



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Aplicaciones de los números dobles en espacios de tres y  
cuatro dimensiones

Tesis presentada al

**Posgrado en Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS**

Presenta

Karla Cinthya Gutiérrez Herrera

Asesor

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo

Puebla, Pue.

Julio de 2022





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Aplicaciones de los números dobles en espacios de tres y  
cuatro dimensiones

Tesis presentada al

**Posgrado en Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS**

Presenta

Karla Cinthya Gutiérrez Herrera

Asesor

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo

Puebla, Pue.

Julio de 2022



**Título:** Aplicaciones de los números dobles en espacios de tres y cuatro dimensiones

**Estudiante:** KARLA CINTHYA GUTIÉRREZ HERRERA

COMITÉ

---

Dr. Gilberto Silva Ortigoza  
Presidente

---

Dra. Iraís Rubalcava García  
Secretario

---

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero  
Vocal

---

Dr. Alfredo Herrera Aguilar  
Suplente

---

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo  
Asesor



# Agradecimientos

*"Life is not easy for any of us. But what of that?  
We must have perseverance and above all confidence in ourselves.  
We must believe that we are gifted for something and that this thing must be attained."  
Marie Curie*

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por la beca otorgada para el desarrollo del tema.

Al Dr. Torres, por su infinita paciencia, su disposición para resolver dudas, sus atinados comentarios, pero sobretodo por seguir confiando en mí. Sin él, todo este camino no hubiera sido posible.

Al comité tutorial, por su tiempo, consejos, comentarios y preguntas que coadyuvaron a mejorar este trabajo.

A mi familia, que a pesar del tiempo y la distancia siguen sosteniendo mi mano.

A mis amigos, porque cada vez que estoy con ellos, la palabra hogar adquiere un nuevo significado.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Números dobles en espacios de cuatro y tres dimensiones</b>	<b>1</b>
1.1. Tetrádas nulas y equivalentes espinoriales en cuatro dimensiones . . . . .	2
1.2. Espinores principales . . . . .	6
1.3. Grupos ortogonales para la signatura Kleiniana en cuatro dimensiones . . . . .	13
1.4. Compañero de un espinor . . . . .	23
1.5. Grupos ortogonales para espacios de tres dimensiones . . . . .	27
<b>2. Conexión y curvatura</b>	<b>29</b>
2.1. Conexión en cuatro dimensiones . . . . .	29
2.1.1. Primera elección de los símbolos de Infeld-van der Waerden . . . . .	32
2.1.2. Segunda elección de los símbolos de Infeld-van der Waerden . . . . .	34
2.2. Curvatura en cuatro dimensiones . . . . .	35
<b>3. Aplicaciones en espacios de cuatro dimensiones</b>	<b>39</b>
3.1. Método espinorial . . . . .	40
3.2. Método tensorial . . . . .	43
<b>4. Aplicaciones en espacios de tres dimensiones</b>	<b>47</b>
4.1. Método espinorial . . . . .	49
4.2. Método tensorial . . . . .	60
<b>Bibliografía</b>	<b>75</b>



# Resumen

Se muestran aplicaciones de los números dobles en espacios de tres y cuatro dimensiones, tales como las ecuaciones de Einstein en  $(2 + 1)$  dimensiones. Además, se estudia un análogo al formalismo de Newman-Penrose bajo la introducción de números dobles.



# Introducción

Los números complejos aparecen de manera natural en muchas áreas de la física, la geometría y las matemáticas en general. En muchos casos, el uso de cantidades complejas es de mucha utilidad en las ecuaciones de la física a pesar de que las cantidades de interés sean reales. Normalmente son utilizados como una herramienta de cálculo que hace el análisis más fácil, ejemplo de ello se da en la relatividad general estándar, en el llamado formalismo de Newman-Penrose el cual hace uso de objetos complejos para simplificar el estudio de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein y muchos otros problemas tratados allí.

De manera semejante al campo de los números complejos, existe un conjunto de números que tienen propiedades parecidas, denominados números hipercomplejos, cuya notación es similar a la estándar en variable compleja:  $a + ib$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $i$  la unidad imaginaria usual. En particular, nuestro interés se centra en los números dobles, los cuales se pueden representar como  $a + jb$ ; con  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $j$  un análogo a la unidad imaginaria, con la propiedad  $j^2 = 1$ , sin embargo  $j \neq \pm 1$ . Aunque los números dobles comenzaron a estudiarse en la segunda mitad del s. XIX, no existe mucho trabajo acerca de su uso. A pesar de ello, existen trabajos donde se muestra el beneficio de usar números dobles y debido a que poseen propiedades parecidas a los números complejos, ha sido posible encontrar aplicaciones útiles en mecánica clásica, mecánica cuántica, electrodinámica, ecuaciones diferenciales y en relatividad general [1-12].

Por ejemplo en [7], se les llama números pseudocomplejos, el objetivo principal de introducir estos números es debido a que se pueden remover singularidades en la teoría de la relatividad general, ejemplo de ello es el horizonte de eventos en la solución de Schwarzschild. Además, se encuentran resultados importantes, algunos de los cuales se enlistan a continuación: la teoría predice que la masa no sólo curva el espacio; sino que también cambia la estructura del vacío, se considera un universo periódicamente oscilante y en consecuencia no existe el Big Bang, es decir; el universo siempre ha existido y finalmente, la contribución de energía oscura se da de forma natural cuando se consideran contribuciones en el tensor de energía-momento. Por otro lado, en [8] se muestra que la llamada extensión algebraica produce sólo cinco clases de teorías gravitacionales, en donde se analizan los espectros de partículas, y donde se encuentra que el lagrangiano asociado a esta extensión, la cual introduce cantidades dobles, es la única libre de fantasmas. Asimismo en [9], se calcula la transformada de Fourier hiperbólica, la función de onda hiperbólica y la ecuación de Schrödinger hiperbólica, bajo la motivación del estudio de la transición del espacio de Minkowski al espacio euclidiano. Por otra parte, en [4] se muestra que el grupo de matrices unitarias con determinante igual a 1, el cual denotamos como  $SU(2, \mathbb{H})$ , cuyas entradas son números dobles es homomorfo al grupo  $SO(2, 1)$  de las transformaciones de Lorentz en un espacio-tiempo con dos direcciones espaciales y una temporal. De tal forma que los números dobles son buenos candidatos para estudiar espacios tridimensionales que se presentan en soluciones a las ecuaciones de Einstein en tres dimensiones [13].

El presente trabajo de tesis propone aprovechar los resultados reportados en fechas recientes para aplicar el formalismo de los números dobles en espacios de tres y cuatro dimensiones. En particular, se aplica un análogo al formalismo de Newman-Penrose en espacios de cuatro dimensiones y el formalismo de espinores en espacios de tres dimensiones. Finalmente, el contenido de la tesis es el siguiente: en el capítulo 1 se introduce el formalismo de espinores, así como la definición de tétrada nula para el espacio de dimensión cuatro; se presentan dos elecciones de base con sus respectivos símbolos de Infeld-van der Waerden y los grupos ortogonales asociados. Además, se encuentra una base para el espacio de tres dimensiones, los grupos y símbolos de Infeld-van der Waerden. En el capítulo 2, se definen conceptos necesarios para obtener el análogo espinorial de conceptos tales como curvatura, torsión, las ecuaciones fundamentales de Cartan entre otros, y se obtiene una relación para reescribir la métrica en términos de 1-formas. En el capítulo 3 se aplica el formalismo de espinores a espacios de cuatro dimensiones y se comparan los resultados obtenidos con los resultados usando notación tensorial, mostrando así las ventajas o inconvenientes, mientras que en el capítulo 4 se muestran aplicaciones en espacios de tres dimensiones, donde nuevamente se resuelven los ejemplos por el método espinorial y tensorial, con la finalidad de comparar los resultados obtenidos. Para terminar, se muestra las conclusiones del trabajo.

# Capítulo 1

## Números dobles en espacios de cuatro y tres dimensiones

Los números dobles también se denominan números pseudocomplejos, espacio-temporales, complejos divididos o hiperbólicos. Tienen operaciones análogas a las de los números complejos. Sin embargo este conjunto de números no posee la estructura de campo; a pesar de ello, en trabajos recientes se ha demostrado que algunas expresiones usadas en el conjunto de los números complejos tienen un análogo en términos de números dobles. Por tanto, ha sido posible introducir estos números en diversas ramas de la física. En particular nuestro interés se centra en los espacios de cuatro y tres dimensiones.

Dado un espacio vectorial de dimension  $n$  con un tensor métrico, es posible elegir un conjunto de vectores unitarios y ortogonales, tales que

$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } a = b, \\ 0 & \text{si } a \neq b, \end{cases}$$

donde  $a, b = 1, 2, \dots, n$ . La representación de las componentes del tensor métrico en esta base es una matriz  $(g_{ab}) = \text{diag} (1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ . En cuatro dimensiones las posibles formas que puede tomar el tensor son esencialmente

$$(g_{ab}) = \begin{cases} \text{diag} (1, 1, 1, 1) & \text{Signatura Euclidiana,} \\ \text{diag} (1, 1, 1, -1) & \text{Signatura Lorentziana o hiperbólica,} \\ \text{diag} (1, 1, -1, -1) & \text{Signatura Kleiniana o ultrahiperbólica,} \end{cases} \quad (1.1)$$

y en tres dimensiones

$$(g_{ab}) = \begin{cases} \text{diag} (1, 1, 1) & \text{Signatura Euclidiana,} \\ \text{diag} (1, 1, -1) & \text{Signatura Lorentziana o hiperbólica.} \end{cases} \quad (1.2)$$

A continuación se estudiarán las signaturas donde es útil introducir cantidades dobles, así como propiedades importantes en estos términos, considerando espacios de dimensión de tres o cuatro.

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**

**1.1. TETRÁDAS NULAS Y EQUIVALENTES ESPINORIALES EN CUATRO DIMENSIONES**

**1.1. Tetrádas nulas y equivalentes espinoriales en cuatro dimensiones**

Sea  $V$  un espacio vectorial de cuatro dimensiones, en particular consideramos la signatura Kleiniana o ultrahiperbólica, debido a que se pueden introducir convenientemente cantidades dobles en la elección de la base, como se muestra más adelante. La representación matricial de la métrica con la elección de la base  $\{\mathbf{e}_a\}$  es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Además de elegir la base  $\{\mathbf{e}_a\}$ , donde  $a = 1, 2, 3, 4$ , es posible hallar otra base,  $\{\mathbf{E}_a\}$ , respecto a la cual el tensor métrico adquiera la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

es decir,  $g(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1) = g(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2) = 0 = g(\mathbf{E}_3, \mathbf{E}_3) = g(\mathbf{E}_4, \mathbf{E}_4)$  y las únicas entradas diferentes de cero provienen de  $g(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = 1 = g(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1)$  y  $g(\mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4) = 1 = g(\mathbf{E}_4, \mathbf{E}_3)$ , esta base se conoce como *tétrada nula*. Introduciendo cantidades dobles de forma conveniente, obtenemos dos posibles elecciones de bases  $\{\mathbf{E}_a\}$ ,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + j\mathbf{e}_3), \quad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - j\mathbf{e}_3), \quad (1.4)$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 + j\mathbf{e}_4) \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 - j\mathbf{e}_4),$$

y

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + j\mathbf{e}_3), \quad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - j\mathbf{e}_3), \quad (1.5)$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4) \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4).$$

Debido a que el conjugado de un número doble se define como  $\overline{a + jb} = a - jb$ , notamos que en ambas elecciones de la tétrada se tiene  $\overline{\mathbf{E}_1} = \mathbf{E}_2$  y adicionalmente, en la primera elección se tiene  $\overline{\mathbf{E}_3} = \mathbf{E}_4$ .

Se define

$$(\mathbf{e}_{A\dot{B}}) \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{E}_4 & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_1 & -\mathbf{E}_3 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**

**1.1. TETRÁDAS NULAS Y EQUIVALENTES ESPINORIALES EN CUATRO DIMENSIONES**

donde los índices espinoriales se denotan con letras mayúsculas y toman los valores:  $A, B = 1, 2$  y  $\dot{A}, \dot{B} = \dot{1}, \dot{2}$ . Así, una definición equivalente de téttrada nula es

$$g(\mathbf{e}_{A\dot{B}}, \mathbf{e}_{C\dot{D}}) = -\epsilon_{AC}\epsilon_{\dot{B}\dot{D}}, \quad (1.7)$$

con  $(\epsilon_{AB}) = (\epsilon^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}) = (\epsilon^{\dot{A}\dot{B}})$ , denominado símbolo de Levi–Civita, el cual sirve para subir y bajar índices espinoriales, como se muestra a continuación

$$\Psi^A = \epsilon^{BA}\Psi_B, \quad \Psi_A = \epsilon_{AB}\Psi^B, \quad (1.8)$$

$$\Psi^{\dot{A}} = \epsilon^{\dot{B}\dot{A}}\Psi_{\dot{B}} \quad \text{y} \quad \Psi_{\dot{A}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\Psi^{\dot{B}},$$

es decir,

$$\Psi^1 = -\Psi_2, \quad \Psi^2 = \Psi_1, \quad (1.9)$$

$$\Psi^{\dot{1}} = -\Psi_{\dot{2}} \quad \text{y} \quad \Psi^{\dot{2}} = \Psi_{\dot{1}}.$$

Más aún, los símbolos de Levi–Civita cumplen  $\epsilon^{AB}\epsilon_{BC} = \epsilon^A_C = \delta^A_C$  y  $\epsilon_{AB}\epsilon^{BC} = \epsilon_A^C = -\delta_A^C$ . Por otro lado, debido a la antisimetría de  $\epsilon_{AB}$  se cumple que  $\psi_A\phi^A = -\psi^A\phi_A$  por lo que  $\psi^A\psi_A = 0$ .

Claramente, existen escalares  $\sigma^a_{A\dot{B}}$  tales que

$$\mathbf{e}_{A\dot{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma^a_{A\dot{B}} \mathbf{e}_a, \quad (1.10)$$

denominados símbolos de Infeld–van der Waerden, los cuales de acuerdo con (1.6), bajo la elección de base (1.4), se representan como

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma^4 = \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

y para (1.5) se tiene

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

donde  $\sigma^a_{A\dot{B}}$  es la entrada en el renglón  $A$  y columna  $\dot{B}$  en la matriz  $\sigma^a$ . Es así que, de (1.7) se obtiene la relación entre los símbolos de Infeld–van der Waerden y de Levi–Civita,

$$\sigma^a_{A\dot{B}}\sigma^b_{C\dot{D}}g_{ab} = -2\epsilon_{AC}\epsilon_{\dot{B}\dot{D}}. \quad (1.13)$$

Finalmente, se obtiene la siguiente propiedad para los símbolos de Infeld–van der Waerden, para la elección definida en (1.11) se tiene

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**

**1.1. TETRÁDAS NULAS Y EQUIVALENTES ESPINORIALES EN CUATRO DIMENSIONES**

---

$$\overline{\sigma^a_{A\dot{B}}} = -\sigma^{aA\dot{B}}, \quad (1.14)$$

en cuanto a (1.12)

$$\overline{\sigma^a_{A\dot{B}}} = \sigma^a_{B\dot{A}}. \quad (1.15)$$

Por ejemplo, calculemos la conjugada de la entrada  $\sigma^3_{1\dot{2}}$  para (1.11),

$$\overline{\sigma^3_{1\dot{2}}} = \overline{-j} = j,$$

por otra parte,  $\sigma^3_{2\dot{1}} = j$ , lo cual coincide con  $\overline{\sigma^3_{1\dot{2}}}$ . En cuanto a (1.12), calculamos la entrada  $\sigma^3_{2\dot{1}}$ ,

$$\overline{\sigma^3_{2\dot{1}}} = \overline{j} = -j,$$

por otro lado  $\sigma^3_{1\dot{2}} = -j$ , lo cual coincide con  $\overline{\sigma^3_{2\dot{1}}}$ , como se indica en (1.15).

En muchos casos debido a la antisimetría de los objetos de nuestro interés, éstos se pueden reescribir en términos de los símbolos de Levi–Civita, es decir, si  $\psi_{AB} = -\psi_{BA}$ , entonces  $\psi_{AB} = \frac{1}{2}\psi^R{}_R\epsilon_{AB}$  y de forma análoga si  $\psi_{\dot{A}\dot{B}} = -\psi_{\dot{B}\dot{A}}$  entonces  $\psi_{\dot{A}\dot{B}} = \frac{1}{2}\psi^{\dot{R}}{}_{\dot{R}}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}$ , asimismo se cumple para  $\psi^{AB}$  y  $\psi^{\dot{A}\dot{B}}$ . Otra forma en la que se puede escribir a  $\psi_{AB}$  es  $\psi_{AB} = \frac{1}{2}(\epsilon^{RS}\psi_{RS})\epsilon_{AB}$ . Un resultado importante surge como corolario de la expresión anterior. Al considerar a  $\psi_{A\dot{B}\dots\dot{C}\dot{D}\dots}$  como un objeto con al menos dos índices del mismo tipo, la diferencia de dos de estos objetos se expresa de la forma

$$\psi_{A\dots R\dots S\dots\dot{C}\dot{D}\dots} - \psi_{A\dots S\dots R\dots\dot{C}\dot{D}\dots},$$

donde cada término de la expresión anterior sólo cambia en un par de índices. Es así que la diferencia anterior se expresa como

$$\begin{aligned} \psi_{A\dots R\dots S\dots\dot{C}\dot{D}\dots} - \psi_{A\dots S\dots R\dots\dot{C}\dot{D}\dots} &= \frac{1}{2}\epsilon^{PQ} \left( \psi_{A\dots P\dots Q\dots\dot{C}\dot{D}\dots} - \psi_{A\dots Q\dots P\dots\dot{C}\dot{D}\dots} \right) \epsilon_{RS} \\ &= \frac{1}{2} \left( \psi_{A\dots}{}^Q{}_{\dots Q\dots\dot{C}\dot{D}\dots} - \psi_{A\dots}{}^Q{}_{\dots Q\dots\dot{C}\dot{D}\dots} \right) \epsilon_{RS} \\ &= \psi_{A\dots}{}^Q{}_{\dots Q\dots\dot{C}\dot{D}\dots} \epsilon_{RS}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\psi_{A\dots R\dots S\dots\dot{C}\dot{D}\dots} - \psi_{A\dots S\dots R\dots\dot{C}\dot{D}\dots} = \psi_{A\dots}{}^Q{}_{\dots Q\dots\dot{C}\dot{D}\dots} \epsilon_{RS}, \quad (1.16)$$

más aún, existen relaciones similares para expresiones con índices con puntos así como con super-índices con puntos o sin ellos. Si ahora subimos el subíndice  $R$  en la expresión anterior, obtenemos

$$\psi_{A\dots}{}^R{}_{\dots S\dots\dot{C}\dot{D}\dots} - \psi_{A\dots}{}^R{}_{\dots S\dots\dot{C}\dot{D}\dots} = \psi_{A\dots}{}^Q{}_{\dots Q\dots\dot{C}\dot{D}\dots} \delta_S^R. \quad (1.17)$$

## CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES DIMENSIONES

### 1.1. TETRÁDAS NULAS Y EQUIVALENTES ESPINORIALES EN CUATRO DIMENSIONES

Por otro lado, si  $t_{ab\dots d}$  son las componentes de un tensor con respecto a la base ortonormal, esto es, respecto a  $\{\mathbf{e}_a\}$ , entonces las componentes de su equivalente espinorial se definen por

$$t_{A\dot{B}C\dot{D}\dots G\dot{H}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^a_{A\dot{B}} \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^b_{C\dot{D}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^d_{G\dot{H}} t_{ab\dots d}, \quad (1.18)$$

donde se reemplazó el índice  $a$  por el par de índices  $A\dot{B}$ ,  $b$  por  $C\dot{D}$  y de forma equivalente con el resto de los índices. Una forma equivalente de escribir la igualdad anterior es agrupando los índices punteados y los no punteados o reemplazar el índice  $a$  por el par de índices  $A\dot{A}$  en lugar de  $A\dot{B}$ ,  $b$  por el par de índices  $B\dot{B}$  en lugar de  $C\dot{D}$  y de igual modo ocurre con el resto de índices, es decir, (1.18) es igual a

$$t_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}D\dot{D}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^a_{A\dot{A}} \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^b_{B\dot{B}} \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^c_{C\dot{C}} \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^d_{D\dot{D}} t_{abcd} \equiv t_{ABCD\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}, \quad (1.19)$$

y con respecto a la relación inversa, está dada por

$$t_{abcd} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_a^{A\dot{A}}\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_b^{B\dot{B}}\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_c^{C\dot{C}}\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_d^{D\dot{D}}\right) t_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}D\dot{D}}, \quad (1.20)$$

cabe destacar que los índices  $A$  y  $\dot{A}$  son independientes uno del otro y de forma análoga ocurre con los demás índices. Debido a (1.10), el equivalente espinorial de un tensor da las componentes del tensor con respecto a la base  $\{\mathbf{e}_{11}, \mathbf{e}_{22}, \mathbf{e}_{33}, \mathbf{e}_{44}\}$ , donde cada vector nulo  $\mathbf{e}_{A\dot{B}}$  se identifica con el producto tensorial  $\mathbf{e}_A \otimes \mathbf{e}_{\dot{B}}$ . Con  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  y  $\{\mathbf{e}_{\dot{1}}, \mathbf{e}_{\dot{2}}\}$ , bases de los espacios espinoriales. A los elementos de estos espacios se les denomina *espinores de un índice*.

Usando (1.14) y (1.18) obtenemos que las componentes de un tensor  $t_{abc\dots d}$ , con respecto a una base ortonormal son reales si y sólo si

$$\overline{t_{A\dot{B}C\dot{D}\dots G\dot{H}}} = (-1)^n t^{A\dot{B}C\dot{D}\dots G\dot{H}}, \quad (1.21)$$

con  $n$  el número de índices del tensor  $t_{ab\dots}$ . De forma equivalente, para (1.15) se tiene

$$\overline{t_{A\dot{B}C\dot{D}\dots G\dot{H}}} = t_{B\dot{A}D\dot{C}\dots H\dot{G}}. \quad (1.22)$$

Es importante agregar que las simetrías de un tensor son heredadas a su equivalente espinorial, es decir, si  $t_{ab}$  es un tensor simétrico, entonces su equivalente espinorial posee la siguiente simetría  $t_{A\dot{A}B\dot{B}} = t_{B\dot{B}A\dot{A}}$ , sin embargo  $t_{A\dot{A}B\dot{B}}$  no necesariamente coincide con  $t_{B\dot{A}A\dot{B}}$ , de hecho las siguientes igualdades  $t_{A\dot{A}B\dot{B}} = t_{B\dot{A}A\dot{B}} = t_{A\dot{B}B\dot{A}}$  se cumplen si y sólo si  $t_{A\dot{A}B\dot{B}}$  es el espinor equivalente de un tensor simétrico sin traza.

En el caso del equivalente espinorial de un tensor antisimétrico  $t_{ab}$  el cual satisface  $t_{A\dot{A}B\dot{B}} = -t_{B\dot{B}A\dot{A}}$ , se tiene

$$\begin{aligned} t_{A\dot{A}B\dot{B}} &= \frac{1}{2}(t_{A\dot{A}B\dot{B}} + t_{B\dot{A}A\dot{B}}) + \frac{1}{2}(t_{A\dot{A}B\dot{B}} - t_{B\dot{A}A\dot{B}}) \\ &= \frac{1}{2}(t_{A\dot{A}B\dot{B}} - t_{A\dot{B}B\dot{A}}) + \frac{1}{2}(t_{A\dot{A}B\dot{B}} - t_{B\dot{A}A\dot{B}}) \\ &= \frac{1}{2}t^{\dot{A}}_A \dot{B}^{\dot{B}}_B \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} + \frac{1}{2}t^{\dot{A}}_A \dot{B}^{\dot{B}}_B \epsilon_{AB} = \tau_{AB}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} + \tau_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{AB}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

donde

$$\tau_{AB} \equiv \frac{1}{2} t_A^{\dot{R}}{}_{B\dot{R}} \quad \text{y} \quad \tau_{\dot{A}\dot{B}} \equiv \frac{1}{2} t^{\dot{R}}{}_{\dot{A}\dot{R}}{}_{\dot{B}}. \quad (1.24)$$

Así, si  $t_{ab}$  es real y usando (1.21) y (1.23), se obtiene

$$\begin{aligned} \overline{t_{A\dot{A}\dot{B}\dot{B}}} &= t^{A\dot{A}\dot{B}\dot{B}} \\ \Rightarrow \overline{\tau_{AB}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}} + \overline{\tau_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{AB}} &= \tau^{AB}\epsilon^{\dot{A}\dot{B}} + \tau^{\dot{A}\dot{B}}\epsilon^{AB}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

pero  $\overline{\epsilon_{AB}} = \epsilon^{AB}$  y  $\overline{\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}$ , por lo que

$$\overline{\tau_{AB}} = \tau^{AB} \quad \text{y} \quad \overline{\tau_{\dot{A}\dot{B}}} = \tau^{\dot{A}\dot{B}}. \quad (1.26)$$

En el caso de (1.22), se tiene  $\overline{t_{A\dot{B}C\dot{D}}} = t_{B\dot{A}D\dot{C}}$ , en consecuencia

$$\begin{aligned} \overline{\tau_{AC}\epsilon_{\dot{B}\dot{D}}} + \overline{\tau_{\dot{B}\dot{D}}\epsilon_{AC}} &= \tau_{BD}\epsilon_{\dot{A}\dot{C}} + \tau_{\dot{A}\dot{C}}\epsilon_{BD} \\ &= \tau_{\dot{A}\dot{C}}\epsilon_{BD} + \tau_{BD}\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

sin embargo sabemos que  $(\epsilon_{\dot{B}\dot{D}}) = (\epsilon^{BD})$ , por lo tanto

$$\overline{\tau_{AC}} = \tau_{\dot{A}\dot{C}} \quad \text{y} \quad \overline{\tau_{\dot{B}\dot{D}}} = \tau_{BD}. \quad (1.28)$$

## 1.2. Espinores principales

Una consecuencia de (1.16) es que cualquier espinor con dos o más índices punteados o no, puede ser expresado como la suma de un espinor totalmente simétrico en cada tipo de índices más un espinor totalmente simétrico multiplicado por el símbolo de Levi–Civita. Un ejemplo de ello es  $\mu_{A\dot{A}\dot{B}\dot{C}}$  [4], el cual supondremos es simétrico en sus dos últimos índices, en consecuencia para la parte totalmente simétrica

$$\mu_{A(\dot{A}\dot{B}\dot{C})} \equiv \frac{1}{6} (\mu_{A\dot{A}\dot{B}\dot{C}} + \mu_{A\dot{A}\dot{C}\dot{B}} + \mu_{A\dot{B}\dot{A}\dot{C}} + \mu_{A\dot{B}\dot{C}\dot{A}} + \mu_{A\dot{C}\dot{A}\dot{B}} + \mu_{A\dot{C}\dot{B}\dot{A}}),$$

usando la simetría del último par de índices, la igualdad anterior se reescribe como

$$\begin{aligned} \mu_{A(\dot{A}\dot{B}\dot{C})} &= \frac{1}{3} (\mu_{A\dot{A}\dot{B}\dot{C}} + \mu_{A\dot{B}\dot{A}\dot{C}} + \mu_{A\dot{C}\dot{A}\dot{B}}) \\ &= \mu_{A\dot{A}\dot{B}\dot{C}} + \frac{1}{3} (\mu_{A\dot{B}\dot{A}\dot{C}} - \mu_{A\dot{A}\dot{B}\dot{C}} + \mu_{A\dot{C}\dot{A}\dot{B}} - \mu_{A\dot{A}\dot{B}\dot{C}}) \\ &= \mu_{A\dot{A}\dot{B}\dot{C}} + \frac{1}{3} \mu_A^{\dot{R}}{}_{\dot{R}\dot{C}}\epsilon^{\dot{B}\dot{A}} + \frac{1}{3} \mu_A^{\dot{R}}{}_{\dot{R}\dot{B}}\epsilon^{\dot{C}\dot{A}}, \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.2. ESPINORES PRINCIPALES

---

es decir,

$$\mu_{A\dot{A}\dot{B}\dot{C}} = \mu_{A(\dot{A}\dot{B}\dot{C})} + \frac{1}{3}\mu_A^{\dot{R}}\dot{R}\dot{C}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} + \frac{1}{3}\mu_A^{\dot{R}}\dot{R}\dot{B}\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}. \quad (1.29)$$

Un caso particular e importante corresponde a un espinor totalmente simétrico con un sólo tipo de índices, debido a que puede ser expresado como el producto tensorial simetrizado de espinores con un índice espinorial. Debido a ello, buscamos una expresión que relacione al espinor en términos de sus espinores principales. De acuerdo a [4], si  $\phi_{AB\dots K}$  es un espinor con  $k$  índices, entonces existen  $K$  espinores de un índice,  $\alpha_A, \beta_A, \gamma_A, \dots, \kappa_A$ , en los cuales se puede descomponer, es decir,

$$\phi_{AB\dots K} = \alpha_{(A}\beta_B\gamma_C\dots\kappa_{K)}, \quad (1.30)$$

donde  $\alpha_A, \beta_A, \gamma_A, \dots, \kappa_A$  no necesariamente son distintos. Los cuales se denominan espinores principales de  $\phi_{AB\dots K}$ . Por todo lo anterior, se estudia la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones cuárticas y cuadráticas con coeficientes con números dobles. En primer lugar, estudiamos el caso de las ecuaciones cuadráticas, las cuales se expresan de forma general como

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad (1.31)$$

con  $A = a + jb$ ,  $B = c + jd$ ,  $C = e + jf$  y  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ . Debido a que existen elementos en el conjunto de los números dobles para los cuales no existe su inverso multiplicativo, procedemos a estudiar los siguientes casos:

◊ **Caso 1.**  $A \neq a(1 \pm j), B \neq 0$  y  $C \neq 0$ .

Al considerar  $A \neq a \pm aj$ , aseguramos la existencia de su inverso multiplicativo. Por lo tanto, la ecuación se resuelve completando el cuadrado o aplicando la fórmula general. En consecuencia las soluciones están dadas por

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Con la finalidad de conocer la naturaleza de las soluciones, es necesario estudiar el signo del discriminante, para determinar cuando se tienen soluciones reales, dobles o combinaciones de números complejos y dobles. Para ello, consideramos que la raíz se expresa como

$$\sqrt{\alpha + j\beta} = x + jw, \quad \text{con } \alpha, \beta, x, w \in \mathbb{R} \text{ y } x, w \text{ por determinar,}$$

$$\Rightarrow \alpha + j\beta = x^2 + w^2 + 2jxw$$

$$\Rightarrow \alpha = x^2 + w^2 \quad \text{y} \quad \beta = 2xw,$$

al resolver el sistema de ecuaciones, se obtiene

$$x^2 = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2} \quad \text{y} \quad w^2 = \frac{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2}, \quad \text{donde se consideró } x \neq 0 \text{ y } w \neq 0,$$

es decir,

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.2. ESPINORES PRINCIPALES

---

$$x = \sqrt{\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2}} \quad \text{y} \quad w = \sqrt{\frac{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2}},$$

así

$$\sqrt{\alpha + j\beta} = \sqrt{\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2}} + j\sqrt{\frac{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2}}. \quad (1.32)$$

En resumen, si identificamos a  $\alpha = \mathbf{Re}(B^2 - 4AC)$  y  $\beta = \mathbf{Hc}(B^2 - 4AC)$ , donde  $\mathbf{Re}$  y  $\mathbf{Hc}$  denotan la parte real e hipercompleja respectivamente, se concluye que las soluciones son

$$x_{1,2} = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A} \left( \sqrt{\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2}} + j\sqrt{\frac{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2}} \right), \quad (1.33)$$

de la igualdad anterior notamos que si  $|\mathbf{Re}(B^2 - 4AC)| \geq |\mathbf{Hc}(B^2 - 4AC)|$ , las soluciones serán números reales o hipercomplejos, y por el contrario, si  $|\mathbf{Re}(B^2 - 4AC)| < |\mathbf{Hc}(B^2 - 4AC)|$ , las soluciones serán combinaciones de números complejos e hipercomplejos.

A continuación se abordan los casos cuando  $A = a \pm ja = a(1 \pm j)$ , es decir, cuando  $A$  es un divisor de cero <sup>1</sup>. En cada caso se considera la representación general

$$a(1 \pm j)x^2 + (c + jd)x + (e + jf) = 0,$$

la cual puede ser llevada a la forma

$$(1 \pm j)x^2 + (c' + jd')x + (e' + jf') = 0,$$

donde el símbolo primado indica que el número se dividió entre  $a$ .

◊ **Caso 2.**  $B = 0$

$$(1 \pm j)x^2 + (e' + jf') = 0,$$

al multiplicar la ecuación anterior por  $(1 \mp j)$  obtenemos

$$(1 \mp j)(1 \pm j)x^2 + (1 \mp j)(e' + jf') = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 \mp j)(e' + jf') = 0 \quad \text{sii} \quad e' \mp f' = 0 \quad \text{y} \quad f' \mp e' = 0.$$

en consecuencia, las soluciones a la ecuación cuadrática son los divisores de cero.

---

<sup>1</sup>Se le denomina divisor de cero, a los elementos de la forma  $(1 \pm j) \neq 0$ , para los cuales no está definido su inverso multiplicativo. O de forma equivalente, son elementos en el anillo de los hipercomplejos, tales que  $\alpha\beta = 0$ , sin embargo  $\alpha \neq 0$  y  $\beta \neq 0$ .

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.2. ESPINORES PRINCIPALES

---

◊ **Caso 3.**  $C = 0$

$$(1 \pm j)x^2 + (c' + jd')x = 0 \Rightarrow x[(1 \pm j)x + (c' + jd')] = 0,$$

donde se obtiene

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad (1 \pm j)x + (c' + jd') = 0, \quad (1.34)$$

para la segunda ecuación, se tiene

$$(1 \pm j)(1 \mp j)x = -(c' + jd')(1 \mp j) \Rightarrow (c' + jd')(1 \mp j) = 0, \quad (1.35)$$

de la última igualdad, se obtiene  $c' \mp d' = 0$  y  $d' \mp c' = 0$ . En conclusión, las soluciones a la ecuación cuadrática son  $x = 0$  y los divisores de cero.

◊ **Caso 4.**  $B \neq 0$  y  $C \neq 0$ .

$$(1 \pm j)x^2 + (c' + jd')x + (e' + jf') = 0,$$

multiplicando la ecuación anterior por  $(1 \mp j)$ ,

$$(1 \pm j)(1 \mp j)x^2 + (c' + jd')(1 \mp j)x + (e' + jf')(1 \mp j) = 0$$

$$(1^2 - j^2)x^2 + (1 \mp j)[(c' + jd')x + (e' + jf')] = 0$$

$$(1 \mp j)[(c' + jd')x + (e' + jf')] = 0,$$

en la igualdad anterior se obtienen dos opciones; o el término entre corchetes es cero, esto quiere decir que  $x = -\frac{(e' + jf')}{(c' + jd')}$  o que el término entre corchetes es un divisor de cero, esto es

$$(c' + jd')x + (e' + jf') = (1 \pm j) \Rightarrow x = \frac{(1 \pm j) - (e' + jf')}{(c' + jd')}$$

en resumen, hallamos que la solución es  $x = -\frac{(e' + jf')}{(c' + jd')}$  o  $x = \frac{(1 \pm j) - (e' + jf')}{(c' + jd')}$ .

La siguiente ecuación a examinar, es la ecuación cuártica con coeficientes con números dobles. Donde se pide que  $A \neq a(1 \pm j)$  y  $A \neq 0$  para asegurar la existencia de su inverso multiplicativo, debido a lo anterior, podemos resolver la ecuación cuártica por el método de Ferrari–Cardano [35], como se ilustra a continuación. Sea

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0,$$

con  $A = a + jb$ ,  $B = c + jd$ ,  $C = e + jf$ ,  $D = g + jh$ ,  $E = l + jm$ , y  $a, b, c, d, e, f, g, h, l, m \in \mathbb{R}$ . Debido a la existencia del inverso multiplicativo de  $A$ , la ecuación cuártica se reescribe como

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.2. ESPINORES PRINCIPALES

---

$$x^4 + \frac{B}{A}x^3 + \frac{C}{A}x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A} = 0,$$

donde se propone el cambio de variable  $x = y + k$ , con  $y$  una variable auxiliar y  $k$  una constante por determinar (real o hipercompleja). Al sustituir y agrupar en potencias de  $y$  se obtiene

$$y^4 + y^3 \left(4k + \frac{B}{A}\right) + y^2 \left(6k^2 + 3k\frac{B}{A} + \frac{C}{A}\right) + y \left(4k^3 + 3k^2\frac{B}{A} + 2k\frac{C}{A} + \frac{D}{A}\right) + \left(k^4 + \frac{B}{A}k^3 + \frac{C}{A}k^2 + \frac{D}{A}k + \frac{E}{A}\right) = 0, \quad (1.36)$$

la finalidad de introducir el cambio de variable es para forzar que la constante  $k$  sea tal que elimine el término  $y^3$ , en consecuencia, el valor que buscamos es  $k = -\frac{B}{4A}$ . Por lo cual, la ecuación se reescribe como

$$y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0, \quad (1.37)$$

donde se definen los coeficientes

$$\alpha = -\frac{3B^2}{8A^2} + \frac{C}{A}, \quad \beta = \frac{B^3}{8A^3} - \frac{BC}{2A^2} + \frac{D}{A} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{-3B^4}{256A^4} + \frac{B^2C}{16A^3} - \frac{BD}{4A^2} + \frac{E}{A}. \quad (1.38)$$

A continuación sumamos  $2sy^2 + s^2 - 2sy^2 - s^2$ , donde  $s$  es una variable, la cual debe cumplir con condiciones específicas, las cuales se enlistan más adelante. Así

$$y^4 + 2sy^2 + s^2 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma - 2sy^2 - s^2 = 0, \quad (1.39)$$

y agrupando,

$$(y^2 + s)^2 - [y^2(2s - \alpha) - \beta y - \gamma + s^2] = 0,$$

el término entre corchetes lo reescribimos como

$$y^2(2s - \alpha) - \beta y - \gamma + s^2 = (2s - \alpha)(y - y_1)(y - y_2), \quad (1.40)$$

con  $y_i$  soluciones a la ecuación cuadrática, es decir,

$$y_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4(2s - \alpha)(s^2 - \gamma)}}{2(2s - \alpha)} \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4(2s - \alpha)(s^2 - \gamma)}}{2(2s - \alpha)},$$

si el discriminante es idéntico a cero, entonces  $s$  debe satisfacer la ecuación cúbica

$$8s^3 - 4\alpha s^2 - 8\gamma s - \beta^2 + 4\alpha\gamma = 0, \quad (1.41)$$

de ahí que, una de las condiciones impuestas a  $s$  es que verifique (1.41). Se sigue que  $y_1 = y_2 = \frac{\beta}{2(2s - \alpha)}$ , y por lo tanto (1.40) se expresa

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.2. ESPINORES PRINCIPALES

---

$$\begin{aligned}
 (y^2 + s)^2 - \left[ (2s - \alpha)(y - y_1)(y - y_2) \right] &= (y^2 + s)^2 - \left[ (2s - \alpha) \left( y - \frac{\beta}{2(2s - \alpha)} \right) \left( y - \frac{\beta}{2(2s - \alpha)} \right) \right] \\
 &= (y^2 + s)^2 - \left( y\sqrt{2s - \alpha} - \frac{\beta}{2\sqrt{2s - \alpha}} \right)^2, \tag{1.42}
 \end{aligned}$$

la última ecuación es una diferencia de cuadrados, en consecuencia se puede reescribir como

$$\left( y^2 + s + y\sqrt{2s - \alpha} - \frac{\beta}{2\sqrt{2s - \alpha}} \right) \left( y^2 + s - y\sqrt{2s - \alpha} + \frac{\beta}{2\sqrt{2s - \alpha}} \right). \tag{1.43}$$

Finalmente, hallamos la solución de las ecuaciones cuadráticas anteriores. Para la primera ecuación, las soluciones son

$$y_1 = \frac{-1}{2}\sqrt{2s - \alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{-2s - \alpha + \frac{2\beta}{\sqrt{2s - \alpha}}}, \tag{1.44}$$

$$y_2 = \frac{-1}{2}\sqrt{2s - \alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{-2s - \alpha + \frac{2\beta}{\sqrt{2s - \alpha}}},$$

y para la segunda ecuación,

$$y_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2s - \alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{-2s - \alpha - \frac{2\beta}{\sqrt{2s - \alpha}}}, \tag{1.45}$$

$$y_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2s - \alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{-2s - \alpha - \frac{2\beta}{\sqrt{2s - \alpha}}}.$$

Antes de analizar la naturaleza de las soluciones a la ecuación cuártica, debemos analizar las condiciones que debe de cumplir la variable  $s$ . Para ello estudiamos la ecuación cúbica que debe satisfacer

$$8s^3 - 4\alpha s^2 - 8\gamma s - \beta^2 + 4\alpha\gamma = 0, \tag{1.46}$$

nuevamente se propone un cambio de variable, en este caso hacemos  $s = z + p$ , donde  $p$  es un parámetro y  $z$  una variable auxiliar. Por consiguiente, al sustituir y agrupar obtenemos

$$8z^3 + z^2(24p - 4\alpha) + z(24p^2 - 8\alpha p - 8\gamma) + (8p^3 - 4\alpha p^2 - 8\gamma p - \beta^2 + 4\alpha\gamma) = 0, \tag{1.47}$$

el parámetro  $p$  debe cancelar el coeficiente de  $z^2$ . Es decir,  $p = \frac{\alpha}{6}$ , por lo cual la ecuación anterior puede ser llevada a la forma

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.2. ESPINORES PRINCIPALES

---

$$z^3 + z \left( \frac{-\alpha^2}{12} - \gamma \right) + \left( \frac{-\alpha^3}{108} + \frac{\alpha\gamma}{3} - \frac{\beta^2}{8} \right) = 0 \quad \text{ó}$$

$$z^3 + z \left( \frac{-\alpha^2}{12} - \gamma \right) = \left( \frac{\alpha^3}{108} - \frac{\alpha\gamma}{3} + \frac{\beta^2}{8} \right), \quad (1.48)$$

la ecuación anterior se conoce como ecuación cúbica reducida. La forma de resolver la ecuación es proponiendo  $z = w + t$ ,  $A' = \frac{-\alpha^2}{12} - \gamma = -3wt$  y  $B' = \frac{\alpha^3}{108} - \frac{\alpha\gamma}{3} + \frac{\beta^2}{8} = w^3 + t^3$ , donde hemos redefinido las variables para simplificar la notación y además, se propuso un nuevo cambio de variable, por lo tanto (1.48) se reescribe

$$t^6 - B't^3 - \frac{A'}{27} = 0, \quad (1.49)$$

nuevamente proponemos el cambio de variable  $t^3 = u$ , así

$$u^2 - B'u - \frac{A'}{27} = 0,$$

se sigue que las soluciones de la ecuación cuadrática son

$$u_i = \frac{B'}{2} \pm \sqrt{\frac{B'^2}{4} + \frac{A'}{27}} \quad \text{entonces} \quad t^3 = \frac{B'}{2} \pm \sqrt{\frac{B'^2}{4} + \frac{A'}{27}},$$

y debido a que  $w^3 = B' - t^3$ , obtenemos

$$w^3 = B' - \left( \frac{B'}{2} \pm \sqrt{\frac{B'^2}{4} + \frac{A'}{27}} \right) = \frac{B'}{2} \mp \sqrt{\frac{B'^2}{4} + \frac{A'}{27}},$$

más aún,  $z = w + t$ , en consecuencia se tiene

$$z = \sqrt[3]{\frac{B'}{2} \mp \sqrt{\frac{B'^2}{4} + \frac{A'}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{B'}{2} \pm \sqrt{\frac{B'^2}{4} + \frac{A'}{27}}}. \quad (1.50)$$

Finalmente, la solución para la ecuación cúbica en  $s$  es

$$s = \sqrt[3]{\frac{B'}{2} \mp \sqrt{\frac{B'^2}{4} + \frac{A'}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{B'}{2} \pm \sqrt{\frac{B'^2}{4} + \frac{A'}{27}}} + \frac{\alpha}{6}, \quad (1.51)$$

la igualdad anterior puede ser reescrita al considerar que el término de la raíz cuadrada se expresa como [ver (1.32)]

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.3. GRUPOS ORTOGONALES PARA LA SIGNATURA KLEINIANA EN CUATRO  
DIMENSIONES

---

$$s = \sqrt[3]{\frac{B'}{2} \mp \left( \sqrt{\frac{\theta \pm \sqrt{\theta^2 - \lambda^2}}{2}} + j \sqrt{\frac{\theta \mp \sqrt{\theta^2 - \lambda^2}}{2}} \right)} + \tag{1.52}$$

$$\sqrt[3]{\frac{B'}{2} \pm \left( \sqrt{\frac{\theta \pm \sqrt{\theta^2 - \lambda^2}}{2}} + j \sqrt{\frac{\theta \mp \sqrt{\theta^2 - \lambda^2}}{2}} \right)} + \frac{\alpha}{6},$$

donde  $\theta = \mathbf{Re}\left(\frac{B'^2}{4} + \frac{A'}{27}\right)$  y  $\lambda = \mathbf{Hc}\left(\frac{B'^2}{4} + \frac{A'}{27}\right)$ . Note que si  $|\mathbf{Re}\left(\frac{B'^2}{4} + \frac{A'}{27}\right)| \geq |\mathbf{Hc}\left(\frac{B'^2}{4} + \frac{A'}{27}\right)|$  y además  $\theta \geq \sqrt{\theta^2 - \lambda^2}$ , las soluciones de las raíces cuadradas serán números dobles, y si  $|\mathbf{Re}\left(\frac{B'^2}{4} + \frac{A'}{27}\right)| < |\mathbf{Hc}\left(\frac{B'^2}{4} + \frac{A'}{27}\right)|$  ó  $\theta < \sqrt{\theta^2 - \lambda^2}$ , entonces las soluciones a las raíces cuadradas serán combinaciones de números dobles y complejos. Debido a que nos interesan las soluciones con números dobles, estudiaremos la solución de las raíces cúbicas, es por ello que se propone que las soluciones de  $s$  se pueden expresar de la siguiente forma

$$s = (a' + jb')^{\frac{1}{3}} + (c' + jd')^{\frac{1}{3}} + (e + jf), \tag{1.53}$$

donde los índices primados representan los coeficientes de las raíces cúbicas de  $s$ . Asimismo, debido a que el módulo de un número doble puede ser negativo, se requiere que  $a' > b'$  y  $c' > d'$ . Es así que, finalmente estudiamos las soluciones a la ecuación cuártica, las cuales denotamos por  $x_i$ ,

$$x_i = \mp \frac{1}{2} \sqrt{2s - \alpha} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-(2s + \alpha)\sqrt{2s - \alpha} \pm 2\beta}{\sqrt{2s - \alpha}}} - \frac{B}{4A} \tag{1.54}$$

ó

$$x_i = \mp \frac{1}{2} \sqrt{2s - \alpha} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2 \pm 2\beta\sqrt{2s - \alpha} - 4s^2}{2s - \alpha}} - \frac{B}{4A},$$

donde el término  $-\frac{B}{4A}$  es debido al primer cambio de variable propuesto. Es así que se obtiene que si  $|\mathbf{Re}(2s - \alpha)| > |\mathbf{Hc}(2s - \alpha)|$  y  $|\mathbf{Re}(\alpha^2 \pm 2\beta\sqrt{2s - \alpha} - 4s^2)| \geq |\mathbf{Hc}(\alpha^2 \pm 2\beta\sqrt{2s - \alpha} - 4s^2)|$  las soluciones serán números dobles, por el contrario si apesar de que se cumpla la primera condición, pero  $|\mathbf{Re}(\alpha^2 \pm 2\beta\sqrt{2s - \alpha} - 4s^2)| < |\mathbf{Hc}(\alpha^2 \pm 2\beta\sqrt{2s - \alpha} - 4s^2)|$  entonces se tendrán combinaciones de números dobles y complejos o si  $|\mathbf{Re}(2s - \alpha)| > |\mathbf{Hc}(2s - \alpha)|$  y  $|\mathbf{Re}(\alpha^2 \pm 2\beta\sqrt{2s - \alpha} - 4s^2)| \geq |\mathbf{Hc}(\alpha^2 \pm 2\beta\sqrt{2s - \alpha} - 4s^2)|$  las soluciones son combinaciones de números complejos y dobles.

### 1.3. Grupos ortogonales para la signatura Kleiniana en cuatro dimensiones

De acuerdo a la ecuación (1.4) y (1.6) se define a la matriz  $\mathbb{P}$ ,

$$\mathbb{P} \equiv \begin{pmatrix} y - jw & x - jz \\ x + jz & -y - jw \end{pmatrix}, \tag{1.55}$$

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.3. GRUPOS ORTOGONALES PARA LA SIGNATURA KLEINIANA EN CUATRO  
DIMENSIONES

---

con  $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ , entonces  $\det(\mathbb{P}) = -x^2 - y^2 + z^2 + w^2$ . Sean  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{M}$  matrices cuadradas con entradas con números dobles, con las cuales efectuamos la siguiente transformación

$$\mathbb{P} \mapsto \mathbb{P}' \equiv \mathbb{K}\mathbb{P}\mathbb{M}, \quad (1.56)$$

note que  $\det(\mathbb{P}') = \det(\mathbb{K}\mathbb{P}\mathbb{M})$  entonces

$$\det(\mathbb{P}') = (\det\mathbb{K})(\det\mathbb{P})(\det\mathbb{M}) = (\det\mathbb{P})(\det\mathbb{K})(\det\mathbb{M}), \quad (1.57)$$

luego, si  $(\det \mathbb{K})(\det \mathbb{M}) = 1$  se cumple que  $\det(\mathbb{P}) = \det(\mathbb{P}')$ . Lo que implica que  $\mathbb{P} \mapsto \mathbb{P}'$  es una transformación ortogonal. A continuación se estudia la representación de las matrices  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{M}$ . Con la finalidad de facilitar el estudio del producto  $\mathbb{K}\mathbb{P}\mathbb{M}$ , resulta que se puede dividir el problema por casos.

■ **Caso 1:**  $\mathbb{M}$  es una matriz hipercompleja y  $\mathbb{K}$  es la matriz identidad, esto es  $\mathbb{K} = \mathbb{I}$ . Las cuales se pueden representar como

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} a + jb & c + jd \\ e + jf & g + jh \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con  $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$ . Por tanto, el producto  $\mathbb{K}\mathbb{P}\mathbb{M}$  es igual a

$$\begin{aligned} \mathbb{K}\mathbb{P}\mathbb{M} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y - jw & x - jz \\ x + jz & -y - jw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + jb & c + jd \\ e + jf & g + jh \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ex + ay - fz - bw) + j(fx + by - ez - aw) & (gx + cy - hz - dw) + j(hx + dy - gz - cw) \\ (ax - ey + bz - fw) + j(bx - fy + az - ew) & (cx - gy + dz - hw) + j(dx - hy + cz - gw) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

note que si se cumplen las siguientes igualdades,  $a = g, b = -h, c = -e$  y  $d = f$ , la forma de la matriz se preserva, es decir;  $\mathbf{Re}(a_{11}) = -\mathbf{Re}(a_{22})$ ,  $\mathbf{Hc}(a_{11}) = \mathbf{Hc}(a_{22})$ ,  $\mathbf{Re}(a_{12}) = \mathbf{Re}(a_{21})$  y  $\mathbf{Hc}(a_{12}) = -\mathbf{Hc}(a_{21})$ , donde  $\mathbf{Re}$  y  $\mathbf{Hc}$  denotan la parte real e hipercompleja, respectivamente. Como resultado de las condiciones anteriores, la matriz  $\mathbb{M}$  se representa

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} a + jb & c + jd \\ -c + jd & a - jb \end{pmatrix}. \quad (1.58)$$

■ **Caso 2:**  $\mathbb{K}$  es una matriz hipercompleja y  $\mathbb{M} = \mathbb{I}$ . Las cuales se representan como

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} a + jb & c + jd \\ e + jf & g + jh \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con  $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$ . Por tanto, el producto  $\mathbb{K}\mathbb{P}\mathbb{M}$  es igual a

$$\begin{aligned} \mathbb{K}\mathbb{P}\mathbb{M} &= \begin{pmatrix} a + jb & c + jd \\ e + jf & g + jh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y - jw & x - jz \\ x + jz & -y - jw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (cx + ay + dz - bw) + j(dx + by + cz - aw) & (ax - cy - bz - dw) + j(bx - dy - az - cw) \\ (gx + ey + hz - fw) + j(hx + fy + gz - ew) & (ex - gy + fz - hw) + j(fx - hy - ez - gw) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.3. GRUPOS ORTOGONALES PARA LA SIGNATURA KLEINIANA EN CUATRO  
DIMENSIONES

---

nuevamente, si  $a = g, b = -h, c = -e$  y  $d = f$ , se preserva la forma de la matriz  $\mathbb{P}$ , es decir;  $\mathbf{Re}(a_{11}) = -\mathbf{Re}(a_{22})$ ,  $\mathbf{Hc}(a_{11}) = \mathbf{Hc}(a_{22})$ ,  $\mathbf{Re}(a_{12}) = \mathbf{Re}(a_{21})$  y  $\mathbf{Hc}(a_{12}) = -\mathbf{Hc}(a_{21})$ . En consecuencia, la matriz  $\mathbb{K}$  admite la siguiente representación

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} a + jb & c + jd \\ -c + jd & a - jb \end{pmatrix}. \quad (1.59)$$

Por lo tanto  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{M}$  son ambas matrices hipercomplejas las cuales cumplen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a + jb & c + jd \\ -c + jd & a - jb \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} a + jb & c + jd \\ -c + jd & a - jb \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a - jb & -c - jd \\ c - jd & a + jb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + jb & c + jd \\ -c + jd & a - jb \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + c^2 - b^2 - d^2 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 - b^2 - d^2 \end{pmatrix} \\ &= (a^2 + c^2 - b^2 - d^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.60)$$

es decir, las matrices  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{M}$  son unitarias si  $a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 1$ ; lo cual es consistente con  $(\det \mathbb{K})(\det \mathbb{M}) = 1$ .

Ahora analizamos el conjugado de las entradas de la matriz  $\mathbb{K}$ , usando (1.9),

$$\begin{aligned} \overline{K^1_1} &= \overline{a + jb} = a - jb = K^2_2 = -K^1_1, \\ \overline{K^1_2} &= \overline{c + jd} = c - jd = -K^2_1 = -K^1_2, \\ \overline{K^2_1} &= \overline{-c + jd} = -c - jd = -K^1_2 = -K^2_1 \quad \text{y} \\ \overline{K^2_2} &= \overline{a - jb} = a + jb = K^1_1 = -K^2_2, \end{aligned} \quad (1.61)$$

es decir,  $\overline{K^A_B} = -K^A_B$  o de forma equivalente, al calcular el conjugado de la igualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \overline{\overline{K^A_B}} &= -\overline{K^A_B} \\ \therefore \overline{K^A_B} &= -K^A_B. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Note que, al ser  $\mathbb{K}$  unitaria y además al cumplir  $\det(\mathbb{K}) = 1$ , esto implica que  $\mathbb{K} \in SU(2, \mathbb{H})$  que, en lo sucesivo, denotará el conjunto de matrices especiales (es decir, con determinante igual a 1), unitarias (es decir, la transpuesta conjugada de la matriz es igual a la matriz inversa) y con entradas con números dobles. A continuación probaremos que la forma de los elementos del grupo  $\mathbb{K} \in SU(2, \mathbb{H})$  es

$$\begin{pmatrix} a + jb & c + jd \\ -c + jd & a - jb \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.3. GRUPOS ORTOGONALES PARA LA SIGNATURA KLEINIANA EN CUATRO  
DIMENSIONES

---

Por tal motivo, consideramos un elemento arbitrario  $\mathbb{K} \in SU(2, \mathbb{H})$  el cual se denota como

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

con  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  elementos de la forma  $m + jn$ , donde  $m, n \in \mathbb{R}$ . Debido a la propiedad de unitariedad, sabemos,  $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^\dagger$ , esto es, usando que  $\det \mathbb{A} = 1$ ,

$$\mathbb{A}^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \mathbb{A}^{-1}, \quad (1.64)$$

de donde se obtiene  $\alpha = \bar{\delta}$  y  $\gamma = -\bar{\beta}$  o de forma equivalente

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, encontramos que los elementos de  $\mathbb{K} \in SU(2, \mathbb{H})$  son de la forma

$$\begin{pmatrix} m + jn & p + jl \\ -(p - jl) & m - jn \end{pmatrix}, \quad \text{con } m, n, p, l \in \mathbb{R} \text{ y } m^2 - n^2 + p^2 - l^2 = 1, \quad (1.65)$$

lo que coincide con (1.63), asimismo esto ya se reportó en [6]. A continuación, se encuentra el polinomio característico y los valores propios de la matriz  $\mathbb{K}$ ,

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a + jb - \lambda & c + jd \\ -c + jd & a - jb - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + 1 = 0, \quad (1.66)$$

donde se usó  $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1$ . Note que la forma de la matriz  $\mathbb{K}$ , la condición  $\det(\mathbb{A}) = 1$  y que la traza de la matriz es real, implica que el polinomio característico tiene coeficientes reales. Los valores propios se obtienen al resolver (1.66), de donde se obtiene

$$\lambda_1 = a + \sqrt{a^2 - 1} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = a - \sqrt{a^2 - 1}. \quad (1.67)$$

Por tanto las soluciones serán reales o imaginarias dependiendo sólo del valor de  $a$ . En consecuencia se obtienen los siguientes casos,

- **Caso 1:** Si  $|a| > 1$ , entonces  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .
- **Caso 2:** Si  $|a| < 1$ , entonces  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ .
- **Caso 3:** Si  $|a| = 1$ , entonces  $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

En particular, en el caso 1 conviene introducir cantidades dobles en los valores de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , esto es debido a que  $j^2 = 1$  y en consecuencia  $j = \pm\sqrt{1}$ ; además, esta elección permite eliminar la unidad  $j$  en el denominador de las componentes de los vectores propios, como se muestra más adelante [ec. (1.71)]. Es así que se hallan los vectores propios considerando los siguientes valores para  $\lambda$  en el primer caso

$$\lambda_1 = a + j\sqrt{a^2 - 1} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = a - j\sqrt{a^2 - 1}, \quad (1.68)$$

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.3. GRUPOS ORTOGONALES PARA LA SIGNATURA KLEINIANA EN CUATRO  
DIMENSIONES

---

note que  $\overline{\lambda_1} = \lambda_2$  y  $\lambda_1\lambda_2 = 1$ . Además, con esta elección obtenemos una representación similar a los valores propios asociados al grupo de matrices de  $SU(2, \mathbb{C})$ ; es decir, al grupo de matrices unitarias  $2 \times 2$  con entradas con números complejos, las cuales cumplen  $\mathbb{M}^\dagger = \mathbb{M}^{-1}$  y  $\det(\mathbb{M}) = 1$ , cuyos elementos se representan como

$$\begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix},$$

donde  $i$  es la unidad imaginaria usual. Sus valores propios son:  $e^{i\theta}$  y  $e^{-i\theta}$ , con  $\theta \in \mathbb{R}$ . De manera similar, los valores propios representados en (1.68) se pueden expresar como  $\lambda_1 = e^{\pm j\theta}$  y  $\lambda_2 = e^{\mp j\theta}$ , con  $\theta \in \mathbb{R}$ . Enseguida se encuentran los vectores propios, resolviendo  $(\mathbb{K} - \lambda_i \mathbb{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

■ Caso 1 con  $\lambda_1 = a + j\sqrt{a^2 - 1}$ .

$$\begin{pmatrix} a + jb - (a + j\sqrt{a^2 - 1}) & c + jd \\ -c + jd & a - jb - (a + j\sqrt{a^2 - 1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

donde se obtiene

$$\begin{cases} j(b - \sqrt{a^2 - 1})x + (c + jd)y = 0, \\ (-c + jd)x - j(b + \sqrt{a^2 - 1})y = 0, \end{cases}$$

así,

$$(-c + jd)x = j(b + \sqrt{a^2 - 1})y,$$

despejando a  $y$ ,

$$\frac{(-c + jd)x}{j(b + \sqrt{a^2 - 1})} = \frac{j(-c + jd)x}{j^2(b + \sqrt{a^2 - 1})} = \frac{(d - jc)x}{b + \sqrt{a^2 - 1}} = y, \quad \text{para } b + \sqrt{a^2 - 1} \neq 0, \quad (1.69)$$

note que al considerar lo anterior nos aseguramos de excluir los casos triviales, es decir,  $x = 0$  e  $y = 0$ . Entonces el vector propio asociado a  $\lambda_1$  es  $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} x \\ \frac{(d-jc)}{b+\sqrt{a^2-1}}x \end{pmatrix}$ , para  $x \neq 0$ .

■ Caso 1 con  $\lambda_2 = a - j\sqrt{a^2 - 1}$ .

$$\begin{pmatrix} a + jb - (a - j\sqrt{a^2 - 1}) & c + jd \\ -c + jd & a - jb - (a - j\sqrt{a^2 - 1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

de donde resulta que

$$\begin{cases} j(b + \sqrt{a^2 - 1})x + (c + jd)y = 0, \\ (-c + jd)x + j(-b + \sqrt{a^2 - 1})y = 0, \end{cases}$$

así,

$$(-c + jd)x = -j(-b + \sqrt{a^2 - 1})y,$$

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.3. GRUPOS ORTOGONALES PARA LA SIGNATURA KLEINIANA EN CUATRO  
DIMENSIONES

---

despejando a  $y$

$$\frac{(-c + jd)x}{j(b - \sqrt{a^2 - 1})} = \frac{j(-c + jd)x}{j^2(b - \sqrt{a^2 - 1})} = \frac{(d - jc)x}{b - \sqrt{a^2 - 1}} = y, \quad \text{para } b - \sqrt{a^2 - 1} \neq 0, \quad (1.70)$$

la consideración anterior descarta los casos triviales de  $x = 0$  e  $y = 0$ . Por lo tanto, el vector propio asociado a  $\lambda_2$  es  $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} x \\ \frac{d-jc}{b-\sqrt{a^2-1}}x \end{pmatrix}$ , para  $x \neq 0$ .

En resumen, se encontraron los siguientes vectores propios; los cuales vamos a denotar como  $\Psi$  y  $\Phi$ ,

$$\Psi = \begin{pmatrix} x \\ \frac{(d-jc)x}{b+\sqrt{a^2-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Phi = \begin{pmatrix} x \\ \frac{(d-jc)x}{b-\sqrt{a^2-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (1.71)$$

note que debido a la elección de los valores propios, fue posible remover la unidad  $j$  del denominador.

En el caso 2, consideramos los valores propios

$$\lambda_1 = a + i\sqrt{1 - a^2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = a - i\sqrt{1 - a^2}, \quad (1.72)$$

donde se tiene  $\overline{\lambda_1} = \lambda_2$  y  $\lambda_1\lambda_2 = 1$ . A continuación, se calculan los vectores propios.

□ Caso 2 con  $\lambda_1 = a + i\sqrt{1 - a^2}$ .

$$\begin{pmatrix} a + jb - (a + i\sqrt{1 - a^2}) & c + jd \\ -c + jd & a - jb - (a + i\sqrt{1 - a^2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

por consiguiente

$$\begin{cases} (jb - i\sqrt{1 - a^2})x + (c + jd)y = 0, \\ (-c + jd)x - (jb + i\sqrt{1 - a^2})y = 0, \end{cases}$$

de ahí que,

$$(-c + jd)x = (jb + i\sqrt{1 - a^2})y,$$

despejando a  $x$ ,

$$\frac{jb + i\sqrt{1 - a^2}}{-c + jd}y = x, \quad \text{con } -c + jd \neq 0, \quad (1.73)$$

así, el vector propio asociado a  $\lambda_1$  es  $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} \frac{jb+i\sqrt{1-a^2}}{-c+jd}y \\ y \end{pmatrix}$ , para  $y \neq 0$ .

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.3. GRUPOS ORTOGONALES PARA LA SIGNATURA KLEINIANA EN CUATRO  
DIMENSIONES

---

□ Caso 2 con  $\lambda_2 = a - i\sqrt{1 - a^2}$ .

$$\begin{pmatrix} a + jb - (a - i\sqrt{1 - a^2}) & c + jd \\ -c + jd & a - jb - (a - i\sqrt{1 - a^2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

donde se obtiene

$$\begin{cases} (jb + i\sqrt{1 - a^2})x + (c + jd)y = 0, \\ (-c + jd)x + (-jb + i\sqrt{1 - a^2})y = 0, \end{cases}$$

así,

$$(-c + jd)x = (jb - i\sqrt{1 - a^2})y,$$

despejando a  $x$ ,

$$\frac{jb - i\sqrt{1 - a^2}}{-c + jd}y = x, \quad \text{con } -c + jd \neq 0, \quad (1.74)$$

por tanto, el vector propio asociado a  $\lambda_2 = a - i\sqrt{1 - a^2}$  es  $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} \frac{jb - i\sqrt{1 - a^2}}{-c + jd}y \\ y \end{pmatrix}$ , para  $y \neq 0$ .

Finalmente, denotando a los vectores propios por  $\Psi$  y  $\Phi$  hallamos

$$\Psi = \begin{pmatrix} \frac{jb + i\sqrt{1 - a^2}}{-c + jd}y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \frac{jb - i\sqrt{1 - a^2}}{-c + jd}y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix}. \quad (1.75)$$

○ Caso 3 con  $\lambda_1 = \lambda_2 = a = 1$ .

$$\begin{pmatrix} a + jb - a & c + jd \\ -c + jd & a - jb - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

donde se obtiene

$$\begin{cases} jbx + (c + jd)y = 0, \\ (-c + jd)x - jby = 0, \end{cases}$$

en consecuencia,

$$(-c + jd)x = jby,$$

despejando a  $y$ ,

$$y = \frac{-c + jd}{jb}x = \frac{d - jc}{b}x, \quad \text{para } b \neq 0, \quad (1.76)$$

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.3. GRUPOS ORTOGONALES PARA LA SIGNATURA KLEINIANA EN CUATRO  
DIMENSIONES

---

por lo tanto, el vector propio asociado a  $\lambda_1 = \lambda_2 = a = 1$  es  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{d-jc}{b}x \end{pmatrix}$ , para  $x \neq 0$ .

◦ Caso 3 con  $\lambda_1 = \lambda_2 = a = -1$ .

$$\begin{pmatrix} a+jb+a & c+jd \\ -c+jd & a-jb+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

donde se obtiene

$$\begin{cases} (2a+jb)x + (c+jd)y = 0, \\ (-c+jd)x + (2a-jb)y = 0, \end{cases}$$

en consecuencia,

$$(-c+jd)x = -(2a-jb)y,$$

despejando a  $y$ ,

$$y = \frac{c-jd}{2a-jb}x, \quad \text{para } 2a-jb \neq 0,$$

por lo tanto, el vector propio asociado a  $\lambda_1 = \lambda_2 = a = -1$  es  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{c-jd}{2a-jb}x \end{pmatrix}$ , para  $x \neq 0$ .

Finalmente, denotamos a los vectores propios por  $\Psi_{+1}$  o  $\Psi_{-1}$ , donde el subíndice indica el valor propio que se tomo, por tanto se tiene

$$\Psi_{+1} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{d-jc}{b}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Psi_{-1} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{c-jd}{2a-jb}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}. \quad (1.77)$$

En cambio, con respecto a la segunda elección de base,  $\{\mathbf{E}_a\}$ , y de acuerdo a (1.5) y (1.6) se sigue que la matriz  $\mathbb{P}$  se define como

$$\mathbb{P} \equiv \begin{pmatrix} y-w & x-jz \\ x+jz & -y-w \end{pmatrix}, \quad (1.78)$$

con  $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ , entonces  $\det(\mathbb{P}) = -x^2 - y^2 + z^2 + w^2$ . Nuevamente podemos considerar matrices  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{M}$ , con las cuales realizamos la siguiente transformación

$$\mathbb{P} \mapsto \mathbb{P}' \equiv \mathbb{K}\mathbb{P}\mathbb{M}, \quad (1.79)$$

calculando el determinante, encontramos

$$\det(\mathbb{P}') = (\det\mathbb{K})(\det\mathbb{P})(\det\mathbb{M}) = (\det\mathbb{P})(\det\mathbb{K})(\det\mathbb{M}), \quad (1.80)$$

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.3. GRUPOS ORTOGONALES PARA LA SIGNATURA KLEINIANA EN CUATRO  
DIMENSIONES

---

luego, si  $(\det\mathbb{K})(\det\mathbb{M}) = 1$  se cumple la igualdad  $\det(\mathbb{P}) = \det(\mathbb{P}')$ . Es decir,  $\mathbb{P} \mapsto \mathbb{P}'$  es una transformación ortogonal.

Con la finalidad de encontrar la forma de las matrices  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{M}$ , nos auxiliamos de la ecuación (1.101), desarrollada en [1], la cual representa a las matrices ortogonales con determinante positivo, esto es

$$L^a_b = \frac{1}{2}\sigma^a_{A\dot{B}}\sigma_b^{C\dot{D}}K^A_C M^{\dot{B}}_{\dot{D}},$$

las entradas de  $L^a_b$  serán reales si

$$\sigma^a_{A\dot{B}}\sigma_b^{C\dot{D}}K^A_C M^{\dot{B}}_{\dot{D}} = \sigma^a_{B\dot{A}}\sigma_b^{D\dot{C}}\overline{K^A_C} \overline{M^{\dot{B}}_{\dot{D}}}, \quad (1.81)$$

reescribiendo el lado derecho de la igualdad anterior, se tiene

$$\sigma^a_{A\dot{B}}\sigma_b^{C\dot{D}}K^A_C M^{\dot{B}}_{\dot{D}} = \sigma^a_{A\dot{B}}\sigma_b^{C\dot{D}}\overline{K^B_D} \overline{M^{\dot{A}}_{\dot{C}}},$$

luego

$$K^A_C M^{\dot{B}}_{\dot{D}} = \overline{K^B_D} \overline{M^{\dot{A}}_{\dot{C}}}, \quad (1.82)$$

de donde se infiere que  $\overline{K^B_D} \propto M^{\dot{B}}_{\dot{D}}$  y  $\overline{M^{\dot{A}}_{\dot{C}}} \propto K^A_C$ , o de forma equivalente

$$\overline{K^B_D} = \lambda M^{\dot{B}}_{\dot{D}} \quad \text{y} \quad \overline{M^{\dot{A}}_{\dot{C}}} = \lambda^{-1} K^A_C, \quad (1.83)$$

para algún escalar  $\lambda$ . Calculando el determinante, se obtiene

$$\overline{\det(K^B_D)} = \lambda^2 \det(M^{\dot{B}}_{\dot{D}}) \quad \text{y} \quad \overline{\det(M^{\dot{B}}_{\dot{D}})} = \lambda^{-2} \det(K^B_D),$$

conjugando la segunda ecuación obtenemos

$$\det(M^{\dot{B}}_{\dot{D}}) = \overline{\lambda^{-2}} \overline{\det(K^B_D)},$$

y sustituyendo en la primera ecuación,

$$\overline{\det(K^B_D)} = \lambda^2 \frac{1}{\overline{\lambda^2}} \overline{\det(K^B_D)},$$

es decir,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , además  $\lambda^2 = 1$  y en consecuencia  $\lambda = \pm 1$ . Así

$$K^A_C = \pm \overline{M^{\dot{A}}_{\dot{C}}}, \quad (1.84)$$

con  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{M} \in SL(2, \mathbb{H})$ .

Por último, se estudia el homomorfismo entre el grupo  $SU(2, \mathbb{H})$  y  $SL(2, \mathbb{R})$ . Para ello consideramos a una matriz arbitraria que pertenece al grupo  $SU(2, \mathbb{H})$ , la cual se puede escribir como

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.3. GRUPOS ORTOGONALES PARA LA SIGNATURA KLEINIANA EN CUATRO  
DIMENSIONES

---

$$\begin{pmatrix} a + jb & c + jd \\ -c + jd & a - jb \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix},$$

por consiguiente, se definen los generadores

$$\pi^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi^2 = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \pi^3 = \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.85)$$

los cuales tienen las siguientes reglas de conmutación

$$[\pi^1, \pi^2] = -2\pi^3, \quad [\pi^1, \pi^3] = 2\pi^2 \quad \text{y} \quad [\pi^2, \pi^3] = -2\pi^1. \quad (1.86)$$

Por otro lado, sabemos que unos generadores del grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  son

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.87)$$

a partir de los cuales definimos

$$Y^1 = X^2 - X^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y^2 = -X^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y^3 = X^1 + X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.88)$$

que tienen las siguientes reglas de conmutación

$$[Y^1, Y^2] = -2Y^3, \quad [Y^1, Y^3] = 2Y^2 \quad \text{y} \quad [Y^2, Y^3] = -2Y^1, \quad (1.89)$$

así, de (1.86) y (1.89), se obtiene que existe un isomorfismo entre las álgebras de Lie de  $SU(2, \mathbb{H})$  y  $SL(2, \mathbb{R})$ . Un isomorfismo está dado explícitamente por

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-j & 1+j \\ 1+j & -1+j \end{pmatrix} Y^i \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-j & 1+j \\ 1+j & -1+j \end{pmatrix} = \pi^i, \quad (1.90)$$

o de forma equivalente  $Y^i \mathbb{S} = \mathbb{S} \pi^i$ , esto es

$$\frac{1}{2} Y^i \begin{pmatrix} 1-j & 1+j \\ 1+j & -1+j \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-j & 1+j \\ 1+j & -1+j \end{pmatrix} \pi^i, \quad (1.91)$$

donde  $S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-j & 1+j \\ 1+j & -1+j \end{pmatrix}$ . Note que  $\mathbb{S}^{-1} = \mathbb{S}$ , es decir,  $\mathbb{S}$  es una matriz involutiva. Por último, consideramos a la matriz  $\mathbb{A} \in SL(2, \mathbb{R})$ , verificaremos si  $\mathbb{S}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{S} \in SU(2, \mathbb{H})$ , para ello expresamos a la matriz  $\mathbb{A}$  como sigue

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix},$$

con  $p, q, r, s \in \mathbb{R}$  y  $ps - qr = 1$ ; por consiguiente el producto  $\mathbb{S}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{S}$  es igual a

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-j & 1+j \\ 1+j & -1+j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-j & 1+j \\ 1+j & -1+j \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(p+s) + 2j(s-p) & 2(r-q) + 2j(r+q) \\ -2(r-q) + 2j(r+q) & 2(p+s) - 2j(s-p) \end{pmatrix},$$

note que la matriz anterior es de la forma  $\begin{pmatrix} a+jb & c+jd \\ -c+jd & a-jb \end{pmatrix}$ , por lo tanto  $\mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} \in SU(2, \mathbb{H})$ .

### 1.4. Compañero de un espinor

Sea  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$ , el cual se transforma como

$$\psi'^A = K^A_B \psi^B, \quad (1.92)$$

con  $(K^A_B) \in SU(2, \mathbb{H})$ , por tanto la transformación anterior se expresa explícitamente por

$$\begin{pmatrix} \psi'^1 \\ \psi'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+jb & c+jd \\ -c+jd & a-jb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \quad (1.93)$$

de donde se obtiene

$$\psi'^1 = \psi^1(a+jb) + \psi^2(c+jd), \quad (1.94)$$

$$\psi'^2 = \psi^1(-c+jd) + \psi^2(a-jb),$$

al conjugar las ecuaciones obtenemos

$$\overline{\psi'^1} = \overline{\psi^1}(a-jb) + \overline{\psi^2}(c-jd), \quad (1.95)$$

$$\overline{\psi'^2} = \overline{\psi^1}(-c-jd) + \overline{\psi^2}(a+jb),$$

ordenando las ecuaciones, lo anterior equivale a

$$\overline{\psi'^2} = \overline{\psi^2}(a+jb) - \overline{\psi^1}(c+jd), \quad (1.96)$$

$$\overline{\psi'^1} = -\overline{\psi^2}(-c-jd) + \overline{\psi^1}(a-jb),$$

y comparando con (1.94) obtenemos que el compañero del espinor  $\Psi$ , denotado por  $\hat{\Psi}$ , se puede definir como

$$\hat{\psi}^1 = -\overline{\psi^2} = -\hat{\psi}_2 = -\overline{\psi_1}, \quad (1.97)$$

$$\hat{\psi}^2 = \overline{\psi^1} = \hat{\psi}_1 = -\overline{\psi_2},$$

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.4. COMPAÑERO DE UN ESPINOR

---

de tal manera que las componentes de  $\hat{\psi}$  se transforman de la misma manera que las de  $\psi$ ,

$$\hat{\psi}_A = \overline{\psi^A} \quad \text{y} \quad \hat{\psi}^A = -\overline{\psi_A}. \quad (1.98)$$

A continuación se calcula  $\hat{\psi}^1$  y  $\hat{\psi}^2$ , para ello se define  $\alpha^A = \hat{\psi}^A$ ,

$$\hat{\psi}^1 = \hat{\alpha}^1 = -\overline{\alpha^2} = -\overline{\hat{\psi}^2} = -\overline{\hat{\psi}^1} = -\psi^1,$$

$$\hat{\psi}^2 = \hat{\alpha}^2 = \overline{\alpha^1} = \overline{\hat{\psi}^1} = -\overline{\hat{\psi}^2} = -\psi^2,$$

$$\therefore \hat{\psi}^A = -\psi^A. \quad (1.99)$$

Además, si se analiza si existe un espinor tal que  $\psi^A = \kappa \hat{\psi}^A$ , con  $\kappa \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$  o  $\mathbb{H}$ . Se tiene

$$(\psi^A)^\wedge = (\kappa \hat{\psi}^A)^\wedge$$

$$\hat{\psi}^A = \overline{\kappa} \hat{\psi}^A = -\overline{\kappa} \psi^A \quad (1.100)$$

$$= -\overline{\kappa} \kappa \hat{\psi}^A,$$

por lo que, descartando el caso trivial,  $\psi^A = 0$ , se tiene que  $\kappa \overline{\kappa} = -1$ , lo cual no se puede satisfacer si  $\kappa$  es real o complejo. Escribiendo  $\kappa = a + jb$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , obtenemos  $\kappa \overline{\kappa} = (a + jb)(a - jb) = a^2 - b^2 = -1$ , por lo que existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $b = \pm \cosh \theta$  y  $a = \sinh \theta$ , luego  $\kappa = \sinh \theta \pm j \cosh \theta = \pm j (\cosh \theta \pm j \sinh \theta) = \pm e^{\pm j\theta}$ . Y en consecuencia

$$\psi^A = \pm j e^{\pm j\theta} \hat{\psi}^A$$

$$\Rightarrow e^{\mp \frac{j\theta}{2}} \psi^A = \pm j e^{\pm \frac{j\theta}{2}} \hat{\psi}^A$$

$$\Rightarrow e^{\mp \frac{j\theta}{2}} \psi^A = \pm j \left( e^{\mp \frac{j\theta}{2}} \psi^A \right)^\wedge. \quad (1.101)$$

Por tanto, si se define  $\phi^A \equiv e^{\mp \frac{j\theta}{2}} \psi^A$ , se tiene  $\phi^A = \pm j \hat{\phi}^A$ . En conclusión, existen espinores que son proporcionales a su compañero con  $\kappa = \pm j$ .

Por otro lado, recordemos que  $\Psi$  es un vector propio de la matriz  $\mathbb{K}$  si cumple

$$K^A_B \psi^B = \lambda \psi^A, \quad (1.102)$$

de la igualdad anterior obtenemos  $-K_A^B \psi_B = \lambda \psi_A$ , al conjugar

$$-\overline{K_A^B} \overline{\psi_B} = \overline{\lambda} \overline{\psi_A}, \quad (1.103)$$

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.4. COMPAÑERO DE UN ESPINOR

---

usando la definición de compañero de un espinor y (1.62), se tiene

$$K^A{}_B \hat{\psi}^B = \bar{\lambda} \hat{\psi}^A, \quad (1.104)$$

es decir,  $\hat{\Psi}$  es vector propio de la matriz  $\mathbb{K}$  con valor propio  $\bar{\lambda}$ . Luego, si  $\bar{\lambda} \neq \lambda$ ,  $\Phi$  y  $\hat{\Phi}$  forman una base.

Con respecto a la definición de vectores y valores propios; es decir, de (1.102) tenemos

$$K^A{}_B \psi^B = \lambda \frac{\phi_B \psi^B}{\phi_B \psi^B} \psi^A, \quad (1.105)$$

$$K^A{}_B \phi^B = \beta \frac{\phi^B \psi_B}{\phi^B \psi_B} \phi^A,$$

o de forma equivalente

$$\left( K^A{}_B - \lambda \frac{\phi_B \psi^A}{\phi_R \psi^R} \right) \psi^B = 0, \quad (1.106)$$

$$\left( K^A{}_B + \beta \frac{\phi^A \psi_B}{\phi_R \psi^R} \right) \phi^B = 0,$$

en la última igualdad se usó la relación  $\psi^A \phi_A = -\psi_A \phi^A$ . Además, sabemos que  $\psi^A \psi_A = 0$ , en consecuencia las igualdades anteriores se reescriben como

$$\left( K^A{}_B - \lambda \frac{\phi_B \psi^A}{\phi_R \psi^R} + \beta \frac{\phi^A \psi_B}{\phi_R \psi^R} \right) \psi^B = 0, \quad (1.107)$$

$$\left( K^A{}_B + \beta \frac{\phi^A \psi_B}{\phi_R \psi^R} - \lambda \frac{\phi_B \psi^A}{\phi_R \psi^R} \right) \phi^B = 0.$$

Si  $\phi_R \psi^R \neq 0$ , lo que equivalente a que  $\{\psi^A, \phi^A\}$  sea linealmente independiente y en consecuencia las igualdades anteriores

$$K^A{}_B - \lambda \frac{\phi_B \psi^A}{\phi_R \psi^R} + \beta \frac{\phi^A \psi_B}{\phi_R \psi^R} = 0, \quad (1.108)$$

es decir,

$$K^A{}_B = \frac{1}{\phi_R \psi^R} (\lambda \psi^A \phi_B - \beta \phi^A \psi_B), \quad (1.109)$$

por último, recordamos que los valores propios  $\lambda$  y  $\beta$  se pueden escribir como  $e^{\pm \frac{j\theta}{2}}$ , así

$$K^A{}_B = \frac{1}{\phi_R \psi^R} \left( e^{\frac{j\theta}{2}} \psi^A \phi_B - e^{-\frac{j\theta}{2}} \phi^A \psi_B \right). \quad (1.110)$$

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**

1.4. COMPAÑERO DE UN ESPINOR

Por el contrario, si  $\hat{\psi}_A = \alpha \psi_A$ , lo cual implica que  $\lambda = \bar{\lambda}$ , y  $\alpha$  es un escalar a determinar, el cual se puede obtener de forma inmediata al considerar la ecuación (1.101), esto es, se obtiene que  $\alpha = \pm j$ . Asimismo, debido a que  $\lambda = \bar{\lambda}$  entonces  $\lambda = e^{\frac{\theta}{2}}$ . De la misma forma, se propone que si  $\hat{\phi}_A \propto \phi_A$ , entonces  $\hat{\phi}_A = \pm j \phi_A$  y  $\beta = \bar{\beta} = e^{-\frac{\theta}{2}}$ . Por lo tanto, usando (1.109) y las relaciones anteriores se obtiene

$$K^A_B = \pm \frac{1}{\phi_R \psi^R} \left( e^{\frac{\theta}{2}} \psi^A \phi_B - e^{-\frac{\theta}{2}} \phi^A \psi_B \right). \quad (1.111)$$

Consideremos ahora, el caso cuando  $\psi^A$  y  $\phi^A$  son linealmente dependientes, lo que implica  $\lambda = \beta$ . Asimismo, sabemos que cualquier matriz cuadrada se puede representar como la suma de dos matrices, una simétrica y otra antisimétrica,

$$K_{AB} = \frac{1}{2} (K_{AB} + K_{BA}) + \frac{1}{2} (K_{AB} - K_{BA}), \quad (1.112)$$

usando (1.16), la igualdad anterior se reescribe

$$\begin{aligned} K_{AB} &= K_{(AB)} + K^Q \epsilon_{AB} \\ &= \mu_{(AB)} + \pi \epsilon_{AB}, \end{aligned} \quad (1.113)$$

con  $\pi$  un escalar hipercomplejo y  $\mu_{AB} = \mu_{BA}$ . Usando (1.30), se sigue que existen  $\psi_A, \phi_A$ , tales que  $\mu_{AB} = \psi_{(A} \phi_{B)}$ , en consecuencia  $\psi^A$  y  $\phi^A$  son los espinores propios de la matriz  $(K^A_B)$ . Luego,

$$K_{AB} = \mu_{(AB)} + \psi_{(A} \phi_{B)}, \quad (1.114)$$

subiendo el índice  $A$ , en la ecuación anterior y considerando el producto simetrizado de  $\psi^A$  y  $\phi^A$  obtenemos

$$K^A_B = \mu \delta_B^A + \frac{1}{2} (\psi^A \phi_B + \phi^A \psi_B), \quad (1.115)$$

finalmente, al considerar que el determinante de  $(K^A_B) = \pm 1$  y la dependencia lineal de  $\psi^A$  y  $\phi_B$ , obtenemos

$$K^A_B = \pm \delta_B^A + \theta \psi^A \psi_B, \quad (1.116)$$

con  $\theta$  un escalar real o hipercomplejo. En resumen, encontramos que la forma de las matrices  $(K^A_B) \in SL(2, \mathbb{H})$  es

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\phi_R \psi^R} \left( e^{\frac{i\theta}{2}} \psi^A \phi_B - e^{-\frac{i\theta}{2}} \phi^A \psi_B \right), & \text{si } \hat{\phi}^A \phi_A \neq 0, \\ \pm \frac{j}{\phi_R \psi^R} \left( e^{\frac{\theta}{2}} \psi^A \phi_B - e^{-\frac{\theta}{2}} \phi^A \psi_B \right), & \text{si } \hat{\phi}_A = \pm j \phi_A \text{ y } \hat{\psi}_A = \pm j \psi_A, \\ \pm \delta_B^A + \theta \psi^A \psi_B, & \text{si } \phi^A \phi^A \text{ son linealmente dependientes.} \end{array} \right. \quad (1.117)$$

excluyendo a la matriz identidad.

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**

**1.5. GRUPOS ORTOGONALES PARA ESPACIOS DE TRES DIMENSIONES**

---

### 1.5. Grupos ortogonales para espacios de tres dimensiones

Para la métrica definida como  $(g_{ab}) = \text{diag}(+, -, +)$  una elección conveniente de la base  $\{\mathbf{E}_a\}$  es

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + j\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_1 + j\mathbf{e}_2) \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_3, \quad (1.118)$$

en este caso los símbolos de Infeld-van der Waerden están dados por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.119)$$

los cuales cumplen con la siguiente relación bajo conjugación

$$\overline{\sigma^a_{AB}} = -\sigma^{aAB}, \quad (1.120)$$

además, de acuerdo a la elección de la base anterior, podemos definir a la matriz  $\mathbb{P}$ , la cual se representa como

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} x + jy & -z \\ -z & -x + jy \end{pmatrix}, \quad (1.121)$$

con  $\det(\mathbb{P}) = -x^2 + y^2 - z^2$ . Dadas  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{M}$  matrices cuadradas con entradas con números dobles, se realiza la siguiente transformación

$$\mathbb{P} \mapsto \mathbb{P}' \equiv \mathbb{KPM}, \quad (1.122)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}'^T &= (\mathbb{KPM})^T = \mathbb{M}^T \mathbb{P} \mathbb{K}^T \\ \therefore \mathbb{K} &= \mathbb{M}^T, \end{aligned} \quad (1.123)$$

en donde  $T$  indica transposición, se sigue

$$\mathbb{P}' = \mathbb{M}^T \mathbb{P} \mathbb{M}, \quad (1.124)$$

de ahí que  $\det(\mathbb{M}) = \pm 1$ . Para hallar la representación de la matriz  $\mathbb{M}$ , consideramos la ecuación (5.34) presentada en [3], la cual es válida para cualquier matriz  $(L^a_b)$  que pertenece a  $O(p, q)$  y que se expresa como

$$L^a_b = \pm \frac{1}{2} \sigma^a_{AB} \sigma_b^{CD} U^A_C U^B_D, \quad (1.125)$$

donde  $(U^A_C)$  posee determinante igual a 1. Con la finalidad de conocer la representación de la matriz  $\mathbb{M}$ , igualamos la expresión anterior con su conjugado, es decir, estudiamos bajo qué condiciones de  $\mathbb{M}$ ,  $L^a_b$  es real, por tanto

**CAPÍTULO 1. NÚMEROS DOBLES EN ESPACIOS DE CUATRO Y TRES  
DIMENSIONES**  
1.5. GRUPOS ORTOGONALES PARA ESPACIOS DE TRES DIMENSIONES

---

$$\begin{aligned}\sigma^a{}_{AB}\sigma_b{}^{CD}U^A{}_C U^B{}_D &= \overline{\sigma^a{}_{AB}} \overline{\sigma_b{}^{CD}} \overline{U^A{}_C} \overline{U^B{}_D} \\ &= \sigma^{aAB} \sigma_{bCD} \overline{U^A{}_C} \overline{U^B{}_D},\end{aligned}\tag{1.126}$$

para poder comparar la expresión anterior, debemos reescribir el lado izquierdo, así

$$\sigma^{aAB} \sigma_{bCD} U^A{}_C U^B{}_D = \sigma^{aAB} \sigma_{bCD} \overline{U^A{}_C} \overline{U^B{}_D},$$

de donde se obtiene

$$U^A{}_C U^B{}_D = \overline{U^A{}_C} \overline{U^B{}_D},\tag{1.127}$$

por tanto  $U^A{}_C = \lambda \overline{U^A{}_C}$ , para algún escalar  $\lambda$ . Considerando el  $\det(U^A{}_C)$  se tiene,

$$\begin{aligned}\det(U^A{}_C) &= U^1{}_1 U^2{}_2 - U^1{}_2 U^2{}_1 \\ &= U^1{}_1 (\lambda \overline{U^2{}_2}) - U^1{}_2 (\lambda \overline{U^2{}_1}) \\ &= -\lambda U^1{}_1 \overline{U^2{}_1} - \lambda U^1{}_2 \overline{U^2{}_2} \\ &= -\lambda (|U^1{}_1|^2 + |U^1{}_2|^2)\end{aligned}\tag{1.128}$$

en consecuencia  $\lambda = -1$  y  $U^A{}_C = -\overline{U^A{}_C}$ . Finalmente, debido a la igualdad anterior, se tiene que  $(U^A{}_C)$  son matrices unitarias, y al poseer  $\det(\mathbb{U}) = 1$ , se tiene que  $\mathbb{U} \in SU(2, \mathbb{H})$ .

## Capítulo 2

# Conexión y curvatura

En este capítulo se introducen conceptos nuevos; en particular se revisa lo que es una conexión, torsión y curvatura en variedades Riemannianas. Una variedad Riemanniana es una variedad diferenciable  $M$ , con un campo tensorial diferenciable, no singular y simétrico del tipo  $\binom{0}{2}$ , denominado *tensor métrico*. En este tipo de variedades es posible definir un producto interno entre los vectores tangentes en cada punto de la variedad, el cual forma un espacio vectorial; debido a esto es posible construir tétradas nulas en cuatro dimensiones. Es decir, es posible introducir el formalismo de espinores para el estudio de la conexión, torsión, curvatura, los campos vectoriales de Killing, etc., como se muestra en [1]. En forma similar, en este capítulo, se busca estudiar la aplicación del formalismo de espinores con la introducción de cantidades dobles.

Debido a que tenemos dos elecciones de base en el caso de cuatro dimensiones, las relaciones para cada elección de los símbolos de Infeld-van der Waerden se presentan en secciones diferentes para evitar confusiones. Finalmente, debido a la semejanza que existe en el caso de cuatro y tres dimensiones, las últimas no se presentan explícitamente en este capítulo. Sin embargo, en el capítulo dedicado a las aplicaciones en espacios de tres dimensiones, se hace un resumen de las ecuaciones a usar.

### 2.1. Conexión en cuatro dimensiones

Una *conexión*, la cual denotamos en lo sucesivo como  $\nabla$ , es una regla para calcular las derivadas direccionales de los campos vectoriales en  $M$ . Si  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  son dos campos vectoriales que pertenecen a  $M$ ,  $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$  denota el campo vectorial cuyo valor en cada punto  $p \in M$  es igual a la derivada direccional de  $\mathbf{Y}$  en la dirección de  $\mathbf{X}_p$ . Una conexión cumple las siguientes propiedades para  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $f : M \rightarrow R$ ,

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{X}}(a\mathbf{Y} + b\mathbf{Z}) &= a\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + b\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}, \\ \nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) &= f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + (\mathbf{X}f)\mathbf{Y}, \\ \nabla_{a\mathbf{X}+b\mathbf{Y}}\mathbf{Z} &= a\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + b\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}, \\ \nabla_{f\mathbf{X}}\mathbf{Y} &= f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y},\end{aligned}\tag{2.1}$$

**CAPÍTULO 2. CONEXIÓN Y CURVATURA**  
**2.1. CONEXIÓN EN CUATRO DIMENSIONES**

---

con  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  campos vectoriales en  $M$ . Además, con respecto a una tetrada ortonormal  $\{\partial_a\}$ , una conexión se representa por el conjunto de funciones  $\Gamma^a_{bc}$ , definido por

$$\nabla_a \partial_b = \Gamma^c_{ba} \partial_c, \quad (2.2)$$

donde  $\nabla_a$  representa la derivada covariante a lo largo de  $\partial_a$ , es decir,  $\nabla_a = \nabla_{\partial_a}$ . Usando la igualdad anterior y las propiedades de la conexión, notamos que la 1-forma de conexión, definida como

$$\Gamma^a_b \equiv \Gamma^a_{bc} \theta^c, \quad (2.3)$$

satisface

$$\Gamma^a_b(\mathbf{X}) = \theta^a(\nabla_{\mathbf{X}} \partial_b), \quad (2.4)$$

para cualquier  $\mathbf{X}$  en  $M$ . Por otro lado, existen dos campos tensoriales asociados a una conexión; la torsión y la curvatura. El primero lo denotamos por  $T$ , y se define como

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \quad (2.5)$$

para cualquier  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  en  $M$  y donde  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  denota el paréntesis de Lie (o conmutador) entre los campos vectoriales  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ . Note que  $T$  es un tensor antisimétrico, es decir,  $T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -T(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ . Asimismo, la 2-forma de torsión,  $T^a$ , con respecto a la tetrada  $\{\partial_a\}$  se define

$$T^a(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \frac{1}{2} \theta^a(T(\mathbf{X}, \mathbf{Y})). \quad (2.6)$$

Se dice que una conexión  $\nabla$  es simétrica o libre de torsión, si el tensor  $T = 0$ .

Usando (2.4) – (2.6) es posible derivar las *primeras ecuaciones estructurales de Cartan*,

$$\begin{aligned} T^a(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \frac{1}{2} \theta^a(T(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \\ &= \frac{1}{2} \theta^a(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) \\ &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{X}(\theta^a(\mathbf{Y})) - (\nabla_{\mathbf{X}} \theta^a)(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}(\theta^a(\mathbf{X})) + (\nabla_{\mathbf{Y}} \theta^a)(\mathbf{X}) - \theta^a([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ 2d\theta^a(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \Gamma^a_b(\mathbf{X})\theta^b(\mathbf{Y}) - \Gamma^a_b(\mathbf{Y})\theta^b(\mathbf{X}) \} \\ &= (d\theta^a + \Gamma^a_b \wedge \theta^b)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \end{aligned}$$

es decir,

$$T^a = d\theta^a + \Gamma^a_b \wedge \theta^b, \quad (2.7)$$

**CAPÍTULO 2. CONEXIÓN Y CURVATURA**  
2.1. CONEXIÓN EN CUATRO DIMENSIONES

---

si la derivada exterior de una 1-forma,  $\alpha$ , se define como

$$d\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \frac{1}{2} \{ \mathbf{X}(\alpha(\mathbf{Y})) - \mathbf{Y}(\alpha(\mathbf{X})) - \alpha([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) \}, \quad (2.8)$$

y el producto exterior de dos 1-formas,  $\alpha$  y  $\beta$  como

$$(\alpha \wedge \beta)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \frac{1}{2} [\alpha(\mathbf{X})\beta(\mathbf{Y}) - \alpha(\mathbf{Y})\beta(\mathbf{X})]. \quad (2.9)$$

Se dice que la conexión es compatible con la métrica si

$$\mathbf{X}[g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})] = g(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + g(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}), \quad (2.10)$$

en consecuencia se tiene

$$\begin{aligned} \partial_a g_{bc} &= g(\nabla_a \partial_b, \partial_c) + g(\partial_b, \nabla_a \partial_c) \\ &= \Gamma^d{}_{ba} g_{dc} + \Gamma^d{}_{ca} g_{bd} = \Gamma_{cba} + \Gamma_{bca}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde se usó  $g_{ab}$  para bajar índices. Así, con respecto a una base ortonormal, una conexión compatible con la métrica se representa por un conjunto de funciones, denominados *coeficientes de rotación de Ricci* los cuales se representan por  $\Gamma_{abc}$ , que satisfacen

$$\Gamma_{abc} = -\Gamma_{bac}. \quad (2.12)$$

En una variedad Riemanniana existe una única conexión sin torsión compatible con la métrica; la *conexión Riemanniana* o *conexión de Levi-Civita*. En lo sucesivo se consideran únicamente conexiones Riemannianas. Es importante destacar que los coeficientes de Ricci pueden ser calculados usando las primeras ecuaciones estructurales de Cartan, (2.7), o con los conmutadores de los campos vectoriales  $\partial_a$ .

Note que una consecuencia de (2.12), es que las 1-formas de conexión satisfacen  $\Gamma_{ab} = -\Gamma_{ba}$ . Además, si usamos la equivalencia espinorial de un tensor, (1.19), obtenemos que el equivalente espinorial de  $\Gamma_{A\dot{A}B\dot{B}} = \frac{1}{2}\sigma^a{}_{A\dot{A}}\sigma^b{}_{B\dot{B}}\Gamma_{ab}$ , puede ser expresado como

$$\Gamma_{A\dot{A}B\dot{B}} = \mathbb{T}_{AB}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} + \mathbb{T}_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{AB}, \quad (2.13)$$

en la igualdad anterior se ha introducido la letra  $\mathbb{T}$  para evitar confusiones con  $\Gamma^a{}_b$ . La cual representa 1-formas simétricas, es decir,  $\mathbb{T}_{AB} = \mathbb{T}_{(AB)} = \frac{1}{2}(\mathbb{T}_{AB} + \mathbb{T}_{BA})$  y  $\mathbb{T}_{\dot{A}\dot{B}} = \mathbb{T}_{(\dot{A}\dot{B})} = \frac{1}{2}(\mathbb{T}_{\dot{A}\dot{B}} + \mathbb{T}_{\dot{B}\dot{A}})$ . Al definir

$$\theta^{A\dot{A}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_a{}^{A\dot{A}}\theta^a, \quad (2.14)$$

las primeras ecuaciones estructurales de Cartan, con torsión cero son equivalentes a

$$d\theta^{A\dot{A}} = \Gamma^{A\dot{A}}{}_{B\dot{B}} \theta^{B\dot{B}} = \mathbb{T}^A{}_B \theta^{B\dot{A}} + \mathbb{T}^{\dot{A}}{}_{\dot{B}} \theta^{A\dot{B}}. \quad (2.15)$$

**CAPÍTULO 2. CONEXIÓN Y CURVATURA**  
2.1. CONEXIÓN EN CUATRO DIMENSIONES

---

Por otro lado, las 1-formas  $\Gamma_{AB}$  y  $\Gamma_{\dot{A}\dot{B}}$  pueden ser expresadas como

$$\Gamma_{AB} = -\Gamma_{ABC\dot{C}}\theta^{C\dot{C}} \quad \text{y} \quad \Gamma_{\dot{A}\dot{B}} = -\Gamma_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}C}\theta^{\dot{C}C}, \quad (2.16)$$

donde  $\Gamma_{ABC\dot{C}}$  y  $\Gamma_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}C}$  son funciones hipercomplejas; de acuerdo a la ecuación (2.14). Así, al sustituir las expresiones anteriores en el lado derecho de (2.13) y usando (2.3) obtenemos

$$\Gamma_{ABC\dot{C}}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} + \Gamma_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}C}\epsilon_{AB} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^a_{AA}\sigma^b_{BB}\sigma^c_{C\dot{C}}\Gamma_{abc}, \quad (2.17)$$

siguiendo la convención usada por Newman y Penrose, las funciones  $\Gamma_{ABC\dot{C}}$  y  $\Gamma_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}C}$  se denominan *coeficientes de espín*.

Más aún, el lado derecho de (2.17) es el equivalente espinorial de los coeficientes de rotación de Ricci. Así,

$$\Gamma_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}} = \Gamma_{ABC\dot{C}}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} + \Gamma_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}C}\epsilon_{AB}. \quad (2.18)$$

Debido a que los coeficientes de Ricci son funciones reales, se cumplen relaciones específicas entre los coeficientes de espín y sus conjugados, en consecuencia, a continuación se estudian las relaciones entre los coeficientes de Ricci, los coeficientes de espín, etc., dependiendo de la elección de la base.

### 2.1.1. Primera elección de los símbolos de Infeld-van der Waerden

Como se mencionó anteriormente, los coeficientes de Ricci al ser funciones reales, estos deben de cumplir relaciones específicas, es así que para la primera elección de base [ec. (1.4)] y de (2.17) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^a_{AA}\sigma^b_{BB}\sigma^c_{C\dot{C}}\Gamma_{abc} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{\sigma^a_{AA}} \overline{\sigma^b_{BB}} \overline{\sigma^c_{C\dot{C}}} \overline{\Gamma_{abc}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^{aAA}\sigma^{bBB}\sigma^{cC\dot{C}}\Gamma_{abc}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde en la última igualdad se usó (1.14). Por otro lado, anteriormente se definió el compañero de un espinor, en particular para el caso Kleiniano se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{ABC\dots\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dots} &= \overline{\psi^{ABC\dots\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dots}} \quad \text{y} \\ \hat{\psi}^{ABC\dots\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dots} &= (-1)^m \overline{\psi_{ABC\dots\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dots}}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde  $m$  indica el número de índices del espinor. En consecuencia de (2.18), se obtiene

$$\Gamma_{ABC\dot{C}}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}} + \Gamma_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}C}\epsilon_{AB} = -\overline{\Gamma^{ABC\dot{C}}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}} - \overline{\Gamma^{\dot{A}\dot{B}\dot{C}C}\epsilon_{AB}}, \quad (2.21)$$

finalmente, al comparar el lado izquierdo de (2.17) y la igualdad anterior, se obtiene

**CAPÍTULO 2. CONEXIÓN Y CURVATURA**  
2.1. CONEXIÓN EN CUATRO DIMENSIONES

---

$$\hat{\Gamma}_{AB\dot{C}\dot{D}} = -\Gamma_{AB\dot{C}\dot{D}} \quad \text{y} \quad \hat{\Gamma}_{\dot{A}\dot{B}CD} = -\Gamma_{\dot{A}\dot{B}CD}. \quad (2.22)$$

con  $\hat{\epsilon}_{AB} = \epsilon_{AB}$  y  $\hat{\epsilon}_{\dot{A}\dot{B}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}$ . Por otro lado, como se mencionó anteriormente, los coeficientes de espín pueden ser calculados usando las relaciones de conmutación,

$$[\partial_{\dot{A}\dot{B}}, \partial_{C\dot{D}}] = -\Gamma^R{}_{C\dot{A}\dot{B}} \partial_{R\dot{D}} - \Gamma^{\dot{R}}{}_{\dot{D}\dot{B}A} \partial_{C\dot{R}} + \Gamma^R{}_{AC\dot{D}} \partial_{R\dot{B}} + \Gamma^{\dot{R}}{}_{\dot{B}\dot{D}C} \partial_{A\dot{R}}, \quad (2.23)$$

bajo la definición

$$\partial_{\dot{A}\dot{B}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma^a{}_{\dot{A}\dot{B}} \partial_a, \quad (2.24)$$

note el parecido a (1.10). A continuación se muestran explícitamente los 24 símbolos para los coeficientes de espín, de acuerdo a Newman y Penrose se denotan por  $\Gamma_{AB\dot{C}\dot{D}}$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{1111} &= \kappa, & \Gamma_{111\dot{2}} &= \sigma, & \Gamma_{1121} &= \rho, & \Gamma_{112\dot{2}} &= \tau, \\ \Gamma_{1211} &= \varepsilon, & \Gamma_{111\dot{2}} &= \beta, & \Gamma_{1121} &= \alpha, & \Gamma_{122\dot{2}} &= \gamma, \\ \Gamma_{2211} &= \pi, & \Gamma_{221\dot{2}} &= \mu, & \Gamma_{2221} &= \lambda, & \Gamma_{222\dot{2}} &= \nu, \end{aligned} \quad (2.25)$$

de forma análoga, se denotan por  $\Gamma_{\dot{A}\dot{B}CD}$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\dot{1}\dot{1}\dot{1}\dot{1}} &= \tilde{\kappa}, & \Gamma_{\dot{1}\dot{1}\dot{1}\dot{2}} &= \tilde{\sigma}, & \Gamma_{\dot{1}\dot{1}\dot{2}\dot{1}} &= \tilde{\rho}, & \Gamma_{\dot{1}\dot{1}\dot{2}\dot{2}} &= \tilde{\tau}, \\ \Gamma_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{1}} &= \tilde{\varepsilon}, & \Gamma_{\dot{1}\dot{1}\dot{1}\dot{2}} &= \tilde{\beta}, & \Gamma_{\dot{1}\dot{1}\dot{2}\dot{1}} &= \tilde{\alpha}, & \Gamma_{\dot{1}\dot{2}\dot{2}\dot{2}} &= \tilde{\gamma}, \\ \Gamma_{\dot{2}\dot{2}\dot{1}\dot{1}} &= \tilde{\pi}, & \Gamma_{\dot{2}\dot{2}\dot{1}\dot{2}} &= \tilde{\mu}, & \Gamma_{\dot{2}\dot{2}\dot{2}\dot{1}} &= \tilde{\lambda}, & \Gamma_{\dot{2}\dot{2}\dot{2}\dot{2}} &= \tilde{\nu}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Así, al definir

$$D \equiv \partial_{11}, \quad \delta \equiv \partial_{1\dot{2}}, \quad \tilde{\delta} \equiv \partial_{21} \quad \text{y} \quad \Delta \equiv \partial_{2\dot{2}}, \quad (2.27)$$

las relaciones (2.23) se expresan explícitamente como

$$[D, \delta] = -(\tilde{\alpha} + \beta - \tilde{\pi})D - \kappa\Delta + (\tilde{\rho} + \varepsilon - \tilde{\varepsilon})\delta + \sigma\tilde{\delta}, \quad (2.28a)$$

$$[\Delta, \delta] = \tilde{\nu}D - (\tau - \tilde{\alpha} - \beta)\Delta - (\mu - \gamma + \tilde{\gamma})\delta - \tilde{\lambda}\tilde{\delta}, \quad (2.28b)$$

$$[D, \Delta] = -(\gamma + \tilde{\gamma})D - (\varepsilon + \tilde{\varepsilon})\Delta + (\tilde{\tau} + \pi)\delta + (\tau + \tilde{\pi})\tilde{\delta}, \quad (2.28c)$$

$$[\delta, \tilde{\delta}] = (\mu - \tilde{\mu})D + (\rho - \tilde{\rho})\Delta - (\alpha - \tilde{\beta})\delta - (\beta - \tilde{\alpha})\tilde{\delta}, \quad (2.28d)$$

$$[D, \tilde{\delta}] = -(\alpha + \tilde{\beta} - \pi)D - \tilde{\kappa}\Delta + (\rho + \tilde{\varepsilon} - \varepsilon)\tilde{\delta} + \tilde{\sigma}\delta, \quad (2.28e)$$

$$[\Delta, \tilde{\delta}] = \nu D - (\tilde{\tau} - \alpha - \tilde{\beta})\Delta - (\tilde{\mu} - \tilde{\gamma} + \gamma)\tilde{\delta} - \lambda\delta. \quad (2.28f)$$

**CAPÍTULO 2. CONEXIÓN Y CURVATURA**  
**2.1. CONEXIÓN EN CUATRO DIMENSIONES**

---

De (2.27) y (2.28a)-(2.28f) se encuentran las relaciones

$$\bar{\delta} = \tilde{\delta} \quad \text{y} \quad \bar{D} = -\Delta, \quad (2.29)$$

de forma análoga se encuentra, de (2.28a)-(2.28f)

$$\bar{\kappa} = -\nu, \quad \bar{\sigma} = \lambda, \quad \bar{\beta} = -\alpha, \quad (2.30)$$

$$\bar{\varepsilon} = \gamma, \quad \bar{\rho} = \mu \quad \text{y} \quad \bar{\pi} = -\tau,$$

y para los coeficientes con tilde,

$$\tilde{\kappa} = -\tilde{\nu}, \quad \tilde{\sigma} = \tilde{\lambda}, \quad \tilde{\beta} = -\tilde{\alpha}, \quad (2.31)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\gamma}, \quad \tilde{\rho} = \tilde{\mu} \quad \text{y} \quad \tilde{\pi} = -\tilde{\tau}.$$

Note que la primera ecuación para (2.28a) es la compleja conjugada de (2.28f), así como (2.28b) es la compleja conjugada de (2.28e), en consecuencia tenemos 4 ecuaciones independientes en (2.27), y debido a (2.30) y (2.31) tenemos 12 coeficientes de espín independientes.

### 2.1.2. Segunda elección de los símbolos de Infeld-van der Waerden

Para obtener las relaciones que deben de cumplir los coeficientes de Ricci para la segunda elección de base [ec. (1.5)], se debe de reescribir primero la ecuación (2.17) de una forma más adecuada, es así que obtenemos

$$\Gamma_{ACE\dot{F}}\epsilon_{\dot{B}\dot{D}} + \Gamma_{\dot{B}\dot{D}\dot{E}F}\epsilon_{AC} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^a_{A\dot{B}}\sigma^b_{C\dot{D}}\sigma^c_{E\dot{F}}\Gamma_{abc}, \quad (2.32)$$

es así que los coeficientes de espín de acuerdo a (2.32), deben cumplir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^a_{A\dot{B}}\sigma^b_{C\dot{D}}\sigma^c_{E\dot{F}}\Gamma_{abc} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{\sigma^a_{A\dot{B}}}\overline{\sigma^b_{C\dot{D}}}\overline{\sigma^c_{E\dot{F}}}\overline{\Gamma_{abc}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sigma^a_{B\dot{A}}\sigma^b_{D\dot{C}}\sigma^c_{F\dot{E}}\Gamma_{abc}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

y debido a que el el compañero del espinor bajo esta elección se define como

$$\hat{\psi}_{A\dot{B}C\dot{D}\dots} = \overline{\psi_{B\dot{A}C\dot{D}\dots}}, \quad (2.34)$$

se obtiene

$$\Gamma_{ACE\dot{F}}\epsilon_{\dot{B}\dot{D}} + \Gamma_{\dot{B}\dot{D}\dot{E}F}\epsilon_{AC} = \overline{\Gamma_{\dot{A}\dot{C}\dot{E}F}\epsilon_{BD}} + \overline{\Gamma_{BDE\dot{F}}\epsilon_{\dot{A}\dot{C}}}, \quad (2.35)$$

finalmente, al comparar el lado izquierdo de (2.32) y la igualdad anterior, se obtiene

$$\Gamma_{ACE\dot{F}} = \overline{\Gamma_{\dot{A}\dot{C}\dot{E}\dot{F}}} \quad \text{y} \quad \Gamma_{\dot{B}\dot{D}\dot{E}\dot{F}} = -\overline{\Gamma_{BDE\dot{F}}}. \quad (2.36)$$

Se definen a los campos vectoriales

$$\begin{aligned} D = \partial_{1\dot{1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_2 - \partial_4), & \delta = \partial_{1\dot{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 - j\partial_3), \\ \Delta = \partial_{2\dot{2}} &= \frac{-1}{\sqrt{2}}(\partial_2 + \partial_4) & \text{y} \quad \tilde{\delta} = \partial_{2\dot{1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 + j\partial_3), \end{aligned} \quad (2.37)$$

notando que  $D$  y  $\Delta \in \mathbb{R}$ , además  $\bar{\delta} = \tilde{\delta}$ . En consecuencia, de (2.27) y de la relación que existe entre  $\delta$  y  $\tilde{\delta}$ , notamos que los coeficientes de espín sin tilde son iguales a su equivalente con tilde, es decir,

$$\begin{array}{cccc} \kappa = \tilde{\kappa}, & \sigma = \tilde{\sigma}, & \rho = \tilde{\rho}, & \tau = \tilde{\tau}, \\ \varepsilon = \tilde{\varepsilon}, & \beta = \tilde{\beta}, & \alpha = \tilde{\alpha}, & \gamma = \tilde{\gamma}, \\ \pi = \tilde{\pi}, & \mu = \tilde{\mu}, & \lambda = \tilde{\lambda}, & \nu = \tilde{\nu}, \end{array} \quad (2.38)$$

obteniendo 12 coeficientes de espín independientes y 4 ecuaciones independientes.

## 2.2. Curvatura en cuatro dimensiones

Como anteriormente se había mencionado, existen dos campos tensoriales asociados a una conexión; la *torsión* y la *curvatura*. La segunda la denotaremos por  $\Omega$  y se define como

$$\Omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\mathbf{Z}, \quad (2.39)$$

para cualesquier campos vectoriales  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  en  $M$ . Con respecto a una tétrada ortonormal  $\{\partial_a\}$ , la curvatura de una conexión es representada por las 2-formas de curvatura  $\Omega^a_b$ , definidas como

$$\Omega^a_b(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \frac{1}{2}\theta^a(\Omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\partial_b), \quad (2.40)$$

para cualesquier campos vectoriales  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  en  $M$ . Se puede verificar que  $\Omega^a_b$  es una 2-forma y además

$$\Omega^a_b = \frac{1}{2}R^a_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d, \quad (2.41)$$

con  $R^a_{bcd}$  las componentes del tensor de curvatura con respecto a una tétrada  $\{\partial_a\}$ , las cuales se definen como

$$\Omega(\partial_a, \partial_b)\partial_c = R^d_{cab}\partial_d. \quad (2.42)$$

**CAPÍTULO 2. CONEXIÓN Y CURVATURA**  
**2.2. CURVATURA EN CUATRO DIMENSIONES**

---

Usando las ecuaciones (2.4) (2.8), (2.9), (2.39), (2.40), y las propiedades de  $\nabla$ , se obtienen las *segundas Ecuaciones Estructurales de Cartan*,

$$\begin{aligned}
\Omega^a{}_b(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \frac{1}{2}\theta^a (\nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}}\partial_b - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}}\partial_b - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}\partial_b) \\
&= \frac{1}{2}\theta^a \{ \nabla_{\mathbf{X}}(\Gamma^c{}_b(\mathbf{Y})\partial_c) - \nabla_{\mathbf{Y}}(\Gamma^c{}_b(\mathbf{X})\partial_c) \} - \frac{1}{2}\Gamma^a{}_b([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) \\
&= \frac{1}{2}\theta^a \{ \mathbf{X}(\Gamma^c{}_b(\mathbf{Y}))\partial_c + \Gamma^c{}_b(\mathbf{Y})\nabla_{\mathbf{X}}\partial_c - \mathbf{Y}(\Gamma^c{}_b(\mathbf{X}))\partial_c - \Gamma^c{}_b(\mathbf{X})\nabla_{\mathbf{Y}}\partial_c \} - \frac{1}{2}\Gamma^a{}_b([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) \\
&= \frac{1}{2} \{ \mathbf{X}(\Gamma^a{}_b(\mathbf{Y})) + \Gamma^a{}_c(\mathbf{X})\Gamma^c{}_b(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}(\Gamma^a{}_b(\mathbf{X})) - \Gamma^a{}_c(\mathbf{Y})\Gamma^c{}_b(\mathbf{X}) - \Gamma^a{}_b([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) \} \\
&= d\Gamma^a{}_b(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + (\Gamma^a{}_c \wedge \Gamma^c{}_b)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\Omega^a{}_b = d\Gamma^a{}_b + \Gamma^a{}_c \wedge \Gamma^c{}_b. \quad (2.43)$$

La 2-forma de curvatura satistace la relación  $\Omega_{ab} = -\Omega_{ba}$ . Así, de (2.43) y  $\Gamma_{ab} = -\Gamma_{ba}$ , obtenemos

$$\Omega_{ab} = d\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac} \wedge \Gamma^c{}_b = -d\Gamma_{ba} - \Gamma_{bc} \wedge \Gamma^c{}_a = -\Omega_{ba}, \quad (2.44)$$

Es decir, las componentes del tensor de curvatura satisfacen  $R_{abcd} = -R_{bacd}$ .

Al aplicar el operador  $d$ , es decir, la derivada exterior en ambos lados de la ecuación (2.7), y usando la ecuación (2.43) se obtiene la identidad

$$dT^a + \Gamma^a{}_b \wedge T^b = \Omega^a{}_b \wedge \theta^b, \quad (2.45)$$

por consiguiente, si la torsión de la conexión se anula,

$$\Omega^a{}_b \wedge \theta^b = 0. \quad (2.46)$$

Cualquier 2-forma puede ser expresada localmente en términos del producto exterior  $\theta^a \wedge \theta^b$ , o de forma equivalente en términos del producto exterior de  $\theta^{A\dot{A}} \wedge \theta^{B\dot{B}}$ , es decir,

$$\theta^{A\dot{A}} \wedge \theta^{B\dot{B}} = S^{AB}\epsilon^{\dot{A}\dot{B}} + S^{\dot{A}\dot{B}}\epsilon^{AB}, \quad (2.47)$$

donde se han introducido las 2-formas

$$S^{AB} \equiv \frac{1}{4}S_{ab}{}^{AB}\theta^a \wedge \theta^b \quad \text{y} \quad S^{\dot{A}\dot{B}} \equiv \frac{1}{4}S_{\dot{a}\dot{b}}{}^{\dot{A}\dot{B}}\theta^{\dot{a}} \wedge \theta^{\dot{b}}. \quad (2.48)$$

**CAPÍTULO 2. CONEXIÓN Y CURVATURA**  
**2.2. CURVATURA EN CUATRO DIMENSIONES**

---

Como consecuencia de (2.47) se tiene

$$S^{AB} = \frac{1}{2}\theta^{A\dot{A}} \wedge \theta^B_{\dot{A}} \quad \text{y} \quad S^{\dot{A}\dot{B}} = \frac{1}{2}\theta^{A\dot{A}} \wedge \theta_A^{\dot{B}}, \quad (2.49)$$

explícitamente para las 2-formas  $S^{AB}$  y  $S^{\dot{A}\dot{B}}$ , se tiene

$$\begin{aligned} S^{11} &= \theta^{1\dot{1}} \wedge \theta^{1\dot{2}}, & S^{12} &= \frac{1}{2} \left( \theta^{1\dot{1}} \wedge \theta^{2\dot{2}} - \theta^{1\dot{2}} \wedge \theta^{2\dot{1}} \right), & S^{22} &= \theta^{2\dot{1}} \wedge \theta^{2\dot{2}}, \\ S^{i\dot{i}} &= \theta^{1\dot{1}} \wedge \theta^{2\dot{i}}, & S^{i\dot{j}} &= \frac{1}{2} \left( \theta^{1\dot{1}} \wedge \theta^{2\dot{2}} - \theta^{2\dot{1}} \wedge \theta^{1\dot{j}} \right) \quad \text{y} \quad S^{\dot{2}\dot{2}} &= \theta^{1\dot{2}} \wedge \theta^{2\dot{2}}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Con respecto a las segundas ecuaciones estructurales de Cartan, estas se pueden expresar en términos del equivalente espinorial de la 1-forma de conexión y la 2-forma de curvatura como sigue

$$\mathcal{R}_{AB} = d\Gamma_{AB} - \Gamma_{AC} \wedge \Gamma^C_B \quad \text{y} \quad (2.51)$$

$$\mathcal{R}_{\dot{A}\dot{B}} = d\Gamma_{\dot{A}\dot{B}} - \Gamma_{\dot{A}\dot{C}} \wedge \Gamma^{\dot{C}}_{\dot{B}},$$

explícitamente, las igualdades anteriores se representan

$$\mathcal{R}_{11} = d\Gamma_{11} - 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{11}, \quad \mathcal{R}_{22} = d\Gamma_{22} + 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{22}, \quad (2.52)$$

$$\mathcal{R}_{12} = d\Gamma_{12} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{22} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_{21} = d\Gamma_{21} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{22},$$

y para  $\mathcal{R}_{\dot{A}\dot{B}}$ ,

$$\mathcal{R}_{i\dot{i}} = d\Gamma_{i\dot{i}} - 2\Gamma_{i\dot{2}} \wedge \Gamma_{i\dot{i}}, \quad \mathcal{R}_{\dot{2}\dot{2}} = d\Gamma_{\dot{2}\dot{2}} + 2\Gamma_{i\dot{2}} \wedge \Gamma_{\dot{2}\dot{2}}, \quad (2.53)$$

$$\mathcal{R}_{i\dot{2}} = d\Gamma_{i\dot{2}} + \Gamma_{i\dot{1}} \wedge \Gamma_{\dot{2}\dot{2}} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_{\dot{2}\dot{1}} = d\Gamma_{\dot{2}\dot{1}} + \Gamma_{i\dot{1}} \wedge \Gamma_{\dot{2}\dot{2}},$$

las cuales se pueden relacionar con las 2-formas  $S^{AB}$ ,  $S^{\dot{A}\dot{B}}$  y las funciones  $C_{ABCD}$ ,  $C_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$  como sigue

$$\mathcal{R}_{AB} = C_{ABCD}S^{CD} + \frac{1}{12}RS_{AB} + C_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}S^{\dot{C}\dot{D}} \quad \text{y} \quad (2.54)$$

$$\mathcal{R}_{\dot{A}\dot{B}} = C_{\dot{C}\dot{D}\dot{A}\dot{B}}S^{CD} + \frac{1}{12}RS_{\dot{A}\dot{B}} + C_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}S^{\dot{C}\dot{D}},$$

donde  $C_{ABCD}$  y  $C_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$  están relacionadas con el equivalente espinorial del tensor de Ricci y  $R$  denota el escalar de Ricci.

**CAPÍTULO 2. CONEXIÓN Y CURVATURA**  
**2.2. CURVATURA EN CUATRO DIMENSIONES**

---

Finalmente, sabemos que frecuentemente el tensor métrico de  $M$  es expresado en términos de algún sistema de coordenadas local, y en consecuencia, al querer hallar un conjunto de 1-formas  $\theta^{A\dot{A}}$ , es conveniente notar

$$\begin{aligned}
 g &= \epsilon_{AB}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\theta^{A\dot{A}} \otimes \theta^{B\dot{B}} \\
 &= -\theta^{1\dot{1}} \otimes \theta^{2\dot{2}} - \theta^{2\dot{2}} \otimes \theta^{1\dot{1}} + \theta^{1\dot{2}} \otimes \theta^{2\dot{1}} + \theta^{2\dot{1}} \otimes \theta^{1\dot{2}} \\
 &= -2\theta^{1\dot{1}}\theta^{2\dot{2}} + 2\theta^{1\dot{2}}\theta^{2\dot{1}}, \tag{2.55}
 \end{aligned}$$

donde la yuxtaposición de 1-formas indica producto tensorial simetrizado. Asimismo de (2.14) y (1.14) se tiene

$$\overline{\theta^{A\dot{B}}} = -\theta_{A\dot{B}}, \tag{2.56}$$

y de forma similar, para (1.15)

$$\overline{\theta_{A\dot{B}}} = \theta_{B\dot{A}}, \tag{2.57}$$

En consecuencia, se puede obtener un conjunto de tétradas nulas a partir de (2.55).

## Capítulo 3

# Aplicaciones en espacios de cuatro dimensiones

En lo sucesivo, se proponen conjuntos de 1–formas,  $\theta^{A\dot{B}}$ , tales que

$$g = -2\theta^{1\dot{1}}\theta^{2\dot{2}} + 2\theta^{1\dot{2}}\theta^{2\dot{1}},$$

y, debido a que  $\theta^{A\dot{B}}$  está relacionada con los símbolos de Infeld-van der Waerden, mediante

$$\theta^{A\dot{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_a^{A\dot{B}}\theta^a,$$

se consideran dos conjuntos de 1–formas, de acuerdo a las elecciones en (1.11) y (1.12). Para la primera elección de símbolos y usando la propiedad del conjugado (1.14), se tiene

$$\overline{\theta_{A\dot{B}}} = -\theta^{A\dot{B}}, \quad (3.1)$$

es decir,

$$\overline{\theta^{1\dot{1}}} = -\theta_{1\dot{1}} = -\theta^{2\dot{2}} \quad \text{y} \quad \overline{\theta^{1\dot{2}}} = -\theta_{1\dot{2}} = \theta^{2\dot{1}}.$$

De forma similar, para la segunda elección y con la propiedad (1.15) se tiene

$$\overline{\theta^{A\dot{B}}} = \theta^{B\dot{A}}, \quad (3.2)$$

es decir,

$$\overline{\theta^{1\dot{1}}} = \theta^{1\dot{1}}, \quad \overline{\theta^{2\dot{2}}} = \theta^{2\dot{2}}, \quad \overline{\theta^{1\dot{2}}} = \theta^{2\dot{1}} \quad \text{y} \quad \overline{\theta^{2\dot{1}}} = \theta^{1\dot{2}}.$$

A continuación se calculan las bases, la forma de las ecuaciones de Cartan, los coeficientes de espín, las 1–formas de conexión y la curvatura, usando espinores y tensores con la finalidad de comparar métodos.

### 3.1. Método espinorial

#### Ejemplo 1. Metamateriales

En 1968 los metamateriales fueron idealizados por Veselago [46], quien propuso un material que admitía a la vez una permitividad ( $\epsilon_r$ ) y permeabilidad ( $\mu_r$ ) negativas, además de un índice de refracción real ( $n = \pm\sqrt{\epsilon_r\mu_r}$ ). En años recientes esta idea se ha desarrollado y como resultado de ello, se han diseñado metamateriales compuestos por resonadores de anillos de cobre. Más aún, se han realizado otros sistemas, con los denominados metamateriales hiperbólicos, donde  $\epsilon_r < 0$  y  $\mu_r > 0$  o  $\epsilon_r > 0$  y  $\mu_r < 0$ . A continuación, se consideran metamateriales anisotrópos, en los que la permeabilidad y la permitividad son tensores, debido a que las ondas electromagnéticas propagadas son estudiadas mediante una métrica efectiva en coordenadas cilíndricas, se tiene

$$ds_{eff}^2 = \epsilon_0 dr^2 + \epsilon_0 dz^2 - c^2 dt^2 + \epsilon_e r^2 d\phi^2$$

en donde  $\epsilon_0 > 0$  y  $\epsilon_e < 0$ , lo cual corresponde a una signatura de espaciotiempo del tipo Kleiniana [47]. En consecuencia, la métrica se escribe

$$g = \epsilon_0 dr^2 + \epsilon_0 dz^2 - c^2 dt^2 - \epsilon_e r^2 d\phi^2. \quad (3.3)$$

Una elección conveniente de 1-formas, usando los símbolos de Infeld-van der Waerden definidos en (1.15) es

$$\begin{aligned} \theta^{1i} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{\epsilon_0}dz + r\sqrt{\epsilon_e}d\phi), & \theta^{2\dot{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\epsilon_0}dz + r\sqrt{\epsilon_e}d\phi), \\ \theta^{1\dot{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{\epsilon_0}dr + jcdt) & \text{y} & \quad \theta^{2i} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\epsilon_0}dr + jcdt), \end{aligned} \quad (3.4)$$

además, de acuerdo a (2.24), los campos vectoriales asociados adquieren la forma

$$\begin{aligned} \partial_{1i} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{r\sqrt{\epsilon_e}} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), & \partial_{2\dot{2}} &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{r\sqrt{\epsilon_e}} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \partial_{1\dot{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) & \text{y} & \quad \partial_{2i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

de acuerdo a (2.27),  $D = \partial_{1i}$ ,  $\delta = \partial_{1\dot{2}}$ ,  $\bar{\delta} = \partial_{2i}$  y  $\Delta = \partial_{2\dot{2}}$ , en consecuencia los paréntesis de Lie dan como resultado

$$\begin{aligned} [D, \delta] &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{r\sqrt{\epsilon_e}} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] = \frac{-1}{2r^2\sqrt{\epsilon_0\epsilon_e}} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4r\sqrt{\epsilon_0}} D + \frac{\sqrt{2}}{4r\sqrt{\epsilon_0}} \Delta, \end{aligned}$$

$$[D, \Delta] = \frac{-1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{r\sqrt{\epsilon_e}} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{r\sqrt{\epsilon_k}} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] = 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} [\Delta, \delta] &= \frac{-1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{r\sqrt{\epsilon_e}} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] = \frac{-1}{2r^2\sqrt{\epsilon_0\epsilon_e}} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4r\sqrt{\epsilon_0}} D + \frac{\sqrt{2}}{4r\sqrt{\epsilon_0}} \Delta, \end{aligned}$$

$$[\delta, \bar{\delta}] = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{j}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] = 0.$$

Luego, los únicos coeficientes de espín diferentes de cero son

$$\kappa = \frac{-\sqrt{2}}{4r\sqrt{\epsilon_0}} = \tilde{\kappa}, \quad \nu = \frac{\sqrt{2}}{4r\sqrt{\epsilon_0}} = \tilde{\nu} \quad \pi = \frac{\sqrt{2}}{4r\sqrt{\epsilon_0}} = \tilde{\pi} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{-\sqrt{2}}{4r\sqrt{\epsilon_0}} = \tilde{\tau}. \quad (3.7)$$

De donde resulta que las 1-formas de conexión se representan como

$$\Gamma_{11} = -\kappa\theta^{1i} - \tau\theta^{2\dot{2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_e}}{2\sqrt{\epsilon_0}} d\phi, \quad \Gamma_{22} = -\pi\theta^{1i} - \nu\theta^{2\dot{2}} = -\frac{\sqrt{\epsilon_e}}{2\sqrt{\epsilon_0}} d\phi, \quad \Gamma_{12} = 0 \quad \text{y} \quad \Gamma_{21} = 0,$$

finalmente, se calculan las 2-formas de curvatura  $\mathcal{R}_{AB}$ ,

$$\mathcal{R}_{11} = d\Gamma_{11} - 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{11} = 0, \quad \mathcal{R}_{22} = d\Gamma_{22} + 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{22} = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathcal{R}_{12} = d\Gamma_{12} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{22} = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_{21} = d\Gamma_{21} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{22} = 0,$$

lo que implica que  $C_{ABCD} = 0$ ,  $C_{AB\dot{A}\dot{B}} = 0$  y  $R = 0$ .

**Ejemplo 2.** Variedades compactas y orientadas de Einstein

La representación de la métrica que a continuación se introduce, se estudia en [17]. En donde se estudia la característica de Euler para variedades compactas y orientadas de Einstein, en particular para espacios de cuatro dimensiones con signatura Kleiniana. Es así que se introduce la métrica

$$g = a^2 (d\xi^2 + \sin^2 \xi d\phi^2 - \sin^2 \eta d\psi^2 - d\eta^2), \quad (3.9)$$

con  $0 \leq \xi, \eta \leq \pi, 0 \leq \phi, \psi \leq 2\pi$  y  $a \neq 0$ . Una elección conveniente de 1-formas, de acuerdo a (1.14), es

**CAPÍTULO 3. APLICACIONES EN ESPACIOS DE CUATRO DIMENSIONES**  
**3.1. MÉTODO ESPINORIAL**

---

$$\theta^{1i} = \frac{a}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} \xi d\phi + j d\eta), \quad \theta^{1\dot{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}(-d\xi + j \operatorname{sen} \eta d\psi),$$

(3.10)

$$\theta^{2\dot{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}(\operatorname{sen} \xi d\phi + j d\eta) \quad \text{y} \quad \theta^{2i} = \frac{-a}{\sqrt{2}}(d\xi + j \operatorname{sen} \eta d\psi),$$

donde se definen los campos vectoriales

$$\begin{aligned} \partial_{1i} &= \frac{1}{\sqrt{2}a} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \xi} \frac{\partial}{\partial \phi} - j \frac{\partial}{\partial \eta} \right), & \partial_{1\dot{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}a} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{j}{\operatorname{sen} \eta} \frac{\partial}{\partial \psi} \right), \\ \partial_{2\dot{2}} &= \frac{-1}{\sqrt{2}a} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \xi} \frac{\partial}{\partial \phi} + j \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad \text{y} & \partial_{2i} &= \frac{1}{\sqrt{2}a} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{j}{\operatorname{sen} \eta} \frac{\partial}{\partial \psi} \right), \end{aligned}$$

(3.11)

denotando a  $D = \partial_{1i}$ ,  $\delta = \partial_{1\dot{2}}$ ,  $\bar{\delta} = \partial_{2i}$  y  $\Delta = \partial_{2\dot{2}}$ , obtenemos las relaciones de conmutación o paréntesis de Lie,

$$\begin{aligned} [D, \delta] &= \frac{1}{2a^2} \left[ \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \xi} \frac{\partial}{\partial \phi} - j \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{j}{\operatorname{sen} \eta} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \right] = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{\cot \xi}{\operatorname{sen} \xi} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cot \eta}{\operatorname{sen} \eta} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2} \cot \xi}{4a} (D - \Delta) + j \frac{\sqrt{2} \cot \eta}{4a} (\delta - \bar{\delta}), \\ [D, \Delta] &= \frac{-1}{2a} \left[ \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \xi} \frac{\partial}{\partial \phi} - j \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \left( -\frac{1}{\operatorname{sen} \xi} \frac{\partial}{\partial \phi} - j \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] = 0 \\ [\Delta, \delta] &= \frac{1}{2a} \left[ \left( -\frac{1}{\operatorname{sen} \xi} \frac{\partial}{\partial \phi} - j \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{j}{\operatorname{sen} \eta} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \right] = \frac{-1}{2a^2} \left( \frac{\cot \xi}{\operatorname{sen} \xi} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cot \eta}{\operatorname{sen} \eta} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2} \cot \xi}{4a} (\Delta - D) + j \frac{\sqrt{2} \cot \eta}{4a} (\delta - \bar{\delta}), \\ [\delta, \bar{\delta}] &= \frac{-1}{2a} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - j \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + j \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

(3.12)

de las relaciones anteriores obtenemos que los únicos coeficientes de espín diferentes de cero son

$$\begin{aligned} \kappa = \frac{\sqrt{2} \cot \xi}{4a} = \pi, \quad \sigma = -j \frac{\sqrt{2} \cot \eta}{4a} = \mu, \quad \tau = -\frac{\sqrt{2} \cot \xi}{4a} = \nu \quad \rho = j \frac{\sqrt{2} \cot \eta}{4a} = \lambda, \\ \tilde{\kappa} = \frac{\sqrt{2} \cot \xi}{4a} = \tilde{\pi}, \quad \tilde{\sigma} = -j \frac{\sqrt{2} \cot \eta}{4a} = \tilde{\mu}, \quad \tilde{\tau} = -\frac{\sqrt{2} \cot \xi}{4a} = \tilde{\nu} \quad \text{y} \quad \tilde{\rho} = j \frac{\sqrt{2} \cot \eta}{4a} = \tilde{\lambda}, \end{aligned}$$

(3.13)

a continuación se calculan las 1-formas de conexión

$$\Gamma_{1i} = -\kappa\theta^{1i} - \sigma\theta^{12} - \rho\theta^{2i} - \tau\theta^{22} = \frac{\cos \xi d\phi}{2} + \frac{\cos \eta d\psi}{2} \quad \text{y} \quad \Gamma_{12} = 0 = \Gamma_{2i}, \quad (3.14)$$

y, debido a que  $\Gamma_{1i}$  es real, se obtiene que  $\Gamma_{1i} = \Gamma_{22}$ . Antes de calcular las 2-formas de curvatura, hallamos las 2-formas  $S^{AB}$ , así

$$S^{11} = \frac{a^2}{2} (-\sin \xi d\phi + jd\eta) \wedge (-d\xi + j \sin \eta d\psi), \quad S^{22} = \frac{-a^2}{2} (d\xi + j \sin \eta d\psi) \wedge (\sin \xi d\phi + jd\eta), \quad (3.15)$$

$$S^{12} = \frac{a^2}{2} [ (-\sin \xi d\phi + jd\eta) \wedge (\sin \xi d\phi + jd\eta) + (-d\xi + j \sin \eta d\psi) \wedge (-d\xi + j \sin \eta d\psi) ].$$

Finalmente se calculan las 2-formas de curvatura,

$$\mathcal{R}_{11} = d\Gamma_{11} - 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{11} = \frac{1}{2a^2} (S^{11} + S^{22}), \quad \mathcal{R}_{12} = d\Gamma_{12} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{22} = 0, \quad (3.16)$$

$$\mathcal{R}_{22} = d\Gamma_{22} + 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{22} = \frac{1}{2a^2} (S^{11} + S^{22}) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_{21} = d\Gamma_{21} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{22} = 0,$$

se sigue de (2.54) que  $C_{1111} = C_{1122} = C_{2211} = C_{2222} = \frac{1}{2a^2}$ ,  $C_{2221} = C_{1112} = 0$  y  $R = 0$ .

## 3.2. Método tensorial

En lo sucesivo se resuelven los ejemplos de la sección anterior usando notación tensorial. Para ello, consideramos que el tensor métrico se representa como

$$g = g_{ab}\theta^a \otimes \theta^b \quad \text{con} \quad (g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde los índices  $a, b = 1, 2, 3, 4$ . Asimismo consideramos la primera ecuación fundamental de Cartan

$$d\theta^a = \Gamma^a_{bc}\theta^b \wedge \theta^c, \quad (3.17)$$

donde  $\Gamma^a_{bc}$  se denomina coeficientes de rotación de Ricci y el tensor  $g_{ab}$  nos ayuda a subir y bajar índices. Además, los coeficientes se relacionan con las 1-formas mediante

$$\Gamma_{ab} = \Gamma_{abc}\theta^c, \quad (3.18)$$

con  $\Gamma_{ab} = -\Gamma_{ba}$ . A partir de los cuales podemos hallar la 2-forma de curvatura usando

$$\mathcal{R}^a_b = d\Gamma^a_b + \Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b, \quad (3.19)$$

y además

$$\mathcal{R}^a{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d. \quad (3.20)$$

Finalmente, los coeficientes y el escalar de Ricci se obtienen

$$R_{ab} = g^{cd} R_{dacb} \quad \text{y} \quad R = g^{ab} R_{ab}. \quad (3.21)$$

donde  $R_{dacb}$  representa al tensor de Riemann.

**Ejemplo 1.** Metamateriales

La métrica con respecto a una base local  $(r, z, t, \phi)$  es

$$g = \sqrt{\epsilon_0} dr \otimes \sqrt{\epsilon_0} dr + \sqrt{\epsilon_0} dz \otimes \sqrt{\epsilon_0} dz - c dt \otimes c dt - \sqrt{\epsilon_e} r d\phi \otimes \sqrt{\epsilon_e} r d\phi,$$

donde las 1-formas,  $\theta^a$ , son

$$\theta^1 = \sqrt{\epsilon_0} dr, \quad \theta^2 = \sqrt{\epsilon_0} dz, \quad \theta^3 = c dt \quad \text{y} \quad \theta^4 = \sqrt{\epsilon_e} r d\phi, \quad (3.22)$$

asimismo, las derivadas exteriores de  $\theta^a$  son

$$d\theta^1 = 0, \quad d\theta^2 = 0, \quad d\theta^3 = 0 \quad \text{y} \quad d\theta^4 = \sqrt{\epsilon_e} dr \wedge d\phi = \frac{1}{r\sqrt{\epsilon_0}} \theta^1 \wedge \theta^4, \quad (3.23)$$

recordando que la primera ecuación fundamental de Cartan

$$\begin{aligned} d\theta^4 &= \Gamma^4{}_{ab} \theta^a \wedge \theta^b = \Gamma^4{}_{12} \theta^1 \wedge \theta^2 + \Gamma^4{}_{21} \theta^2 \wedge \theta^1 + \Gamma^4{}_{13} \theta^1 \wedge \theta^3 \\ &\quad + \Gamma^4{}_{31} \theta^3 \wedge \theta^1 + \Gamma^4{}_{14} \theta^1 \wedge \theta^4 + \Gamma^4{}_{41} \theta^4 \wedge \theta^1, \end{aligned}$$

de las propiedades del producto exterior,

$$d\theta^4 = (\Gamma^4{}_{12} - \Gamma^4{}_{21}) \theta^1 \wedge \theta^2 + (\Gamma^4{}_{13} - \Gamma^4{}_{31}) \theta^1 \wedge \theta^3 + (\Gamma^4{}_{14} - \Gamma^4{}_{41}) \theta^1 \wedge \theta^4, \quad (3.24)$$

usando las propiedades de  $\Gamma_{ab}$ , se sigue

$$d\theta^4 = 2\Gamma^4{}_{12} \theta^1 \wedge \theta^2 + 2\Gamma^4{}_{13} \theta^1 \wedge \theta^3 + 2\Gamma^4{}_{14} \theta^1 \wedge \theta^4, \quad (3.25)$$

al comparar la igualdad anterior y (3.23), concluimos que el único (esencial) coeficiente de espín diferente de cero es

$$\Gamma^4{}_{14} = \frac{1}{2r\sqrt{\epsilon_0}}, \quad (3.26)$$

luego, bajando el superíndice y usando (3.18), obtenemos

$$\Gamma_{14} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_e}{\epsilon_0}} d\phi, \quad (3.27)$$

es así que obtenemos que el único coeficiente de curvatura diferente de cero proviene de

$$\mathcal{R}_{14} = d\Gamma_{14} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{14} + \Gamma_{12} \wedge \Gamma_{24} - \Gamma_{13} \wedge \Gamma_{34} - \Gamma_{14} \wedge \Gamma_{44} = 0, \quad (3.28)$$

finalmente, se tiene que todas las componentes  $R_{ijkl}$  son cero, lo cual implica que las componentes del tensor de Ricci son iguales a cero, es decir,  $R_{ij} = 0$  y en consecuencia, el escalar de Ricci también es cero,  $R = 0$ , lo que concuerda con lo encontrado usando notación espinorial.

**Ejemplo 2.** Variedades compactas y orientadas de Einstein

La métrica con respecto a una base local  $(\xi, \phi, \psi, \eta)$  es

$$g = ad\xi \otimes ad\xi + a \operatorname{sen} \xi d\phi \otimes a \operatorname{sen} \xi d\phi - a \operatorname{sen} \eta d\psi \otimes a \operatorname{sen} \eta d\psi - ad\eta \otimes ad\eta,$$

donde las 1-formas,  $\theta^a$ , son

$$\theta^1 = ad\xi, \quad \theta^2 = a \operatorname{sen} \xi d\phi, \quad \theta^3 = a \operatorname{sen} \eta d\psi \quad \text{y} \quad \theta^4 = ad\eta, \quad (3.29)$$

asimismo, las derivadas exteriores de  $\theta^a$  son

$$d\theta^1 = 0, \quad d\theta^2 = a \cos \xi d\xi \wedge d\phi = \frac{1}{a} \cot \xi \theta^1 \wedge \theta^2, \quad (3.30)$$

$$d\theta^3 = a \cos \eta d\eta \wedge d\psi = \frac{1}{a} \cot \eta \theta^4 \wedge \theta^3 \quad \text{y} \quad d\theta^4 = 0,$$

de forma similar a lo que ocurrió con (3.24) y al comparar con las igualdades anteriores, obtenemos

$$2\Gamma^1_{12} = \frac{1}{a} \cot \xi \quad \text{y} \quad 2\Gamma^3_{43} = \frac{1}{a} \cot \eta, \quad (3.31)$$

de ahí que los únicos coeficientes de Ricci distintos de cero son

$$\Gamma^1_{21} = -\frac{1}{2a} \cot \xi \quad \text{y} \quad \Gamma^3_{43} = \frac{1}{2a} \cot \eta, \quad (3.32)$$

bajando índices y usando (4.75)

$$\Gamma_{12} = -\frac{1}{2} \cos \xi d\phi \quad \text{y} \quad \Gamma_{34} = -\frac{1}{2} \cos \eta d\psi, \quad (3.33)$$

es así que obtenemos que los únicos coeficientes de curvatura diferentes de cero provienen de los términos

**CAPÍTULO 3. APLICACIONES EN ESPACIOS DE CUATRO DIMENSIONES**  
**3.2. MÉTODO TENSORIAL**

---

$$\mathcal{R}_{12} = d\Gamma_{12} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{12} + \Gamma_{12} \wedge \Gamma_{22} - \Gamma_{13} \wedge \Gamma_{32} - \Gamma_{14} \wedge \Gamma_{42} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \xi d\xi \wedge d\phi \quad \text{y} \quad (3.34)$$

$$\mathcal{R}_{34} = d\Gamma_{34} + \Gamma_{31} \wedge \Gamma_{14} + \Gamma_{32} \wedge \Gamma_{24} - \Gamma_{33} \wedge \Gamma_{34} - \Gamma_{34} \wedge \Gamma_{44} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \eta d\eta \wedge d\psi,$$

los cuales se reescriben en términos de  $\theta^a$ ,

$$\mathcal{R}_{12} = \frac{1}{2a^2} \theta^1 \wedge \theta^2 \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_{43} = -\frac{1}{2a^2} \theta^4 \wedge \theta^3, \quad (3.35)$$

es decir, las únicas componentes diferentes de cero del tensor de Riemann son

$$R_{1212} = \frac{1}{a^2} \quad \text{y} \quad R_{4343} = -\frac{1}{a^2}, \quad (3.36)$$

y como consecuencia para las componentes del tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{11} &= g^{kl} R_{l1k1} = g^{11} R_{1111} + g^{22} R_{2121} + g^{33} R_{3131} + g^{44} R_{4141} = \frac{1}{a^2}, \\ R_{22} &= g^{kl} R_{l2k2} = g^{11} R_{1212} + g^{22} R_{2222} + g^{33} R_{3232} + g^{44} R_{4242} = \frac{1}{a^2}, \\ R_{33} &= g^{kl} R_{l3k3} = g^{11} R_{1313} + g^{22} R_{2323} + g^{33} R_{3333} + g^{44} R_{4343} = \frac{1}{a^2} \quad \text{y} \\ R_{44} &= g^{kl} R_{l4k4} = g^{11} R_{1414} + g^{22} R_{2424} + g^{33} R_{3434} + g^{44} R_{4444} = \frac{1}{a^2}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

además, el escalar de Ricci es

$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} + g^{44} R_{44} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 0, \quad (3.38)$$

note que los resultados obtenidos concuerdan con lo que se calculó usando notación espinorial.

## Capítulo 4

# Aplicaciones en espacios de tres dimensiones

Las métricas presentadas en esta sección son analizadas en [13], donde se estudian soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein en tres dimensiones. A lo largo del capítulo buscamos un conjunto de 1-formas,  $\theta^{AB}$ , las cuales se definen de acuerdo a los símbolos de Infeld–van der Waerden y a las 1-formas  $\theta^a$ , como

$$\theta^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_a^{AB} \theta^a,$$

o de forma explícita se tiene

$$\theta^{11} = \frac{-1}{\sqrt{2}} (\theta^1 + j\theta^2), \quad \theta^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta^1 - j\theta^2) \quad \text{y} \quad \theta^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \theta^3. \quad (4.1)$$

Asimismo, se definen los campos vectoriales

$$\partial_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_a^{AB} \partial_a,$$

y de forma explícita

$$\partial_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_1 + j\partial_2), \quad \partial_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\partial_1 + j\partial_2) \quad \text{y} \quad \partial_{12} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \partial_3, \quad (4.2)$$

a partir de los cuales se obtienen las equivalencias de los conmutadores o paréntesis de Lie,

$$[\partial_{AB}, \partial_{CD}] = \Gamma^R_{CAB} \partial_{RD} + \Gamma^R_{DAB} \partial_{CR} - \Gamma^R_{ACD} \partial_{RB} - \Gamma^R_{BCD} \partial_{AR},$$

es decir,

$$\begin{aligned} [\partial_{11}, \partial_{12}] &= (2\Gamma_{1212} - \Gamma_{2211}) \partial_{11} - 2\Gamma_{1112} \partial_{12} + \Gamma_{1111} \partial_{22}, \\ [\partial_{11}, \partial_{22}] &= 2\Gamma_{1222} \partial_{11} - 2(\Gamma_{1122} + \Gamma_{2211}) \partial_{12} + 2\Gamma_{1211} \partial_{22}, \\ [\partial_{22}, \partial_{12}] &= -\Gamma_{2222} \partial_{11} + 2\Gamma_{2212} \partial_{12} - (2\Gamma_{1212} - \Gamma_{1122}) \partial_{22}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

## CAPÍTULO 4. APLICACIONES EN ESPACIOS DE TRES DIMENSIONES

---

donde se asocian a los coeficientes de espín,  $\Gamma_{ABCD}$ , con las letras griegas

$$\kappa = \Gamma_{1111}, \quad \beta = \Gamma_{1211}, \quad \rho = \Gamma_{2211}, \quad \alpha = \Gamma_{1112} \quad \text{y} \quad \epsilon = \Gamma_{1212}, \quad (4.4)$$

y debido a que cumplen con la siguiente regla bajo conjugación

$$\overline{\Gamma_{ABCD}} = -\Gamma^{ABCD}, \quad (4.5)$$

se obtiene que

$$\bar{\kappa} = -\Gamma_{2222}, \quad \bar{\beta} = \Gamma_{1222}, \quad \bar{\rho} = -\Gamma_{1122}, \quad \bar{\alpha} = \Gamma_{2212} \quad \text{y} \quad \bar{\epsilon} = -\Gamma_{2121}, \quad (4.6)$$

de la última igualdad se obtiene que  $\epsilon$  es número hipercomplejo puro. Por otro lado, al definir

$$D \equiv -\partial_{12}, \quad \delta \equiv \partial_{11} \quad \text{y} \quad \bar{\delta} \equiv -\partial_{22}, \quad (4.7)$$

el conjunto de ecuaciones (4.3), se reescribe como

$$\begin{aligned} [D, \delta] &= 2\alpha D + (2\epsilon - \rho)\delta - \kappa\bar{\delta}, \\ [\delta, \bar{\delta}] &= 2(\bar{\rho} - \rho)D + 2\beta\bar{\delta} - 2\bar{\beta}\delta, \\ [D, \bar{\delta}] &= 2\bar{\alpha}D - (2\epsilon + \bar{\rho})\bar{\delta} - \bar{\kappa}\delta, \end{aligned} \quad (4.8)$$

se puede notar que la última relación se obtiene al conjugar  $[D, \delta]$ , por lo que una de las dos es redundante.

Con respecto a las 1-formas de conexión,  $\mathbb{F}_{AB}$ , estas se definen

$$\mathbb{F}_{AB} = -\Gamma_{ABCD}\theta^{CD}, \quad (4.9)$$

y de forma explícita

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{11} &= -\Gamma_{11CD}\theta^{CD} = -\Gamma_{1111}\theta^{11} - \Gamma_{1112}\theta^{12} - \Gamma_{1122}\theta^{22} = -\kappa\theta^{11} - \alpha\theta^{12} + \bar{\rho}\theta^{22}, \\ \mathbb{F}_{12} &= -\Gamma_{12CD}\theta^{CD} = -\Gamma_{1211}\theta^{11} - \Gamma_{1212}\theta^{12} - \Gamma_{1222}\theta^{22} = -\beta\theta^{11} - \epsilon\theta^{12} - \bar{\beta}\theta^{22}, \\ \mathbb{F}_{22} &= -\Gamma_{22CD}\theta^{CD} = -\Gamma_{2211}\theta^{11} - \Gamma_{2212}\theta^{12} - \Gamma_{2222}\theta^{22} = -\rho\theta^{11} - \bar{\alpha}\theta^{12} + \bar{\kappa}\theta^{22}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

con  $\overline{\mathbb{F}_{11}} = \mathbb{F}_{22}$ . A partir de las 1-formas de conexión, se puede calcular las componentes de la curvatura, esto es

$$d\mathbb{F}^A_B + \mathbb{F}^A_C \wedge \mathbb{F}^C_B = -G^A_{BCD}S^{CD}, \quad (4.11)$$

debido a la relación

$$\mathcal{R}_{AB} = -G_{ABCD}S^{CD}, \quad (4.12)$$

podemos reescribimos las 2– formas de curvatura como

$$\mathcal{R}_{11} = d\Gamma_{11} + 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{11}, \quad \mathcal{R}_{22} = d\Gamma_{22} - 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{22} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_{12} = d\Gamma_{12} - \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{22}. \quad (4.13)$$

Con respecto a 2–formas  $S^{AB}$ , estas se definen de forma explícita como

$$S^{11} = \theta^{11} \wedge \theta^{12}, \quad S^{12} = \frac{1}{2}\theta^{11} \wedge \theta^{22} \quad \text{y} \quad S^{22} = \theta^{12} \wedge \theta^{22}, \quad (4.14)$$

por otra parte,  $G_{ABCD}$  es el equivalente espinorial de un tensor que está relacionado con la parte sin traza del tensor de Ricci y de la métrica. Es decir,

$$G_{ABCD} = \Phi_{ABCD} + \frac{1}{12}R(\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}), \quad (4.15)$$

con  $R$  el escalar de Ricci y  $\Phi_{ABCD}$  el equivalente espinorial de las componentes del tensor de Ricci sin traza. A continuación se muestra con ejemplos, el formalismo de espinores en tres dimensiones. En donde se encuentran los conjuntos de 1–formas  $\theta^{AB}$  y  $\partial_{AB}$  más adecuadas a cada métrica, los conmutadores, los coeficientes de espín, la curvatura y las componentes del tensor de Ricci así como el escalar de Ricci. Para terminar, se resuelven los ejemplos usando notación tensorial con la finalidad de comparar resultados y notar las ventajas o inconvenientes de los métodos usados.

## 4.1. Método espinorial

**Ejemplo 1.** Solución para partículas puntuales.

En 1963, Staruszkiewicz publicó por primera vez sobre la gravedad en  $(2 + 1)$  dimensiones, la cual estaba dedicada a la descripción de soluciones estáticas determinadas por fuentes puntuales. En este enfoque las partículas puntuales son los objetos materiales más simples que se pueden considerar en tres dimensiones, las cuales se mueven a lo largo de geodésicas, y no interactúan entre sí. La métrica estática y circularmente simétrica de Schwarzschild, es descrita por la expresión

$$g = B(r)^2 dr^2 - A(r)^2 dt^2 + r^2 d\phi^2,$$

con  $0 \leq r \leq \infty$  y  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Una forma más conveniente de escribir la métrica anterior, considerando que se deben satisfacer las ecuaciones de Einstein [13], es

$$g = B_0^2 dr^2 - d\tau^2 + r^2 d\phi^2, \quad (4.16)$$

con  $B_0 = B(r) = \text{constante}$ ,  $A_0 = A(r) = \text{constante}$  y bajo el cambio de coordenada  $\tau = A_0 t$ . Una elección conveniente de 1–formas,  $\theta^{AB}$ , es

$$\theta^{11} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(B_0 dr + j d\tau), \quad \theta^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_0 dr - j d\tau) \quad \text{y} \quad \theta^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}r d\phi, \quad (4.17)$$

**CAPÍTULO 4. APLICACIONES EN ESPACIOS DE TRES DIMENSIONES**  
4.1. MÉTODO ESPINORIAL

---

y para  $\partial_{AB}$ ,

$$\partial_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} + j \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \quad \partial_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{-1}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} + j \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \quad \text{y} \quad \partial_{12} = \frac{-1}{\sqrt{2}r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (4.18)$$

los cuales de acuerdo a (4.7), se identifican como

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} + j \frac{\partial}{\partial \tau} \right], \quad \bar{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} - j \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \quad \text{y} \quad D = \frac{1}{\sqrt{2}r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (4.19)$$

y hallando sus conmutadores, encontramos

$$[D, \delta] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \left( \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} + j \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right] = \frac{1}{2B_0 r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{1}{\sqrt{2}B_0 r} D, \quad (4.20)$$

$$[\delta, \bar{\delta}] = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} + j \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \left( \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} - j \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right] = 0,$$

debido a que el conmutador de  $[D, \delta]$  es real, se tiene  $[D, \delta] = [D, \bar{\delta}]$ . Luego, el único coeficiente de espín diferente de cero es

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}B_0 r} = \bar{\alpha}. \quad (4.21)$$

Por otro lado, de acuerdo a (4.10) las 1-formas de conexión son

$$\Gamma_{11} = \frac{-1}{4B_0} d\phi, \quad \Gamma_{12} = 0 \quad \text{y} \quad \Gamma_{22} = \frac{-1}{4B_0} d\phi, \quad (4.22)$$

antes de hallar las 2-forma de conexión  $\mathcal{R}_{AB}$ , calculamos las 2-formas  $S^{AB}$ ,

$$S^{11} = \frac{-1}{2} (B_0 dr + jd\tau) \wedge rd\phi, \quad S^{12} = \frac{-1}{4} (B_0 dr + jd\tau) \wedge (B_0 dr - jd\tau) \quad (4.23)$$

$$\text{y} \quad S^{22} = \frac{1}{2} (rd\phi) \wedge (B_0 dr - jd\tau).$$

Así, finalmente se encuentra que la 2-forma de conexión  $\mathcal{R}_{AB}$  están dados por

$$\mathcal{R}_{11} = d\Gamma_{11} + 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{11} = 0, \quad \mathcal{R}_{12} = d\Gamma_{12} - \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{22} = 0, \quad \text{y} \quad (4.24)$$

$$\mathcal{R}_{22} = d\Gamma_{22} - 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{22} = 0,$$

es decir,  $G_{1111} = G_{2222} = 0 = G_{1122} = G_{2211}$  y en consecuencia el escalar de Ricci, es idéntico a cero.

**CAPÍTULO 4. APLICACIONES EN ESPACIOS DE TRES DIMENSIONES**  
4.1. MÉTODO ESPINORIAL

---

**Ejemplo 2.** Solución para el polvo.

En 1991, Cornish y Frankel presentaron una clase de soluciones hidrostáticas, las cuales producen espacios de extensión espacial finita [14]. En particular para la solución de la función de Heaviside se tiene que un elemento de línea en cuatro dimensiones se representa por

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

la cual es reducida al considerar una función embebida en  $z$ ,

$$z(r) = \frac{R_0}{\sqrt{\frac{\kappa M}{\pi}}} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{\kappa M r^2}{\pi R_0^2}} \right] \quad \text{para } 0 \leq r \leq R_0, \quad (4.25)$$

es así que la métrica puede ser reducida a

$$g = r^2 d\theta^2 - dt^2 + \left( 1 - \kappa \frac{M r^2}{\pi R_0^2} \right)^{-1} dr^2, \quad (4.26)$$

con  $0 \leq r \leq R_0$ ,  $\kappa = 2\pi G$  y  $G$  la constante de gravitación. Debido a que  $\kappa$  es una constante, hacemos  $a = \kappa$ , con la finalidad de evitar confusiones con el coeficiente de espín  $\kappa$ . A continuación, elegimos a  $\theta^{AB}$  como

$$\theta^{11} = \frac{-1}{\sqrt{2}} (rd\theta + jdt), \quad \theta^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} (rd\theta - jdt) \quad \text{y} \quad \theta^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} dr, \quad (4.27)$$

asimismo, se calculan los campos vectoriales  $\partial_{AB}$ ,

$$\partial_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + j \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \partial_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{-1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + j \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad \text{y} \quad \partial_{12} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (4.28)$$

calculando los valores de sus paréntesis de Lie, hallamos

$$\begin{aligned} [D, \delta] &= \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + j \frac{\partial}{\partial t} \right] = -\frac{\left( 1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{2r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4r} \left( 1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} (\delta + \bar{\delta}), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$[\delta, \bar{\delta}] = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + j \frac{\partial}{\partial t} \right), \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - j \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] = 0,$$

más aún, debido a que el paréntesis de Lie de  $[D, \delta]$  es una cantidad real, entonces  $[D, \delta] = [D, \bar{\delta}]$ . Se sigue que los únicos coeficientes de espín diferentes de cero son

**CAPÍTULO 4. APLICACIONES EN ESPACIOS DE TRES DIMENSIONES**  
4.1. MÉTODO ESPINORIAL

---

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{4r} \left(1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \kappa. \quad (4.30)$$

Una vez encontrados los coeficientes de espín, procedemos a calcular las 1-formas de conexión, de donde se obtiene

$$\Gamma_{11} = \left(1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\theta}{2} \quad \text{y} \quad \Gamma_{12} = 0, \quad (4.31)$$

debido a que  $\Gamma_{11}$  es real, se sigue que  $\Gamma_{22} = \Gamma_{11}$ . Hallando las 2-formas  $S^{AB}$ , se tiene

$$S^{11} = \frac{1}{2} (-rd\theta - jdt) \wedge \left(1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr, \quad S^{12} = \frac{-1}{4} (rd\theta + jdt) \wedge (rd\theta - jdt) \quad \text{y} \quad (4.32)$$

$$S^{22} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr \wedge (rd\theta - jdt).$$

En consecuencia las 2-formas de conexión,  $\mathcal{R}_{AB}$ , están dadas por

$$\mathcal{R}_{11} = d\Gamma_{11} + 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{11} = -\frac{aM}{2\pi R_0^2} (S^{11} + S^{22}), \quad \mathcal{R}_{12} = d\Gamma_{12} - \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{22} = 0 \quad \text{y} \quad (4.33)$$

$$\mathcal{R}_{22} = d\Gamma_{22} - 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{22} = -\frac{aM}{2\pi R_0^2} (S^{11} + S^{22}),$$

es decir, los únicos coeficientes distintos de cero son  $G_{1111} = G_{2222} = \frac{aM}{2\pi R_0^2} = G_{1122} = G_{2211}$ . Por último, se tiene

$$G_{1111} = \Phi_{1111} + \frac{1}{12} R (\epsilon_{11}\epsilon_{11} + \epsilon_{11}\epsilon_{11}) = G_{2222}, \quad (4.34)$$

de ahí que  $\Phi_{1111} = \frac{aM}{2\pi R_0^2} = \Phi_{2222}$ . Además, debido a que la componente  $G_{1212} = 0$ , planteamos el siguiente sistema para hallar a  $\Phi_{1122}$  y a  $R$ ,

$$\begin{cases} \frac{aM}{2\pi R_0^2} = \Phi_{1122} + \frac{1}{6} R \\ 0 = \Phi_{1212} - \frac{1}{12} R \end{cases} \quad (4.35)$$

de donde se obtiene  $\Phi_{1122} = \Phi_{2211} = \frac{aM}{6\pi R_0^2}$  y  $R = \frac{2aM}{\pi R_0^2}$ .

**Ejemplo 3.** Solución agujeros negros con simetría cilíndrica.

En 1992 Bañados, Teitelboim y Zanelli propusieron la solución del agujero negro BTZ, este modelo de agujero negro tiene propiedades similares a las soluciones de agujeros negros de Schwarzschild y Kerr en tres dimensiones, los cuales representan modelos reales. El tensor en coordenadas polares, está descrito por la expresión

$$g = \frac{1}{\left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)} d\rho^2 - \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right) dt^2 + \rho^2 d\phi^2, \quad (4.36)$$

donde se considera a  $M_0$  como un parámetro y  $l$  está relacionado con la constante cosmológica por  $\Lambda = -\frac{1}{l^2}$ . De ahí que una elección adecuada de  $\theta^{AB}$  es

$$\begin{aligned} \theta^{11} &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \left[ \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{-\frac{1}{2}} d\rho + j \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}} dt \right], & \theta^{12} &= \frac{\rho}{\sqrt{2}} d\phi \quad y \\ \theta^{22} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{-\frac{1}{2}} d\rho - j \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}} dt \right], \end{aligned} \quad (4.37)$$

de forma análoga se obtienen,

$$\begin{aligned} \partial_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \rho} + j \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \right], & \partial_{12} &= \frac{-1}{\sqrt{2}\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad y \\ \partial_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \rho} + j \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \right], \end{aligned} \quad (4.38)$$

enseguida, se calculan explícitamente los valores de los paréntesis de Lie,

$$\begin{aligned} [D, \delta] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}, \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \rho} + j \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \right] = \frac{\sqrt{\frac{\rho^2}{l^2} - M_0}}{2\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\sqrt{\frac{\rho^2}{l^2} - M_0}}{\sqrt{2}\rho} D, \\ [\delta, \bar{\delta}] &= \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \rho} + j \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t}, \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \rho} - j \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \right] \\ &= \frac{j\rho}{l^2} \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\sqrt{2}\rho}{2l^2} \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{-\frac{1}{2}} \delta - \frac{\sqrt{2}\rho}{2l^2} \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{-\frac{1}{2}} \bar{\delta}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

note que  $[D, \delta]$  es real, en consecuencia  $[D, \bar{\delta}] = [D, \delta]$ . Así, los únicos coeficientes de espín diferentes de cero son

**CAPÍTULO 4. APLICACIONES EN ESPACIOS DE TRES DIMENSIONES**  
4.1. MÉTODO ESPINORIAL

---

$$\alpha = \frac{\sqrt{2} \left( \frac{\rho^2}{l^2} - M_0 \right)^{\frac{1}{2}}}{4\rho} = \bar{\alpha} \quad y \quad \beta = -\frac{\sqrt{2}\rho}{4l^2 \left( \frac{\rho^2}{l^2} - M_0 \right)^{\frac{1}{2}}} = \bar{\beta}, \quad (4.40)$$

y las 1-formas de conexión

$$\Gamma_{11} = -\left( \frac{\rho^2}{l^2} - M_0 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\phi}{4}, \quad \Gamma_{12} = -\frac{j\rho}{2l^2} dt \quad y \quad \Gamma_{22} = -\left( \frac{\rho^2}{l^2} - M_0 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\phi}{4}, \quad (4.41)$$

con la finalidad de hallar las 2-formas de conexión, calculamos las 2-formas  $S^{AB}$ , esto es

$$\begin{aligned} S^{11} &= \frac{-1}{2} \left[ \left( \frac{\rho^2}{l^2} - M_0 \right)^{-\frac{1}{2}} d\rho + j \left( \frac{\rho^2}{l^2} - M_0 \right)^{\frac{1}{2}} dt \right] \wedge \rho d\phi, \\ S^{12} &= \frac{-1}{4} \left[ \left( \frac{\rho^2}{l^2} - M_0 \right)^{-\frac{1}{2}} d\rho + j \left( \frac{\rho^2}{l^2} - M_0 \right)^{\frac{1}{2}} dt \right] \wedge \left[ \left( \frac{\rho^2}{l^2} - M_0 \right)^{-\frac{1}{2}} d\rho - j \left( \frac{\rho^2}{l^2} - M_0 \right)^{\frac{1}{2}} dt \right], \\ S^{22} &= \frac{1}{2} (\rho d\phi) \wedge \left[ \left( \frac{\rho^2}{l^2} - M_0 \right)^{-\frac{1}{2}} d\rho - j \left( \frac{\rho^2}{l^2} - M_0 \right)^{\frac{1}{2}} dt \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Por último, se encuentra que las 2-formas  $\mathcal{R}_{AB}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{11} &= d\Gamma_{11} + 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{11} = \frac{1}{2l^2} S^{22}, \quad \mathcal{R}_{12} = d\Gamma_{12} - \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{22} = -\frac{1}{l^2} S^{12} \quad y \\ \mathcal{R}_{22} &= d\Gamma_{22} - 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{22} = \frac{1}{2l^2} S^{11}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

es decir, los únicos coeficientes distintos de cero son  $G_{1122} = -\frac{1}{2l^2} = G_{2211}$  y  $G_{1212} = \frac{1}{l^2}$ . En consecuencia, se obtiene el sistema de ecuaciones para hallar a  $R$  y  $\Phi_{1122}$ ,

$$\begin{cases} -\frac{1}{l^2} = \Phi_{1212} - \frac{1}{12}R \\ 0 = \Phi_{1122} + \frac{1}{6}R \end{cases} \quad (4.44)$$

de donde resulta

$$\Phi = \frac{1}{2l^2} \quad y \quad R = -\frac{6}{l^2}. \quad (4.45)$$

**Ejemplo 4.** Estrellas estáticas de fluidos perfectos.

La métrica presentada a continuación es consecuencia del estudio del espacio-tiempo estático de simetría circular, acoplado a fluidos perfectos. La métrica para la radiación estática o partículas ultrarrelativistas,  $p = \frac{\mu(r)}{2}$ , es

$$g = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-4} dr^2 - \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-2} dt^2 + r^2 d\theta^2, \quad (4.46)$$

con  $R$  un valor de frontera en donde la presión desaparece. Una elección conveniente de las 1-formas  $\theta^{AB}$  es

$$\theta^{11} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left[ \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-2} dr + j \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dt \right], \quad \theta^{12} = \frac{r}{\sqrt{2}} d\theta \quad y \quad (4.47)$$

$$\theta^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-2} dr - j \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dt \right],$$

por tanto las 2-formas  $S^{AB}$  se escriben

$$S^{11} = \frac{-1}{2} \left[ \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-2} dr + j \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dt \right] \wedge r d\theta,$$

$$S^{12} = \frac{-1}{4} \left[ \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-2} dr + j \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dt \right] \wedge \left[ \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-2} dr - j \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dt \right], \quad (4.48)$$

$$S^{22} = \frac{1}{2} r d\theta \wedge \left[ \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-2} dr - j \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dt \right].$$

Por otro lado, los campos vectoriales se expresan como

$$\partial^{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 \frac{\partial}{\partial r} + j \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} \right], \quad \partial^{12} = \frac{-1}{\sqrt{2} r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad y \quad (4.49)$$

$$\partial^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ - \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 \frac{\partial}{\partial r} + j \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} \right],$$

calculando los parentesis de Lie, encontramos

$$\begin{aligned}
 [D, \delta] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 \frac{\partial}{\partial r} + j \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} \right] = \frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2}{2r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2}{\sqrt{2} r} D \\
 [\delta, \bar{\delta}] &= \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 \frac{\partial}{\partial r} + j \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\partial}{\partial t}, \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 \frac{\partial}{\partial r} - j \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} \right] \\
 &= \frac{2jr}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\sqrt{2}r \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}{R^2} \delta - \frac{\sqrt{2}r \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}{R^2} \bar{\delta},
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

donde se sigue, que los coeficientes diferentes de cero son

$$\alpha = \frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2}{2\sqrt{2} r} = \bar{\alpha} \quad \text{y} \quad \beta = -\frac{\sqrt{2}r \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}{2R^2} = \bar{\beta}, \tag{4.51}$$

y las 1-formas de conexión

$$\Gamma_{11} = -\alpha \theta^{12} = -\frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2}{4} d\theta \quad \text{y} \quad \Gamma_{12} = -\beta \theta^{11} - \bar{\beta} \theta^{22} = \frac{-jr dt}{R^2} \tag{4.52}$$

debido a que  $\alpha = \bar{\alpha}$ , se sigue que  $\Gamma_{11} = \Gamma_{22}$ . Finalmente la 2-forma de curvatura

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{11} &= d\Gamma_{11} + 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{11} = \frac{r}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr \wedge d\theta + \frac{jr}{2R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 dt \wedge d\theta, \\
 &= \frac{-\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}{R^2} (S^{11} + S^{22}) + \frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}{2R^2} (S^{11} - S^{22}) = \frac{-\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}{2R^2} S^{11} - \frac{3\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}{2R^2} S^{22}, \\
 \mathcal{R}_{12} &= d\Gamma_{12} - \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{22} = \frac{-2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}{R^2} S^{12}
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{22} &= d\Gamma_{22} - 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{22} = \frac{-\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}{R^2} (S^{11} + S^{22}) + \frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}{2R^2} (S^{22} - S^{11}) \\
 &= \frac{-\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}{2R^2} S^{22} - \frac{3\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}{2R^2} S^{11},
 \end{aligned}$$

es decir, los únicos coeficientes distintos de cero son  $G_{1111} = \frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}{2R^2} = G_{2222}$ ,  $G_{1122} = \frac{3\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}{2R^2} = G_{2211}$  y  $G_{1212} = \frac{2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}{R^2}$ . Además,

$$G_{1111} = \Phi_{1111} + \frac{1}{12}R(\epsilon_{11}\epsilon_{11} + \epsilon_{11}\epsilon_{11}) = G_{2222}, \quad (4.54)$$

de ahí que  $\Phi_{1111} = \frac{(1-\frac{r^2}{R^2})^3}{2R^2} = \Phi_{2222}$ , para las otras componentes planteamos el sistema

$$\begin{cases} \frac{2(1-\frac{r^2}{R^2})^3}{R^2} = \Phi_{1212} - \frac{1}{12}R \\ \frac{3(1-\frac{r^2}{R^2})^3}{2R^2} = \Phi_{1122} + \frac{1}{6}R \end{cases} \quad (4.55)$$

de donde resulta  $\Phi_{1212} = \frac{11(1-\frac{r^2}{R^2})^3}{6R^2}$  y  $R = \frac{-2(1-\frac{r^2}{R^2})^3}{R^2}$ .

**Ejemplo 5.** Análogo Friedmann–Robertson–Walker (FRW).

En el modelo de Friedmann–Robertson–Walker en (3+1) dimensiones, cualquier fluido perfecto que cumpla una ecuación de estado barotrópica puede transformarse en su homólogo en (2+1) dimensiones, de donde se encuentra que la métrica con simetría circular se escribe como

$$g = a(t)^2 r^2 d\theta^2 - dt^2 + a(t)^2 \frac{dr^2}{1-kr^2}, \quad (4.56)$$

con  $a(t)$  conocido como factor de escala y  $k$  es el índice de curvatura y puede tomar los valores de  $-1, 0, 1$ ; dependiendo si el espacio es cerrado, abierto o curvo. Con respecto a la 1–forma  $\theta^{AB}$ , una elección es

$$\theta^{11} = \frac{-1}{\sqrt{2}} [a(t)r d\theta + j dt], \quad \theta^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} [a(t)r d\theta - j dt] \quad \text{y} \quad \theta^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a(t) dr}{\sqrt{1-kr^2}}, \quad (4.57)$$

a partir de las cuales se obtienen las 2–formas,  $S^{AB}$ ,

$$S^{11} = \frac{-1}{2} [a(t)r d\theta + j dt] \wedge \frac{a(t) dr}{\sqrt{1-kr^2}}, \quad S^{22} = \frac{1}{2} \frac{a(t) dr}{\sqrt{1-kr^2}} \wedge [a(t)r d\theta - j dt] \quad \text{y} \quad (4.58)$$

$$S^{12} = \frac{-1}{4} [a(t)r d\theta + j dt] \wedge [a(t)r d\theta - j dt],$$

asimismo, se calculan los campos vectoriales  $\partial_{AB}$ ,

$$\partial_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{a(t)r} \frac{\partial}{\partial \theta} + j \frac{\partial}{\partial t} \right], \quad \partial_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{1}{a(t)r} \frac{\partial}{\partial \theta} + j \frac{\partial}{\partial t} \right] \quad \text{y} \quad \partial_{12} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (4.59)$$

y calculando los valores de sus paréntesis de Lie, hallamos

**CAPÍTULO 4. APLICACIONES EN ESPACIOS DE TRES DIMENSIONES**  
4.1. MÉTODO ESPINORIAL

---

$$\begin{aligned}
 [D, \delta] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{a(t)r} \frac{\partial}{\partial \theta} + j \frac{\partial}{\partial t} \right] = -\frac{\sqrt{1-kr^2}}{2a(t)^2 r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{j\sqrt{1-kr^2} \dot{a}(t)}{2a(t)^2} \frac{\partial}{\partial r} \\
 &= \frac{-\sqrt{2}\sqrt{1-kr^2}}{4a(t)r} (\delta + \bar{\delta}) + j \frac{\sqrt{2} \dot{a}(t)}{2a(t)} D,
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$[\delta, \bar{\delta}] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a(t)r} \frac{\partial}{\partial \theta} + j \frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{a(t)r} \frac{\partial}{\partial \theta} - j \frac{\partial}{\partial t} \right] = -j \frac{\dot{a}(t)}{a(t)^2 r} \frac{\partial}{\partial \theta} = -j \frac{\sqrt{2} \dot{a}(t)}{2a(t)} (\delta + \bar{\delta}),$$

donde resulta que los únicos coeficientes de espín diferentes de cero son

$$\alpha = j \frac{\sqrt{2} \dot{a}(t)}{4a(t)} = \bar{\beta}, \quad \bar{\alpha} = -j \frac{\sqrt{2} \dot{a}(t)}{4a(t)} = \beta \quad \text{y} \quad \rho = \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-kr^2}}{4a(t)r} = \kappa,$$

donde es claro que  $\rho = \bar{\rho}$  y  $\kappa = \bar{\kappa}$ . Una vez encontrados los coeficientes de espín, procedemos a calcular las 1-formas de conexión

$$\Gamma_{11} = \frac{\sqrt{1-kr^2}}{2} d\theta - \frac{j\dot{a}(t)}{4\sqrt{1-kr^2}} dr, \quad \Gamma_{12} = -j \frac{\dot{a}(t)r}{2} d\theta \quad \text{y} \quad \Gamma_{22} = \frac{\sqrt{1-kr^2}}{2} d\theta + \frac{j\dot{a}(t)}{4\sqrt{1-kr^2}} dr, \tag{4.61}$$

en consecuencia la 2-forma de curvatura  $\mathcal{R}_{AB}$  están dado por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{11} &= d\Gamma_{11} + 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{11} = \left[ \frac{\ddot{a}(t)}{4a(t)} - \frac{k}{2a(t)^2} - \frac{\dot{a}(t)^2}{4a(t)^2} \right] S^{11} - \left[ \frac{\ddot{a}(t)}{4a(t)} + \frac{k}{2a(t)^2} + \frac{\dot{a}(t)^2}{4a(t)^2} \right] S^{22}, \\
 \mathcal{R}_{12} &= d\Gamma_{12} - \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{22} = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} S^{12} - j \frac{\dot{a}(t)\sqrt{1-kr^2}}{4a(t)^2 r} (S^{11} + S^{22}), \\
 \mathcal{R}_{22} &= d\Gamma_{22} - 2\Gamma_{12} \wedge \Gamma_{22} = - \left[ \frac{\ddot{a}(t)}{4a(t)} + \frac{k}{2a(t)^2} + \frac{\dot{a}(t)^2}{4a(t)^2} \right] S^{11} + \left[ \frac{\ddot{a}(t)}{4a(t)} - \frac{k}{2a(t)^2} - \frac{\dot{a}(t)^2}{4a(t)^2} \right] S^{22},
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

es decir, los únicos coeficientes  $G_{ABCD}$  distintos de cero son  $G_{1111} = -\frac{\ddot{a}(t)}{4a(t)} + \frac{k}{2a(t)^2} + \frac{\dot{a}(t)^2}{4a(t)^2} = G_{2222}$ ,  $G_{1122} = \frac{\ddot{a}(t)}{4a(t)} + \frac{k}{2a(t)^2} + \frac{\dot{a}(t)^2}{4a(t)^2} = G_{2211}$ ,  $G_{1212} = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}$  y  $G_{1211} = j \frac{\dot{a}(t)\sqrt{1-kr^2}}{2a(t)^2 r} = G_{1222}$ . Debido a las relaciones anteriores se tiene

$$G_{1111} = \Phi_{1111} + \frac{1}{12} R (\epsilon_{11}\epsilon_{11} + \epsilon_{11}\epsilon_{11}) = G_{2222}, \tag{4.63}$$

$$G_{1222} = \Phi_{1222} + \frac{1}{12} R (\epsilon_{12}\epsilon_{22} + \epsilon_{12}\epsilon_{22}) = G_{1211},$$

por lo tanto  $\Phi_{1111} = \frac{\ddot{a}(t)}{4a(t)} + \frac{k}{2a(t)^2} + \frac{\dot{a}(t)^2}{4a(t)^2} = \Phi_{2222}$ , y  $\Phi_{1222} = j \frac{\dot{a}(t)\sqrt{1-kr^2}}{2a(t)^2 r} = \Phi_{1211}$ . Para las demás componentes se plantea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} G_{1212} = \Phi_{1212} - \frac{1}{12}R \\ G_{1122} = \Phi_{1122} + \frac{1}{6}R \end{cases} \quad (4.64)$$

en consecuencia  $\Phi_{1122} = \frac{3\ddot{a}(t)}{4a(t)} + \frac{k}{6a(t)^2} + \frac{\dot{a}(t)^2}{12a(t)^2} = \Phi_{1212}$  y  $R = \frac{5\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{2k}{a(t)^2} + \frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2}$ .

**Ejemplo 6.** Solución electrostática de Gott–Simon–Alpern, Deser–Mazur y Melvin.

Gott, Simon y Alpern fueron los primeros en derivar soluciones dentro de la teoría de Maxwell en la gravedad (2+1), sin considerar la constante cosmológica, la solución hallada se muestra a continuación

$$g = e^{r^2} dr^2 - e^{r^2} dt^2 + r^2 d\phi^2, \quad (4.65)$$

elegimos a las 1–formas

$$\theta^{11} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left( e^{\frac{r^2}{2}} dr + j e^{\frac{r^2}{2}} dt \right), \quad \theta^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{\frac{r^2}{2}} dr - j e^{\frac{r^2}{2}} dt \right) \quad \text{y} \quad \theta^{12} = \frac{r}{\sqrt{2}} d\phi, \quad (4.66)$$

a partir de las cuales se obtienen las 2–formas,  $S^{AB}$ ,

$$S^{11} = \frac{-1}{2} \left( e^{\frac{r^2}{2}} dr + j e^{\frac{r^2}{2}} dt \right) \wedge r d\phi, \quad S^{22} = \frac{1}{2} r d\phi \wedge \left( e^{\frac{r^2}{2}} dr - j e^{\frac{r^2}{2}} dt \right) \quad (4.67)$$

$$\text{y} \quad S^{12} = \frac{-1}{4} \left( e^{\frac{r^2}{2}} dr + j e^{\frac{r^2}{2}} dt \right) \wedge \left( e^{\frac{r^2}{2}} dr - j e^{\frac{r^2}{2}} dt \right),$$

por otro lado, las 1–formas  $\partial_{AB}$

$$\partial_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-\frac{r^2}{2}} \frac{\partial}{\partial r} + j e^{-\frac{r^2}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \partial_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -e^{-\frac{r^2}{2}} \frac{\partial}{\partial r} + j e^{-\frac{r^2}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad \text{y} \quad \partial_{12} = \frac{-1}{\sqrt{2} r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (4.68)$$

con las cuales calculamos los valores de los conmutadores o paréntesis de Lie,

$$\begin{aligned} [D, \delta] &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \left( e^{-\frac{r^2}{2}} \frac{\partial}{\partial r} + j e^{-\frac{r^2}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] = \frac{1}{2r^2} e^{-\frac{r^2}{2}} \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{1}{\sqrt{2} r} e^{-\frac{r^2}{2}} D, \\ [\delta, \bar{\delta}] &= \frac{1}{2} \left[ \left( e^{-\frac{r^2}{2}} \frac{\partial}{\partial r} + j e^{-\frac{r^2}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \right), \left( e^{-\frac{r^2}{2}} \frac{\partial}{\partial r} - j e^{-\frac{r^2}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] = j r e^{-r^2} \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \frac{\sqrt{2} r e^{-\frac{r^2}{2}}}{2} \delta - \frac{\sqrt{2} r e^{-\frac{r^2}{2}}}{2} \bar{\delta}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

como resultado, se tiene que los únicos coeficientes de espín diferentes de cero son

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{r^2}{2}}}{4r} = \bar{\alpha}, \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-\sqrt{2}re^{-\frac{r^2}{2}}}{4} = \bar{\beta}.$$

Una vez encontrados los coeficientes de espín, procedemos a calcular las 1-formas de conexión

$$\Gamma_{11} = \frac{-e^{-\frac{r^2}{2}}}{4}d\phi, \quad \Gamma_{12} = \frac{-jr}{2}dt \quad \text{y} \quad \Gamma_{22} = \frac{-e^{-\frac{r^2}{2}}}{4}d\phi, \quad (4.70)$$

finalmente, se calculan la 2-forma de curvatura  $\mathcal{R}_{AB}$ ,

$$\mathcal{R}_{11} = \frac{-1}{2}e^{-r^2}S^{11}, \quad \mathcal{R}_{22} = \frac{-1}{2}e^{-r^2}S^{22} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_{12} = -e^{-r^2}S^{12}, \quad (4.71)$$

es decir, los únicos coeficientes distintos de cero son  $G_{1111} = \frac{1}{2}e^{-r^2} = G_{2222}$  y  $G_{1212} = e^{-r^2}$ . Es así que para  $\Phi_{ABCD}$  y  $R$  se tiene

$$G_{1111} = \Phi_{1111} + \frac{1}{12}R(\epsilon_{11}\epsilon_{11} + \epsilon_{11}\epsilon_{11}) = G_{2222}, \quad (4.72)$$

es decir  $\Phi_{1111} = \phi_{2222} = \frac{1}{2}e^{-r^2}$ . Por otro lado, debido a que  $G_{1122} = 0$ , se plantea el sistema

$$\begin{cases} e^{-r^2} = \Phi_{1212} - \frac{1}{12}R \\ 0 = \Phi_{1122} + \frac{1}{6}R \end{cases} \quad (4.73)$$

en consecuencia  $\Phi_{1212} = \frac{-2e^{-r^2}}{3}$  y  $R = -4e^{-r^2}$ .

## 4.2. Método tensorial

Como se indico al inicio del capítulo, se busca comparar los métodos usados, es por ello que a continuación resolvemos los ejemplos anteriores usando notación tensorial. Para ello, consideramos que el tensor métrico se representa

$$g = g_{ab}\theta^a \otimes \theta^b \quad \text{con} \quad (g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde los índices  $a, b = 1, 2, 3$ . Asimismo consideramos la primera ecuación fundamental de Cartan

$$d\theta^a = \Gamma^a_{bc}\theta^b \wedge \theta^c, \quad (4.74)$$

donde  $\Gamma^a_{bc}$  se denominan coeficientes de rotación de Ricci y el tensor  $g_{ab}$  nos ayuda a subir y bajar índices. Por otro lado, los coeficientes se relacionan con las 1-formas mediante

$$\Gamma_{ab} = \Gamma_{abc}\theta^c, \quad (4.75)$$

y, a partir de los cuales podemos hallar la 2-forma de curvatura usando

$$\mathcal{R}^a{}_b = d\Gamma^a{}_b + \Gamma^a{}_c \wedge \Gamma^c{}_b, \quad (4.76)$$

además

$$\mathcal{R}^a{}_b = \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d, \quad (4.77)$$

donde  $R_{abcd}$  represental al tensor de Riemann. Por otro lado, las componentes del tensor de Ricci se calculan

$$R_{ab} = g^{cd}R_{dacb}, \quad (4.78)$$

y para el escalar de Ricci

$$R = g^{ab}R_{ab}. \quad (4.79)$$

Finalmente, usando las relaciones anteriores procedemos a hallar las 1-formas, los coeficientes de rotación y la 2-forma de curvatura.

**Ejemplo 1.** Solución para partículas puntuales.

La métrica con respecto a una base local  $(r, \tau, \phi)$  es

$$g = B(r)dr \otimes B(r)dr - A(r)d\tau \otimes A(r)d\tau + rd\phi \otimes rd\phi,$$

La métrica con respecto a una base local  $(r, \tau, \phi)$  es

$$g = B_0dr \otimes B_0dr - d\tau \otimes d\tau + rd\phi \otimes rd\phi,$$

donde es claro que las 1-formas son

$$\theta^1 = B_0dr, \quad \theta^2 = d\tau \quad \text{y} \quad \theta^3 = rd\phi, \quad (4.80)$$

además, las derivadas exteriores de las expresiones anteriores son

$$d\theta^1 = 0, \quad d\theta^2 = 0 \quad \text{y} \quad d\theta^3 = dr \wedge d\phi, \quad (4.81)$$

y en términos de las 1-formas,  $\theta^a$ , se tiene

$$d\theta^3 = \frac{1}{B_0r}\theta^1 \wedge \theta^3, \quad (4.82)$$

**CAPÍTULO 4. APLICACIONES EN ESPACIOS DE TRES DIMENSIONES**  
4.2. MÉTODO TENSORIAL

---

por otro lado, sabemos

$$d\theta^3 = \Gamma^3_{bc}\theta^b \wedge \theta^c = \Gamma^3_{13}\theta^1 \wedge \theta^3 + \Gamma^3_{31}\theta^3 \wedge \theta^1 + \Gamma^3_{23}\theta^2 \wedge \theta^3 + \Gamma^3_{32}\theta^3 \wedge \theta^2, \quad (4.83)$$

de las propiedades del producto exterior

$$d\theta^3 = (\Gamma^3_{13} - \Gamma^3_{31})\theta^1 \wedge \theta^3 + (\Gamma^3_{23} - \Gamma^3_{32})\theta^2 \wedge \theta^3, \quad (4.84)$$

usando las propiedades de  $\Gamma_{ab}$ , obtenemos

$$d\theta^3 = 2\Gamma^3_{13}\theta^1 \wedge \theta^3 + 2\Gamma^3_{23}\theta^2 \wedge \theta^3, \quad (4.85)$$

en consecuencia, al comparar la igualdad anterior y (4.82), se concluye que el único coeficiente de espín (esencialmente) distinto de cero es

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2B_0r}, \quad (4.86)$$

usando (4.74). Si bajamos el índice 3 y usando (4.75) se tiene

$$\Gamma_{31} = \frac{1}{2B_0}d\phi \Rightarrow \Gamma_{13} = -\frac{1}{2B_0}d\phi. \quad (4.87)$$

Finalmente, de la segunda ecuación estructural de Cartan, se sigue que los únicos términos diferentes de cero son

$$\mathcal{R}_{13} = d\Gamma_{13} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{13} - \Gamma_{12} \wedge \Gamma_{23} + \Gamma_{13} \wedge \Gamma_{33} = 0, \quad (4.88)$$

de la igualdad anterior se sigue que  $R_{ijkl} = 0$ , y en consecuencia, las componentes del tensor de Ricci y el escalar de Ricci son cero, lo cual concuerda con lo que se calculó usando notación espinorial.

**Ejemplo 2.** Solución para el polvo.

La métrica con respecto a una base local  $(\theta, t, r)$  para las distribuciones estáticas de la función de Heaviside es

$$g = rd\theta \otimes rd\theta - dt \otimes dt + \left(1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr \otimes \left(1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr,$$

donde se identifican a las 1-formas como

$$\theta^1 = rd\theta, \quad \theta^2 = dt \quad \text{y} \quad \theta^3 = \left(1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr, \quad (4.89)$$

y las derivadas exteriores de las expresiones anteriores son

$$d\theta^1 = dr \wedge d\theta = \frac{\left(1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{r} \theta^3 \wedge \theta^1, \quad d\theta^2 = 0 \quad \text{y} \quad d\theta^3 = 0,$$

de forma análoga a la ecuación (4.85), obtenemos que

$$2\Gamma^1_{31} = \frac{\left(1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{r} \theta^3 \wedge \theta^1, \quad (4.90)$$

es decir, esencialmente el único coeficiente de Ricci distinto de cero es

$$\Gamma^1_{31} = \frac{1}{2} \frac{\left(1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{r} \theta^3 \wedge \theta^1, \quad (4.91)$$

de ahí que el único coeficiente de Ricci distinto de cero es  $\Gamma^1_{31} = \Gamma_{131}$ , y debido a (4.75)

$$\Gamma_{13} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} d\theta, \quad (4.92)$$

es así que se obtiene que el único coeficiente de curvatura diferente de cero proviene del término

$$\mathcal{R}_{13} = d\Gamma_{13} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{13} - \Gamma_{12} \wedge \Gamma_{23} + \Gamma_{13} \wedge \Gamma_{33} = \frac{1-aMr}{2\pi R_0^2} \left(1 - \frac{aMr^2}{\pi R_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr \wedge d\theta, \quad (4.93)$$

el cual puede ser reescrito en términos de 1-formas,

$$\mathcal{R}_{13} = -\frac{1}{2} \frac{aM}{\pi R_0^2} \theta^3 \wedge \theta^1, \quad (4.94)$$

de ahí que la única componente diferente de cero del tensor de Riemann es

$$R_{1313} = \frac{aM}{\pi R_0^2}, \quad (4.95)$$

y en consecuencia, las componentes del tensor de Ricci son

$$R_{11} = g^{ij} R_{i1j1} = g^{11} R_{1111} + g^{22} R_{2121} + g^{33} R_{3131} = \frac{aM}{\pi R_0^2}$$

$$R_{22} = g^{ij} R_{i2j2} = g^{11} R_{1212} + g^{22} R_{2222} + g^{33} R_{3232} = 0, \quad (4.96)$$

$$R_{33} = g^{ij} R_{i3j3} = g^{11} R_{1313} + g^{22} R_{2323} + g^{33} R_{3333} = \frac{aM}{\pi R_0^2},$$

para el resto de componentes se tiene  $R_{12} = R_{13} = R_{23} = 0$ . Finalmente, para el escalar de Ricci usamos (4.79),

$$R = g^{ij}R_{ij} = \frac{aM}{\pi R_0^2} + \frac{aM}{\pi R_0^2} = \frac{2aM}{\pi R_0^2}, \quad (4.97)$$

lo anterior concuerda con lo que se calculó usando notación espinorial.

**Ejemplo 3.** Solución para la simetría cilíndrica.

La métrica con respecto a una base local  $(\rho, t, \phi)$  para el tensor estático BTZ (Bañados–Teitelboim–Zanelli), está descrito por la expresión

$$g = \frac{1}{\left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}}} d\rho \otimes \frac{1}{\left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}}} d\rho - \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}} dt \otimes \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}} dt + \rho d\phi \otimes \rho d\phi, \quad (4.98)$$

bajo la elección de las 1-formas

$$\theta^1 = \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{-\frac{1}{2}} d\rho, \quad \theta^2 = \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}} dt \quad \text{y} \quad \theta^3 = \rho d\phi, \quad (4.99)$$

al derivar las expresiones anteriores, obtenemos

$$d\theta^1 = 0, \quad d\theta^2 = \frac{\rho}{l^2 \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}}} d\rho \wedge dt = \frac{\rho}{l^2 \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}}} \theta^1 \wedge \theta^2 \quad \text{y} \quad (4.100)$$

$$d\theta^3 = d\rho \wedge d\phi = \frac{\left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}}}{\rho} \theta^1 \wedge \theta^3,$$

de forma similar a (4.85), y al comparar con la ecuación anterior

$$2\Gamma^2_{12} = \frac{\rho}{l^2 \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}}} \theta^1 \wedge \theta^2 \quad \text{y} \quad 2\Gamma^3_{13} = \frac{\left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}}}{\rho} \theta^1 \wedge \theta^3, \quad (4.101)$$

es decir, los únicos coeficientes de Ricci esencialmente distintos de cero son

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{l^2 \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{y} \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}}}{\rho}, \quad (4.102)$$

al usando (4.75) y bajar índices obtenemos

$$\Gamma_{12} = \frac{\rho}{2l^2} dt \quad \text{y} \quad \Gamma_{13} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}} d\phi, \quad (4.103)$$

**CAPÍTULO 4. APLICACIONES EN ESPACIOS DE TRES DIMENSIONES**  
4.2. MÉTODO TENSORIAL

---

de donde se obtienen que los únicos coeficientes de curvatura diferentes de cero provienen de los términos

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{12} &= d\Gamma_{12} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{12} - \Gamma_{12} \wedge \Gamma_{22} + \Gamma_{13} \wedge \Gamma_{32} = \frac{1}{2l^2} d\rho \wedge dt, \\ \mathcal{R}_{13} &= d\Gamma_{13} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{13} - \Gamma_{12} \wedge \Gamma_{23} + \Gamma_{13} \wedge \Gamma_{33} = -\frac{\rho}{2l^2 \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}}} d\rho \wedge d\phi \quad y \\ \mathcal{R}_{23} &= d\Gamma_{23} + \Gamma_{21} \wedge \Gamma_{13} - \Gamma_{22} \wedge \Gamma_{23} + \Gamma_{23} \wedge \Gamma_{33} = \frac{\rho}{2l^2} \left(\frac{\rho^2}{l^2} - M_0\right)^{\frac{1}{2}} dt \wedge d\phi,\end{aligned}\tag{4.104}$$

reescribiendo las igualdades anteriores en términos de las 1- formas,  $\theta^a$ , se tiene

$$\mathcal{R}_{12} = \frac{1}{2l^2} \theta^1 \wedge \theta^2, \quad \mathcal{R}_{13} = -\frac{1}{2l^2} \theta^1 \wedge \theta^3 \quad y \quad \mathcal{R}_{23} = \frac{1}{2l^2} \theta^2 \wedge \theta^3,\tag{4.105}$$

es decir, las únicas componentes diferentes de cero para el tensor de Riemann, son

$$R_{1212} = \frac{1}{l^2}, \quad R_{1313} = -\frac{1}{l^2} \quad y \quad R_{2323} = \frac{1}{l^2},\tag{4.106}$$

y en consecuencia para las componentes del tensor de Ricci

$$\begin{aligned}R_{11} &= g^{ij} R_{i1j1} = g^{11} R_{1111} + g^{22} R_{2121} + g^{33} R_{3131} = -\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l^2} = -\frac{2}{l^2}, \\ R_{22} &= g^{ij} R_{i2j2} = g^{11} R_{1212} + g^{22} R_{2222} + g^{33} R_{3232} = \frac{1}{l^2} + \frac{1}{l^2} = \frac{2}{l^2}, \\ R_{33} &= g^{ij} R_{i3j3} = g^{11} R_{1313} + g^{22} R_{2323} + g^{33} R_{3333} = -\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l^2} = -\frac{2}{l^2},\end{aligned}\tag{4.107}$$

para el resto de componentes se tiene  $R_{12} = R_{13} = R_{23} = 0$ . Finalmente, para el escalar de Ricci usamos (4.79),

$$R = g^{ij} R_{ij} = -\frac{2}{l^2} - \frac{2}{l^2} - \frac{2}{l^2} = -\frac{6}{l^2},\tag{4.108}$$

comparando la ecuación anterior con (4.45), notamos que hay congruencia con los resultados.

**Ejemplo 4.** Estrellas estáticas de fluidos perfectos.

La métrica con respecto a una base local  $(r, t, \theta)$  para la radiación estática o partículas ultrarelativistas es

$$g = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-2} dr \otimes \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-2} dr - \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-1} dt \otimes \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-1} dt + rd\theta \otimes rd\theta,\tag{4.109}$$

**CAPÍTULO 4. APLICACIONES EN ESPACIOS DE TRES DIMENSIONES**  
4.2. MÉTODO TENSORIAL

---

donde es claro que las 1-formas se eligen como

$$\theta^1 = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-2} dr, \quad \theta^2 = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-1} dt \quad y \quad \theta^3 = r d\theta, \quad (4.110)$$

las derivadas exteriores de las 1-formas son

$$d\theta^1 = 0, \quad d\theta^2 = \frac{2r}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-2} dr \wedge dt = \frac{2r}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \theta^1 \wedge \theta^2 \quad y \quad (4.111)$$

$$d\theta^3 = dr \wedge d\theta = \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2}{r} \theta^1 \wedge \theta^3,$$

y de forma similar a (4.85), si comparamos con las igualdades anteriores, obtenemos

$$2\Gamma^2_{12} = \frac{2r}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad y \quad 2\Gamma^3_{13} = \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2}{r}, \quad (4.112)$$

es decir, los únicos coeficientes distintos de cero son

$$\Gamma^2_{12} = -\frac{r}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad y \quad \Gamma^3_{13} = \frac{-\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2}{2r}, \quad (4.113)$$

si ahora bajamos el superíndice y usamos (4.75), concluimos que los coeficientes de Ricci esencialmente distintos de cero son

$$\Gamma_{12} = \frac{r}{R^2} dt \quad y \quad \Gamma_{13} = -\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2 d\theta, \quad (4.114)$$

de donde se obtienen que los únicos coeficientes de curvatura diferentes de cero provienen de los términos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{12} &= d\Gamma_{12} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{12} - \Gamma_{12} \wedge \Gamma_{22} + \Gamma_{13} \wedge \Gamma_{32} = \frac{1}{R^2} dr \wedge dt, \\ \mathcal{R}_{13} &= d\Gamma_{13} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{13} - \Gamma_{12} \wedge \Gamma_{23} + \Gamma_{13} \wedge \Gamma_{33} = \frac{2r}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] dr \wedge d\theta, \\ \mathcal{R}_{23} &= d\Gamma_{23} + \Gamma_{21} \wedge \Gamma_{13} - \Gamma_{22} \wedge \Gamma_{23} + \Gamma_{23} \wedge \Gamma_{33} = \frac{r}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2 dt \wedge d\theta, \end{aligned} \quad (4.115)$$

reescribiendo las igualdades anteriores en términos de  $\theta^a$  obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{12} &= \frac{1}{R^2} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^3 \theta^1 \wedge \theta^2, & \mathcal{R}_{13} &= \frac{2}{R^2} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^3 \theta^1 \wedge \theta^3 \quad y \\ & & & \\ \mathcal{R}_{23} &= \frac{1}{R^2} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^3 \theta^2 \wedge \theta^3,\end{aligned}\tag{4.116}$$

si comparamos las igualdades anteriores y (4.77), se obtiene que las únicas componentes diferentes de cero para el tensor de Riemann son

$$R_{1212} = \frac{2}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3, \quad R_{1313} = \frac{4}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3 \quad y \quad R_{2323} = \frac{2}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3,\tag{4.117}$$

en consecuencia para las componentes para el tensor de Ricci

$$\begin{aligned}R_{11} &= g^{ij} R_{i1j1} = g^{11} R_{1111} + g^{22} R_{2121} + g^{33} R_{3131} \\ &= -\frac{2}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3 + \frac{2}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3 = 0, \\ R_{22} &= g^{ij} R_{i2j2} = g^{11} R_{1212} + g^{22} R_{2222} + g^{33} R_{3232} \\ &= \frac{2}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3 + \frac{2}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3 = \frac{4}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3, \\ R_{33} &= g^{ij} R_{i3j3} = g^{11} R_{1313} + g^{22} R_{2323} + g^{33} R_{3333} \\ &= \frac{4}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3 - \frac{2}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3 = \frac{2}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3,\end{aligned}\tag{4.118}$$

además, para los demás coeficientes,  $R_{12} = R_{13} = R_{23} = 0$ . Por último, para el escalar de Ricci

$$R = g^{ij} R_{ij} = \frac{-4}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3 + \frac{2}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3 = -\frac{2}{R^2} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3\tag{4.119}$$

lo cual concuerda con lo que se calculó usando notación espinorial.

**Ejemplo 5.** Análogo Friedmann–Robertson–Walker (FRW).

La métrica con respecto a una base local  $(\theta, t, r)$  para el modelo de Friedmann–Robertson–Walker en  $(2 + 1)$  dimensiones, se escribe como

$$g = a(t)rd\theta \otimes a(t)rd\theta - dt \otimes dt + \frac{a(t)}{\sqrt{1 - kr^2}}dr \otimes \frac{a(t)}{\sqrt{1 - kr^2}}dr,$$

**CAPÍTULO 4. APLICACIONES EN ESPACIOS DE TRES DIMENSIONES**  
4.2. MÉTODO TENSORIAL

---

donde es claro que las 1-formas son

$$\theta^1 = a(t)r d\theta, \quad \theta^2 = dt \quad \text{y} \quad \theta^3 = \frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}} dr, \quad (4.120)$$

y las derivadas exteriores son

$$d\theta^1 = \dot{a}(t)r dt \wedge d\theta + a(t) dr \wedge d\theta, \quad d\theta^2 = 0 \quad \text{y} \quad d\theta^3 = \frac{\dot{a}(t)}{\sqrt{1-kr^2}} dt \wedge dr, \quad (4.121)$$

las cuales se reescriben en términos de las 1-formas como se muestra a continuación,

$$d\theta^1 = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \theta^2 \wedge \theta^1 + \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)r} \theta^3 \wedge \theta^1 \quad \text{y} \quad d\theta^3 = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \theta^2 \wedge \theta^3, \quad (4.122)$$

de las igualdades anteriores y usando relaciones semejantes a (4.85), obtenemos

$$2\Gamma^1_{21} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad 2\Gamma^1_{31} = \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)r} \quad \text{y} \quad 2\Gamma^3_{32} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \theta^2 \wedge \theta^3, \quad (4.123)$$

en consecuencia, de las expresiones anteriores, se deduce que los únicos coeficientes de Ricci distintos de cero son

$$\Gamma^1_{21} = \frac{\dot{a}(t)}{2a(t)}, \quad \Gamma^3_{23} = \frac{\dot{a}(t)}{2a(t)} \quad \text{y} \quad \Gamma^1_{31} = \frac{\sqrt{1-kr^2}}{2a(t)r}, \quad (4.124)$$

y usando (4.75), obtenemos

$$\Gamma_{12} = \frac{1}{2} \dot{a}(t) r d\theta, \quad \Gamma_{13} = \frac{1}{2} \sqrt{1-kr^2} d\theta \quad \text{y} \quad \Gamma_{32} = \frac{\dot{a}(t)}{2\sqrt{1-kr^2}} dr, \quad (4.125)$$

de donde se obtienen que los únicos coeficientes de curvatura diferentes de cero provienen de los términos

$$\mathcal{R}_{12} = d\Gamma_{12} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{12} - \Gamma_{12} \wedge \Gamma_{22} + \Gamma_{13} \wedge \Gamma_{32} = \frac{1}{2} \ddot{a}(t) r dt \wedge d\theta + \frac{1}{2} \dot{a}(t) dr \wedge d\theta,$$

$$\mathcal{R}_{13} = d\Gamma_{13} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{13} - \Gamma_{12} \wedge \Gamma_{23} + \Gamma_{13} \wedge \Gamma_{33} = \frac{-kr}{2\sqrt{1-kr^2}} dr \wedge d\theta + \frac{\dot{a}(t)^2 r}{4\sqrt{1-kr^2}} d\theta \wedge dr \quad \text{y} \quad (4.126)$$

$$\mathcal{R}_{23} = d\Gamma_{23} + \Gamma_{21} \wedge \Gamma_{13} - \Gamma_{22} \wedge \Gamma_{23} + \Gamma_{23} \wedge \Gamma_{33} = -\frac{\ddot{a}(t)}{2\sqrt{1-kr^2}} dt \wedge dr,$$

al reescribir las igualdades anteriores usando 1-formas, obtenemos

$$\mathcal{R}_{12} = -\frac{\ddot{a}(t)}{2a(t)} \theta^1 \wedge \theta^2 + \frac{\dot{a}(t) \sqrt{1-kr^2}}{2a(t)^2 r} \theta^3 \wedge \theta^1, \quad \mathcal{R}_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{a(t)^2} + \frac{\dot{a}(t)^2}{2a(t)^2} \right) \theta^1 \wedge \theta^3 \quad \text{y} \quad (4.127)$$

$$\mathcal{R}_{23} = -\frac{\ddot{a}(t)}{2a(t)} \theta^2 \wedge \theta^3,$$

es así que esencialmente las componentes del tensor de Riemann diferentes de cero son

$$R_{1212} = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \quad R_{1231} = \frac{\dot{a}(t)\sqrt{1-kr^2}}{a(t)^2r}, \quad R_{1313} = \frac{k}{a(t)^2} + \frac{\dot{a}(t)^2}{2a(t)^2} \quad \text{y} \quad R_{2323} = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \quad (4.128)$$

de donde resulta para las componentes del tensor de Ricci,

$$\begin{aligned} R_{11} &= g^{ij}R_{i1j1} = g^{11}R_{1111} + g^{22}R_{2121} + g^{33}R_{3131} = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{k}{a(t)^2} + \frac{\dot{a}(t)^2}{2a(t)^2}, \\ R_{22} &= g^{ij}R_{i2j2} = g^{11}R_{1212} + g^{22}R_{2222} + g^{33}R_{3232} = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{2\ddot{a}(t)}{a(t)} \quad (4.129) \\ R_{33} &= g^{ij}R_{i3j3} = g^{11}R_{1313} + g^{22}R_{2323} + g^{33}R_{3333} = \frac{k}{a(t)^2} + \frac{\dot{a}(t)^2}{2a(t)^2} + \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}. \end{aligned}$$

Por último, para el escalar de Ricci

$$\begin{aligned} R &= g^{ij}R_{ij} = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{k}{a(t)^2} + \frac{\dot{a}(t)^2}{2a(t)^2} + \frac{2\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{k}{a(t)^2} + \frac{\dot{a}(t)^2}{2a(t)^2} + \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \\ &= \frac{4\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{k}{a(t)^2} + \frac{\dot{a}(t)^2}{2a(t)^2}, \quad (4.130) \end{aligned}$$

lo cual concuerda con lo que se calculó usando notación espinorial.

**Ejemplo 6.** Solución electrostática de Gott–Simon–Alpern, Deser–Mazur y Melvin.

La métrica con respecto a una base local  $(r, t, \phi)$  para las soluciones dentro de la teoría de Maxwell en la gravedad  $(2+1)$ , se muestra a continuación

$$g = e^{\frac{r^2}{2}} dr \otimes e^{\frac{r^2}{2}} dr - e^{\frac{r^2}{2}} dt \otimes e^{\frac{r^2}{2}} dt + rd\phi \otimes rd\phi,$$

bajo la elección de 1-formas

$$\theta^1 = e^{\frac{r^2}{2}} dr, \quad \theta^2 = e^{\frac{r^2}{2}} dt \quad \text{y} \quad \theta^3 = rd\phi, \quad (4.131)$$

luego, las derivadas exteriores de las igualdades anteriores son

$$d\theta^1 = 0, \quad d\theta^2 = e^{\frac{r^2}{2}} r dr \wedge dt \quad \text{y} \quad d\theta^3 = dr \wedge d\phi, \quad (4.132)$$

las cuales pueden ser reescritas en términos de  $\theta^a$ , así

$$d\theta^2 = re^{-\frac{r^2}{2}} \theta^1 \wedge \theta^2 \quad \text{y} \quad d\theta^3 = \frac{1}{re^{\frac{r^2}{2}}} \theta^1 \wedge \theta^3, \quad (4.133)$$

**CAPÍTULO 4. APLICACIONES EN ESPACIOS DE TRES DIMENSIONES**  
4.2. MÉTODO TENSORIAL

---

es así que se obtienen las siguientes relaciones entre los coeficientes,

$$2\Gamma^2_{12} = re^{-\frac{r^2}{2}} \quad \text{y} \quad 2\Gamma^3_{13} = \frac{1}{re^{\frac{r^2}{2}}}, \quad (4.134)$$

es decir, los únicos coeficientes esencialmente distintos de cero son

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}re^{-\frac{r^2}{2}} \quad \text{y} \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{2re^{\frac{r^2}{2}}}, \quad (4.135)$$

si ahora bajamos los superíndices y usamos (4.75), obtenemos que los coeficientes de Ricci esencialmente distintos de cero son

$$\Gamma_{12} = \frac{1}{2}rdt \quad \text{y} \quad \Gamma_{13} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{r^2}{2}}d\phi, \quad (4.136)$$

de donde se obtienen que los únicos coeficientes de curvatura diferentes de cero provienen de los términos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{12} &= d\Gamma_{12} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{12} - \Gamma_{12} \wedge \Gamma_{22} + \Gamma_{13} \wedge \Gamma_{32} = \frac{1}{2}e^{-r^2}\theta^1 \wedge \theta^2, \\ \mathcal{R}_{13} &= d\Gamma_{13} + \Gamma_{11} \wedge \Gamma_{13} - \Gamma_{12} \wedge \Gamma_{23} + \Gamma_{13} \wedge \Gamma_{33} = \frac{1}{2}e^{-r^2}\theta^1 \wedge \theta^3 \quad \text{y} \\ \mathcal{R}_{23} &= d\Gamma_{23} + \Gamma_{21} \wedge \Gamma_{13} - \Gamma_{22} \wedge \Gamma_{23} + \Gamma_{23} \wedge \Gamma_{33} = \frac{1}{4}e^{-r^2}\theta^2 \wedge \theta^3, \end{aligned} \quad (4.137)$$

por otro lado, sabemos que los coeficientes de curvatura y las componentes del tensor de Riemann se relacionan, esto es

$$\mathcal{R}_{12} = \frac{1}{2}e^{-r^2}\theta^1 \wedge \theta^2, \quad \mathcal{R}_{13} = \frac{1}{2}e^{-r^2}\theta^1 \wedge \theta^2 \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_{23} = \frac{1}{4}e^{-r^2}\theta^1 \wedge \theta^2, \quad (4.138)$$

en consecuencia las únicas componentes esencialmente diferentes de cero para el tensor de Riemann son

$$R_{1212} = e^{-r^2} \quad R_{1313} = e^{-r^2} \quad \text{y} \quad R_{2323} = \frac{1}{2}e^{-r^2}, \quad (4.139)$$

luego, para las componentes del tensor de Ricci se tiene

$$\begin{aligned} R_{11} &= g^{ij}R_{i1j1} = g^{11}R_{1111} + g^{22}R_{2121} + g^{33}R_{3131} = -e^{-r^2} + e^{-r^2} = 0, \\ R_{22} &= g^{ij}R_{i2j2} = g^{11}R_{1212} + g^{22}R_{2222} + g^{33}R_{3232} = e^{-r^2} + \frac{1}{2}e^{-r^2} = \frac{3}{2}e^{-r^2}, \\ R_{33} &= g^{ij}R_{i3j3} = g^{11}R_{1313} + g^{22}R_{2323} + g^{33}R_{3333} = e^{-r^2} - \frac{1}{2}e^{-r^2} = \frac{1}{2}e^{-r^2}, \end{aligned} \quad (4.140)$$

finalmente, se encuentra que para el escalar de Ricci

$$R = g^{ij}R_{ij} = -\frac{3}{2}e^{-r^2} + \frac{1}{2}e^{-r^2} = -e^{-r^2}, \quad (4.141)$$

lo cual concuerda con lo que se calculó usando notación espinorial.



# Conclusiones

A pesar de las semejanzas entre los números dobles y complejos, debido a la existencia de los divisores de cero, proponer un análogo al teorema fundamental del álgebra no resultó exitoso, y en consecuencia, obtener una descomposición en términos de espinores principales que únicamente contuviera combinaciones de números reales o dobles no es posible. En particular, en las soluciones a las ecuaciones cuárticas, en donde se obtienen combinaciones de números dobles y complejos.

Por otro lado, notamos que el análogo del formalismo de espinores, aplicado a espacios de tres y cuatro dimensiones, permitió reducir la cantidad de ecuaciones a resolver, debido al carácter de hipercomplejo de éstas. Asimismo, notamos que además, éstas elecciones de base permitieron dejar a un lado las convenciones de suma usadas en notación tensorial.

En particular, para espacios de tres dimensiones, debido al homomorfismo que existe entre los grupos  $SU(2, \mathbb{H})$  y  $SO(2, 1)$  se obtuvieron expresiones equivalentes a las conocidas usando cantidades complejas, ejemplo de ello son los valores propios, vectores propios, la representación de las matrices  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{M}$ , con las cuales realizamos transformaciones ortogonales, etc.

Finalmente, para espacios de cuatro dimensiones, debido a que la signatura Kleiniana se encuentra de forma poco frecuente en la literatura, no ha sido posible aplicar el formalismo a ejemplos más interesantes.



# Bibliografía

- [1] G.F. TORRES DEL CASTILLO. (2010). *Spinors in Four-Dimensional Spaces* (Springer).
- [2] G.F. TORRES DEL CASTILLO. (2020). *Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach* (Springer) 2nd ed.
- [3] G.F. TORRES DEL CASTILLO. (2003). *3-D spinors, spin-weighted functions and their applications* (Springer).
- [4] G.F. TORRES DEL CASTILLO. (2019). *Some applications in classical mechanics of the double and dual numbers*, Revista Mexicana de Física E **65**, 152.
- [5] G.F. TORRES DEL CASTILLO AND K. GUTIÉRREZ-HERRERA. (2020). *Double and dual numbers.  $SU(2)$  groups, two-component spinors and generating functions*, Revista Mexicana de Física **66**, 418.
- [6] K. GUTIÉRREZ-HERRERA. (2020). *Algunas aplicaciones de los números complejos, dobles y duales en la física teórica* (Tesis de licenciatura). FCFM-BUAP.
- [7] P.O. HESS, M. SCHÄFER AND W. GREINER. (2015). *Pseudo-Complex General Relativity* (Springer).
- [8] P.F. KELLY, AND R.B. MANN. (1986). *Ghost properties of algebraically extended theories of gravitation*. Classical and Quantum Gravity. **3**, 705.
- [9] Z. ZHENG AND Y. XUEGANG. (2004). *Hyperbolic Schrödinger equation*. Advances in Applied Clifford Algebras **14**, 207.
- [10] S. ULRYCH. (2014). *Conformal relativity with hypercomplex variables*, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, **470**.
- [11] S. ULRYCH. (2005). *Relativistic quantum physics with hyperbolic numbers*, Physics Letters B. **625**, 313.
- [12] S. ULRYCH. (2006). *Spinors in the hyperbolic algebra*, Physics Letters B. **633**, 631.
- [13] A.A. GARCÍA. (2017). *Exact solutions in the three-dimensional gravity* (Cambridge University Press).
- [14] N. J. CORNISH AND N. E. FRANKEL. (1991). *Gravitation in 2 + 1 dimensions*. Physical Review D. **43** (8), 2555.
- [15] M. BAÑADOS, C. TEITELBOIM AND J. ZANELLI. (1992). *Black hole in three-dimensional spacetime*. Physical Review Letters. **69** (13), 1849.
- [16] E. CARTAN. (1966). *The theory of spinors* (Dover, reprinted 1981).

- [17] Y. MATSUSHITA. (1981). *On Euler characteristics of compact Einstein 4-manifolds of metric signature  $(+ + - -)$* , Journal of Mathematical Physics, **22**, 979.
- [18] R. PENROSE. (1980). *Null Hypersurface Initial Data for Classical Fields of Arbitrary Spin and for General Relativity*, Gen. Rel. Grav., **12** (3), 225.
- [19] R. PENROSE. (1960). *A spinor approach to general relativity*, Ann. Physics, **10** (3), 171.
- [20] Z. AHSAN. (2019). *The Potential of Fields in Einstein's Theory of Gravitation* (Springer).
- [21] P.O. HESS AND W. GREINER. (2015). *Pseudo-Complex General Relativity*, Int. J. Mod. Phys. **E18**, 51.
- [22] L.A. GÓMEZ AND G.D. QUIROGA. (2017). *Asymptotic structure of spacetime and the Newman-Penrose formalism: a brief review*, Revista Mexicana de Física **63**, 275.
- [23] W. GREINER. (2015). *Nuclear Physics: Present and Future* (Springer).
- [24] S.M. CARROLL. (2004). *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity* (Addison-Wesley).
- [25] Ø. GRØN AND S. HERVIK. (2007). *Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology* (Springer).
- [26] P.O. HESS AND W. GREINER. (2007). *Pseudo-Complex field theory*, Int. J. Mod. Phys. **E16**, 1643.
- [27] P.O. HESS AND W. GREINER. (2010). *The Robertson-Walker metric in a pseudo-complex general relativity*, Int. J. Mod. Phys. **E19**, 1315.
- [28] N. DERUELLE AND J.P. UZAN. (2018). *Relativity in Modern Physics* (Oxford University Press).
- [29] P. FJELSTAD. (1986). *Extending special relativity via the perplex numbers*, Am. J. Phys. **54**, 416.
- [30] P. CAPELLI. (1941). *Sur le nombre complexe binaire*, Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 585.
- [31] V.P. FROLOV. (1979). *The Newman-Penrose Method in the Theory of General Relativity* (Springer).
- [32] W.L. BADE AND H. JEHLE (1953). *An Introduction to Spinors*, Reviews of Modern Physics **25** (3), 714.
- [33] Z. KETENCI, T. ERIŞİR AND M.A. GÜNGÖR. (2015). *A construction of hyperbolic spinors according to Frenet frame in Minkowski space*. Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories **13**, 179.
- [34] G.F. TORRES DEL CASTILLO AND G.S. BARRALES, (2004). *Spinor formulation of the differential geometry of curves*, Rev. Colombiana Mat., **38**, 27.
- [35] A. FATHI, P. MOBADERSANY AND R. FATHI, (2012). *A simple method to solve quartic equations*, Australian Journal of Basic and Applied Sciences, **6**, 331.
- [36] G . SOBCZYK, (1995). *The Hyperbolic Number Plane*, The College Mathematics Journal, **26** (4), 268.
- [37] Y. BALCI, T. ERISIR AND M.A. GUNGOR. (2015). *Hyperbolic spinor Darboux equations of spacelike curves in Minkowski 3-space*, J. Chungcheong Math. Soc., **28**, 525.

- [38] S.V. DHURANDHAR. (1997). *Tetrads, the Newman-Penrose Formalism and Spinors* (Springer).
- [39] G. KUNSTATTER, J. MOFFAT AND J. MALZAN. (1983). *Geometrical interpretation of a generalized theory of gravitation*, Journal of Mathematical Physics. **24**, 886.
- [40] A. KWASNIEWSKI. (1992). *Adv. Appl. Clifford Algebras*, **2** (1), 215.
- [41] G. YUN'E AND Y. XUEGANG. (2010). *Two Kinds of Hypercomplex Numbers*, IEEE 2010 International Conference on Computing, Control and Industrial Engineering. 412.
- [42] G. SOBCZYK. (1995). *The Hyperbolic Number Plane*, The College Mathematics Journal, **26** 268.
- [43] D.H. SATTINGER AND O.L. WEAVER. (1986). *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics. Applied Mathematical Sciences* (Springer).
- [44] F. CATONI, D. BOCCALETTI, R. CANNATA, V. CATONI AND P. ZAMPETTI. (2011). *Geometry of Minkowski Space-Time* (Springer).
- [45] J.G. RATCLIFFE. (1994). *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics 149, (Springer) 2nd ed.
- [46] V.G. VESELAGO. (1968) *The electrodynamics of substances with the simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$* , Physics Uspekhi. **10**, 509.
- [47] F.A.P. ALVES, A. BARRETO AND F. MORAES. (2021) *Implications of Kleinian relativity*, Physical Review D, **103** 044023.