BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

USO DE LA MODELACIÓN PARA LA INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA EN NIVEL SUPERIOR

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

LIC. VANELLY VÁSQUEZ TORRES

DIRECTOR DE TESIS

DRA. MARIA TRIGUEROS GAISMAN

CO-DIRECTOR DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

PUEBLA, PUE. JUNIO DE 2025.

BUAP

Dr. Severino Muñoz Aguirre
Secretario de Investigación y Estudios de Posgrado
P R E S E N T E

Por este medio le informo que la C:

LIC. VANELLY VASQUEZ TORRES

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 06 de noviembre de 2024, con la tesis titulada:

"USO DE LA MODELACIÓN PARA LA INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE LA DERIVADA EN NIVEL SUPERIOR"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A t e n t a m e n t e
H. Puebla de Z., 09 de junio de 2025

Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz
Coordinadora de la Maestría en Educación Matemática.

EDLJR / agm

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Esta Investigación se realizó gracias al financiamiento del
Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT),
De enero de 2023 a diciembre de 2024
N° de CVU: 223470134

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo brindado a través de la beca otorgada durante mis estudios de maestría. Su respaldo fue fundamental para la realización de este trabajo de investigación.

AGRADECIMIENTOS

Quiero comenzar agradeciendo al gran arquitecto del universo por darme la fortaleza de culminar esta gran aventura llena de retos, obstáculos y bendiciones.

Agradecimientos especiales a la directora de esta tesis, Dra. María Trigueros Gaisman por la orientación académica, dedicación, paciencia, por los consejos y todo el apoyo que me ha brindado durante estos años; por sus ideas y esfuerzos previos, estaré siempre en deuda.

Mi más sincero agradecimiento a mis sinodales, Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruíz y el Dr. José Gabriel Sánchez Ruíz por sus correcciones y orientaciones dadas a este trabajo de investigación. A mis compañeros por compartir sus conocimientos y amistad en los mejores momentos.

A mi esposo Samuel Eduardo Salud Ordon por ser mi compañero incondicional y mi refugio en los momentos difíciles. Gracias por tu paciencia, tu amor y tu fe en mí incluso cuando yo dudaba. Gracias a mi familia, a mi mamá María Asunción Torres Sánchez y mi hermano Axel, por creer en mí y estar siempre a mi lado. Mi ángel y papá Alberto Vásquez Jacinto a quien llevo siempre en mi mente y mi corazón, este logro es tan mío como de ustedes. Los amo.

RESUMEN

En este trabajo de investigación se exploró la comprensión de los estudiantes acerca de la derivada en el nivel superior, tomando como referencia una Descomposición Genética de la mano de la Teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas). Se planteó a alumnos de la Carrera de Arquitectura un problema de economía abierto y lo más realista posible, con la finalidad de resaltar la aplicación de las matemáticas a los estudiantes y lograr interés hacia esta disciplina.

La Descomposición Genética sirvió de guía para diseñar actividades que permitieron a los estudiantes llevar a cabo las Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas que en ella se detallan; se tomó evidencia de las respuestas a las actividades y tareas resueltas por los estudiantes las cuales fueron parte del ciclo ACE (Actividades, Discusión en Clase y Ejercicios), y, además, se llevó a cabo un cuestionario de satisfacción al finalizar la intervención de todas las sesiones.

A partir de este análisis, se concluyó que el uso de la Teoría APOE y la Descomposición Genética para el diseño de actividades nos permitió construir un conocimiento más sólido y estructurado en los estudiantes que participaron en este estudio y, además, probar que el uso de problemas reales promueve el interés de los estudiantes.

Palabras clave: derivada, Teoría APOE, descomposición genética.

ABSTRACT

This research explored students' understanding of the derivative at the higher education level, using a Genetic Decomposition based on the APOS Theory (Actions, Processes, Objects, and Schemas) as a reference. An open-ended and realistic economic problem was posed to students from the Architecture program, aiming to highlight the application of mathematics and to foster interest in the discipline.

The Genetic Decomposition served as a guide for designing activities that enabled students to carry out the Actions, Processes, Objects, and Schemas described in the theory. Evidence was collected from students' responses to the tasks and activities, which formed part of the ACE cycle (Activities, Classroom Discussion, and Exercises). Additionally, a satisfaction questionnaire was administered at the end of the intervention.

Based on this analysis, it was concluded that using the APOS Theory and Genetic Decomposition to design the activities enabled the construction of more solid and structured knowledge among the students who participated in the study. Moreover, the use of real-world problems was shown to promote student interest.

Keywords: derivative, APOS Theory, genetic decomposition.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

La importancia y utilidad de las matemáticas en la vida real es de gran interés debido a la amplia variedad de aplicaciones que puede tener en otras áreas; a lo largo de los años han estado presentes en ramas como la química, la biología, la economía, la medicina, entre otras.

Muchos estudiantes de nivel medio superior creen erróneamente que las matemáticas solo se utilizan en las ingenierías o que no tienen ninguna utilidad en la vida cotidiana. Esta percepción se ha reforzado a lo largo del tiempo, ya que los problemas que ven en clase no les parecen relevantes ni conectados con situaciones prácticas de la vida diaria.

Gómez (2016), explica cómo la mayor parte de los estudiantes exponen lo difícil que es para ellos estar sentados en el salón de clases escuchando y resolviendo problemas matemáticos, los cuales no logran asociar con la realidad que los rodea y sus aplicaciones, dejándoles esos conocimientos en segundo plano y como herramientas de poca utilidad.

Específicamente, si se le pregunta al estudiante acerca de la derivada, lo primero que recuerdan y mencionan es el uso de fórmulas para derivar correctamente, la mayoría tiene problemas con definir el concepto y significativamente una mala experiencia con la materia de cálculo diferencial.

La derivada es uno de los conceptos más versátiles en el área del cálculo, ya que con ella es posible resolver distintos tipos de problemas donde se involucran fenómenos físicos que presentan cambios y variaciones entre otros campos del conocimiento (Amaro, 2020). Sánchez-Matamoros et al. (2008), mencionan la dificultad que presentan los alumnos ante la comprensión de la noción de la derivada no solo en el nivel medio superior, sino también lo arrastran en sus primeros años de cálculo en el nivel superior (universidad), dicho problema tiene su origen debido a que no logran construir un significado adecuado del concepto de derivada y esto les genera un desfavorable desempeño en sus cursos de cálculo.

Durón (2011), resalta cómo los cursos de cálculo tradicionales impartidos por muchos años influyen en el alto índice de reprobación de la materia, esto debido a que no se le otorga al estudiante un enfoque diferente para que logre ver la importancia del cálculo con problemas que conlleven aplicaciones reales y esto fomente el interés hacia la materia; además comenta que no es la única causa que existe, también influye la falta de estudio de la materia y el poco interés o gusto por las matemáticas que decae a través de los años de formación del estudiante.

Este trabajo tuvo como objetivo analizar la comprensión de la derivada por parte de los estudiantes y su aceptación mediante un problema aplicado a una situación económica real. Se utilizó una descomposición genética de la derivada y, en conjunto con la teoría APOE, se facilitó la introducción y construcción de este concepto en un grupo de alumnos de primer semestre de universidad. Es bien sabido que dicha descomposición no es única, por lo tanto, se puso a prueba mediante investigación cerrando con un cuestionario de satisfacción aplicado a los alumnos que participaron para determinar la aceptación que obtuvo a través de la propuesta, la cual busca relacionar el concepto de derivada con la vida real a través de aplicaciones en economía.

La presentación de este trabajo está organizada en cuatro Capítulos. En el Capítulo 1 se presenta el problema de investigación, la justificación del estudio, los objetivos generales y específicos, así como la pregunta de investigación. Se incluyen antecedentes teóricos, los cuales permitirán contextualizar la importancia de esta investigación sobre la comprensión de la derivada.

En el Capítulo 2 se expone el Marco Teórico que sustenta la investigación, se detalla la Teoría APOE y sus componentes Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas, las estructuras mentales y la Descomposición Genética llevada al aula, además se aborda el Ciclo ACE y la Modelación Matemática.

En el Capítulo 3 describimos el enfoque de la investigación, la población y el Instrumento utilizado para medir la aceptación por parte de los estudiantes. Se presentan las actividades diseñadas en base a la Descomposición Genética de la derivada y se explica el proceso que se siguió para la implementación de las mismas.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos del análisis de las respuestas a las actividades por parte de los estudiantes, así como fragmentos de las discusiones generadas en el aula. Se lleva a cabo un análisis de Validez y Confiabilidad el Instrumento y se exponen los resultados de su aplicación.

Finalmente se presentan las Conclusiones generadas a partir de los hallazgos principales de la investigación.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL RPOBLEMA

Este trabajo de investigación abordó la comprensión de la derivada por parte de los estudiantes introduciendo el tema con un problema real del área de economía, con el fin de involucrar a los estudiantes mediante el uso de la modelación para enriquecer sus ideas sobre el trabajo matemático y motivarlos hacia esta disciplina y demostrar su relación con otras áreas. Para resolver el problema, los estudiantes debatieron y resolvieron actividades que fueron diseñadas de la mano de una descomposición genética fundamentada con la Teoría APOE.

1.1. JUSTIFICACIÓN

Esta propuesta de investigación hizo uso de una descomposición genética de la mano de la Teoría APOE para favorecer la comprensión de la derivada, se diseñó un problema con una aplicación en la vida real en el área de economía, esto con la finalidad de impulsar el interés de los alumnos por líneas de investigación que impliquen una estrecha relación con las matemáticas.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivos generales

Este trabajo tuvo como objetivo analizar la comprensión y aceptación que demuestran los estudiantes a partir de presentarles un problema matemático lo más aproximado a la realidad aplicado en economía usando el enfoque cognitivo de la Teoría APOE, acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, en donde se describe las estructuras y mecanismos mentales necesarios para construir un concepto matemático.

Basada en la teoría APOE, se hizo uso de una descomposición genética para la comprensión del concepto de derivada.

1.2.2. Objetivos específicos

- Diseñar un problema que ilustre la aplicación de las matemáticas, específicamente la derivada, en el contexto económico.

- Adaptar una descomposición genética basada en la teoría APOE para facilitar la construcción del concepto de derivada y fomentar el interés de los estudiantes.
- Desarrollar un cuestionario de satisfacción para medir la aceptación por parte de los estudiantes del concepto de derivada.

1.3. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Qué comprensión evidencian los estudiantes sobre el concepto de derivada al resolver un problema aplicado a una situación económica seguida de actividades diseñadas con una descomposición genética para guiar su construcción y cuál es su aceptación de este enfoque?

1.4. ANTECEDENTES TEÓRICOS

A lo largo de la historia se han llevado a cabo estudios sobre los conceptos de razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea. Por ejemplo, Tales de Mileto (año 585 a. C) contribuyó con investigaciones relacionadas con razones y proporciones para comparar diferentes medidas entre segmentos y analizar sus relaciones. Otros matemáticos emplearon representaciones geométricas para explicar las relaciones entre magnitudes que varían y se exploró el movimiento de objetos, lo que posibilitó establecer una relación entre el tiempo y la velocidad como variables que están en constante cambio (Gutiérrez Mendoza et al., 2017). Descartes y Fermat aportaron estudios sobre el problema variacional empleando ecuaciones para relacionar dos cantidades variables; más adelante, L'Hôpital introdujo el uso de gráficos para representar las variaciones entre distintas magnitudes. Posteriormente, Newton y Leibniz desarrollaron trabajos fundamentales en los que se concretó el concepto de razón de diferencias entre valores infinitesimalmente pequeños, dando forma al concepto de razón de cambio (Rendón, 2009).

La noción de razón de cambio y el concepto de derivada han permitido no solo el estudio y análisis de fenómenos en constante cambio, sino también la caracterización y representación matemática de una amplia gama de problemas. Estos conceptos han desempeñado un papel fundamental en la comprensión y modelado de diversos fenómenos.

Dentro del plan de estudios mexicano para el curso de Cálculo en el nivel de educación media superior, se introduce por primera vez el concepto de derivada. Esta introducción suele realizarse a través de la definición de límite para luego presentar una serie de reglas que faciliten la derivación de funciones (Zambrano et al., 2019). Sin embargo, abordar el concepto de la derivada desde el enfoque del límite presenta desafíos significativos. Aunque los estudiantes exitosos logran comprender y dominar la derivación, y aplicar estos conceptos en la resolución de problemas, no todos los alumnos adquieren estas habilidades. Incluso aquellos estudiantes destacados pueden experimentar dificultades para explicar los conceptos de límite y derivada, lo que evidencia la presencia de concepciones erróneas en este ámbito (Flores-Peñafiel, 2014).

Dentro del campo de la economía, a partir de los años 1980 se han vuelto usuales términos como derivada, integral, ecuación diferencial, entre otros. Estos se utilizan para modelar diversos fenómenos dinámicos de interés para la economía. Específicamente, el concepto matemático de derivada resulta fundamental en el ámbito de la microeconomía, área que se concentra en los procesos de toma de decisiones llevados a cabo por los agentes económicos. Por consiguiente, comprender cómo los estudiantes manejan y comprenden el concepto de derivada al aplicarlo para interpretar situaciones económicas resulta esencial en este contexto (Ariza y Llinares, 2009). Por ejemplo, la aplicación de la derivada resulta sumamente beneficiosa en esta área ya que esta herramienta facilita determinar la tasa de cambio cuando se agrega una unidad adicional al total, independientemente de la cantidad económica que se esté evaluando, ya sea costo, ingreso, beneficio o producción (Flores y Salinas, 2013).

Es bien sabido, que gran parte de la información se transmite mediante representaciones gráficas que muestran las relaciones entre variables, y la medida de la variación de cambio se obtiene a través de la derivada. La forma en que los estudiantes obtienen información a partir de la relación entre una función y su gráfica se considera fundamental para comprender ciertas situaciones económicas. En este sentido, la comprensión visual de la idea de derivada y su relación con la función ha sido reconocida como un componente clave en la comprensión de la medida de variación. Se comunica una parte significativa de la información utilizando representaciones gráficas que muestran las conexiones entre diferentes variables. La medida de la variación de cambio de una variable se obtiene mediante la derivada. Se reconoce que la comprensión gráfica de la noción de derivada y su relación con la función desempeña un papel fundamental en la comprensión de cómo varían las magnitudes (Ariza y Llinares, 2009).

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1. TEORÍA APOE

La teoría APOE es una interpretación de la teoría constructivista que se basa principalmente en el concepto de abstracción reflexiva, introducido por Piaget, para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños, y extiende la idea a nociones matemáticas más avanzadas (Dubinsky, 1991, citado en Roa-Fuentes & Oktac, 2010).

La Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), describe las estructuras y los mecanismos mentales mediante los cuales una persona construye su entendimiento de un concepto matemático. Es una teoría cognitiva y dinámica que está basada en la epistemología constructivista de Piaget.

Para Dubinsky (1991, 1991a, 1996), la abstracción reflexiva es el mecanismo por el cual se construyen Objetos mentales a través de acciones físicas o mentales sobre estos objetos matemáticos.

Una estructura mental es cualquier estructura estable construida en la mente del individuo, la cual es usada para dar sentido a nociones y situaciones matemáticas, para ello es necesario un mecanismo, el cual es un medio que permite que esa estructura pueda desarrollarse en la mente del individuo o grupo de individuos (Stenger et al., 2008).

Piaget sostenía que, para tener conocimiento sobre un objeto, ya sea mental o físico es necesario que un sujeto actúe sobre él, es decir, estos no pueden disociarse, sería imposible tratar de explicar uno de ellos sin la presencia del otro (Arnon et al., 2014).

Además, Piaget aplicó todas esas ideas a una variedad de temas de matemáticas, partiendo desde conceptos muy básicos y elementales construidos por niños pequeños hasta conceptos y trabajos avanzados de investigadores matemáticos.

> La Teoría APOE explica el proceso de aprendizaje de los conceptos matemáticos, proporcionando un marco que describe cómo las personas desarrollan mentalmente su comprensión de estos conceptos. Desde un enfoque cognitivo, cada concepto matemático

se define a través de su descomposición genética, que es una explicación de cómo el individuo puede construir dicho concepto en su mente. (Arnon et al., 2014).

En otras palabras, la teoría APOE explica como construye mentalmente un individuo su entendimiento acerca de los conceptos matemáticos, para ello le debe dar un sentido a estos conceptos a través de construir estructuras que surgen motivados de varios momentos de abstracción y reflexión, es decir, mediante mecanismos mentales.

El objetivo de la Teoría APOE consiste en estudiar cómo un sujeto "genérico" aprende un concepto matemático y como se pueden enseñar de manera efectiva y propone cuáles son las construcciones necesarias para aprenderlo, es decir, estudia con detalle el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Por sujeto genérico nos referimos a una persona que comparte características generales con un grupo de personas y de cómo aprenden un tema de matemáticas.

La teoría APOE permite diseñar con fineza y llevar a cabo un análisis muy detallado de instrumentos de enseñanza y de investigación: el diagnóstico y evaluación mediante la detección de las dificultades y aciertos de los estudiantes y además permite explicar o ayudar a resolver las dificultades y promover el aprendizaje. Ha sido usada como marco teórico (principal o complementario) y metodológico en estudios relacionados con la cognición de conceptos y nociones en matemáticas.

2.2. CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

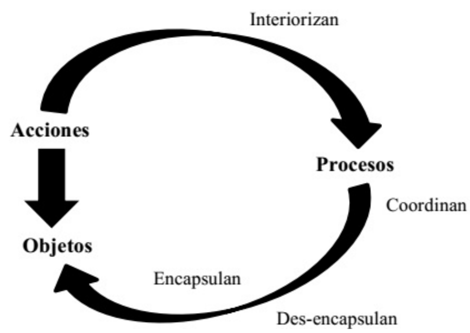
Desde la perspectiva de esta teoría se define el conocimiento matemático en términos de estructuras mentales que son construidas a través de mecanismos mentales propios del individuo.

"El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones y problemas matemáticos, reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas" (Dubinsky, 1996).

Para comprender un concepto matemático se inicia manipulando objetos mentales o físicos que fueron previamente construidos para formar Acciones, luego estas Acciones se interiorizan para así formar Procesos y pasar a la etapa de encapsulación y formar Objetos. Los Objetos a su vez se pueden desencapsular de nuevo a los Procesos de los que se dieron origen. Finalmente, las Acciones, los Procesos y los Objetos se pueden organizar en Esquemas (Asiala, et al., 1997) (Figura 1).

Figura 1.

Construcciones para el conocimiento matemático.



Fuente: Asiala, et al. (1997).

Aprender matemáticas se puede definir como un cambio de estado de conocimiento a otro, el matemático Dubinsky tomó como base la Teoría de Piaget para construir una base de como aprender matemáticas y así nace la Teoría APOE.

2.3. ESTRUCTURAS MENTALES

Las estructuras mentales que constituyen la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) y los mecanismos mediante los cuales se construyen dichas estructuras mentales.

2.3.1. Acciones

Las Acciones son transformaciones sobre Objetos construidos previamente, pueden ser procedimientos memorizados que normalmente se hacen paso a paso y se responden de manera concreta y son indispensables en la construcción del conocimiento.

> Según Piaget y adoptada por la Teoría APOE, un concepto se concibe primero como una Acción, es decir, como una transformación dirigida externamente de un Objeto u Objetos previamente concebidos. Una Acción es externa en el sentido de que cada paso de la transformación necesita ser realizado explícitamente y guiado por instrucciones externas;

> además, cada paso provoca el siguiente, es decir, los pasos de la Acción no se pueden imaginar y ninguno se puede omitir. (Arnon et al., 2014)

Las Acciones son las estructuras más primitivas y son fundamentales para la teoría APOE. Es necesario concebir la acción para desarrollar otras estructuras. Los Procesos son Acciones interiorizadas y los Objetos mentales nacen gracias a la aplicación de las Acciones. Nuevas Acciones van a conducir a desarrollar estructuras de orden superior.

2.3.2. Interiorización y Proceso

Cuando una Acción o un conjunto de Acciones se repiten y se reflexiona sobre ellas, la Acción o Acciones se interiorizan en un Proceso.

La interiorización es la repetición de las Acciones por el sujeto que las realiza, como un cambio mental que le permite ser consciente de la Acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras, para así formar un Proceso.

> Los Procesos se construyen usando uno de dos mecanismos mentales: interiorización o coordinación. Cada uno de estos mecanismos da lugar a nuevos Procesos […]. A medida que las Acciones se repiten y se reflexionan sobre ellas, el individuo pasa de depender de señales externas a tener un control interno sobre ellas. Este se caracteriza por la capacidad de imaginarse realizando los pasos sin necesariamente tener que realizar cada uno de ellos explícitamente y por poder saltar pasos, así como invertirlos. La interiorización es el mecanismo que hace posible este cambio mental. (Arnon et al., 2014, p.20)

La interiorización hace referencia al mecanismo de abstracción reflexiva que sale a relucir cuando un individuo pasa de hacer solamente Acciones a un estado de conocimiento caracterizado por los Procesos.

En otras palabras, una Acción debe ser interiorizada, y al hacerlo se convierte en un Proceso. El Proceso es una estructura dinámica que se percibe como algo interno bajo el control del individuo, se identifica porque es posible saltar pasos, generalizar o imaginar sin hacer acciones y se pueden coordinar unos con otros para construir nuevos.

2.3.3. Encapsulación y Objetos

La Encapsulación es la transformación mental de un Proceso, el cual se ha interiorizado de una Acción, en un Objeto cognitivo, es decir, la encapsulación es un mecanismo que permite pasar de la construcción de un Proceso a la construcción de un Objeto.

"La encapsulación ocurre cuando un individuo aplica una Acción a un Proceso, es decir, ve una estructura dinámica (Proceso) como una estructura estática a la que se le pueden aplicar Acciones" (Arnon et al., 2014).

Además, es posible desencapsular el Objeto en el o los Procesos que le dieron origen, es decir, en el transcurso de pasar de realizar una Acción o Proceso en un Objeto, constantemente es necesario desencapsular el Objeto nuevamente al Proceso del que se originó para poder manipular sus propiedades (Asiala, Brown, et al., 1997).

2.3.4. Esquema

Un conjunto de Procesos y Objetos se pueden organizar y estructurar para formar un Esquema. Los mismos Esquemas pueden ser tratados como Objetos y ser incluidos en la organización y construcción de Esquemas de "nivel superior". Cuando esto ocurre, decimos que el Esquema ha sido tematizado a un Objeto (Asiala, et al., 1997).

El Esquema es una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que se han relacionado entre sí y que para el individuo forme un marco coherente, es decir, es la totalidad del conocimiento que para él o ella está conectado a un tema matemático particular.

Una vez que se construye un Esquema como una colección coherente de estructuras (Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas) y se establecen conexiones entre esas estructuras, se puede transformar en una estructura estática (Objeto) y/o utilizarla como estructura dinámica que asimila otros Objetos o Esquemas relacionados. (Arnon et al., 2014)

2.4. DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA

"Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras mentales y mecanismos que un estudiante podría necesitar para aprender un concepto matemático específico" (Arnon et al., 2014, p.27).

> La descomposición genética consiste en una descripción de las Acciones que un estudiante necesita realizar sobre los Objetos mentales existentes y continúa incluyendo explicaciones de cómo estas Acciones se interiorizan en Procesos. En este punto, el concepto todavía se ve como algo que uno hace. Para ser concebido como una entidad por derecho propio, algo que puede transformarse, el Proceso se encapsula en un Objeto mental. Es muy posible que un concepto conste de varias Acciones, Procesos y Objetos diferentes. […] Una descomposición genética puede incluir una descripción de cómo estas estructuras están relacionadas y organizadas en una estructura mental más grande llamada Esquema. La descomposición genética también explica todo lo que se sabe sobre el desempeño esperado de los estudiantes que indica diferencias en el desarrollo de las construcciones de los estudiantes. (Arnon et al., 2014, p.28)

La descomposición genética es un modelo el cual describe con detalle las estructuras y los mecanismos necesarios para construir el o los conceptos. Dicho modelo no es único, se pone a prueba mediante investigación y se refina hasta que el modelo funciona y posteriormente se valida. Hasta que una descomposición genética no se pruebe experimentalmente, solo es una hipótesis y se denomina preliminar y es usada por los investigadores para describir conceptos, además, las descomposiciones genéticas han sido usadas como instrumento de diseño de propuestas y secuencias didácticas.

2.5. LA ENSEÑANZA: CICLO ACE

"El ciclo de enseñanza ACE es una estrategia pedagógica que consiste en tres componentes (A) Actividades, (C) discusión en Clases y (E) Ejercicios" (Arnon et al., 2014).

Las actividades conforman el primer paso del ciclo; en este, los estudiantes se reúnen en equipos para trabajar en conjunto y resolver tareas diseñadas para ayudarlos a realizar construcciones mentales sugeridas por la descomposición genética.

Actividades diseñadas con la descomposición genética:

- Trabajo colaborativo en las actividades guiado por el profesor.
- Promoción de la reflexión y de las construcciones deseadas.
- Uso de tecnología (programación)

La segunda parte del ciclo es la discusión en el aula, la cual es guiada por un instructor e involucra una discusión mientras completa las actividades asignadas por él, además les proporciona definiciones o presenta una descripción general para unir las ideas.

Discusión en Clase con el profesor:

- Reflexión conjunta.
- Formalización.

La tercera parte del ciclo son los ejercicios de tarea, estos consisten en problemas comunes y diseñados para reforzar las actividades y discusiones que se llevaron a cabo en el aula.

Ejercicios individuales o en equipo (tarea):

- Actividades.
- Problemas.
- Ejercicios.

El uso de este ciclo proporciona una descripción más precisa y cercana al desarrollo de los conceptos matemáticos. Cada vez que se aplica, partiendo de la descomposición genética de un concepto, ésta se perfecciona a través del análisis de los datos empíricos obtenidos durante la tercera etapa del proceso (Roa-Fuentes y Oktac, 2010).

2.6. MODELACIÓN COMO ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA

Un modelo matemático es una representación que utiliza conceptos y relaciones matemáticas para describir y comprender un fenómeno o situación del mundo real. Esta definición resalta la conexión entre elementos matemáticos y el mundo no matemático, subrayando cómo estos se utilizan para representar o modelar situaciones reales (Blomhøj, 2008).

Por otro lado, se considera a la modelización matemática como el proceso de crear un modelo matemático a partir de un fenómeno real. Este modelo se convierte en una herramienta para representar situaciones o fenómenos del mundo real, convirtiéndose en el sistema objeto de estudio. Aquí se destaca el papel activo de los modelos matemáticos como herramientas de representación y estudio de fenómenos del mundo real (Villa-Ochoa, 2007).

Ambas definiciones resaltan la importancia de los modelos matemáticos como puentes entre el mundo de las matemáticas y el mundo real, proporcionando herramientas para comprender y abordar diversos fenómenos desde una perspectiva matemática.

Recientemente, se ha generado considerable discusión en ámbitos educativos sobre la necesidad e importancia de introducir los conceptos matemáticos en contextos específicos (Kelly y Lesh, 2012). Se sostiene que este enfoque promueve una comprensión de las matemáticas más profunda, y que los estudiantes tienden a encontrar más atractivas las situaciones problemáticas vinculadas a su entorno que las actividades matemáticas aisladas.

Esta perspectiva defiende que la contextualización potencia la significatividad del aprendizaje. Para contextualizar el conocimiento, una estrategia efectiva implica la presentación de situaciones problemáticas reales que puedan ser representadas mediante modelos matemáticos (Trigueros, 2009).

Estos modelos emergen cuando se busca resolver cuestiones concretas en contextos reales, tomar decisiones o anticipar eventos en fenómenos naturales y sociales. Se utilizan para abordar preguntas específicas y realizar predicciones fundamentadas.

Es crucial que los estudiantes comprendan la situación modelada y sean capaces de identificar las variables relevantes que permitirán una descripción precisa del problema en cuestión. Esta habilidad implica interpretar la situación para discernir qué elementos son clave y deben ser considerados para abordar de manera efectiva el problema planteado; es decir, así enfocar los esfuerzos y recursos en los aspectos clave que conducirán a una solución adecuada (Niss, 2012).

Según Israël (1996), reconocido historiador de la ciencia, durante varios siglos las matemáticas han sido no solo una herramienta fundamental para influir y transformar la realidad, sino también un medio crucial para comprenderla. A lo largo del tiempo, ha surgido un proceso denominado "matematización de la realidad" o "modelación matemática", que implica la utilización de las matemáticas para describir y examinar el mundo. Este enfoque se emplea para desarrollar técnicas y tecnologías que interactúan de forma activa con nuestro entorno.

El enfoque de Modelos y Modelación ofrece un marco teórico valioso para diseñar actividades que permitan a los estudiantes desarrollar ideas en contextos reales y significativos. Este enfoque se centra en la creación y utilización de modelos matemáticos para abordar problemas auténticos, lo que brinda a los estudiantes la oportunidad de aplicar conceptos matemáticos en situaciones del mundo real. Al hacerlo, se fomenta un aprendizaje más profundo y significativo, ya que los estudiantes ven la relevancia y utilidad de las matemáticas en su entorno y en diversos campos de estudio (Kelly & Lesh, 2012).

La premisa central de la modelación es crear escenarios realistas y complejos donde los estudiantes se involucren en el pensamiento matemático, generando productos complejos y herramientas conceptuales para alcanzar un objetivo específico. Estos productos se elaboran a lo largo de ciclos de trabajo y reflexión, permitiendo que los estudiantes se autoevalúen en cada ciclo. Para esto es factible diseñar actividades en el aula donde los estudiantes se enfrenten a problemas en entornos enriquecedores y desarrollen ideas matemáticas que puedan servir como base para sesiones posteriores. Estas sesiones podrían presentar actividades más estructuradas basadas en una descomposición genética paso a paso de los conceptos matemáticos (Blum, 2002).

La perspectiva de muchos defensores de la modelación en la enseñanza se centra en que cada estudiante elija un tema de su interés en cualquier área, realice una investigación, plantee preguntas y, con la guía del profesor, desarrolle un modelo matemático. En esta dinámica, el estudiante asume un rol activo y corresponsable en su aprendizaje, mientras que el profesor actúa como un guía o facilitador (Bassanezi, 2002). Estos defensores sostienen que este enfoque enriquece el aprendizaje al permitir que el estudiante no solo comprenda las matemáticas en el contexto de otras áreas del conocimiento, sino también al despertar su sentido crítico y creativo. Esta metodología fomenta una participación más profunda y comprometida del estudiante en su proceso de aprendizaje, permitiéndole explorar y aplicar las matemáticas en temas que le resultan relevantes e interesantes.

2.7. LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

La derivada es una herramienta matemática que nos dice cómo una variable cambia cuando otra también cambia. Es como un detector de cambios que nos ayuda a entender cómo se relacionan dos variables en una situación específica. (Eduardo & Rojas, 2012)

Entender la derivada requiere entender ciertos conceptos previos, a los que denominan "precálculo". Dentro de estos conceptos, se mencionan conceptos como la velocidad media e instantánea, la tasa de variación media y pendiente de una recta (Badillo, 2003).

Regularmente se suelen plantear problemas que dependen del tiempo, sin embargo, también es útil presentar problemas en los que la variable independiente no sea necesariamente el tiempo, de manera que los estudiantes no limiten su comprensión de la variación a funciones que solo dependen de este. Por ejemplo, podemos explorar cómo cambia el volumen de llenado de un depósito en relación con la altura del nivel del agua, si conocemos la forma del depósito. Comenzar con problemas simples ayuda a que los alumnos se familiaricen con la notación y el enfoque (Azcárate et al., 1996).

Algunos estudios señalan los desafíos y las ideas alternativas que surgen durante la enseñanza y el aprendizaje de la razón de cambio; se han identificado dificultades en estudiantes de distintos niveles al intentar comprender la noción de tasa de cambio, esto debido a que los estudiantes tienden a ver los términos: pendiente, razón de cambio e inclinación como conceptos independientes y no interrelacionados (Dolores et al., 2017).

Los estudiantes que cursan materias de cálculo diferencial a menudo tienen dificultades para comprender la derivada como una razón de cambio o variación. Esto puede atribuirse a varios factores entre ellos: la enseñanza tradicional tiende a presentar la derivada como un proceso basado en algoritmos o en la aplicación de fórmulas predefinidas y la manera en que los libros de texto abordan el concepto, a menudo no lo relaciona con situaciones prácticas o su aplicación real en campos como la ingeniería, por mencionar algunos.

La distinción entre cambio y variación es crucial: el cambio implica una modificación en el estado, aspecto, comportamiento o condición de un objeto, sistema o entidad. Por otro lado, la variación se refiere a la cuantificación de ese cambio, es decir, analizar la variación de un sistema o entidad implica entender cómo y en qué medida cambia (González et al., 2013).

La razón de cambio es la medida en la que una variable se transforma en relación con otra. Este concepto evalúa la magnitud que compara dos variables considerando sus unidades de cambio. La pendiente vista como razón de cambio está dada como una comparación de dos variables, se refiere a la medida de cambio del fenómeno, es decir, la razón de cambio es igual a la pendiente de la recta. Es el cambio en y sobre el cambio en x, donde estos cambios se refieren a la variación que existe entre dos valores de cada variable respectivamente. En lenguaje algebraico se tiene que la razón de cambio (pendiente) o también conocida como Tasa de Variación Media es igual a:

$$m = TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

donde $y = f(x)$ y Δx representa lo que cambia x de x_1 a x_2, que se cuantifica mediante la diferencia: $\Delta x = x_2 - x_1$, Δy los cambios en $f(x)$ que se cuantifican también con las diferencias: $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

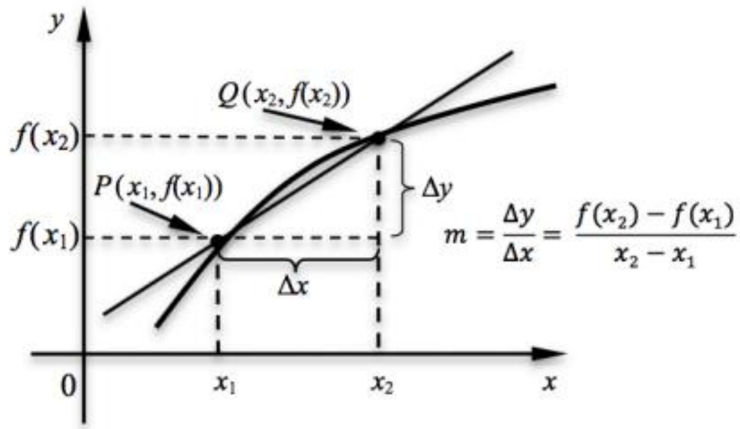
La Tasa de Variación Media (TVM) de una función en un intervalo es el número de unidades que crece (o decrece) la función por cada unidad que aumenta la variable independiente.

En nuestra vida diaria nos encontramos con diversas situaciones que implican razones de cambio en ámbitos sociales, económicos, naturales y otros; en ellas buscamos identificar los valores más altos o bajos (máximos y mínimos), su crecimiento o decrecimiento en un intervalo de tiempo específico. Estos problemas involucran el estudio de fenómenos vinculados a la variación de una cantidad en función de otra, por lo que se hace esencial describir y medir estos cambios mediante gráficas, tablas y modelos matemáticos.

La razón de cambio, en un contexto geométrico, se entiende como la pendiente de la recta secante a la curva f cuando esta intersecta la curva en los puntos P y Q (Figura 2). La pendiente, velocidad y rapidez están íntimamente relacionadas, siendo consideradas como casos específicos de razones de cambio.

Figura 2.

Razón de cambio promedio, como pendiente de la secante PQ.



Fuente: Dolores et al (2017).

Si $x_2 \rightarrow x_1$ (es decir, un valor se aproxima cada vez más a otro), la tasa de variación media se convierte en "tasa de variación instantánea" como:

$$TVI = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Se define la tasa de variación instantánea (TVI) de una función en un punto, como el límite cuando el intervalo se hace infinitamente pequeño de la tasa de variación media (TVM).

$$TVI = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El significado de la tasa de variación instantánea es equivalente al concepto de la derivada de una función. De modo que la tasa de variación instantánea también sirve para calcular el valor de la derivada de una función en un punto.

Si tomamos intervalos cada vez más y más pequeños, es decir si $\Delta x \rightarrow 0$, podemos concluir que este es el valor "límite" o la "tasa de variación instantánea" Este proceso lo podemos enunciar como "límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$, que matemáticamente se escribe:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se llama derivada de una función $y = f(x)$ en un punto $P(x_0, f(x_0))$ y se denota por $f'(x_0)$, al límite de la razón promedio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a 0, es decir:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Al calcular la derivada de una función f en un punto se obtiene un valor único y esto nos permite considerar la función que a cada punto x le hace corresponder $f'(x)$, es decir:

Se llama función derivada de la función f (o simplemente derivada de f) a la función que a cada $x \in Dom(f)$, le asigna $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ donde h es el incremento (Δx) con respecto a x.

Anteriormente se definió el Ciclo ACE (Actividades, Discusión en Clase y Ejercicios). Estas definiciones forman parte de la segunda parte del ciclo que es la discusión en el aula, la cual es guiada por un instructor e involucra una discusión mientras completan las actividades asignadas por él. Durante esta fase, ofrece definiciones y una descripción general para integrar ideas, todo en relación con las actividades diseñadas y que conducen a la formulación de definiciones.

2.8. EL PAPEL DE LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA EN LA INVESTIGACIÓN

La descomposición genética se convierte en el núcleo de la aplicación de la teoría APOE en investigaciones relacionadas con la comprensión de elementos matemáticos. Esto se debe a que facilita la estructuración del concepto matemático, orienta la organización del material a enseñar y permite diseñar actividades y tareas que fomenten la construcción de las estructuras que se pretende que los estudiantes desarrollen (Badillo, 2003).

La descomposición genética no solo actúa como un modelo teórico en la investigación, sino que también orienta la instrucción. Al describir las construcciones necesarias para comprender un concepto matemático, esta descomposición se convierte en un recurso para desarrollar actividades que apoyen a los estudiantes en la construcción de dichas estructuras (Trigueros & Oktaç, 2005). Cada actividad tiene como objetivo brindar a los participantes la posibilidad de repetir acciones concretas y reflexionar sobre ellas. Esto se realiza para estimular la interiorización de Acciones en

Procesos y para apoyar la encapsulación de Procesos en Objetos. Tales actividades pueden ser útiles para que los participantes construyan un nuevo Esquema o, si ya tienen un Esquema existente, para impulsar su progreso o refinamiento.

Analizar la descomposición genética de un Objeto matemático, en este caso el de la derivada, es fundamental para organizar el concepto y dirigir la estructura del contenido a enseñar. Es determinante en el diseño de actividades y tareas que contribuyen a la construcción de las estructuras mentales necesarias para asimilar y consolidar dicho concepto (Arnon et al., 2014).

2.8.1. Aplicación de la Descomposición Genética en el diseño de una situación de modelado económico

El problema planteado en este trabajo ajusta la perspectiva de modelado al implicar el desarrollo de una situación contextualizada para establecer la relación entre la demanda y el precio de un bien en un mercado. Esta situación se desarrolla en base al marco teórico previamente descrito, donde involucra la creación de un modelo matemático y requiere de la comprensión y cálculo de la derivada para estimar la elasticidad de la demanda del artículo. Además, demanda la utilización de datos reales lo cual aporta una aplicación práctica del modelo propuesto, reflejando así un enfoque realista y aplicado del modelado en contextos del mundo real.

2.9. ETAPAS DEL TRABAJO

El ciclo de enseñanza ACE mencionado en el aparatado 2.5, es una estrategia pedagógica que consta de tres componentes: (A) Actividades, (C) Discusión en Clase y (E) Ejercicios. Este Ciclo tiene una importante relación con la Descomposición Genética ya que ésta afecta a cada componente del ciclo.

Las Actividades diseñadas tuvieron el objetivo de desarrollar las construcciones mentales propuestas por la descomposición genética seleccionada. Estas actividades no tenían respuestas definidas como correctas o incorrectas, sino que su objetivo era fomentar la abstracción reflexiva en los alumnos.

Las sesiones fueron dirigidas por la investigadora que a su vez cumplía su rol como profesora titular de la materia y fueron observadas por una persona externa, la cual fue tomando notas sobre ideas y discusiones que surgían en las sesiones. El papel principal de la investigadora fue el de guiar a los estudiantes e invitarlos a reflexionar y discutir de manera grupal las actividades propuestas, además de analizar toda la información generada, incluyendo documentos producidos en los ciclos de modelado, observaciones grupales y discusiones en clase.

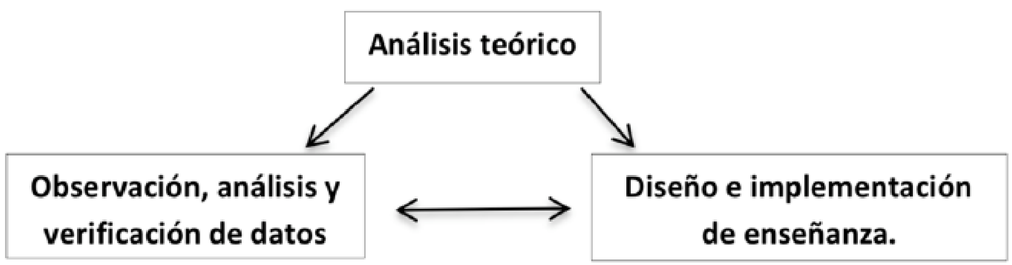
CAPÍTULO 3

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN

El método que se utilizó en la investigación fue la metodología de investigación de la Teoría APOE; en la Figura 3 se presentan los tres componentes que involucra: análisis teórico, diseño e implementación de la instrucción, y recopilación y análisis de datos.

Figura 3.
Ciclo de Investigación.



Fuente: Amaro (2020).

La investigación es de naturaleza cualitativa, con un enfoque exploratorio usando la metodología de la Teoría APOE, tomando en cuenta la necesidad de estimular a los alumnos ante la solución de un problema interesante.

Comprendió el uso de una descomposición genética hasta la valoración de la aceptación por parte de los estudiantes; se realizó un análisis teórico y se estudió a profundidad la descomposición genética de la derivada, la cual se pretende introducir mediante un problema real de modelación en el área de la economía, con la finalidad de llevar a los estudiantes a la compresión del concepto de una manera diferente a la que esperan y lograr captar el interés y gusto por la materia.

Para dar alcance a los objetivos se tomó como referencia la descomposición genética de Badillo (2003) y la descomposición genética de Asiala et al. (1997), las cuales se fueron refinando de la mano de la revisión de la literatura para adaptarse a nuestros objetivos. Estas descomposiciones permitieron entender el cómo desarrollar e introducir la definición de derivada en clases para despertar y motivar procesos en los estudiantes, tales como reflexión, abstracción, síntesis, y generalización, que generan la encapsulación de la definición.

3.2. APLICACIÓN

La experiencia se llevó a la práctica en 13 sesiones de dos horas, los martes y jueves. Se realizó en un salón de clases común donde participaron 24 estudiantes de entre 18 y 19 años del segundo semestre de la carrera de Arquitectura en la materia de Cálculo I de una universidad privada ubicada en la ciudad de Puebla. El abordaje del problema requirió varios ciclos de modelado donde los estudiantes colaboraron en grupos pequeños. Cada sesión de clase fue planificada y se documentaron las discusiones mediante grabaciones de audio y archivando todos los materiales de planificación para su posterior análisis. La profesora formó 6 equipos de 4 estudiantes cada uno, les indicó que en las siguientes sesiones iban a trabajar de esa manera y que siempre se reunieran en equipos antes de iniciar la clase. Esto, con la finalidad de que ellos se fueran acostumbrando y acoplando a sus compañeros para trabajar el resto de las sesiones.

La Discusión en Clase se fundamentó en las actividades previas, permitiendo que los estudiantes reflexionaran sobre su trabajo. En esta etapa, la investigadora actuó como guía en la discusión, brindando explicaciones, aclarando dudas e incluso proporcionando definiciones para obtener una visión general del progreso y comprensión de lo que se iba trabajando. El énfasis estaba en facilitar un diálogo reflexivo que ayudara a los estudiantes a consolidar sus aprendizajes y a profundizar en la comprensión del tema abordado.

Los Ejercicios de Tarea fueron proporcionados a los estudiantes con el propósito de reforzar las actividades realizadas y las discusiones en clase. Estos ejercicios permitieron aplicar lo aprendido, además de considerar nuevas ideas y establecer conexiones entre ellas, además sirven como una oportunidad para que los estudiantes practiquen lo aprendido, refuercen su comprensión y continúen construyendo nuevo conocimiento sobre los conceptos trabajados en las fases anteriores del proceso de enseñanza.

Para introducir el problema económico se estructuró el siguiente orden:

1. Antecedente a la experiencia (primer acercamiento a la modelación): con el fin de sensibilizar a los estudiantes antes de introducirlos al problema económico propuesto, se

condujo a los estudiantes al tema de Interés Simple y haciendo uso de la modelación propusieron una fórmula generalizada para este concepto y realizaron actividades y ejercicios sobre él.

2. Introducción al problema económico: una vez preparados y adecuados a sus respectivos equipos, se les entregó el problema de Elasticidad de la Demanda.
3. Implementación de las actividades: a lo largo de las sesiones posteriores, la investigadora guio a los estudiantes en la realización de las actividades diseñadas con base en la descomposición genética.
4. Retorno al problema económico: una vez que obtuvieron todas las herramientas necesarias procedieron a resolver el problema económico de manera óptima.

3.3. EVALUACIÓN

Se llevó a cabo un análisis cualitativo de las sesiones de trabajo llevadas a cabo con los estudiantes, se tomaron notas y grabaciones de las interacciones en clase para posteriormente detallar en el informe los sucesos y datos relevantes que surgieron durante la implementación de las actividades. Al término de cada sesión, se redactó una bitácora con reflexiones sobre la experiencia, complementando así el análisis. También se examinaron las actividades y tareas realizadas por los estudiantes, recogiendo evidencia de sus notas y contrastándolas con las discusiones registradas en las grabaciones.

Además, se diseñó un cuestionario de satisfacción con el propósito de explorar la percepción y aceptación de los estudiantes sobre la introducción de la derivada mediante un problema aplicado a la economía.

3.4. POBLACIÓN

La población de estudio fue un grupo de 24 alumnos del segundo semestre de la carrera de Arquitectura de una universidad privada del área metropolitana del estado de Puebla, México.

3.5. INSTRUMENTO: CUESTIONARIO DE SATISFACCIÓN

Se diseñó un cuestionario de satisfacción que fue aplicado posterior a las actividades realizadas con el grupo seleccionado, el cual nos permitió registrar la aceptación del concepto implementado mediante el uso de la modelación. El cuestionario fue puesto a prueba bajo Juicio de expertos obteniendo validez y confiabilidad al instrumento.

Tabla 1.

CUESTIONARIO PARA MEDIR LA ACEPTACIÓN DE LOS ESTUDIANTES RESPECTO A LA INTRODUCCIÓN DE LA DERIVADA MEDIANTE UN PROBLEMA ECONÓMICO

INSTRUCCIONES: Mediante la siguiente escala de números responde con una X en la columna correspondiente, cuál es tu nivel de satisfacción con cada una de las afirmaciones:

1: Muy insatisfecho.
2: Insatisfecho.
3: Ni satisfecho ni insatisfecho.
4: Satisfecho.
5: Muy satisfecho.

Ítem	Contenido	Respuesta				
		1	2	3	4	5
1	Estoy satisfecho con la forma de introducir el tema de derivada.					
2	Estoy de acuerdo con el uso de la Tasa de Variación Media para introducir la derivada.					
3	Estoy satisfecho trabajando en equipo durante las clases.					
4	Estoy de acuerdo con la introducción al tema de derivada mediante un problema real.					
5	Estoy satisfecho con el problema de economía con el que se introdujo el tema.					
6	Considero que tiene sentido pasar de Tasa de Variación Media a Tasa de Variación Instantánea.					

7	Estoy satisfecho con los problemas presentados como apoyo para entender la definición intuitiva de la derivada.					
8	Estoy de acuerdo con la forma de introducir la definición formal de la derivada.					
9	Resultó interesante la aplicación de la derivada al problema planteado.					
10	Estoy de acuerdo con la posibilidad de introducir otros temas de la misma forma que esta.					

3.6. ANTECEDENTE A LA EXPERIENCIA: INTERÉS SIMPLE

En el contexto del Interés Simple, los estudiantes modelan el crecimiento de una inversión a lo largo del tiempo utilizando funciones que incluyen el capital inicial, la tasa de interés y el tiempo. El proceso de modelado inicia con la identificación de un fenómeno o problema en el mundo real, que se observa y somete a experimentación para comprenderlo mejor y recopilar datos. Dado que es imposible considerar todos los factores involucrados, se realizan simplificaciones y supuestos para construir un modelo representativo del fenómeno (Salett Biembengut y Hein, 2004).

Para llevar a cabo el antecedente a la experiencia, se utilizó la modelación matemática de un problema de finanzas para introducir el concepto de función. Con este objetivo se puso a prueba una Descomposición Genética para el concepto de función tomada del libro Teoría APOE (Arnon et al., 2014) y en el aula se siguió la metodología didáctica de dicha teoría: El ciclo ACE.

Descomposición genética de función. El concepto de función comienza con Acciones sobre un conjunto, donde se aplica una regla para asignar un elemento único de un segundo conjunto a cada elemento del primero. A medida que se realizan estas Acciones en diferentes conjuntos, el individuo reflexiona y percibe estas Acciones como una transformación dinámica sobre la que tiene control, es decir, a partir de esas Acciones se construye un Proceso mediante el cual la función se ve como una transformación mental que empareja elementos del dominio con elementos del recorrido. La concepción Proceso de función implica la posibilidad de pensar en funciones en términos de aceptar entradas, manipularlas y producir salidas sin hacer cálculos explícitos. La necesidad de aplicar Acciones sobre el Proceso de función lleva a su encapsulación como un Objeto cognitivo, desviando el enfoque de la función como una transformación dinámica a una entidad estática que puede ser examinada y transformada. Cuando una persona puede determinar si la relación entre dos entidades define una relación funcional y coordinar varios Procesos para determinar el dominio y el recorrido de una función, puede estar construyendo un Esquema de función (Arnon et al., 2014).

La Discusión en Clase se abrió con la pregunta de la investigadora a los alumnos: ¿En alguna ocasión se atreverían a invertir, conocen las ventajas?

A continuación, mostramos un fragmento del diálogo durante la sesión, los nombres de los estudiantes que participaron se mantienen anónimos y denotamos E1 como estudiante 1, E2 como un estudiante distinto, al profesor lo denotamos con P.

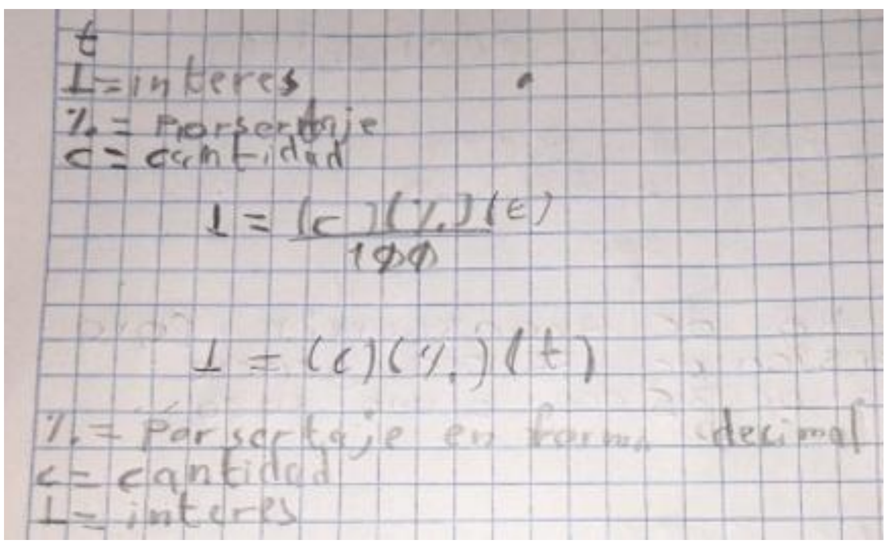
> E1: No, nunca he invertido.
>
> E2: Yo sí, en CETES
>
> P: ¿Qué beneficios obtienes?
>
> E2: Si invierto 1,000 pesos debo ganar como 120 pesos en un año o de a 10 pesos por mes, al menos eso entendí.
>
> E3: Se parece a las ganancias que obtienen los negocios que prestan dinero, te dicen sí, pero cuando me pagues me debes dar también los intereses.
>
> P: Dijeron una palabra clave, entonces ¿de qué forma se le conoce a esa cantidad que debes regresar cuando pides prestado o ese porcentaje que ganas si inviertes?
>
> E1: Intereses

La investigadora se situó específicamente en el interés que generan las inversiones para que así los equipos comenzaran el proceso de modelación de una función que les permitiera calcular el interés simple para cualquier capital que desearan invertir a distintas tasas de interés y tiempos.

Conforme los estudiantes razonaban y buscaban cómo representar el interés surgieron las variables que entran en juego en este modelo de interés simple: Capital, tasa de interés y tiempo. Sin embargo, los alumnos desconocían estos tecnicismos y nombraban al capital como dinero o cantidad y a la tasa de interés como porcentaje. Respecto al tiempo no hubo desacuerdos ya que la mayor parte de los estudiantes están acostumbrados a fórmulas con esta variable. En función de sus variables, al tiempo lo representaban con la variable t, mencionaban que para representar la tasa de interés debía existir una división por 100 y algunos la denotaron con x a esa tasa de interés y especificaron de manera separada que antes de sustituir su valor debía ser dividido por 100, esto con la finalidad de que la ecuación se viera más estética. Por otro lado, algunos la representaban como $\frac{\%}{100}$ y preguntaron a la investigadora acerca de otra forma de escribirla porque no estaban seguros si era correcto poner el símbolo % por sí solo dentro de una ecuación tal como se aprecia en la Figura 4.

Figura 4.

Resultados del equipo 1.

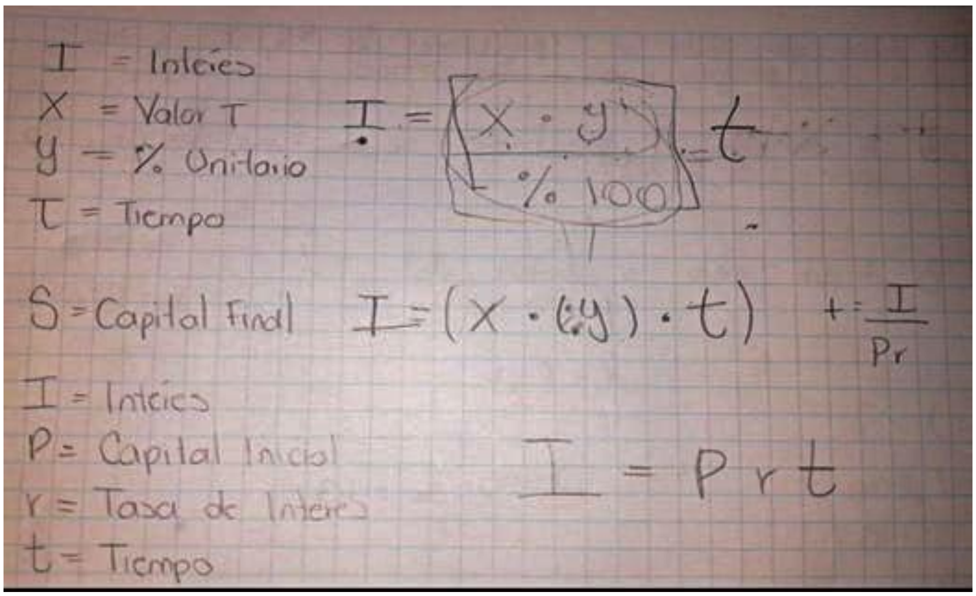


Los estudiantes mostraron paulatinamente las construcciones relacionadas con la función de interés, las cuales fueron surgiendo durante la discusión en equipos. En la discusión en grupo, la investigadora y los equipos formalizaron los términos con sus respectivos tecnicismos: capital inicial, tasa de interés y tiempo. Posteriormente los estudiantes continuaron trabajando en sus modelos, que en una nueva discusión en grupo fueron relacionados con el concepto de función en general.

El 100% de los estudiantes mostró una concepción Acción del concepto de función, es decir, lograron determinar una regla tal que al introducir un valor y evaluar en dicha regla les producía otro valor único. Para evidenciar esta estructura podemos observar la Figura 5, cómo coincidieron en llamar I al interés simple para después igualarlo a una expresión donde se multiplicaban variables que llamaron cantidad, valor o capital, el tiempo y la tasa de interés la cual fue representada como una incógnita dividida por 100.

Figura 5.

Resultados del equipo 2.

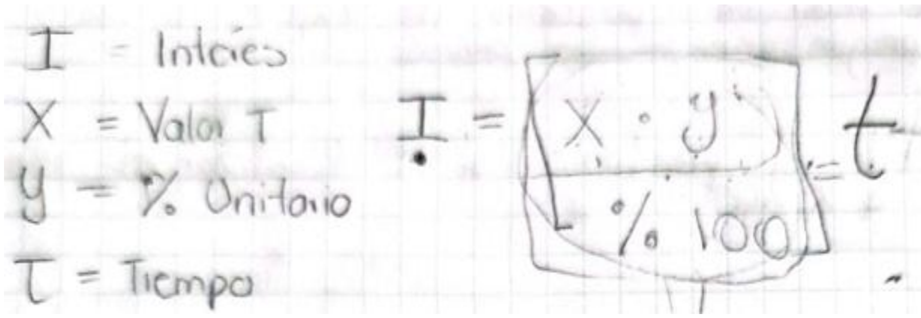


Al interiorizar estas Acciones, los estudiantes ven a la función como una transformación que toma cualquier elemento y lo relaciona con otro obtenido a raíz de la evaluación, es decir construyen el Proceso de función. Todos los estudiantes mostraron una buena construcción de esta manipulación de entradas y salidas sin asociarlas a cálculos, es decir, construyeron la estructura Proceso.

Por otra parte, el 80% de los estudiantes encapsularon el Proceso en un Objeto función de interés simple, a través de aplicar Acciones y otros Procesos que incluyeron operaciones aritméticas con funciones, las cuales se ven reflejadas en sus modelos propuestos y en la posibilidad de operar con la función interés simple cuando había necesidad de encontrar otras cantidades la función (Figura 6).

Figura 6.

Resultados del equipo 4.



El trabajo en la modelación sentó las bases para introducir el concepto de función de manera general y de manera particular en términos de la relación entre dominio y recorrido. Algunos estudiantes habían construido una noción de función previa al relacionarla con la idea de cuánto dinero ingreso y cuánto dinero obtengo después de haber pasado por una evaluación entendida como un mecanismo. La mayoría mostró evidencia de construcción de la concepción Proceso, de la función como relación entre dos conjuntos. No hubo evidencia en esta experiencia de la construcción Objeto de la función en general.

3.7. DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE DERIVADA

En la práctica se evidencia que los estudiantes la mayor parte de las veces desconocen la definición de derivada y sus distintas representaciones; no logran comprender problemas relacionados con la razón de cambio, y presentan dificultades cognitivas entre los Esquemas conceptuales asociados a la definición, a pesar de eso, resuelven ejercicios usando reglas y técnicas de derivación.

Asiala, et al. (1997), en un estudio sobre la comprensión grafica del Objeto derivada en un punto realizaron una descomposición genética donde sugieren que existen dos trayectorias relacionadas entre sí a partir de las cuales se construye el concepto de derivada: la gráfica y analítica.

Badillo (2003), en su tesis doctoral “La derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia”, expone una descomposición genética basándose en la propuesta elaborada por Asiala et al. (1997), donde incluye el objeto función derivada.

En la investigación tomaremos ambas descomposiciones genéticas como referencia ya que es de nuestro interés todos los aspectos relacionados con la definición de derivada.

Descomposición genética de derivada propuesta por Asiala et al. (1997):

Trayectoria gráfica y analítica de la derivada.

Requisitos previos de conocimiento.

A. Representaciones gráficas de objetos matemáticos.

- Representación gráfica de un punto,
- Representación gráfica de una recta que incluye el concepto de pendiente.

B. Coordinación de representaciones de puntos con una función.

- Interpretación gráfica de (x, y) cuando y está dada por la ecuación de $f(x)$.
- Interpretación gráfica de (x, y) cuando y está dada por la gráfica de $f(x)$.
- Superando la necesidad de tener una fórmula para la función

1a. La acción de conectar dos puntos sobre una curva definida por una función para formar una cuerda, es decir un trozo de la secante a la curva que pasa por esos dos puntos. Y la acción de calcular la pendiente de la recta secante que pasa por esos dos puntos.

1b. La acción de calcular la tasa de variación media entre un punto y otro punto próximo:

$$m = TVM = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2a. La interiorización de las Acciones 1a en un Proceso reflexionando sobre los resultados de su repetición a medida que los dos puntos considerados en la construcción de la secante se acercan más y más.

2b. La interiorización de las Acciones 1b en un Proceso calculando la tasa de variación media cuando b → a, es decir, cuando la diferencia entre estos puntos (a y b) se hace cada vez más pequeña, esto es, a medida que la longitud del intervalo se acerca a cero.

3a. Encapsulación del Proceso 2a en el Objeto “recta tangente” como resultado del límite de la posición de las secantes, y para producir el Objeto “pendiente” de la tangente a un punto sobre la gráfica de una función continua en ese punto.

3b. Encapsulación del Proceso 2b, de calcular las tasas de variación media cuando b → a en el Objeto “tasa de variación instantánea” con una variable respecto de la otra como el:

$$TVI = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

4a. Acciones de (a) conectar dos puntos diferentes pero cercanos en un gráfico, relacionar dos magnitudes covariantes por medio de un segmento de línea y calcular su pendiente o (b) usar dos puntos consecutivos de una tabla que relaciona dos magnitudes covariantes para calcular la tasa de variación promedio.

4b. Interiorizar las Acciones descritas en la parte 4a en Procesos para obtener una tasa de variación media como una aproximación razonable de la tasa de cambio instantánea en un punto dado.

4c. Encapsulación de los Procesos de la parte 4b en Objetos que son equivalentes a la tasa de cambio instantánea en un punto, en un contexto numérico o gráfico $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

5. Encapsulación de los Procesos 2a y 2b para producir la definición de la derivada de una función que es continua en un punto, como el límite del cociente de diferencias en ese punto.

$$TVI = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

6. Interiorizar las Acciones de calcular la derivada en un punto en un **Proceso** para calcular la derivada en cualquier punto de una función.

7a. Encapsulación del Proceso descrito en la parte 6 en el Objeto derivada como una función.

7b. Acciones sobre la derivada como Objeto para encontrar la derivada de funciones que resultan de operaciones con otras funciones.

7c. Interiorización de Acciones del inciso 7b en Procesos involucrados en el cálculo de la derivada de funciones obtenidas de operaciones, es decir, obtención de las reglas de derivadas.

7d. Encapsulación de los Procesos en 7c en Objetos relacionados con reglas derivadas.

Como se mencionó anteriormente, la descomposición genética es un modelo de construcciones necesarias para aprender objetos matemáticos. No se supone que las construcciones descritas sean construidas de una manera lineal específica por los estudiantes. Los números incluidos en la descomposición genética de Badillo están destinados a facilitar la lectura y no necesariamente para describir pasos específicos en el aprendizaje de la derivada.

3.7.1. Diseño de la actividad de Modelación

El problema de modelación fue diseñado con el propósito de introducir a los estudiantes al concepto de la derivada aplicado a una situación económica que sucede a menudo en el mercado, una oferta o deflación en el precio de un bien o servicio. Con ese objetivo se pretendió abrir una discusión grupal acerca de qué entienden por Economía y derivado a este concepto surgen las definiciones de la Oferta y la Demanda, invitando a los alumnos a dar ejemplos al respecto.

El problema se centró en el cálculo de la Elasticidad de la Demanda, concepto económico que requiere el conocimiento acerca de la derivada como razón de cambio, el cual tratamos de introducir a la par del problema.

> La Elasticidad va uno o dos pasos más allá de identificar la tarifa vigente para tu oferta, es un enfoque más estratégico para la fijación de precios. Es un elemento utilizado para identificar cómo un cambio de precio afecta la oferta o demanda de un producto. Si las personas compran un producto o servicio aun cuando sube de precio, este se denomina como inelástico; cuando la demanda sufre debido a las fluctuaciones de precios, entonces es elástico.

El cálculo de la Elasticidad de la Demanda dentro de nuestro problema de modelación, no solo nos permite introducir a los estudiantes al concepto de derivada, si no también, motivar a los alumnos y demostrar una aplicación del cálculo diferencial en el área económica en una situación que sucede a menudo en el mercado con la bajada y subida de precios de los bienes.

El problema fue construido de manera abierta, es decir, no se otorgó la función que denota el problema, no se ofrecen datos o valores; esto con la finalidad de que los alumnos decidieran, en equipos lo que deseaban modelar e invitarlos a buscar variables y características de un posible modelo.

3.7.2. El problema de Modelación

> Supongamos que tienen una empresa de *CELULARES* que produce y vende en promedio cierto número de artículos al mes a un determinado precio cada uno. ¿Qué pasaría si la empresa decide reducir el precio?
>
> Supongamos que la relación entre la cantidad de artículos vendidos y el precio sigue la ley de la oferta y la demanda: ¿Qué función describirá este problema en función de la demanda del mercado? Denotaremos al precio como P y a Q como la cantidad de artículos vendidos en el mercado.
>
> ¿Cómo afecta a tu estrategia comercial y de ventas?
>
> Calcula la elasticidad de la demanda cuando tu empresa reduce el precio de sus artículos (del precio inicial determinado al precio al que se decidió reducir).

Al ser un problema económico los estudiantes citaron problemas de mercado, bolsa de valores, incremento y disminución de precios de un producto a lo largo del tiempo, dichas ideas se discutieron de manera grupal junto con el maestro y se eligió la más interesante para así aportar más elementos a la introducción de la derivada.

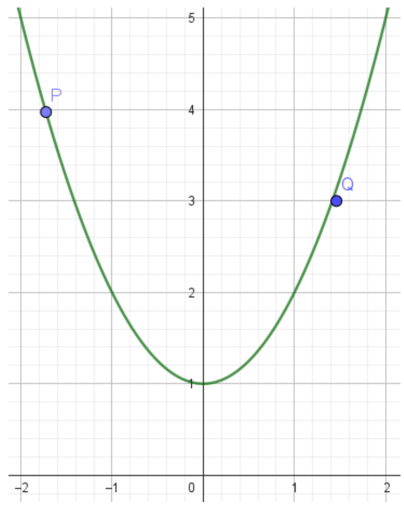
3.7.3 Diseño de actividades con la descomposición genética.

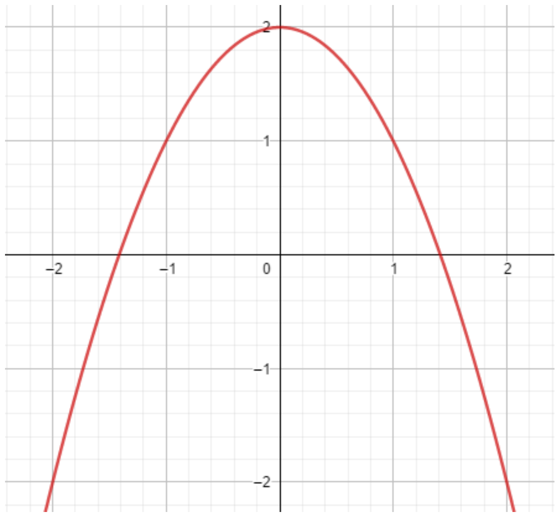
El problema de modelación se complementó con una serie de actividades que fueron diseñadas en base a la Descomposición Genética antes descrita, con el propósito de apoyar el uso del modelo y la construcción del concepto de la derivada para funciones de una variable en los estudiantes.

A continuación, en la Tabla 2, se presenta el diseño de actividades de la mano de la descomposición genética con su descripción de la estructura mental que se evalúa.

Tabla 2.

Actividades y la estructura mental que evalúan.

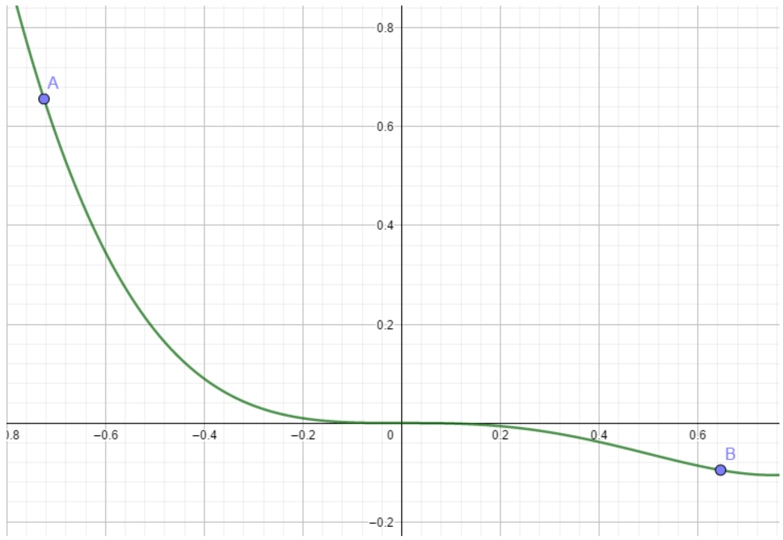
Actividad	Estructura mental que evalúa
Traza la cuerda que cruza la gráfica de la función cuadrática $y = x^2 + 1$ en los puntos $P(-2,5)$ y $Q(1,2)$ y calcula su pendiente.  Acerca el punto Q a P lo más próximo posible sin tocarlo, traza las nuevas cuerdas y calcula sus pendientes. ¿Qué relación observas entre las cuerdas con respecto a la curva de la función? ¿Qué pasa con el valor de las pendientes conforme me acerco al punto fijado?	1a. La acción de conectar dos puntos sobre una curva definida por una función para formar una cuerda, es decir un trozo de la secante a la curva que pasa por esos dos puntos. Y la acción de calcular la pendiente de la recta secante que pasa por esos dos puntos.
Dada la función $f(u) = 2 - u^2$, determina la cuerda que se forma al conectar los puntos $A(-2-,2)$ y $B(1,1)$. Supón que uno de estos puntos se acerca al otro (A se acerca a B) mientras	1b. La acción de calcular la tasa de variación media entre un punto y otro punto próximo: $$m = TVM = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

<table>
<tr>
<td>recorre la función; al hacerlo se forman nuevas parejas de puntos y sus respectivas cuerdas.


Calcula las pendientes de cada cuerda que traces conforme acerques un punto a otro y responde las siguientes preguntas: ¿Cómo cambian los valores de la pendiente conforme te acercas de un punto a otro?

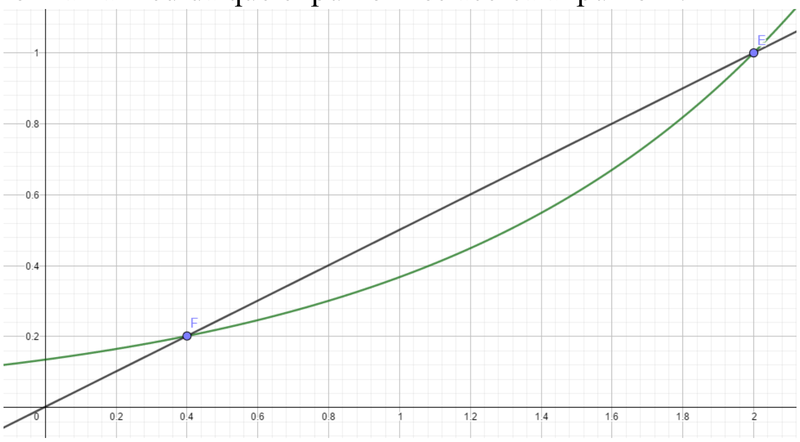
¿Qué pasa con la cuerda en relación con la curva de la función?</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Reflexionar sobre los resultados de su repetición a medida que los dos puntos considerados en la construcción de la secante (cuerda) se acercan más y más.

Traza la cuerda que une los puntos A y B de la siguiente función, deja fijo uno de los puntos y acerca uno a otro sobre la gráfica lo más cercano posible y traza las cuerdas que resulten.</td>
<td>2a. Interiorización de 1a en un Proceso.</td>
</tr>
</table>



¿Qué pasa con las cuerdas que se forman cuando uno de los puntos se aproxima cada vez más al otro?

Sea $f(r) = r^2$, grafica la función en el intervalo $[-3,3]$, elige dos puntos de la gráfica y etiquétalos de la siguiente manera: $(r_0, f(r_0))$ y $(r_1, f(r_1))$. Únelos mediante una cuerda y calcula la TMV entre estos puntos. Si dejamos que r_1 tienda a r_0 entonces el punto $(r_0, f(r_0))$ tenderá a $(r_1, f(r_1))$ a lo largo de la gráfica de f. ¿A qué valor tiende o se acerca la TVM?	2b. La interiorización de las Acciones 1b en un Proceso calculando la tasa de variación media cuando b → a, es decir, cuando la diferencia entre estos puntos (a y b) se hace cada vez más pequeña, esto es, a medida que la longitud del intervalo se acerca a cero.

<table>
<tr>
<td>La siguiente gráfica de una función te muestra 2 puntos unidos por una cuerda, calcula las TVM y dibuja las cuerdas que se forman a medida que el punto E se acerca al punto F.


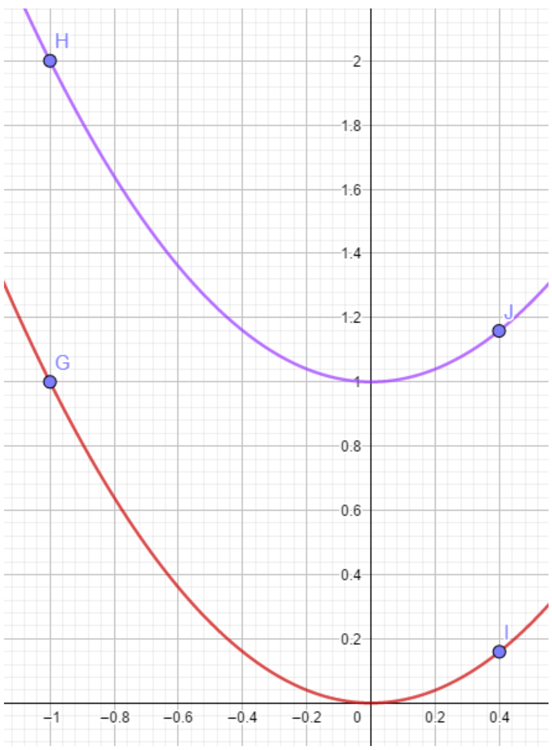
¿Qué comportamiento notas en las cuerdas cuando aproximas un punto a otro con respecto a la gráfica de la función?

Si haces la aproximación cada vez más cercana al punto F ¿qué ocurre con las cuerdas?

¿Como definirías la tasa de variación media cuando un punto está cerquísima del punto que no se mueve?</td>
<td>3a. Encapsulación del Proceso 2a en el Objeto “recta tangente” como resultado del límite de la posición de las secantes, y para producir el Objeto “pendiente” de la tangente a un punto sobre la gráfica de una función continua en ese punto.</td>
</tr>
<tr>
<td>Dibuja una gráfica y traza una cuerda que unos dos puntos cualesquiera. Si tomamos puntos cada vez más y más cercanos a un punto de interés ¿cómo lo podemos expresar matemáticamente? ¿Cómo representarías la TVM en esta situación?</td>
<td>3b. Encapsulación del proceso 2b.</td>
</tr>
<tr>
<td>Un globo de helio asciende de manera vertical, después de n horas su distancia d al suelo medida en kilómetros, está determinada por: $d(n) = 2n^2 - n$

Tomando intervalos de tiempo cada vez más pequeños y que inicien en un tiempo de 0.75 horas, calcula las TVM que resultan.</td>
<td>4a. Acciones de (a) conectar dos puntos diferentes pero cercanos en un gráfico, relacionar dos magnitudes covariantes por medio de un segmento de línea y calcular su pendiente o (b) usar dos puntos</td>
</tr>
</table>

¿Qué puedes argumentar acerca de estos valores cuando se hacen cada vez más pequeños y cercanos a 0.75?	consecutivos de una tabla que relaciona dos magnitudes covariantes para calcular la tasa de variación promedio.
Sea $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ la ecuación que representa los beneficios de una compañía (en millones de pesos) y x representa el año desde enero de 2003. a) Calcula el beneficio promedio que ganó la compañía durante el periodo enero 2005 a enero 2007 (TVM). b) Calcula los beneficios de la compañía a principios del año 2005 (TVI).	4b. Interiorizar las Acciones descritas en la parte 4a en Procesos para obtener una tasa de cambio promedio como una aproximación razonable de la tasa de cambio instantánea en un punto dado.
Calcula la tasa de variación instantánea de la siguiente función $f(r) = 3r$ en un punto de tu elección con un intervalo pequeño. Elige otro punto y realiza el mismo cálculo. ¿Qué puedes decir sobre los valores que resultan? ¿Qué relación guardan los valores calculados con la función original? Escribe una ecuación o regla que te permita calcular la TVI en cualquier punto.	4c. Encapsulación de los Procesos de la parte 4b en Objetos.
De acuerdo con la definición, calcula la TVI de la función $f(x) = 5x^2$ ¿Qué notas al respecto entre la derivada y la función original? Ahora, siendo $g(x) = 6x^2$ calcula la TVI. ¿Qué puedes mencionar si comparas los resultados que obtuviste al calcular la TVI de f con la función original dada? ¿y en g? ¿Existirá una manera más rápida de calcular las TVI de ambas funciones?	5. Encapsulación de los Procesos 2a y 2b. Producir la definición de la derivada de una función que es continua en un punto, como el límite del cociente de diferencias en ese punto.$TVI = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

Mediante la definición, calcular la TMV de la siguiente función y evalúa en los puntos $x = 2.1, x = 5.4$ y $x = 6.9$. $$f(x) = -3x + 4x^2$$	6. Interiorizar las Acciones de calcular la derivada en un punto en un **Proceso** para calcular la derivada en cualquier punto de una función.
La curva en color azul corresponde a la función $f(w) = w^2 + 1$, la curva en color rojo representa la función $f(z) = z^2$ ¿Qué pasa con la TVM de cada función si la evaluamos en los puntos indicados en cada una respectivamente? ¿Qué puedes concluir sobre estos cálculos?  Mediante la definición calcula la TVI para cada una de las funciones. ¿Resultan semejantes? ¿Crees que exista una forma más fácil de calcular las TVI?	7a. Encapsulación del Proceso descrito en la parte 6 en el Objeto derivado como una función.
*Sea $u(x) = 6x^2 - 3x + 5x^3$ y $v(x) = 8x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 8x$.	7b. Acciones sobre la derivada como Objeto para encontrar la derivada de funciones que

Realiza la suma de estas funciones $(u+v)$ y calcula su derivada. ¿Qué pasa si calculas la derivada y luego realizas la suma $(u'+v')$? *Sea $t(x)=-9x^5+16x$, $w(x)=15x^5-48x+9$ y $z(x)=-9x^4+8x^5-7$ Realiza la resta de estas funciones $(t-w-z)$ y calcula su derivada. ¿Qué pasa si calculas la derivada de cada una y posteriormente realizas la resta $(t'-w'-z')$? *Sea $g(x)=4x^5$ y $h(x)=2x+9$. Responde lo siguiente: a) ¿Qué pasa si multiplicas estas funciones y luego calculas su derivada? b) ¿Qué resulta de calcular la derivada y luego realizar la multiplicación? c) ¿Qué procedimiento te resulto más fácil realizar y que puedes concluir al respecto?	resultan de operaciones con otras funciones.
A continuación, presentamos 7 fórmulas directas con sus respectivos ejemplos para determinar la derivada general de funciones algebraicas. Sea $c=constante$, $n=exponente$ y $u,v=polinomios$ 1. Si $f(x)=c$ entonces $f'(x)=0$ Ejemplo: $f(x)=4 \rightarrow f'(x)=0$ 2. Si $f(x)=cx$ entonces $f'(x)=c$ Ejemplo: $f(x)=-\frac{1}{2}x \rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}$ 3. Si $f(x)=cx^n$ entonces $f'(x)=(c)(n)x^{n-1}$	7c. Interiorización de Acciones del inciso 7b en Procesos involucrados en el cálculo de la derivada de funciones obtenidas de operaciones, es decir, obtención de las reglas de derivadas.

Ejemplo: $f(x) = -5x^{-8}$ entonces $f'^{(x)} = (-5)(-8)x^{-8-1} = 40x^{-9}$

4. Si $f(x) = u$ entonces $f'(x) = u'$ (derivar cada término)

   Ejemplo: $f(x) = 9x^7 - \frac{4}{6}x^3 - 2x + 1 \rightarrow f'^{(x)} = 63x^6 - \frac{12}{6}x^2 - 2 = 63x^6 - 2x^2 - 2$

5. Si $f(x) = (u)(v)$ entonces $f'^{(x)} = u'v + uv'$

   Ejemplo: $f(x) = (6x^4 + 1)(2x^8)$

   $$u = 6x^4 + 1 \qquad v = 2x^8$$

   $$u' = 24x^3 \qquad v' = 16x^7$$

   $$f'(x) = (24x^3)(2x^8) + (6x^4 + 1)(16x^7)$$

   Realizando los productos y reduciendo términos semejantes obtenemos que:

   $$f'(x) = 144x^{11} + 16x^7$$

6. Si $f(x) = \frac{u}{v}$ entonces $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

   Ejemplo: $f(x) = \frac{4x}{x^3 - 1}$

   $$u = 4x \qquad v = x^3 - 1$$

   $$u' = 4 \qquad v' = 3x^2$$

$$f'(x) = \frac{(4)(x^3 - 1) - (4x)(3x^2)}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-8x^3 - 4}{(x^3 - 1)^2}$$

7. Si $f(x) = c(u)^n$ entonces $f'(x) = (c)(n)(u)^{n-1}(u')$

   Ejemplo:

   $$f(x) = 2(3x - 8)^3 \rightarrow f'(x)$$

   $$= (2)(3)(3x - 8)^{3-1}(3)$$

   $$f'(x) = 18(3x - 8)^2$$

Halla utilizando la definición, la derivada de las siguientes funciones:	7d. Encapsulación de los Procesos en 7c en Objetos

1. $f(x) = 4x^2 + 17x - 24$ 2. $f(x) = \frac{24}{8x-2}$ 3. $f(x) = (-8x^3 + 2x)(x^4 - 3)$	relacionados con reglas derivadas.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados obtenidos durante la implementación de las actividades diseñadas con la Descomposición Genética y el problema de modelación aplicado a un contexto económico. Primero se detallan fragmentos de las discusiones que surgieron de manera grupal acerca del problema de modelación. Los estudiantes llevaron a cabo investigaciones sobre la marca del artículo elegido, el precio del bien en el mercado y la demanda, así como el establecer montos de rebaja en el precio del bien.

La investigadora los invitó a iniciar con la búsqueda de la función que pudiera describir el comportamiento del precio del bien en el mercado y así comenzar con la implementación de las actividades diseñadas para conducir a los alumnos al concepto de derivada trabajando en equipo y discutiendo en grupo con el profesor. Posteriormente con el conocimiento adquirido durante la implementación de las actividades regresaron a resolver la parte restante del problema económico elegido ya con las herramientas necesarias para dar posibles soluciones y realizar los cálculos necesarios para obtener resultados.

4.1. INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA ECONÓMICO

El investigador les entregó el problema impreso a los integrantes de cada equipo, los estudiantes lo leyeron y comenzaron a surgir preguntas como: ¿Qué es la Elasticidad de la Demanda? ¿Cuál es la Ley de la Oferta y la Demanda? Para responder estas preguntas la investigadora decidió situarlos en un contexto real para entender poco a poco los conceptos:

> P: supongan que están interesados en comprar un artículo que les gusta mucho, pero en este momento tiene un precio muy elevado, en unos días se acerca un evento comercial en todo el país y deciden esperar a esa fecha para comprarlo y al llegar a la fecha el producto se agotó porque otras personas también esperaban a que bajara de precio para adquirirlo y no alcanzaste a obtener uno. Podemos decir que la demanda es la cantidad de algún bien o servicio que los consumidores están dispuestos a comprar a un determinado precio. La oferta es la cantidad de bienes y servicios que se llevan al mercado a un cierto precio.

El investigador los invitó a investigar el precio real de un bien, en este caso un celular puesto en el mercado durante el presente año y buscar la cantidad demandada de dicho bien para así poder comenzar a recabar datos para su posterior uso en los cálculos.

E1: El Samsung S24 Ultra

P: ¿qué valor tiene?

E2: $51, 399.00

P: ¿Eso es mucho dinero para un celular no creen?

E2: Si, el precio está super alto.

P: bien, ahora que sabemos eso, vamos a investigar la demanda, es decir, que tanto se está vendiendo este celular en el mercado.

E1: No encontramos números, que es confidencial, eso no lo comparten.

P: ¿Por qué creen?

E2: Políticas de privacidad tal vez, o no les conviene.

P: Entonces ¿cómo le haremos para poder tener un número aproximado, una cantidad?

E3: se me ocurre que investiguemos el modelo anterior a este o uno que se haya vendido muy bien, uno popular y ver las cifras, esas si vienen, ya las encontré.

E1: Tomamos en cuenta que sean de la misma marca y ver cómo les fue con el anterior para predecir el de este nuevo y muy caro.

P: Me parece una idea excelente.

Seguido a esto respondieron a la pregunta: “¿Qué pasaría si la empresa decide reducir el precio?” Para responderla, los integrantes de cada equipo se pusieron de acuerdo para bajar de precio el bien, algunos en un 15%, otros hasta el 25% menos de su precio real y se tomaron unos minutos para reflexionar su respuesta y comentaban entre ellos lo que podría suceder.

Algunas respuestas fueron:

- La demanda aumentaría, aunque las ganancias si disminuyen, aunque tal vez se recuperan por la demanda.
- Esta sobre el promedio de vendidas, así que reducirían las ganancias.
- Dependiendo de la rebaja del producto se elevaría la demanda.
- Aumentarían las ventas con un margen de ganancia mayor.
- Ya no generaría los mismos ingresos, pero se venderían más entonces ahí lo recuperamos.

La segunda parte del problema los incetivó a investigar la Ley de la Oferta y la Demanda para tener en mente cómo funciona el mercado y ponerlo en contexto a su problema. Después, estarían listos para iniciar con la modelación de la función que describirá el comportamiento de la demanda de su producto en el mercado gracias a la experiencia previa obtenida con la modelación de la función para el Interés Simple.

A continuación, en la Figura 7 y Figura 8 se puede observar las respuestas de dos equipos diferentes. En ambas figuras los estudiantes plasmaron el precio actual en el mercado del celular que eligieron y lo que investigaron de la demanda de este (cantidad de celulares vendidos de esa marca), esta investigación se dio debido a que el problema era abierto, tuvieron que recurrir al uso del internet para investigar datos reales sobre el bien elegido. Además, se muestra la reducción de precio del artículo impuesto por ellos mismos.

Figura 7.

Investigaciones y respuestas del equipo 5.

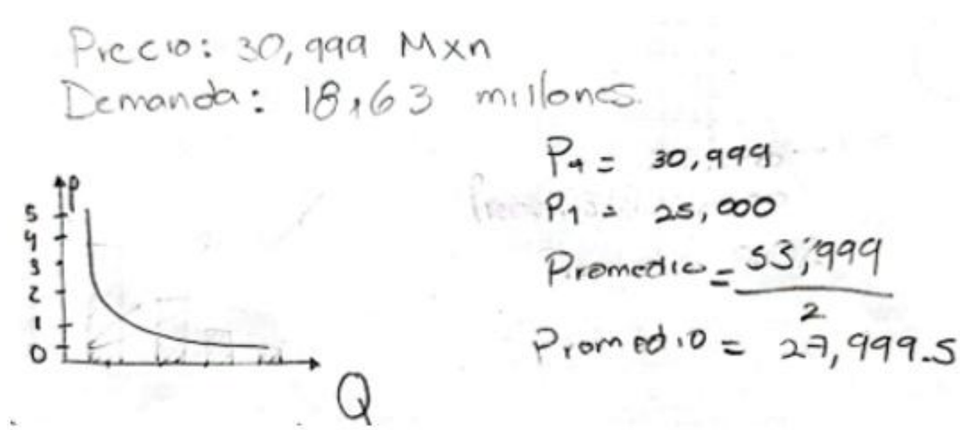
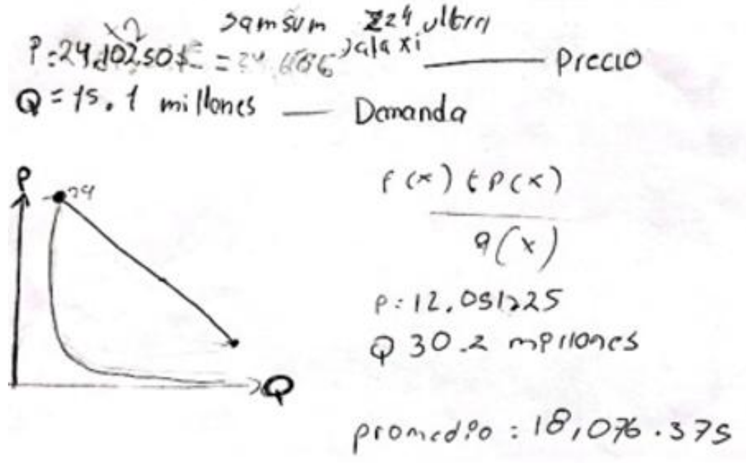


Figura 8.

Investigaciones y respuestas del equipo 4.



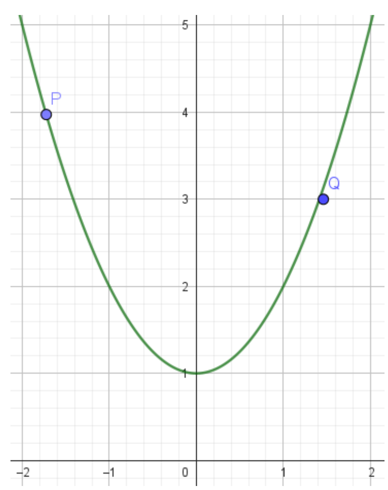
4.2. IMPLEMENTACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

4.2.1. Actividad 1

Traza la cuerda que cruza la gráfica de la función cuadrática $y = x^2 + 1$ (Figura 9) en los puntos $P(-2,5)$ y $Q(1,2)$ y calcula su pendiente.

Figura 9.

Gráfica de una función.



Acerca el punto Q a P lo más próximo posible sin tocarlo, traza las nuevas cuerdas y calcula sus pendientes. ¿Qué relación observas entre las cuerdas con respecto a la curva de la función? ¿Qué pasa con el valor de las pendientes conforme me acerco al punto fijado?

De la **¡Error! La autoreferencia al marcador no es válida.** y Figura 11 podemos resaltar que los equipos fijaron el punto P y vemos como al hacer los cálculos las pendientes que se forman al trazar las rectas de P a Q mientras acercaban un punto a otro, los valores obtenidos iban rondando al número 4. Durante la discusión con el investigador mencionaban un tope o límite, argumentando que conforme hacían más cercano el punto al otro punto fijado, el valor de las pendientes entre las rectas que unen esos puntos estaba más cercano al 4.

Figura 10.

Cálculos realizados por el equipo 6.

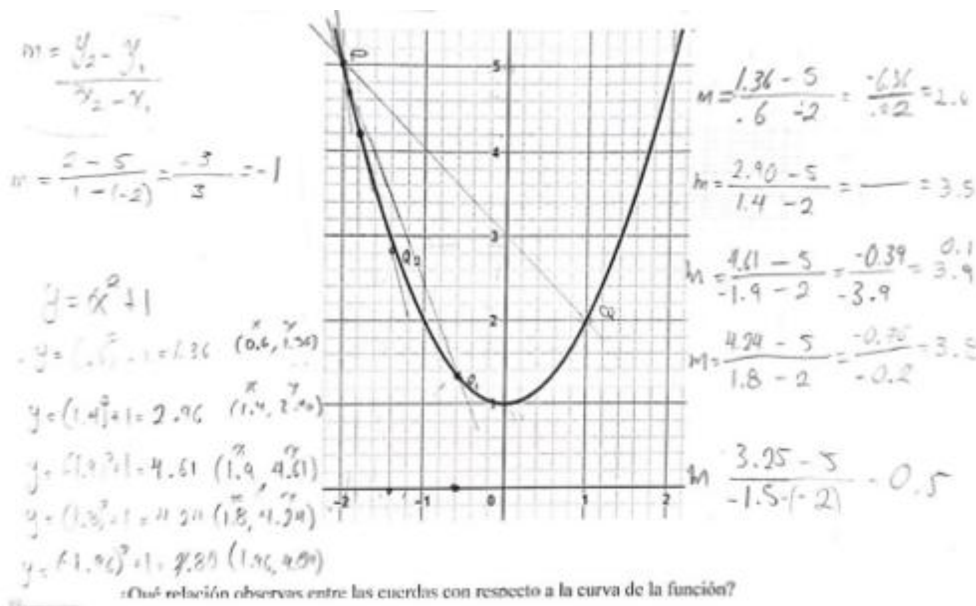
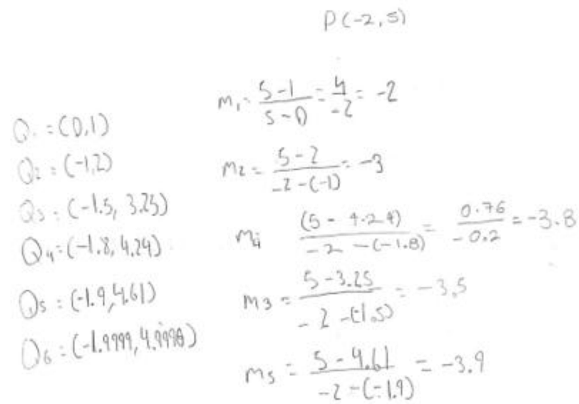


Figura 11.

Cálculos realizados por el equipo 2.



Respuestas de los equipos a la pregunta ¿Qué relación observas entre las cuerdas con respecto a la curva de la función?:

- Al ver que los puntos se van acercando a P se puede notar que las pendientes varían entre sí.
- Distancia entre puntos, las cuerdas van hacia un punto, divide la parábola.
- Cada vez se acerca más al punto P, aumenta el valor de la pendiente mientras más se acerca.
- Que siempre interceden puntos con la función, pegándose cada vez.
- Empieza de una manera ascendente y se va acercando, primero desciende, pero después asciende.
- Que las cuerdas van ascendiendo conforme el valor va de negativo a positivo.

Respuestas de los equipos a la pregunta ¿Qué pasa con el valor de las pendientes conforme me acerco al punto fijado?

- Va incrementando, pues va acercándose a un límite “-4” Al hacer que x va acercándose al límite, el valor que sea, mientras no toque, el límite va a tirar continuamente al -4, el cual es el límite, pero sin tocarlo.
- Van descendiendo, de negativo a positivo.
- El valor decrece. La recta se pega más a la función.
- Entre más cerca disminuye la pendiente, va disminuyendo hasta llegar a su límite.
- La cantidad va disminuyendo.

- Van disminuyendo. Llega a un límite de -4.

De las respuestas y los cálculos realizados por los equipos identificamos que el 100% de los estudiantes utilizaron las Acciones de desarrollar el procedimiento memorizado de conectar dos puntos sobre la gráfica de la función dada y a su vez calcular la pendiente de esa recta.

Además, observaron la relación entre las cuerdas con respecto a la curva de la función, el comportamiento de las secantes cada que el punto Q se acerca más al punto P. La mayoría de las respuestas a las preguntas coinciden con mencionar una disminución, es decir, una disminución en el valor de la pendiente cuando los puntos se van acercando cada vez más, pero sin sobrepasar un cierto valor.

Tal parece que los estudiantes habían construido previamente el concepto de "pendiente" esto se refleja al realizar el procedimiento in dificultades y eso los condujo a respuestas acertadas en los cálculos Los alumnos mostraron la construcción mediante Acciones de pendiente. Este paso junto con el análisis del comportamiento de las cuerdas es indispensable para la construcción del conocimiento Tasa de Variación Media.

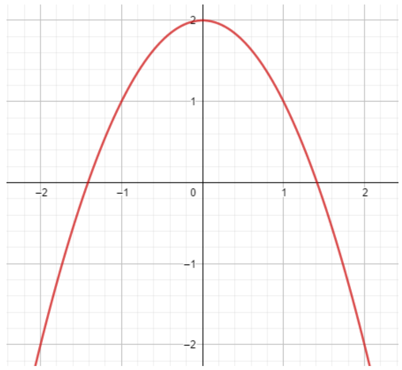
4.2.2. Actividad 2

Dada la función $f(u) = 2 - u^2$ (

Figura **12**), determina la cuerda que se forma al conectar los puntos $A(-2 - ,2)$ y $B(1,1)$. Supón que uno de estos puntos se acerca al otro (A se acerca a B) mientras recorre la función; al hacerlo se forman nuevas parejas de puntos y sus respectivas cuerdas.

Figura 12.

Gráfica de una función.



Calcula las pendientes de cada cuerda que traces conforme acerques un punto a otro y responde las siguientes preguntas: ¿Cómo cambian los valores de la pendiente conforme te acercas de un punto a otro? ¿Qué pasa con la cuerda en relación con la curva de la función?

Durante el desarrollo de esta actividad los estudiantes hablaban de un concepto importante en el aprendizaje de la derivada: el límite.

> P: Jóvenes, que tal, ¿Qué les pareció el ejercicio de la clase pasada?
>
> E1: Estuvo bien, empiezo a relacionarlo con límites.
>
> E2: si, sólo que nunca había entendido qué significa hasta ahora que realizamos la actividad, nos acercamos a un punto sin nunca tocarlo y las pendientes empiezan a quedar en el mismo número y ese es el límite.

De las Figura 13Figura 14 podemos resaltar que los equipos no tenían problemas en ejecutar las operaciones correspondientes a los cálculos de la pendiente entre un punto y otro, demostrando de nuevo la construcción del concepto de pendiente como una Acción. Es importante mencionar que los alumnos pidieron a la investigadora que en este ejercicio se pusiera todo el grupo de acuerdo en cuáles puntos elegir para después comparar respuestas y ver todos lo que sucedía con las pendientes.

Figura 13.

Cálculos realizados por el equipo 5.

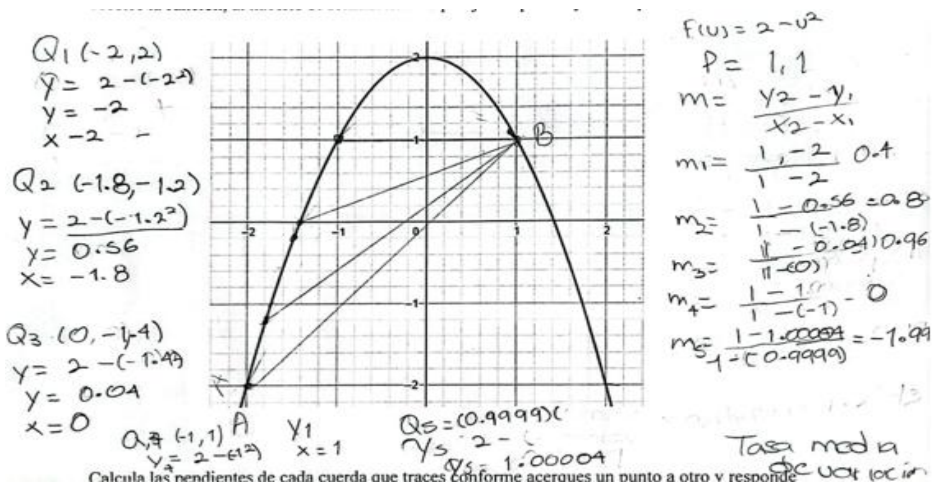
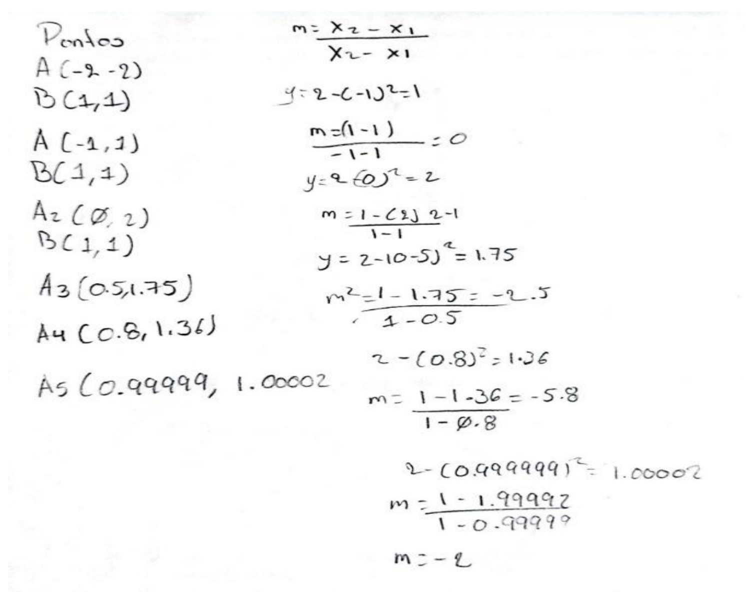


Figura 14.

Cálculos realizados por el equipo 6.



Respuestas de los equipos a la pregunta ¿Cómo cambian los valores de la pendiente conforme te acercas de un punto a otro?

- Los valores cada vez van disminuyendo al igual que las rectas, pero sin tocar a la función, siendo el primer valor como resultado 2.2 y el último dando como resultado 0.6.
- Van disminuyendo los valores.
- Disminuyen los valores.
- Va disminuyendo hasta llegar a su límite que es -2.

- Se van reduciendo conforme se acerca al punto B.
- Se van acercando al límite "van decreciendo"

De estas respuestas podemos concluir que los equipos realizaban la Acción de calcular la tasa de variación media entre un punto y otro punto próximo mediante la fórmula memorizada de la pendiente de la recta tangente, como podemos ver en sus proyecciones no saltan pasos, escriben siempre la fórmula de la pendiente, sustituyen valores y los indican; cabe resaltar que en sus aprendizajes pasados sabían que esa fórmula era de la pendiente, no asociaban la variación y el concepto de Tasa de Variación Media con ella.

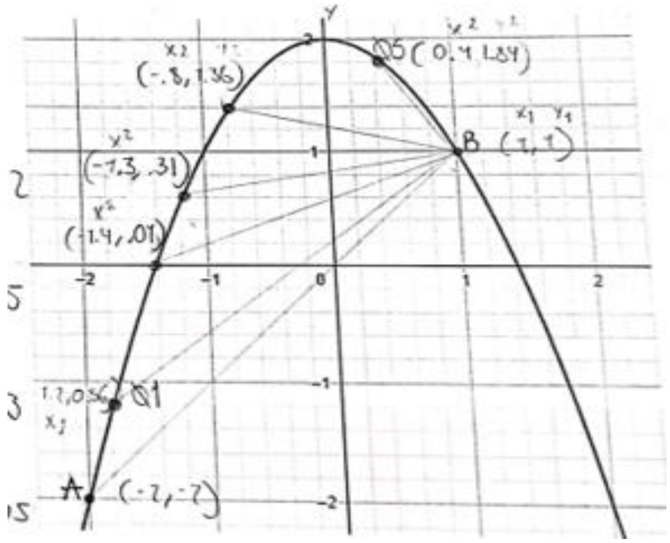
Respuestas de los equipos a la pregunta ¿Qué pasa con la cuerda en relación con la curva de la función?

- La cuerda se va convirtiendo en una recta tangente.
- Va cambiando de positivo a negativo.
- Se convierte en una recta tangente.
- Disminuyen ambas exceptuando el punto A que vuelve a disminuir.
- Va disminuyendo su longitud y su valor.
- Se van acortando las cuerdas conforme se acerca.

De acuerdo con la Figura 15 y las respuestas vemos que el 33% de los estudiantes referían que al acercar un punto a otro e ir trazando las cuerdas, estas se convertirían en la recta tangente a un punto, en palabras de ellos: cuando ese punto estuviera muy cerca del otro podría verse como un punto único y la cuerda sería la recta tangente. Podría considerarse que estos estudiantes construyeron el concepto de pendiente de una cuerda como un Proceso. Por otra parte, el 66% de los estudiantes se centró en sólo observar sus trazos de las rectas que iban trazando, veían su tamaño respecto a lo que ellos dibujaban, al representar las rectas solo dentro de la curva de la función suponían una disminución esto debido a que no las extendían y eso no les permitió suponer otras conclusiones. Al final estos alumnos que tuvieron problemas con las rectas tangentes podían hacer las Acciones, pero ponen en evidencia que no las interiorizaron en un Proceso.

Figura 15.

Cálculos realizados por el equipo 3.



Las preguntas planteadas en este ejercicio exigían la interiorización de las Acciones realizadas al reflexionar sobre los resultados a medida que las repetían al considerar los dos puntos para la construcción de las secantes y notar como se acercan más y más. Consideramos que algunos estudiantes al intentar dar respuesta a las preguntas mostraron problemas en el análisis gráfico de las rectas secantes y la relación con el valor de sus pendientes.

Adjuntamos un segmento de conversación con una idea interesante que surgió durante la discusión entre alumnos y profesor:

E1: el ejercicio tiene similitud con el anterior, aunque es curioso por que aquel era una función diferente y la x tendía a un valor diferente. Aquel dio -4 y este -2.

E2: Siento como si le estuviéramos metiendo un valor.

P: ¿qué quieres decir?

E2: Si, o sea, hace rato dio -4 y la x valía -2 como si hiciéramos 2 por -2. Y ahorita dio -2 como si hiciéramos 2 por -1 aunque nuestra x es 1 positivo pero ambas funciones llevan un cuadrado en la x.

Las aportaciones de los estudiantes durante esta discusión grupal resultaron interesantes, se pudo notar la necesidad de buscar patrones o crear reglas para llegar a un resultado. Al ver similitud entre las actividades iniciaron su búsqueda de operaciones matemáticas que los llevaran directo al resultado para así saltarse los pasos de calcular las Tasas de Variación Media mientras acercaban un punto a otro.

4.2.3. Actividad 3

Sea $f(r) = r^2$, grafica la función en el intervalo $[-3,3]$, elige dos puntos de la gráfica y etiquétalos de la siguiente manera: $(r_0, f(r_0))$ y $(r_1, f(r_1))$. Únelos mediante una cuerda y calcula la Tasa de Variación Media entre estos puntos. Si dejamos que r_1 tienda a r_0 entonces el punto $(r_0, f(r_0))$ tenderá a $(r_1, f(r_1))$ a lo largo de la gráfica de f. ¿A qué valor tiende o se acerca la Tasa de Variación Media?

Antes de iniciar con esta Actividad, los alumnos y la investigadora tuvieron una discusión sobre las actividades previas realizadas, la investigadora les otorgó la definición de Tasa de Variación Media y les comentó que se calcula a partir de la pendiente de la línea recta que une los extremos del intervalo en la gráfica de una función. Los alumnos la relacionaron de manera clara con las actividades antes realizadas.

En la Figura 16, observamos que los alumnos del equipo 4 dibujan el punto $(1,1)$ y el punto $(-2,4)$, para después fijar el primero y acercarlo cada vez más al otro. Comienzan obteniendo el valor de las pendientes dándoles como resultados el valor de 1, posterior 1.5 y 1.999. En la Figura 17 los alumnos del equipo 5 dibujan los puntos $(-3,9)$ y $(1,1)$, fijan el primero y el segundo lo van acercando, y al calcular las respectivas pendientes llegan a topar con el -2 como ellos mismos mencionan al responder hacia donde tiende o se acerca la Tasa de Variación Media.

Figura 16.

Cálculos realizados por el equipo 4.

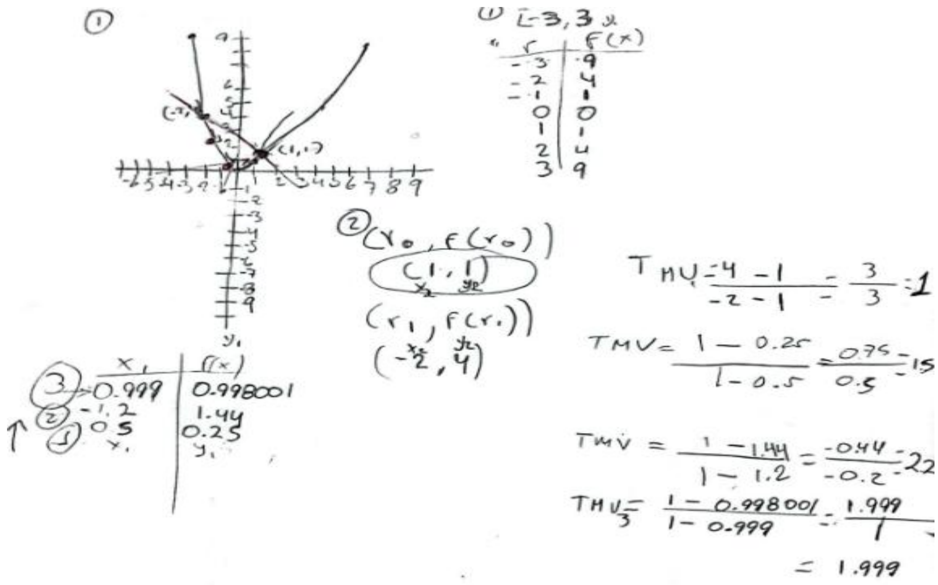
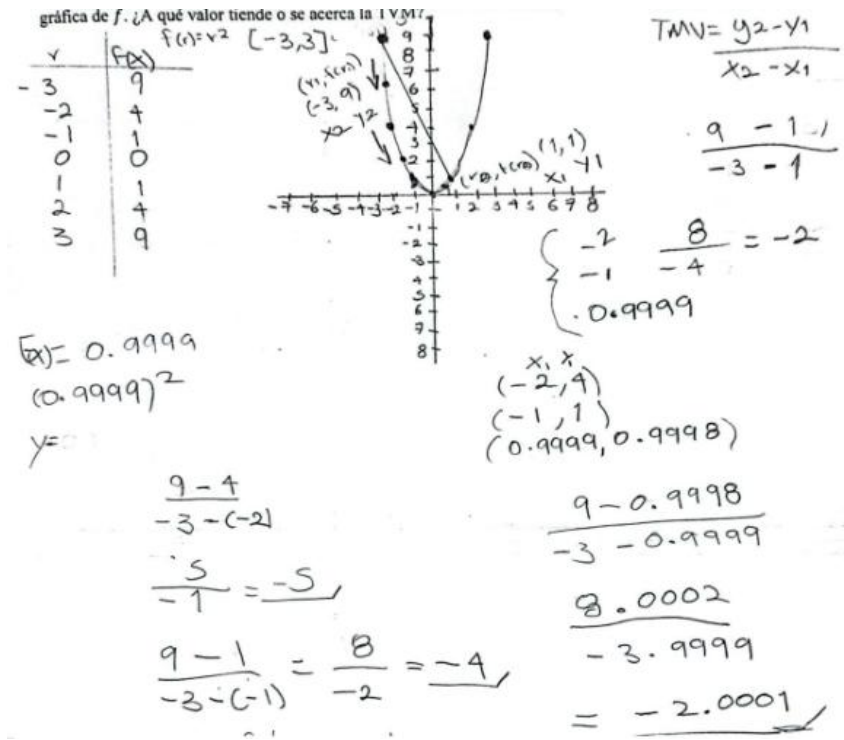


Figura 17.

Cálculos realizados por el equipo 5.



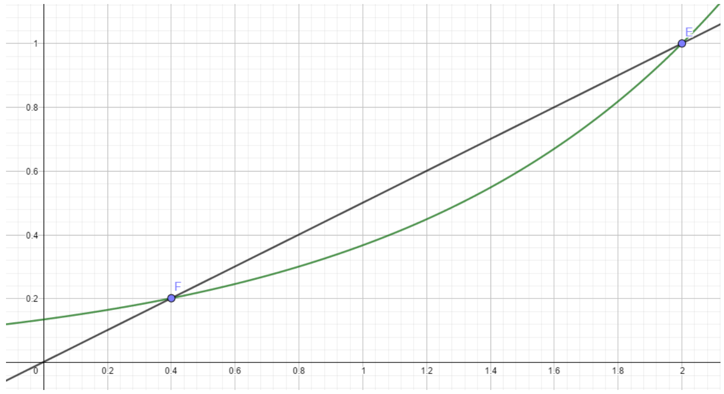
Para este ejercicio todos los equipos graficaron la función de manera correcta, demostrando la concepción Proceso de función y a su vez realizar Acciones sobre la gráfica de la función trazada. Conforme iban avanzando y llevaban a cabo cada paso de manera explícita los estudiantes tenían oportunidad de reflexionar sobre sus Acciones y de Interiorizar estas Acciones en un Proceso cálculo de la Tasa de Variación Media cuando la diferencia entre los puntos trazados se hace cada vez más pequeña. Los estudiantes iban trabajando en equipos mientras la investigadora sólo observaba y hacía anotaciones respecto a lo que escuchaba en las discusiones de cada uno.

4.2.4. Actividad 4

La siguiente gráfica de una función (**Figura 18**) te muestra 2 puntos unidos por una cuerda, calcula las Tasas de Variación Media y dibuja las cuerdas que se forman a medida que el punto E se acerca al punto F.

Figura 18.

Puntos en una gráfica unidos por una cuerda.

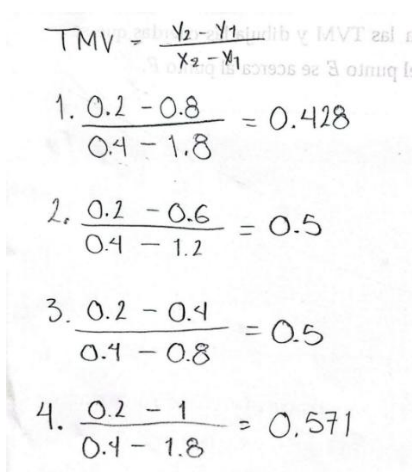


¿Qué comportamiento notas en las cuerdas cuando aproximas un punto a otro con respecto a la gráfica de la función? Si haces la aproximación cada vez más cercana al punto F ¿qué ocurre con las cuerdas? ¿Como definirías la tasa de variación media cuando un punto está cerquísima del punto que no se mueve?

De los cálculos realizados por el equipo 2 mostrados en la Figura 19, notamos que los estudiantes identifican los valores de x e y y los asocian para hacer el cálculo de las pendientes, incluso sin otorgarles de manera explícita una función no tuvieron inconvenientes con estos cálculos, esto demuestra la encapsulación de función como Objeto, debido a que la pueden examinar e incluso transformar. Sin embargo, no todos los equipos lograron esto, no respondían al cálculo de la Tasa de Variación Media.

Figura 19.

Cálculos realizados por el equipo 2.

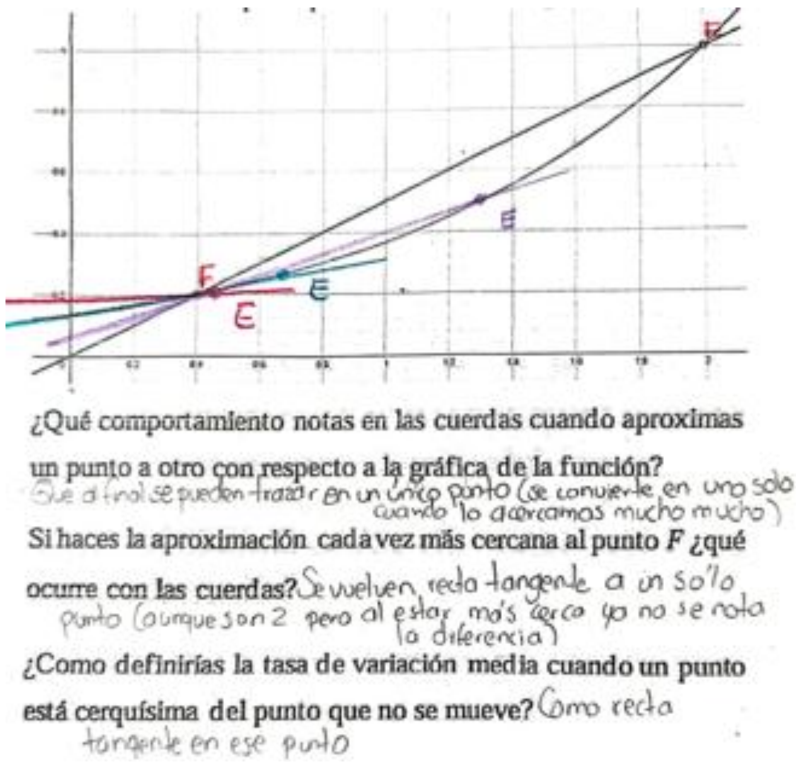


Se encontró que solo el 33% de los estudiantes dan muestra de que construyeron el Proceso y reflexionan sobre él. Estos estudiantes podrían estar en camino a encapsular este Proceso en el

Objeto "pendiente" de la tangente a un punto sobre la gráfica y el 16% de los estudiantes realizaron cálculos aproximados de la pendiente en cada punto de la gráfica ya que solo estimaron los valores de cada $(x, f(x))$ que iban dibujando sin tomar mucho en cuenta la gráfica. Esto nos confirma la interiorización del Proceso ya que lograron imaginarse los pasos sin tener que hacerlos de manera explícita. El resto de los equipos solo trazaron las cuerdas y al no disponer de la regla de una función explícita no encontraron la forma de hacer los cálculos de la pendiente (Figura 20).

Figura 20.

Cálculos realizados por el equipo 4.



Respuestas a la pregunta: "¿qué ocurre con las cuerdas?":

- Se vuelven más chicas con respecto al punto que colocamos.
- Llegaría a un punto fijo.
- Que se acorta cada vez que nos acercamos.
- Se vuelven recta tangente a un solo punto (aunque son 2 pero al estar más cerca ya no se nota la diferencia).
- Serán más próximas al punto y más extensas.
- Es cada vez más corta y los cálculos se aproximan al límite.

Algunas respuestas a la pregunta ¿Como definirías la tasa de variación media cuando un punto está cerquísima del punto que no se mueve?:

- En una constante es decir que tiende a un número por su límite.
- Como algo que se acerca mucho pero no llega a tocarlo
- Depende del punto fijo.
- Que tendrá que llegar a un tope.

Una vez terminada la actividad por los equipos, la investigadora les preguntó a que se referían ellos con el límite.

P: Antes de pasar a la siguiente actividad vamos a compartir opiniones, la pregunta es ¿Qué entendemos por límite?

E1: Como un tope, como decir de aquí ya no puedes pasar.

E2: Si, cuando hemos estado haciendo los cálculos de la Tasa de Variación Media al acercarnos a un punto vemos que tiende a un número y ese es el límite.

P: Ok, me parece bien, pero… ¿Entonces en algún momento toca ese “tope”?

E3: No creo, como que se acerca, pero no.

E4: Yo digo que si, como su nombre lo dice LÍMITE, si hacemos cada vez más y más cercano un punto a otro nos podríamos cansar agregando ceros o nueves, pero si lo va a tocar.

E1: Si, muy en el infinito lo tiene que tocar, pero nos ahorramos esos cálculos y decimos que es su límite.

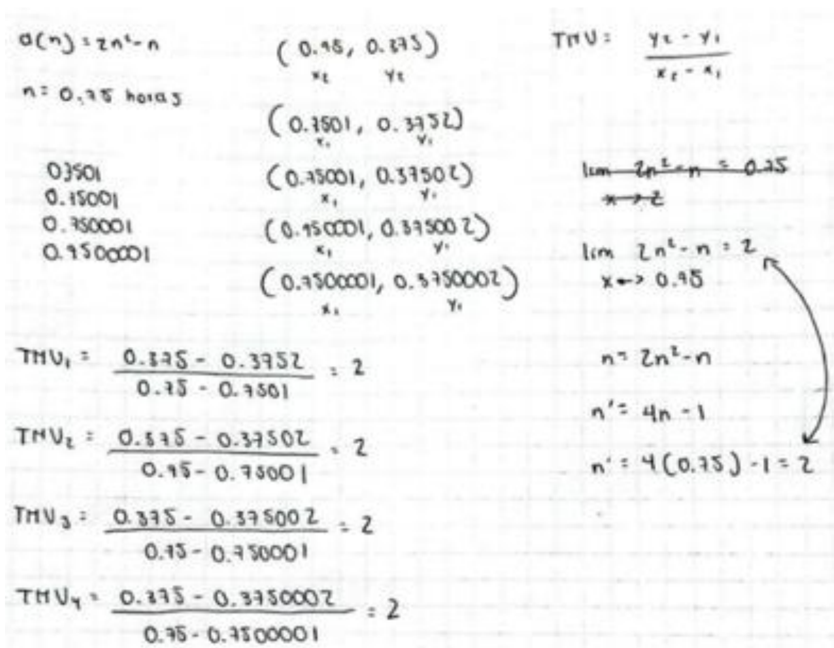
4.2.5. Actividad 5

Un globo de helio asciende de manera vertical, después de n horas su distancia d al suelo medida en kilómetros, está determinada por: $d(n) = 2n^2 - n$. Tomando intervalos de tiempo cada vez más pequeños y que inicien en un tiempo de 0.75 horas, calcula las Tasas de Variación Media que resultan. ¿Qué puedes argumentar acerca de estos valores cuando se hacen cada vez más pequeños y cercanos a 0.75?

De acuerdo con los cálculos realizados por el equipo 6 en la Figura 21 notamos que al valor dado de 0.75 lo denotan como x y lo van haciendo más pequeño con solo irle agregando ceros y un uno al final del valor. Lo introducen a la función dada y obtienen el valor de y respectivamente. Una vez realizadas estas Acciones y escritas como coordenadas y etiquetadas como (x, y) lo sustituyen en la fórmula de la Tasa de variación Media obteniendo el valor de 2 en todos sus cálculos. Con ellos son capaces de definir que esa función tiene como límite ese valor y lo escriben de manera adecuada.

Figura 21.

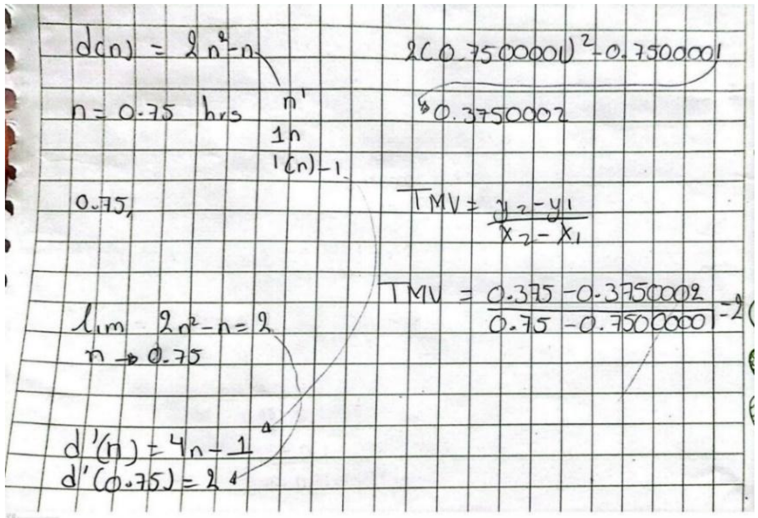
Cálculos realizados por el equipo 6.



Al equipo 3 (Figura 22) le bastó con tomar 0.7500001 como valor muy cercano a 0.75, meterlo a la función y obtener su respectivo valor para así sustituirlos en la fórmula de Tasa de Variación Media y concluir que ese sería su límite.

Figura 22.

Cálculos realizados por el equipo 3.



En esta actividad el 100% de los estudiantes hicieron Acciones al usar dos puntos consecutivos para relacionar dos magnitudes covariantes y así calcular la Tasa de Variación Media. Además, podemos ver que definieron el límite de la función cuando n tiende a 0.75 y ese límite es 2. Algunos estudiantes, aunque ponen el límite lo hacen de manera mecanizada ya que consultaron en libros para comparar respuestas con sus compañeros.

Al revisar sus argumentos mencionaban que: conforme hacían los intervalos más pequeños veían que se va acercando al 2, entonces cuanto más pequeño lo iban a tocar. En cuentas, el 17% de los estudiantes interiorizaron las Acciones y empiezan a construir el Proceso de la derivada como recta tangente a la curva de una función.

4.2.6. Actividad 6

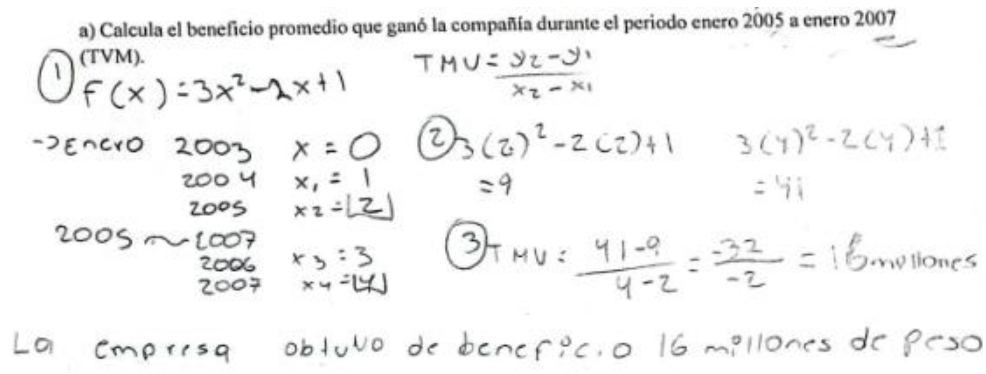
Sea $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ la ecuación que representa los beneficios de una compañía (en millones de pesos) y x representa el año desde enero de 2003. a) Calcula el beneficio promedio que ganó la compañía durante el periodo enero 2005 a enero 2007 (Tasa de Variación Media). b) Calcula los beneficios de la compañía a principios del año 2005 (Tasa de Variación Instantánea).

Gracias a que los estudiantes definían el límite en la actividad 5, la investigadora les otorgó la definición de Tasa de Variación Instantánea, la cual se puede escribir como límite.

Los cálculos realizados por el equipo 4 y el resto de los equipos (ver Figura 23Figura 24), nos demuestran que han Interiorizado las Acciones realizadas en éste y el ejercicio anterior en Procesos para obtener una Tasa de Variación, más aún al relacionarlo como una herramienta capaz de ofrecerles el cálculo de un beneficio para una empresa.

Figura 23.

Cálculos realizados por el equipo 4.



a) Calcula el beneficio promedio que ganó la compañía durante el periodo enero 2005 a enero 2007 (TVM).

1 $f(x)=3x^2-2x+1$ $\quad TMU = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

→ enero 2003 $x=0$

2004 $x_1=1$

2005 $x_2=\boxed{2}$

2005 ~ 2007

2006 $x_3=3$

2007 $x_4=\boxed{4}$

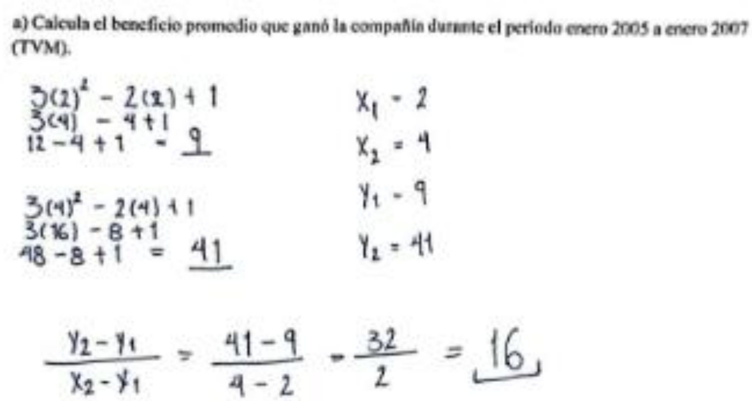
2 $3(2)^2-2(2)+1$ $=9$ $\quad 3(4)^2-2(4)+1$ $=41$

3 $TMV: \frac{41-9}{4-2} = \frac{-32}{-2} = 16$ millones

La empresa obtuvo de beneficio 16 millones de peso

Figura 24.

Cálculos realizados por el equipo 1.



a) Calcula el beneficio promedio que ganó la compañía durante el periodo enero 2005 a enero 2007 (TVM).

$3(2)^2-2(2)+1$

$3(4)-4+1$

$12-4+1=\underline{9}$

$3(4)^2-2(4)+1$

$3(16)-8+1$

$48-8+1=\underline{41}$

$x_1=2$

$x_2=4$

$y_1=9$

$y_2=41$

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-y_1} = \frac{41-9}{4-2} = \frac{32}{2} = 16$$

Para responder al inciso b los estudiantes comentaron lo siguiente:

> E1: Si dice los beneficios en solo 2005 entonces aquí procede acercarnos al punto lo más cercano
>
> P: ¿cómo sería eso?
>
> E2: Si sabemos que para el año 2005 x vale 2 entonces acercarnos a 2 por ambos lados, como 1.999 o 2.0001

Para esta actividad, el 100% de los estudiantes mostraron la interiorización de las Acciones de obtener la Tasa de Variación Promedio como una aproximación razonable de la Tasa de Variación Instantánea dado un punto, además, los estudiantes son capaces de interpretar los resultados obtenidos, situando la respuesta al contexto del problema, ver Figura 25Figura 26. Cabe resaltar que responden definiendo que el límite de la función es el valor 10 cuando x tiende a 2.

Figura 25.

Cálculos realizados por el equipo 2.

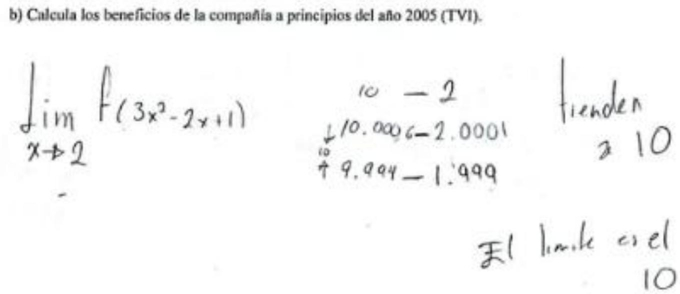
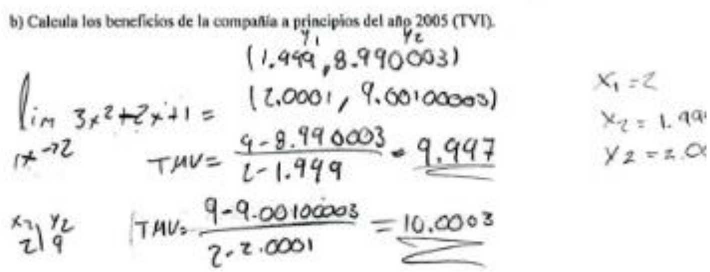


Figura 26.

Cálculos realizados por el equipo 4.



El 67% de los estudiantes de los equipos definieron que el límite cuando x tiende a 2 es 10. Este hecho nos confirma la encapsulación del Proceso al imaginarse pasos sin darlos a conocer explícitamente, al definir la Tasa de Variación Instantánea como límite de la función.

Cabe resaltar que durante la discusión en clase salió a relucir el tema del límite, los estudiantes comentaban que en algún momento del bachillerato llegaron a ver la definición y realizar ejercicios, sin embargo, el concepto como tal no quedaba claro hasta ahora, que podían comprender el significado de tender a, y el límite de una función.

4.2.7. Actividad 7

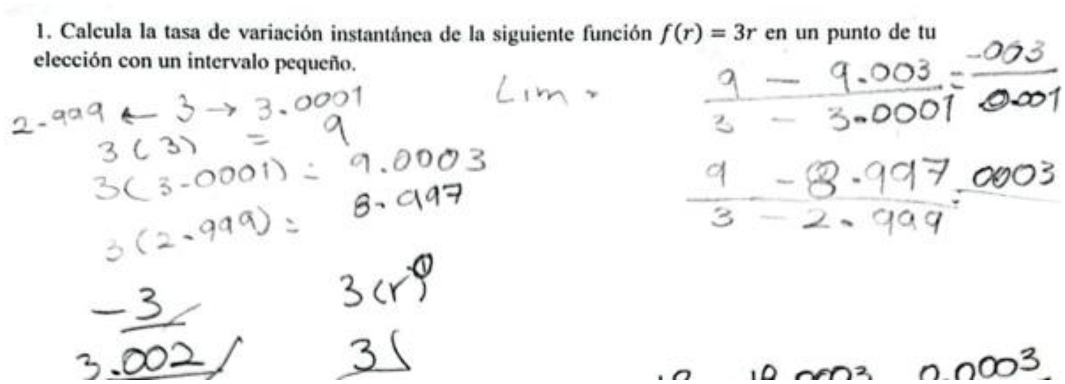
Calcula la tasa de variación instantánea de la siguiente función $f(r) = 3r$ en un punto de tu elección con un intervalo pequeño. Elige otro punto y realiza el mismo cálculo. a) ¿Qué puedes decir sobre los valores que resultan? b) ¿Qué relación guardan los valores calculados con la función original?

Escribe una ecuación o regla que te permita calcular la Tasa de Variación Instantánea en cualquier punto.

De la Figura 27, analizamos que el equipo tomó como punto el valor 3 y su elección de intervalo pequeño fue tomar un punto antes y uno después de él, es decir, el 2.999 y el 3.0001. Al tener la función dada, sustituyeron estos valores de r y les arrojó el valor de $f(r)$ que les dió aproximadamente 9, los cuales utilizaron en el cálculo de la pendiente que les dio en ambos el valor aproximado de 3.

Figura 27.

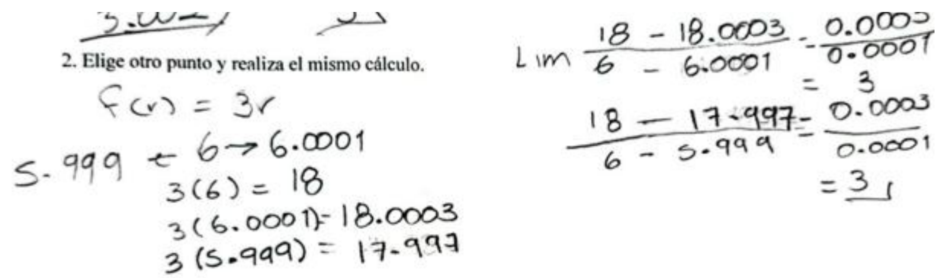
Cálculos realizados por el equipo 5.



Al elegir otro punto (el 6) y tomar de igual manera un valor antes y otro después de él (5.999 y 6.0001) notaron que la pendiente también arrojaba el mismo valor de 3, ver Figura 28.

Figura 28.

Cálculos realizados por el equipo 6.


2. Elige otro punto y realiza el mismo cálculo.

f(r) = 3r

5.999 ← 6 → 6.0001

3(6) = 18

3(6.0001) = 18.0003

3(5.999) = 17.997

Lim $\frac{18 - 18.0003}{6 - 6.0001} = \frac{0.0003}{0.0001} = 3$

$\frac{18 - 17.997}{6 - 5.999} = \frac{0.0003}{0.0001} = 3$

Algunas respuestas a las preguntas a) ¿Qué puedes decir sobre los valores que resultan? b) ¿Qué relación guardan los valores calculados con la función original?:

- a) Tienen una similitud ya que el resultado da lo mismo (3).
  b) Que vienen de la función original, se calculan de ella.
- a) Es decir que es una constante que se aproxima a un número en este caso el 3.
  b) Ambos resultan iguales.

En sus respuestas y en la discusión con la investigadora concluyeron que no importa que otro punto tomaran les iba a dar el mismo valor 3. Con esta idea, nombraron como regla que 3 era el límite de esa función cuando r tiende a cualquier número para la última parte de la actividad.

Al llegar a una aproximación razonable de la Tasa de Variación Instantánea en un punto notamos que solo el 33% de los estudiantes mostraron que tal vez encapsularon este Proceso, demostraban que ya no necesitaban realizar Acciones de muchos cálculos de las Tasas para dar respuesta a las preguntas, aunque se necesita más evidencia de esto.

4.2.8. Actividad 8

De acuerdo con la definición, calcula la Tasa de Variación Instantánea de la función $f(x) = 5x^2$. ¿Qué notas al respecto entre la derivada y la función original?

Ahora, siendo $g(x) = 6x^2$ calcula la Tasa de Variación Instantánea. ¿Qué puedes mencionar si comparas los resultados que obtuviste al calcular la Tasa de Variación Instantánea de f con la función original dada? ¿y en g?

¿Existirá una manera más rápida de calcular las Tasa de Variación Instantánea de ambas funciones?

Para este ejercicio, respecto al cálculo de la Tasa de Variación Instantánea observamos de las Figura 29Figura 30 que han interiorizado las Acciones en un Proceso, se saltan algunos pasos e imaginan puntos muy cercanos al que eligen para obtener cálculos más precisos.

Figura 29.

Cálculos realizados por el equipo 1.

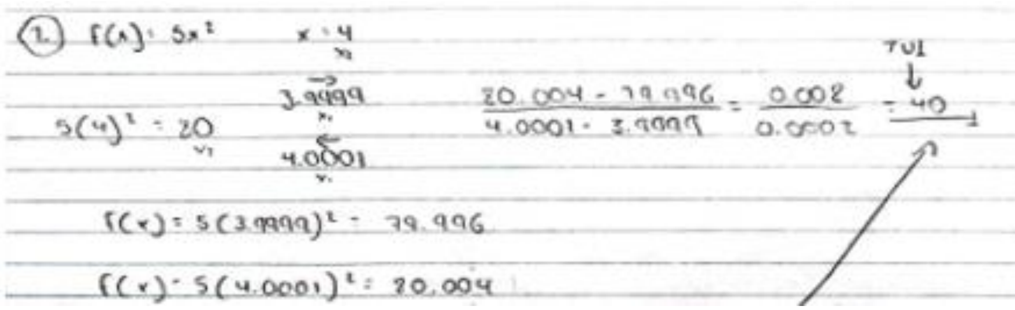
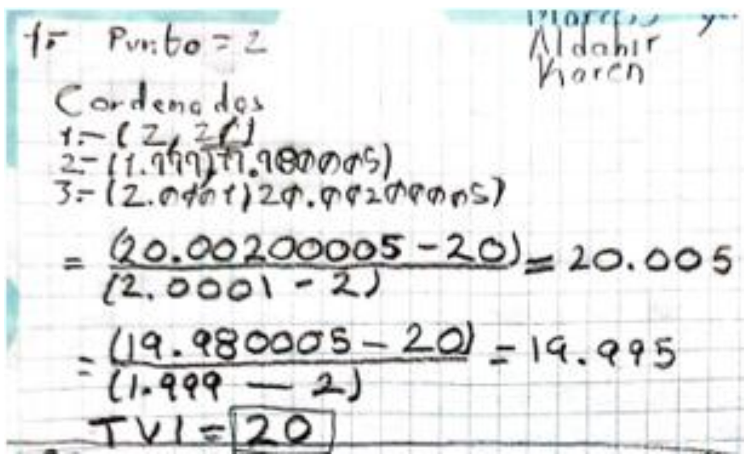


Figura 30.

Cálculos realizados por el equipo 4.



Algunas respuestas a las preguntas a) ¿Qué notas al respecto entre la derivada y la función original? b) ¿Qué puedes mencionar si comparas los resultados que obtuviste al calcular la Tasa de Variación Instantánea de f con la función original dada? c) ¿y en g?:

- a) Que son similares.

  b) En ambos casos no importa el número que ponga nos arrojará el mismo resultado.

  c) Que ambos se relacionan con su número entero, su valor aumenta.
- a) Que ambos dan el mismo resultado, que es 50.

b) Con la Tasa de Variación Instantánea se acerca al resultado y con la derivada de la función da exacta.

c) Que los dos números que pusimos se acercan a g, dan el mismo resultado, pero están muy lejos del 60.

- a) La relación que existe entre la derivada y la función es el resultado de ambas, pues ambas dan como resultado 40.

  b) El proceso se vuelve más corto cuando se calcula con la derivada de la función, siendo que de cualquiera de las dos maneras el resultado es el mismo.

  c) Los resultados son los mismos, ya sea que se calcule usando la derivada de la función o sustituyendo en la fórmula para conseguir la Tasa de Variación Instantánea.

Los estudiantes fueron capaces de producir la definición de la derivada de una función que es continua en un punto a través de la definición de Tasa de Variación Instantánea. El 84% de los equipos lograron la encapsulación del Proceso en el Objeto "pendiente". Al tener bajo su control y hacer suyo el problema, incluso propusieron una forma de calcular más rápido ese resultado. El Proceso consistió en calcular la derivada para dos funciones que se parecen.

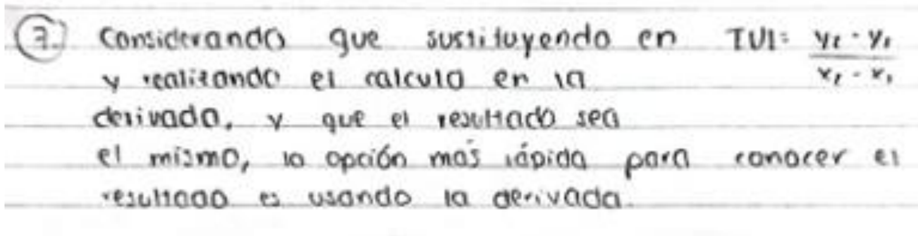
Gracias a las Acciones que fueron realizando hasta llegar a este ejercicio, encontraron que la Tasa de Variación Instantánea y el cálculo del límite de la función coincidían, y que además tenía que ver con la derivada de la función, lo cual era mucho más fácil y el camino más rápido para responder a las preguntas sin tener que hacer varios cálculos de la Tasa de Variación Media.

Respecto a la pregunta ¿Existirá una manera más rápida de calcular las Tasa de Variación Instantánea de ambas funciones? La mayoría de los estudiantes coincidían que la forma más rápida sería calculando la derivada de la función, sin embargo, aún no conocían las fórmulas para tal Acción, ver Figura 31 yFigura **32**.

El 67% de los equipos mostraron que la derivada es la opción óptima sobre los cálculos hechos anteriormente de Tasa de Variación Instantánea, si bien ya los estudiantes la habían mecanizado, ello les ayudó a encontrar el camino del límite y la derivada de las funciones con las que habían estado trabajando.

Figura 31.

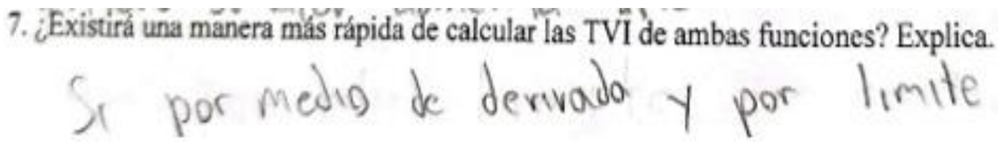
Cálculos realizados por el equipo 1.



7. Considerando que sustituyendo en TVI: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y realizando el calculo en la derivada, y que el resultado sea el mismo, la opción más rápida para conocer el resultado es usando la derivada.

Figura 32.

Cálculos realizados por el equipo5.



7. ¿Existirá una manera más rápida de calcular las TVI de ambas funciones? Explica.

Si por medio de derivada y por limite

Al Interiorizar las Acciones de calcular la derivada en un punto, los integrantes de los equipos fueron transformando las en un Proceso. En la actividad 8, dieron señales de esto, por tanto, si bien los estudiantes tenían instrucción previa sobre estos conceptos, en esta ocasión mostraron y reconocieron ellos mismos que con el trabajo realizado habían comprendido por qué lo hacían.

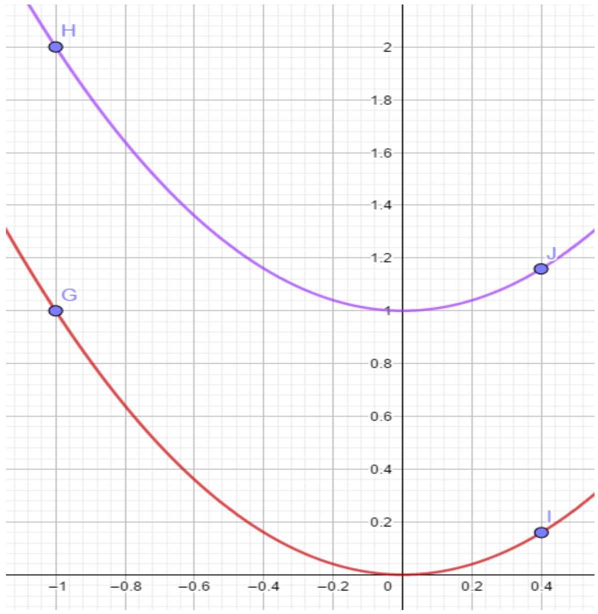
Algunas de sus respuestas fueron que usando la derivada era la opción más rápida, y que lo habían comprobado al sustituir en la fórmula de la Tasa de Variación Instantánea y luego compararlo con la derivada.

4.2.10. Actividad 10

La curva en color azul corresponde a la función $f(w) = w^2 + 1$, la curva en color rojo representa la función $f(z) = z^2$ (Figura 33).

Figura 33.

Gráfica de funciones.



¿Qué pasa con la Tasa de Variación Media de cada función si la evaluamos en los puntos indicados en cada una respectivamente? ¿Qué puedes concluir sobre estos cálculos?

Este ejercicio buscó la encapsulación del Proceso descrito en la actividad anterior. El 67% de los estudiantes interiorizaron las Acciones y respondieron que en ambas funciones los valores resultaron similares al obtener el mismo resultado en la evaluación de la función dada. Aquí ya buscaban una regla para derivar funciones de manera más rápida. En cálculos anteriores manejaban funciones en dónde descubrieron un patrón para encontrar la derivada. Al ser las funciones diferentes en estos ejercicios, sin darse cuenta encontraron que la derivada de una constante es cero, pero no sabían la razón detrás de este resultado (Figura 34Figura 35).

Al responder la pregunta, durante la discusión en grupo, coincidieron en que, si evaluaban los puntos indicados en la función cada uno respectivamente, la Tasa de Variación Media resultaba ser igual para ambos.

Figura 34.

Cálculos realizados por el equipo 4.

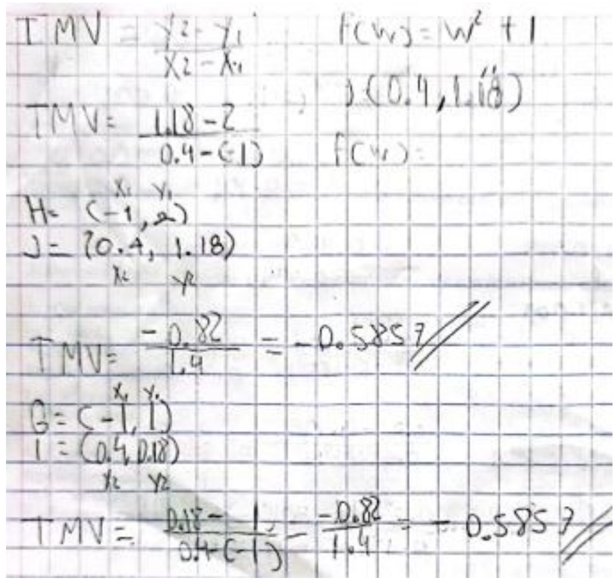
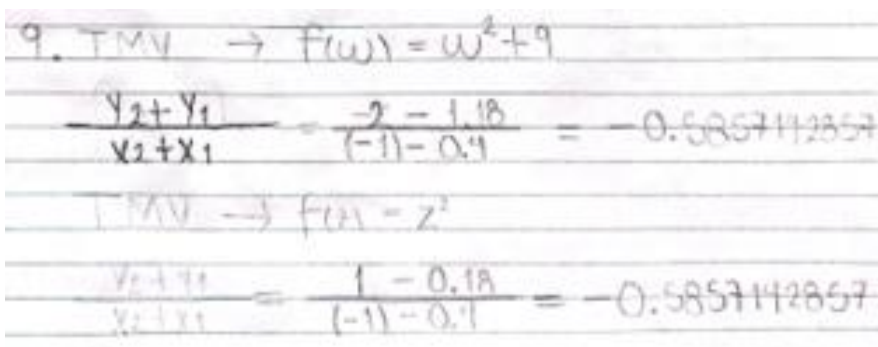


Figura 35.

Cálculos realizados por el equipo 6.



4.2.11. Actividad 11

Sea $u(x) = 6x^2 - 3x + 5x^3$ y $v(x) = 8x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 8x$. Realiza la suma de estas funciones $(u + v)$ y calcula su derivada. ¿Qué pasa si calculas la derivada y luego realizas la suma $(u' + v')$?

Los estudiantes realizaron Acciones haciendo operaciones con las funciones dadas en el ejercicio. La actividad consistió en derivar las funciones para después sumarlas y a continuación hacer el proceso inverso, es decir, primero sumar las funciones para después derivarlas, esto con el fin de demostrar que ambas Acciones llevan al mismo resultado y posteriormente poder definir las reglas de derivación (Figura 36Figura 37). El 100% de los estudiantes llevaron a cabo dichas Acciones y reiteraron lo aprendido al dar respuestas como: "llegan al mismo resultado". Estas Acciones sobre la derivada permitieron su interiorización en un Proceso de encontrar la derivada de funciones que resultan de operaciones con otras funciones.

Figura 36.

Cálculos realizados por el equipo 3.

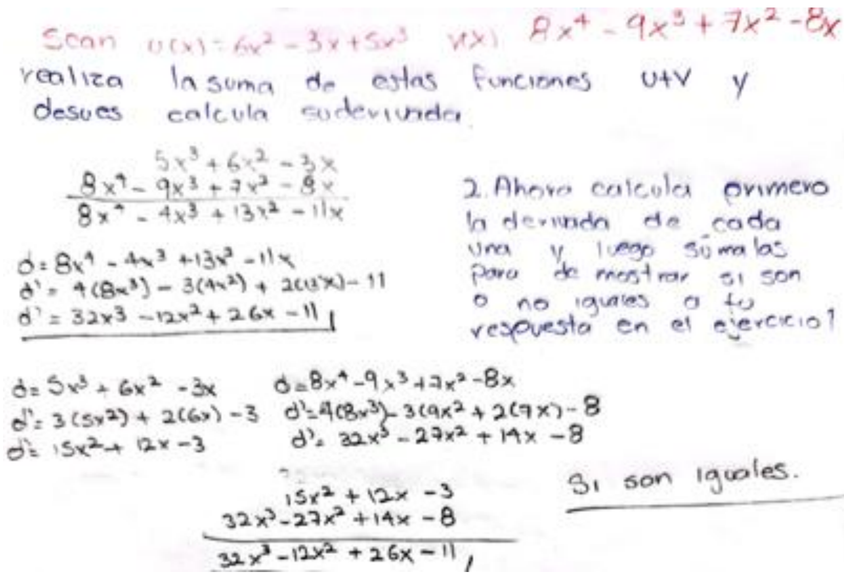
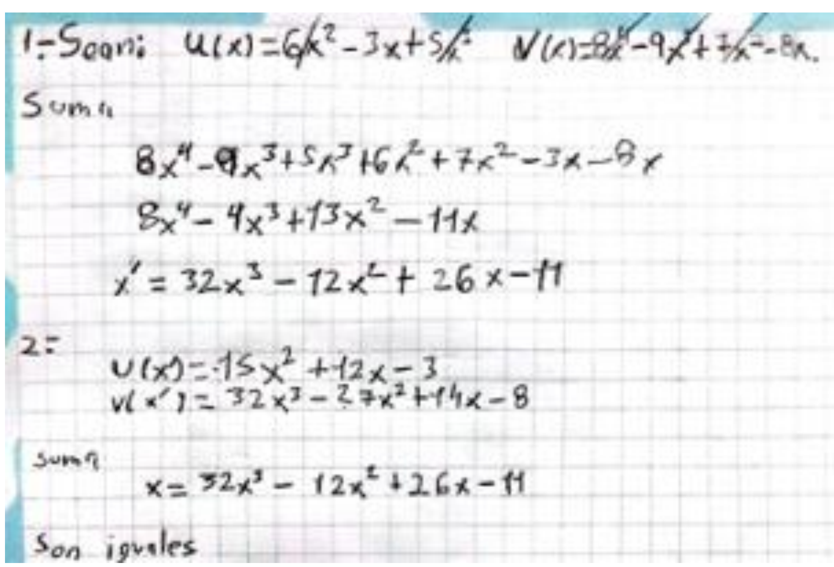


Figura 37.

Cálculos realizados por el equipo 5.



4.2.12. Actividad 12

Al llegar a esta actividad los estudiantes tuvieron una sesión previa con la investigadora donde discutieron y aprendieron las 7 fórmulas directas para la derivada de funciones, mismas que fueron propuestas en las actividades diseñadas con la descomposición genética. Una vez discutidas procedieron a realizar las siguientes actividades.

Halla utilizando la definición, la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 4x^2 + 17x - 24$
2. $f(x) = \frac{24}{8x-2}$
3. $f(x) = (-8x^3 + 2x)(x^4 - 3)$

Al analizar las respuestas de los equipos observamos la interiorización de las Acciones a través de ejemplos y actividades previas relacionadas con el cálculo de la derivada de funciones mediante el reconocimiento y uso de las reglas de derivación de funciones (Figura 38 yFigura **39**).

Figura 38.

Cálculos realizados por el equipo 1.

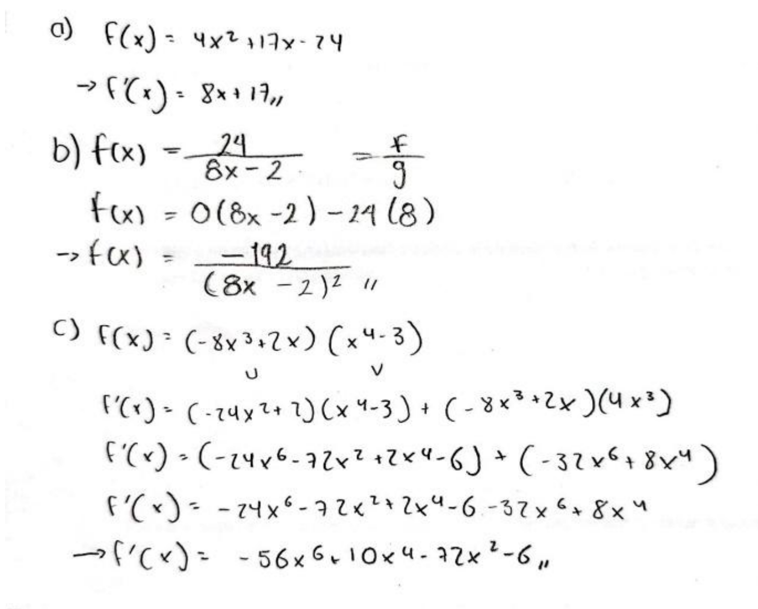
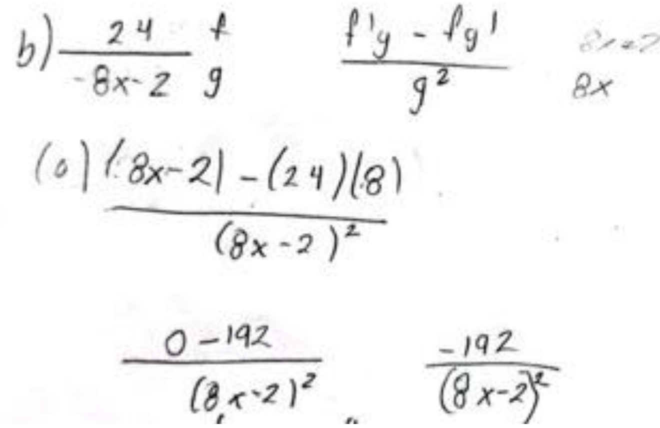


Figura 39.

Cálculos realizados por el equipo 2.



Todas estas actividades fueron realizadas en 13 sesiones comenzando el 22 de febrero y terminando el 9 de abril. Al término de todas ellas, la investigadora se regresó al problema inicial con los estudiantes, que implica la respuesta de la segunda parte:

> Supongamos que la relación entre la cantidad de artículos vendidos y el precio sigue la ley de la oferta y la demanda: ¿Qué función describirá este problema en función de la demanda del mercado? Denotaremos al precio como P y a Q como la cantidad de artículos vendidos en el mercado.

4.3. RETORNO AL PROBLEMA ECONÓMICO

Al término de las actividades propuestas, la investigadora y los estudiantes regresaron al problema económico inicial. Con las herramientas y aprendizajes obtenidos pudieron dar respuesta a las preguntas y llevar a cabo los cálculos necesarios.

Durante la sesión discutieron con la investigadora la Ley de la Oferta y la Demanda, dando ejemplos de cómo se maneja el mercado. Comentaban lo que sucedía cuando un bien bajaba de precio y como los consumidores corrían a comprarlo porque estaba a un precio menor, o como los dejaban de consumir o sustituían por otros cuando su precio aumentaba. Hablaron de lo sucedido durante la pandemia del año 2020, al inicio los cubrebocas eran muy demandados y su precio no era tan accesible como ahora, al término de la pandemia ya no se demandan tanto y casi los regalan por su caída de precio.

Para encontrar la función, los estudiantes hicieron uso de la modelación. Iniciaron dibujando la gráfica del comportamiento del producto en el mercado, utilizando Q para la demanda en el eje x y P (precio) para el eje y. Argumentaban que a mayor precio menor era la demanda de ese bien o servicio, y viceversa, a menor precio mayor sería la demanda pero que tenía un límite, el cero, ya que ningún producto podría costar cero pesos.

Figura 40.

Gráfica realizada por los estudiantes del equipo 4.

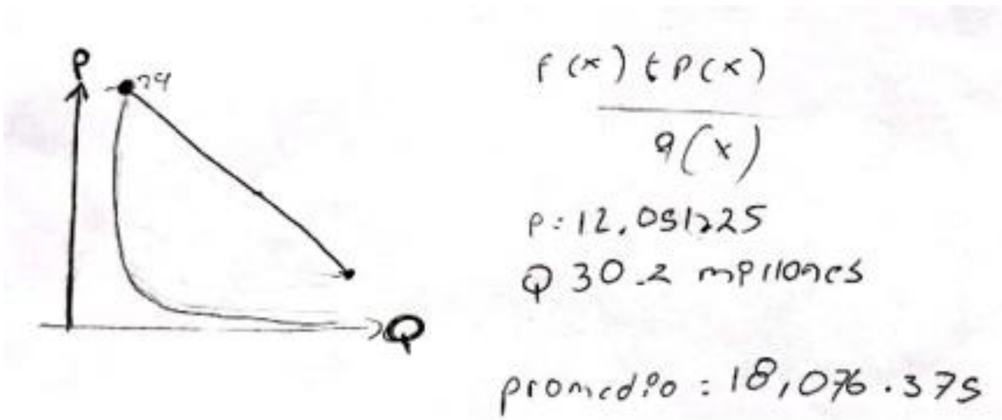
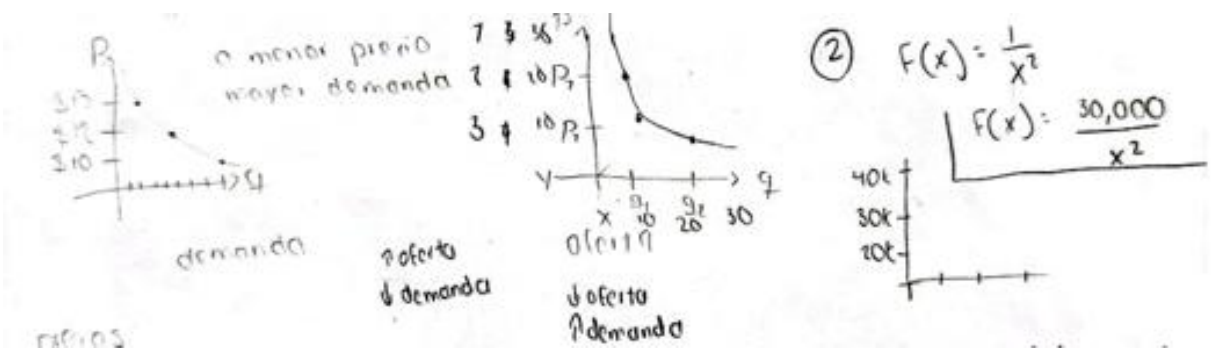


Figura 41.

Gráfica realizada por los estudiantes del equipo 1.



Terminada la gráfica, los equipos decidieron investigar en internet gráficas similares a la suya para encontrar la ecuación que las define, llegaron a la concusión que tenía la forma de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Recordaron que investigaron el precio real del producto, posteriormente bajaron el precio para responder la pregunta y para introducirlo a la función decidieron calcular el promedio de ambos precios, el precio inicial y el final, por tanto, llegaron a la conclusión que la función quedaría como: $Q = \frac{*promedio*}{P^2}$. A razón de que los equipos encontraron diferentes precios y los bajaron a su gusto, obtuvieron diferentes promedios y por tanto todos obtuvieron funciones con diferente valor en el dividendo, por ejemplo, en la Figura 42, el equipo 5 obtuvo $Q = \frac{27999.5}{P^2}$, y en la Figura 43 el equipo 2 obtuvo: $Q = \frac{43000}{P^2}$

Figura 42.

Función obtenida por el equipo 5.

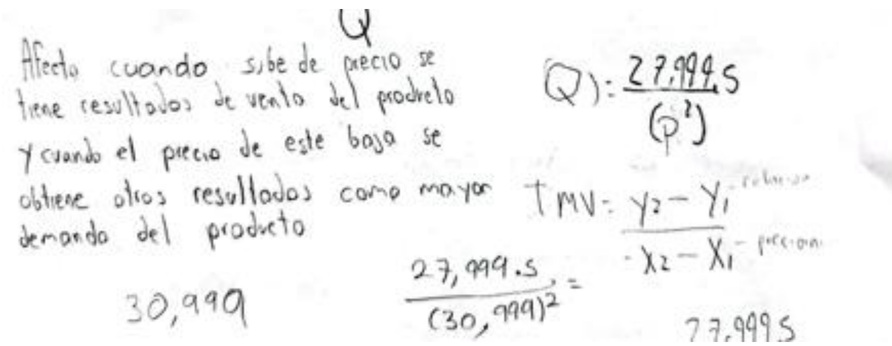
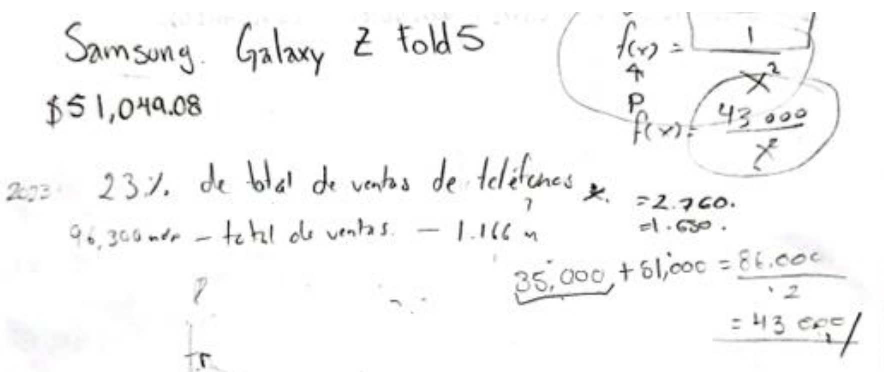


Figura 43.

Función obtenida por el equipo 2.



Una vez establecida la función procedieron a continuar con la tercer y última parte del problema: Calcula la elasticidad de la demanda cuando tu empresa reduce el precio de sus artículos (del precio inicial determinado al precio al que se decidió reducir).

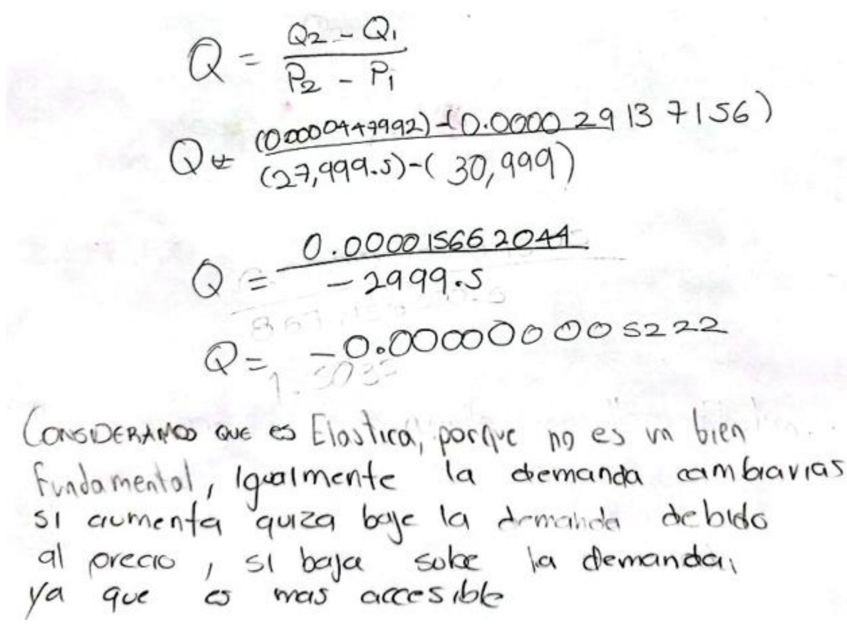
Antes de llevarla a cabo, la investigadora les explicó y dio la definición de Elasticidad de la demanda, esto debido a que los estudiantes desconocían esta definición, argumentaban que era la primera vez que escuchaban el concepto de Elasticidad de la demanda. Para continuar resolviendo el problema económico era importante definirlo para que así los estudiantes lo pudieran relacionar y posteriormente llevar a cabo los cálculos correspondientes.

> La Elasticidad es una forma de medir la variación de la cantidad demandada de un bien ante un cambio en el precio. El valor de la elasticidad permite clasificar los bienes según su sensibilidad ante variaciones de su precio. Se distinguen tres tipos de demanda:
>
> 1. Demanda elástica: $E > 1$.
> 2. Demanda inelástica: $E < 1$.
> 3. Demanda unitaria: $E = 1$.

Al analizar las respuestas de los equipos nos percatamos que hicieron uso de lo aprendido durante las primeras actividades: la Tasa de Variación Media, tomaron el precio real del bien y lo evaluaron en su función modelada, después tomaron el precio reducido y lo evaluaron en la misma función para así sustituirlo a la fórmula de la Tasa de Variación Media y obtener el valor de la Elasticidad de la demanda (Figura 44 yFigura **45**). Después eligieron qué tipo de demandada era y lo que significaba en términos económicos para su producto.

Figura 44.

Respuesta del equipo 5.



$$Q = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1}$$

$$Q = \frac{(0.000044\,7992) - (0.0000\,2913\,7156)}{(27{,}999.5) - (30{,}999)}$$

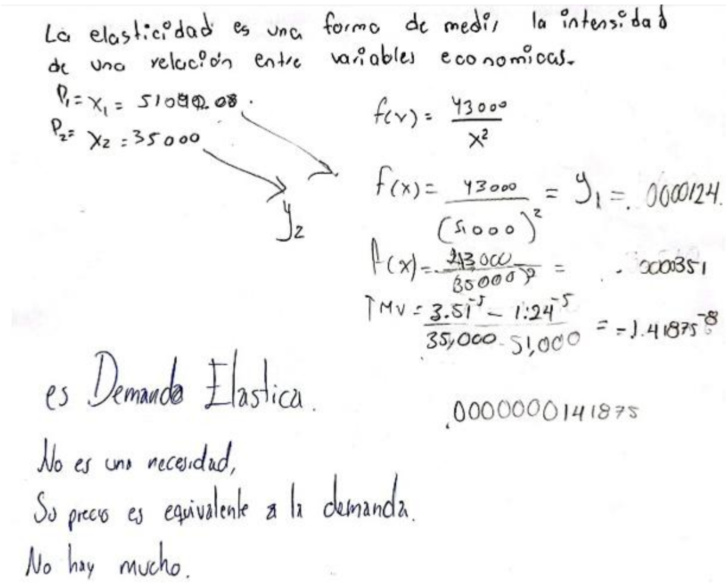
$$Q = \frac{0.00001566\,2044}{-2999.5}$$

$$Q = -0.000000000\,5222$$

Considerando que es Elastica, porque no es un bien fundamental, Igualmente la demanda cambiarias si aumenta quiza baje la demanda debido al precio, si baja sube la demanda, ya que es mas accesible

Figura 45.

Respuesta del equipo 2.



4.4. VALIDEZ Y CONFIABILIDAD DEL CUESTIONARIO DE SATISFACCIÓN

Al término de la aplicación de las actividades diseñadas, se procedió a la implementación de un cuestionario de satisfacción, el cual fue usado para medir la aceptación de los estudiantes y la comprensión acerca de la introducción a la derivada en el nivel superior, mediante un problema aplicado a una situación económica real, tomando como referencia una descomposición genética de la mano de la Teoría APOE.

A continuación, se presenta la validación por juicio de expertos del cuestionario. Cualquier instrumento de medición o recopilación de datos debe cumplir tres requisitos esenciales: objetividad, validez y confiabilidad. En investigaciones sociales, el cuestionario es el instrumento más empleado para la recopilación de datos. Este se compone de una serie de preguntas relacionadas con una o más variables que se desean medir.

Un instrumento de medición es considerado adecuado cuando logra registrar datos observables que reflejan fielmente los conceptos o variables que el investigador pretende estudiar (Williams et al., 2009). La medición se define como "el proceso de asociar conceptos abstractos con indicadores empíricos", el cual se lleva a cabo mediante un plan explícito y estructurado que permite clasificar, y en muchas ocasiones cuantificar, los datos disponibles en función del concepto que se desea analizar (Carmines y Zeller, 1991).

El estudio de validez y confiabilidad del instrumento se llevó a cabo mediante las siguientes fases:

4.4.1. Juicio de expertos.

Un instrumento puede resultar confiable y no ser necesariamente válido. Por esta razón es imprescindible que el instrumento de medición demuestre confiabilidad y validez.

El instrumento fue puesto a juicio de diez expertos, los cuáles pusieron en consideración de un nivel de 1 a 4, la suficiencia, claridad, coherencia y relevancia de cada ítem en relación con el objetivo del cuestionario.

Para ser considerados en este juicio, los expertos participantes debían cumplir con el requisito de ser docente de nivel medio superior y superior, que imparten o impartieron materias de Cálculo Diferencial y Matemáticas. La aplicación se llevó a cabo en línea, siendo invitados a participar en el estudio. Los datos de los participantes se muestran en la **Tabla 3**.

Tabla 3.

PREPARACIÓN ACADÉMICA, CARGO Y ANTIGÜEDAD DE LOS JUECES PARTICIPANTES.

Preparación académica	Cargo	Antigüedad
Trabajador social con Maestría en Educación en el Área de Docencia e Investigación.	Docente de nivel superior	12 años
Ingeniero Químico con Maestría en Ingeniería Química.	Docente de nivel superior	21 años
Ingeniero Químico	Docente de nivel superior	15 años
Ingeniero Industrial en Electrónica	Docente de nivel medio superior	21 años
Licenciado en Matemáticas	Docente de nivel básico	3 años

Ingeniero en Diseño Automotriz	Docente de nivel medio superior	4 años
Ingeniero Químico	Docente de nivel superior	25 años
Doctor en Ciencias en Biotecnología	Docente de nivel superior	8 años
Licenciado en Economía con Doctorado en Estrategias para el Desarrollo Agrícola Regional.	Servidor Público y docente de nivel superior	13 años
Doctor en Ciencias	Docente de nivel superior	15 años

4.4.2. Análisis de validez y confiabilidad del instrumento

La validez "se refiere al grado en que un instrumento mide realmente la variable que pretende medir" (Hernández-Sampieri, 2014, p.200). Para Corral (2009), la validez consiste en la capacidad de que el instrumento mida lo que se debe medir.

La confiabilidad "se refiere al grado en que la aplicación repetida del instrumento al mismo individuo u objeto produce resultados iguales" (Hernández-Sampieri, 2014, p. 200). Corral (2009) expresa que confiabilidad es la capacidad para que un instrumento produzca resultados consistentes y reproducibles.

En un instrumento de medición, la objetividad se refiere al grado en que éste es o no permeable a la influencia de los sesgos y tendencias del investigador o investigadores que lo administran, califican e interpretan (Luque Ribelles & Herrera Sánchez, 2015). La validez, la confiabilidad y la objetividad no deben tratarse de forma separada. Sin alguna de las tres, el instrumento no es útil para llevar a cabo un estudio.

Con estos antecedentes, se pretendió identificar un grupo de expertos "personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones" (Escobar-Pérez & Cuervo-Martínez, 2008, p. 29), los cuales evaluaron los ítems del CUESTIONARIO PARA MEDIR LA ACEPTACIÓN DE LOS ESTUDIANTES RESPECTO A LA INTRODUCCIÓN DE LA DERIVADA MEDIANTE UN PROBLEMA ECONÓMICO; a su elección retroalimentaron el cuestionario y posteriormente se determinó el nivel de concordancia entre los jueces que evaluaron la prueba y se ajustó el instrumento hasta confirmar la concordancia entre los jueces.

Es esencial tener en cuenta que la validez de contenido no puede ser cuantificada; se trata más bien de un análisis basado en la evaluación y el criterio subjetivo o intersubjetivo. Generalmente, se determina utilizando lo que se conoce como Juicio de Expertos; este método se utiliza para evaluar la posible probabilidad de error en la configuración del instrumento y con el cual se busca obtener estimaciones que sean razonablemente precisas. A continuación, se presenta la plantilla propuesta por Escobar Pérez & Cuervo-Martínez que se utilizó para evaluar el cuestionario:

JUICIO DE EXPERTOS ESCOBAR PÉREZ & CUERVO-MARTÍNEZ (2008)

Respetado juez: usted ha sido seleccionado para evaluar el instrumento que forma parte del proyecto de Tesis: "Uso de la modelación para la introducción del concepto de la derivada en nivel superior".

La evaluación del instrumento es de gran relevancia para lograr que sea válido y que los resultados obtenidos sean utilizados eficientemente aportando evidencia para mostrar que el trabajo de investigación logró la aceptación del cálculo diferencial por parte de los estudiantes introduciendo el tema con un problema real que les permitió ver la aplicación de la derivada en el área de economía.

Agradecemos su valiosa colaboración.

Nombres y apellidos del juez: ____
Formación académica: ____
Áreas de experiencia profesional: ____
Tiempo: ____
Cargo actual: ____
Institución: ____

Objetivo de la investigación: El objetivo de la investigación fue analizar la comprensión de la derivada por parte de los estudiantes y la aceptación mediante el problema aplicado a una situación económica real. Basada en la teoría APOE, se hizo uso de una descomposición genética para la comprensión del concepto de derivada.

Objetivo del juicio de expertos: Garantizar la calidad y la validez de los datos recopilados y los resultados obtenidos.

Objetivo de la prueba: Los jueces expertos desempeñan un papel importante en la evaluación y la validación de los aspectos relacionados con la metodología, la interpretación de los datos y la toma de decisiones en el proyecto.

De acuerdo con los siguientes indicadores califique cada uno de los **ítems** según corresponda.

Tabla 4.

CATEGORÍAS E INDICADORES

Categoría	Calificación	Indicador
Suficiencia Los ítems que pertenecen a una misma dimensión bastan para obtener la medición de esta.	1. No cumple con el criterio 2. Bajo nivel 3. Moderado nivel 4. Alto nivel	Los ítems no son suficientes para medir la dimensión. Los ítems miden algún aspecto de la dimensión, pero no corresponden a la dimensión total. Se deben incrementar algunos ítems para poder evaluar la dimensión completamente. Los ítems son suficientes.
Claridad El ítem se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas.	1. No cumple con el criterio 2. Bajo nivel 3. Moderado nivel 4. Alto nivel	El ítem no es claro. El ítem requiere bastantes modificaciones o una modificación muy grande en el uso de las palabras de acuerdo con su significado o por la ordenación de las mismas. Se requiere una modificación muy específica de algunos de los términos del ítem. El ítem es claro, tiene semántica y sintaxis adecuadas.

Coherencia El ítem tiene relación lógica con la dimensión o indicador que está midiendo.	1.No cumple con el criterio 2. Bajo nivel 3. Moderado nivel 4. Alto nivel	El ítem no tiene relación lógica con la dimensión. El ítem tiene una relación tangencial con la dimensión. El ítem tiene una relación moderada con la dimensión que está midiendo. El ítem se encuentra completamente relacionado con la dimensión que está midiendo.
Relevancia El ítem es esencial o importante, es decir debe ser incluido.	1. No cumple con el criterio 2. Bajo nivel 3. Moderado nivel 4. Alto nivel	El ítem puede ser eliminado sin que se vea afectada la medición de la dimensión. El ítem tiene alguna relevancia, pero otro ítem puede estar incluyendo lo que mide este. El ítem es relativamente importante. El ítem es muy relevante y debe ser incluido

Tabla 5.

CALIFICACIONES POR CATEGORÍA

Dimensión	Ítem	Suficiencia	Claridad	Coherencia	Relevancia	Observaciones
Aceptación del concepto de la derivada.	**1**					
	2					
	3					
	4					
	5					
	6					
	7					
	8					
	9					
	10					

¿Hay alguna dimensión que hace parte del constructo y no fue evaluada? ¿cuál?

____

____

____

____

El estadístico V de Aiken es una medida utilizada en el análisis factorial confirmatorio para evaluar la *validez* convergente de un constructo, proporcionando información sobre la consistencia de los indicadores en la medición de dicho constructo subyacente.

El término "constructo" en psicología se refiere a un concepto que no es directamente observable, pero que es creado por el investigador con el fin de sintetizar o explicar patrones o conexiones que detecta en el comportamiento.

Para este cuestionario, el constructo a medir es “Aceptación del concepto de la derivada.” en un grupo de estudiantes de nivel medio superior. Cada ítem del cuestionario es utilizado para medir el constructo.

La validez convergente se refiere a la medida en que múltiples indicadores están relacionados entre sí. El valor estadístico V de Aiken oscila entre 0 y 1, dónde un valor cercano a 1 indica una mayor convergencia entre los indicadores y, por lo tanto, una mejor validez.

El valor del estadístico V de Aiken se calcula de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{V_m} = \frac{\mathbf{S}}{[\mathbf{n}(\mathbf{c}-\mathbf{1})]}$$

Donde:

V_m: Valor del estadístico de Aiken

S: Sumatoria de la valoración de los jueces por ítem

n: Número de jueces

c: Número de niveles de la escala de valoración utilizada

El cuestionario desarrollado para el constructo consta de 10 ítems y 4 categorías, por lo que, el Coeficiente de Validez (V) para este valor es de 0.73 (véase **Tabla 6**). Asimismo, se consideró el criterio de 10 jueces quiénes otorgaron calificaciones entre 1 y 4 a los ítems.

Tabla 6.

PROBABILIDADES DE COLA DERECHA (P) PARA VALORES SELECCIONADOS DEL COEFICIENTE DE VALIDEZ (V).

TABLE 1

Right-Tail Probabilities (p) for Selected Values of the Validity Coefficient (V)

No. of Items (*m*) or Raters (*n*)	Number of Rating Categories (c) 2		3		4		5		6		7	
	V	p	V	p	V	p	V	p	V	p	V	p
2							1.00	.040	1.00	.028	1.00	.020
3							1.00	.008	1.00	.005	1.00	.003
3			1.00	.037	1.00	.016	.92	.032	.87	.046	.89	.029
4					1.00	.004	.94	.008	.95	.004	.92	.006
4			1.00	.012	.92	.020	.88	.024	.85	.027	.83	.029
~~5~~			~~1.00~~	~~.004~~	.93	.006	.90	.007	.88	.007	.87	.007
~~5~~	~~1.00~~	~~.031~~	~~.90~~	~~.025~~	.87	.021	.80	.040	.80	.032	.77	.047
6			.92	.010	.89	.007	.88	.005	.83	.010	.83	.008
6	1.00	.016	.83	.038	.78	.050	.79	.029	.77	.036	.75	.041
7			.93	.004	.86	.007	.82	.010	.83	.006	.81	.008
~~7~~	~~1.00~~	~~.008~~	~~.86~~	~~.016~~	~~.76~~	~~.045~~	.75	.041	.74	.038	.74	.036
8	1.00	.004	.88	.007	.83	.007	.81	.008	.80	.007	.79	.007
8	.88	.035	.81	.024	.75	.040	.75	.030	.72	.039	.71	.047
9	1.00	.002	.89	.003	.81	.007	.81	.006	.78	.009	.78	.007
9	.89	.020	.78	.032	.74	.036	.72	.038	.71	.039	.70	.040
10	1.00	.001	.85	.005	.80	.007	.78	.008	.76	.009	.75	.010
10	.90	.001	.75	.040	$\boxed{.73}$	.032	.70	.047	.70	.039	.68	.048
11	.91	.006	.82	.007	.79	.007	.77	.006	.75	.010	.74	.009
11	.82	.033	.73	.048	.73	.029	.70	.035	.69	.038	.68	.041
12	.92	.003	.79	.010	.78	.006	.75	.009	.73	.010	.74	.008
12	.83	.019	.75	.025	.69	.046	.69	.041	.68	.038	.67	.049
13	.92	.002	.81	.005	.77	.006	.75	.006	.74	.007	.72	.010
13	.77	.046	.73	.030	.69	.041	.67	.048	.68	.037	.67	.041

Se obtuvieron los siguientes resultados por ítem (I_i , $i = \overline{1,10}$) presentados en las Tablas 7, 8, 9 y 10. Al transcribir a una hoja de cálculo las calificaciones otorgadas por los jueces a la suficiencia, claridad, coherencia y relevancia, se realizaron los procedimientos necesarios para calcular el estadístico.

Tabla 7.

CÁLCULO DE LA SUFICIENCIA

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}
SUMA	40	38	34	38	38	39	38	40	40	37
S	30	28	24	28	28	29	28	30	30	27
V_m	1	0.9333	0.8	0.9333	0.9333	0.9667	0.9333	1	1	0.9

Tabla 8.

CÁLCULO DE LA CLARIDAD

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}
SUMA	38	35	37	37	38	36	38	38	39	36
S	28	25	27	27	28	26	28	28	29	26
V_m	0.9333	0.8333	0.9	0.9	0.9333	0.8667	0.9333	0.9333	0.9667	0.8667

Tabla 9.

CÁLCULO DE LA COHERENCIA

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}
SUMA	38	39	34	40	38	40	39	40	38	38
S	28	29	24	30	28	30	29	30	28	28
V_m	0.9333	0.9667	0.8	1	0.9333	1	0.9667	1	0.9333	0.9333

Tabla 10.

CÁLCULO DE LA RELEVANCIA

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}
SUMA	40	38	31	40	38	38	40	40	38	37
S	30	28	21	30	28	28	30	30	28	27
V_m	1	0.9333	0.7	1	0.9333	0.9333	1	1	0.9333	0.9

Los hallazgos de esta investigación muestran que al 90% de los ítems evaluados se les otorgó la calificación más alta, es decir, un 4 en una escala que va del 1 al 4. Además de que todos los ítems cumplen con al menos un 90% en cada una de las 4 categorías como se muestra en la **Tabla 11**.

Tabla 11.

CATEGORÍA Y PORCENTAJE DE LOS ÍTEMS.

CATEGORÍA	PORCENTAJE
SUFICIENCIA	*94%*
CLARIDAD	*90%*
COHERENCIA	*90%*
RELEVANCIA	*90%*

Todos los ítems muestran resultados por arriba del valor del Coeficiente de Validez (V), el cual tiene un valor de 0.73 (ejemplo: $0.9333 > 0.73$), con esto se considera que hay una alta convergencia entre los indicadores y, por lo tanto, una buena validez convergente del constructo.

A la luz de los resultados expuestos en este estudio, se puede afirmar que el instrumento "Cuestionario para medir la aceptación de los estudiantes respecto a la introducción de la derivada mediante un problema económico" y sus componentes reflejan y miden de manera precisa el constructo que se busca evaluar.

4.4.3. Resultados de la aplicación del cuestionario

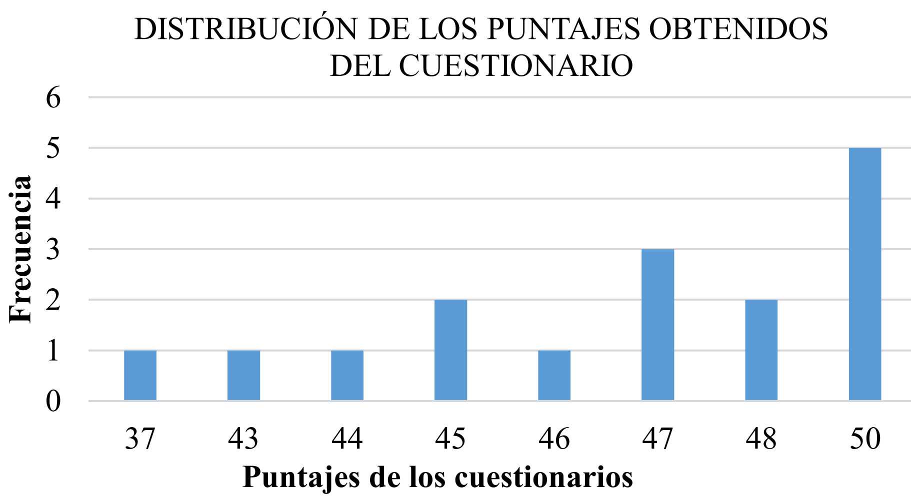
Una vez hecho el análisis de validez y confiabilidad del instrumento, se procedió a la aplicación del cuestionario a los alumnos; fue autoadministrado en un contexto grupal, es decir, el cuestionario se proporcionó directamente a los alumnos participantes, no hubo intermediarios y las respuestas las marcaron ellos.

Se recopilaron 16 cuestionarios en total, los cuales fueron evaluados a través de medidas descriptivas, distribución de frecuencias y visualización gráfica para comprender las tendencias generales y el comportamiento de las respuestas. Cada estudiante pudo obtener entre 10 y 50 puntos, en función de su valoración a lo largo de los 10 ítems. Las respuestas se categorizan en una escala de Likert, con valores entre 1 ("Muy insatisfecho") y 5 ("Muy satisfecho").

La puntuación media obtenida por los estudiantes fue de 46.69 sobre 50. Esto indica que, en promedio, los estudiantes mostraron un alto nivel de satisfacción con la introducción de la derivada en un contexto económico. La mediana, es decir, el punto central en la distribución de los puntajes fue de 47. Esto significa que la mitad de los estudiantes obtuvo una puntuación de 47 o más, confirmando la tendencia hacia una alta satisfacción. El puntaje más frecuente, o moda, fue de 50. Cinco estudiantes, o el 31.25% del total, otorgaron la máxima calificación posible, lo que muestra que una porción significativa de los alumnos quedó completamente satisfecha con la actividad (Figura 46.).

Figura 46.

GRÁFICA DE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS PUNTAJES OBTENIDOS DEL CUESTIONARIO.



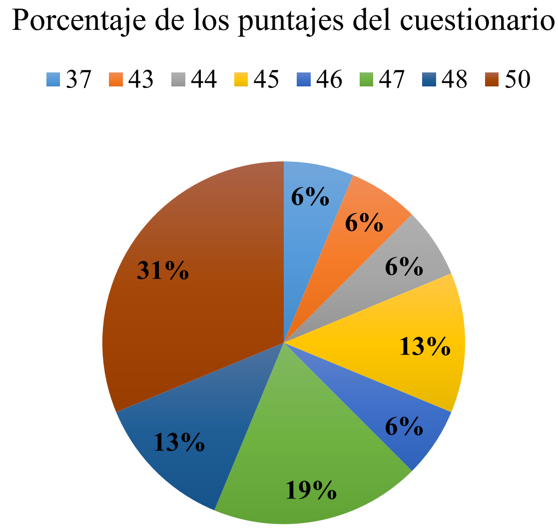
La desviación estándar fue de 3.46, lo cual sugiere que hubo una dispersión moderada en las puntuaciones, pero con una tendencia general hacia la satisfacción, la variabilidad de los puntajes no es muy alta, lo que refuerza la tendencia hacia puntajes altos y muestra que la mayoría de los estudiantes tuvo una experiencia positiva similar.

El análisis de los porcentajes de puntajes refleja lo siguiente:

El 31.25% de los estudiantes (5 de 16) obtuvo el puntaje máximo de 50, lo que sugiere que estos alumnos quedaron completamente satisfechos con la introducción de la derivada mediante el problema de economía. El 18.75% de los estudiantes obtuvo puntajes en torno a 47 y 48, manteniendo la tendencia hacia respuestas altamente positivas y solo un 6.25% (1 estudiante) reportó un puntaje más bajo, con 37 puntos, lo cual sigue estando relativamente cerca del promedio total (Figura 47.).

Figura 47.

GRÁFICA DEL PORCENTAJE DE LOS PUNTAJES DEL CUESTIONARIO.



4.4.4. Interpretación de los resultados

Los resultados obtenidos muestran una clara tendencia hacia la satisfacción por parte de los estudiantes, ya que la mayoría reportó puntajes altos. La concentración de puntajes en torno a 47-50 puntos sugiere que los estudiantes no solo entendieron la relevancia de la derivada en el contexto económico, sino que además apreciaron la forma en que fue presentada.

El valor de la moda de 50 puntos, junto con una desviación estándar relativamente baja, refuerza que la actividad fue bien recibida por la mayoría, con muy pocos estudiantes expresando insatisfacción. La introducción de la derivada mediante un problema de economía resultó ser altamente efectiva desde el punto de vista de la satisfacción estudiantil.

La media y la mediana cercanas a los 47 puntos reflejan que la mayoría de los estudiantes se sintió satisfecha o muy satisfecha con la actividad. Estos resultados sugieren que la introducción de la derivada en un contexto real, como en la economía, puede mejorar significativamente la aceptación y comprensión de conceptos matemáticos complejos.

Este análisis proporciona evidencia sólida para concluir que la metodología utilizada tuvo un impacto positivo en la percepción de los estudiantes sobre el aprendizaje de la derivada.

CONCLUSIONES

El análisis realizado a lo largo de cada una de las actividades de la mano de la descomposición genética y con la metodología de la Teoría APOE nos lleva a argumentar que los estudiantes reflexionan y comprenden de manera más clara algunas definiciones que la mayor parte del tiempo se introducen en el aula de manera abstracta, sin darles la oportunidad de experimentar e ir construyendo paso a paso una noción clara sobre la definición y así después poder hacer transformaciones y cálculos bajo el concepto construido. Cuando no se lleva a cabo esto, los estudiantes no comprenden lo que están haciendo, el porqué de los cálculos y, en consecuencia, al presentarles cualquier otro problema no logran identificar qué herramienta matemática podrían usar si no tienen la concepción de qué significa o para que se pueda implementar las matemáticas que han llevado a lo largo de su carrera estudiantil.

No todos los estudiantes lograron encapsular los Procesos, quedándose solamente en la interiorización de las Acciones que realizaban, esto se debió a que un pequeño porcentaje esta incómodo al trabajar en equipo debido a que sentían vergüenza al comentar con su equipo sus dudas y sobre todo porque estaban acostumbrados a que en las clases de matemáticas se trabaja de manera individual, lo que es algo muy tradicional en las escuelas. Otro factor es que a lo largo de la discusión la investigadora no clasificaba las respuestas como correctas o incorrectas, escuchaba atenta la opinión de todos los estudiantes y les respondía con otra pregunta para que profundizaran aún más en su argumento. Ellos preferían detectar si iban por buen camino cuando se hacía la discusión en grupo, si tenían cálculos similares a otros equipos más no respuestas, ya que cada uno tomaba elegía valores por decisión propia.

Los resultados obtenidos a través de la implementación del instrumento y el respectivo análisis nos permiten concluir que este enfoque de presentación a los alumnos conceptos matemáticos relacionados con problemas aplicados en otras áreas, como en el caso de la economía, resulta satisfactorio y eficaz para aumentar la comprensión en los estudiantes y a su vez la motivación por el estudio de las matemáticas. A la mayoría de los estudiantes les gustó trabajar en equipo ya que entre ellos compartían sus conocimientos y se sentían más relajados en la clase de matemáticas.

En términos del trabajo de modelación que llevaron a cabo los estudiantes tanto en el problema económico, así como en el antecedente a la experiencia, los equipos fueron capaces de relacionar todos los conceptos de manera óptima, no sólo aprendieron y entendieron las reglas de derivación, sino también aprendieron sobre economía y cómo se pueden relacionar los conceptos de matemáticas en otras áreas. La mayoría de los estudiantes realizaba Acciones y las interiorizaba. Estas Acciones estas se relacionaban con el cálculo de Tasa de Variación Media. El 70% de los estudiantes interiorizaron la Acción de calcular la Tasa de variación Instantánea y un 50% de entre ellos, mostró su encapsulación en el Proceso derivada de una función.

Este trabajo aportó a los estudiantes conocimiento de conceptos en la materia de cálculo con las definiciones de Tasa de Variación Media, Tasa de Variación Instantánea, un poco de Límite y principalmente de la Derivada- En el área de economía aportó conocimiento de Interés Simple, Ley de la Oferta y la Demanda y cálculo de la Elasticidad de la demanda. Es importante recordar que los estudiantes que participaron eran del área de Arquitectura y se sintieron atraídos por el tema debido a que en este campo se debe asegurar que los proyectos sean viables y sostenibles por lo que se deben analizar desde una perspectiva financiera y funcional, llevando a cabo presupuestación y control de costos, optimización de recursos y el estudio del impacto económico, entre otras cosas.

Los estudiantes evidenciaron una satisfactoria comprensión sobre el concepto de derivada al resolver el problema económico esto se fue dando a medida que trabajaban en equipo las actividades diseñadas con la descomposición genética. La mayoría de los alumnos concibieron el concepto de derivada a raíz de la búsqueda de soluciones al problema de modelación, el hacer suyo el problema y tratar de dar respuesta a las preguntas los motivó a indagar e involucrarse en la resolución de las actividades, además, el trabajo en equipo les otorgó la confianza y motivación necesaria de aportar ideas que aunque ellos consideraban pequeñas podían marcar la diferencia ante un concepto inexplorado para ellos: la derivada como razón de cambio.

Los resultados obtenidos permitieron comprender algunos aspectos importantes durante la construcción del concepto de derivada, sin embargo, una de las limitaciones presentadas durante el trabajo de investigación fue que se llevó a cabo con un grupo reducido de estudiantes de un nivel educativo particular, lo cual limita la generalización de los resultados a otros posibles entornos, se sugiere ampliar la población y llevarlo al nivel medio superior durante el quinto y sexto semestre donde los estudiantes empiezan a conocer el tema límite de funciones. Además de incorporar otros instrumentos de recolección de datos que proporcionen información valiosa y así llevar a cabo un análisis aún más profundo que evidencie aspectos que durante las discusiones en grupo se puedan perder, tales como una evaluación diagnóstica para saber en donde nos situamos con el grupo de alumnos antes de comenzar con la implementación de las actividades y así tener presente que saben o con qué otras ideas llegan a asociar ciertos conceptos matemáticos.

Finalmente, será necesario rediseñar las actividades propuestas en este trabajo de investigación de acuerdo a las necesidades del grupo en el que se pretenda implementar la introducción del concepto de la derivada, así como llevar a cabo mayor investigación y dedicar más sesiones con los estudiantes acerca de los conceptos económicos que intervienen en el problema de modelación, así como un repaso breve al tema: representación gráfica de funciones, de la mano con la descomposición genética de función recopilada en este trabajo.

REFERENCIAS

Amaro, G. (2020). *Análisis de la construcción de derivada en profesores de matemáticas de nivel medio superior basado en la teoría APOE.* [Tesis de Maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla] Repositorio Institucional BUAP. https://hdl.handle.net/20.500.12371/11585

Ariza, Á., & Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de bachillerato y universidad. *ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS: revista de investigación y experiencias didácticas, 27*(1), 121–136.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., & Mathews, D. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Maa Notes, 2, 37–54. https://doi.org/10.1090/cbmath/006/01

Asiala, M., Cottrill, J., & Dubinsky, E. (1997). The Development of Student's Graphical Understanding of the Derivate. *Journal of Mathematical behavior, 16*(4), 339–431.

Azcárate, C., Bosch, D., Casadevall, M., & Casellas, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral.* SINTESIS Editorial.

Azcárate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. Edición especial: Educación Matemática, X* (2), 135–149.

Badillo, E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia. Universidad Autónoma de Barcelona.

Bassanezi, R. (2002). *Ensino aprendizagem com modelagem matemática*. Editora contexto.

Blomhøj, M. (2008). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. *Revista de Educación Matemática, 23*(2), 20–35.

Blum, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education - discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*(5), 149–171. https://doi.org/10.1023/A:1022435827400

Carmines, E. G. & Zeller, R. A. (1979). Reliability and validity assessment. *Quantitative Applications in the Social Sciences.* Sage Publications.

Corral, Y. (2009). VALIDEZ Y CONFIABILIDAD DE LOS INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN PARA LA RECOLECCIÓN DE DATOS. *Revista ciencias de la educación*, 19(33), 228–247. http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/n33/art12.pdf

Dolores, C., García-García, J., & Gálvez-Pacheco, A. (2017). Estabilidad y cambio conceptual acerca de las razones de cambio en situación escolar. *Educación matemática, 29*(2), 125–158. https://doi.org/10.24844/EM2902.05

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación matemática, 8*(3), 24–41. https://doi.org/10.24844/EM

Durón, N. (2011). Cálculo diferencial e integral con aplicaciones a la economía, demografía y seguros.

https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/43250861/analisis-libre.pdf?1456892043=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DCALCULO_DIFERENCIAL_E_INTEGRAL_CON_APLIC.pdf&Expires=1677822325&Signature=JiDZRPNqJ5QwiFoy4as7WvDdr5o2XEUiXaqKdE7N3AC4sheiGlJSo

Escobar-Pérez, J., & Cuervo-Martínez, Á. (2008). VALIDEZ DE CONTENIDO Y JUICIO DE EXPERTOS: UNA APROXIMACIÓN A SU UTILIZACIÓN. *Avances en Medición, 6*(1), 27–36. https://www.researchgate.net/publication/302438451

Flores-Peñafiel, A. (2014). Enfoque conceptual del cálculo en la formación de docentes: Ejemplos con uso de tecnología interactiva. *El cálculo y su Enseñanza*, 5, 1–26. https://doi.org/10.61174/recacym.v5i1.111

Flores, W., & Salinas, M. (2013). Metodologías en la enseñanza de la derivada: URACCAN-Nueva Guinea. *Ciencia e Interculturalidad, 12*(1), 39–49.

Gómez, D. (2016). Aplicación de las derivadas para el cálculo del máximo y mínimo del consumo eléctrico residencial. *CIENCIAMATRIA, 2*(2), 71–82.

González, J. L., Chávez, O. R., José, E., Ochoa, L., Barrón, J. V., & Álvarez, M. S. (2013). Comprensión del concepto de la derivada como razón de cambio. *Culcyt: Cultura Científica y Tecnológica*, *51*(1), 4–14.

Gutiérrez Mendoza, L., Buitrago Alemán, M. R., & Ariza Nieves, L. M. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista Científica General José María Córdova*, *15*(20), 137–153. https://doi.org/10.21830/19006586.170

Hernández-Sampieri, R. (2014). *Recolección de datos cuantitativos*. En Metodología de la Investigación (pp. 196–267). McGRAW-HILL.

Israël, G. (1996). *La mathématisation du réel. Essai sur la modelisation mathématique.* Editions du SEUIL.

Kelly, A. E., & Lesh, R. A. (Eds.). (2012). Handbook of research design in mathematics and science education. *Routledge*. https://doi.org/10.4324/9781410602725

Luque Ribelles, V., & Herrera Sánchez, I. (2015). INVESTIGACIÓN CUALITATIVA EN EL ESTUDIO DE LA ACULTURACIÓN DE LA POBLACIÓN INMIGRANTE MARROQUÍ EN ANDALUCÍA. *La aplicación de la Teoría Fundamentada. Revista de Antropología Experimental, 15*, 553–565. http://revistaselectronicas.ujaen.es/index.php/rae

Niss, M. (2012). Models and modelling in mathematics education. European Mathematical Society. *Newsletter, 86*, 49–52. https://doi.org/10.1515/dmvm-2006-0090

Rendón, P. A. (2009). *Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la Enseñanza para la comprensión.* [Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia]. Repositorio Institucional Universidad de Antioquía.

https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/525/1/ConceptualizacionRazonCambio01.pdf

Roa-Fuentes, S., & Oktac, A. (2010). CONSTRUCCIÓN DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA: ANÁLISIS TEÓRICO DEL CONCEPTO TRANSFORMACIÓN LINEAL. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, 12*(1), 89–112.

Salett Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática*, *16*(2), 105-125.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267–296.

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E., & Vidakovic, D. (2008). A SEARCH FOR A CONSTRUCTIVIST APPROACH FOR UNDERSTANDING THE UNCOUNTABLE SET P(N). *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11*(1), 93–125.

Stevens, S. S. (1946). Sobre la Teoría de las Escalas de Medición. *Science*, *103*(2684), 677-680.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa, 9*(46), 75–87.

Trigueros, M., & Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l'enseingnement de l'Algébre linéaire. En *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *10*, 157–176.

Vidal Rojas, O. (2012). *Interpretación de la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos.* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Universidad Nacional.

https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/11310/oscareduardovidalrojas.2012.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: Un marco de referencia y un ejemplo. *TecnoLógicas, 19*, 63-86. https://doi.org/10.22430/22565337.505

Williams, M., Grinnell, R. M., & Unrau, Y. A. (2005). Case levels design. Social work: Research and evaluation. *Quantitative and qualitative approaches*, *7*, 171-184.

Zambrano, R. A., Ávila, D. I. E., & Medrano, E. F. (2019). Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación. *Educación Matemática, 31*(1), 258–280. https://doi.org/10.24844/EM3101.10