios consecutivos.

De esta manera, el Hamiltoniano de enlace fuerte que estamos considerando puede ser representado por una matriz tridiagonal con elementos

$$\langle m|H|n\rangle = H_{mn} = \epsilon_n \delta_{mn} - \nu(\delta_{m,n+1} + \delta_{m,n-1}) \ . \tag{2.1}$$

Para una red cristalina perfecta $\epsilon_n = \epsilon = cte$. Si los potenciales de sitio ϵ_n no son constantes y en su lugar siguen una secuencia aleatoria, entonces se dice que tiene desorden diagonal. El modelo de Anderson unidimensional (1DAM) consiste en elegir ϵ_n de manera aleatoria.

En el 1DAM estándar, los potenciales de sitio ϵ_n son números aleatorios con un promedio y una varianza definido, en muchos casos la correspondiente distribución $P(\epsilon_n)$ es una distribución uniforme o gausiana. El 1DAM puede ser representado de manera

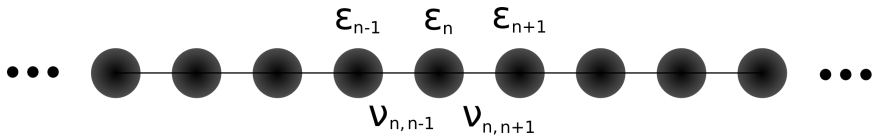

Figura 2.1: Alambre unidimensional infinito compuesto por sitios ϵ_n, donde $\nu_{n,n\pm1}$ son las integrales de acoplamiento entre sitios consecutivos.

esquemática como un alambre unidimensional infinito compuesto por sitios ϵ_n donde $\nu_{n,n\pm1}$ son las integrales de acoplamiento entre sitios consecutivos, ver la Fig. 2.1.

Por otro lado, recordando que para el 1DAM con desorden débil, Thouless obtuvo una expresión para la longitud de localización l_∞, en términos de la varianza σ^2 de los potenciales de sitio [6]

$$l_\infty^{-1}(E) = \frac{\sigma^2}{8(1-E^2/4)} \ , \tag{2.2}$$

donde E es la energía del sistema y desorden débil significa $\sigma \ll 1$. En general, como ya se mencionó, para el modelo de Anderson, los potenciales de sitio ϵ_n se escogen como números aleatorios obtenidos de una distribución de probabilidad en particular, en éste capítulo utilizaremos una distribución rectangular (uniforme) entre $[-w/2, w/2]$, donde w es el ancho de la distribución. De modo que la varianza $\sigma^2 = \langle \epsilon_n^2 \rangle = w^2/12$. Sin embargo, hay una pequeña corrección a este valor debido a una falla de la teoría de perturbación estándar en $E = 0$, por tal motivo, el valor correcto es [44–46]

$$l_\infty^{-1}(E=0) \approx \frac{w^2}{105.2} \ . \tag{2.3}$$

2.1.1 Matriz de dispersión

Ahora, si consideramos el 1DAM de longitud L con dos terminales unimodales acopladas de manera perfecta ($\gamma = 1$) a los dos sitios extremos del sistema (sitios n_1 y n_L), ver la Fig. 2.2, éste se convierte en un sistema dispersivo. Para el estudio de las propiedades de transporte en el 1DAM utilizamos la matriz de dispersión D.

Usando métodos estandarizados [51, 52, 55] escribimos la matriz D de la siguiente forma [53, 54]

$$D(E) = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} = 1 - 2i\sin(k) W^T \frac{1}{E - H_{ef}} W \ , \tag{2.4}$$

donde r y r' son las matrices de reflexión y t y t' son las matrices de transmisión, todas de tamaño $M \times M$. Donde M representa el número de terminales acopladas al sistema, en éste caso $M = 1$. $\mathbf{1}$ es una matriz unitaria de tamaño $2M \times 2M$, $k = \arccos(E/2)$ es el vector de onda en las terminales y H_{ef} es un Hamiltoniano efectivo no hermítico dado por

$$H_{ef} = H - e^{ik} W W^T. \tag{2.5}$$

Aquí, H es el Hamiltoniano de enlace fuerte del sistema, W es una matriz de tamaño $L \times 2M$ que especifica la posición de las terminales acopladas a la muestra. La matriz W

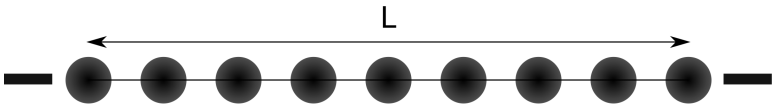

Figura 2.2: Modelo de Anderson unidimensional con dos terminales acopladas en los lados opuestos del alambre. La longitud del alambre es de $L = 9$, es decir, está compuesto por 9 sitios.

tiene elementos que son iguales a cero o γ, donde γ es la magnitud del acoplamiento entre el sistema y las terminales.

Una vez que la matriz de dispersión D es conocida, se pueden calcular cantidades de transporte. En esta sección nos enfocamos en la conductancia, definida de la siguiente forma

$$G = \mathrm{Tr}(tt^{\dagger}) \ , \tag{2.6}$$

donde t es el coeficiente de transmisión en la matriz D, ec. (2.4).

2.2 Conductancia del modelo de Anderson unidimensional

A continuación mostraremos resultados numéricos ya conocidos sobre la conductancia adimensional G y del escalamiento de un sólo parámetro L/l_{∞} para el 1DAM.

En la Fig. 2.3 mostramos el promedio del logaritmo de la conductancia, $\langle -\ln G\rangle$, como una función del tamaño del alambre L, para el 1DAM (símbolos). Podemos ver claramente que $\langle -\ln G\rangle \propto L$ para todos los casos mostrados en la figura, por lo tanto, se verifica la ec. (1.1), Capítulo 1. En esta figura se han utilizado diferentes valores de energía: $E = 0$, 0.1, 0.25 y 1. El desorden en los potenciales de sitio, para cada muestra están dados a través de la longitud de localización, ec. (2.2), para diferentes valores en la longitud de localización $l_{\infty} = 10$, 100 y 1000. La línea punteada se obtuvo usando la ec. (1.1) con los correspondientes valores de l_{∞}.

Por otro lado, se conoce que la distribución de la conductancia, $P(G)$, para alambres unidimensionales desordenados está completamente determinada una vez que la razón L/l_{∞} es fija. Debemos notar, una vez que fijamos el valor para L/l_{∞}, también lo estamos haciendo para el promedio del logaritmo de la conductancia, $\langle -\ln G\rangle$, ver ec. (1.1).

En la Fig. 2.4 se muestran las distribuciones de probabilidad de la conductancia $P(G)$ para el 1DAM (histogramas). Cada panel corresponde a un valor para el promedio del logaritmo de la conductancia, $\langle -\ln G\rangle$, fijo. Muchas combinaciones de L y E han sido usadas. También se incluyen las predicciones teóricas de $P_{\mathrm{WN}}(G)$ correspondientes a cada valor del promedio del logaritmo de la conductancia $\langle -\ln G\rangle$, en cada panel (líneas punteadas).[1] En la figura podemos observar excelente correspondencia en los resultados

[1] Utilizando los resultados de la ref. [57], en particular la ec. (2) de dicho trabajo, $P_{\mathrm{WN}}(G)$ está dada por

$$P_{\mathrm{WN}}(G) = C\sqrt{\frac{\mathrm{acosh}\left(1/\sqrt{G}\right)}{G^3\sqrt{1-G}}}\exp\left[-\frac{1}{s}\mathrm{acosh}^2\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\right)\right], \tag{2.7}$$

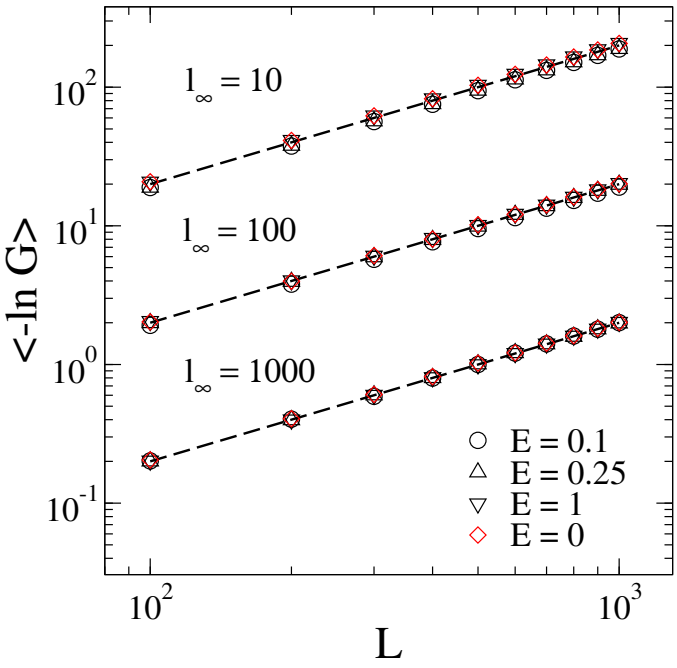

Figura 2.3: Promedio del logaritmo de la conductancia $\langle -\ln G\rangle$ como función de L para 1DAM (símbolos). Cuatro energías son usadas: $E = 0$, 0.1, 0.25 y 1. La amplitud del desorden están dados en la longitud de localización $l_\infty = 10$, 100, y 1000, ver ec. (2.2). Las líneas punteadas se obtuvieron usando la ec. (1.1) con los correspondientes valores de l_∞. Cada símbolo fue calculado usando 10^5 realizaciones del desorden.

numéricos con la teoría para $1/5 \leq \langle -\ln G\rangle \leq 2$ para todos los valores de L y E considerados. Para valores intermedios del promedio del logaritmo de la conductancia $\langle -\ln G\rangle$, podemos observar ligeras desviaciones para alambres cortos $L \leq 100$. Podemos ver también que para $L \geq 100$ nosotros esperamos total correspondencia entre los resultados numéricos y la teoría.

Hasta ahora, se ha dado una introducción sobre conceptos generales y resultados sobre el modelo de Anderson unidimensional (1DAM), los cuales nos van a servir como referencia en estudios posteriores. Un resultado importante que se mencionó en la sección anterior, fue que para el 1DAM con desorden débil, Thouless obtuvo una expresión para la longitud de localización l_∞, el cual depende de la varianza σ^2 de los potenciales de sitio, ver ec. (2.2). En particular los potenciales de sitio ϵ_n se escogen como números aleatorios obtenidos de una distribución uniforme. De hecho, si la distribución no es uniforme pero Gausiana, por ejemplo, la ec. (2.2) sigue siendo válida para encontrar la longitud de localización l_∞, lo único que se debe hacer es substituir en σ^2, la varianza de la distribución Gausiana.

---

donde C es una constante de normalización y $s = L/\ell$; aquí ℓ es el camino libre medio. El parámetro s se puede obtener numéricamente del promedio $\langle \ln G\rangle = L/\ell$

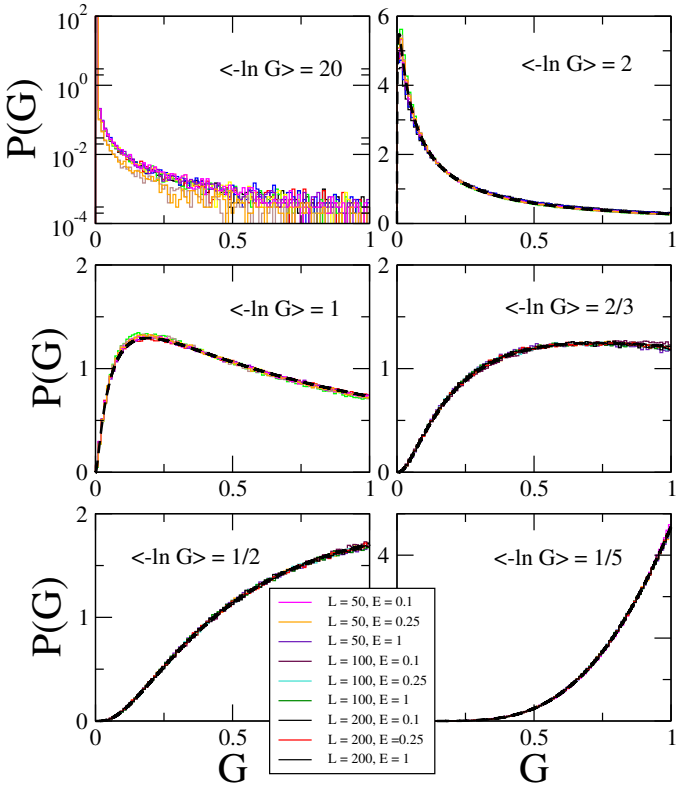

Figura 2.4: Distribución de probabilidad de la conductancia P(G) para el 1DAM (histogramas). Cada panel corresponde a una razón fija L/l_∞. Diferentes combinaciones de L y E han sido usados. Cada histograma fue calculado usando 10^6 realizaciones del desorden. Las líneas puntedas son las predicciones teóricas de $P(G)$ correspondiente a la razón L/l_∞ de cada panel.

Capítulo 3

Modelo de Anderson unidimensional con desorden tipo Lévy

En este capítulo realizamos un estudio numérico de la conductancia G para alambres unidimensionales (1D) de tipo enlace fuerte con desorden de sitio. Las configuraciones del desorden de las energías de los sitios se caracterizan por una distribución de probabilidad con colas que decaen lentamente como una ley de potencias: para ϵ grande, $P(\epsilon) \sim 1/\epsilon^{1+\alpha}$ con $\alpha \in (0, 2)$. Este modelo es una generalización del modelo de Lloyd 1D, que corresponde a $\alpha = 1$. Para comenzar, verificamos que el promedio $\langle -\ln G \rangle$ (tomado sobre realizaciones de desorden) es proporcional a la longitud del alambre L para todos los valores de α; esto nos proporciona la longitud de localización l_∞ por medio de la expresión $\langle -\ln G \rangle = 2L/l_\infty$. Entonces, mostramos que la distribución de probabilidad $P(G)$ está completamente determinada por el exponente α y $\langle -\ln G \rangle$. En contraste con alambres 1D con desorden de tipo ruido blanco, es decir, $\langle \epsilon_n \epsilon_m \rangle = \delta_{nm}$ y $\langle \epsilon_n \rangle = 0$, nuestro modelo exhibe distribuciones de conductancia bimodales con picos en $G = 0$ y 1. Además, mostramos que $P(\ln G)$ es proporcional a G^β, cuando $G \to 0$, con $\beta \leq \alpha/2$.

3.1 Distribución de probabilidad de tipo Lévy

Como ya se mencionó, para el modelo de Anderson unidimensional, los potenciales de sitio ϵ_n se escogen como números aleatorios obtenidos de una distribución rectangular (uniforme) entre $[-w/2, w/2]$, con varianza σ^2 definida. Ahora, si los potenciales de sitio ϵ_n se consideran números aleatorios obtenidos de una distribución de probabilidad tipo Lévy, es decir, de una distribución sin varianza definida, entonces podremos abordar la pregunta que se mencionó en el capítulo anterior (¿Cuáles son las propiedades de los autoestados y de transporte del 1DAM si los potenciales ϵ_n son números aleatorios obtenidos de una distribución sin varianza definida?). Nosotros llamamos a este modelo el 1DAM con desorden de tipo Lévy. Recordemos que cuando $\alpha = 1$ nuestro modelo reproduce el modelo de Lloyd 1D.

A continuación se indica la forma de obtener los potenciales de sitio ϵ_n los cuales siguen una distribución de tipo Lévy [9]:

$$\epsilon = \begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha\Theta)}{(\cos\Theta)^{1/\alpha}}\Big[\dfrac{\cos((\alpha-1)\Theta)}{\Psi}\Big]^{(1-\alpha)/\alpha} & \alpha \neq 1; \\ \\ \tan(\Theta_n) & \alpha = 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde Θ y Ψ son variables aleatorias independientes. Θ se obtiene de una distribución plana en un intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y Ψ esta exponencialmente distribuido con promedio 1, y $\alpha \in (0, 2)$.

Es importante mencionar que los números aleatorios ϵ_n obtenidos de la ec. (3.1), están caracterizados por una distribución de probabilidad con colas que decaen lentamente como una ley de potencias[1], ver la ec. (1.2):

$$P(\epsilon) \sim 1/\epsilon^{1+\alpha} \ .$$

con $0 < \alpha < 2$. También, una propiedad de la distribución de Lévy, es que los números aleatorios obtenidos de la ec. (3.1) son muy grandes, como ejemplo, para $\alpha = 1/4$ los números aleatorios pueden llegar a ser del orden de 10^5. Por tal motivo no es muy práctico construir $P(\epsilon)$ para probar las validez de la ec. (1.2). Para esto, se usa un cambio de variable $\epsilon \to \ln\epsilon$, las distribuciones $P(\epsilon)$ y $P(\ln\epsilon)$, para todo valor de ϵ, se relacionan de la siguiente manera

$$|P(\epsilon)d\ln\epsilon| = |P(\epsilon)d\epsilon| \ , \tag{3.2}$$

es decir,

$$P(\ln\epsilon) = P(\epsilon)\Big|\frac{d\epsilon}{d\ln\epsilon}\Big| \ , \tag{3.3}$$

y como

$$\frac{d\epsilon}{d\ln\epsilon} = \epsilon \ , \tag{3.4}$$

nos conduce a lo siguiente

$$P(\ln\epsilon) = \epsilon P(\epsilon) \ . \tag{3.5}$$

En la Fig. 3.1 graficamos la distribución de probabilidad $P(\ln\epsilon)$ de los números aleatorios obtenidos por la ec. (3.1), para cuatro valores representativos (histogramas) con $\alpha = 1/4$, 1/2, 1, y 3/2. La dirección de la flecha indica el valor creciente de α. Las líneas rojas punteadas son proporcionales a $\epsilon^{-\alpha}$. Por lo tanto, de la Fig. 3.1 y de la ec. (3.5) podemos verificar el decaimiento que se espera en las colas de la distribución, ver ec. (1.2).

[1]Este tipo de distribuciones de probabilidad, son conocidos el la literatura como distribuciones α-estables.

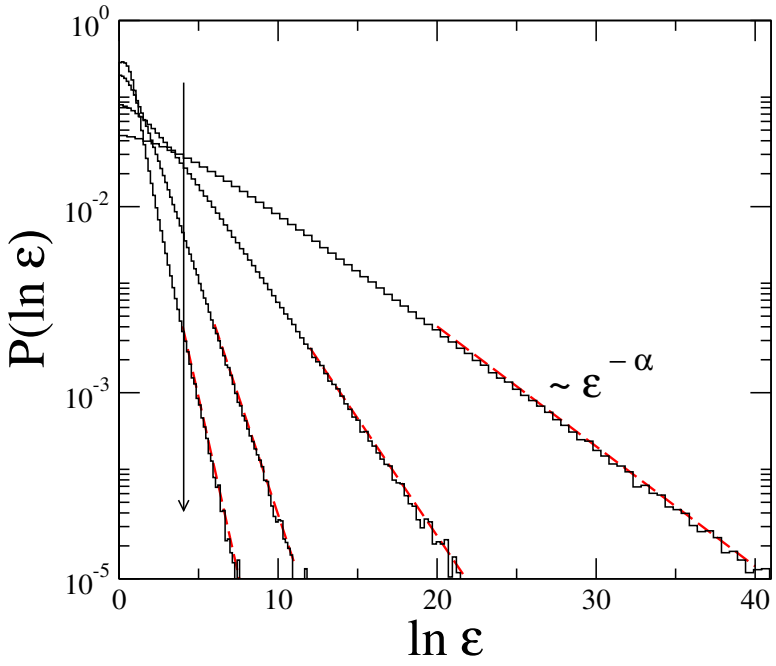

Figura 3.1: Distribución $P(\ln \epsilon)$ de los números aleatorios construidos por la ec. (3.1), para $\alpha = 1/4,\ 1/2,\ 1,$ y $3/2$. La dirección de la flecha indica el valor creciente de α. Las líneas rojas punteadas son proporcionales a $\epsilon^{-\alpha}$. Cada histograma fue calculado usando 10^6 números aleatorios.

3.2 Modelo de Anderson unidimensional con desorden tipo Lévy

Recordando que el Hamiltoniano unidimiensional de enlace fuerte está dado por la ec. (1.3):

$$H = \sum_{n=1}^{L} [\epsilon_n \mid n\rangle\langle n \mid \ -\nu_{n,n+1} \mid n\rangle\langle n+1 \mid -\nu_{n,n-1} \mid n\rangle\langle n-1 \mid] \, ;$$

donde L es la longitud del alambre dado como el número total de sitios n, ϵ_n son potenciales de sitio, obtenidos de la ec. (3.1), y $\nu_{n,m}$ son las integrales de acoplamiento entre sitios consecutivos. Sin embargo, mientras que para el 1DAM estándar (con potenciales de sitio tales que $\langle \epsilon_n \epsilon_m \rangle = \delta_{nm}$ y $\langle \epsilon_n \rangle = 0$) los potenciales de sitio están caracterizados por una varianza finita $\sigma^2 = \langle \epsilon_n^2 \rangle$, en el modelo de Lloyd la varianza σ^2 de las energías ϵ_n diverge.

Además, recordando que para desorden débil ($\sigma^2 \ll 1$), el único parámetro relevante para el 1DAM *finito* es la razón L/l_∞, conocido como escalamiento de un solo parámetro. Particularmente, se ha mostrado que la ec. (1.1) es también válida para el modelo de Lloyd 1D [37, 38, 41].

Ya que estamos interesados en las características de la conductancia del 1DAM con desorden tipo Lévy, comenzaremos definiendo el arreglo dispersivo que utilizaremos.

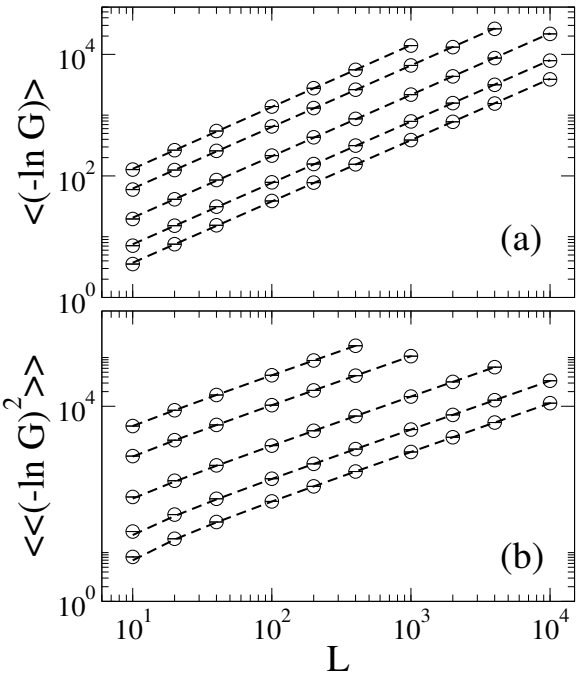

Figura 3.2: (a) Promedio del logaritmo de la conductancia $\langle -\ln G\rangle$ como función de L para el 1DAM con desorden de tipo Lévy (símbolos). Las líneas discontínuas son los ajustes de los datos con la ec. (1.1), que se utilizan para extraer l_∞. (b) $\langle\langle(-\ln G)^2\rangle\rangle$ como función de L (símbolos). Las líneas discontínuas son los ajustes de los datos con la función $\langle\langle(-\ln G)^2\rangle\rangle = 4c_2L$, ver la ec. (3.7). En ambos páneles $\alpha = 1/10$, $1/5$, $1/2$, 1 y $3/2$ (de arriba hacia abajo). Cada punto se calculó utilizando 10^4 realizaciones del desorden. Se utilizó $E = 0$.

Abrimos los alambres, definidos por el 1DAM con desorden tipo Lévy, acoplando dos terminales unimodades a los sitios extremos del mismo. Cada terminal esta descrita por un Hamiltoniano de un alambre 1D semi infinito de tipo enlace fuerte. Entonces, utilizando el método del Hamiltoniano efectivo [51, 52] obtenemos la transmisión a través del alambre usando la siguiente expresión, ver ec.(2.4),

$$t = -2i\sin(k)\, W^T (E - H_{\rm ef})^{-1} W \ , \tag{3.6}$$

donde $k = \arccos(E/2)$ es el vector de onda de la onda incidente que se propaga por las terminales y $H_{\rm ef}$ es un Hamiltoniano efectivo no hermitiano dado por $H_{\rm ef} = H - e^{ik} W W^T$. W es un vector de tamaño $L \times 1$ que especifica los sitios del alambre en donde se conectan las terminales. En nuestro arreglo dispersivo, todos los elementos de W son cero excepto W_{11} y W_{L1} que se igualan a uno (esto quiere decir que las amplitudes de acoplamiento de las terminales con el alambre son iguales a las amplitudes de acoplamiento entre sitios $\nu = 1$). También, hemos elegido que la energía de la onda incidente sea igual a cero $E = 0$ en todos nuestros cálculos, aunque hemos verificado que nuestras conclusiones son válidas para cualquier $E \neq 0$. Así, aplicando el enfoque dispersivo al problema del transporte, calculamos la conductancia adimensional como [56, 58–60] $G = |t|^2$, ver ec. (2.6).

En la Fig. 3.2 (a) presentamos el promedio $\langle -\ln G\rangle$ como función de L para el

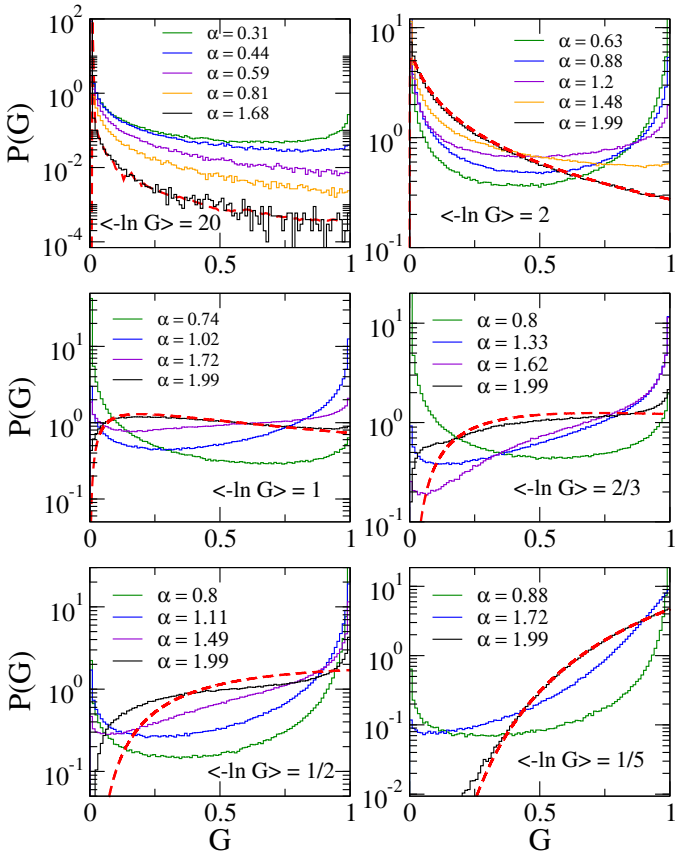

Figura 3.3: Distribución de probabilidad de la conductancia $P(G)$ para el 1DAM con desorden de tipo Lévy (histogramas). Cada panel corresponde a un valor fijo de $\langle -\ln G\rangle$. Se utilizó $E = 0$. Cada histograma fué construido a partir de 10^6 realizaciones de desorden. Las líneas rojas discontínuas son las predicciones teóricas para $P(G)$ en el caso del 1DAM con desorden tipo ruido blanco $P_{\rm WN}(G)$ que corresponden al valor particular de $\langle -\ln G\rangle$ de cada panel.

1DAM con desorden de tipo Lévy para varios valores de α. Se puede ver claramente en esta figura que $\langle -\ln G\rangle \propto L$ para todos los valores de α que hemos considerado. Por lo tanto podemos extraer la longitud de localización l_∞ mediante ajustes de las curvas $\langle -\ln G\rangle$ vs. L con la ec. (1.1); ver las líneas discontínuas en la Fig. 3.2 (a). Este comportamiento se debe contrastar con el caso de alambres 1D con desorden no diagonal de tipo Lévy [2] en donde $\langle -\ln G\rangle \propto L^{1/2}$ cuando $\alpha = 1/2$ y $E = 0$ [49]. Por lo tanto, para poder extraer la longitud de localización l_∞ se ajustan las curvas $\langle -\ln G\rangle$ con respecto de L con la ec. (1.1); ver las líneas punteadas en la Fig. 3.2 (a).

También, hemos confirmado que los momentos de la variable $-\ln G$ obedecen la

[2]Es pertinente mencionar que la dependencia $\langle -\ln G\rangle \propto L^{1/2}$, con $\alpha = 1/2$ y $E = 0$, reportada en [49] para alambres 1D con desorden no diagonal de tipo Lévy fué observada cuando la *longitud del alambre* L se define como la suma total de las integrales de acoplamiento $L = \sum_n \nu_{n,n+1}$.

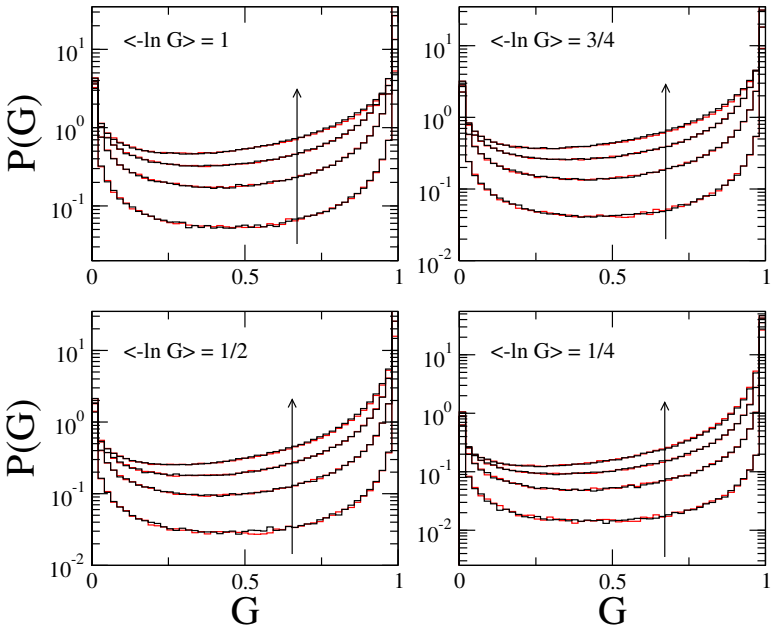

Figura 3.4: Distribución de probabilidad de la conductancia $P(G)$ para el 1DAM con desorden de tipo Lévy (histogramas). Cada panel corresponde a un valor fijo de $\langle -\ln G\rangle$. Se utilizó $E = 0$. En cada panel se incluyen histogramas para $\alpha = 1/4$, $1/2$, $3/4$ y 1; donde α crece en la dirección de la flecha. Además, para cada valor de α se presentan histogramas que corresponden a dos distribuciones de probabilidad de tipo Lévy diferentes: $\rho_1(\epsilon)$ en negro y $\rho_2(\epsilon)$ en rojo; ver ecs. (3.9) y (3.10), respectivamente. Cada histograma fué construido a partir de 10^6 realizaciones de desorden.

relación [41]

$$\lim_{L\to\infty} L^{-1}\langle\langle(-\ln G)^k\rangle\rangle = 2^k c_k \ , \tag{3.7}$$

donde los coeficientes c_k, con $c_1 \equiv l_\infty^{-1}$, representa al exponente de Lyapunov de un alambre 1D genérico con desorden de sitio. Debemos notar que para el caso cuando $k = 1$, tenemos el primer momento de la variable $-\ln G$, es decir, $\langle -\ln G\rangle$, ver la Fig. 3.2 (a). El segundo momento de la variable $-\ln G$ se obtiene cuando $k = 2$ y corresponde a la varianza :

$$\mathrm{Var}(-\ln G) = \langle\langle(-\ln G)^2\rangle\rangle = \langle(-\ln G)^2\rangle - \langle(-\ln G)\rangle^2 \ .$$

Como ejemplo, en la Fig. 3.2 (b) presentamos $\langle\langle(-\ln G)^2\rangle\rangle$ como función de L para varios valores de α. Las líneas discontínuas son los ajustes de los datos numéricos (símbolos) con la función $\langle\langle(-\ln G)^2\rangle\rangle = 4c_2 L$, ver la ec. (3.7), de donde se puede extraer el coeficiente c_2.

Ahora, en la Fig. 3.3 mostramos mostramos distribuciones de probabilidad de conductancia $P(G)$ para el 1DAM con desorden de tipo Lévy para valores fijos de $\langle -\ln G\rangle$; note que $\langle -\ln G\rangle$ fijo también significa que la razón L/l_∞ esta fija. Varios valores de α se reportan en cada panel. En esta figura se puede observar que, para $\langle -\ln G\rangle$ fijo, al incrementar el valor de α la distribución de la conductancia evoluciona hacia la $P(G)$ que corresponde a la del 1DAM con desorden de tipo ruido blanco, $P_{\mathrm{WN}}(G)$, como es de

esperarse. Las curvas para $P_{\text{WN}}(G)$ se incluyen como referencia en todos los páneles de la Fig. 3.3 como líneas rojas discontínuas. De hecho, $P(G)$ corresponde a $P_{\text{WN}}(G)$ una vez que $\alpha = 2$.

En este punto vale la pena recordar que, para alambres de tipo enlace fuerte 1D con desorden no diagonal de tipo Lévy, la forma de $P(G)$ está completamente determinada por el exponente α y el promedio $\langle -\ln G \rangle$ [49]. Es, por lo tanto, pertinente preguntarnos si esta propiedad también es válida en el caso de desorden *diagonal* de tipo Lévy. Entonces, en la Fig. 3.4 mostramos distribuciones de probabilidad de la conductancia $P(G)$ para el 1DAM con desorden tipo Lévy para varios valores de α, donde cada panel corresponde a un valor de $\langle -\ln G \rangle$ fijo. Para cada combinación de $\langle -\ln G \rangle$ y α mostramos dos histogramas (en negro y rojo), que corresponden a alambres con potenciales de sitio $\{\epsilon_n\}$ caracterizados por dos distribuciones de probabilidad *diferentes*, ver las ecs. (3.9) y (3.10), respectivamente, pero con el mismo exponente. Como puede verse de la Fig. 3.4, para cada valor de α los histogramas en rojo y negro caen justamente unos sobre el otro, lo cual es evidencia de que $P(G)$ para el 1DAM con desorden de tipo Lévy-type es invariante una vez que α y $\langle -\ln G \rangle$ están fijos; es decir, $P(G)$ muestra una estadística universal.

Además, queremos enfatizar la coexistencia del régimen aislante y el régimen metálico caracterizados, respectivamente, por los picos de $P(G)$ en $G = 0$ y $G = 1$. Este comportamiento, que es mas evidente para $\langle -\ln G \rangle \sim 1$ y $\alpha \leq 1$ (ver las Figs. 3.3 y 3.4), nunca se observa en alambres 1D con desorden de tipo ruido blanco (ver por ejemplo las curvas rojas discontínuas en la Fig. 3.3). Esta coexistencia de regímenes de transporte opuestos ya ha sido reportada en los siguientes sistemas con estados anómalamente localizados: alambres 1D con obstáculos espaciados aleatoriamente de acuerdo con una distribución de tipo Lévy [47, 49] y en el modelo de Dirac con masas aleatorias [61].

3.2.1 Otras distribuciones tipo Lévy

Adicionalmente su utilizan otras dos distribuciones de probabilidad tipo Lévy, decimos tipo Lévy ya que cumplen con la propiedad de que las colas de la distribución decaen como ley de potencia. Estas dos distribuciones de probabilidad ρ_1 y ρ_2, son las siguientes:

$$f(x;\alpha,C) = \frac{C^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{C}{x}\right) \tag{3.8}$$

donde C es el parámetro de escala. Para $C = 1/2$, tenemos

$$\rho_1(\epsilon) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \epsilon^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon}\right) \ . \tag{3.9}$$

La primera distribución de probabilidad $\rho_1(\epsilon)$ está dada por la ec. (3.9). Utilizando cálculos numéricos, se construyeron números aleatorios que siguen la distribución de probabilidad $\rho_1(\epsilon)$. En la Fig. 3.6 (a) se muestran los histogramas de los números aleatorios para diferentes valores de α, en esta figura podemos observar buena correspondencia entre los histogramas y las curvas teóricas (líneas punteadas), ec. (3.9). Además, en la Fig. 3.6 (b) se verificó la propiedad $P(\epsilon) \sim 1/\epsilon^{1+\alpha}$ para tres casos representativos de α, donde las líneas punteadas muestran el decaimiento caracterizado por el exponente α.

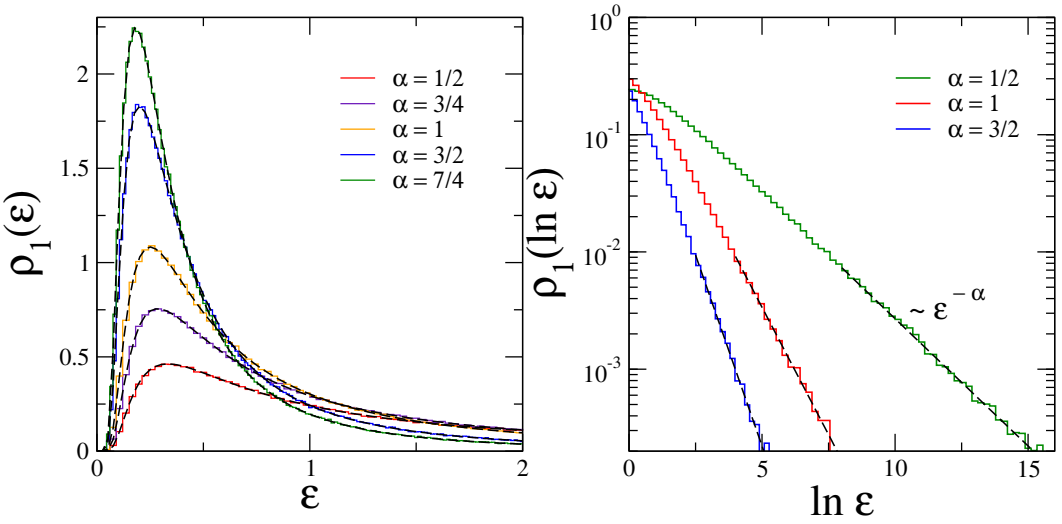

Figura 3.5: (Histogramas) (a) Distribución de probabilidad $\rho_1(\epsilon)$. Las líneas punteadas corresponden a la ec. (3.9) para diferentes valores de α. (b) Distribución de probabilidad $\rho_1(\ln\epsilon)$. En ambos paneles se usaron 10^6 números aleatorios.

La segunda distribución de probabilidad $\rho_2(\epsilon)$ es la siguiente:

$$\rho_2(\epsilon) = \frac{\alpha}{(1+\epsilon)^{1+\alpha}} \ . \tag{3.10}$$

Utilizando el método de transformación inversa, se construyeron números aleatorios con una distribución de probabilidad ec. (3.10). En la Fig. 3.6 (a) se muestran los histogramas de los números aleatorios para diferentes valores de α, los cuales tienen buena correspondencia con las curvas teóricas (líneas punteadas), ec. (3.10). Además se verificó la propiedad $P(\epsilon) \sim 1/\epsilon^{1+\alpha}$ para tres casos representativos de α, ver la Fig. 3.6 (b). Debemos notar que $\rho_2(\ln\epsilon) = \epsilon P(\epsilon)$.

Finalmente estudiamos el comportamiento de las colas de las distribuciones de probabilidad $P(\ln G)$. Entonces, utilizando los mismos datos de la Fig. 3.4, en la Fig. 3.7 mostramos $P(\ln G)$. Como es de esperarse, como la forma de $P(G)$ está completamente determinada por α y $\langle -\ln G\rangle$, podemos ver que $P(\ln G)$ es invariante una vez que esas dos cantidades (α y $\langle -\ln G\rangle$) está fijas (los histogramas en negro y rojo caen uno sobre el otro). Además, de la Fig. 3.7 podemos deducir el siguiente comportamiento:

$$P(\ln G) \propto G^{\beta} \tag{3.11}$$

para $G \to 0$ cuando $\alpha < 2$. Cuando $\alpha = 2$, $P(\ln G)$ muestra colas que decaen exponencialmente (lo cual no se muestra aquí), como en el caso de sistemas 1D en presencia de localización de Anderson. De hecho, el comportamiento (3.11) fué predicho en [41] como $P(G) \sim G^{-(2-\lambda)/2}$ para $G \to 0$ con $\lambda < \alpha$; lo que en nuestro estudio se traduce como $P(\ln G) \propto G^{\lambda/2}$ (dado que $P(\ln G) = GP(G)$) con $\lambda/2 \equiv \beta \leq \alpha/2$. También hemos validado ésta última desigualdad en la Fig. 3.8 donde reportamos al exponente β que se obtiene de ajustes de leyes de potencias en las colas de los histogramas de $P(\ln G)$. Adicionalmente,

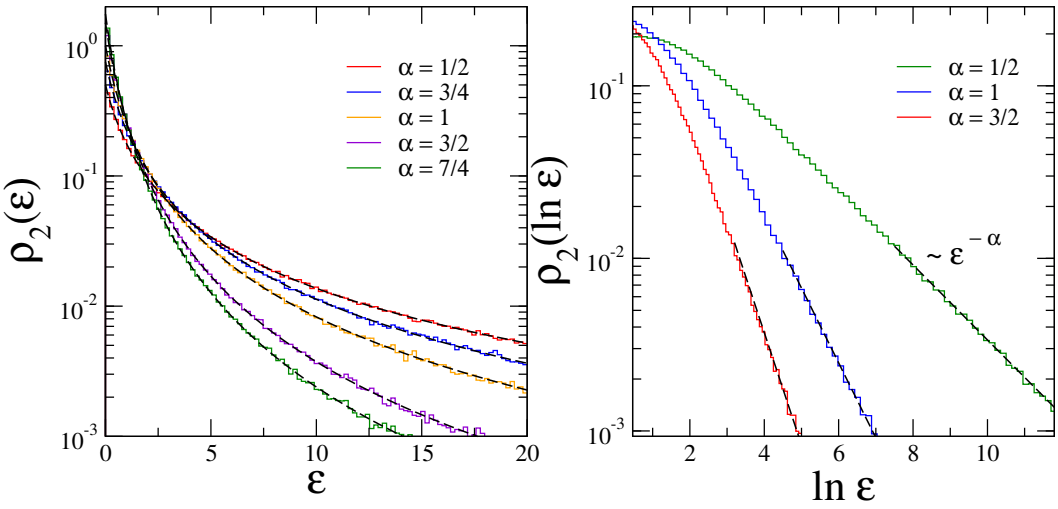

Figura 3.6: (Histogramas) (a) Distribución de probabilidad $\rho_2(\epsilon)$. Las líneas punteadas corresponden a la ec. (3.10) para diferentes valores de α. (b) Distribución de probabilidad $P(\ln \epsilon)$. En ambos paneles se usaron 10^6 números aleatorios.

hemos observado que el valor de β depende del valor particular de $\langle -\ln G \rangle$ característico de cada histograma $P(\ln G)$. Por lo tanto, de la Fig. 3.8 vemos que $\beta \approx \alpha/2$ cuando el valor de $\langle -\ln G \rangle$ decrece.

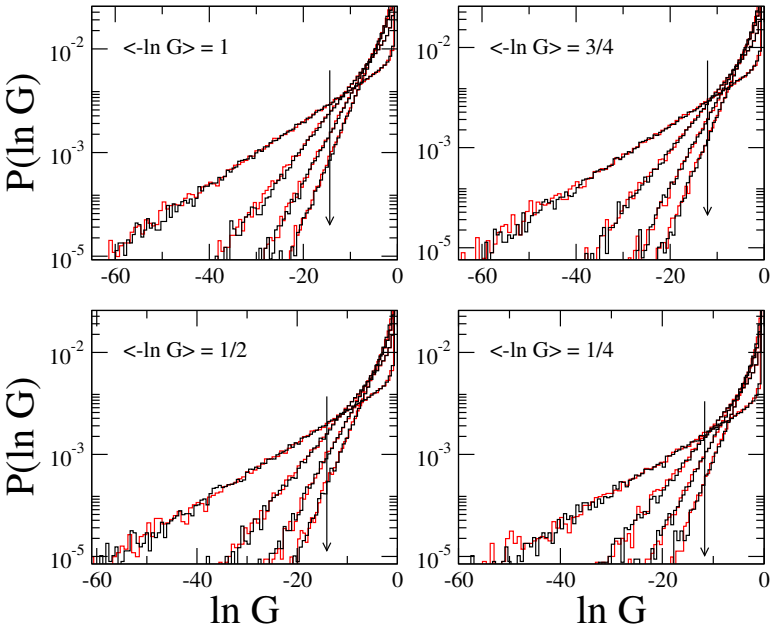

Figura 3.7: Distribuciones de probabilidad $P(\ln G)$ para el 1DAM con dersorden de tipo Lévy. Se utilizaron los mísmos parámetros que en la Fig. 3.4. Recordamos que en cada panel se incluyen histogramas para $\alpha = 1/4$, $1/2$, $3/4$ y 1. Aquí, α crece en la dirección de la flecha.

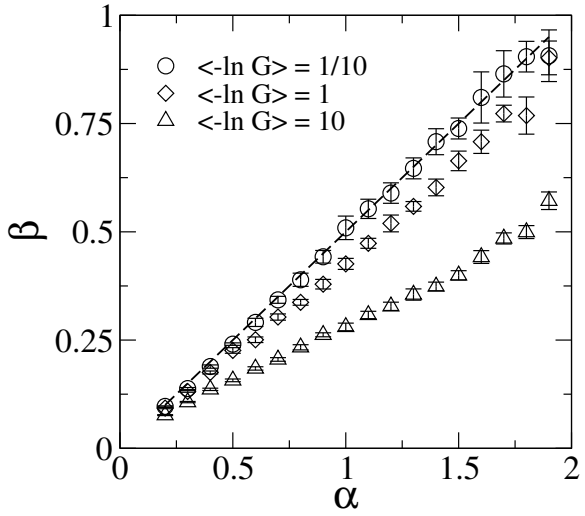

Figura 3.8: El exponente β, ver la ec. (3.11), como función de α para $\langle -\ln G \rangle = 1/10$, 1 y 10. La línea discontínua corresponde a $\beta = \alpha/2$. El exponente β fué obtenido de ajustes de tipo ley de potencia a las colas de los histogramas de $P(\ln G)$ en el intervalo $P(\ln G) \in [10^{-5}, 10^{-3}]$.

Parte II

Modelo de redes desordenadas

Capítulo 4

Modelo de redes desordenadas

En este capítulo introducimos conceptos generales de redes y su clasificaíon. Además analizamos $P(s)$, es decir, la distribución de probabilidad de espaciamientos entre energías consecutivas, la entropía de Shannon promedio $\langle S \rangle$ de autoestados y la longitud de localización entrópica de autoestados ℓ_N del modelo de redes completamente desordenadas de tipo ER como función de la conectividad p. Es bien sabido que $P(s)$ juega un papel fundamental en la descripción y análisis de sistemas desordenados y caóticos cuantizados [122]. Nosotros mostraremos que $P(s)$, $\langle S \rangle$ y ℓ_N son cantidades invariantes para un valor fijo del grado promedio ξ. Adicionalmente, demostraremos que la distribución de Brody describe bien a $P(s)$ en la transición de vértices aislados a redes completamente conectadas. Después verificaremos nuestros hallazgos al relajar el grado de desorden de nuestro modelo de redes. De este modo mostramos que el modelo de redes de tipo ER con desorden diagonal (es decir, el modelo ER que incluye auto aristas con pesos aleatorios) también exhibe universalidad para ξ fijo. Finalmente aplicamos nuestra metodología a un modelo de redes de mundo pequeño.

4.1 Conceptos generales de redes

Las redes pueden ser derterministas, fractales o desordenadas. Las redes deterministas y fractales se construyen siguiendo reglas específicas, mientras que las redes desordenadas están caracterizadas por un conjunto de parámetros que toman valores fijos pero la red en sí presenta una estructura desordenada. En éste último caso, no tiene relevancia el estudio de una sola red, en cambio se requiere de un análisis estadístico de un ensamble de redes con las mismas propiedades en promedio. Algunos ejemplos mas conocidos y estudiados [65] (i) *redes deterministas*: cuadradas, tipo-estrella, dendrímeros y árbol-Cayley; (ii) *redes fractales*: red dual del triángulo de Sierpinski, en contraste con redes deterministas, las redes fractales tienen en general dimensiones no enteras; (iii) *redes desordenadas:* redes de mundo pequeño, redes de tipo Erdős-Rényi y escala libre. En la Fig. 4.1 se muestran algunos ejemplos de cada tipo de red, (a) red cuadrada $2d$ (determinista) con una longitud N, y con un número de vértices (nodos) N^2. (b) red dual del triángulo de Sierpinski (fractal), con el número de vértices $N = 3^g$, con $g = 3$. (c) red de mundo pequeño (aleatoria), en éste caso no hay autoaristas, el número de vértices es $N = 16$ y con 11 aristas adicionales.

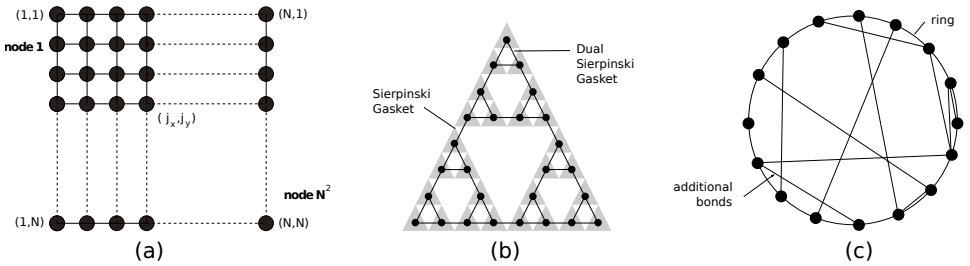

Figura 4.1: (a) Red cuadrada $2d$ (determinista) con una longitud N, y con un número de vértices N^2. (b) red dual del triángulo de Sierpinski (fractal) con el número de vértices $N = 3^g$, con $g = 3$. (c) red de mundo pequeño (red desordenada), el número de vértices es $N = 16$ y con 11 aristas adicionales. Estas figuras se obtuvieron de la ref. [65].

Muchos modelos sobre redes aleatorias han sido interesantes para su estudio [64, 66], incluyendo, el modelo *grafos aleatorios* de Erdős y Rényi (ER), el modelo de redes de *escala libre* de Barabasi y Albert y las redes de *mundo pequeño* de Watts y Strogatz. Estos modelos son considerados relevantes porque reproducen la organización de redes de mundo real, tales como Internet, redes eléctricas, redes sociales y biológicas [62, 64, 66]. Aquí nosotros consideramos el modelo de grafos aleatorios ER el cual fue introducido por Solomonoff y Rapoport [68] y estudiado posteriormente de manera detallada por Erdős y Rényi [69, 70].

Es importante también mencionar que los grafos pueden ser dirigidos y no dirigidos. Los grafos dirigidos (que no estudiaremos aquí) son grafos en los cuales se ha añadido una orientación a las aristas, representada gráficamente por una flecha. Los grafos no dirigidos (que utilizaremos) no cuentan con una orientación preferencial en las aristas. Como ejemplo de un grafo no dirigido, ver la Fig. 4.2.

4.2 Modelo de redes de tipo Erdős-Rényi estándar

Aquí consideramos el modelo de grafos aleatorios ER. Este modelo también se conoce como el modelo de grafos descorrelacionados. Las redes de ER se construyen de la siguiente manera: partiendo de N vértices aislados, cada par de vértices se conecta mediante una arista con probabilidad p.

La matriz de adyacencia $\mathbf{A}$ de una red simple, es una matriz con elementos A_{ij} definidos [64]

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay una conexión entre los vértices } i \text{ y } j, \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Ésta definición produce matrices dispersas reales y simétricas de tamaño $N \times N$ con elementos iguales a cero en la diagonal principal, donde N es el número de vértices que forman la red. Dedemos recordar que la conectividad de $\mathbf{A}$ se cuantifica con el parámetro p.

Continuando con el ejemplo de grafo en la Fig. 4.2, para construir su correspondiente matriz de adyacencia A, nos fijamos en las aristas: $(\{1,2\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,5\})$, por lo

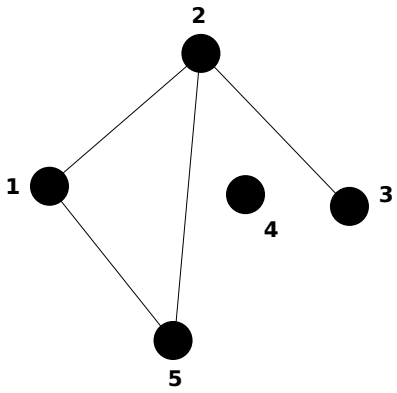

Figura 4.2: Ilustración de un grafo con $N = 5$ vértices y 4 conexiones. Esta figura se obtuvo de la ref. [65].

tanto, los elementos de la matriz A: $\{A_{1,2}, A_{1,5}, A_{2,3}, A_{2,5}\}$ son iguales a 1 y como la matriz es simétrica y no hay aristas que conecten al mismo vértice, tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{4.2}$$

Ahora, si queremos calcular el parámetro p para la ec. (4.2), el número de vértices $N = 5$ con cuatro aristas, ya que los grafos son no dirigidos tenemos 8 conexiones y el número de elementos no diagonales es $N(N-1)$, entonces, $p = 8/20 = 0.4$.

4.3 Redes completamente desordenadas de tipo Erdős-Rényi

A continuación utilizamos diagonalización numérica exacta para obtener los autovalores E^m y las autofunciones Ψ^m $(m = 1 \ldots N)$ de las matrices de adyacencia de ensambles de redes desordenadas caracterizadas por los parámetros N y p.

4.3.1 Distribución de probabilidad de espaciamientos entre energías consecutivas

La Fig. 4.3 muestra la distribución de probabilidad de espaciamientos entre energías consecutivas $P(s)$ para las matrices de adyacencia de redes completamente desordenadas de tipo ER formadas por $N = 1000$ vértices con diferentes valores de conectividad p. Los histogramas fueron construidos con 500 espaciamientos desdoblados [122], $s_m = (E^{m+1} - E^m)/\Delta$, alrededor del centro de la banda de 10^3 matrices de adyacencia. Aquí, Δ es el espaciamiento promedio calculado para cada espectro como la pendiente de la curva E^m vs. m al centro de la banda. Para redes de otros tamaños siempre construimos $P(s)$ utilizando la mitad del total de los autovalores al centro de la banda, donde la densidad de estados es prácticamente constante.

Cuando $p = 0$, es decir, cuando los vértices de la red están aislados, la matriz de adyacencia correspondiente es una matriz aleatoria diagonal y la $P(s)$ sigue una distribución exponencial,

$$P(s) = \exp(-s) \ , \tag{4.3}$$

mejor conocida en RMT como distribución de Poisson de espaciamientos entre niveles aleatorios [122]. En el límite opuesto, $p = 1$, cuando la red está completamente conectada, la matriz de adyacencia se convierte en un miembro del GOE (matrices aleatorias reales y simétricas sin elementos nulos) y la $P(s)$ es muy cercana a la distribución de Wigner-Dyson[1] [122],

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right) \ . \tag{4.4}$$

Por lo tanto, al incrementar p desde cero hasta uno, la forma de la $P(s)$ debe evolucionar de la distribución de Poisson a la distribución de Wigner-Dyson. Ésta transición, parcialmente observada para el modelo de redes desordenadas en las refs. [71,74] desde un punto de vista de la RMT, se muestra en la Fig. 4.3, donde también incluimos a las ecs. (4.3) y (4.4) como referencia. De hecho, es relevante apuntar que aún para valores de p relativamente pequeños, ya se observa la estadística del GOE. La transición de Poisson a Wigner-Dyson en la estadística espectral se ha reportado para matrices de adyacencia de otros modelos de redes desordenadas, ver por ejemplo las refs. [91–98].

En este trabajo, para caracterizar la forma de la $P(s)$ de nuestro modelo de redes desordenadas, utilizamos la distribución de Brody [124,125] que fué derivada originalmente para contar con una interpolación para $P(s)$ en la transición de Poisson a Wigner-Dyson mediante la propuesta $P(s) = c_1 s^\beta \exp\left(-c_2 s^{\beta+1}\right)$ (donde $c_{1,2}$ dependen de β). Una vez normalizada, la distribución de Brody tiene la forma [124,125]

$$P(s) = (\beta + 1) a_\beta s^\beta \exp\left(-a_\beta s^{\beta+1}\right) \ , \tag{4.5}$$

donde $a_\beta = [\Gamma(\beta+2/\beta+1)]^{\beta+1}$, $\Gamma(\cdot)$ es la función gama y β, que se conoce como el parámetro de Brody, toma valores en el rango $[0, 1]$. $\beta = 0$ y $\beta = 1$ reproducen las distribuciones de Poisson y Wigner-Dyson, respectivamente. En todo caso, vale la pena recordar que aunque la distribución de Brody ha sido utilizada de manera frecuente para caracterizar la $P(s)$ [126], ésta ha sido obtenida de una manera puramente fenomenológica y el significado físico del parámetro de Brody no ha sido establecido [2], sin embargo proporciona una medida del grado de mezcla entre los régimenes caracterizados por las estadísticas de Poisson y la del GOE. En particular, como se mostrará más adelante, el parámetro de Brody nos permitirá identificar los puntos de transición a los regímenes delocalizado y del GOE en nuestro modelo de redes desordenadas.

[1] Es interesante mencionar que la ec. (4.4) fué derivada por Wigner para matrices del GOE de tamaño $N = 2$, sin embargo, dicha expresión proporciona una excelente aproximación para la $P(s)$ de matrices del GOE con $N \gg 2$

[2] De hecho, en J. Sakhr and J. M. Nieminen, Phys. Rev. E **72**, 045204(R) (2005) se mostró que la distribución de probabilidad de espaciamientos entre distancias mas cercanas de puntos aleatorios distribuidos de manera uniforme sobre un fractal auto similar se ajusta muy bien a la distribución de Brody, donde el parámetro de Brody corresponde a la dimensión fractal.

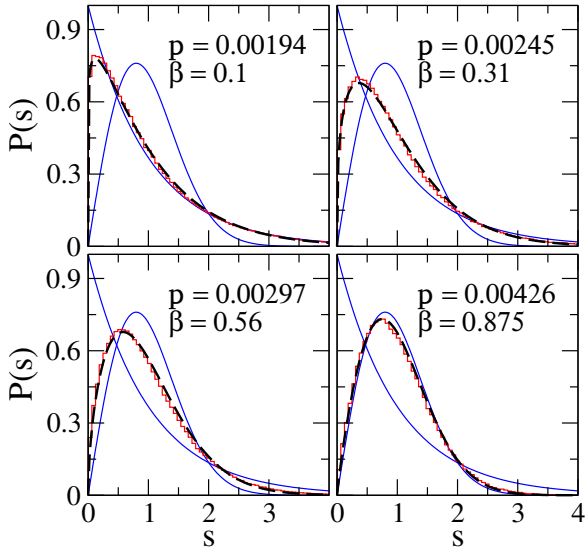

Figura 4.3: Distribución de probabilidad de espaciamientos entre energías consecutivas $P(s)$ para las matrices de adyacencia de redes completamente desordenadas de tipo ER formadas por $N = 1000$ vértices con diferentes valores de conectividad p (histogramas en rojo). Las líneas azules corresponden a las distribuciones de Poisson y de Wigner-Dyson de las ecs. (4.3) y (4.4), respectivamente. Las líneas negras discontínuas son ajustes a los histogramas con la distribución de Brody de la ec. (4.5), donde los valores de β que se obtienen de dichos ajustes se reportan en cada panel. Los histogramas se construyeron con 5×10^5 espaciamientos desdoblados.

Las líneas negras discontínuas en la Fig. 4.3 representan los ajustes de los histogramas de $P(s)$ con la ec. (4.5). Los valores de β que se obtienen de los ajustes se muestran en los páneles correspondientes. Ésta figura muestra que la distribución de Brody proporciona muy buenos ajustes a la $P(s)$ de las matrices de adyacencia del modelo de redes completamente desordenadas de tipo ER. De hecho, se ha mostrado que la distribución de Brody también funciona bién para otros modelos de redes desordenadas [95–99].

Ahora construimos histogramas de la $P(s)$ para varios valores de la conectividad p para poder extraer el parámetro de Brody de forma sistemática. Así, en la Fig. 4.4 (a) reportamos β como función de p para ensambles de redes de cinco tamaños diferentes. Notamos que en los cinco casos el comportamiento de β es similar: β muestra una transición suave desde cero (régimen de Poisson) a uno (régimen de Wigner-Dyson o régimen del GOE) cuando p se incrementa desde $p \ll 1$ (vértices mayoritariamente aislados) a uno (redes completamente conectadas). Notamos tambien que entre mas grande es la red, mas pequeño es el valor de p necesario para que la red se encuentre en el régimen del GOE. Ésta es, de hecho, la razón por la cual en la Fig. 4.3 observamos que forma de la $P(s)$ es muy cercana a la distribución de Wigner-Dyson aún para $p = 0.00426 \ll 1$.

Recordemos que el parámetro ξ (ver ec. (1.4)) fija la forma de la densidad de estados de matrices aleatorias dispersas [71] equivalentes a las matrices de adyacencia de nuestro modelo de redes desordenadas. Además, ξ se identificó como la dimesión efectiva de

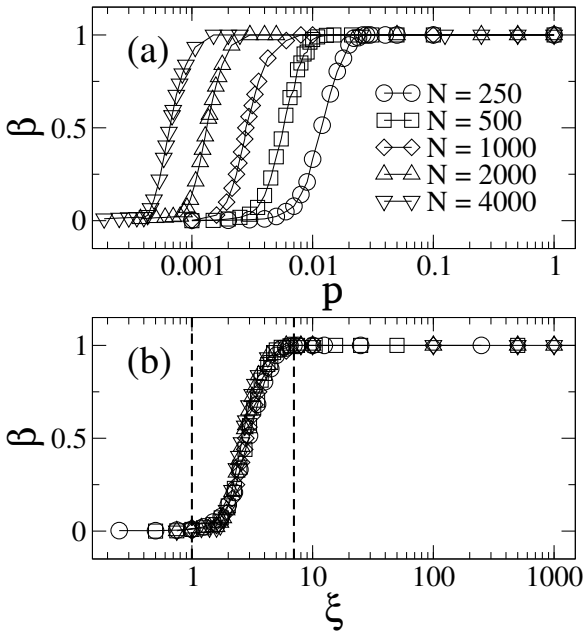

Figura 4.4: Parámetro de Brody β como función de (a) la conectividad p y (b) el grado promedio $\xi = pN$ para redes completamente desordenadas de tipo ER con tamaños que van desde $N = 250$ a 4000. Las líneas discontínuas verticales en $\xi = 1$ y $\xi = 7$ indican los puntos de transición a los regímenes delocalizado y del GOE, respectivamente. Las barras de error no se muestran debido a que son mas pequeñas que el tamaño del símbolo.

tal modelo de matrices aleatorias [71]. Por lo tanto, tiene sentido explorar la dependencia del parámetro β en función del grado promedio ξ; de hecho, en la Fig. 4.4 (b) mostramos tal dependencia. Observamos que las curvas β vs. ξ para ensambles de redes de tamaños diferentes caen todas sobre una curva universal. Ésto significa que una vez que ξ está fijo, sin importar el tamaño de la red, la forma de la $P(s)$ queda determinada. También observamos que la transición en la forma de la $P(s)$ tiene lugar en el intervalo $1 < \xi < 7$; ya que cuando $\xi \leq 1$ ($\xi \geq 7$), la $P(s)$ tiene la forma de la distribución de Poisson (Wigner-Dyson).

Por lo tanto, verificamos la invarianza de la forma de la $P(s)$ para un grado promedio fijo ξ de la siguiente manera (i) primero elegimos cuatro valores representativos de β (0.25, 0.5, 0.75 y $0.98 \sim 1$); (ii) despues extraemos los valores de ξ correspondientes de la curva universal de la Fig. 4.4 (b); y (iii) construimos histogramas de la $P(s)$ para ensambles de redes de varios tamaños para cada uno de los valores de ξ elegidos. Finalmente en la Fig. 4.5 se muestra que una vez que ξ tiene un valor dado, la forma de la $P(s)$ es invariante. Además, en cada panel se incluye la distribución de Brody correspondiente.

También notamos que la Fig. 4.4 (b) proporciona una forma de predecir la forma de la $P(s)$ para redes completamente desordenadas de tipo ER una vez que el grado promedio se conoce: Cuando $\xi < 1$, $P(s)$ tiene la forma que corresponde a la distribución de Poisson. Cuando $\xi > 7$, $P(s)$ está prácticamente dada por la distribución de Wigner-Dyson. Mientras que cuando $1 \leq \xi \leq 7$, la $P(s)$ se describe por distribuciones de Brody caracterizadas por $0 < \beta < 1$. Por los tanto, $\xi = 1$ y $\xi = 7$ indican los puntos de transición a los regímenes de

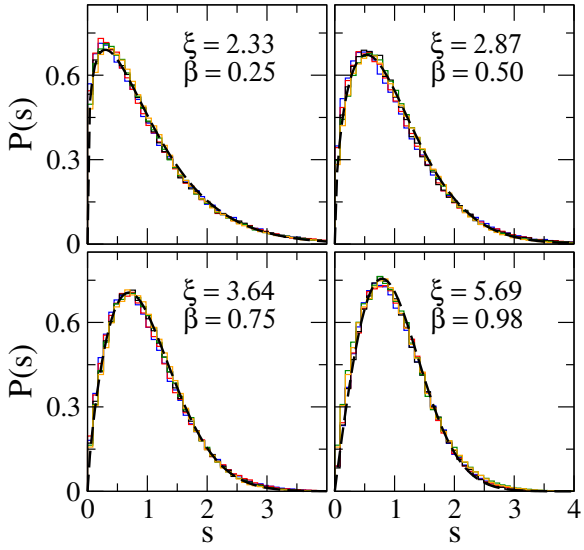

Figura 4.5: Distribución de probabilidad de espaciamientos entre energías consecutivas $P(s)$ para las matrices de adyacencia de redes completamente desordenadas de tipo ER con tamaños que van desde $N = 250$ hasta 4000 para varios valores del grado promedio ξ (histogramas). Las líneas negras discontínuas son la distribución de Brody, ec. (4.5). Cada histograma fué construido con 5×10^5 espaciamientos desdoblados.

delocalización y del GOE, respectivamente.

4.3.2 Longitud de localización entrópica de las autofunciones

Con el objetivo de caracterizar de forma cuantitativa la complejidad de las autofunciones de matrices aleatorias (y de Hamiltonianos de sistemas desordenados y caóticos cuantizados) se utilizan principalmente dos cantidades: (i) la entropía de información o entropía de Shannon y (ii) los números de participación. Éstas cantidades proporcionan el número de componentes principales de una autofunción en una base dada. De hecho, ambas cantidades han sido utilizadas para caracterizar las autofunciones de matrices de adyacencia de redes complejas (ver algunos ejemplos es las refs. [92,97,100,103,110,116–121,128–131]).

En esta Tesis utilizaremos la entropía de Shannon, que para la autofunción Ψ^m está dada por

$$S = -\sum_{n=1}^{N} (\Psi_n^m)^2 \ln(\Psi_n^m)^2 \ . \tag{4.6}$$

S nos permite calcular la llamada longitud de localización entrópica de la autofunción [132]:

$$\ell_N = N \exp\left[-\left(S_{\rm GOE} - \langle S \rangle\right)\right] \ , \tag{4.7}$$

donde $S_{\rm GOE} \approx \ln(N/2.07)$ es la entropía de una autofunción aleatoria con amplitudes caracterizadas por una distribución de probabilidad normal. Nosotros calcularemos el promedio en la ec. (4.7) sobre todas las autofunciones de un ensamble de matrices de adyacencia de

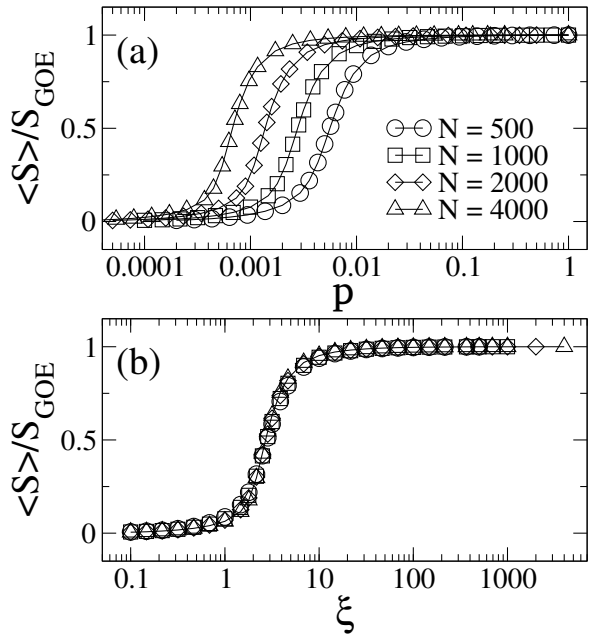

Figura 4.6: Entropía de Shannon promedio $\langle S\rangle$ normalizada con $S_{\rm GOE}$ como función de (a) la connectividad p y (b) el grado promedio ξ para para los autovectores de las matrices de adyacencia de redes completamente desordenadas de tipo ER con tamaños que van desde $N = 500$ hasta 4000. Cada punto fué calculado al promediar sobre 10^6 autofunciones.

tamaño[3] N. Con esta definición, ec. (4.6), cuando $p = 0$, como las autofunciones de una matriz de adyacencia diagonal tienen sólo una componente diferente de cero y magnitud uno, $\langle S\rangle = 0$ y $\ell_N \approx 2.07$. En el otro caso, cuando $p = 1$, $\langle S\rangle = S_{\rm GOE}$ y las autofunciones se extienden sobre toda la base disponible de tamaño N, es decir, $\ell_N \approx N$.

Las Figs. 4.6 (a) y 4.7 (a) muestran $\langle S\rangle/S_{\rm GOE}$ y ℓ_N/N, respectivamente, como función de la conectividad p para matrices de adyacencia de redes completamente desordenadas de tamaños $N = 500$, 1000, 2000 y 4000. Observamos que las curvas de $\langle S\rangle/S_{\rm GOE}$ y ℓ_N/N tienen una forma similar como función de p [note que tal comportamiento también fué observado para β en la Fig. 4.4 (a)]. También es claro que las curvas de $\langle S\rangle/S_{\rm GOE}$ y ℓ_N/N se desplazan a la izquierda al incrementarse N. Además, al graficar $\langle S\rangle/S_{\rm GOE}$ y ℓ_N/N como función del grado promedio ξ observamos que todas las curvas caen sobre curvas universales (ver las Figs. 4.6 (b) y 4.7 (b)). Adicionalmente, note que el punto en el que cada red completamente desordenada de tipo ER se conecta de manera global (en el sentido de que no exiten más vértices aislados), $p = (\ln N)/N$ [88], ocurre cuando $\ell_N/N \approx 1/2$ (ver las líneas discontínuas verticales en la Fig. 4.7 (a)).

[3]Hemos verificado que nuestras observaciones no se modifican si restringimos los promedios a autofunciones de la parte central del espectro.

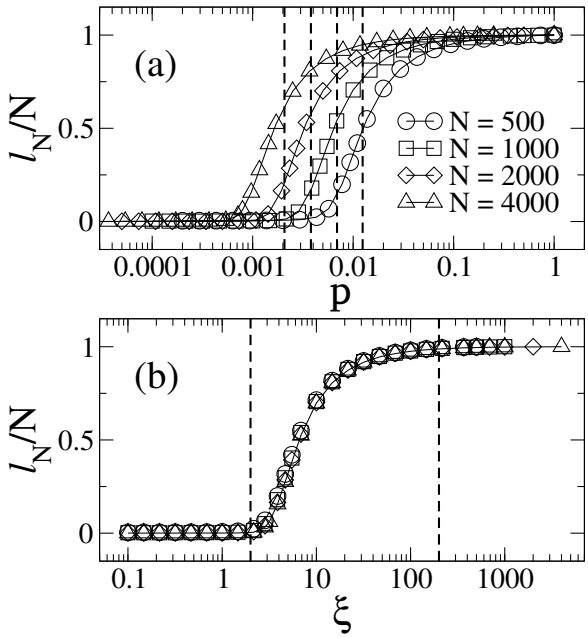

Figura 4.7: Longitud de localización entrópica de autofunciones ℓ_N normalizada a N como función de (a) la conectividad p y (b) el grado promedio ξ para redes completamente desordenadas de tipo ER con tamaños que van desde $N = 500$ hasta 4000. Las líneas discontínuas verticales en (a) indican el valor $p = (\ln N)/N$ en el que las redes se vuelven globalmente conectadas [88]. Las líneas discontúas verticales en (b) en $\xi = 2$ y $\xi = 200$ indican el punto de transición al régimen de delocalización y al régimen del GOE, respectivamente. Cada punto fue calculado al promediar sobre 10^6 autofunciones.

4.4 Otras redes desordenadas de tipo Erdős-Rényi

Es importante subrayar que la definición del modelo de redes desordenadas que dimos arriba considera el caso de desorden máximo, ya que al promediar sobre elementos de ensamble se promedia sobre realizaciones de conectividad y pero también sobre las amplitudes de las aristas. Al promediar de esta forma eliminamos cualquier característica individual de las redes que componen el ensamble (tales como cicatrices [133], que pueden producir resonancias topológicas [134]) que pueden causar desviaciones de las predicciones de las RMT que utilizamos como referencia (ver también [135]). Específicamente, hemos elegido ese modelo de redes ya que en los límites apropiados reproduce matrices de adyacencia aleatorias conocidas y ampliamente estudiadas. Recordemos que se obtiene una matriz aleatoria diagonal para $p = 0$, cuando los vértices están aislados, mientras que se el modelo reproduce el GOE para $p = 1$, cuando la red está completamente conectada.

Sin embargo, es relevante recordar que el desorden máximo que consideramos en nuestro modelo no es necesario para que un modelo de redes o grafos exhiba el comportamiento universal que predice la RMT. De hecho, (i) Es bien sabido que la red cúbica de tipo enlace fuerte con desorden de sitio (conocida como modelo de Anderson tridimensional [2]), que forma redes con conectividad predeterminada y está descrita por matrices Hamiltoni-

anas bastante diluídas, muestra comportamiento de tipo RMT en el *régimen metálico* (ver por ejemplo las refs. [136–139]). (ii) Se ha demostrado, tanto numérica como teóricamente, que los grafos con conectividad predeterminada muestran propiedades espectrales [140–145] y de dispersión [146–148] que corresponden a las predicciones de la RMT, donde el desorden se introduce ya sea al introducir aristas con longitudes aleatorias [140, 146–148] (que es un parámetro no considerado en nuestro modelo de redes) o al considerar matrices de disperión aleatorias en los vértices [145] (ésto, de algún modo, es equivalente a considerar potenciales de sitio aleatorios). Además, algunas de las propiedades universales (desde el punto de vista de la RMT) de grafos cuánticos han sido verificadas experimentalmente mediante el uso de ensambles de redes de microondas con conectividad predeterminada [149–151]. (iii) Redes complejas con propiedades topológicas específicas (tales como redes de mundo pequeño o redes de escala libre, entre otras), donde el desorden solo aparece en la conectividad, muestran características de comportamiento del tipo RMT en sus propiedades espectrales y de autoestados [95–97, 99, 110].

Por lo tanto, a continuación analizamos las propiedades de escalamiento de redes desordenadas de tipo ER cuando la condición de desorden máximo se relaja.

4.4.1 Redes desordenadas de Erdős-Rényi estándar

En el modelo estándar de redes desordenadas de Erdős-Rényi [68–70], las matrices de adyacencia son matrices aleatorias con ceros en la diagonal principal y con elementos no diagonales diferentes de cero iguales a uno; es decir, en éstas matrices de adyacencia los vértices y aristas están representados por ceros y unos, respectivamente (ver la ec. (4.1)). Aún cuando ha sido demostrado que la forma de la $P(s)$ del modelo estándar de redes desordenadas de ER es muy cercana a la distribución Wigner-Dyson cuando la conectividad es grande ($p \to 1$) [95, 96, 99], note que la $P(s)$ no puede mostrar la transición de Poisson a Wigner-Dyson ya que en el límite de conectividad nula ($p = 0$) la matriz de adyacencia correspondiente es la matriz nula.

La Fig. 4.8 muestra la $P(s)$ para el modelo estándar de redes desordenadas de Erdős-Rényi de tamaño $N = 1000$. Observamos que cuando ξ es suficientemente grande la $P(s)$ adquiere la forma de la distribución de Wigner-Dyson, como se espera. Sin embargo, para valores de ξ pequeños, la $P(s)$ desarrolla dos componentes: (i) un pico importante en $s = 0$ y (ii) una parte ancha con máximo local en $s > 0$. La presencia de estas dos componentes no permite el uso de la distribución de Brody para describir la forma de la $P(s)$ en la transición del régimen de vértices aislados al régimen de redes completamente conectadas. Éste mismo panorama se observa para cualquier otro valor de N.

Con respecto a la entropía de Shannon y la longitud de localización entrópica de las autofunciones para este modelo de redes, hemos observado que tanto $\langle S \rangle / S_{\mathrm{GOE}}$ como ℓ_N / N tienden a cero cuando $p \to 0$, mientras que ambas cantidades tienden a uno cuando $p \to 1$. Por lo tanto, la transición a la delocalización en el modelo estándar de redes desordenadas de Erdős-Rényi puede ser caracterizada por $\langle S \rangle$ o ℓ_N. Sin embargo, no se observa el escalamiento universal de $\langle S \rangle / S_{\mathrm{GOE}}$ ni de ℓ_N / N cuando se grafican como función de ξ.

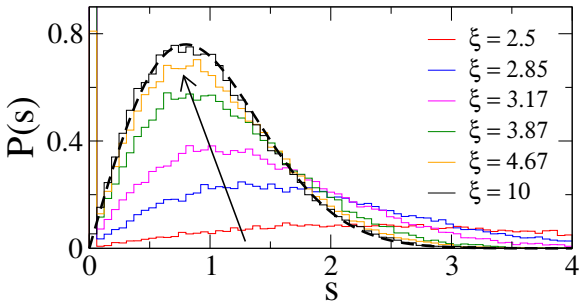

Figura 4.8: Distribución de probabilidad de espaciamientos entre energías consecutivas $P(s)$ para modelo estándar de redes desordenadas de ER formadas por $N = 1000$ vértices con diferentes valores del grado promedio ξ (histogramas). La línea discontínua negra corresponde a la distribución de Wigner-Dyson de la ec. (4.4). La flecha indica la dirección en la que ξ crece. Cada histograma se construyó con 5×10^5 espaciamientos desdoblados.

4.4.2 Redes de tipo Erdős-Rényi con desorden diagonal

Ahora proponemos un modelo de redes de tipo ER con *desorden diagonal* que consiste en añadir auto aristas con amplitudes aleatorias al modelo estándar de ER, de modo que las matrices de adyacencia correspondientes cuentan con variables independientes y aleatorias (caracterizadas por una distribución de probabilidad normal con media cero y varianza uno) en la diagonal principal[4]. Con esta construcción, observamos un transición clara de Poisson a Wigner-Dyson en la forma de $P(s)$ cuando p pasa de cero a uno. Además, la $P(s)$ puede ser ajustada de manera efectiva por la distribución de Brody a lo largo de toda la transición. Así, en la Fig. 4.9 (a) presentamos el parámetro de Brody β como función del grado promedio ξ para redes de tipo ER con *desorden diagonal*. Al igual que en el caso de redes completamente desordenadas de tipo ER, para este modelo observamos que las curvas β vs. ξ para diferentes tamaños de red N caen sobre una sola curva universal. Adicionalmente, también observamos un comportamiento universal para la longitud de localización entrópica de las autofunciones ℓ_N, normalizada con N, como función de ξ (ver la Fig. 4.9 (b)).

Es relevante añadir que aunque hemos observamos el colapso de las curvas β vs. ξ y ℓ_N/N vs. ξ para redes de tipo ER con desorden diagonal de diferentes tamaños, dichas curvas universales están ligeramente desplazadas a la izquierda en comparación a las curvas universales del modelo de redes completamente desordenadas de tipo ER que estudiamos en la sección anterior. Específicamente, concluimos que tanto el punto de la transición a la delocalización como el punto de transición al régimen del GOE ocurren para valores más pequeños de ξ en el caso de redes de tipo ER con desorden diagonal. Ver las líneas discontínuas en la Fig. 4.9 (que se incluyen con el propósito de comparar) que corresponden al modelo de redes completamente desordenadas de tipo ER.

[4]Éste modelo de redes desordenadas corresponde a un modelo de de redes de tipo enlace fuerte con potenciales de sitio aleatorios e integrales de acoplamiento entre sitios consecutivos constantes (normalizadas a uno)

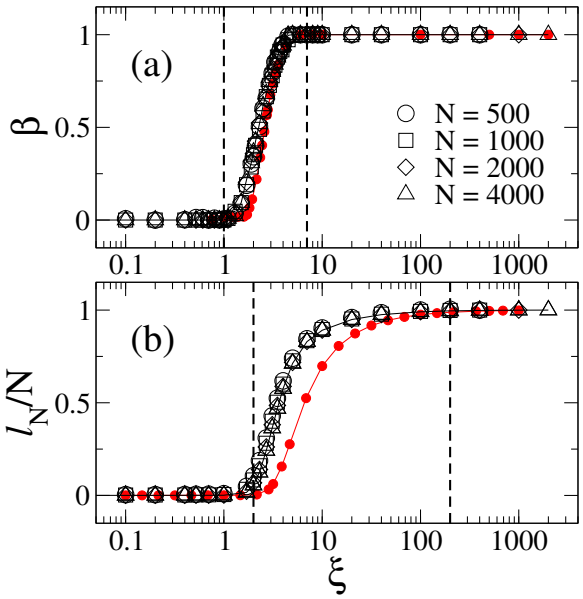

Figura 4.9: (a) Parámetro de Brody β y (b) longitud de localización entrópica ℓ_N (normalizada con N) como función del grado promedio ξ para redes de tipo ER con desorden diangonal de tamaños que van desde $N = 500$ hasta 4000. Las líneas rojas discontínuas verticales, mostradas como referencia, ubicadas en $\xi = 1$ y $\xi = 7$ en (a) [$\xi = 2$ y $\xi = 200$ en (b)] indican los puntos de transición al los regímenes de delocalización y del GOE, respectivamente, del modelo de redes completamente desordenadas de tipo ER; ver la Fig. 4.4(b) [ver la Fig. 4.7(b)]. Las curvas rojas corresponden a redes completamente desordenadas de tipo ER y tamaño $N = 4000$ y se incluyen como referencia.

4.5 Redes de mundo pequeño

Una vez que hemos analizado las propiedades universales de redes desordenadas de tipo ER, vale la pena explorar otro modelo de redes y verificar si también muestra universalidad. Para llevar a cabo esta tarea consideramos redes de mundo pequeño (SW por sus siglas en inglés) [152]. Una red de SW, como fué definida en 1998 por Watts y Strogatz [152], se construye al reconectar de manera aleatoria los vértices de una red regular en forma de anillo que consiste de N vértices conectados con sus $k/2$ primeros vecinos ($k \geq 2$ debe ser un número par)[5]. Entonces, para cada vértice, el vértice mas cercano a la derecha se reconecta con probabilidad p a algún otro vértice que se elige al azar. En el modelo de red de SW *estándar* las conecciones múltiples y las autoconecciones no se permiten. Note que cuando $p = 0$ la red de SW se convierte en un anillo regular; mientras que cuando $p = 1$, se obtiene una red desordenada en donde cada vértice tiene un grado mínimo de $k/2$

Note también que: (i) El parámetro k es equivalente al grado promedio ξ, dado en (1.4), que fija las propiedades espectrales y de autoestados de redes completamente desordenadas de tipo ER y de redes de tipo ER con desorden diagonal. Sin embargo,

[5]Note que cuando $k = 2$, el anillo corresponde a un anillo unidimensional de tipo enlace fuerte.

a diferencia de ξ, k debe ser un número entero que además no puede ser menor a dos. También, k no es una cantidad promedio. (ii) La probabilidad de reconexión p es un parámetro, independiente de k, que transforma la red de SW de regular a desordenada. También, como en el caso de redes de ER estándar, las matrices de adyacencia de redes de SW estándar tienen ceros en la diagonal principal. Ésto prohibe el uso de la distribución de Brody en la descripción de la $P(s)$ de cuando p y k son ambas pequeñas. Sin embargo, para valores de p y k grandes, la forma de la $P(s)$ es muy cercana a la distribución de Wigner-Dyson, ver por ejemplo las refs. [95, 97, 99, 112].

Entonces, así como lo hicimos en la sección anterior para las redes de tipo ER, consideraremos redes de SW con desorden diagonal. Esto es, incluiremos autoaristas cuyas amplitudes son variables aleatorias (caracterizadas por una distribución de probabilidad normal con promedio cero y varianza uno), de modo que las matrices de adyacencia correspondientes exhiban variables aleatorias en la diagonal principal, mientras que las aristas que unen pares de vértices aún tendrán una amplitud constante igual a uno. De este modo garantizamos que la $P(s)$ tendrá la forma de la distribución de Poisson cuando p y k sean ambas pequeñas.

En la Fig. 4.10 se muestra el parámetro de Brody β como función de p (para varios valores de k) y k (para varios valores de p) para redes de SW con desorden diagonal de tamaño $N = 1000$. Excepto cuando $k = 2$, donde la forma de la $P(s)$ es muy cercana a la distribución de Poissonian para cualquier p (ya que $\beta \approx 0$), la forma de la $P(s)$ muestra la transición de Poisson a Wigner-Dyson como función de p (ver la Fig. 4.10(a)). De esta figura se puede ver que entre mas grande es el valor de k, mas pequeño es el valor de p necesario para que β se aproxime a uno. Note, por ejemplo, que para $k = 20$ el valor $p = 0.001 \ll 1$ hace que $\beta \approx 1$. Claramente, la transición de Poisson a Wigner-Dyson en la forma de la $P(s)$ también se observa como función de k para p fijo (ver las Fig. 4.10 (b)).

También, en la ref. [95] el parámetro de Brody fué reportado como función de p pero para redes de SW estandar con $N = 2000$ y $k = 40$ fijos. El objetivo de ese trabajo fué mostra que existe una correlación entre β y otros dos parámetros relevantes en modelos de redes: la longitud característica entre vértices y el coeficiente de aglomeración; dichas cantidades están fuera de los abjetivos planteados en la presente Tesis. En todo caso, la transición a la delocalización fué mostrada de manera clara como función de p (con curvas análogas a las mostradas en la Fig. 4.10 (a) para redes de SW con desorden diagonal).

Tenemos que enfatizar que, en contraste con el modelo de redes de tipo ER con desorden diagonal donde el grado promedio fija las propiedades espectrales y de autoestados, el grado k no fija las propiedades del modelo de redes de SW con desorden diagonal. Este hecho se puede ver claramente en la Fig. 4.11, donde mostramos ℓ_N/N como función de p para redes de SW con cuatro tamaños diferentes. Cada panel corresponde a un valor fijo del grado k donde las curvas convergen a una misma función sólo cuando $p > 0.1$.

Finalmente, tenemos que mencionar que en analogía el modelo de redes completamente desordenadas de tipo ER que estudiamos arriba, aquí también consideramos un modelo de redes completamente desordenadas de SW; es decir, donde todos los elementos diferentes de cero en las matrices de adyacencia correspondientes, incluyendo los de la diagonal principal, son variables aleatorias (de hecho, este caso ya fué estudiado en la ref. [91] donde se reportó la transición de Poisson a Wigner-Dyson en la forma de la $P(s)$ como

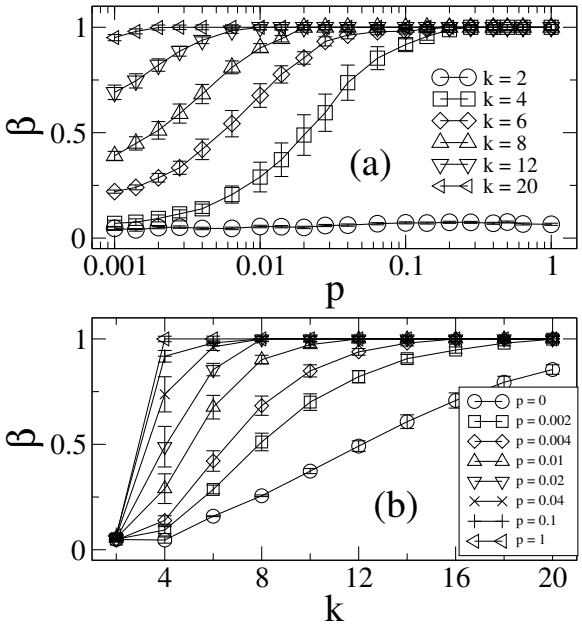

Figura 4.10: Parámetro de Brody β como función de (a) la probabilidad de reconexión p y (b) el grado k para redes de SW con desorden diagonal de tamaño $N = 1000$.

función de p para redes con los parámetros fijos $N = 1600$ y $k = 8$). Sin embargo, no observamos una diferencia importante con los resultados que ya reportamos en las Figs. 4.10 y 4.11 para redes de SW con desorden diagonal.

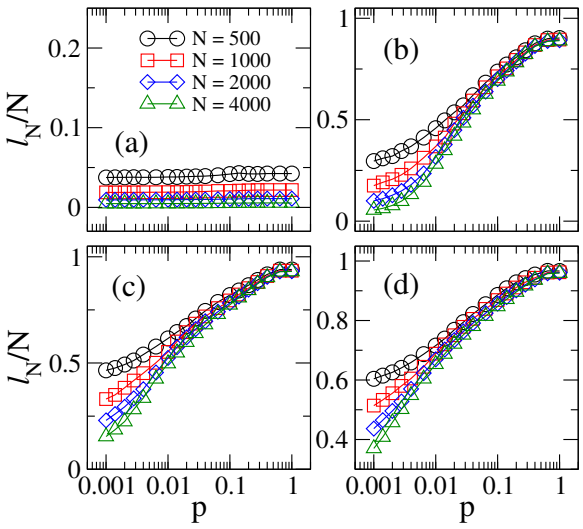

Figura 4.11: Longitud de localización entrópica de autofunciones ℓ_N (normalizada a N) como función de la probabilidad de reconexión p para redes de SW con desorden diagonal de tamaños que van desde $N = 500$ hasta 4000. (a) $k = 2$, (b) $k = 8$, (c) $k = 12$ y (d) $k = 20$.

Capítulo 5

Tansporte en redes aleatorias

En este capítulo estudiamos numéricamente las propiedades de dispersión y transporte de redes desordenadas, de tipo enlace fuerte, caracterizadas por el número de vértices N y la conectividad promedio p. Nos concentramos en el caso de un número pequeño de terminales acopladas. Observamos una transición suave desde el régimen aislante al régimen metálico en el promedio de los elementos de la matriz de dispersión $\langle |D_{mn}|^2 \rangle$, la distribución de probabilidad de la conductancia $w(T)$, la conductancia promedio $\langle T \rangle$ y el factor F al variar p de pequeña ($p \to 0$) a grande ($p \to 1$). También mostramos que todas estas cantidades son invariantes para un valor fijo de $\xi = pN$. Además, proponemos una relación universal entre $\langle |D_{mn}|^2 \rangle$, $\langle T \rangle$ y el parámetro ξ.

5.1 Redes desordenadas de tipo enlace fuerte

El modelo de redes desordenadas de tipo enlace fuerte que estudiaremos está descrito por el Hamiltoniano de enlace fuerte

$$H = \sum_{n=1}^{N} h_{nn} |n\rangle\langle n| + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} h_{nm} \left(|n\rangle\langle m| + |m\rangle\langle n| \right) \ , \tag{5.1}$$

donde N es el número de nodos o vértices de la red, h_{nn} son potenciales de sitio y h_{nm} son las integrales de acoplamiento entre los sitios n y m. Elegimos que H sea un elemento del ensamble de matrices reales y simétricas dispersas de tamaño $N \times N$ cuyos elementos diferentes de cero son variables aleatorias independientes caracterizadas por una distribución normal con promedio cero $\langle h_{nm} \rangle = 0$ y varianza $\langle |h_{nm}|^2 \rangle = (1 + \delta_{nm})/2$. Al igual que en las refs. [71, 161], aquí definimos p, como la fracción de los elementos no diagonales que son diferentes de cero. Es decir, p es la conectividad promedio de la red. Así, nuestro modelo de redes desordenadas corresponde a un ensamble de matrices de adyacencia de grafos aleatorios de tipo Erdős-Rényi [69, 88].

Es importante notar que nuestro modelo de redes presenta *desorden máximo* ya que el promediar sobre el ensamble de redes implica promediar sobre conectividad y sobre potenciales de sitio e integrales de acoplamiento. Con esta forma de promediar eliminamos características individuales de elementos del ensamble que pueden dar lugar a diferencias

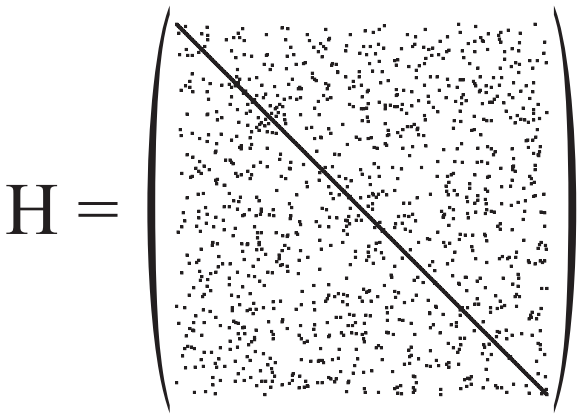

Figura 5.1: Ejemplo de una matriz real y simétrica dispersa H. Los puntos negros son los elementos diferentes de cero. El número de nodos $N = 500$ y conectividad promedio de la red $p = 0.0046$.

con respecto a las predicciones de la Teoría de Matrices Aleatorias (RMT por sus siglas en inglés), que utilizaremos como referencia. Es decir, elegimos este modelo de redes desordenadas para reproducir matrices aleatorias conocidas en los límites apropiados: obtenemos una matriz diagonal con $p = 0$, cuando los nodos de la red estan aislados, mientras que obtenemos un elemento del Ensamble Gausiano Ortogonal (GOE por sus siglas en inglés) para $p = 1$, cuando la red está completamente conectada.

En la Fig. 5.1 se muestra un ejemplo de una matriz real y simétrica dispersa con $N = 500$ y $p = 0.0046$, para nuestro modelo de redes desordenadas.

5.2 Predicciones de la teoría de matrices aleatorias

Construímos el arreglo dispersivo conectando $2M$ terminales unimodales en $2M$ vértices de las redes desordenadas definidas arriba. Cada terminal está descrita por el Hamiltoniano unidimensional de tipo enlace fuerte

$$H_{\text{lead}} = \sum_{n=1}^{-\infty} (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|) \ . \tag{5.2}$$

Utilizando el formalismo del Hamiltoniano efectivo, escribimos la matriz de dispersión (matriz D), ver ec. (2.4), en la forma

$$D(E) = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} = \mathbf{1} - 2i \sin(k)\, W^T (E - H_{\text{ef}})^{-1} W \ ,$$

donde t, t', r y r' son matrices de transmisión y reflexión de tamaño $M \times M$; $\mathbf{1}$ es la matriz unitaria de $2M \times 2M$, $k = \arccos(E/2)$ es el vector de onda de las ondas que se propagan por las terminales y H_{ef} es un Hamiltoniano efectivo no hermítico dado por la ec. (2.5), donde W es una matriz de tamaño $N \times 2M$ en donde se especifican los vértices sobre los que

se conectan las terminales. Sin embargo, como en nuestro modelo de redes desordenadas todos los vértices son equivalentes, conectamos las $2M$ terminales a $2M$ vértices elegidos al azar. Los elementos de W son iguales a cero o γ, donde γ es la magnitud del acoplamiento. Además, suponiendo que el vector de onda k no cambia de manera significativa en el centro de la banda, fijamos $E = 0$ y despreciamos la dependencia de H_{ef} y D con la energía.

Como en el límite $p = 1$ nuestro modelo de redes reproduce el GOE, en tal límite esperamos que las propiedades estadística de la matriz de dispersión, Ec. (2.4), sean determinadas por el Ensamble Circular Ortogonal (COE por sus siglas en inglés) que es el ensamble de matrices de dispersión que corresponde a sistemas *internos* con simetría de reversibilidad temporal. Entonces, a continuación, repasamos las predicciones de la RMT para la matriz D y las cantidades de transporte que estudiaremos en las siguientes secciones, suponiendo la simetría ortogonal. En todos los casos, consideramos la ausencia de procesos directos (también conocida como condición de acoplamiento perfecto), es decir, $\langle D \rangle = 0$.

Comenzamos con el promedio de los elementos de la matriz D. Se sabe que

$$\langle |D_{mn}|^2 \rangle_{\text{COE}} = \frac{1 + \delta_{mn}}{2M + 1} \ , \tag{5.3}$$

donde $\langle \cdot \rangle$ significa el promedio sobre el COE.

Aplicando el enfoque de dispersión al problema de transporte electrónico, una vez que conocemos la matriz de dispersión, calculamos la conductancia adimensional como [56]

$$T = \text{Tr}(tt^\dagger) = \sum_m \sum_n |t_{mn}|^2$$

y su distribución de probabilidad $w(T)$. Cuando $M = 1$, es decir, considerando dos terminales unimodades acopladas a la red, $w(T)$ esta dada por

$$w(T)_{\text{COE}} = \frac{1}{2\sqrt{T}} \ , \tag{5.4}$$

mientras que cuando $M = 2$,

$$w(T)_{\text{COE}} = \begin{cases} 3T/2 \ , & 0 < T < 1 \\ 3\left(T - 2\sqrt{T-1}\right)/2 \ , & 1 < T < 2 \end{cases} \ . \tag{5.5}$$

Para M arbitraria, la predicción para el promedio de T es

$$\langle T \rangle_{\text{COE}} = \frac{M}{2} - \frac{M}{2(2M+1)} \ . \tag{5.6}$$

Vea, por ejemplo, la ref. [160] para la derivación de las expresiones anteriores.

Otra cantidad de dispersión de interés que mide las fluctuaciones de *secciones de dispersión* es el factor[1] [162, 163]

$$F = \frac{\langle |D_{mm}|^2 \rangle}{\langle |D_{mn}|^2 \rangle} \ , \tag{5.7}$$

[1] En física nuclear el cuadrado de los elementos de matriz de dispersión también se le conoce como sección transversal

que en el límite de la RMT tiene el valor

$$F_{\mathrm{COE}} = 2 \ . \tag{5.8}$$

En la siguiente sección nos enfocamos en el análisis de $\langle |D_{mn}|^2 \rangle$, $\langle T \rangle$ y F para nuestro modelo de redes desordenadas de tipo enlace fuerte.

5.3 Cantidades de transporte

En todos los casos siguientes consideramos una magnitud de acoplamiento γ tal que

$$\langle D \rangle \equiv \frac{1}{2M} \sum_{mn} |\langle D_{mn} \rangle| \tag{5.9}$$

es aproximadamente cero, de modo que podamos comparar nuestros resultados, en el límite $p \to 1$, con las predicciones de la RMT dadas en las ecuaciones (5.3-5.6) y (5.8). Para ubicar la condición de acoplamiento perfecto graficamos $\langle D \rangle$ vs. γ para N y p fijas y buscamos el mínimo absoluto. Como ejemplo, en la Fig. 5.2 graficamos $\langle D \rangle$ vs. γ para redes desordenadas con $N = 50$ y $p = 0.2$, 0.44 y 0.99. Note que: para $\gamma = 0$, $\langle D \rangle = 1$; es decir, como no hay acoplamiento entre la red y las terminales, por lo tanto hay reflexión total de las ondas provenientes de las terminales. Mientras que para cualquier $\gamma > 0$ las ondas interaccionan con la red desordenada y $\langle D \rangle < 1$.

Es claro que las curvas $\langle D \rangle$ vs. γ de la Fig. 5.2 se comportan de forma similar. De hecho, podemos identificar dos regímenes: cuando $0 < \gamma < \gamma_0$, $\langle D \rangle$ decrece con γ; mientras que cuando $\gamma > \gamma_0$, $\langle D \rangle$ crece con γ. Como γ_0 es la amplitud de acoplamiento tal que $\langle S \rangle \approx 0$, fijamos $\gamma = \gamma 0$ para obtener la condición de acoplamiento perfecto.

Adicionalmente, al igual que en estudios previos [164–166], aquí encontramos que las curvas $\langle D \rangle$ vs. γ se describen razonablemente bien con la expresión

$$\langle D \rangle = \frac{C_0}{1 + (C_1 \gamma)^{\pm C_2}} - C_3 \ , \tag{5.10}$$

donde C_i son parámetros de ajuste y los signos de $(+)$ y $(-)$ corresponden a las regiones $0 < \gamma < \gamma_0$ y $\gamma > \gamma_0$, respectivamente. Con la ayuda de la ec. (5.10) podemos encontrar γ_0 con un número de datos relativamente pequeño. Además, encontramos heurísticamente que

$$\gamma_0 \approx (p \cdot N)^{1/4} \ . \tag{5.11}$$

En lo subsiguiente, todas las cantidades e histogramas se calculan utilizando 10^6 realizaciones de redes desordenadas para cada combinación de N y p.

5.3.1 Promedio de los elementos de matriz

Primero consideramos el caso $M = 1$, cuando la matriz D es de tamaño 2×2. En la Fig. 5.3 (a) graficamos el promedio de los elementos $|D_{11}|^2$ (reflexión promedio) y $|D_{12}|^2$ (transmisión promedio) como función de la conectividad p para redes de tres tamaños diferentes. El límite, dado en la ec. (5.3), que se espera para $p \to 1$ también se grafica como

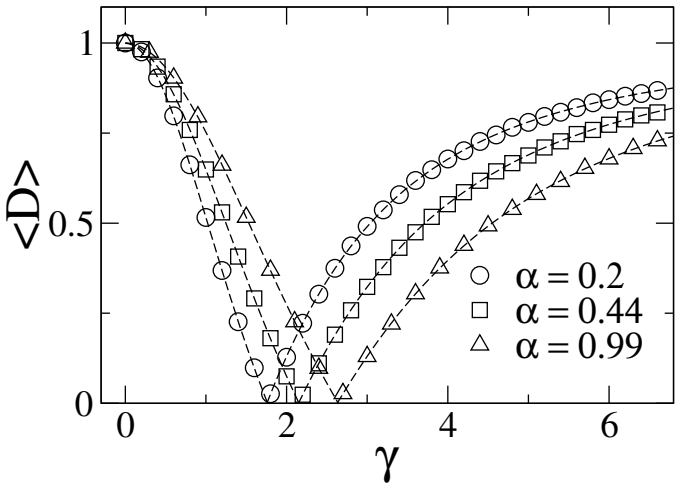

Figura 5.2: Promedio de la matriz D, como se define en la ec. (5.9), para redes desordenadas de tipo enlace fuerte con $N = 50$ vértices como función de la magnitud de acoplamiento γ. Encontramos $\gamma_0 \approx 1.76$, 2.15 y 2.63 para $p = 0.2$, 0.44 y 0.99, respectivamente. Las líneas discontínuas corresponden a ajustes con la ec. (5.10). Cada punto fué calculado al promediar sobre 10^6 realizaciones.

referencia (líneas discontínuas horizontales). Note que el comportamiento para las tres tamaños de redes es similar: existe una fuerte dependencia del promedio de los elementos de la matriz de dispersión en el parámetro p que lleva a la red desordenada de un régimen localizado o aislante [$\langle|D_{11}|^2\rangle \approx 1$ y $\langle|D_{12}|^2\rangle \approx 0$; es decir, cuando la conductancia promedio es aproximadamente cero] para $p \to 0$, a un régimen delocalizado o metálico [$\langle|D_{11}|^2\rangle \approx 2/3$ y $\langle|D_{12}|^2\rangle \approx 1/3$; es decir, cuando los resultados de la RMT son alcanzados] para $p \to 1$. Además, las curvas $\langle|D_{mn}|^2\rangle$ vs. p se desplazan sobre el eje p: entre mas grande sea el tamaño de la red N mas pequeño es el valor de p necesario para alcanzar el límite del COE.

Es relevante recordar que se ha mostrado que el parámetro ξ, ec. (1.4), Capítulo 1:

$$\xi \equiv p \times N$$

fija (i) propiedades espectrales de matrices aleatorias dispersas [71], (ii) la transición de percolación de grafos aleatorios de tipo Erdős-Rényi, ver por ejemplo [88], donde ξ se conoce como el grado promedio del grafo; y (iii) la distribución de probabilidad de espaciamientos entre niveles consecutivos y la localización entrópica de autofunciones de redes aleatorias [161]. Por ello, tiene sentido explorar la dependencia de $\langle|D_{mn}|^2\rangle$ como función de ξ. Entonces, en la Fig. 3.3 (b) graficamos nuevamente $\langle|D_{11}|^2\rangle$ y $\langle|D_{12}|^2\rangle$ pero ahora como función de ξ. Observamos que las curvas para diferentes valores de N ahora caen sobre una curva universal.

Además, hemos encontrado que el comportamiento universal de $\langle|D_{11}|^2\rangle$ y $\langle|D_{12}|^2\rangle$, como función de ξ, se puede describir mediante las expresiones

$$\langle|D_{11}|^2\rangle \;=\; 1 - \langle|D_{12}|^2\rangle \;, \tag{5.12}$$

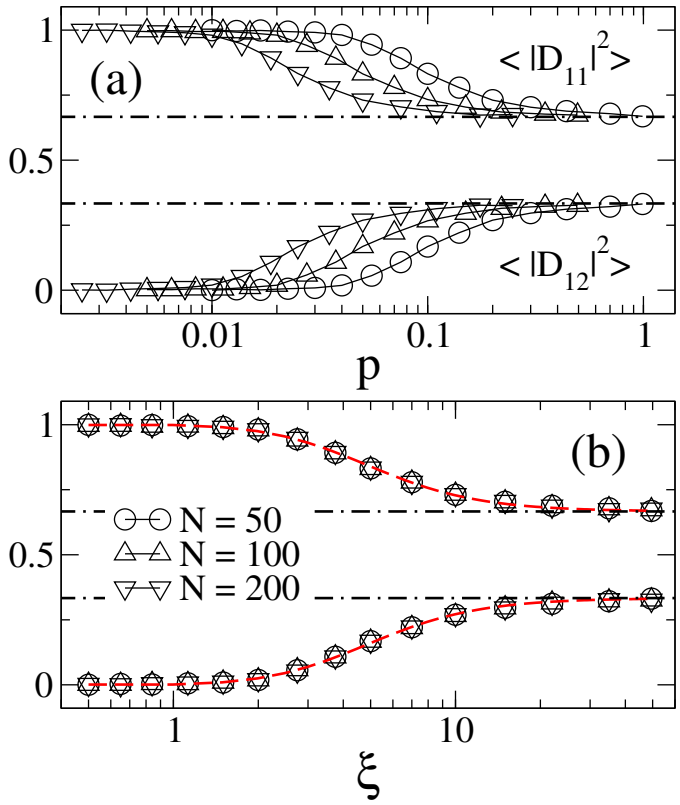

Figura 5.3: Promedio de los elementos de la matriz D, $\langle|D_{11}|^2\rangle$ y $\langle|D_{12}|^2\rangle$, como función de (a) p and (b) ξ para redes desordenadas de tipo enlace fuerte formadas por N vértices. $M = 1$. Las líneas horizontales discontínuas corresponden a 2/3 and 1/3; las predicciones de la RMT para $\langle|D_{11}|^2\rangle$ y $\langle|D_{12}|^2\rangle$, respectivamente, ver ec. (5.3). Las líneas rojas discontínuas en (b) son las ecs. (5.12) y (5.13) con $\delta \approx 0.198$. Ni en esta ni en las figuras siguientes se muestran barras de error ya que son mucho más pequeñas que el tamaño de los símbolos.

$$\langle|D_{12}|^2\rangle \;=\; \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+(\delta\xi)^{-2}}\right] \;, \tag{5.13}$$

donde δ es un parámetro de ajuste. La ec. (5.12) es consecuencia de la unitariedad de la matriz de dispersión, $DD^\dagger = \mathbf{1}$, mientras que el factor 1/3 en la ec. (5.13) se obtiene de la ec. (5.3) con $M = 1$. En la Fig. 5.3 (b) también incluimos las ecs. (5.12) y (5.13) (líneas rojas discontínuas) y observamos que reproducen muy bien los datos numéricos correspondientes. De hecho, es relevante mencionar que las ecs. (5.12) y (5.13) también funcionan de forma satisfactoria en modelos de matrices aleatorias que presentan la transición metal-aislante [165].

Cuando $M > 1$ observamos el mismo panorama que se describió arriba para $M = 1$: todos los elementos de la matriz D sufren una transición localización-delocalización como función de ξ. Ver la Fig. 5.4 donde mostramos algunos de los elementos de la matriz D para $M = 2$ y 3. Además, hemos sido capaces de generalizar las ecs. (5.12) y (5.13) para

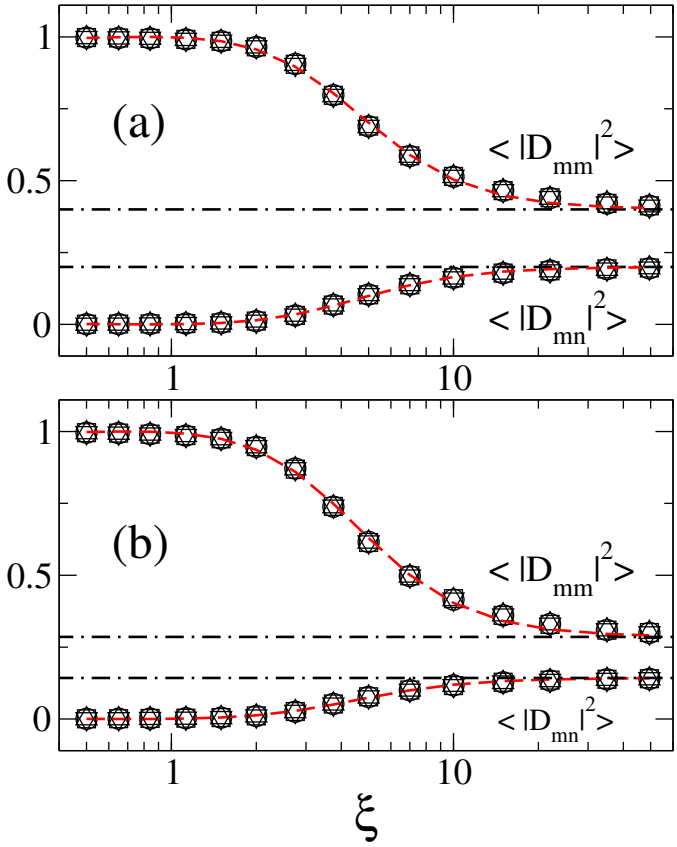

Figura 5.4: Promedio de los elementos de la matriz D, $\langle|D_{mm}|^2\rangle$ [con $mm = 11$, 22, 33 y 44] y $\langle|D_{mn}|^2\rangle$ [con $mn = 12$, 23, 34 y 41] como función de ξ con (a) $M = 2$ y (b) $M = 3$ para redes desordenadas de tipo enlace fuerte formadas por $N = 200$ vértices. Las líneas horizontales discontínuas corresponden las predicciones de la RMT para $\langle|D_{mm}|^2\rangle$ y $\rangle|D_{mn}|^2\rangle$; ver ec. (5.3). Las líneas rojas discontínuas son las ecs. (5.14) y (5.15) con (a) $\delta \approx 0.237$ y (b) $\delta \approx 0.242$.

culaquier M:

$$\langle|D_{mm}|^2\rangle = 1 - (2M-1)\langle|D_{mn}|^2\rangle \,, \tag{5.14}$$

$$\langle|D_{mn}|^2\rangle = \langle|D_{mn}|^2\rangle_{\rm COE}\left[\frac{1}{1+(\delta\xi)^{-2}}\right] \,. \tag{5.15}$$

Entonces, en la Fig. 5.4 también graficamos las ecs. (5.14) y (5.15) y observamos una muy buena correspondencia con los datos numéricos. También notamos que el parámetro de ajuste δ depende poco de M.

Finalmente sobre $\langle|D_{mn}|^2\rangle$ queremos añadir que el límite de la RMT, que se espera cuando $p \to 1$ o $\xi \to N$, ya se observa para $\xi \geq 30$.

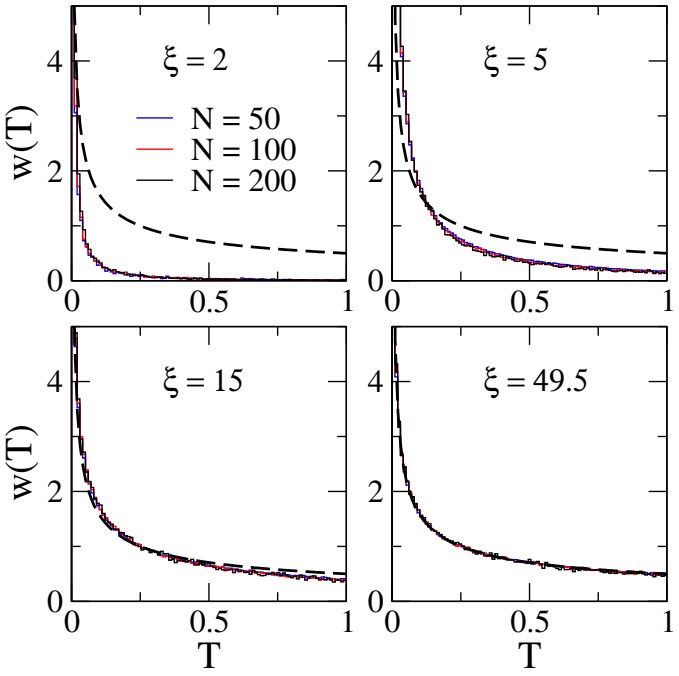

Figura 5.5: Distribución de probabilidad de la conductancia $w(T)$ para redes desordenadas de tipo enlace fuerte formadas por N vértices, cuando $M = 1$, para algunos valores de ξ. Las líneas discontínuas son $w(T)_{\rm COE}$; la predicción de la RMT para $w(T)$ de la Ec. (5.4).

5.3.2 Conductancia

Ahora pasamos a la estadística de la conductancia. En las Figs. 5.5 y 5.6 presentamos distribuciones de probabilidad de la conductancia $w(T)$ para $M = 1$ y $M = 2$, respectivamente. En ambos casos incluimos las predicciones de la RMT correspondientes. En estas figuras mostramos histogramas para cuatro valores de ξ y tres tamaños de redes. De estas figuras se puede concluir que $w(T)$ es invariante una vez que ξ esta fijo; es decir, una vez que ξ se fija en un valor dado, $w(T)$ no depende del tamaño de la red. Tambiém recordamos que, en el límite $p \to 1$, se espera que $w(T)$ adquiera la forma que la RMT predice y que se reporta en las ecs. (5.4) y (5.5). Si embargo, observamos que $w(T)$ ya se describe bastante bien por $w(T)_{\rm COE}$ una vez que $\xi \geq 30$. Hemos observado un escenario equivalente para $w(T)$ cuando $M > 2$.

Ahora incrementamos aún más el número de terminales acopladas. Entonces, en la Fig. 5.7 (a) graficamos la conductancia promedio $\langle T \rangle$ para redes aleatorias de tipo enlace fuerte formadas por $N = 200$ vértices, para varios valores de ξ con $M \in [1, 5]$ (recordamos que $M = 5$ significa que hemos acoplado diez terminales unimodales a la red). De esta gráfica es claro que al aumentar el valor de ξ de pequeño ($\xi < 1$) a grande ($\xi \gg 1$) se produce una transición de localización a delocalización en las propiedades de transporte de las redes desordenadas. Esto es, (i) cuando $\xi < 0.5$, $\langle T \rangle \approx 0$; y (ii) cuando $\xi \geq 30$ y $\langle T \rangle$ están dados por la predicción de la RMT correspondientes (ver la ec. (5.6)).

También, hemos observado que $\langle T \rangle$ como función de ξ se comporta de muy manera

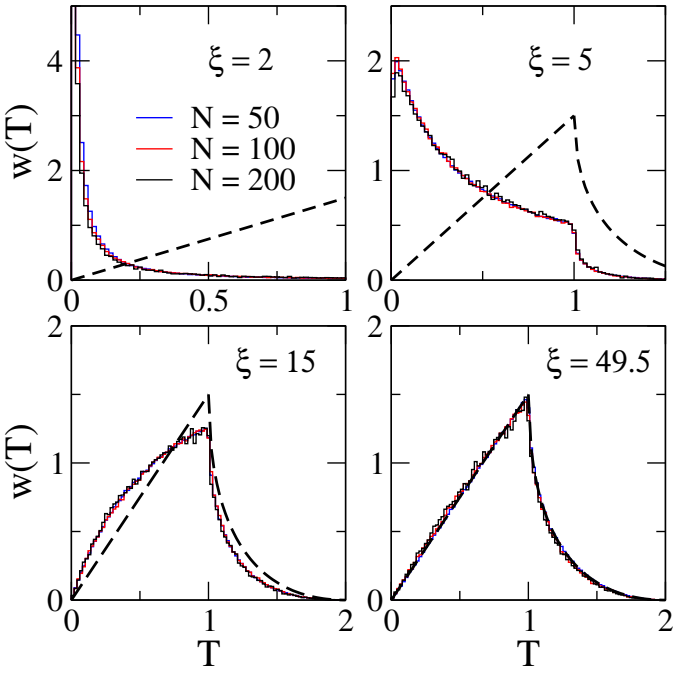

Figura 5.6: Distribución de probabilidad de la conductancia $w(T)$ para redes desordenadas de tipo enlace fuerte formadas por N vértices, cuando $M = 2$, para algunos valores de ξ. Las líneas discontínuas son $w(T)_{\rm COE}$; la predicción de la RMT para $w(T)$ de la Ec. (5.5).

similar (para toda M) a $\langle |D_{mn}|^2 \rangle$. Es decir, esta cantidad muestra un comportamiento universal como función de $\delta\xi$ que puede ser descrito por

$$X(\xi) = X_{\rm COE}\left[\frac{1}{1+(\delta\xi)^{-2}}\right] \ , \tag{5.16}$$

donde X representa $\langle T \rangle$ y δ en un parámetro de ajuste. Entonces, en la Fig. 5.7 (b) se reporta $\langle T \rangle$, normalizado al valor del COE correspondiente, como función de $\delta\xi$ para $M \in [1, 5]$. Es importante resaltar que todas las curvas, para valores de M diferentes, caen sobre la curva universal dada en la ec. (5.16).

5.3.3 Factor de dispersión elástica

Finalmente en la Fig. 5.8 graficamos el factor de dispersión elástica F como función de ξ para redes desordenadas formadas por $N = 50$ vértices para $M = 1$, 2 y 4. De esta figura observamos que, para cualquier M (y también para cualquier N, aunque esto no se muestra aquí), F decrece como función de ξ y se aproxima suavemente, para ξ grande ($\xi \to N$), al valor límite que predice la RMT: $F_{\rm COE} = 2$. También notamos que cuando $\xi \ll 1$, $F \propto \xi^{-2}$; lo que parece ser una característica de nuestro modelo de redes desordenadas.

Para tener un soporte analítico a las observaciones descritas arriba, sustituímos las ecs. (5.14) y (5.15) en la ec. (5.7) para obtener la siguiente estimación de F:

$$F \approx (2M+1)(\delta\xi)^{-2} + 2 \ . \tag{5.17}$$

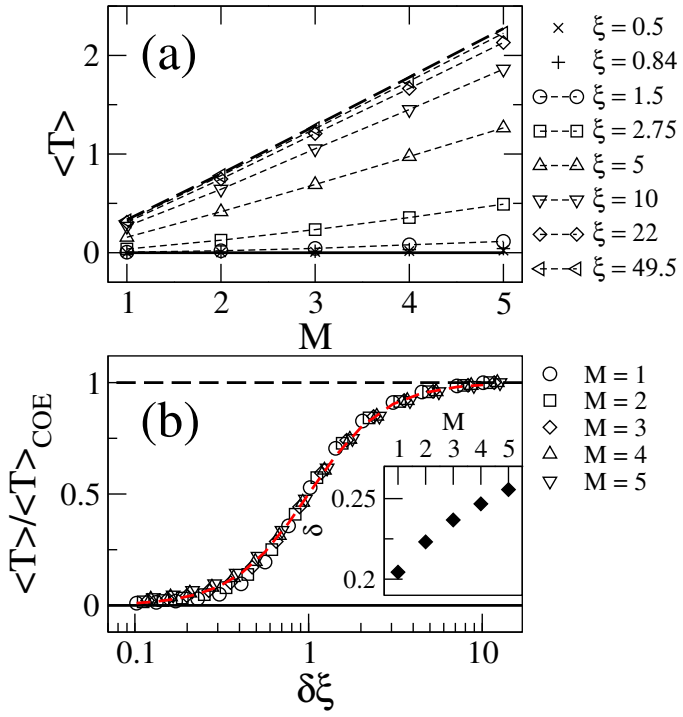

Figura 5.7: (a) Conductancia promedio $\langle T\rangle$ como función de M para redes desordenadas de tipo enlace fuerte formadas por $N = 200$ vértices para varios valores de ξ. (b) $\langle T\rangle/\langle T\rangle_{\text{COE}}$ como función de $\delta\xi$ para $M \in [1, 5]$. Recuadro: δ vs. M. δ se obtiene del ajuste de las curvas $\langle T\rangle$ vs. ξ con la ec. (5.16). Las líneas gruesas corresponden a $\langle T\rangle = 0$. Las líneas discontínuas son (a) la predicción de la RMT para $\langle T\rangle$, dada en la ec. (5.6); y (b) uno. La línea roja discontínua en (b) es la ec. (5.16).

Notamos que la ec. (5.17) reproduce apropiadamente el comportamiento de F para ξ pequeña y grande: $F \propto \xi^{-2}$ y $F \to 2$, respectivamente. Desafortunadamente, la ec. (5.17) no describe cualitativamente las curvas de la Fig. 5.8, ver por ejemplo la línea negra en esta figura que corresponde a la ec. (5.17) con $M = 1$. La razón de esta discrepancia, que encontramos después de un análisis detallado, es que la ec. (5.15) sobrestima la magnitud de $\langle |D_{mn}|^2\rangle$ cuando $\xi \ll 1$ y como consecuancia la ec. (5.17) subestima la magnitud de F para dichos valores de ξ.

Para solucionar esto, analizamos el caso mas sencillo de manera analítica para F. Tomando en cuenta el factor F en términos del promedio de la conductancia, tenemos

$$F = \frac{1 - \langle T\rangle}{\langle T\rangle} \ . \tag{5.18}$$

Para el caso cuando $\xi \gg 1$ y $M = 1$, usando la ec. (5.13) tenemos lo siguiente:

$$\langle |D_{12}|^2\rangle = \langle T\rangle \approx \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1 + \delta(\xi)^{-2}}\right] \ , \tag{5.19}$$

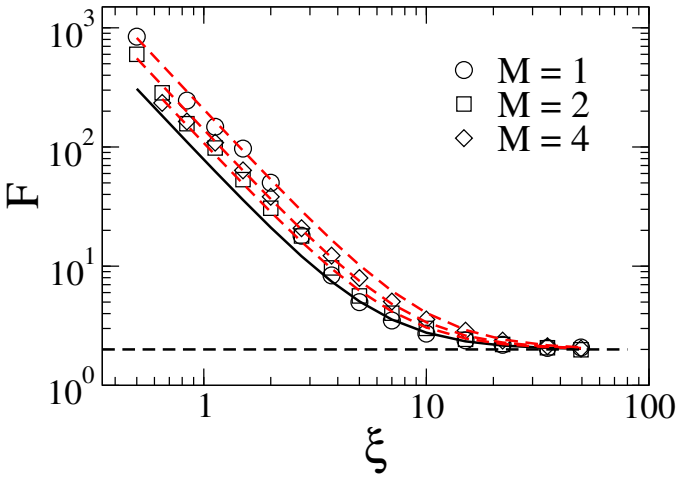

Figura 5.8: Factor F como función de ξ para redes desordenadas de tipo enlace fuerte formadas por $N = 50$ vértices para $M = 1$, 2 y 4. La línea negra contínua es la ec. (5.17) con $M = 1$ y $\delta = 0.198$. Las líneas rojas discontínuas con ajusted con la ec. (5.18) con $C = 205$, 138 y 106 para $M = 1$, 2 y 4, respectivamente. La línea discontínua horizontal corresponde al valor límite $F_{\mathrm{COE}} = 2$ de la RMT.

posteriormente con la aproximación $(1 + x)^n \approx 1 + nx \quad \forall \quad x$ obtenemos

$$\langle T \rangle \approx \frac{1}{3}(1 - \delta(\xi)^{-2}) \ . \tag{5.20}$$

Ahora sustituyendo la ec. (5.20) en la ec. (5.18) y tomando el límite $\xi \to \infty$ finalmente

$$F \approx 2 \ . \tag{5.21}$$

Por otro lado, para el caso cuando $\xi \ll 1$, de la ec. (5.13) tenemos

$$\langle |D_{12}|^2 \rangle_\xi = \langle T \rangle \approx \frac{1}{3\delta}\xi^2 \ , \tag{5.22}$$

sustituyendo la ec. (5.22) en la ec. (5.18) y tomando el límite cuando $\xi \to 0$ tenemos

$$F \approx 3\delta\xi^{-2} \ . \tag{5.23}$$

Por lo tanto, de forma general con los dos límites podemos decir que

$$F = C\xi^{-2} + 2 \ , \tag{5.24}$$

donde C es una constante de ajuste. De la ec. (5.24) cuando $\xi \ll 1$, $F \propto \xi^{-2}$ y cuando $\xi \gg 1$, $F \to 2$, como se esperaba. En la Fig. 5.8 mostramos la ec. (5.24) el cual se ajusta de manera razonable a los datos numéricos.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta Tesis estudiamos las propiedades espectrales, de autoestados y de transporte de dos modelos de sistemas desordenados: una generalización del modelo de Lloyd unidimensional y redes aleatorias de tipo Erdős-Rényi.

6.1 Parte I

En la primera parte de esta Tesis, hemos estudiado la conductancia G de una generalización del modelo de Lloyd unidimensional (1D): hemos considerado alambres 1D de tipo enlace fuerte con desorden de sitio caracterizado por distribuciones de probabilidad de tipo Lévy, ver la ec. (1.2), con colas que decaen como una ley de potencia con exponente α.[1] Hemos verificado que los momentos de la variable $\ln G$ decrecen linealmente al aumentar la longitud L de los alambres. En particular, hemos extraído la longitud de localización de las autofunciones ξ mediante el uso de la relación $\langle -\ln G\rangle = 2L/\xi$. Entonces, hemos mostrado que la distribución de probabilidad $P(G)$ es invariante, es decir, está completamente determinada, una vez que α y $\langle -\ln G\rangle$ toman valores fijos; ésto en buen acuerdo con otros modelos de alambres con desorden de tipo Lévy [12, 47–49].[2] También hemos reportado la coexistencia de los regímenes aislante y metálico, que se visualiza como los picos de $P(G)$ en $G = 0$ y $G = 1$; estos picos son mas evidentes cuando $\langle -\ln G\rangle \sim 1$ y $\alpha \leq 1$. Adicionalmente hemos mostrado que $P(\ln G)$ presenta colas que decaen como ley de potencias para $G \to 0$, caracterizadas por el exponente β (también invariante para α y $\langle -\ln G\rangle$ fijos) que está acotado desde arriba por el valor $\alpha/2$. Este límite superior de β implica que entre mas pequeño sea el valor de α mas grande será la probabilidad de observar valores de conductancia despreciables en alambres con desorden de tipo Lévy.[3]

6.2 Parte II

En la segunda parte de este trabajo, hemos estudiado algunas propiedades espectrales y de autoestados de redes desordenadas de tipo Erdős-Rényi (ER) poniendo atención

[1] Capítulo 3.
[2] Sección 3.2.
[3] Sección 3.2.

en la universalidad.[4]

En particular, hemos mostrado para las redes completamente desordenadas de tipo ER (donde todos los elementos diferentes de cero de las matrices de adyacencia son variables aleatorias caracterizadas por una distribución de probabilidad normal con promedio cero y varianza uno) y para las redes de tipo ER con desorden diagonal (donde los elementos de la diagonal principal de la matriz de adyacencia son variables aleatorias mientras que el resto de los elemntos diferentes de cero son constantes e iguales a uno) que: (i) La distribución de probabilidad de espaciamientos entre energías consecutivas[5] $P(s)$, la entropía de Shannon promedio de las autofunciones $\langle S \rangle$ y la longitud de localización entrópica de las autofunciones[6] ℓ_N son universales para un grado promedio $\xi = pN$ fijo (donde p y N son la conectividad de la red y el número de vértices que la forman, respectivamente); (ii) La distribución de Brody describe de manera aceptable la $P(s)$ en la transición de Poisson ($p = 0$; vértices aislados) a Wigner-Dyson ($p = 1$; red completamente conectada); y (iii) El parámetro de Brody β como función de ξ muestra una curva invariante.

Nuestro análisis proporciona una forma de predecir la forma de la $P(s)$ de redes desordenadas de tipo ER una vez que el parámetro ξ se conoce.

Específicamente, para las redes de tipo completamente desordenadas y para las redes de tipo ER con desorden diagonal encontramos que cuando $0 < \xi < 1$, la forma de la $P(s)$ es muy cercana a la distribución de Poisson.[7] Éste rango de valores de ξ coincide con el régimen donde una red de tipo ER está compuesta mayoritariamente por clusters aislados [88]. Hemos localizado el punto de transición al régimen de autofunciones delocalizadas en $\xi \approx 1$, valor que coincide con el $\xi \approx 1.4$ reportado en las refs. [74–76, 82]. También notamos que $\xi \approx 3.5$, conocido como el valor del grado promedio para el cual el diámetro del cluster principal en una red de tipo ER es del orden del propio tamaño de la red [88], se localiza a la mitad de la región de transición de Poisson a Wigner-Dyson. Además observamos que para que la $P(s)$ obtenga la forma de la distribución de Wigner-Dyson se requiere que $\xi \geq 7$.

Sin embargo, determinamos que no existe un escalamiento universal de $\langle S \rangle / S_{\text{GOE}}$ ni de ℓ_N / N como función de ξ para el modelo de ER estándar ni para redes de SW; aún cuando ambas cantidades muestran claramente la transición a la delocalización.[8] Finalmente, podemos afirmar que el desorden diagonal es necesario para que un modelo de redes desordenadas muestre la transición de Poisson a Wigner-Dyson en la forma de la $P(s)$.

También, estudiamos las propiedades de dispersión y transporte de redes desordenadas de tipo enlace fuerte caracterizadas por el número de vértices N y la conectividad promedio p.[9]

Observamos una transición suave del régimen localizado al régimen delocalizado en el comportamiento de las propiedades de dispersión y transporte de redes desordenadas al variar p de valores pequeños ($p \to 0$) a valores grandes ($p \to 1$).[10] Mostramos que todas las propiedades de dispersión y transporte estudiadas en este trabajo son independientes

[4] Capítulo 4.
[5] Sección 4.3.1.
[6] Sección 4.3.2.
[7] Sección 4.4.
[8] Sección 4.5.
[9] Capítulo 5.
[10] Sección 5.3.

de N una vez que $\xi = pN$ esta fijo. Además, hemos propuesto una expresión heuristica pero universal entre el promedio de los elementos de la matriz de dispersión $\langle |D_{mn}|^2 \rangle$ y la conductancia promedio $\langle T \rangle$ con el parámetro ξ que cuantifica el desorden de la red. Ver la ec. (5.16). Como consecuencia, observamos que la transición localización-delocalización tiene lugar en $\delta\xi \approx 0.1$; es decir, cuando $\delta\xi < 0.1$ las redes están en el régimen aislante. Mientras que la transición al régimen de la RMT se ubica en $\delta\xi \approx 10$; esto es, cuando $\delta\xi > 10$ las redes se encuentran en el régimen metálico difusivo. También, el punto de la transición metal-aislante está claramente localizado en $\delta\xi \approx 1$; ver la curva roja discontínua en la Fig. 5.7 (b). Además, $\delta \in [0.2, 0.4]$ es un parámetro que depende poco del número de terminales acopladas a la red, ver el recuadro en la Fig. 5.7 (b).[11]

Como nuestro modelo de redes está representado por un ensamble de matrices dispersas reales y simétricas, esperamos que nuestros resultados sean también aplicables a sistemas físicos caracterizados por matrices Hamiltonianas dispersas tales como sistemas caóticos cuantizados y sistemas de muchos cuerpos en interacción.

[11] Sección 5.3.

Bibliografía

[1] *50 Years of Anderson Localization*, E. Abrahams, ed. (World Scientific, Singapore, 2010).

[2] P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).

[3] A. MacKinnon and B. Kramer, Rep. Prog. Phys. **56**, 1469 (1993).

[4] E. Abrahams, P. W. Ander- son, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).

[5] L. P. Gorkov, A. I. Larkin, and D. E. Khmelnitskii, JETP Lett. **30**, 228 (1979).

[6] D. J. Thouless, Phys. Rev. Lett. **61**, 2141 (1988).

[7] P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams, and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **22**, 3519 (1980).

[8] I. M. Lifshits, S. A. Gredeskul, and L. A. Pastur, *Introduction to the theory of disordered systems* (Willey, New York, 1988).

[9] V. V. Uchaikin and V. M. Zolotarev, *Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications* (VSP, Utrecht, 1999).

[10] L. S. Froufe-Perez, P. Garcia-Mochales, P. A. Serena, P. A. Mello, and J. J. Saenz, Phys. Rev. Lett. **89**, 246403 (2002).

[11] P. Barthelemy, J. Bertolotti, and D. S. Wiersma, Nature **453**, 495 (2008).

[12] A. A. Fernandez-Marin, J. A. Mendez-Bermudez, J. Carbonell, F. Cervera, J. Sanchez-Dehesa, and V. A. Gopar, Phys. Rev. Lett. **113**, 233901 (2014).

[13] C. W. J. Beenakker, C. W. Groth, and A. R. Akhmerov, Phys. Rev. B **79**, 024204 (2009).

[14] R. Burioni, L. Caniparoli, and A. Vezzani, Phys. Rev. E **81**, 060101(R) (2010).

[15] P. Lloyd, J. Phys. C **2**, 1717 (1969).

[16] M. Saitoh, Phys. Lett. A **33**, 44 (1970).

[17] M. Saitoh, Progr. Theor. Phys. **45**, 746 (1971).

[18] A. P. Kumar and G. Baskaran, J. Phys. C **6**, L399 (1973).

[19] K. Hoshino, Phys. Lett. A **56**, 133 (1976).

[20] W. R. Bandy and A. J. Glick, Phys. Rev. B **16**, 2346 (1977).

[21] S. Kivelson and C. D. Gelatt, Phys. Rev. B **20**, 4167 (1979).

[22] B. Simon, Phys. Rev. B **27**, 3859 (1983).

[23] D. E. Rodrigues and J. F. Weisz, Phys. Rev. B **34**, 2306 (1986).

[24] E. Kolley and W. Kolley, J. Phys. C **21**, 6099 (1988).

[25] R. Johnston and H. Kunz, J. Phys. C **16**, 4565 (1983).

[26] D. E. Rodrigues, H. M. Pastawski, and J. F. Weisz, Phys. Rev. B **34**, 8545 (1986).

[27] D. J. Thouless, J. Phys. C **5**, 77 (1972).

[28] K. Ishii, Suppl. Progr. Theor. Phys. **53**, 77 (1973).

[29] R. Abou-Chacra and D. J. Thouless, J. Phys. C **7**, 65 (1974).

[30] D. J. Thouless, J. Phys. C **16**, L929 (1983).

[31] A. MacKinnon, J. Phys. C **17**, L289 (1984).

[32] M. O. Robbins and B. Koiller, Phys. Rev. B **32**, 4576 (1985).

[33] D. L. Shepelyansky, Phys. Rev. Lett. **56**, 677 (1986).

[34] S. Fishman, R. E. Prange, and M. Griniasty, Phys. Rev. A **39**, 1628 (1989).

[35] G. Casati, I. Guarneri, F. Izrailev, S. Fischman, and L. Molinari, J. Phys.: Condens. Matter **4**, 149 (1992).

[36] C. Murdy, P. W. Brouwer, B. I. Halperin, V. Gurarie, and A. Zee, Phys. Rev. B **58**, 13539 (1998).

[37] L. I. Deych, A. A. Lisyansky, and B. L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **84**, 2678 (2000).

[38] L. I. Deych, A. A. Lisyansky, and B. L. Altshuler, Phys. Rev. B **64**, 224202 (2001).

[39] D. M. Gangardt and S. Fishman, Phys. Rev. B **63**, 045106 (2001).

[40] C. Fuchs and R. v. Baltz, Phys. Rev. B **63**, 085318 (2001).

[41] M. Titov and H. Schomerus, Phys. Rev. Lett. **91**, 176601 (2003).

[42] D. Roy and N. Kumar, Phys. Rev. B **76**, 092202 (2007).

[43] G. G. Kozlov, Theor. Math. Phys. **171**, 531 (2012).

[44] M. Kappus and F. Wegner, Z. Phys. B: Condens. Matter **45**, 15 (1981).

[45] B. Derrida and E. Gardener, J. Physique **45**, 1283 (1984).

[46] F. M. Izrailev, S. Ruffo, and L. Tessieri, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 5263 (1998).

[47] F. Falceto and V. A. Gopar, Europhys. Lett. **92**, 57014 (2010).

[48] A. A. Fernandez-Marin, J. A. Mendez-Bermudez, and V. A. Gopar, Phys. Rev. A **85**, 035803 (2012).

[49] I. Amanatidis, I. Kleftogiannis, F. Falceto, and V. A. Gopar, Phys. Rev. B **85**, 235450 (2012).

[50] Sanjoy Sarker, Eytan Domany, Phys. Rev. B **23**, 6018 (1981).

[51] C. Mahaux and H. A Weidenmüller, *Shell Model Approach in Nuclear Reactions*, (North-Holland, Amsterdam,1969)

[52] J. J. M. Verbaarschot, H. A. Weidenmüller, and M. R. Zirnbauer, Phys. Rep. **129**, 367 (1985).

[53] T. Kottos and M. Weiss, Phys. Rev. Lett. **89**, 056401 (2002).

[54] F. Steinbach, A. Ossipov, T. Kottos, and T. Geisel, Phys. Rev. Lett. **85**, 4426 (2000).

[55] I. Rotter, Rep. Prog. Phys. **54**, 635 (1991).

[56] R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957).

[57] I. Kleftogiannis, I. Amanatidis, V. A. Gopar, Phys. Rev. B **88**, 205414 (2013).

[58] R. Landauer, **32**, 336 (1988).

[59] M. Buttiker, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986).

[60] M. Buttiker, IBM J. Res. Dev. **32**, 317 (1988).

[61] M. Steiner, Y. Chen, M. Fabrizio, and A. O. Gogolin, Phys. Rev. B **59**, 14848 (1999).

[62] L. da F. Costa, O. N. Oliveira Jr, G. Travieso, F. A. Rodrigues, P. R. Villas Boas, L. Antiqueira, M. P. Viana, and L. E. C. Rocha, Advances in Physics **60**, 329 (2011).

[63] A. L. Barabasi, Phil. Trans. R. Soc. A 371:20120375 (2013).

[64] M. E. J. Newman, *Networks: An introduction* (Oxford University Press, New York, 2010).

[65] O. Mülken and A. Blumen, Phys. Rep. **502**, 37 (2011).

[66] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez and D.-U. Hwang, Phys. Rep. **424**, 175 (2006).

[67] B. Bollobás, *Random Graphs* in Modern Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics Volume 184, pp 215-252 (Springer, New York, 1998).

[68] R. Solomonoff and A. Rapoport, B. Math. Biophys. **13**, 107 (1951).

[69] P. Erdős and A. Rényi, Publ. Math. (Debrecen) **6**, 290 (1959).

[70] P. Erdős and A. Rényi, Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences **5**, 17 (1960).

[71] A. D. Jackson, C. Mejia-Monasterio, T. Rupp, M. Saltzer, and T. Wilke, Nucl. Phys. A **687**, 405 (2001).

[72] G. J. Rodgers and A. J. Bray, Phys. Rev. B **37**, 3557 (1988).

[73] G. Rodgers and C. deDominicis, J. Phys. A: Math. Gen. **23**, 1567 (1990).

[74] S. N. Evangelou and E. N. Economou, Phys. Rev. Lett. **68**, 361 (1992).

[75] A. D. Mirlin and Y. V. Fyodorov, J. Phys. A: Math. Gen. **24**, 2273 (1991).

[76] S. N. Evangelou, J. Stat. Phys. **69**, 361 (1992).

[77] G. Semerjian and L. F. Cugliandolo, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 4837 (2002).

[78] A. Khorunzhy and G. J. Rodgers, J. Math. Phys. **38**, 3300 (1997).

[79] R. Kühn, J. Phys. A: Math. Gen. **41**, 295002 (2008).

[80] T. Rogers, I. P. Castillo, R. Kühn, and K. Takeda, Phys. Rev. E **78**, 031116 (2008).

[81] F. Slanina, Phys. Rev. E **83**, 011118 (2011).

[82] Y. V. Fyodorov and A. D. Mirlin, Phys. Rev. Lett. **67**, 2049 (1991).

[83] Y. Kabashima, H. Takahashi, and O. Watanabe, J. Phys.: Conf. Series **233**, 012001 (2010).

[84] Y. Kabashima and H. Takahashi, J. Phys. A: Math. Gen. **45**, 325001 (2012).

[85] T. Rogers and I. P. Castillo, Phys. Rev. E **79** 012101 (2009).

[86] I. Neri and F. L. Metz, Phys. Rev. Lett. **109**, 030602 (2012).

[87] R. Fossion, G. Torres-Vargas, S. Díaz-Gómez, J. C. López Vieyra, arXiv:1402.6786.

[88] R. Albert and A. L. Barabasi, Rev. Mod. Phys. **74**, 47 (2002).

[89] G. Palla and G. Vattay, New J. Phys. **8**, 307 (2006).

[90] B. Derrida and G. J. Rodgers, J. Phys. A: Math. Gen. **26**, L457 (1993).

[91] C. P. Zhu and S. J. Xiong, Phys. Rev. B **62**, 14780 (2000).

[92] O. Giraud, B. Georgeot, and D. L. Shepelyansky, Phys. Rev. E **72**, 036203 (2005).

[93] M. Sade, T. Kalisky, S. Havlin, and R. Berkovits, Phys. Rev. E **72**, 066123 (2005).

[94] L. Jahnke, J. W. Kantelhardt, R. Berkovits, and S. Havlin, Phys. Rev. Lett. **101**, 175702 (2008).

[95] J. N. Bandyopadhyay and S. Jalan, Phys. Rev. E **76**, 026109 (2007).

[96] S. Jalan and J. N. Bandyopadhyay, Physica A **387**, 667 (2008).

[97] G. Zhu, H. Yang, C. Yin, and B. Li, Phys. Rev. E **77**, 066113 (2008).

[98] S. Jalan, Phys. Rev. E **80**, 046101 (2009).

[99] S. Jalan and J. N. Bandyopadhyay, Phys. Rev. E **76**, 046107 (2007).

[100] L. Gong and P. Tong, Phys. Rev. E **74**, 056103 (2006).

[101] C. P. Zhu and S. J. Xiong, Phys. Rev. B **63**, 193405 (2001).

[102] K. I. Goh, B. Kahng, and D. Kim, Phys. Rev. E **64**, 051903 (2001).

[103] I. J. Farkas, I. Derényi, A. L. Barabási, and T. Vicsek, Phys. Rev. E **64**, 026704 (2001).

[104] I. Farkas, I. Derényi, H. Jeong, Z. Néda, Z. N. Oltvai, E. Ravasz, A. Schubert, A. L. Barabási, and T. Vicsek, Physica A **314**, 25 (2002).

[105] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin, Phys. Rev. E **68**, 046109 (2003).

[106] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin, Physica A **338**, 76 (2004).

[107] R. F. S. Andrade and J. G. V. Miranda, Physica A **356**, 1 (2005).

[108] C. Kamp and K. Christensen, Phys. Rev. E **71**, 041911 (2005).

[109] G. J. Rodgers, K. Austin, B. Kahng, and D. Kim, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 9431 (2005).

[110] O. Mülken, V. Pernice, and A. Blumen, Phys. Rev. E **76**, 051125 (2007).

[111] T. Nagao and G. J. Rodgers, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 265002 (2008).

[112] S. Jalan and J. N. Bandyopadhyay, Europhys. Lett. **87**, 48010 (2009).

[113] G. Ergün and R. Kühn, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 395001 (2009).

[114] R. Kühn and J. vanMourik, *idem*, **44**, 165205 (2011).

[115] J. X. deCarvalho, S. Jalan, and M. S. Hussein, Phys. Rev. E **79**, 056222 (2009).

[116] A. L. Cardoso, R. F. S. Andrade, and A. M. C. Souza, Phys. Rev. B **78**, 214202 (2008).

[117] O. Giraud, B. Georgeot, and D. L. Shepelyansky, Phys. Rev. E **80**, 026107 (2009).

[118] B. Georgeot, O. Giraud, and D. L. Shepelyansky, Phys. Rev. E **81**, 056109 (2010).

[119] S. Jalan, N. Solymosi, G. Vattay, and B. Li, Phys. Rev. E **81**, 046118 (2010).

[120] S. Jalan, G. Zhu, and B. Li, Phys. Rev. E **84**, 046107 (2011).

[121] F. Slanina, Eur. Phys. J. B **85**, 361 (2012).

[122] M. L. Metha, *Random matrices* (Elsevier, Amsterdam, 2004).

[123] F. Haake, *Quantum signatures of chaos* (Springer, 2010).

[124] T. A. Brody, Lett. Nuovo Cimento **7**, 482 (1973).

[125] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey, and S. S. M. Wong, Rev. Mod. Phys. **53**, 385 (1981).

[126] Como ejemplo de sistemas representativos caracterizados por la distribución de Brody podemos mencionar sistemas de muchos cuerpos [R. Modak and S. Mukerjee, New J. Phys. **16**, 093016 (2014)], mixed-chaotic billiards [B. Batistic and M. Robnik, J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 315102 (2013)], the kicked rotator [B. Batistic, T. Manos, and M. Robnik, Eruphys. Lett. **102**, 50008 (2013)], random matrix ensembles [G. LeCaër, C. Male, and R. Delannay, Physica A **383**, 190 (2007)], and biological systems [R. Potestio, F. Caccioli, and P. Vivo, Phys. Rev. Lett. **103**, 268101 (2009)]. De hecho, la distribución de Brody fue recientemente generalizada para incluir el límite del Ensamble Unitario Gausiano en H. Sabri, S. S. Hashemi, B. R. Maleki, and M. A. Jafarizadeh, Random Matrices: Theory Appl. **03**, 1450017 (2014).

[127] A. J. Martínez-Mendoza, A. Alcazar-López, and J. A. Méndez-Bermúdez, Phys. Rev. E **88**, 012126 (2013).

[128] F. Passerini and S. Severini, arXiv:0812.2597v2.

[129] G. D. Paparo, M. Müller, F. Comellas, and M. A. Martin-Delgado, Sci. Rep. **3**, 2773 (2013).

[130] G. Menichetti, D. Remondini, P. Panzarasa, R. J. Mondragon, and G. Bianconi, arXiv:1312.6720v1.

[131] T. Martin, X. Zhang, and M. E. J. Newman, Phys. Rev. E **90**, 052808 (2014).

[132] F. M. Izrailev, Phys. Rep. **196**, 299 (1990).

[133] H. Schanz and T. Kottos, Phys. Rev. Lett. **90**, 234101 (2003).

[134] S. Gnutzmann, H. Schanz, and U. Smilansky, Phys. Rev. Lett. **110**, 094101 (2013).

[135] T. K. DM. Peron, P. Ji, F. A. Rodrigues, J. Kurths, arXiv:1310.3389.

[136] B. I. Shklovskii, B. Shapiro, B. R. Sears, P. Lambrianides, and H. B. Shore, Phys. Rev. B **47**, 11487 (1993).

[137] B. L. Altshuler, V. E. Kravtsov, and I. V. Lerner, in Mesoscopic Phenomena in Solids, edited by B. L. Altshuler, P. A. Lee, and R. A. Webb (North-Holland, Amsterdam, 1991).

[138] Mesoscopic Quantum Physics, Proceedings of the Les Houches Session LXI, edited by E. Akkermans, G. Montambaux, J.-L. Pichard, and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1995).

[139] K. B. Efetov, Supersymmetry in Disorder and Chaos (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

[140] T. Kottos and U. Smilansky, Phys. Rev. Lett. **79**, 4794 (1997).

[141] T. Kottos and U. Smilansky, Ann. Phys. (N.Y.) **273**, 1 (1999).

[142] S. Gnutzmann and A. Altland, Phys. Rev. Lett. **93**, 194101 (2004).

[143] S. Gnutzmann and A. Altland, Phys. Rev. E **72**, 056215 (2005).

[144] S. Gnutzmann and U. Smilansky, Adv. Phys. **55**, 527 (2006).

[145] T. Kottos and H. Schanz, Physica E **9**, 523 (2001).

[146] T. Kottos and U. Smilansky, Phys. Rev. Lett. **85**, 968 (2000).

[147] T. Kottos and U. Smilansky, J. Phys. A **36**, 3501 (2003).

[148] Z. Pluhar and H. A. Weidenmüller, Phys. Rev. Lett. **110**, 034101 (2013).

[149] O. Hul, S. Bauch, P. Pakonski, N. Savytskyy, K. Zyczkowski, and L. Sirko, Phys. Rev. E **69**, 056205 (2004).

[150] M. Lawniczak, O. Hul, S. Bauch, P. Seba, and L. Sirko, *idem* **77**, 056210 (2008).

[151] M. Lawniczak, S. Bauch, O. Hul, and L. Sirko, *idem* **81**, 046204 (2010).

[152] D. J. Watts and S. H. Strogatz, Nature (London) **393** 440 (1998).

[153] X. P. Xu, W. Li, and F. Liu, Phys. Rev. E **78**, 052103 (2008).

[154] X. P. Xu and F. Liu, Phys. Lett. A **372**, 6727 (2008).

[155] X. P. Xu and F. Liu, New J. Phys. **10**, 123012 (2008).

[156] P. Li, Z. Zhang, X. P. Xu, and Y. Wu, J. Phys. A: Math. Theo. **44**, 445001 (2011).

[157] S. Salimi, R. Rradgohar, and M. M. Soltanzadeh, Intl. J. Quantum Inf. **08**, 1323 (2010).

[158] E. Agliari, Physica A **390**, 1853 (2011).

[159] F. Perakis and G. P. Tsironis, Phys. Lett. A **375**, 676 (2011).

[160] P. A. Mello and N. Kumar, *Quantum Transport in Mesoscopic Systems* (Oxford University Press, Oxford, 2004).

[161] J. A. Méndez-Bermúdez, A. Alcazar-López. A. J. Martínez-Mendoza, F. A. Rodrigues, and T. K. DM. Peron. Phys. Rev. E **91**, 032122 (2015).

[162] H. L. Harney, A. Richter, and H. A. Weidenmüller, Rev. Mod. Phys. **58**, 607 (1986).

[163] A. Muller and H. L. Harney, Phys. Rev. C **33**, 1228 (1987).

[164] J. A. Méndez-Bermúdez, V. A. Gopar, and I. Varga, Ann. Phys. (Berlin) **18**, 891 (2009).

[165] A. Alcazar-López, J. A. Méndez-Bermúdez, and I. Varga, Ann. Phys. (Berlin) **18**, 896 (2009).

[166] J. A. Méndez-Bermúdez, V. A. Gopar, and I. Varga, Phys. Rev. E **82**, 125106 (2010).