



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

**La ecuación de Schrödinger en el
espacio de momentos**

Tesis

Para obtener el título de

Maestro en Ciencias (Física Aplicada)

Presenta

Crescencio Luna García

Asesor de Tesis

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo

Puebla, Pue.

Mayo 2016



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

**La ecuación de Schrödinger en el
espacio de momentos**

Tesis

Para obtener el título de
Maestro en Ciencias (Física Aplicada)

Presenta

Crescencio Luna García

Asesor de Tesis

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo

Puebla, Pue.

Mayo 2016

Título: La ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos
Estudiante: CRESCENCIO LUNA GARCÍA

COMITÉ

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Presidente

Dr. Alberto Escalante Hernández
Secretario

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Vocal

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Suplente

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo
Asesor

A mis padres

Agradecimientos

Agradezco a mi madre, por todo el apoyo que me ha brindado, y por que se que sin su ayuda no lo hubiera logrado.

Agradezco a todas las personas que me permitieron concluir este trabajo apropiadamente, a mis compañeros de la escuela que me ayudaron cuando pudieron, y a todas las personas de las que he aprendido a ser mejor.

Agradezco al Conacyt, por la beca que me permitió realizar mis estudios de maestría.

Índice

| | |
|--|-----------|
| Agradecimientos | II |
| Resumen | V |
| 1 Introducción | 1 |
| 2 La representación de momentos | 3 |
| 3 Solución mediante núcleos separables | 10 |
| 4 Ejemplos | 14 |
| 4.1 Pozo delta de Dirac | 14 |
| 4.2 Pozo doble delta de Dirac | 19 |
| 4.3 Una variante al pozo doble delta de Dirac | 25 |
| 4.4 Generalización a potenciales M deltas de Dirac | 30 |
| 5 Método alternativo de solución | 43 |
| 5.1 Ejemplo | 43 |
| Conclusiones | 45 |
| Bibliografía | 46 |

Resumen

En la presente tesis se partirá de la ecuación de Schrödinger en el espacio de configuración para obtener, mediante la Transformada de Fourier, la correspondiente ecuación en el espacio de momentos. Así, se encontrará que la ecuación de Schrödinger en la representación de momentos es una ecuación integral homogénea de segunda clase, donde el potencial en ésta representación resulta estar en el núcleo de la ecuación integral. Finalmente, se procederá a encontrar soluciones exactas de la ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos mediante métodos de solución de ecuaciones integrales.

Capítulo 1

Introducción

La ecuación de Schrödinger, que originalmente fue propuesta por el físico Erwin Schrödinger en 1926, es una ecuación en derivadas parciales donde la incógnita es la función de onda dependiente de la posición y del tiempo. Sin embargo, debido a que en mecánica cuántica la posición y el momento juegan papeles semejantes a la hora de describir los sistemas, se sabe que también es posible encontrar una función de onda que dependa del momento y del tiempo. La relación entre ambas funciones de onda viene dada mediante la Transformada de Fourier. Uno de los procedimientos para obtener la función de onda en el espacio de momentos es aplicar directamente la Transformada de Fourier a la función de onda en el espacio de posiciones, lo cual resulta ser un método bastante directo si ya se conoce a la función de onda en el espacio de posiciones. Otra manera menos inmediata es partir de la ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos, la cual resulta ser una ecuación integral, y tratar de resolverla por los métodos existentes para resolver ecuaciones integrales. Hasta ahora no se conocen muchos ejemplos de soluciones exactas obtenidas directamente de la ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos, algunos que se pueden mencionar son la partícula libre, el oscilador armónico simple, partícula en un campo constante [7] y el átomo de Hidrógeno [6]. Sin embargo, a pesar de que no es muy común resolver la ecuación de Schrödinger de esta manera, algunas de las ventajas de hacerlo así es que en algunos casos los cálculos se simplifican considerablemente [7], y en otros casos se hacen evidentes ciertas propiedades que de otra forma no lo serían, tal como es el caso de simetrías ocultas en el átomo de Hidrógeno [6].

En este trabajo se utilizará el método de solución por núcleos separables para ecuaciones integrales con la finalidad de encontrar soluciones exactas a la ecuación de Schrödinger en la representación de momentos. En el capítulo 2, se deduce la ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos partiendo

de la ecuación de Schrödinger en el espacio de posiciones. Se encuentra que los potenciales dependientes del momento y de la posición, respectivamente, están relacionados mediante la Transformada de Fourier, y entonces se halla una condición que debe cumplir el potencial en la representación de momentos de tal manera que corresponda a un potencial físicamente posible en la representación de posiciones. En el capítulo 3 se muestra el método general para resolver la ecuación de Schrödinger por núcleos separables. En el capítulo 4 se desarrolla lo más explícitamente posible el método de núcleos separables para potenciales deltas de Dirac, los cuales resultan ser un gran ejemplo de aplicación de éste método. Finalmente, en el capítulo 5 se muestra una manera alternativa de hallar la función de onda en el espacio de momentos mediante constantes de movimiento.

Capítulo 2

La representación de momentos

Comenzando con la ecuación de Schrödinger como la postuló Erwin Schrödinger (ecuación en derivadas parciales donde la incógnita es la función de onda dependiente de la posición y del tiempo) se obtiene una ecuación integral en el espacio de momentos.

Las funciones de onda en la representación de momentos y posiciones están relacionadas mediante la transformada de Fourier:

$$\Phi(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \Psi(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{x} \quad (2.1)$$

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \Phi(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p}. \quad (2.2)$$

La ecuación de Schrödinger en el espacio de configuración es

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) + V(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t), \quad (2.3)$$

por lo que, sustituyendo la ecuación (2.2) en (2.3),

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[\int \Phi(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p} \right] = - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \nabla^2 \left[\int \Phi(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p} \right] + V(\mathbf{x}, t) \int \Phi(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p}, \quad (2.4)$$

donde el término

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) \nabla^2 \left[\int \Phi(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p} \right] &= -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) \int \Phi(\mathbf{p}, t) \nabla^2 \left(e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar} \right) d^3\mathbf{p} \\ &= -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) \int \Phi(\mathbf{p}, t) \left(-\frac{P^2}{\hbar^2} \right) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p} \\ &= \int \frac{P^2}{2m} \Phi(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p}, \end{aligned}$$

con $P = |\mathbf{p}|$.

Por lo tanto al sustituir dicho término en la ecuación (2.4), ésta se convierte en

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[\int \Phi(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p} \right] &= \int \frac{P^2}{2m} \Phi(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p} \\ &\quad + V(\mathbf{x}, t) \int \Phi(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p}. \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}'/\hbar}$ e integrando sobre todo el espacio de configuraciones se obtiene

$$\begin{aligned} \int \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[\int \Phi(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')/\hbar} d^3\mathbf{p} \right] \right\} d^3\mathbf{x} &= \int \left\{ \int \frac{P^2}{2m} \Phi(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')/\hbar} d^3\mathbf{p} \right\} d^3\mathbf{x} \\ &\quad + \int \left\{ V(\mathbf{x}, t) \int \Phi(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')/\hbar} d^3\mathbf{p} \right\} d^3\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Intercambiando el orden de integración se tiene que

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \int \left[\int e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')/\hbar} d^3\mathbf{x} \right] \Phi(\mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p} &= \int \frac{P^2}{2m} \Phi(\mathbf{p}, t) \left[\int e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')/\hbar} d^3\mathbf{x} \right] d^3\mathbf{p} \\ &\quad + \int \left[\int V(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')/\hbar} d^3\mathbf{x} \right] \Phi(\mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p}. \end{aligned}$$

Usando el hecho de que $\int e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')/\hbar} d^3\mathbf{x} = (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ [2], la ecuación anterior se convierte en

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \int \left[(2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \right] \Phi(\mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p} &= \int \frac{P^2}{2m} \Phi(\mathbf{p}, t) \left[(2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \right] d^3\mathbf{p} \\ &\quad + \int \left[\int V(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')/\hbar} d^3\mathbf{x} \right] \Phi(\mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} (2\pi\hbar)^3 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{p}', t) &= (2\pi\hbar)^3 \frac{P'^2}{2m} \Phi(\mathbf{p}', t) \\ &\quad + \int \left[\int V(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')/\hbar} d^3\mathbf{x} \right] \Phi(\mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Definiendo

$$W(\mathbf{p}, t) = \int V(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{x}, \quad (2.6)$$

la ecuación (2.5) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} (2\pi\hbar)^3 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{p}', t) &= (2\pi\hbar)^3 \frac{P'^2}{2m} \Phi(\mathbf{p}', t) \\ &+ \int W(\mathbf{p} - \mathbf{p}', t) \Phi(\mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p}. \end{aligned}$$

A manera de tener la ecuación de Schrödinger con las variables que nos son familiares, intercambiamos los nombres de \mathbf{p}' y \mathbf{p} en la ecuación anterior para obtener

$$\begin{aligned} (2\pi\hbar)^3 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{p}, t) &= (2\pi\hbar)^3 \frac{P^2}{2m} \Phi(\mathbf{p}, t) \\ &+ \int W(\mathbf{p}' - \mathbf{p}, t) \Phi(\mathbf{p}', t) d^3\mathbf{p}'. \end{aligned} \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) es la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en el espacio de momentos. Es una ecuación integral debido a que la función de onda aparece dentro del signo de integración. En esta ecuación W es el potencial en la representación de momentos, y como puede observarse, aparece evaluado en $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$ y t , contrario a lo que ocurre en la representación de coordenadas, donde el potencial resulta estar evaluado sólo en la posición y el tiempo, sin necesidad de tener alguna otra variable para establecer la ecuación de Schrödinger.

En general cuando se trabaja en el espacio de configuración, el potencial $V(\mathbf{x}, t)$ resulta ser real, hecho que se desprende de pedir que el Hamiltoniano sea Hermítico. Entonces, suponiendo que V es real, es posible saber qué condición debe satisfacer W de tal forma que, si sabemos que W cumple dicha condición, nos aseguremos de que el potencial en el espacio de posiciones sea real, aún sin antes haber calculado explícitamente la forma de dicho potencial. Esto puede ser útil, por ejemplo, cuando uno intenta encontrar soluciones a la ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos partiendo únicamente del potencial W , sin conocer de antemano V (lo cual nos evitaría calcular la Transformada de Fourier desde el comienzo), y entonces uno se preguntaría si vale la pena tratar de resolver tal potencial, y en ese caso dicha condición nos indicaría si sí o no.

Partiendo de la definición de W , multiplicando la ecuación (2.6) por $e^{-i\mathbf{x}'\cdot\mathbf{p}/\hbar}$

$$\begin{aligned} W(\mathbf{p}, t)e^{-i\mathbf{x}'\cdot\mathbf{p}/\hbar} &= \left(\int V(\mathbf{x}, t)e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{x} \right) e^{-i\mathbf{x}'\cdot\mathbf{p}/\hbar} \\ &= \int V(\mathbf{x}, t)e^{i(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{x}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$W(\mathbf{p}, t)e^{-i\mathbf{x}'\cdot\mathbf{p}/\hbar} = \int V(\mathbf{x}, t)e^{i(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{x}.$$

Integrando la ecuación anterior sobre todo el espacio de momentos

$$\begin{aligned} \int W(\mathbf{p}, t)e^{-i\mathbf{x}'\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p} &= \int \int V(\mathbf{x}, t)e^{i(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} \\ &= \int V(\mathbf{x}, t) \left(\int e^{i(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p} \right) d^3\mathbf{x} \\ &= \int V(\mathbf{x}, t) ((2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) d^3\mathbf{x} \\ &= (2\pi\hbar)^3 V(\mathbf{x}', t), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$V(\mathbf{x}', t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int W(\mathbf{p}, t)e^{-i\mathbf{x}'\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p}. \quad (2.8)$$

Luego, sacando el conjugado de la ecuación anterior,

$$V^*(\mathbf{x}', t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int W^*(\mathbf{p}, t)e^{i\mathbf{x}'\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p}, \quad (2.9)$$

y debido a que V es real, (2.8) y (2.9) deben ser iguales, de lo que se sigue que

$$\int W(\mathbf{p}, t)e^{-i\mathbf{x}'\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p} = \int W^*(\mathbf{p}, t)e^{i\mathbf{x}'\cdot\mathbf{p}/\hbar} d^3\mathbf{p}.$$

Multiplicando la ecuación anterior por $e^{-i\mathbf{x}'\cdot\mathbf{p}'/\hbar}$ e integrando sobre \mathbf{x}'

$$\int \int W(\mathbf{p}, t)e^{-i\mathbf{x}'\cdot(\mathbf{p}+\mathbf{p}')/\hbar} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{x}' = \int \int W^*(\mathbf{p}, t)e^{i\mathbf{x}'\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')/\hbar} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{x}',$$

e intercambiando el orden de las integrales,

$$\int W(\mathbf{p}, t) \left(\int e^{-i\mathbf{x}'\cdot(\mathbf{p}+\mathbf{p}')/\hbar} d^3\mathbf{x}' \right) d^3\mathbf{p} = \int W^*(\mathbf{p}, t) \left(\int e^{i\mathbf{x}'\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')/\hbar} d^3\mathbf{x}' \right) d^3\mathbf{p},$$

$$\int W(\mathbf{p}, t)(2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}') d^3\mathbf{p} = \int W^*(\mathbf{p}, t)(2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') d^3\mathbf{p}.$$

Finalmente se obtiene que

$$W(-\mathbf{p}, t) = W^*(\mathbf{p}, t). \quad (2.10)$$

La condición (2.10) es la condición necesaria y suficiente para saber que se está trabajando con sistemas cuyos potenciales en la representación de posiciones son reales, incluso aunque no se conozcan explícitamente. Ésta condición es general, y es aplicable a cualquier potencial W en la representación de momentos dado. En los potenciales que se trabajarán más adelante se cumplirá esta condición.

Los resultados que se han obtenido hasta aquí tienen involucrados al tiempo en las ecuaciones de manera explícita, es decir, se tiene a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo donde aparece también la función de energía potencial W dependiente del tiempo. De esta forma es difícil encontrar soluciones exactas (y no es muy común) a la ecuación de Schrödinger, por lo que para resolver la ecuación (2.7) se supondrá que el potencial W es independiente del tiempo (lo cual es equivalente a que V sea independiente del tiempo), y entonces se resolverá la ecuación (2.7) con el mismo método que se hace en la representación de coordenadas: separación de variables.

De esta manera, se buscan soluciones de la forma

$$\Phi(\mathbf{p}, t) = \phi(\mathbf{p})\varphi(t). \quad (2.11)$$

Sustituyendo la ecuación (2.11) en (2.7),

$$(2\pi\hbar)^3 i\hbar\phi(\mathbf{p}) \frac{d}{dt}\varphi(t) = (2\pi\hbar)^3 \frac{P^2}{2m}\phi(\mathbf{p})\varphi(t) + \int W(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\phi(\mathbf{p}')\varphi(t)d^3\mathbf{p}',$$

y luego, dividiendo la ecuación anterior entre $(2\pi\hbar)^3 \phi(\mathbf{p})\varphi(t)$,

$$i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int W(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \frac{\phi(\mathbf{p}')}{\phi(\mathbf{p})} d^3\mathbf{p}'. \quad (2.12)$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior depende únicamente de t , mientras que el lado derecho depende de \mathbf{p} solamente, lo cual sólo puede ocurrir si ambos miembros de la ecuación son igual a una constante. De esta manera, del miembro izquierdo se obtiene que

$$i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{d}{dt}\varphi(t) = E, \quad (2.13)$$

donde se ha nombrado a la constante de separación E tal como se hace en la representación de posiciones. De manera similar, del miembro derecho

$$\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int W(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \frac{\phi(\mathbf{p}')}{\phi(\mathbf{p})} d^3\mathbf{p}' = E,$$

o equivalentemente,

$$\frac{P^2}{2m} \phi(\mathbf{p}) + \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int W(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \phi(\mathbf{p}') d^3\mathbf{p}' = E\phi(\mathbf{p}). \quad (2.14)$$

Ahora, por un lado la solución de la ecuación (2.13) se conoce de la representación de posiciones [1], la cual es

$$\varphi(t) = e^{-iEt/\hbar}. \quad (2.15)$$

Por otro lado, la ecuación (2.14) es la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en el espacio de momentos, la cual no puede ser resuelta de manera general sino hasta que sea conocida explícitamente la forma del potencial. De esta manera, uno espera que la solución general a la ecuación (2.7) tenga la forma

$$\Phi(\mathbf{p}, t) = \phi(\mathbf{p})e^{-iEt/\hbar}. \quad (2.16)$$

Las soluciones del tipo (2.16) son llamados estados estacionarios, debido a que cuando uno calcula la densidad de probabilidad, el resultado no depende del tiempo, concretamente

$$|\Phi(\mathbf{p}, t)|^2 = |\Phi(\mathbf{p})|^2. \quad (2.17)$$

Además, como ocurre con la solución de la ecuación de Schrödinger en la representación de coordenadas, uno esperaría también que en el espacio de momentos la solución más general a la ecuación (2.7) sea una combinación lineal de estados estacionarios

$$\Phi(\mathbf{p}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \phi_n(\mathbf{p}) e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (2.18)$$

Por otra parte, la interpretación física de la función de onda en el espacio de momentos es en el mismo sentido que la del espacio de posiciones. Así, la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula entre \mathbf{p} y $\mathbf{p} + d^3\mathbf{p}$ es

$$|\Phi(\mathbf{p}, t)|^2 d^3\mathbf{p}, \quad (2.19)$$

y en este caso la condición de normalización establece que

$$\int |\Phi(\mathbf{p}, t)|^2 d^3\mathbf{p} = 1, \quad (2.20)$$

y el valor esperado de p_i se define como

$$\langle p_i \rangle = \int p_i |\Phi(\mathbf{p}, t)|^2 d^3\mathbf{p}. \quad (2.21)$$

Por lo tanto, se puede ver que existen muchas analogías entre las propiedades de las soluciones a la ecuación de Schrödinger en ambas representaciones, sin embargo, la ecuación de Schrödinger resulta ser en cierto modo¹, opuesta una de la otra en las distintas representaciones.

¹Pues en la representación de posiciones es una ecuación diferencial, mientras que en momentos es una ecuación integral.

Capítulo 3

Solución mediante núcleos separables

Una vez conocidas las principales características de la ecuación de Schrödinger y la función de onda en el espacio de momentos, es momento de profundizar en el método que se desarrollará aquí para resolver de manera exacta la ecuación de Schrödinger en esta representación para ciertos casos específicos de potenciales. Debido a que los ejemplos que se tratarán mas adelante son casos de potenciales unidimensionales, resulta conveniente escribir las ecuaciones obtenidas para el caso unidimensional.

Así, para el caso unidimensional, de (2.7) la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es

$$(2\pi\hbar) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(p, t) = (2\pi\hbar) \frac{p^2}{2m} \Phi(p, t) + \int W(p' - p, t) \Phi(p', t) dp', \quad (3.1)$$

donde, según (2.6)

$$W(p, t) = \int V(x, t) e^{ixp/\hbar} dx. \quad (3.2)$$

Además, si W no depende del tiempo (que equivale a que V tampoco lo haga), la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es

$$\frac{p^2}{2m} \phi(p) + \frac{1}{2\pi\hbar} \int W(p' - p) \phi(p') dp' = E \phi(p), \quad (3.3)$$

donde en este caso

$$W(p) = \int V(x)e^{ixp/\hbar} dx. \quad (3.4)$$

De la ecuación (2.10) es fácil ver que para el caso unidimensional y para potenciales independientes del tiempo

$$W(-p) = W^*(p). \quad (3.5)$$

Y de igual manera, para potenciales independientes del tiempo, la solución general a la ecuación (3.1) resulta ser de la forma:

$$\Phi(p, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \phi_n(p) e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (3.6)$$

donde $\phi_n(p)e^{-iE_n t/\hbar}$ son las soluciones separables a la ecuación de Schrödinger para potenciales unidimensionales. En este caso la condición de normalización establece que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(p, t)|^2 dp = 1. \quad (3.7)$$

En general, para resolver la ecuación de Schrödinger (3.3), se propondrá un potencial conocido en la representación de posiciones con el cual mediante la ecuación (3.4) se calculará el respectivo potencial en la representación de momentos, y entonces se procederá a resolver la ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos (3.3).

Cuando uno trata de resolver una ecuación integral como la (3.3), uno encuentra que no existe un método general para realizar tal fin, sino que el método a seguir depende de la forma explícita de dicha ecuación, es decir, depende de la forma del núcleo de la ecuación. En lo que sigue, nos limitaremos a resolver la ecuación de Schrödinger (3.3) mediante el método de núcleos separables, lo cual no es una gran limitación, pues como se verá más adelante, es un buen procedimiento para encontrar soluciones exactas a la ecuación de Schrödinger.

Para comenzar, reescribimos la ecuación (3.3) de una manera más conveniente

$$\int K(p, p') \phi(p') dp' = \phi(p), \quad (3.8)$$

donde

$$K(p, p') = \frac{W(p' - p)}{2\pi\hbar \left(E - \frac{p^2}{2m}\right)}. \quad (3.9)$$

La ecuación (3.8) es la ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos escrita de una manera más compacta, y (3.9) es el núcleo de dicha ecuación. El método de núcleos separables consiste básicamente en proponer que el núcleo de la ecuación integral pueda descomponerse en una suma finita de productos de funciones que dependen únicamente de p por funciones que dependan sólo de p' , es decir, se propone que

$$K(p, p') = \sum_{j=1}^n M_j(p)N_j(p'). \quad (3.10)$$

De esta manera, sustituyendo la ecuación (3.10) en (3.8) se obtiene que

$$\phi(p) = \int \sum_{j=1}^n M_j(p)N_j(p')\phi(p')dp' = \sum_{j=1}^n M_j(p) \int N_j(p')\phi(p')dp',$$

donde, definiendo

$$u_j = \int N_j(p')\phi(p')dp' \quad (3.11)$$

se llega a

$$\phi(p) = \sum_{j=1}^n u_j M_j(p). \quad (3.12)$$

Por lo tanto, la función de onda será una combinación lineal de las $M_j(p)$, la cual existirá siempre y cuando puedan calcularse los coeficientes u_j , es decir, cuando sean convergentes las integrales de la definición (3.11).

A manera de calcular los coeficientes u_j , multipliquemos la ecuación (3.12) por $N_i(p)$ e integremos sobre p para obtener

$$\int N_i(p)\phi(p)dp = \int N_i(p) \sum_{j=1}^n u_j M_j(p)dp = \sum_{j=1}^n u_j \int N_i(p)M_j(p)dp.$$

Luego, reconociendo el primer miembro de la ecuación anterior como u_i , y definiendo

$$T_{ij} = \int N_i(p)M_j(p)dp, \quad (3.13)$$

se obtiene

$$u_i = \sum_{j=1}^n u_j T_{ij}. \quad (3.14)$$

La ecuación anterior representa un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, por lo que es imposible calcular desde ahí los coeficientes u_j , en lugar de eso, de (3.14) podemos hallar condiciones para la energía, tal como se descubrirá en los ejemplos específicos.

Capítulo 4

Ejemplos

A continuación se hallan soluciones para la ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos, se encuentran la función de onda y las energías permitidas de los sistemas a resolver.

4.1 Pozo delta de Dirac

El ejemplo más sencillo que se puede resolver mediante el procedimiento desarrollado en el capítulo anterior es el pozo delta de Dirac.

En este caso

$$V(x) = -\alpha\delta(x), \quad \alpha > 0. \quad (4.1)$$

El primer paso es calcular el potencial en el espacio de momentos, para

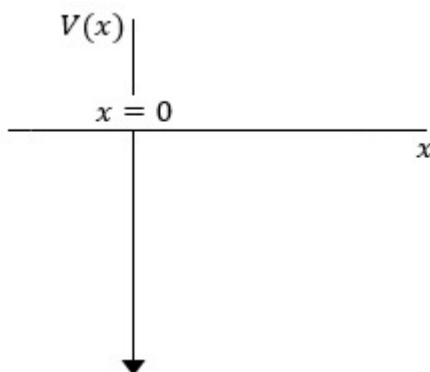


Figura 4.1: Pozo delta de Dirac.

ello hacemos uso de los resultados conocidos, utilizando la ecuación (3.4) se obtiene que

$$W(p) = \int -\alpha \delta(x) e^{ixp/\hbar} dx = -\alpha \int \delta(x) e^{ixp/\hbar} dx = -\alpha e^{i0 \cdot p/\hbar} = -\alpha,$$

por lo tanto,

$$W(p) = -\alpha. \quad (4.2)$$

Luego, de la definición (3.9) se tiene que el núcleo de la ecuación de Schrödinger es

$$K(p, p') = \frac{-\alpha}{2\pi\hbar \left(E - \frac{p^2}{2m}\right)} = \frac{m\alpha}{\pi\hbar (p^2 - 2mE)}, \quad (4.3)$$

por lo que sustituyendo el núcleo anterior en la ecuación (3.8), es fácil ver que la ecuación de Schrödinger por resolver es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m\alpha}{\pi\hbar (p^2 - 2mE)} \phi(p') dp' = \phi(p). \quad (4.4)$$

En este caso, el núcleo de la ecuación integral sólo depende de p , por lo que se puede escribir como

$$K(p, p') = M(p)N(p'),$$

donde,

$$M(p) = \frac{m\alpha}{\pi\hbar (p^2 - 2mE)}, \quad N(p') = 1.$$

Debido a que el núcleo se puede separar como en (3.10), la ecuación (3.12) nos dice que la solución es

$$\phi(p) = uM(p). \quad (4.5)$$

Además de la ecuación (3.14),

$$u = uT, \quad (4.6)$$

donde, según (3.13)

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} N(p)M(p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \frac{m\alpha}{\pi\hbar (p^2 - 2mE)} dp$$

$$T = \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p^2 - 2mE} dp. \quad (4.7)$$

Para calcular la última integral es conveniente saber un poco más acerca del tipo de soluciones que se buscan. En general, cuando uno resuelve la ecuación de Schrödinger, uno encuentra que las soluciones pueden ser de dos clases diferentes, es decir, podemos encontrar funciones de onda que representen estados ligados o de dispersión. A lo largo de todos los ejemplos que se resolverán en este capítulo se buscarán estados ligados, es decir, se supondrá que la energía es negativa para cada sistema.

Tomando en consideración lo anterior, podemos definir $\omega = \sqrt{-2mE}$ de tal manera que ω sea real positiva, por lo que la integral que aparece en la ecuación (4.7) puede ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p^2 - 2mE} dp = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \omega^2} dp.$$

Mediante el cambio de variable $z = \frac{p}{\omega}$; $dz = \frac{dp}{\omega}$, la integral anterior se resuelve como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p^2 - 2mE} dp = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \frac{1}{\omega} \arctan(z) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{\omega},$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p^2 - 2mE} dp = \frac{\pi}{\sqrt{-2mE}}. \quad (4.8)$$

Luego, sustituyendo la integral anterior en (4.7) se obtiene

$$T = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}.$$

Entonces, sustituyendo T en la ecuación (4.6),

$$u = u \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}$$

o,

$$u \left(1 - \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} \right) = 0.$$

La ecuación anterior se satisface ya sea si $u = 0$, o si el término entre paréntesis es igual a cero. Pero si $u = 0$ no se estaría encontrando algo

nuevo, más bien se estaría hallando la solución trivial a la ecuación integral (4.4), $\phi(p) = 0$, lo cual no es lo que se busca. Por lo tanto, u debe ser distinto de cero, y entonces la expresión encerrada entre paréntesis es la que debe ser cero para que la ecuación sea satisfecha. Así,

$$1 - \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} = 0,$$

de donde es posible despejar la energía permitida del sistema:

$$\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} = 1,$$

$$\frac{m^2\alpha^2}{\hbar^2(-2mE)} = 1,$$

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}. \quad (4.9)$$

Por otra parte, de la ecuación (4.5)

$$\phi(p) = u \frac{m\alpha}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)}, \quad (4.10)$$

donde la constante u que aparece en la solución puede ser calculada mediante la condición de normalización, la cual en este caso dice que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(p)|^2 dp = 1,$$

por lo tanto

$$|u|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{m\alpha}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} \right|^2 dp = 1,$$

de lo cual se sigue que

$$|u|^2 = \frac{1}{\frac{m^2\alpha^2}{\pi^2\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p^2 - 2mE)^2} dp}. \quad (4.11)$$

La integral de la última ecuación puede calcularse como sigue:

Sea $p = y\sqrt{-2mE}$; $dp = \sqrt{-2mE}dy$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p^2 - 2mE)^2} dp = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{-2mE}}{(-2mEy^2 - 2mE)^2} dy = \frac{1}{(-2mE)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(y^2 + 1)^2} dy.$$

Ahora, sea $y = \tan \theta$; $dy = \sec^2 \theta d\theta$, así

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p^2 - 2mE)^2} dp &= \frac{1}{(-2mE)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(y^2 + 1)^2} dy \\ &= \frac{1}{(-2mE)^{3/2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec^2 \theta}{(\tan^2 \theta + 1)^2} d\theta \\ &= \frac{1}{(-2mE)^{3/2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta, \end{aligned}$$

por lo tanto, usando el hecho de que $\cos^2 \theta = 1/2 + \cos(2\theta)/2$, es fácil obtener

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p^2 - 2mE)^2} dp = \frac{\pi}{2(-2mE)^{3/2}}. \quad (4.12)$$

Luego, sustituyendo la integral anterior en (4.11) uno obtiene

$$|u|^2 = \frac{1}{\frac{m^2 \alpha^2}{2\pi \hbar^2 (-2mE)^{3/2}}} = 2\pi \frac{(-2mE)^{3/2}}{\frac{m^2 \alpha^2}{\hbar^2}},$$

donde el término $m^2 \alpha^2 / \hbar^2$ se puede poner en términos de la energía según la ecuación (4.9), de donde se obtiene que

$$\frac{m^2 \alpha^2}{\hbar^2} = -2mE. \quad (4.13)$$

Sustituyendo dicho término en $|u|^2$,

$$|u|^2 = 2\pi(-2mE)^{1/2},$$

y escogiendo u real y positivo,

$$u = \sqrt{2\pi}(-2mE)^{1/4}.$$

Por lo tanto, sustituyendo el valor de u en la ecuación (4.10), uno encuentra que la función de onda es:

$$\phi(p) = \sqrt{2\pi}(-2mE)^{1/4} \frac{m\alpha}{\pi \hbar (p^2 - 2mE)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m\alpha}{\hbar} (-2mE)^{1/4} \frac{1}{p^2 - 2mE}.$$

Finalmente, usando el hecho de que $m\alpha/\hbar$ se puede poner en términos de la energía según (4.13), se obtiene

$$\phi(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-2mE)^{3/4} \frac{1}{p^2 - 2mE}. \quad (4.14)$$

4.2 Pozo doble delta de Dirac

Otro potencial de gran relevancia que se puede resolver en el espacio de momentos mediante el método de núcleos separables es el pozo doble delta de Dirac. El potencial en el espacio de coordenadas es

$$V(x) = -\alpha\delta(x+l) - \alpha\delta(x-l), \quad \alpha > 0. \quad (4.15)$$

De igual manera que en el ejemplo anterior, lo primero que se debe hacer es

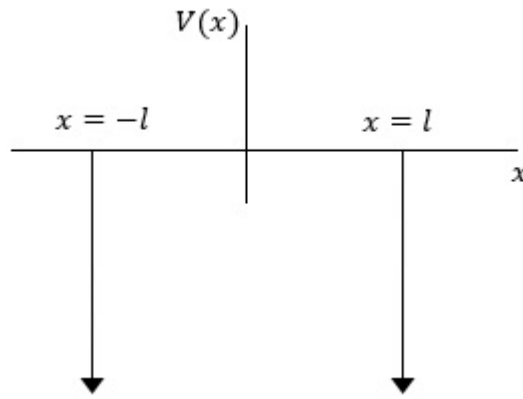


Figura 4.2: Pozo doble delta de Dirac.

calcular el potencial en la representación de momentos. De la ecuación (3.2) se tiene que

$$W(p) = \int_{-\infty}^{\infty} [-\alpha\delta(x+l) - \alpha\delta(x-l)] e^{ixp/\hbar} dx = -\alpha e^{-ilp/\hbar} - \alpha e^{ilp/\hbar},$$

$$W(p) = -\alpha e^{-ilp/\hbar} - \alpha e^{ilp/\hbar}. \quad (4.16)$$

Entonces, una vez obtenida W , sustituyamos $W(p' - p)$ en (3.9) para encontrar que el núcleo de la respectiva ecuación de Schrödinger es

$$K(p, p') = \frac{-\alpha e^{-il(p'-p)/\hbar} - \alpha e^{il(p'-p)/\hbar}}{2\pi\hbar \left(E - \frac{p^2}{2m}\right)} = \frac{m\alpha [e^{-il(p'-p)/\hbar} - \alpha e^{il(p'-p)/\hbar}]}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)},$$

por lo que la ecuación por resolver es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m\alpha [e^{-il(p'-p)/\hbar} - \alpha e^{il(p'-p)/\hbar}]}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} \phi(p') dp' = \phi(p). \quad (4.17)$$

Para resolverla notemos que el núcleo de la ecuación se puede separar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} K(p, p') &= \frac{m\alpha e^{ip/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} \cdot e^{-ip'/\hbar} + \frac{m\alpha e^{-ip/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} \cdot e^{ip'/\hbar} \\ &= M_1(p)N_1(p') + M_2(p)N_2(p'), \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde,

$$M_1(p) = \frac{m\alpha e^{ip/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} \quad N_1(p') = e^{-ip'/\hbar}$$

$$M_2(p) = \frac{m\alpha e^{-ip/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} \quad N_2(p') = e^{ip'/\hbar}.$$

Debido a que el núcleo de la ecuación integral (4.17) se puede separar como en (4.18), la ecuación (3.12) nos dice que la función de onda será

$$\begin{aligned} \phi(p) &= u_1 M_1(p) + u_2 M_2(p) \\ &= u_1 \frac{m\alpha e^{ip/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} + u_2 \frac{m\alpha e^{-ip/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

En este caso la función de onda posee dos constantes arbitrarias diferentes, las cuales serán encontradas primero notando que la ecuación (3.14) nos dice que una es proporcional a la otra, y entonces, poniendo a la función de onda en términos de una sola constante, para aplicar la condición de normalización y obtener el valor de la constante restante. Para comenzar, de la ecuación (3.14) obtenemos

$$\begin{aligned} u_1 &= T_{11}u_1 + T_{12}u_2 & u_1(T_{11} - 1) + u_2T_{12} &= 0 \\ u_2 &= T_{21}u_1 + T_{22}u_2 & u_1T_{21} + u_2(T_{22} - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Aquí es importante notar que, como se mencionó antes, del sistema de ecuaciones (4.20) no es posible hallar directamente los valores de u_1 y u_2 , pues se trata de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo 2×2 , el cual tiene solución diferente a la trivial si y sólo si su determinante es igual a cero, y en ese caso, solo se llegaría a la conclusión de que un término es proporcional al otro. Además, como es necesario que tales constantes existan para poder tener una solución, y además, como es necesario que dichas constantes sean distintas de cero para poder obtener una solución diferente a la trivial, el determinante forzosamente debería ser igual a cero, pues de lo contrario la

función de onda quedaría indeterminada. Sin embargo, debido a que los coeficientes del sistema de ecuaciones dependen de la energía (pues los T_{ij} están en función de $M_s(p)$ y $N_s(p)$), sí es posible imponer que el determinante sea cero, y a partir de ahí obtener la relación que debe cumplir la energía del sistema, de tal manera que de esa relación obtengamos la energía del sistema. Tomando esto en consideración, imponiendo que el determinante de (4.20) sea cero, se tiene que

$$\begin{vmatrix} T_{11} - 1 & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (4.21)$$

donde los elementos T_{ij} están dados por (3.13):

$$\begin{aligned} T_{11} &= \int_{-\infty}^{\infty} N_1(p)M_1(p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ilp/\hbar} \frac{m\alpha e^{ilp/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} dp \\ &= \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p^2 - 2mE} dp. \end{aligned}$$

En este problema también se buscan estados ligados del sistema, por lo que se supone que la energía es negativa $E < 0$. De esa forma, la última integral ya se ha calculado en (4.8), por lo que sustituyéndola en la ecuación anterior, se encuentra que T_{11} es

$$T_{11} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}.$$

Además,

$$\begin{aligned} T_{22} &= \int_{-\infty}^{\infty} N_2(p)M_2(p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ilp/\hbar} \frac{m\alpha e^{-ilp/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} dp \\ &= \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p^2 - 2mE} dp = T_{11}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$T_{22} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} T_{12} &= \int_{-\infty}^{\infty} N_1(p)M_2(p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ilp/\hbar} \frac{m\alpha e^{-ilp/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} dp \\ &= \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ilp/\hbar}}{p^2 - 2mE} dp \\ &= \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{p^2 - 2mE} dp - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2lp/\hbar)}{p^2 - 2mE} dp \right]. \end{aligned}$$

Ahora, debido a que el integrando que involucra a la función seno es una función impar, y como se está integrando de $-\infty$ a ∞ , esa integral es igual a cero, por lo tanto

$$T_{12} = \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{p^2 - 2mE} dp.$$

Para calcular la integral que aparece en T_{12} , sustituyamos $\sqrt{-2mE}$ por ω , y hagamos el cambio de variable $p = \omega z$, de tal manera que $dp = \omega dz$, así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{p^2 - 2mE} dp = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2l\omega z/\hbar)}{(\omega z)^2 + \omega^2} \omega dz = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2l\omega z/\hbar)}{z^2 + 1} dz.$$

La última integral puede ser evaluada sabiendo que [3]

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\epsilon x)}{\epsilon^2 + 1} d\epsilon = \frac{\pi}{2} e^{-|x|},$$

y entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\epsilon x)}{\epsilon^2 + 1} d\epsilon = \pi e^{-|x|}.$$

Si en la integral anterior ponemos $x = 2l\omega/\hbar$ y $\epsilon = z$, esta última se convierte en la integral buscada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(z 2l\omega/\hbar)}{z^2 + 1} dz = \pi e^{-2l\omega/\hbar}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{p^2 - 2mE} dp = \frac{\pi}{\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}. \quad (4.22)$$

Entonces, sustituyendo la integral anterior en T_{12} se obtiene

$$T_{12} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}.$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} T_{21} &= \int_{-\infty}^{\infty} N_2(p) M_1(p) dp = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ilp/\hbar} \frac{m\alpha e^{ilp/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} dp \\ &= \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ilp/\hbar}}{p^2 - 2mE} dp \\ &= \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{p^2 - 2mE} dp + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2lp/\hbar)}{p^2 - 2mE} dp \right] \\ &= \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{p^2 - 2mE} dp = T_{12}, \end{aligned}$$

por lo que

$$T_{21} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}.$$

Finalmente, se ha encontrado que $T_{11} = T_{22}$ y $T_{12} = T_{21}$, por lo que sabiendo esto, la ecuación (4.21) toma la forma

$$\begin{vmatrix} T_{11} - 1 & T_{12} \\ T_{12} & T_{11} - 1 \end{vmatrix} = (T_{11} - 1)^2 - T_{12}^2 = 0.$$

Luego, sustituyendo los valores de T_{11} y T_{12} en la última expresión

$$\left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 \right)^2 - \left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} \right)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 \right)^2 = \left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} \right)^2.$$

Ahora, se sabe que si $c^2 = b^2$, entonces $c = b$ o $c = -b$, de esta forma, la última expresión nos dice que

$$\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 = \pm \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}. \quad (4.23)$$

La ecuación (4.23) es una ecuación trascendente que tiene como incógnita a la energía, la cual, debido a la naturaleza de las ecuaciones trascendentes, no puede ser resuelta de manera analítica, sino que es necesario asignar valores numéricos a la masa de la partícula, la distancia al origen de cada pozo y la profundidad de los pozos para encontrar valores aproximados de la energía.

Por otro lado, para encontrar los valores de las constantes u_1 y u_2 que aparecen en la solución (4.19), del sistema de ecuaciones (4.20), es fácil ver que la relación entre u_1 y u_2 es:

$$u_1 = u_2 \frac{T_{12}}{1 - T_{11}} = u_2 \frac{\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}}{1 - \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}} = \pm u_2,$$

donde se ha utilizado la relación (4.23). De esta forma, sustituyendo u_1 en términos de u_2 en la ecuación (4.19) se encuentra que la función de onda en el espacio de momentos es

$$\phi(p) = u_2 \left[\pm \frac{m\alpha e^{ip/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} + \frac{m\alpha e^{-ip/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} \right]. \quad (4.24)$$

La constante que aparece en la función de onda se calcula mediante la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(p)|^2 dp = 1.$$

Para eso, primero calculemos $|\phi(p)|^2$:

$$\begin{aligned} |\phi(p)|^2 &= \phi(p)\phi^*(p) \\ &= u_2 \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \left[\pm \frac{e^{ip/\hbar}}{p^2 - 2mE} + \frac{e^{-ip/\hbar}}{p^2 - 2mE} \right] \\ &\quad \times u_2^* \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \left[\pm \frac{e^{-ip/\hbar}}{p^2 - 2mE} + \frac{e^{ip/\hbar}}{p^2 - 2mE} \right] \\ &= |u_2|^2 \left(\frac{m\alpha}{\pi\hbar} \right)^2 \left\{ \frac{1}{(p^2 - 2mE)^2} + \frac{1}{(p^2 - 2mE)^2} \pm \left[\frac{e^{2ip/\hbar} + e^{-2ip/\hbar}}{(p^2 - 2mE)^2} \right] \right\} \\ &= 2|u_2|^2 \left(\frac{m\alpha}{\pi\hbar} \right)^2 \left\{ \frac{1}{(p^2 - 2mE)^2} \pm \frac{\cos(2lp/\hbar)}{(p^2 - 2mE)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso la condición de normalización dice que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} 2|u_2|^2 \left(\frac{m\alpha}{\pi\hbar} \right)^2 \left\{ \frac{1}{(p^2 - 2mE)^2} \pm \frac{\cos(2lp/\hbar)}{(p^2 - 2mE)^2} \right\} dp &= 1, \\ 2|u_2|^2 \left(\frac{m\alpha}{\pi\hbar} \right)^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p^2 - 2mE)^2} dp \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{(p^2 - 2mE)^2} dp \right\} &= 1, \end{aligned}$$

de esta manera,

$$|u_2|^2 = \left\{ 2 \left(\frac{m\alpha}{\pi\hbar} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p^2 - 2mE)^2} dp \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{(p^2 - 2mE)^2} dp \right] \right\}^{-1},$$

o, escogiendo u_2 real y positivo:

$$u_2 = \left\{ 2 \left(\frac{m\alpha}{\pi\hbar} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p^2 - 2mE)^2} dp \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{(p^2 - 2mE)^2} dp \right] \right\}^{-1/2}. \quad (4.25)$$

Ahora, las integrales que aparecen en (4.25) se pueden encontrar fácilmente, y de hecho, la primera ya se ha calculado anteriormente en (4.12):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p^2 - 2mE)^2} dp = \frac{\pi}{2(-2mE)^{3/2}}.$$

Para calcular la segunda integral, primero hagamos $\sqrt{-2mE} = \omega$ para reescribir dicha integral como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{(p^2 - 2mE)^2} dp = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{(p^2 + \omega^2)^2} dp = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{(p^2 + \omega^2)^2} dp.$$

La última integral se encuentra sabiendo que [3]

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} dx = \frac{\pi}{4b^3} (1 + ab) e^{-ab} \quad (a > 0, b > 0),$$

por lo que, si ponemos $x = p$, $a = 2l/\hbar$ y $b = \omega$ en dicha integral obtenemos la integral deseada:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{(p^2 + \omega^2)^2} dp = \frac{\pi}{4\omega^3} (1 + 2l\omega/\hbar) e^{-2l\omega/\hbar}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{(p^2 - 2mE)^2} dp = \frac{\pi}{2(-2mE)^{3/2}} \left(1 + \frac{2l\sqrt{-2mE}}{\hbar} \right) e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}. \quad (4.26)$$

Finalmente, sustituyendo las integrales (4.12) y (4.26) en (4.25) obtenemos el valor de la constante u_2 :

$$u_2 = \left\{ \left(\frac{m\alpha}{\pi\hbar} \right)^2 \frac{\pi}{(-2mE)^{3/2}} \left[1 \pm \left(1 + \frac{2l\sqrt{-2mE}}{\hbar} \right) e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} \right] \right\}^{-1/2}.$$

Para concluir, una vez calculada la constante u_2 se procede a colocarla en la ecuación (4.24) para obtener la función de onda normalizada.

4.3 Una variante al pozo doble delta de Dirac

Otro ejemplo ilustrativo de cómo hallar funciones de onda en el espacio de momentos que representen estados ligados mediante el método de núcleos separables consiste en el siguiente potencial:

$$V(x) = \alpha\delta(x + l) - \alpha\delta(x - l), \quad \alpha > 0. \quad (4.27)$$

La diferencia entre este potencial y el pozo doble delta de Dirac es sólo el signo del primer término, y consiste básicamente en un pozo delta de Dirac en $x = l$ y una barrera de potencial delta de Dirac en $x = -l$.

Igualmente que en los ejemplos anteriores, primero calculemos W :

$$W(p) = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha\delta(x + l) - \alpha\delta(x - l)] e^{ixp/\hbar} dx = -\alpha (e^{ilp/\hbar} - e^{-ilp/\hbar}),$$

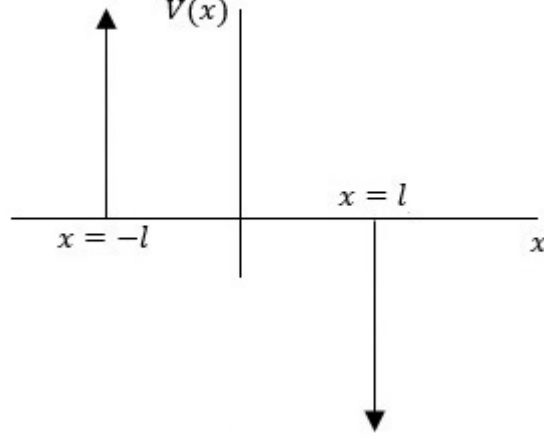


Figura 4.3: Una variante al pozo doble delta de Dirac.

$$W(p) = -\alpha (e^{ilp/\hbar} - e^{-ilp/\hbar}). \quad (4.28)$$

Luego, sustituyendo $W(p' - p)$ en la ecuación (3.9) se encuentra que el núcleo para la ecuación de Schrödinger en este caso es

$$K(p, p') = \frac{m\alpha [e^{il(p'-p)/\hbar} - e^{-il(p'-p)/\hbar}]}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)}, \quad (4.29)$$

y con la ayuda de la ecuación (3.8) se puede poner de manera explícita la ecuación de Schrödinger para este potencial

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m\alpha [e^{il(p'-p)/\hbar} - e^{-il(p'-p)/\hbar}]}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} \phi(p') dp' = \phi(p). \quad (4.30)$$

En este caso, el núcleo de la ecuación integral admite la siguiente descomposición:

$$\begin{aligned} K(p, p') &= \frac{m\alpha e^{-ilp/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} \cdot e^{ilp'/\hbar} - \frac{m\alpha e^{ilp/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} \cdot e^{-ilp'/\hbar} \\ &= M_1(p)N_1(p') + M_2(p)N_2(p') \end{aligned}$$

donde esta vez,

$$\begin{aligned} M_1(p) &= \frac{m\alpha e^{-ilp/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)}, & N_1(p') &= e^{ilp'/\hbar} \\ M_2(p) &= -\frac{m\alpha e^{ilp/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)}, & N_2(p') &= e^{-ilp'/\hbar}. \end{aligned}$$

Entonces, aplicando el método de núcleos separables se encuentra que, según (3.12), la función de onda es una combinación lineal de $M_1(p)$ y $M_2(p)$, por lo tanto

$$\phi(p) = u_1 \frac{m\alpha e^{-ip/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} - u_2 \frac{m\alpha e^{ip/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)}. \quad (4.31)$$

Para hallar las constantes u_1 y u_2 se realizará el mismo procedimiento que se desarrolló en el ejemplo anterior.

A manera de escribir de manera explícita el sistema de ecuaciones correspondiente a este problema, primero calculemos explícitamente los coeficientes T_{ij} :

$$T_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} M_1(p)N_1(p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m\alpha e^{-ip/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} e^{ip/\hbar} dp = \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p^2 - 2mE} dp,$$

entonces, haciendo uso de la integral (4.8) se encuentra que el valor T_{11} es:

$$T_{11} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} T_{22} &= \int_{-\infty}^{\infty} M_2(p)N_2(p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{m\alpha e^{ip/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} e^{-ip/\hbar} \right] dp \\ &= -\frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p^2 - 2mE} dp = -T_{11}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$T_{22} = -\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}.$$

Por otra parte,

$$T_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} M_1(p)N_2(p)dp = \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ip/\hbar}}{p^2 - 2mE} dp = \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{p^2 - 2mE} dp.$$

Ahora, la última integral ya se ha calculado en (4.22), por lo que sustituyéndola en la expresión anterior, se obtiene que

$$T_{12} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}.$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} T_{21} &= \int_{-\infty}^{\infty} M_2(p)N_1(p)dp = -\frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ilp/\hbar}}{p^2 - 2mE} \\ &= -\frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2lp/\hbar)}{p^2 - 2mE} = -T_{12} \end{aligned}$$

y entonces,

$$T_{21} = -\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}.$$

Una vez calculados los elementos T_{ij} para este problema, notemos que el sistema de ecuaciones que permite calcular la ecuación para la energía tiene la misma forma que en (4.20), sólo que en este caso, los coeficientes que se deben sustituir en el sistema de ecuaciones son los calculados recientemente. Así, sustituyendo los T_{ij} en (4.20) se encuentra lo siguiente

$$\begin{aligned} u_1 \left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 \right) + u_2 \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} &= 0 \\ -u_1 \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} + u_2 \left(-\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 \right) &= 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

de donde, si el determinante es igual a cero

$$\begin{vmatrix} \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 & \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} \\ -\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} & -\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 \end{vmatrix} = 0$$

se tiene

$$-\left[\left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} \right)^2 - 1 \right] + \left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} \right)^2 e^{-4l\sqrt{-2mE}/\hbar} = 0$$

o,

$$\left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} \right)^2 - 1 = \left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} \right)^2 e^{-4l\sqrt{-2mE}/\hbar}. \quad (4.33)$$

La ecuación anterior es la ecuación trascendente para la energía del sistema que se está tratando, y como puede uno darse cuenta, corresponde a elevar al cuadrado cada uno de los términos de la ecuación de la energía del pozo doble delta de Dirac por separado y luego sumarlos en el mismo orden.

Por otro lado, para calcular de manera explícita los valores u_1 y u_2 , de (4.32) se encuentra que dichas constantes están relacionadas por

$$u_1 = u_2 \frac{\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}}{1 - \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}}.$$

Sustituyendo u_1 en términos de u_2 en la función de onda (4.31) se obtiene que

$$\phi(p) = u_2 \left[\frac{\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}}{1 - \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}} \frac{m\alpha e^{-ilp/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} - \frac{m\alpha e^{ilp/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} \right], \quad (4.34)$$

donde u_2 se obtiene de la condición de normalización.

Recordando que la condición de normalización dice que $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(p)|^2 dp = 1$, es necesario primero calcular $|\phi(p)|^2$ para poder aplicar dicha condición. De esta manera, de (4.34) se puede ver que

$$\begin{aligned} |\phi(p)|^2 &= \phi(p)\phi^*(p) \\ &= u_2 \left[\frac{\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}}{1 - \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}} \frac{m\alpha e^{-ilp/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} - \frac{m\alpha e^{ilp/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} \right] \\ &\quad \times u_2^* \left[\frac{\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}}{1 - \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}} \frac{m\alpha e^{ilp/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} - \frac{m\alpha e^{-ilp/\hbar}}{\pi\hbar(p^2 - 2mE)} \right] \\ &= |u_2|^2 \left\{ \frac{(m\alpha)^4 e^{-4l\sqrt{-2mE}/\hbar}}{(\pi\hbar)^2 (\hbar\sqrt{-2mE} - m\alpha)^2} \frac{1}{(p^2 - 2mE)^2} + \left(\frac{m\alpha}{\pi\hbar} \right)^2 \frac{1}{(p^2 - 2mE)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(m\alpha)^3 e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}}{(\pi\hbar)^2 (\hbar\sqrt{-2mE} - m\alpha)} \left(\frac{e^{2ilp/\hbar} + e^{-2ilp/\hbar}}{(p^2 - 2mE)^2} \right) \right\} \\ &= |u_2|^2 \left\{ \left[\frac{(m\alpha)^4 e^{-4l\sqrt{-2mE}/\hbar}}{(\pi\hbar)^2 (\hbar\sqrt{-2mE} - m\alpha)^2} + \left(\frac{m\alpha}{\pi\hbar} \right)^2 \right] \frac{1}{(p^2 - 2mE)^2} \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{(m\alpha)^3 e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}}{(\pi\hbar)^2 (\hbar\sqrt{-2mE} - m\alpha)} \right] \frac{2 \cos(2lp/\hbar)}{(p^2 - 2mE)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Debido a que el módulo al cuadrado de la función de onda en este caso difiere sólo en un signo de aquel de la función de onda del pozo doble delta de Dirac, uno puede inferir que el valor de la constante u_2 para este caso será:

$$\begin{aligned} u_2 &= \left\{ \left[\frac{(m\alpha)^4 e^{-4l\sqrt{-2mE}/\hbar}}{(\pi\hbar)^2 (\hbar\sqrt{-2mE} - m\alpha)^2} + \left(\frac{m\alpha}{\pi\hbar} \right)^2 \right] \frac{\pi}{2(-2mE)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{(m\alpha)^3 e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}}{(\pi\hbar)^2 (\hbar\sqrt{-2mE} - m\alpha)} \right] \frac{\pi}{(-2mE)^{3/2}} \left(1 + \frac{2l\sqrt{-2mE}}{\hbar} \right) e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} \right\}^{-1/2}. \end{aligned}$$

Finalmente, sólo resta sustituir el valor encontrado de u_2 en (4.34) para obtener la función de onda normalizada.

4.4 Generalización a potenciales M deltas de Dirac

El método empleado para resolver los potenciales anteriores en el espacio de momentos puede ser aplicado para obtener de manera general la solución de potenciales con M deltas de Dirac involucradas.

Se considerarán tres casos principalmente, los cuales nos servirán para ilustrar cómo se recuperan los resultados obtenidos anteriormente poniendo los valores adecuados a M .

Primer caso:

El primer caso consiste en un potencial con $M = 2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) deltas de Dirac, donde todas las deltas tienen sus picos hacia abajo. Es fácil verificar que dicho potencial puede ser escrito como sigue:

$$V(x) = \sum_{t=-n}^n -\alpha\delta(x - tl), \quad \alpha > 0. \quad (4.35)$$

Mediante la ecuación (3.4) calculamos el potencial respectivo en el espacio

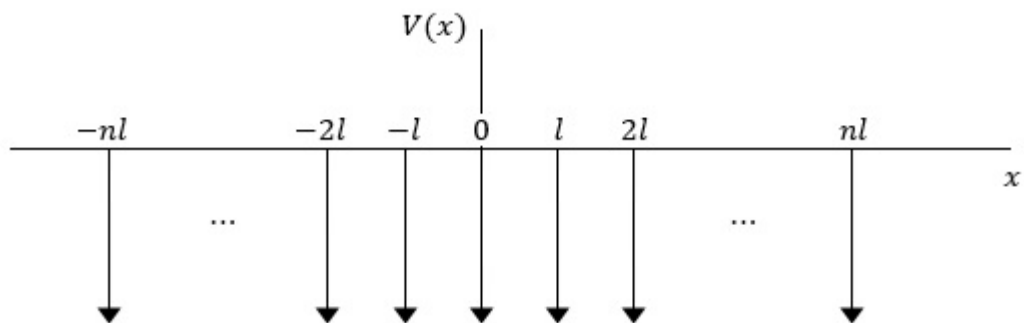


Figura 4.4: Pozo $2n + 1$ deltas de Dirac.

de momentos. Así

$$\begin{aligned} W(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} V(x)e^{ixp/\hbar} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{t=-n}^n -\alpha\delta(x-tl) \right] e^{ixp/\hbar} dx \\ &= - \sum_{t=-n}^n \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-tl)e^{ixp/\hbar} dx = - \sum_{t=-n}^n \alpha e^{itlp/\hbar}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$W(p) = - \sum_{t=-n}^n \alpha e^{itlp/\hbar}.$$

Luego, con la ayuda de la ecuación (3.9), se encuentra que el núcleo de la ecuación de Schrödinger en este caso es

$$K(p, p') = \sum_{t=-n}^n \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{e^{itl(p'-p)/\hbar}}{(p^2 - 2mE)}, \quad (4.36)$$

por lo que, según (3.8) la forma explícita de la ecuación de Schrödinger es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{t=-n}^n \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{e^{itl(p'-p)/\hbar}}{(p^2 - 2mE)} \phi(p') dp' = \phi(p). \quad (4.37)$$

La idea básica es aplicar directamente el método de solución de núcleos separables para resolver la ecuación integral (4.37). Para ello es conveniente reescribir el núcleo de la ecuación como sigue.

Haciendo el cambio en el índice de suma $j = t + n$ al núcleo (4.36) se tiene:

$$\begin{aligned} K(p, p') &= \sum_{t=-n}^n \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{e^{itl(p'-p)/\hbar}}{(p^2 - 2mE)} = \sum_{j=0}^{2n} \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{e^{i(j-n)l(p'-p)/\hbar}}{(p^2 - 2mE)} \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{e^{-i(j-n)lp/\hbar}}{(p^2 - 2mE)} \cdot e^{i(j-n)lp'/\hbar} = \sum_{j=0}^{2n} M_j(p) N_j(p') \end{aligned}$$

donde,

$$M_j(p) = \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{e^{-i(j-n)lp/\hbar}}{(p^2 - 2mE)} \quad N_j(p') = e^{i(j-n)lp'/\hbar}.$$

Como el núcleo es separable, la ecuación (3.12) nos dice que la función de onda es:¹

$$\phi(p) = \sum_{j=0}^{2n} u_j \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{e^{-i(j-n)lp/\hbar}}{(p^2 - 2mE)} \quad (4.38)$$

Las constantes u_j que aparecen en la solución (4.38) no se pueden expresar de una manera general, sino que se debe de dar un valor numérico a n para poder encontrar dichas constantes mediante el sistema de ecuaciones resultante, según la ecuación (3.14), y haciendo uso de la condición de normalización.

Por otra parte, sí es posible llegar a una ecuación general para la energía partiendo de la ecuación (3.14):²

$$u_k = \sum_{j=0}^{2n} u_j T_{kj}$$

o equivalentemente,

$$0 = \sum_{j=0}^{2n} u_j T_{kj} - u_k = \sum_{j=0}^{2n} u_j T_{kj} - \sum_{j=0}^{2n} u_j \delta_{kj} = \sum_{j=0}^{2n} u_j (T_{kj} - \delta_{kj}),$$

donde los T_{kj} están dados por la ecuación (3.13). Por lo tanto,

$$\sum_{j=0}^{2n} u_j (T_{kj} - \delta_{kj}) = 0, \quad (4.39)$$

poniendo explícitamente el sistema de ecuaciones anterior obtenemos,

$$\begin{aligned} u_0(T_{00} - 1) + u_1 T_{01} + u_2 T_{02} + \cdots + u_{2n} T_{0,2n} &= 0 \\ u_0 T_{10} + u_1(T_{11} - 1) + u_2 T_{12} + \cdots + u_{2n} T_{1,2n} &= 0 \\ &\vdots \\ u_0 T_{2n,0} + u_1 T_{2n,1} + u_2 T_{2n,2} + \cdots + u_{2n}(T_{2n,2n} - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

¹La sumatoria de la ecuación (3.12) corre de 1 a n , ésto debido a que el núcleo ahí así lo hace, aquí como el núcleo es una suma de 0 a $2n$, la solución $\phi(p)$ también debe ser una suma de 0 a $2n$.

²Note que se ha cambiado el índice i de la ecuación (3.14) por k ; ésto es para evitar confusiones con el número imaginario i en cálculos posteriores.

Ahora, como el sistema de ecuaciones anterior es homogéneo, es necesario que su determinante sea igual a cero para tener al menos una solución diferente a la trivial, y como se puede inferir de los ejemplos anteriores, dicho determinante será el que nos proporcione la ecuación para la energía:

$$\begin{vmatrix} T_{00} - 1 & T_{01} & T_{02} & \cdots & T_{0,2n} \\ T_{10} & T_{11} - 1 & T_{12} & \cdots & T_{1,2n} \\ & & \vdots & & \\ T_{2n,0} & T_{2n,1} - 1 & T_{2n,2} & \cdots & T_{2n,2n} - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.41)$$

Los coeficientes T_{kj} se pueden calcular de manera general como sigue:

De la definición (3.13),

$$T_{kj} = \int_{-\infty}^{\infty} N_k(p) M_j(p) dp,$$

pero en este problema

$$N_k(p) = e^{i(k-n)lp/\hbar}, \quad M_j(p) = \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{e^{-i(j-n)lp/\hbar}}{(p^2 - 2mE)},$$

por lo que,

$$\begin{aligned} T_{kj} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-n)lp/\hbar} \cdot \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{e^{-i(j-n)lp/\hbar}}{(p^2 - 2mE)} dp = \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k-j)lp/\hbar}}{(p^2 - 2mE)} dp \\ &= \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[(k-j)lp/\hbar]}{(p^2 - 2mE)} dp, \end{aligned}$$

donde se no se ha escrito la integral que involucra al seno debido a que es cero. Por lo tanto

$$T_{kj} = \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[(k-j)lp/\hbar]}{(p^2 - 2mE)} dp. \quad (4.42)$$

Haciendo $\omega = \sqrt{-2mE}$, y realizando el cambio de variable $p''\omega = p$, $dp''\omega = dp$ en la integral anterior

$$T_{kj} = \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[(k-j)lp''\omega/\hbar]}{((p''\omega)^2 + \omega^2)} \omega dp'' = \frac{m\alpha}{\pi\hbar\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[(k-j)l\omega p''/\hbar]}{(p''^2 + 1)} dp'',$$

luego con la ayuda de $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\epsilon x)}{\epsilon^2 + 1} d\epsilon = \pi e^{-|x|}$ [3], encontramos que

$$T_{kj} = \frac{m\alpha}{\hbar\omega} e^{-|(k-j)l\omega/\hbar|},$$

así,

$$T_{kj} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-l\sqrt{-2mE}|k-j|/\hbar}. \quad (4.43)$$

Finalmente, una vez obtenidas los T_{kj} , hemos encontrado todas las herramientas necesarias para aplicar los resultados obtenidos a casos particulares de n .

Caso $n = 0$:

Si $n = 0$, el potencial V es:

$$V(x) = -\alpha\delta(x).$$

Por lo tanto, cuando $n = 0$ el potencial (4.35) se reduce al pozo delta de Dirac centrado en $x = 0$. De esta manera, es de esperarse que la solución también coincida, veamos qué ocurre.

En este caso como $n = 0$, sólo existe el coeficiente T_{00} , el cual está dado por (4.43):

$$T_{00} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}},$$

por lo tanto, la condición (4.41) da

$$\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 = 0,$$

de donde se obtiene,

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}.$$

El resultado para la energía coincide con el resultado anteriormente obtenido en la ecuación (4.9), como debería de ser.

Por otra parte, de la ecuación (4.38) se puede ver que

$$\phi(p) = u_0 \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{1}{(p^2 - 2mE)}.$$

Ahora, si cambiamos de nombre a u_0 por u , es evidente que la función de onda obtenida aquí es la misma que la función de onda encontrada en (4.10).

Por lo tanto, sólo resta encontrar el valor de u_0 mediante la condición de normalización, tal y como se hizo cuando se resolvió el problema del pozo delta de Dirac directamente. Dicho procedimiento no tiene sentido realizar, pues es el mismo que se realizó en la sección 4.1.

Segundo caso:

El segundo caso de potencial con M deltas de Dirac, consiste en tener un pozo $M = 2n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) deltas de Dirac. La diferencia entre éste potencial y el anterior es básicamente que en el primero se incluía un pozo delta de Dirac en el origen, cosa que no ocurre con el potencial actual, donde se toma sólo en consideración los pozos deltas de Dirac a distancias múltiplos de l desde el origen.

Específicamente, estamos hablando del siguiente potencial

$$V(x) = \sum_{t=-n}^n (-\alpha + \alpha\delta_{0t})\delta(x - tl), \quad \alpha > 0, \quad (4.44)$$

donde δ_{0t} es la delta de Kronecker:

$$\delta_{0t} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Debido a la gran similitud entre éste potencial y el potencial (4.35) (pues

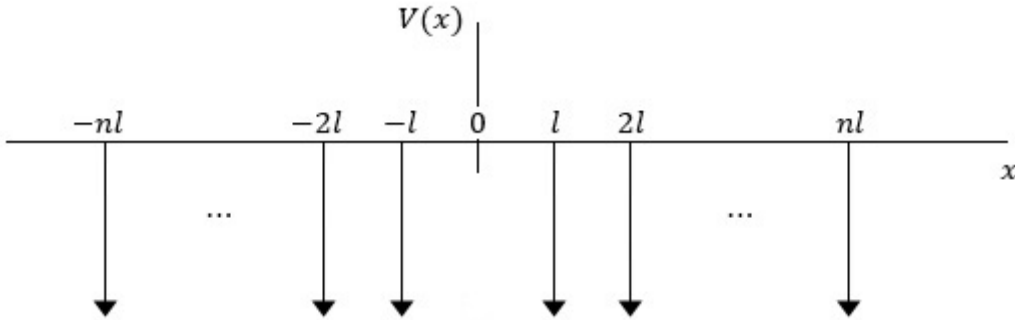


Figura 4.5: Pozo $2n$ deltas de Dirac.

sólo cambia una constante multiplicativa), es fácil obtener los resultados correspondientes al potencial actual. Mediante la ecuación (3.4) calculamos el potencial respectivo en el espacio de momentos. Así

$$W(p) = \sum_{t=-n}^n (-\alpha + \alpha\delta_{0t})e^{itlp/\hbar}, \quad (4.45)$$

y de (3.9) el núcleo en este caso es

$$K(p, p') = \sum_{t=-n}^n \frac{m(\alpha - \alpha\delta_{0t})}{\pi\hbar} \frac{e^{itl(p'-p)/\hbar}}{(p^2 - 2mE)}. \quad (4.46)$$

Haciendo el mismo cambio de variable que en el primer ejemplo, $j = t + n$, el núcleo en este caso también se puede poner como

$$K(p, p') = \sum_{j=0}^{2n} M_j(p)N_j(p'),$$

pero en esta ocasión:

$$M_j(p) = \frac{m(\alpha - \alpha\delta_{0,j-n})}{\pi\hbar} \frac{e^{-i(j-n)lp/\hbar}}{(p^2 - 2mE)} \quad N_j(p') = e^{i(j-n)lp'/\hbar}.$$

Entonces, la función de onda será:

$$\phi(p) = \sum_{j=0}^{2n} u_j \frac{m(\alpha - \alpha\delta_{0,j-n})}{\pi\hbar} \frac{e^{-i(j-n)lp/\hbar}}{p^2 - 2mE}, \quad (4.47)$$

donde los u_j obedecen las mismas ecuaciones (4.40) y (4.41), sólo que este caso, los T_{kj} que se deben de sustituir deben ser los que se calcularán a continuación.

Nuevamente, de la definición (3.13):

$$\begin{aligned} T_{kj} &= \int_{-\infty}^{\infty} N_k(p)M_j(p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-n)lp/\hbar} \cdot \frac{m(\alpha - \alpha\delta_{0,j-n})}{\pi\hbar} \frac{e^{-i(j-n)lp/\hbar}}{(p^2 - 2mE)} dp \\ &= \frac{m(\alpha - \alpha\delta_{0,j-n})}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k-j)lp/\hbar}}{(p^2 - 2mE)} dp \\ &= \frac{m(\alpha - \alpha\delta_{0,j-n})}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[(k-j)lp/\hbar]}{(p^2 - 2mE)} dp. \end{aligned}$$

Ahora, comparando el elemento T_{kj} con aquél del caso anterior (ecuación (4.42)), es fácil ver que en este caso:

$$T_{kj} = \frac{m(\alpha - \alpha\delta_{0,j-n})}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-l\sqrt{-2mE}|k-j|/\hbar}. \quad (4.48)$$

Por último, una vez que se han obtenido los principales resultados para éste último potencial, resulta conveniente, al igual que en el ejemplo anterior, considerar un caso particular para corroborar que los resultados obtenidos

son los correctos.

Caso $n = 1$:

En este caso si $n = 1$, el potencial V es:

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{t=-1}^1 (-\alpha + \alpha\delta_{0t})\delta(x - tl) \\ &= (-\alpha + \alpha\delta_{0,-1})\delta(x + l) + (-\alpha + \alpha\delta_{00})\delta(x) + (-\alpha + \alpha\delta_{01})\delta(x - l) \\ &= -\alpha\delta(x + l) - \alpha\delta(x - l), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$V(x) = -\alpha\delta(x + l) - \alpha\delta(x - l).$$

De esta manera, cuando $n = 1$ se trata con el pozo doble delta de Dirac.

En este caso, los elementos T_{kj} están dados por la ecuación (4.48):

$$T_{00} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}$$

$$T_{01} = 0$$

$$T_{02} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}$$

$$T_{10} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-l\sqrt{-2mE}/\hbar}$$

$$T_{11} = 0$$

$$T_{12} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-l\sqrt{-2mE}/\hbar}$$

$$T_{20} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}$$

$$T_{21} = 0$$

$$T_{22} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}},$$

entonces, en este caso la condición (4.41) nos dice que

$$\begin{vmatrix} T_{00} - 1 & T_{01} & T_{02} \\ T_{10} & T_{11} - 1 & T_{12} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

o, sustituyendo los valores de T_{ij} encontrados

$$\begin{vmatrix} \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 & 0 & \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} \\ \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-l\sqrt{-2mE}/\hbar} & -1 & \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-l\sqrt{-2mE}/\hbar} \\ \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} & 0 & \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 \right) \begin{vmatrix} -1 & \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-l\sqrt{-2mE}/\hbar} \\ 0 & \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 \end{vmatrix} \\ & + \left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} \right) \begin{vmatrix} \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-l\sqrt{-2mE}/\hbar} & -1 \\ \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ & - \left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} \right)^2 = 0, \\ & \left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 \right)^2 = \left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} \right)^2, \end{aligned}$$

así,

$$\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 = \pm \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}.$$

El resultado anterior coincide con el resultado obtenido en la ecuación (4.23), lo cual era de esperarse, pues se trata del mismo sistema. Sin embargo, la ecuación (4.23) se obtuvo a partir de que un determinante 2×2 fuera cero, mientras que el resultado previamente establecido fue obtenido mediante un determinante 3×3 igual a cero, que fue el resultado de realizar el caso particular de las fórmulas generales obtenidas en este caso.

Por otra parte de la ecuación (4.47) se puede ver que:

$$\begin{aligned}
\phi(p) &= \sum_{j=0}^2 u_j \frac{m(\alpha - \alpha\delta_{0,j-1})}{\pi\hbar} \frac{e^{-i(j-1)lp/\hbar}}{p^2 - 2mE} \\
&= u_0 \frac{m(\alpha - \alpha\delta_{0,-1})}{\pi\hbar} \frac{e^{ilp/\hbar}}{p^2 - 2mE} + u_1 \frac{m(\alpha - \alpha\delta_{00})}{\pi\hbar} \\
&\quad + u_2 \frac{m(\alpha - \alpha\delta_{0,1})}{\pi\hbar} \frac{e^{-ilp/\hbar}}{p^2 - 2mE} \\
&= u_0 \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{e^{ilp/\hbar}}{p^2 - 2mE} + u_2 \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{e^{-ilp/\hbar}}{p^2 - 2mE},
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\phi(p) = u_0 \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{e^{ilp/\hbar}}{p^2 - 2mE} + u_2 \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{e^{-ilp/\hbar}}{p^2 - 2mE}.$$

Ahora, si renombramos a u_0 por u_1 en la ecuación anterior, se hace evidente que la función de onda calculada aquí coincide con aquella de la ecuación (4.19), como debería de ser.

Las constantes u_0 y u_2 que aparecen en la función de onda se calculan de la misma manera que en los ejemplos anteriores, sólo que en éste caso el sistema de ecuaciones que nos debe de dar la relación entre ellas es el dado en la ecuación (4.40), claro, utilizando los elementos T_{kj} de este problema.

Tercer caso:

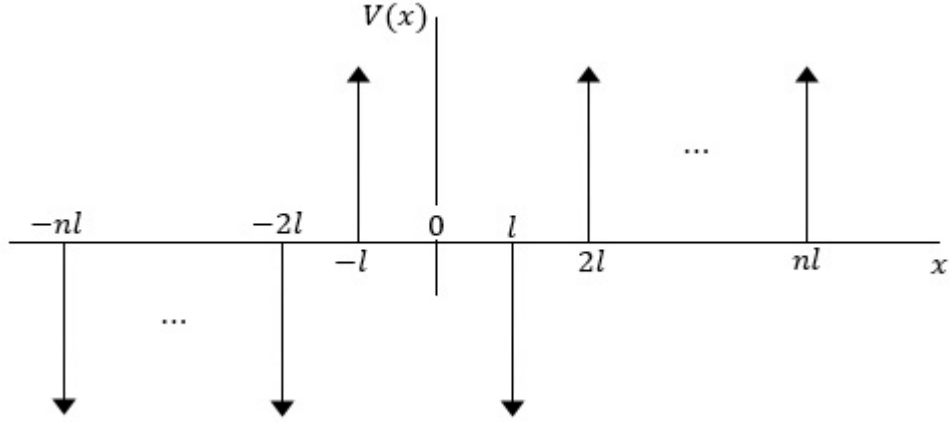
El tercer caso de potencial con M deltas de Dirac consiste en tener igual que en el caso anterior $M = 2n$, ($n = 1, 2, 3..$) deltas de Dirac, pero con la diferencia de que en este potencial no todas las deltas estarán hacia abajo, sino que se irán alternando primero una delta hacia abajo, luego una hacia arriba, y así sucesivamente. Más concretamente, se está hablando de un potencial de la forma:

$$V(x) = \sum_{t=-n}^n \text{sgn}(t)(-1)^t \alpha \delta(x - tl), \quad \alpha > 0, \quad (4.49)$$

donde $\text{sgn}(t)$ es la función signo:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

En este caso, el potencial W resulta ser:

Figura 4.6: Potencial para n par.

$$W(p) = \sum_{t=-n}^n \operatorname{sgn}(t) (-1)^t \alpha e^{itp/\hbar}.$$

El procedimiento para resolver éste potencial es exactamente el mismo que el de los ejemplos anteriores, y debido a que la diferencia entre éste y los dos últimos potenciales es sólo en el factor multiplicativo uno puede inferir, sin necesidad de volver a hacer los cálculos, cuáles serán los resultados.

Entonces, siguiendo el método de núcleos separables se encuentra que la función de onda en este caso es:

$$\phi(p) = \sum_{j=0}^{2n} u_j \frac{m\alpha \operatorname{sgn}(j-n) (-1)^{j-n-1} e^{-il(j-n)p/\hbar}}{\pi\hbar} \frac{1}{p^2 - 2mE}. \quad (4.50)$$

Igualmente que en el caso anterior, las ecuaciones (4.40) y (4.41) valen para este problema, pero en este caso:

$$T_{kj} = \frac{m\alpha \operatorname{sgn}(j-n) (-1)^{j-n-1}}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-l\sqrt{-2mE}|k-j|/\hbar}. \quad (4.51)$$

Finalmente, al igual que en los casos anteriores, vale la pena ver qué ocurre para un caso particular de n , para saber si se reproducen los resultados obtenidos con anterioridad.

Caso $n = 1$:

De igual forma que el segundo caso, aquí el valor que nos interesa es $n = 1$.

Así, si $n = 1$, el potencial en la representación de coordenadas es:

$$V(x) = \sum_{t=-1}^1 \operatorname{sgn}(t)(-1)^t \alpha \delta(x - tl) = \alpha \delta(x + l) - \alpha \delta(x - l).$$

Así,

$$V(x) = \alpha \delta(x + l) - \alpha \delta(x - l), \quad \alpha > 0,$$

que coincide con el potencial (4.27), por lo que es de esperarse que las soluciones también coincidan. Veamos, según la ecuación (4.50), la función de onda viene dada por:

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \sum_{j=0}^2 u_j \frac{m\alpha \operatorname{sgn}(j-1)(-1)^{j-2} e^{-il(j-1)p/\hbar}}{\pi\hbar} \frac{1}{p^2 - 2mE} \\ &= u_0 \frac{m\alpha \operatorname{sgn}(-1)(-1)^{-2} e^{-il(-1)p/\hbar}}{\pi\hbar} \frac{1}{p^2 - 2mE} + u_1 \frac{m\alpha \operatorname{sgn}(0)(-1)^{-1} e^{-il(0)p/\hbar}}{\pi\hbar} \frac{1}{p^2 - 2mE} \\ &\quad + u_2 \frac{m\alpha \operatorname{sgn}(1)(-1)^0 e^{-il(1)p/\hbar}}{\pi\hbar} \frac{1}{p^2 - 2mE} \\ &= -u_0 \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{e^{ilp/\hbar}}{p^2 - 2mE} + u_2 \frac{m\alpha}{\pi\hbar} \frac{e^{-ilp/\hbar}}{p^2 - 2mE}. \end{aligned}$$

Ahora, si en la expresión anterior se cambia de nombre a u_0 por u_2 y se renombra a u_2 por u_1 , es obvio que ésta coincide con la función de onda de la ecuación (4.31), que es lo que se esperaba.

La ecuación para la energía se obtiene calculando primero los elementos T_{kj} mediante la ecuación (4.51), y luego sustituyéndolos en la ecuación (4.41), y entonces desarrollando dicha ecuación. De (4.51) es fácil verificar que:

$$T_{00} = -\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}$$

$$T_{01} = 0$$

$$T_{02} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}$$

$$T_{10} = -\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-l\sqrt{-2mE}/\hbar}$$

$$T_{11} = 0$$

$$T_{12} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-l\sqrt{-2mE}/\hbar}$$

$$T_{20} = -\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}$$

$$T_{21} = 0$$

$$T_{22} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}.$$

Al igual que en el ejemplo anterior, en este caso la condición (4.41) nos dice que

$$\begin{vmatrix} T_{00} - 1 & T_{01} & T_{02} \\ T_{10} & T_{11} - 1 & T_{12} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

entonces, sustituyendo los elementos T_{kj}

$$\begin{vmatrix} -\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 & 0 & \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} \\ -\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-l\sqrt{-2mE}/\hbar} & -1 & \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-l\sqrt{-2mE}/\hbar} \\ -\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar} & 0 & \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

o, desarrollando el determinante:

$$-\left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} + 1\right) \left(1 - \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}\right) - \left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}} e^{-2l\sqrt{-2mE}/\hbar}\right)^2 = 0,$$

por lo tanto,

$$\left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}\right)^2 - 1 = \left(\frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{-2mE}}\right)^2 e^{-4l\sqrt{-2mE}/\hbar}.$$

La ecuación anterior es la ecuación de la energía, la cual es la misma que la ecuación (4.33), lo que confirma la validez de los resultados obtenidos.

Capítulo 5

Método alternativo de solución

Hasta ahora, sólo se ha empleado el método de núcleos separables para resolver la ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos. Sin embargo, además de aplicar directamente la Transformada de Fourier a la función de onda en la representación de posiciones, existen diversos métodos para hallar la función de onda en la representación de momentos, los cuales se derivan de los métodos empleados para resolver la ecuación de Schrödinger en el espacio de posiciones. Uno de los métodos que se pueden emplear es haciendo uso de constantes de movimiento dependientes del tiempo [5]. Este método es de utilidad para ciertos potenciales que no se pueden resolver directamente de la ecuación integral de Schrödinger, ya sea por que divergen las integrales que aparecen en el procedimiento, o por que el núcleo de la ecuación integral no es separable, lo que hace que sea más complicado resolver dicha ecuación.

El método consiste en proponer un operador Hermítico A dependiente del tiempo que sea constante de movimiento, es decir, que satisfaga

$$i\hbar \frac{\partial A}{\partial t} + [A, H] = 0, \quad (5.1)$$

con H el Hamiltoniano del sistema. Luego, si ϕ es una eigenfunción de A con eigenvalor λ , $A\phi = \lambda\phi$, y si ϕ satisface la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = H\phi, \quad (5.2)$$

entonces λ debe ser una constante.

5.1 Ejemplo

El método para resolver la ecuación de Schrödinger mediante constantes de movimiento es como sigue:

Se considerará el siguiente potencial:

$$V(x, t) = -\alpha xt. \quad (5.3)$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano del sistema es

$$H = \frac{p^2}{2m} - \alpha xt, \quad \alpha > 0. \quad (5.4)$$

Sea ([5])

$$X_0 = x - \frac{tp}{m} + \frac{\alpha t^3}{3m} \quad (5.5)$$

una constante de movimiento. La correspondiente ecuación de eigenvalores es

$$X_0\phi = x_0\phi, \quad (5.6)$$

donde x_0 es el eigenvalor. Por lo tanto, en la representación de momentos, dicha ecuación toma la forma

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p} - \frac{tp}{m} + \frac{\alpha t^3}{3m} \right) \phi = x_0\phi. \quad (5.7)$$

La solución a la ecuación anterior es de la forma

$$\phi(p, t) = F(t) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \left(x_0 p + \frac{tp^2}{2m} - \frac{\alpha t^3 p}{3m} \right) \right], \quad (5.8)$$

con $F(t)$ una función de t solamente. Finalmente, sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación de Schrödinger 5.2, se obtiene que la función de onda en el espacio de momentos es

$$\phi(p, t) = K \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\alpha^2 t^5}{15m} - \frac{\alpha t^3 p}{3m} - \frac{\alpha x_0 t^2}{2} + \frac{tp^2}{2m} + x_0 p \right) \right], \quad (5.9)$$

donde K es una constante.

Conclusiones

En este trabajo se presentó un procedimiento para encontrar funciones de onda en el espacio de momentos directamente de la ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos. Se encontró la condición que debe cumplir el potencial dependiente del momento para que corresponda a un potencial real en el espacio de configuración. También se desarrollaron algunos ejemplos de potenciales mediante el procedimiento mostrado.

Bibliografía

- [1] Griffiths, David J., *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, second edition, 2004.
- [2] Arfken, George B., and Hans J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, fifth edition, 2001.
- [3] Churchill, R. V., J. W. Brown, and R. F. Verkey, *Complex Variables and Applications*, 5th ed. New York: McGrawHill (1989).
- [4] Boas, Mary L. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, Wiley, third edition, 2006.
- [5] G. F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís.* 61 (2015).
- [6] V. Fock, *Z. Physik* 98 (1935) 145.
- [7] H.J.W Muller-Kirsten *Introduction to Quantum Mechanics*, World Scientific Publishing, 2006.