



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

**“SÍNTESIS DE CONTROLADORES PI MULTILAZO
BASADA EN EL ENFOQUE ÓPTIMO CUADRÁTICO”**

TESIS PRESENTADA

**COMO REQUISITO PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRÍA EN INGENIERÍA QUÍMICA**

PRESENTA:

Karen Hariantty Estévez Sánchez

ASESOR:

Dr. Irving Israel Ruiz López

COASESOR:

Dr. Miguel Angel García Alvarado

BUAP

H. Puebla Z., Agosto 2016

Agradecimientos

Existen muchas personas que me ayudaron durante la realización de este proyecto.

Primero quiero agradecer a mi familia, especialmente a mi mamá Gabina, mi papá Héctor y a mi abuela Juana por el apoyo incondicional que me brindaron durante todo este tiempo y por demostrarme tanto cariño.

A los miembros de mi comité, al Dr. Miguel Angel García Alvarado, al Dr. Abraham Sánchez López y al Dr. Daniel Cruz González agradezco su paciencia, recomendaciones y el tiempo dedicado al proyecto. Al Dr. Irving Israel Ruiz López, le doy las gracias por no tan sólo su ayuda ilimitada para la realización del trabajo, sino también su amistad, apoyo y consejos.

Agradezco al Dr. Álvaro Sampieri, Secretario de Investigación y Estudios de Posgrado y a CONACYT por la ayuda brindada para el desarrollo del proyecto.

Finalmente agradezco a mis compañeros por su amistad y ayuda desinteresada.

Resumen

Estévez Sánchez, Karen Hariantty. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Julio 2016. Diseño de controladores PI multilazo basados en el enfoque óptimo cuadrático. Asesor: Dr. Irving Israel Ruiz López. Coasesor: Dr. Miguel Ángel García Alvarado.

Este proyecto detalla la extensión de la metodología de reguladores lineales cuadráticos (LQR, por sus siglas en inglés, *linear quadratic regulators*) para sintetizar controladores PI multilazo. La propuesta consiste en sintetizar inicialmente un controlador P multivariado, el cual se diagonaliza utilizando un método iterativo. Posteriormente, a este controlador se le añade la acción integral en un procedimiento similar. El proceso de sintonización consistió en explorar en ambas etapas diferentes rangos de la matriz de ponderación de la señal de control para balancear el equilibrio entre el error de la salida y el esfuerzo de control, y se complementó evaluando los índices relacionados con la capacidad del sistema para minimizar el error, la señal de control y rechazar perturbaciones. Además, el procedimiento de diagonalización se

generalizó para obtener versiones multilazo de controladores PI multivariados existentes. La teoría desarrollada fue aplicada para la síntesis y sintonización de los controladores multilazo de dos columnas de destilación, así como en la diagonalización de controladores existentes de un CSTR no lineal. Finalmente, se observó que el procedimiento de síntesis y sintonización propuesto permite obtener controladores PI multilazo con desempeño comparable a otros reportados en literatura y que los controladores diagonales exhiben características de operación similares a los multivariados originales.

Abstract

Estévez Sánchez, Karen Hariantty. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. July 2016. **Diseño de controladores PI multilazo basados en el enfoque óptimo cuadrático**. Advisers: Dr. Irving Israel Ruiz López (internal), Dr. Miguel Ángel García Alvarado (external).

The LQR (*linear quadratic regulators*) methodology is extended to obtain multiloop PI controllers in this study. With this method a multivariable P controller is initially obtained and then diagonalized using an iterative procedure. The resulting controller is further complemented with the integral action in a similar process. The proposed tuning process explores different values of the control weight matrix to balance the output error and control signal in both stages and is refined through additional indices related with the error to reference tracking, disturbance rejection and the associated control use. In addition, the diagonalization procedure is generalized to obtain multiloop versions of existing multivariable PI controllers. The developed

theory was applied to the design and tuning of multiloop controllers for two distillation columns as well as the diagonalization of existing controllers for a nonlinear CSTR. The tuning procedure allowed the synthesis of multiloop PI controllers with performance indices comparable to those reported by other authors. Furthermore, diagonalized controllers exhibited a similar operation as the original multivariable ones.

Índice

Resumen	I
Abstract	III
Índice de figuras	XIII
Índice de tablas	XVI
Nomenclatura	XXI
Introducción	1
I Antecedentes	5
1.1 Fundamentos de los sistemas de control	5
1.1.1 Elementos de un sistema de control	6
1.1.2 Descripción matemática de un sistema de control	7
1.1.2.1 Funciones de transferencia	8
1.1.2.2 Espacio de estados	10
1.1.3 Características de un sistema de control	13
1.1.3.1 Estabilidad	13

1.1.3.2	Desempeño	14
1.1.3.3	Robustez	15
1.1.4	Algoritmos de control	16
1.1.4.1	Encendido-apagado (<i>on-off</i>)	17
1.1.4.2	Proporcional-integral-derivativo (PID)	18
1.1.4.3	Lógica difusa	19
1.1.4.4	Redes neuronales artificiales	21
1.1.5	Objetivos de un sistema de control	24
1.1.5.1	Seguimiento de una referencia	24
1.1.5.2	Rechazo de perturbaciones	25
1.2	Herramientas para diseñar controladores PI	25
1.2.1	Segundo método de estabilidad de Lyapunov	25
1.2.2	Índices de funcionamiento	26
1.2.3	Reguladores lineales cuadráticos (LQR)	31
1.2.3.1	Controlador de acción proporcional	31
1.2.3.2	Controlador de acción proporcional-integral	33
1.3	Objetivos	35
1.3.1	Objetivo general	35
1.3.2	Objetivos específicos	35
II	Generalización del enfoque LQR para la síntesis de controladores multilazo	36
2.1	Síntesis de controladores PI multilazo	36
2.1.1	Síntesis del controlador proporcional multilazo	37

2.1.2	Síntesis del controlador PI multilazo	38
2.2	Diagonalización de controladores PI existentes	42
2.2.1	Matriz de ponderación de control para una acción proporcional existente	42
2.2.2	Matriz de ponderación de control para una acción integral exis- tente	43
2.3	Criterio de diagonalización	44
III	Metodología	45
3.1	Síntesis de controladores PI multilazo vía la generalización del enfoque LQR	45
3.1.1	Casos de estudio	45
3.1.1.1	Columna de destilación de Wardle y Wood (WW)	45
3.1.1.2	Columna de destilación de Wood y Berry (WB)	47
3.1.2	Análisis de las matrices de ponderación en la síntesis de con- troladores PI multilazo	48
3.1.3	Caracterización de los controladores PI multilazo	49
3.2	Diagonalización de controladores PI multivariados existentes	53
3.2.1	Reactor CSTR no lineal	53
3.2.2	Análisis de las matrices de ponderación en la síntesis de con- troladores PI multilazo	54
3.2.3	Caracterización de los controladores PI multilazo	54
3.3	Herramientas de cómputo	55

IV Resultados y discusión	56
4.1 Características del procedimiento de diagonalización	56
4.2 Desempeño de los controladores PI multilazo vía la generalización del enfoque LQR	69
4.2.1 Desempeño de las versiones diagonales de los controladores PI multivariados existentes	87
V Conclusiones	96
VI Recomendaciones	97
VII Apéndice A. Soluciones analíticas para I_y e I_u de una acción proporcional	98
Bibliografía	103

Índice de figuras

1.1	Esquema básico de un sistema de control.	7
1.2	Diagrama de bloques de una matriz de transferencia.	10
1.3	Esquema básico de un sistema de control en función de las variables involucradas.	11
1.4	Integral de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control.	15
1.5	Lazo de control difuso.	20
1.6	Red típica multicapas.	23
2.1	Diagrama en lazo cerrado asociado a la síntesis de una acción de control proporcional vía la generalización del enfoque LQR.	39
2.2	Diagrama en lazo cerrado asociado a la síntesis de una acción de control integral vía la generalización del enfoque LQR.	41
4.1	Índice del error (I_{y-s}^s) de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ en la columna de WW.	57
4.2	Índice del esfuerzo de control (I_{u-s}^s) de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ en la columna de WW.	57

4.3 Índice del error (I_{y-s}^s) de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ en la columna de WB. 58

4.4 Índice del esfuerzo de control (I_{u-s}^s) de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ en la columna de WB. 58

4.5 Cociente del índice del error (I_{y-s}^s) multilazo-multivariado de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ en la columna de WW. 60

4.6 Cociente del índice del esfuerzo de control (I_{u-s}^s) multilazo-multivariado de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ en la columna de WW. 60

4.7 Cociente del índice del error (I_{y-s}^s) multilazo-multivariado de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ en la columna de WB. 61

4.8 Cociente del índice del esfuerzo de control (I_{u-s}^s) multilazo-multivariado de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ en la columna de WB. 61

4.9 Relación entre I_{y-s}^s e I_{u-s}^s de los controladores proporcionales para el sistema de WW. P LQR es el controlador proporcional seleccionado en la primera etapa. 63

4.10 Controladores proporcionales multilazo obtenidos y de referencia para la columna de WW. P LQR es el controlador proporcional seleccionado que fue complementado con la acción integral (PI LQR). 64

4.11 Controladores proporcionales multilazo obtenidos y de referencia para la columna de WB. P LQR es el controlador proporcional seleccionado en la primera etapa que fue complementado con la acción integral (PI LQR). 64

4.12 Índice del error (I_{y-s}^s) de los controladores PI multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ en la columna de WW. 65

4.13 Índice del esfuerzo de control (I_{u-s}^s) de los controladores PI multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ en la columna de WW. 65

4.14 Índice del error (I_{y-s}^s) de los controladores PI multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ en la columna de WB. . 66

4.15 Índice del esfuerzo de control (I_{u-s}^s) de los controladores PI multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ en la columna de WB. 66

4.16 Comportamiento de la respuesta y_1 de la columna de destilación de WW ante un cambio de referencia escalón unitario en la primera salida. 72

4.17 Comportamiento de la respuesta y_2 de la columna de destilación de WW ante un cambio de referencia escalón unitario en la primera salida. 72

4.18 Comportamiento de la acción de control u_1 de la columna de destilación de WW ante un cambio de referencia escalón unitario en la primera salida.	73
4.19 Comportamiento de la acción de control u_2 de la columna de destilación de WW ante un cambio de referencia escalón unitario en la primera salida.	73
4.20 Comportamiento de la respuesta y_1 de la columna de destilación de WB ante un cambio de referencia escalón unitario en la segunda salida.	80
4.21 Comportamiento de la respuesta y_2 de la columna de destilación de WB ante un cambio de referencia escalón unitario en la segunda salida.	80
4.22 Comportamiento de la acción de control u_1 de la columna de destilación de WB ante un cambio de referencia escalón unitario en la primera salida.	81
4.23 Comportamiento de la acción de control u_2 de la columna de destilación de WB ante un cambio de referencia escalón unitario en la primera salida.	81
4.24 Concentración de salida en el CSTR no lineal ante cambios en el punto de referencia y variables de entrada.	93
4.25 Temperatura de salida en el CSTR no lineal ante cambios en el punto de referencia y variables de entrada.	94
4.26 Flujo de alimentación para controlar cambios en el punto de referencia y variables de entrada en el CSTR no lineal.	94

4.27 Flujo de enfriamiento para controlar cambios en el punto de referencia
y variables de entrada en el CSTR no lineal. 95

Índice de tablas

1.1	Soluciones analíticas de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control.	30
3.1	Soluciones analíticas propuestas de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control para un controlador proporcional.	52
4.1	Ganancias de los controladores PI multilazo para la columna de destilación de WW.	67
4.2	Ganancias de los controladores PI multilazo para la columna de destilación de WB.	68
4.3	Evaluación analítica de los índices de funcionamiento para el sistema nominal de la columna de destilación de WW.	70
4.4	Evaluación numérica de los índices de desempeño para el sistema nominal de la columna de destilación de WW.	71
4.5	Evaluación analítica de los índices de desempeño para el sistema perturbado de la columna de destilación de WW.	74
4.6	Evaluación numérica de los índices de desempeño para el sistema perturbado de la columna de destilación de WW.	75

4.7	Diferencias relativas de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control entre el sistema nominal y el sistema perturbado para la columna de destilación de WW.	76
4.8	Evaluación analítica de los índices de desempeño para el sistema nominal de la columna de destilación de WB.	78
4.9	Evaluación numérica de los índices de desempeño para el sistema nominal de la columna de destilación de WB.	79
4.10	Evaluación analítica de los índices de desempeño para el sistema nominal de la columna de destilación de WB.	82
4.11	Evaluación numérica de los índices de desempeño para el sistema nominal de la columna de destilación de WB.	83
4.12	Diferencias relativas de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control entre el sistema nominal y el sistema perturbado de la columna de destilación de WB.	84
4.13	Criterios de desempeño para el sistema nominal de la columna de destilación de WW.	85
4.14	Criterios de desempeño para el sistema nominal de la columna de destilación de WB.	86
4.15	Ganancias de los controladores PI para el CSTR no lineal.	88
4.16	Matrices de ponderación ($\times 10^8$) que producen la acción proporcional en el procedimiento LQR para el CSTR no lineal.	89
4.17	Matrices de ponderación ($\times 10^{11}$) que producen la acción integral en el procedimiento LQR para el CSTR no lineal.	89

4.18 Índices de desempeño para los sistemas de control del CSTR calculados analíticamente con el modelo linealizado.	91
4.19 Índices de desempeño para los sistemas de control del CSTR calculados numéricamente con el modelo no lineal.	92

Nomenclatura

a, b	Coefficientes del numerador y denominador de una función de transferencia
\mathbf{a}, \mathbf{b}_u	Matrices de estado auxiliares en lazo abierto
$\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}$	Matrices de estado en lazo abierto
$\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}$	Matrices de estado en lazo abierto para estimar la acción integral
$\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_{11}, \mathbf{B}_{21}, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$	Matrices de estado en lazo cerrado
c	Número de variables de control
\mathbf{D}	Valores propios de \mathbf{K}_P ó \mathbf{K}_I ($\mathbb{R}^{c \times r}, c = r$)
$e(t)$	Señal de salida del error
$G(s)$	Función de transferencia del proceso
$\mathbf{G}(s)$	Matriz de transferencia del proceso ($\mathbb{C}^{r \times c}$)

I	Índice de desempeño cuadrático
J	Índice de funcionamiento para el problema LQR
k	Elemento dado en K_P ó K_I
k_1	Magnitud de la función forzante en el problema regulador (\mathbb{R}^r)
k_2	Magnitud de la función forzante en el problema servo (\mathbb{R}^r)
K, K	Matrices de retroalimentación: original ($\mathbb{R}^{c \times n}$) e integral ($\mathbb{R}^{c \times (n+r)}$)
K_P, K_I, K_D	Matrices de ganancias proporcional, integral y derivativa ($\mathbb{R}^{c \times r}$, $c = r$), respectivamente
l	Número de variables de estado de la señal de control
n	Número de variables de estado
P, P, \mathbb{P}	Soluciones a la ecuación de Ricatti en el problema LQR
Q, Q	Matrices de ponderación de salida: original ($\mathbb{R}^{r \times r}$) e integral ($\mathbb{R}^{r \times r}$), respectivamente
Q	Matriz de ponderación de salida para la respuesta en lazo cerrado ($\mathbb{R}^{r \times r}$)
r	Número de variables de salida medidas
r	Vector de referencia (\mathbb{R}^r)

\mathbf{R}, \mathbf{R}	Matrices de ponderación de control: proporcional ($\mathbb{R}^{r \times r}$) e integral ($\mathbb{R}^{r \times r}$), respectivamente
\mathbb{R}	Matriz de ponderación de control para la respuesta en lazo cerrado ($\mathbb{R}^{c \times c}$)
s	Número de variables exógenas
$\mathbf{S}(s)$	Matriz de sensibilidad
t	Tiempo
$\mathbf{T}(s)$	Matriz de transferencia en lazo cerrado
$u(t)$	Señal de salida del control
\mathbf{u}	Vector de control (\mathbb{R}^c)
y	Variables de salida de sistema
y, y	Vectores de salida medida: original (\mathbb{R}^r) e integral (\mathbb{R}^r), respectivamente
$Y(s)$	Transformada de Laplace de cualquier salida
\mathbf{V}	Vectores propios de \mathbf{K}_P ó \mathbf{K}_I ($\mathbb{R}^{c \times r}$, $c = r$)
\mathbf{w}	Vector de señales exógenas (\mathbb{R}^s)
\mathbf{x}, \mathbf{x}	Vectores de estado: original (\mathbb{R}^n) y ampliado (\mathbb{R}^{n+r}), respectivamente
\mathbf{z}	Vector de estado en lazo cerrado (\mathbb{R}^{n+r})

Letras griegas

α	abscisa espectral
ε	criterio de diagonalización
λ	Valores propios en lazo cerrado
ξ	Vector de estado del algoritmo de control (\mathbb{R}^l)
ϕ	Matrices de estados auxiliares en lazo abierto
ϕ_{\max}	Índice de robustez
ω	Variables de entrada de un sistema
Ω	Transformada de Laplace de cualquier entrada

Subíndices

∞	Estado estacionario final
i	Número de salidas
I	Acción integral
j	Número de entradas
m	Evaluado para una señal medida
P	Acción proporcional
r	Evaluado para un problema regulador ($w \neq 0, r=0$)

s Evaluado para un problema servo ($r \neq 0, w = 0$)

ss Evaluado para un estado estacionario

u Evaluado para una señal de control

y Evaluado para una señal de salida

Superíndices

n_1 Orden de la ecuación diferencial de los elementos de salida

n_2 Orden de la ecuación diferencial de los elementos de entrada

p Evaluado para una función impulso ($\delta(t)$)

s Evaluado para una función escalón ($1(t)$)

Introducción

Una planta es un conjunto de aparatos, máquinas y otras instalaciones (tal como un dispositivo mecánico, un horno de calefacción, un reactor químico o una nave de transporte) que requieren ser controlados con el objetivo de ejecutar una operación particular con la mayor eficiencia, debido a que en ellos se llevan operaciones dinámicas cuyas respuestas son alteradas significativamente del valor que se esperaría tener por perturbaciones externas en las variables de entrada que no se pueden evitar (Ogata, 2010; Smith & Corripio, 2006).

Los objetivos principales de los sistemas de control son: suprimir la influencia de las perturbaciones externas, asegurar la estabilidad y optimizar el desempeño del proceso (Ruiz-López *et al.*, 2006) a través de un arreglo racional de varios equipos (dispositivos de medición, válvulas, controladores, computadoras) y de la intervención humana (diseñadores, operadores); lo que favorece el incremento de calidad y volumen de producción, permite la seguridad del proceso, el cumplimiento satisfactorio de los límites ambientales y la reducción de los costos de producción, entre otras ventajas (Coughanowr & LeBlanc, 2009; Ogata, 2010).

Independientemente de las estrategias actualmente disponibles para el control de procesos industriales modernos, se estima que más del 90 % de ellas son del tipo proporcional-integral (PI) y proporcional-integral-derivativo (PID), siendo en su mayoría PI (Ablay, 2015; Ali, 2000; García-Alvarado & Ruiz-López, 2010; Mikles & Fikar, 2007; Wang & Cai, 2002; Zhong & Li, 2002). Esto no se debe solamente a su estructura simple y fácil uso, sino también a su amplio rango de aplicabilidad, ya que este tipo de controladores se pueden producir en varias versiones analógicas (eléctricos y neumáticos), así como en versiones digitales (Cetin & Iplikci, 2015; Luan *et al.*, 2014). Además, se sabe que los controladores PI se pueden diseñar para ser robustos, lo cual es una propiedad deseable para la seguridad y para evitar que el proceso presente fallos ante perturbaciones (Kadhar *et al.*, 2015).

A partir de esta situación es que se han propuesto varios métodos para la sintonización de los controladores PI/PID. El principio del controlador PI/PID es el procesamiento de su señal de entrada y el control del error en dos/tres acciones que se examinarán en más detalle en el siguiente capítulo. Sin embargo, diseñar controladores PI/PID que logren simultáneamente un correcto control de la operación del sistema (adecuado seguimiento del punto de referencia, rechazo de perturbaciones e insensibilidad ante incertidumbres del modelo) no es sencillo (Ali, 2000; Liu *et al.*, 2010; Ram & Chidambaram, 2015), especialmente en los procesos de múltiples entradas-múltiples salidas (MIMO, por sus siglas en inglés, *multiple input-multiple output*) de dinámicas con interacciones complejas entre las variables (Maghade & Patre, 2012). De esta forma, el desarrollo de nuevas estrategias de sintonización de controladores PI/PID para procesos MIMO continua siendo un tema de interés,

como lo demuestran los más de 200 métodos de sintonización desarrollados para este tipo de controles (Agrawal & Lakshminarayanan, 2003; Ali, 2000; Zhong & Li, 2002), enfocados sobre diferentes estrategias tales como *dynamic set-point weighting* (Mudi & Dey, 2011), *relative normalized gain array* (Kumar *et al.*, 2012), colocación de polos (Maghade & Patre, 2014), control por modelo interno (Luan *et al.*, 2014), especificaciones de los márgenes de fase y ganancia (Maghade & Patre, 2012), *steady-state gain matrix* (Ram & Chidambaram, 2015) y optimización multiobjetivo (Cetin & Iplikci 2015; Kadhar *et al.* 2015; Reynoso-Meza *et al.* 2012; Reynoso-Meza *et al.* 2016).

El control óptimo cuadrático es una metodología de diseño basada en espacio de estados, la cual considera índices de funcionamiento cuadrático que involucran a las señales de control y variables de estado que se minimizan para obtener un controlador de retroalimentación multivariado conocido como regulador lineal cuadrático (LQR, por sus siglas en inglés, *linear quadratic regulator*). Estudios recientes que emplean el método LQR se han enfocado en: (i) buscar una selección efectiva de las matrices de ponderación que regulan la desviación de la trayectoria de las variables de estado y la señal de control (Das *et al.*, 2013), (ii) introducir especificaciones de colocación de polos (Srivastava *et al.*, 2016) y (iii) aplicar la teoría existente a sistemas de orden fraccionario (Sadeghian *et al.*, 2014). Asimismo, el enfoque LQR se puede utilizar para obtener controladores PI/PID multivariados como se demuestra en algunos estudios (Das *et al.* 2013; He *et al.* 2000; Das *et al.* 2015). Sin embargo, la mayoría de las plantas tienen sistemas de control antiguos que no poseen la capacidad de soportar la implementación de controladores multivariados, requiriéndose

equipo especializado adicional. Por lo tanto, en la actualidad son deseables métodos de síntesis para controladores PI diagonales (Bao *et al.*, 1999; Liu *et al.*, 2010), los cuales son más fáciles de sintonizar y mantener que los controladores multivariados, son de uso generalizado (Maghade & Patre 2012; Maghade & Patre 2014) y siguen siendo utilizados como sistemas de prueba (Kadhar *et al.* 2015; Reynoso-Meza *et al.* 2012; Reynoso-Meza *et al.*, 2016).

El objetivo de este estudio es demostrar como emplear la metodología LQR para: (i) obtener controladores P y PI multilazo y (ii) generar versiones diagonales de controles existentes PI multivariados obtenidos a través de diferentes metodologías de sintonización.

I. Antecedentes

En este capítulo se introducen algunos conceptos necesarios para el desarrollo del proyecto y se presenta el estado del arte en la sintonización de controladores PI/PID. Finalmente, se formula la justificación para el desarrollo del presente estudio.

1.1. Fundamentos de los sistemas de control

La teoría de control es un campo interdisciplinario de la ingeniería y las matemáticas que estudia el comportamiento de sistemas dinámicos. Actualmente, se identifican dos enfoques: la teoría de control moderna y la teoría de control clásica; estas se contrastan en el tipo de sistemas a los cuales se pueden aplicar. La primera se ocupa del estudio de sistemas lineales o no lineales de múltiples entradas y múltiples salidas, invariantes en el tiempo o también variantes; mientras que la segunda únicamente se aplica a sistemas de una sola entrada-salida, lineales e invariantes en el tiempo (Ogata, 2010).

1.1.1. Elementos de un sistema de control

Un diagrama de bloques es una representación gráfica simplificada de un sistema físico que se emplea en la teoría de control para ilustrar y evaluar las contribuciones individuales, así como las relaciones funcionales entre los componentes del sistema. Del análisis de las variables ante las perturbaciones empleando un diagrama de bloques surgen dos clasificaciones básicas para un sistema de control: los sistemas de control en lazo abierto y los sistemas de control en lazo cerrado.

Los sistemas de control en lazo abierto son sistemas en los que la salida no afecta la acción de control. Por lo tanto, a cada entrada le corresponde una condición de referencia operativa fija; como resultado, la precisión del sistema depende únicamente de la calibración. Estos sistemas ante la presencia de perturbaciones no realizan ninguna acción de corrección; así que en la práctica, el control en lazo abierto, sólo se usa si se conoce la relación entre la salida y la entrada, y si no hay perturbaciones internas o externas (Ogata, 2010). En cambio, un sistema de control en lazo cerrado se define como un controlador que compara entre la variable controlada y un valor deseado (o referencia), y realiza una operación correctiva para hacer coincidir ambos.

Los elementos que siempre se encuentran en un sistema de control en lazo cerrado son el controlador, el instrumento de medición y el actuador. Las trayectorias reales tienen además otros elementos como líneas de señales de transmisión (neumática, eléctrica, hidráulica, óptica, etc.), transductores para la conversión de señales (por ejemplo, de analógica a digital, de neumática a eléctrica, etc.), amplificadores para aumentar señales débiles, grabadoras, interruptores de seguridad, alarmas, etc.

Todos estos elementos se muestran en el diagrama de bloques detallado en la

Figura 1.1 (Berk, 2013; Coughanowr & LeBlanc, 2009), donde la división de los bloques no se determina de forma única, puesto que esta decisión se hace en función de las señales de control que se requieren transferir unidireccionalmente. Las flechas se emplean para indicar el flujo de las señales de control (Oka & Suzuki, 2013). El punto de referencia se denota por la letra r y se considera que es positivo. Las variables de perturbación se expresan por la letra w . La señal medida se representa por la letra y_m . La señal de control se muestra como u y el error es e , que por definición es la diferencia entre la referencia y la señal medida ($e = r - y_m$).

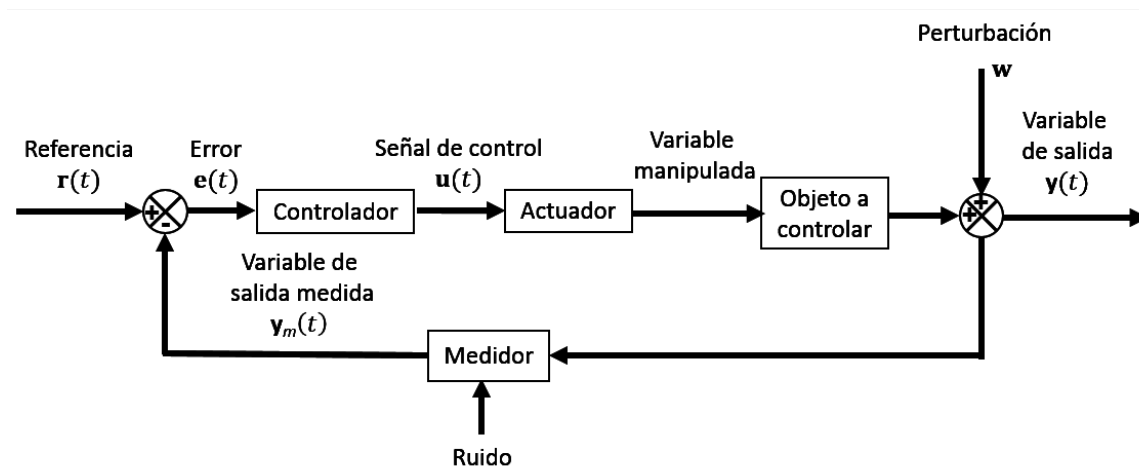


Figura 1.1. Esquema básico de un sistema de control.

1.1.2. Descripción matemática de un sistema de control

En ambos enfoques de la teoría de control, el modelado matemático es otro artilugio que se emplea para usar varias herramientas analíticas e informáticas en el estudio y síntesis de los sistemas de control. Un modelo matemático se define como

el conjunto de ecuaciones o expresiones que representan con precisión el comportamiento de los elementos que eventualmente forman parte de la dinámica de un sistema. Sin embargo, cabe considerar que cada sistema puede ser representado a través de diferentes modelos dependiendo de la perspectiva del diseñador y del sistema en particular, ya que existen modelos matemáticos más adecuados que otros para su estudio. Por ejemplo, en problemas de control óptimo, es más conveniente usar representaciones en espacio de estados pero en el análisis de un sistema lineal e invariante en el tiempo con respuestas en régimen transitorio o de frecuencia, una función de transferencia puede ser más adecuada.

1.1.2.1. Funciones de transferencia

La teoría de control clásica considera que se puede describir las relaciones de entrada-salida de los componentes de un sistema por ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo como la mostrada en la Ec. (1.1):

$$a_0 y^{(n_1)} + a_1 y^{(n_1-1)} + \dots + a_{n_1-1} \dot{y} + a_{n_1} y = b_0 \omega^{(n_2)} + b_1 \omega^{(n_2-1)} + \dots + b_{n_2-1} \dot{\omega} + b_{n_2} \omega \quad (n_1 \geq n_2) \quad (1.1)$$

donde y es la variable de salida y ω es la variable de entrada de un sistema.

A su vez, la Ec. (1.1) se puede expresar como el cociente de la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada bajo el supuesto de que todas las condiciones iniciales son cero, como se muestra en la Ec. (1.2), obteniéndose una ecuación algebraica en s de orden n_1 en el denominador y n_2 en

el numerador, conocida como función de transferencia.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{\Omega(s)} = \frac{b_0 s^{n_2} + b_1 s^{n_2-1} + \dots + b_{n_2-1} s + b_{n_2}}{a_0 s^{n_1} + a_1 s^{n_1-1} + \dots + a_{n_1-1} s + a_{n_1}} \quad (1.2)$$

Por lo tanto, una función de transferencia es un modelo matemático que emplea un método operacional de ecuaciones diferenciales para relacionar las variables de salida con las variables de entrada, independientemente de la magnitud y naturaleza de la entrada o el desplazamiento. Debido a que incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida sin considerar las variables internas, muchos sistemas físicamente diferentes pueden ser representados por funciones de transferencia idénticas y proporcionar una descripción completa de las características dinámicas del sistema, a diferencia de una descripción física.

Además, si se conoce la función de transferencia de un sistema, la salida o la respuesta del sistema se pueden estudiar para diferentes entradas con el fin de analizar la naturaleza del mismo. Pero si no fuera el caso y se desconociera, esta se puede establecer experimentalmente planteando las entradas conocidas y estudiando las salidas del sistema.

Cabe destacar que el modelo de función de transferencia está limitado a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo (LTI, por sus siglas en inglés, *linear time-invariant*) con una sola entrada y una sola salida (SISO, por sus siglas en inglés, *single input-single output*), y no proporciona ninguna información en relación a la estructura física del sistema mientras para procesos MIMO el concepto de función de transferencia se extiende como la matriz de transferencia $\mathbf{G}(s)$, la cual se puede representar por la Figura 1.2 y relaciona cada una de las entradas $\Omega_j(s)$ con las salidas $Y_i(s)$, siendo j el número de entradas e i el número de salidas.

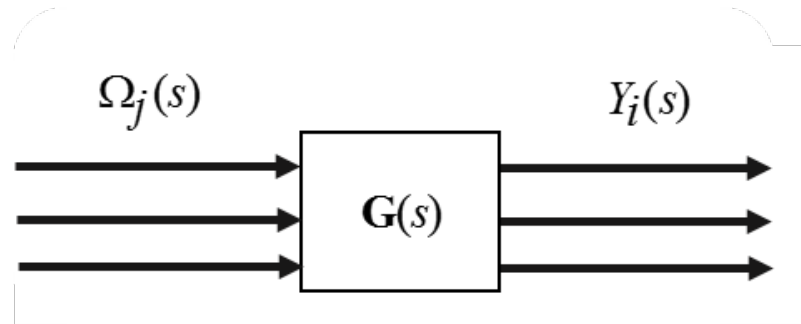


Figura 1.2. Diagrama de bloques de una matriz de transferencia.

1.1.2.2. Espacio de estados

En la teoría de control moderno los modelos matemáticos están formados por ecuaciones en espacio de estados, las cuales permiten la predicción del comportamiento futuro del sistema. Este tipo de representación surgió a partir de los años 60 para permitir el control de sistemas cada vez más complejos y con requisitos de funcionamiento cada vez más severos, como son los sistemas MIMO; aunque su desarrollo y aplicabilidad han aumentado con el acceso a las computadoras. Para definir la representación general es necesario expresar la Figura 1.1 sólo en términos de las variables involucradas en el proceso y en el algoritmo de control, como se muestra en la Figura 1.3, donde las variables indicadas son: x , el vector de variables de estado que definen el proceso; y , el vector de variables que definen la salida medida del proceso (considerando que $y_m = y$); w , el vector de variables de señales exógenas del proceso; u , el vector de variables que definen la acción de control sobre el proceso; r , el *set point* ó vector de variables que definen el valor deseado de la salida medida del proceso; y ξ , el vector de variables que definen el estado del algoritmo de control. Las funciones f_1 y f_2 se conocen como el espacio de estados del proceso, es decir,

son el conjunto de ecuaciones que definen la dinámica del mismo; mientras que las funciones g_1 y g_2 expresan el algoritmo de control.

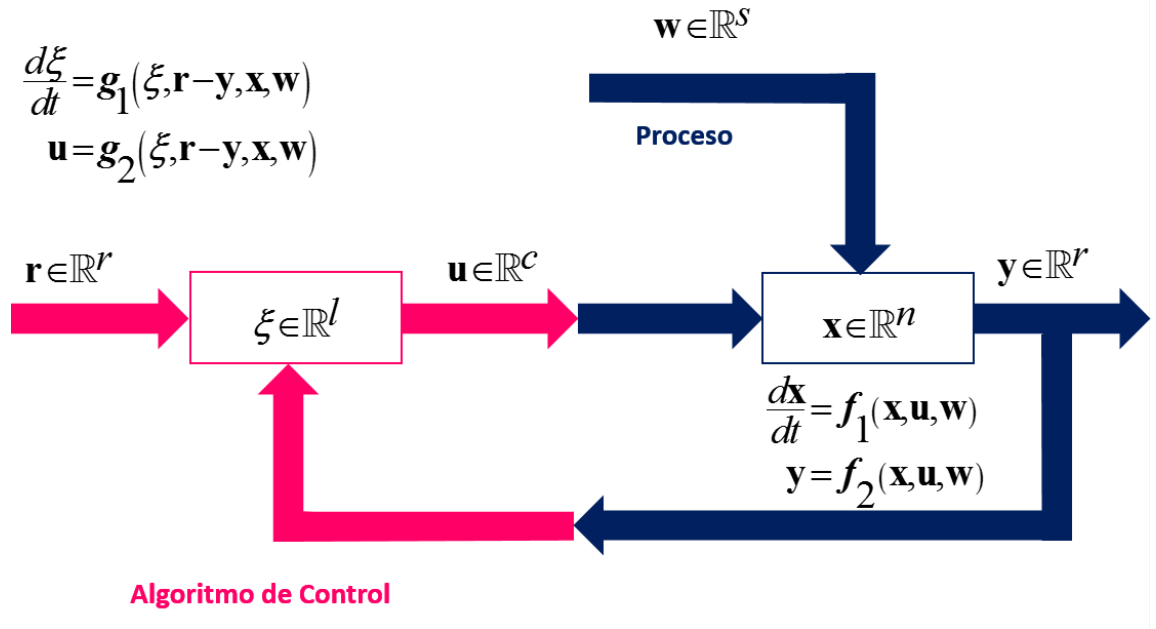


Figura 1.3. Esquema básico de un sistema de control en función de las variables involucradas.

Las funciones f_1 , f_2 , g_1 y g_2 de cualquier proceso lineal o linealizado y controlado con un algoritmo de control lineal se pueden representar por el espacio de estados lineal mostrado en las Ecs. (1.3) a (1.6):

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B_1w + B_2u \quad (1.3)$$

$$y = Cx + D_1w + D_2u \quad (1.4)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha\xi + \beta_1r + \beta_2y \quad (1.5)$$

$$u = \gamma\xi + \delta_1r + \delta_2y \quad (1.6)$$

El proceso definido por las Ecs. (1.3) y (1.4) con el control declarado en las Ecs. (1.5) y (1.6) se puede usar para obtener la representación en lazo cerrado de las Ecs. (1.7) a (1.16) (García-Alvarado & Ruiz-López, 2010):

$$\mathbf{z}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \xi^T \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbb{A}\mathbf{z} + \mathbb{B}_1\mathbf{w} + \mathbb{B}_2\mathbf{r} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{y} = \mathbb{C}_1\mathbf{z} + \mathbb{B}_{11}\mathbf{w} + \mathbb{B}_{21}\mathbf{r} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{u} = \mathbb{C}_2\mathbf{z} + \mathbb{D}_1\mathbf{w} + \mathbb{D}_2\mathbf{r} \quad (1.10)$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\delta_2\Delta_1\mathbf{C} & \mathbf{B}_2\Delta_2\gamma \\ \beta_2\Delta_1\mathbf{C} & \alpha + \beta_2\Delta_1\mathbf{D}_2\gamma \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

$$\mathbb{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\delta_2\Delta_1\mathbf{D}_1 \\ \beta_2\Delta_1\mathbf{D}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2\Delta_2\delta_1 \\ \beta_1 + \beta_2\Delta_1\mathbf{D}_2\delta_1 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

$$\mathbb{B}_{11} = [\Delta_1\mathbf{D}_1], \quad \mathbb{B}_{21} = [\Delta_1\mathbf{D}_2\delta_1] \quad (1.13)$$

$$\mathbb{C}_1 = \begin{bmatrix} \Delta_1\mathbf{C} & \Delta_1\mathbf{D}_2\gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C}_2 = \begin{bmatrix} \delta_2\Delta_1\mathbf{C} & \Delta_2\gamma \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

$$\mathbb{D}_1 = [\delta_2\Delta_1\mathbf{D}_1], \quad \mathbb{D}_2 = [\Delta_2\delta_1] \quad (1.15)$$

$$\Delta_1 = [\mathbf{I}_r - \mathbf{D}_2\delta_2]^{-1}, \quad \Delta_2 = [\mathbf{I}_c + \delta_2\Delta_1\mathbf{D}_2] \quad (1.16)$$

La representación mostrada en las Ecs. (1.7) a (1.16) se puede usar para determinar analíticamente el comportamiento de un sistema de control ante diferentes cambios de referencia o perturbaciones (García-Alvarado & Ruiz-López, 2010).

1.1.3. Características de un sistema de control

Los sistemas de control se diseñan para realizar tareas específicas. Los requerimientos impuestos sobre el controlador se detallan como especificaciones que pueden estar relacionadas con la estabilidad, el desempeño y la robustez que no conduzcan a sistemas costosos. Estas características se detallan a continuación.

1.1.3.1. Estabilidad

Al diseñar un sistema de control debemos ser capaces de predecir su comportamiento dinámico a partir del conocimiento de sus componentes. La característica más importante de un sistema de control es la estabilidad absoluta, es decir, si el sistema es estable o inestable. Un sistema de control está en equilibrio si, en ausencia de cualquier perturbación o entrada, la salida permanece en el mismo estado. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es estable si tiene una salida acotada para todas las entradas delimitadas, es decir, si la salida termina por regresar a su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. Un sistema de control lineal e invariante en el tiempo es críticamente estable si las oscilaciones de la salida continúan de forma indefinida. Por otra parte, es inestable cuando exhibe una salida no acotada para las entradas delimitadas, es decir, si la salida diverge sin límite a partir de su estado en equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial, ya que la salida se hace más grande (ya sea positivamente o negativamente) con el tiempo (Coughanowr & LeBlanc, 2009). Una función de entrada acotada es una función del tiempo que siempre se encuentra dentro de ciertos límites durante el curso del tiempo. La mayoría de los procesos son estables en lazo abierto, aunque

una excepción son los reactores químicos exotérmicos los cuales pueden ser inestables en lazo abierto. Todos los procesos reales pueden alcanzar la inestabilidad en lazo cerrado si las ganancias del controlador incrementan lo suficiente. Por lo tanto, evaluar la estabilidad es importante para el diseño de los sistemas de control que se encuentran en lazo cerrado (Luyben, 1996). Existen varios métodos para evaluar este criterio, tales como el criterio de estabilidad de Routh, el criterio de estabilidad de Nyquist, el análisis de la estabilidad de Lyapunov, el criterio de estabilidad de Hurwitz, la abscisa espectral, entre otros (Luyben, 1996; Ogata, 2010).

1.1.3.2. Desempeño

El desempeño de un sistema de control es la habilidad para controlar el proceso con exactitud, usualmente incrementa tanto como incrementan las ganancias proporcionales del controlador. Sin embargo, al acercarnos más y más a la referencia del sistema con los incrementos en las ganancias del controlador el proceso puede volverse inestable (Luyben, 1996). Un criterio para evaluar el desempeño de un controlador es la integral cuadrática del error o integral de la señal de salida (1.17), definida como el área bajo la curva del cuadrado del error entre la referencia y la salida, y la integral cuadrática del esfuerzo de control o integral de la señal de control (1.18), definida como el área bajo la curva de la señal de control al cuadrado, las cuales se pueden observar en la Figura 1.4 (Carrillo-Ahumada *et al.*, 2011; García-Alvarado & Ruiz-López, 2010; Vargas-González *et al.*, 2013).

$$I_y = \int_0^{\infty} (\mathbf{r} - \mathbf{y})^T \mathbf{Q} (\mathbf{r} - \mathbf{y}) dt \quad (1.17)$$

$$I_u = \int_0^t \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} dt \quad (1.18)$$

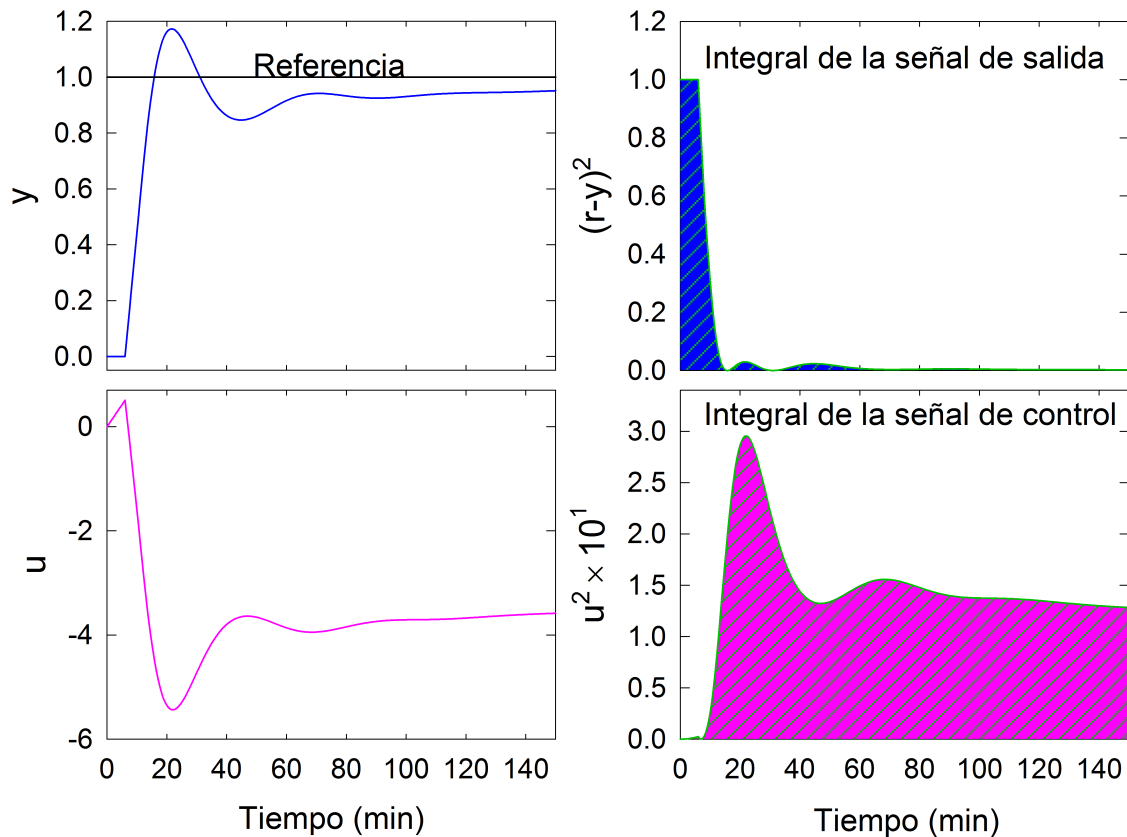


Figura 1.4. Integral de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control.

1.1.3.3. Robustez

El desempeño de un controlador depende del modelo de proceso usado para su diseño debido a que si el controlador es instalado en un proceso cuyos parámetros no son exactamente los mismos al del modelo usado para su diseño el desempeño se ve afectado. La robustez de un controlador es la tolerancia que tiene éste ante cambios en los parámetros del modelo de proceso, y decrece cuando un cambio pequeño hace al sistema inestable. Por lo tanto, siempre hay una compensación entre la robustez

y el desempeño de un sistema de control (Luyben, 1996). También existen varios métodos para evaluar este criterio, tales como el método de Skogestad-Morari, el balance entre las normas H_∞ de la salida del sistema, el índice de robustez $\phi_{\text{máx}}$, entre otros (Chen *et al.*, 2002; Doyle *et al.*, 1989; Goncalves *et al.*, 2008; Luyben, 1996; Ogata, 2010).

1.1.4. Algoritmos de control

Un controlador compara el valor actual de la señal de salida con un valor de referencia alimentado, determina el grado de desviación y produce una señal de control que ayuda a reducir la desviación a un valor cero o muy cercano a éste. El método a través del cual el controlador consigue este objetivo se llama algoritmo de control. Con base en ello los controladores se clasifican, entre otros, como (Berk, 2013; Ogata, 2010):

- Encendido-apagado (*on-off*).
- PID (proporcional-integral-derivativo).
- Lógica difusa.
- Redes neuronales artificiales (ANN, por sus siglas en inglés, *artificial neural network*).

El tipo de controlador que se use debe decidirse con base a la naturaleza de la planta y las condiciones operacionales, incluyendo consideraciones tales como seguridad, costo, disponibilidad, confiabilidad, precisión, peso y tamaño (Ogata, 2010).

1.1.4.1. Encendido-apagado (*on-off*)

Los controladores encendido-apagado u *on-off* se usan frecuentemente tanto en sistemas de control industriales como en sistemas de control doméstico; tales como, compresores de aire, motores de refrigeración, alarmas, sistemas de calentamiento y sistemas de control de nivel, etc., por ser relativamente simples, confiables y económicos debido a que mantienen al actuador sólo en una de dos posiciones: encendido o apagado (Berk, 2013; Bishop, 1992; Ogata, 2010).

En general, una acción de control *on-off*, como la mostrada en la Ec. (1.19), oscila sobre un punto de referencia que corresponde a un valor mínimo o máximo dependiendo de si la señal del error es positiva o negativa.

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_1 & \text{si } e(t) > 0 \\ \mathbf{u}_2 & \text{si } e(t) < 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

De este modo, si inicialmente el error es positivo el control se activa (*on*) hasta llegar al valor deseado, entonces el error se hace negativo y el controlador pasa a apagado (*off*) (Berk, 2013; Bishop, 1992; Ogata, 2010).

Una conmutación excesivamente frecuente puede provocar un desgaste acelerado del actuador, del elemento final de control y reducir la sensibilidad del sensor al ruido (Ogata, 2010). Por consiguiente, en algunos casos se provoca de manera intencional una brecha diferencial o histéresis (Bishop, 1992). La brecha diferencial es el rango en el que debe moverse la señal del error antes de que ocurra la conmutación, lo que provoca que la señal de salida del controlador $\mathbf{u}(t)$ conserve su valor presente hasta que la señal del error se haya desplazado ligeramente más allá de cero (Ogata, 2010). La brecha diferencial, o bien se almacena en el controlador como un dato análogo o

digital, o se incorpora en el *hardware* como un retraso físico entre el controlador y el actuador. En la práctica, la anchura de la brecha diferencial se ajusta por lo general entre el 0.5 y 2 % del rango de control (Berk, 2013).

1.1.4.2. Proporcional-integral-derivativo (PID)

De todos los controladores existentes, el control PID ha sido el que más se ha empleado por la industria en los últimos 60 años. Entre las razones de éxito del control PID se encuentra su simplicidad matemática, el mínimo requerimiento de infraestructura para su instalación, la facilidad con la que es posible sintonizarlo para un personal entrenado y la evidencia de que el control PID posee características de robustez, si el sistema es estable y las perturbaciones son acotadas (Hwang & Hsiao, 2002; Liu *et al.*, 2010; Rao *et al.*, 2003; Ruiz-López *et al.*, 2006).

Los controladores PID incluyen tres acciones de control: la proporcional, la integral y la derivativa. El funcionamiento del control PID usa la acción proporcional para estabilizar o acelerar la convergencia de la variable controlada. Sin embargo, mientras más grande sea la ganancia proporcional, más brusco es el cambio que sufre la señal de control, imposibilitando así que la acción proporcional por sí sola sea capaz de regresar a la variable de control al valor de referencia cuando existe alguna perturbación, lo que ocasiona un error permanente llamado error en estado estacionario. La acción integral intenta reducir este error a cero considerando el historial del proceso, si este es asintóticamente estable y si la perturbación es finita; aunque esto genera una respuesta más oscilatoria, que a su vez es reducida por la acción derivativa que es de naturaleza anticipadora, ya que esta no envía la señal de corrección proporcional

al error instantáneo, sino a la velocidad del cambio del error (Berk, 2013). La Ec. (1.20) representa estas tres acciones combinadas:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_P \mathbf{e}(t) + \mathbf{K}_I \int_0^t \mathbf{e}(t) dt + \mathbf{K}_D \frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} \quad (1.20)$$

donde \mathbf{K}_P es la ganancia proporcional, \mathbf{K}_I es la ganancia integral y \mathbf{K}_D es la ganancia derivativa (Ogata, 2010).

La acción derivativa de control aunque reduce o elimina el sobre-impulso también incrementa el tiempo en que la señal de salida del proceso regresa al punto de referencia y en procesos variables con perturbaciones incrementa el error, por lo que su implementación en una planta requiere de la instalación de sensores y/o filtros que puedan ayudar a reducir el ruido y permitan al controlador regular el proceso (Valentas *et al.*, 1997). Así que aun cuando se acepta su uso en la industria con un monitoreo adecuado porque puede mantener un control estable sobre una amplia gama de condiciones de funcionamiento (Liu *et al.*, 2010) se prefiere la implementación del control PI debido a que este puede obtener un mejor rendimiento que un controlador PID al emplear menos parámetros, y por lo tanto reducir la dificultad para su ajuste (HongboZou & Li, 2015; Singha & Datta, 2014; Valentas *et al.*, 1997).

1.1.4.3. Lógica difusa

Los controladores de lógica difusa utilizan sentencias formuladas en lenguaje natural en lugar de ecuaciones para el control de sistemas que son estructuralmente difíciles de modelar en un principio. Por lo tanto, para su aplicación es necesario

adaptar previamente las variables de proceso antes de introducirlas en el controlador. En la Figura 1.5 se aprecian las distintas transformaciones que sufren las variables y los datos en un lazo de control difuso (Michels *et al.*, 2006).

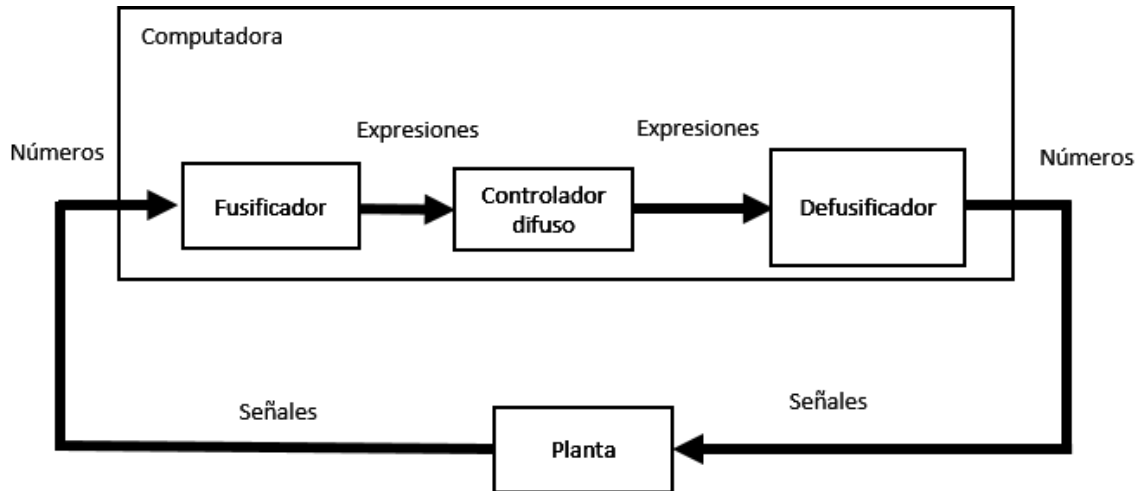


Figura 1.5. Lazo de control difuso.

El funcionamiento general consiste en la fusificación, etapa en donde se le otorga a los datos de entrada un grado de membresía dentro de las distintas expresiones posibles, en base a la correspondencia entre el estado de las variables y las funciones de pertenencia definidas para tal propósito. Desde luego, el grado de pertenencia para un determinado valor de una variable siempre será mayor en una expresión que en las demás. Posteriormente se establecen relaciones lógicas entre las variables mediante operadores lógicos tradicionales, también de naturaleza no exacta, y se definen una serie de relaciones que se interpretan a través del sentido común, lo que permite generar la actuación deseada (en estado lingüístico) que a su vez es traducida en un número (defusificación), para luego ser convertida en una señal de control, esto a través de un conversor digital-análogo de tal modo que pueda ser aplicada en el

proceso.

Los controladores de lógica difusa pueden ser clasificados de acuerdo a la aplicación. La mayoría de las aplicaciones pertenecen a la clase de los controladores PID difusos; familia de controladores que a su vez también tienen un número extenso de variaciones, tales como los de una sola entrada, dos entradas y tres entradas.

En resumen, el diseño de un controlador de lógica difusa pretende interpretar en forma intuitiva (y no numérica) el estado de ciertas variables, y con base a ello deducir de forma lógica una actuación que permita llevar la variable de control al estado deseado por lo que no siempre aseguran la comprensión del conocimiento y por ende tampoco un rendimiento óptimo (Zadeh, 1994).

1.1.4.4. Redes neuronales artificiales

Las redes neuronales artificiales han sido el resultado de los intentos de modelar los principios organizacionales del sistema nervioso central por medio de estructuras con una gran cantidad de elementos de proceso interconectados que trabajan en conjunto, llamados neuronas artificiales o nodos (Antsaklis, 1990; Resconi *et al.*, 1991). Este algoritmo de control puede representar información compleja y útil acerca del comportamiento de las entradas y las salidas, lo que lo hace diferente a los algoritmos de control tradicionales, en los cuales la información se encuentra totalmente localizada y no distribuida como en este caso. Esta cualidad hace que algunas de las principales características de las redes neuronales sean las siguientes:

1. Aprendizaje. Las redes neuronales son entrenadas mediante un algoritmo de aprendizaje que ajusta las interconexiones de la red, minimizando la diferencia

- entre la salida de la red neuronal y las salidas presentes en los patrones de entrenamiento.
2. Generalización. Las redes neuronales ya entrenadas son capaces de generar una salida correcta frente a una entrada que no ha sido utilizada durante el proceso de entrenamiento.
 3. Abstracción. Las redes neuronales poseen la capacidad de abstraer información a partir de un conjunto de entrenamiento no ideal, y recordar algo que no necesariamente se les haya enseñado.
 4. Velocidad. El tiempo requerido para obtener una salida es independiente del número de asociaciones almacenadas en la red.
 5. Multiproceso. Cada neurona de la red es un procesador que opera sobre sus entradas independientemente de los otros procesadores.

Matemáticamente las neuronas artificiales son representadas como elementos de proceso, las rutas de entrada son llamadas interconexiones, el proceso de combinar las señales y generar la salida de la neurona es modelado por una función de transferencia, la fuerza sinóptica de cada conexión es representada por un peso y el cambio en la fuerza sinóptica es definido como aprendizaje. Una red típica se muestra en la Figura 1.6, donde se puede observar como la estructura sigue una sucesión de capas totalmente conectadas entre sí. Las dos capas que tienen contacto con el exterior son la capa de entrada y la de salida. Las capas intermedias reciben el nombre de capas ocultas (Rao *et al.*, 1993; Vitthal & Rao, 1995).

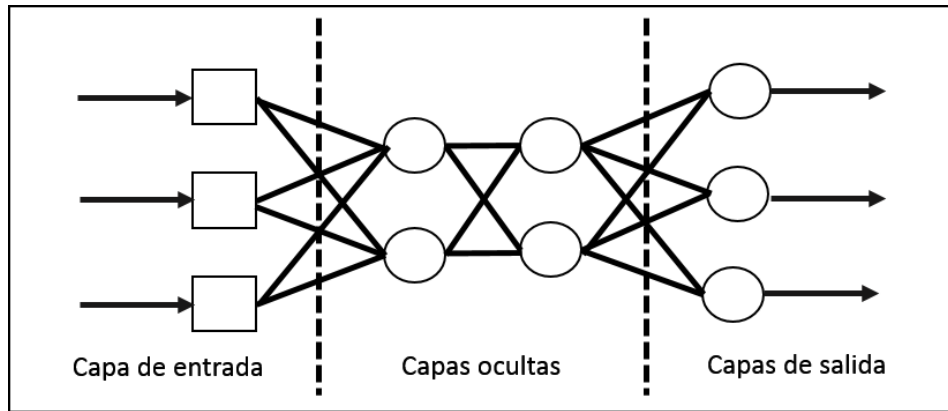


Figura 1.6. Red típica multicapas.

Las aplicaciones exitosas más relevantes incluyen tareas en las que los seres humanos fácilmente superan a las computadoras utilizando modelos del proceso, desde elementos que operan como identificadores hasta aquellos que trabajan como controladores de optimización, ejemplo de esto son el caso del procesamiento de señales, de imagen, de voz, etc. (Antsaklis, 1990; Resconi *et al.*, 1991). También, las redes neuronales se utilizan en el control adaptativo de sistemas no lineales debido a su capacidad de generalización y capacidad de representar relaciones entre entradas y salidas en forma robusta. Adicionalmente, una de las ventajas más importantes de las redes neuronales es que pueden realizar el control del sistema sin necesidad de desarrollar un modelo físico o químico del proceso. Por ejemplo, se puede controlar un reactor químico mediante el estudio de las variables que entran y que salen del reactor sin necesidad de desarrollar el sistema de ecuaciones diferenciales que regulan el cambio de masa y energía (Choudhury *et al.*, 2015; Liu *et al.*, 2010; Rao *et al.*, 1993; Vitthal & Rao, 1995). Sin embargo, el entrenamiento de la red neuronal depende en gran medida de los pesos utilizados al inicio de la metodología. Los

pesos obtenidos del entrenamiento no garantizan una solución óptima y al utilizar diferentes pesos iniciales para llevar a cabo el entrenamiento se obtienen resultados diferentes (Oz & Leu, 2011; Sivatte-Adroer *et al.*, 2016). En consecuencia, hasta la fecha existe un creciente interés en los sistemas de control que incluyen redes neuronales artificiales como elementos de control.

1.1.5. Objetivos de un sistema de control

1.1.5.1. Seguimiento de una referencia

Un sistema de control se diseña con el objetivo de optimizar el desempeño del proceso. Para esto, el sistema de control debe lograr dos objetivos principales: el seguimiento de una trayectoria previamente establecida (servo control), y el rechazo a perturbaciones (regulación) (Gao, 2013; Tian & Gao, 1998). Si estos objetivos no se logran habrá una baja productividad y costos elevados (Younkin, 2002).

Aunque no es de interés la forma en que se cumple con el seguimiento de una trayectoria, siempre y cuando se evite un comportamiento oscilatorio ante cambios frecuentes del punto de referencia, casi todos los métodos se basan en un sistema de control en lazo cerrado (Leva & Bascetta, 2007). En el caso de la acción de control PID, para un proceso de primer orden, el retardo que se genera disminuye proporcionalmente al aumento de la ganancia, no obstante, esto reduce la estabilidad (Tian & Gao, 1998). Por lo tanto, el grado en que un control PI/PID satisface o no el seguimiento de la trayectoria depende de la cantidad de retardo que pueda tolerar, la velocidad de respuesta del sistema y la cantidad de ganancia que pueda ser proporcionada por el controlador sin causar que el sistema sea inestable (Coughanowr

& LeBlanc, 2009).

1.1.5.2. Rechazo de perturbaciones

El problema de regulación ocurre cuando el punto de referencia es o bien constante o varía lentamente con el tiempo, y la tarea principal a cumplir por el controlador es mantener la variable de control en el valor deseado a pesar de las perturbaciones (Gao, 2013), entendiéndose por perturbaciones todas las adversidades externas (por ejemplo, los cambios en la dinámica y las interferencias de fuerzas desconocidas) que se propagan a través del proceso pero que no deben tener ningún efecto en la operación del sistema.

La acción de control PI/PID en este caso muestra resultados cualitativamente iguales para el comportamiento del retardo y la ganancia, que los obtenidos en el seguimiento de trayectoria. Por lo tanto, el incremento del valor de la ganancia implica un mejor rechazo a las perturbaciones para el regreso de la variable de control al punto de referencia (Coughanowr & LeBlanc, 2009).

1.2. Herramientas para diseñar controladores PI

1.2.1. Segundo método de estabilidad de Lyapunov

En un sistema de control el aspecto cuya determinación es más importante, es su estabilidad. Si el sistema es lineal e invariante con el tiempo, existen muchos criterios de estabilidad, como el criterio de estabilidad de Nyquist o la abscisa espectral. Sin embargo, si el sistema es no lineal o lineal variante con el tiempo, el método más

general para determinar la estabilidad es el segundo método de estabilidad de Lyapunov (o método directo de Lyapunov) (Ogata, 2010). Además, el segundo método de estabilidad de Lyapunov es útil para resolver problemas de control óptimo cuadrático y proporciona condiciones suficientes para definir la estabilidad del sistema dinámico general, mostrado en la Ec. (1.21), sin resolver las ecuaciones de estado (Ogata, 2010).

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad \text{para todo } t \text{ sujeto a } f(0, t) = 0 \quad (1.21)$$

Según el segundo método de estabilidad de Lyapunov, para determinar la estabilidad asintótica del sistema definido por la Ec. (1.21), debe existir una función escalar del estado $V(x, t)$, con primeras derivadas parciales continuas, que satisfaga los siguientes requisitos

$$V(x, t) > 0 \quad \text{para todo } t \text{ sujeto a } V(0, t) = 0 \quad (1.22)$$

$$-\frac{d}{dt}V(x, t) > 0 \quad \text{para todo } t \text{ sujeto a } \frac{d}{dt}V(0, t) = 0 \quad (1.23)$$

Si $V(x, t)$ satisface los requisitos mostrados en las Ecs. (1.22) y (1.23), entonces el estado de equilibrio en el origen es asintóticamente estable. La función $V(x, t)$ que satisface las condiciones del segundo método de estabilidad de Lyapunov se denomina función de Lyapunov.

1.2.2. Índices de funcionamiento

La acción de elegir los parámetros de un controlador en función de algún criterio de desempeño se conoce como sintonización. El criterio de control óptimo-robusto es

una de las herramientas más exitosas para la sintonización de controladores nuevos y eficaces. Existen dos tendencias para establecer este criterio: el balance entre las normas H_2/H_∞ de la salida del sistema (Chen *et al.*, 2002; Doyle *et al.*, 1989; Goncalves *et al.*, 2008), y el balance entre las integrales cuadráticas del error (1.17), del esfuerzo de control (1.18) y el posicionamiento de los valores propios de la matriz característica del sistema en lazo cerrado en la región D del semiplano complejo izquierdo (Carrillo-Ahumada *et al.*, 2011; García-Alvarado & Ruiz-López, 2010; Ruiz-López *et al.*, 2006; Vargas-González *et al.*, 2013).

Sin embargo, debido a que los controladores PI/PID son sintonizados en base a especificaciones en el dominio del tiempo, el balance entre las normas H_2/H_∞ no es una elección adecuada como método de sintonización (Tan *et al.*, 2002). García-Alvarado & Ruiz-López (2010) demostraron que dadas las soluciones analíticas para el sistema (1.8)-(1.9) los índices de funcionamiento del error en la salida (I_y) y del esfuerzo de control (I_u), donde \mathbb{Q} y \mathbb{R} son matrices positivas definidas, también tienen soluciones analíticas (eliminando la necesidad de realizar las simulaciones del sistema). Al estudiar la respuesta de un sistema de control ante entradas escalón, en las señales de referencia o en las perturbaciones, la integral cuadrática del error (I_y) tiene un límite finito, pero la del esfuerzo de control (I_u) no lo tiene, por lo que esta última no pertenece al espacio de Lebesgue \mathcal{L}_{2+} .

De esta forma, Vargas-González *et al.* (2013) propusieron una definición alternativa a la Ec. (1.18) para obtener un valor finito:

$$I_u = \int_0^\infty (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty)^T \mathbb{R} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty) dt \quad (1.24)$$

donde \mathbf{u}_∞ representa la señal de control cuando el sistema alcanza el estado estaciona-

rio final. Esto hace que la integral cuadrática del esfuerzo de control (I_u) pertenezca al espacio de Lebesgue \mathcal{L}_{2+} , eliminando la necesidad de especificar un tiempo final de integración. La combinación de los índices (1.17) y (1.24) junto con el posicionamiento de los valores propios en la región D se conoce como criterio $\mathcal{L}_2(y)/\mathcal{L}_2(u)/D$, y se ha propuesto como una alternativa para el diseño de un control robusto en procesos de la Ingeniería Química (Vargas-González *et al.*, 2013). Las soluciones analíticas correspondientes se muestran en la Tabla 1.1.

Un controlador sintonizado con criterio óptimo robusto en función de $\mathcal{L}_2(y)/\mathcal{L}_2(u)/D$ es un problema de optimización que plantea:

Determinar $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta_1, \delta_2)$ para un sistema de dinámica conocida $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ expresado por las Ecs. (1.3) a (1.6), tal que se minimice la función (1.25)

$$f(I_y, I_u) \longrightarrow \text{mín} \tag{1.25}$$

sujeto a:

$$\text{Re}(\lambda) < 0 \quad \forall \quad |\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_{n+k}| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+k$$

$$\phi_{\text{máx}} = \text{máx} \left(\frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)} \right) < (\phi_{\text{máx}})_{\text{deseado}}$$

donde

$$\begin{aligned} I_y &= w_1 I_{y-s}^s + w_2 I_{y-s}^r + w_3 I_{y-s}^p \\ I_u &= w_4 I_{u-s}^s + w_5 I_{u-s}^r + w_6 I_{u-s}^p \end{aligned} \tag{1.26}$$

En la Ec. (1.26), I_y es el índice del error en la salida e I_u es el índice del esfuerzo de control, definidos como en las Ecs. (1.17) y (1.24). Además, en el criterio óptimo

robusto I_y e I_u se evalúan ante diferentes entradas cuando una función forzante, sea esta escalón ó impulso, se aplica a r (problema-servo) ó w (problema regulador), lo cual produce los diferentes términos $I_{y-s}^s, I_{y-s}^r, \dots, I_{u-s}^p$ de la Ec. (1.26), elementos normados del espacio de Lebesgue \mathcal{L}_{2+} .

Esto da lugar a considerar que los I_y son antagonistas de los I_u porque al minimizar I_y se minimiza el error del control (desempeño), pero al minimizar los I_u aumenta la tolerancia del desempeño ante errores de modelado porque éstos moderan la acción de control y evitan que el estado del proceso se salga de los límites de validez del modelo (Carrillo-Ahumada *et al.*, 2011; García-Alvarado & Ruiz-López, 2010; Vargas-González *et al.*, 2013). Por lo tanto, para resolver el problema de optimización que plantea el criterio óptimo robusto se han probado distintos métodos de balanceo: minimizando $\phi_{\text{máx}}$ (García-Alvarado & Ruiz-López, 2010), utilizando frentes de Pareto (Carrillo-Ahumada *et al.*, 2011) y por equilibrio de Nash (Vargas-González *et al.*, 2013), entre otros.

Tabla 1.1. Soluciones analíticas de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control.

Índice	I_{y-s}^s	I_{u-s}^s
Definición	$\int_0^\infty (\mathbf{r} - \mathbf{y})^T \mathbf{Q} (\mathbf{r} - \mathbf{y}) dt$	$\int_0^\infty (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty)^T \mathbf{R} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty) dt$
Solución ^{1,2}	$\mathbf{\Omega}^T \mathbf{P} \mathbf{\Omega}$ ³	$\mathbf{\Omega}^T \mathbf{P} \mathbf{\Omega}$ ⁴
Ecuación asociada de Ricatti	$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{C}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0}$	$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{C}_2^T \mathbf{R} \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0}$
Índice	I_{y-s}^p	I_{u-s}^p
Definición	$\int_0^\infty (\mathbf{r} - \mathbf{y})^T \mathbf{Q} (\mathbf{r} - \mathbf{y}) dt$	$\int_0^\infty \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} dt$
Solución ^{1,2,3}	$\mathbf{\Omega}^T \mathbf{P} \mathbf{\Omega}$ ³	$\mathbf{\Omega}^T \mathbf{P} \mathbf{\Omega}$ ³
Ecuación asociada de Ricatti	$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$	$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}_2^T \mathbf{R} \mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$

¹ $\mathbf{\Omega} = \mathbb{B}_2 \mathbf{k}_2$; $\pi_y = -\mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{\Omega}$; $\pi_u = \mathbb{D}_2 \mathbf{k}_2 - \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{\Omega}$; $\Sigma_i = \mathbf{C}_i (\mathbf{A}^2)^{-1} (\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}) \mathbf{\Omega}$ ($i = 1, 2$);

²Las expresiones para el caso del regulador se obtienen sustituyendo \mathbf{k}_2 y \mathbb{B}_2 con \mathbf{k}_1 y \mathbb{B}_1 , respectivamente;

³García-Alvarado & Ruiz-López (2010); ⁴Vargas-González *et al.* (2013).

1.2.3. Reguladores lineales cuadráticos (LQR)

Los reguladores lineales cuadráticos se obtienen a partir de una metodología de diseño que minimiza índices cuadráticos de funcionamiento involucrando la señal de control y las variables de estado. Este enfoque se puede usar para obtener las ganancias multivariadas proporcionales, integrales o derivativas de un controlador P/PI/PID (Das *et al.*, 2015; He *et al.*, 2000). A continuación se presentan las bases teóricas para la obtención de controladores P/PI vía el enfoque LQR.

1.2.3.1. Controlador de acción proporcional

Los controladores proporcionales multivariados se pueden obtener por medio del enfoque LQR siguiendo los siguientes pasos:

1. Se considera el modelo lineal e invariante en el tiempo de una planta multivariada en lazo abierto descrito por las Ecs. (1.27) y (1.28):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \quad (1.27)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (1.28)$$

Este modelo difiere de la representación expresada por las Ecs. (1.3) a la (1.6) en que la salida medida disponible al control (\mathbf{y}) únicamente depende de la variable de estado (\mathbf{x}).

2. El modelo (1.27)-(1.28) estará acoplado a un controlador proporcional descrito por la Ec. (1.29):

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{K}_P(\mathbf{r} - \mathbf{y}) \quad (1.29)$$

En el caso del problema de rechazo de perturbaciones $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, por lo tanto la Ec. (1.29) se escribe como la Ec. (1.30):

$$\mathbf{u}_P = -\mathbf{K}_P \mathbf{y} = -\mathbf{K}_P \mathbf{C} \mathbf{x} = -\mathbf{K} \mathbf{x} \quad (1.30)$$

3. Se definen las matrices de ponderación definidas positivas \mathbf{Q} y \mathbf{R} que determinan el equilibrio entre el error del estado (o salida) y el gasto de energía, respectivamente, para minimizar la función costo (1.31):

$$\begin{aligned} J(\mathbf{y}, \mathbf{u}_P) &= J(\mathbf{x}, \mathbf{u}_P) = \int_0^{\infty} (\mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} + \mathbf{u}_P^T \mathbf{R} \mathbf{u}_P) dt \\ &= \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{u}_P^T \mathbf{R} \mathbf{u}_P) dt \end{aligned} \quad (1.31)$$

4. La minimización del índice (1.31) involucra la solución de la ecuación de Ricatti (1.32) de acuerdo al segundo método de Lyapunov (Ogata, 2010), para obtener \mathbf{P} :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (1.32)$$

5. Se determina el controlador óptimo de retroalimentación de estados por medio de la Ec. (1.33):

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \quad (1.33)$$

6. Se calculan las ganancias del controlador óptimo proporcional a partir de la Ec. (1.34):

$$\mathbf{K}_P = \mathbf{K} \mathbf{C}^{-1} \quad (1.34)$$

1.2.3.2. Controlador de acción proporcional-integral

Para el caso de la síntesis de controladores PI multivariados vía el enfoque LQR se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se considera el modelo lineal e invariante en el tiempo de una planta en lazo abierto dado por las Ecs. (1.35) y (1.36):

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u; \quad x(0) = 0 \quad (1.35)$$

$$y = Cx \quad (1.36)$$

donde las matrices de coeficientes del modelo ahora están definidas por las Ecs. (1.37) y (1.38):

$$x = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

Al igual que la representación descrita por las Ecs. (1.27) y (1.28), este modelo difiere de la representación expresada por las Ecs. (1.3) a la (1.6) en que la salida medida disponible al control (y) únicamente depende de la variable de estado aumentada (x).

2. La ley de control PI está dada por la Ec. (1.39):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_P + \mathbf{u}_I; \quad \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (1.39)$$

donde \mathbf{u}_I está definida por la Ec. (1.40)

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{K}_I \int_0^t (\mathbf{r} - \mathbf{y}) dt = -\mathbf{K}_I \int_0^t \mathbf{y} dt = \mathbf{K}_I \mathbf{q} \quad (1.40)$$

De tal forma que la Ec. (1.39) se puede escribir como la Ec. (1.41)

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_P \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{K}_I \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_P \mathbf{C} & \mathbf{K}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = -\mathbf{K} \mathbf{x} \quad (1.41)$$

3. Se definen las matrices de ponderación definidas positivas \mathbf{Q} y \mathbf{R} que determinan el equilibrio entre el error del estado y el gasto de energía, respectivamente, para minimizar la función costo (1.42):

$$\begin{aligned} J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) &= J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^\infty (\mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \\ &= \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \end{aligned} \quad (1.42)$$

4. La minimización del índice (1.42) involucra la solución de la ecuación de Ricatti (1.43) para obtener \mathbf{P} :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (1.43)$$

5. Se determina el controlador óptimo de retroalimentación de estados a partir de la Ec. (1.44):

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \quad (1.44)$$

6. Se calculan las ganancias del controlador óptimo PI a partir de la partición de \mathbf{K} mostrada en la Ec. (1.41).

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Generalizar la metodología LQR para obtener controladores PI multilazo aplicados a sistemas dinámicos, multivariados, lineales y no lineales.

1.3.2. Objetivos específicos

1. Generalizar la metodología LQR para la síntesis de controladores PI multilazo.
2. Estudiar el efecto de las matrices de ponderación que regulan el balance entre la señal de salida y control sobre las características de los controladores PI multivariados y multilazo sintetizados mediante el enfoque LQR.
3. Generar versiones multilazo de controles existentes PI multivariados obtenidos a través de diferentes metodologías de sintonización.
4. Comparar el funcionamiento de los controladores PI multilazo obtenidos contra otros reportados en literatura.

II. Generalización del enfoque LQR para la síntesis de controladores multilazo

En esta sección se presenta la teoría desarrollada para sintetizar controladores PI multilazo mediante la extensión del enfoque LQR, así como el procedimiento para diagonalizar controladores PI multivariados existentes sintonizados con otras metodologías.

2.1. Síntesis de controladores PI multilazo

A diferencia del procedimiento presentado en la subsección 1.2.3 para obtener controladores PI multivariados por el enfoque LQR, al extender ésta metodología para sintetizar los controladores PI multilazo, éstos no se obtienen en una sola etapa, sino que inicialmente se sintetiza un controlador proporcional multilazo y la acción

integral se le añade posteriormente. De esta forma, la síntesis de los controladores PI multilazo consiste en las dos etapas que se describen en las siguientes subsecciones.

2.1.1. Síntesis del controlador proporcional multilazo

La metodología LQR presentada en la subsección 1.2.3.1 se puede extender con la finalidad de diagonalizar el controlador proporcional multivariado (1.34) como se describe a continuación. Dada la representación del modelo lineal e invariante en el tiempo de la planta multivariada dada por las Ecs. (1.27) y (1.28) y la matriz de ponderación asociada a la señal de salida (\mathbf{Q}) se sigue el siguiente algoritmo:

1. Se define una propuesta inicial de la matriz de ponderación asociada a la señal de control \mathbf{R} .
2. Se obtiene la matriz \mathbf{P} a partir de resolver la Ec. (1.32).
3. Se determina la i -ésima estimación de las matrices multivariadas \mathbf{K}_i y \mathbf{K}_{P_i} con las Ecs. (1.33) y (1.34), respectivamente.
4. Se descompone la matriz de ganancias proporcionales multivariada \mathbf{K}_{P_i} en su forma similar de Jordan como se muestra en la Ec. (2.1):

$$\mathbf{K}_{P_i} = \mathbf{V}_i \mathbf{D}_i \mathbf{V}_i^{-1} \quad (2.1)$$

donde \mathbf{D}_i y \mathbf{V}_i son matrices que contienen los valores (en forma diagonal) y vectores propios de \mathbf{K}_{P_i} , respectivamente.

5. Se establece a la i -ésima aproximación del controlador multilazo como la matriz diagonal de valores propios \mathbf{D}_i , como se presenta en la Ec. (2.2):

$$\mathbf{K}_{P_i} = \mathbf{D}_i \quad (2.2)$$

6. Se corrige la matriz de retroalimentación despejando a la Ec. (1.34) para producir la Ec. (2.3):

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{P_i} \mathbf{C} \quad (2.3)$$

7. Se determina la matriz de ponderación \mathbf{R} para la siguiente iteración despejando a la Ec. (1.33), dando como resultado la Ec. (2.4):

$$\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_i \mathbf{K}_i^{-1} \quad (2.4)$$

8. Se repiten los pasos 2 a 7 hasta que \mathbf{K}_{P_i} sea una matriz diagonal.

El diagrama del sistema de control en lazo cerrado asociado a esta metodología se muestra en la Figura (2.1). Debe notarse que el algoritmo de diagonalización es un procedimiento iterativo que se basa en remplazar a \mathbf{K}_P con su forma similar normal de Jordan estimando la matriz de ponderación \mathbf{R} que permitiría obtener un controlador multilazo.

2.1.2. Síntesis del controlador PI multilazo

Una vez sintetizada la acción proporcional, la planta se considera en lazo cerrado con esta acción de control pero en lazo abierto con la acción integral, de tal forma

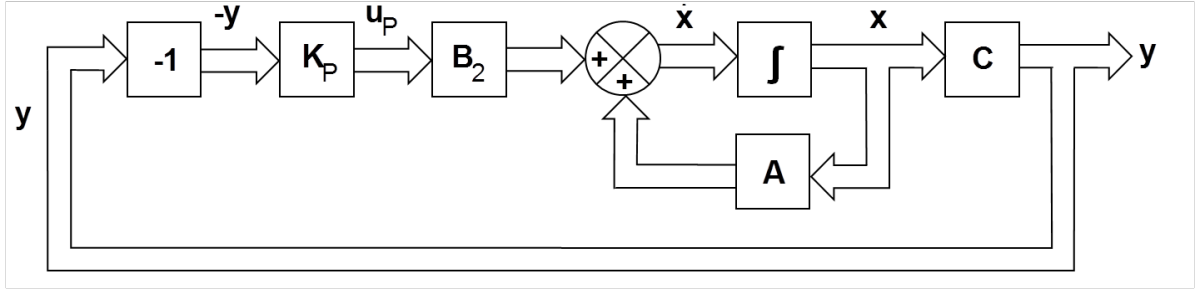


Figura 2.1. Diagrama en lazo cerrado asociado a la síntesis de una acción de control proporcional vía la generalización del enfoque LQR.

que el controlador PI multilazo se obtiene como se describe enseguida. Inicialmente se forma el espacio de estados mostrado en las Ecs. (2.5) y (2.6):

$$\dot{x} = Ax + B_1 K_P r + B_2 u_1 \quad (2.5)$$

$$y = Cx \quad (2.6)$$

donde las matrices de coeficientes del modelo están definidas por las Ecs. (2.7) y (2.8)

$$x = \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}; \quad y = [q]; \quad A = \begin{bmatrix} A - B_2 K_P C & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

De la misma forma que en la síntesis de la acción de control proporcional, se define la matriz de ponderación de la salida Q. En este caso, Q penaliza el error en la integral de la salida. A continuación se aplica el siguiente algoritmo:

1. Se define una propuesta inicial de la matriz de ponderación asociada a la señal de control integral R.

2. Se resuelve la ecuación de Ricatti (2.9):

$$A^T P + PA - PB_2 R^{-1} B_2^T P + C^T Q C = 0 \quad (2.9)$$

3. La solución anterior (P) se emplea para determinar la i -ésima estimación de la Ec. (2.10) y calcular las ganancias óptimas integrales \mathbf{K}_{Ii} a partir de la Ec. (2.11):

$$K_i = R^{-1} B_2^T P \quad (2.10)$$

$$\mathbf{K}_{Ii} = -K_i C^{-1} \quad (2.11)$$

Este procedimiento permite obtener las ganancias óptimas que minimizan la función costo (2.12):

$$J(\mathbf{q}, u_I) = \int_0^{\infty} (\mathbf{q}^T Q \mathbf{q} + u_I^T R u_I) dt \quad (2.12)$$

4. Se descompone la matriz de ganancias integrales multivariada \mathbf{K}_{Ii} en su forma similar de Jordan como se muestra en la Ec. (2.13)

$$\mathbf{K}_{Ii} = \mathbf{V}_i \mathbf{D}_i \mathbf{V}_i^{-1} \quad (2.13)$$

5. Se establece la i -ésima aproximación del controlador multilazo como la matriz diagonal de valores propios \mathbf{D}_i dada por la Ec. (2.14)

$$\mathbf{K}_{Ii} = \mathbf{D}_i \quad (2.14)$$

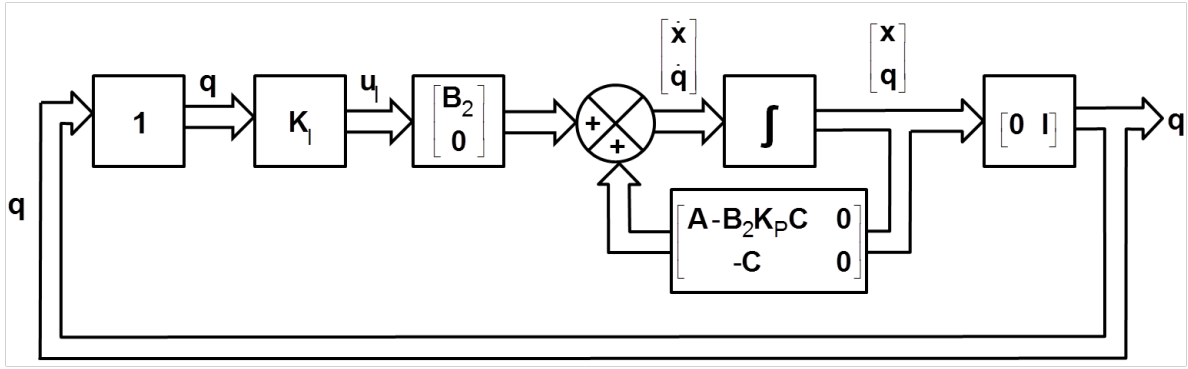


Figura 2.2. Diagrama en lazo cerrado asociado a la síntesis de una acción de control integral vía la generalización del enfoque LQR.

6. Se corrige la matriz de retroalimentación determinando la Ec. (2.15) de forma similar al procedimiento para obtener la acción proporcional:

$$K_i = \mathbf{K}_{I_i} C \quad (2.15)$$

7. Se determina la matriz de ponderación R para la siguiente iteración como la Ec. (2.16):

$$R_{i+1} = B_2^T P_i K_i^{-1} \quad (2.16)$$

8. Se repiten los pasos 2 a 7 hasta que \mathbf{K}_{I_i} sea una matriz diagonal.

El diagrama del sistema en lazo cerrado asociado a este procedimiento se muestra en la Figura (2.2), donde se puede observar que la acción integral se obtiene como la matriz de ganancias de retroalimentación de la salida integral (q) mientras se minimiza la función costo (2.12).

2.2. Diagonalización de controladores PI existentes

Una característica importante de los algoritmos de diagonalización propuestos es que pueden usarse para obtener la versión multilazo de controladores multivariados. Por lo tanto, el ingeniero de control podría aplicar otras teorías para la síntesis de controladores PI multivariados y diagonalizarlos en una etapa posterior si no fuera posible implementarlos. En este caso el controlador existente no tiene matrices de ponderación asociadas dado que no fue obtenido mediante el enfoque LQR, así que éstas deben estimarse antes de aplicar los algoritmos de diagonalización presentados en las secciones 2.1.1 y 2.1.2. Los siguientes algoritmos se pueden usar para obtener las matrices \mathbf{R} y \mathbf{R} , las cuales producirían el controlador PI multivariado si éste se hubiera sintetizado por el enfoque LQR.

2.2.1. Matriz de ponderación de control para una acción proporcional existente

Dados \mathbf{A} , \mathbf{B}_2 , \mathbf{C} , \mathbf{K}_P , \mathbf{Q} y una propuesta inicial de \mathbf{R}_i ($i = 1$):

1. Se obtiene la matriz de retroalimentación \mathbf{K} despejando a la Ec. (1.34) a partir de la ganancia de control proporcional \mathbf{K}_P conocida para dar la Ec. (2.17):

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_P \mathbf{C} \quad (2.17)$$

2. Se resuelve la Ec. (1.32) para obtener la i -ésima estimación de \mathbf{P}_i .
3. Se determina la matriz de ponderación \mathbf{R} para la siguiente iteración despejando

a la Ec. (1.33) para producir la Ec. (2.18):

$$\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_i \mathbf{K}_i^{-1} \quad (2.18)$$

4. Se repiten los pasos 2 a 3 hasta que los valores de \mathbf{R} no cambien entre iteraciones consecutivas.

Posteriormente, el controlador proporcional multivariado se diagonaliza como se mencionó en la sección 2.1.1 una vez que se determinó \mathbf{R} .

2.2.2. Matriz de ponderación de control para una acción integral existente

Dados \mathbf{A} , \mathbf{B}_2 , \mathbf{C} , \mathbf{K}_I , \mathbf{Q} y una propuesta inicial de \mathbf{R}_i ($i = 1$):

1. Se obtiene la matriz de retroalimentación \mathbf{K} despejando a la Ec. (2.11) a partir de la \mathbf{K}_I conocida con la Ec. (2.19):

$$\mathbf{K} = -\mathbf{K}_I \mathbf{C} \quad (2.19)$$

2. Se resuelve la Ec. (2.9) para obtener la i -ésima aproximación de \mathbf{P}_i .
3. Se calcula la matriz de ponderación \mathbf{R} para la siguiente iteración a partir de la Ec. (2.16).
4. Se repiten los pasos 2 a 3 hasta que los valores de \mathbf{R} no cambien entre iteraciones consecutivas.

Posteriormente, la acción integral multivariada se puede diagonalizar tal como se estableció en la sección 2.1.2 una vez que se determinó \mathbf{R} .

2.3. Criterio de diagonalización

El procedimiento de diagonalización se considera terminado cuando la suma de los elementos no diagonales de \mathbf{K}_P y \mathbf{K}_I satisfacen la Ec. (2.20)

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r k_{.ij} < (r^2 - r) \varepsilon \quad \text{para } i \neq j \quad (2.20)$$

donde k representa una ganancia proporcional (k_P) o integral (k_I), según sea el caso.

El parámetro ε determina el valor debajo del cual un elemento dado en \mathbf{K}_P y \mathbf{K}_I se considera como cero ($\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$ en este estudio).

III. Metodología

En esta sección se presentan los casos de estudio usados para el diseño de los controladores PI y la diagonalización de controladores multivariados existentes. Asimismo, se describe el procedimiento seguido para estudiar el efecto de las matrices de ponderación que regulan el balance entre la señal de salida y control sobre diferentes características de los controladores PI multivariados y multilazo obtenidos mediante la generalización del enfoque LQR propuesto en la sección anterior.

3.1. Síntesis de controladores PI multilazo vía la generalización del enfoque LQR

3.1.1. Casos de estudio

3.1.1.1. Columna de destilación de Wardle y Wood (WW)

En este trabajo se consideró como primer sistema la columna de destilación binaria etanol-agua de Wardle y Wood con dos entradas y dos salidas, y la siguiente

representación en el dominio de Laplace (Luyben, 1986):

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.126e^{-6s}}{60s+1} & \frac{-0.101e^{-12s}}{(48s+1)(45s+1)} \\ \frac{0.094e^{-8s}}{38s+1} & \frac{-0.12e^{-8s}}{35s+1} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

La matriz de transferencia (3.1) se escribió en el espacio de estados estándar de las Ecs. (1.27) y (1.28), aproximando cada término del tiempo de retardo con cuatro modelos en serie de primer orden. En este sistema $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{21 \times 1}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ y los términos distintos de cero de las matrices de estado $\mathbf{A} = \phi^{-1}\mathbf{a}$ y $\mathbf{B}_2 = \phi^{-1}\mathbf{b}_u$ son: $\phi_{11} = \phi_{22} = \phi_{33} = \phi_{44} = 1.5$, $\phi_{55} = 60$, $\phi_{66} = \phi_{77} = \phi_{88} = \phi_{99} = \phi_{17.17} = \phi_{18.18} = \phi_{19.19} = \phi_{20.20} = 2$, $\phi_{10.10} = 38$, $\phi_{11.11} = \phi_{12.12} = \phi_{13.13} = \phi_{14.14} = 3$, $\phi_{15.15} = 48$, $\phi_{16.16} = 45$, $\phi_{21.21} = 35$, $a_{ii} = -1$ ($\forall i = 1, \dots, 21$), $a_{21} = a_{32} = a_{43} = a_{76} = a_{87} = a_{98} = a_{12.11} = a_{13.12} = a_{14.13} = a_{16.15} = a_{18.17} = a_{19.18} = a_{20.19} = 1$, $a_{54} = 0.126$, $a_{10.9} = 0.094$, $a_{15.14} = -0.101$, $a_{21.20} = -0.12$, $b_{u11} = b_{u61} = b_{u11.2} = b_{u17.2} = 1$ y $c_{15} = c_{1.16} = c_{2.10} = c_{2.21} = 1$. En este sistema \mathbf{B}_1 no existe.

Para evaluar las propiedades de robustez del sistema de control a todos los parámetros de la Ec. (3.1) se les aplicó un aumento o disminución aleatoria del 10% de sus valores originales, generando el modelo perturbado (3.2):

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.139e^{-5.4s}}{54s+1} & \frac{-0.111e^{-10.8s}}{(52.8s+1)(49.5s+1)} \\ \frac{0.103e^{-7.2s}}{41.8s+1} & \frac{-0.108e^{-8.8s}}{31.5s+1} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

3.1.1.2. Columna de destilación de Wood y Berry (WB)

Como segundo caso de estudio se consideró la columna de destilación metanol-agua de Wood y Berry (Luyben, 1986), cuya representación en el dominio de Laplace es

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{12.8e^{-s}}{16.7s+1} & \frac{-18.9e^{-3s}}{21s+1} \\ \frac{6.6e^{-7s}}{10.9s+1} & \frac{-19.4e^{-3s}}{14.4s+1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La representación en espacio de estados de la Ec. (3.3) se escribió en la forma estándar de las Ecs. (1.27) y (1.28) cuando $\mathbf{A} = \phi^{-1}\mathbf{a}$ y $\mathbf{B}_2 = \phi^{-1}\mathbf{b}_u$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{18 \times 1}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ y los términos de las matrices distintos de cero como: $\phi_{11} = \phi_{33} = \phi_{44} = \phi_{55} = \phi_{66} = \phi_{77} = \phi_{88} = \phi_{99} = \phi_{11.11} = \phi_{12.12} = \phi_{13.13} = \phi_{15.15} = \phi_{16.16} = \phi_{17.17} = 1$, $\phi_{22} = 16.7$, $\phi_{10.10} = 10.9$, $\phi_{14.14} = 21$, $\phi_{18.18} = 14.4$, $a_{ii} = -1$ ($\forall i = 1, \dots, 18$), $a_{43} = a_{54} = a_{65} = a_{76} = a_{87} = a_{98} = a_{12.11} = a_{13.12} = a_{16.15} = a_{17.16} = 1$, $a_{21} = 12.8$, $a_{10.9} = 6.6$, $a_{14.13} = -18.9$, $a_{18.17} = -19.4$, $b_{u11} = b_{u31} = b_{u11.2} = b_{u15.2} = 1$ y $c_{12} = c_{1.14} = c_{2.10} = c_{2.18} = 1$.

Las propiedades de robustez del sistema de control se evaluaron siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior, produciendo en este caso el modelo perturbado de la Ec. (3.4):

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{11.52e^{-0.9s}}{18.37s+1} & \frac{-20.79e^{-3.3s}}{18.9s+1} \\ \frac{5.94e^{-7.7s}}{11.99s+1} & \frac{-17.46e^{-3.3s}}{12.96s+1} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

La degradación del desempeño de un controlador PI dado entre el sistema original (el usado en la sintonización) y el perturbado se calculó a partir de la diferencia relativa de los índices de funcionamiento cuadrático entre ambos sistemas por medio

de las Ecs. (3.5) y (3.6) para ambos casos de estudio.

$$e(I_y) = 100 \times \frac{(I_y)_{perturbado} - (I_y)_{original}}{(I_y)_{original}} \quad (3.5)$$

$$e(I_u) = 100 \times \frac{(I_u)_{perturbado} - (I_u)_{original}}{(I_u)_{original}} \quad (3.6)$$

3.1.2. Análisis de las matrices de ponderación en la síntesis de controladores PI multilazo

En este trabajo, los controladores P y PI multilazo se obtienen de las combinaciones resultantes de explorar los elementos diagonales de las matrices de ponderación \mathbf{R} y \mathbf{R} en un intervalo propuesto. En el caso de la columna de destilación de Wardle y Wood, los controladores proporcionales multivariados y multilazo se evaluaron definiendo a $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_2$ mientras los elementos diagonales de la matriz \mathbf{R} se exploraron en el intervalo $-4 \leq \log(r_{ii}) \leq 1$ ($i = 1, 2$). La acción integral se obtuvo definiendo a $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_2$ y explorando los elementos de \mathbf{R} en el rango $-2 \leq \log(r_{ii}) \leq 2$ ($i = 1, 2$). Por otro lado, los controladores proporcionales multivariados y multilazo de la columna de destilación de Wood y Berry se evaluaron definiendo $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_2$, mientras que los elementos diagonales en la matriz \mathbf{R} se exploraron en el intervalo $0 \leq \log(r_{ii}) \leq 2$ ($i = 1, 2$). La acción integral se obtuvo definiendo a $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_2$ y explorando los elementos de \mathbf{R} para $2 \leq \log(r_{ii}) \leq 5$ ($i = 1, 2$). En ambos sistemas se usó un tamaño de paso logarítmico de 0.1 (base 10) durante la exploración de las matrices de ponderación de las acciones proporcional e integral.

3.1.3. Caracterización de los controladores PI multilazo

Una vez que se determinó la importancia relativa de cada salida con \mathbf{Q} (ó Q) todos los controladores son óptimos para el rango seleccionado de la matriz de control \mathbf{R} (ó R), es decir, cada uno de ellos minimiza los índices de funcionamiento (1.31) y (2.12). Sin embargo, no todos los controladores multilazo obtenidos exhiben otras características requeridas por el diseñador, tales como un balance adecuado entre seguir la referencia, rechazar perturbaciones o hacer uso de una mínima cantidad de energía. Por lo tanto, para refinar la sintonización de los controladores PI multilazo sintetizados vía la generalización del enfoque LQR se consideró la representación en espacio de estados y lazo cerrado de la planta descrita en las Ecs. (1.27) y (1.28), equipada con un controlador P o PI como las Ecs. (3.7) a (3.9):

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbb{B}_1\mathbf{w} + \mathbb{B}_2\mathbf{r} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_1\mathbf{z} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbb{D}_1\mathbf{w} + \mathbb{D}_2\mathbf{r} \quad (3.9)$$

donde las matrices para un controlador P se definen como las Ecs. (3.10) y (3.11):

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}; \mathbf{A} = [\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_P\mathbf{C}]; \mathbb{B}_1 = \mathbf{B}_1; \mathbb{B}_2 = \mathbf{B}_2\mathbf{K}_P; \mathbf{C}_1 = \mathbf{C} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{C}_2 = -\mathbf{K}_P\mathbf{C}; \mathbb{D}_1 = \mathbf{0}; \mathbb{D}_2 = \mathbf{K}_P \quad (3.11)$$

Por otra parte, para un controlador PI, las matrices se representan por las Ecs. (3.12) y (3.13)

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}_P\mathbf{C} & \mathbf{B}_2\mathbf{K}_I \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \mathbb{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \mathbb{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2\mathbf{K}_P \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbb{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \mathbb{C}_2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_P \mathbf{C} & \mathbf{K}_I \end{bmatrix}; \mathbb{D}_1 = \mathbf{0}; \mathbb{D}_2 = \mathbf{K}_P \quad (3.13)$$

Para dichos sistemas en lazo cerrado se evaluaron los siguientes criterios adicionales:

1. Los índices de funcionamiento cuadrático I_y e I_u para el controlador PI considerando las expresiones de la Tabla 1.1, reportadas por García-Alvarado & Ruiz-López (2010) y Vargas-González *et al.* (2013). Debido a que un sistema con acción proporcional puede exhibir error en estado estacionario, la integral del cuadrado del error no sería finita y el valor final de la señal de control dependería de las ganancias seleccionadas. Estas características hacen que las expresiones reportadas por García-Alvarado & Ruiz-López (2010) y Vargas-González *et al.* (2013) no se puedan usar para el sistema de control equipado con la acción proporcional. Por lo tanto, en este proyecto se desarrollaron las soluciones aplicables a este caso particular siguiendo la metodología presentada por dichos autores. Los resultados se resumen en la Tabla 3.1, mientras que el procedimiento para obtenerlos se presenta en el Apéndice A.

Los índices de funcionamiento cuadrático I_y e I_u se evaluaron para el problema de seguimiento de referencia ante una función escalón con $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, usando un tiempo final de integración de 200 min para evaluar las integrales del controlador proporcional en ambas columnas de destilación.

2. La abscisa espectral o máxima parte real de los valores propios de la matriz característica en lazo cerrado $[\lambda(\mathbb{A})]$, que mide la distancia relativa a la inesta-

bilidad del sistema (el sistema es estable si $\alpha < 0$), definida por la Ec. (3.14):

$$\alpha = \text{máx} (\text{Re} (\lambda (\mathbb{A}))) \quad (3.14)$$

3. La sensibilidad teórica del controlador ante incertidumbres del modelo calculando las normas H_∞ de la matriz de transferencia en lazo cerrado $\mathbf{T}(s)$ y la matriz de sensibilidad $\mathbf{S}(s)$, dadas por las Ecs. (3.15) y (3.16), respectivamente:

$$\mathbf{T}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} [\mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)] \quad (3.15)$$

$$\mathbf{S}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} \quad (3.16)$$

4. El índice de robustez, $\phi_{\text{máx}}$ propuesto por Ruiz-López *et al.* (2006) y dado en la Ec. (3.17):

$$\phi_{\text{máx}} = \text{máx} \left(\left| \frac{\text{Im} (\lambda (\mathbb{A}))}{\text{Re} (\lambda (\mathbb{A}))} \right| \right) \quad (3.17)$$

Tabla 3.1. Soluciones analíticas propuestas de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control para un controlador proporcional.

Índice	I_{y-s}^s	I_{u-s}^s
Definición	$\int_0^t (\mathbf{r} - \mathbf{y})^T \mathbf{Q} (\mathbf{r} - \mathbf{y}) dt$	$\int_0^t \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} dt$
Solución ^{1,2}	$(\mathbf{k}_2 - \boldsymbol{\pi}_y)^T \mathbf{Q} (\mathbf{k}_2 - \boldsymbol{\pi}_y) t +$ $(\boldsymbol{\pi}_y - \mathbf{k}_2)^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\Sigma}_1 +$ $\boldsymbol{\Sigma}_1^T \mathbf{Q} (\boldsymbol{\pi}_y - \mathbf{k}_2) +$ $\boldsymbol{\Omega}^T (\mathbf{P} - e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{P} e^{\mathbf{A} t}) \boldsymbol{\Omega}$	$\boldsymbol{\Omega}^T (\mathbf{P} - e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{P} e^{\mathbf{A} t}) \boldsymbol{\Omega} +$ $\boldsymbol{\Sigma}_2^T \mathbf{R} \boldsymbol{\pi}_u + \boldsymbol{\pi}_u^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Sigma}_2 +$ $\boldsymbol{\pi}_u^T \mathbf{R} \boldsymbol{\pi}_u t$
Ecuación asociada de Ricatti	$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} +$ $(\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{C}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0}$	$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} +$ $(\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{C}_2^T \mathbf{R} \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0}$

¹ $\boldsymbol{\Omega} = \mathbb{B}_2 \mathbf{k}_2$; $\boldsymbol{\pi}_y = -\mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Omega}$; $\boldsymbol{\pi}_u = \mathbb{D}_2 \mathbf{k}_2 - \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Omega}$; $\boldsymbol{\Sigma}_i = \mathbf{C}_i (\mathbf{A}^2)^{-1} (e^{\mathbf{A} t} - \mathbf{I}) \boldsymbol{\Omega}$ ($i = 1, 2$);

²Las expresiones para el caso del regulador se obtienen sustituyendo \mathbf{k}_2 y \mathbb{B}_2 con \mathbf{k}_1 y \mathbb{B}_1 , respectivamente.

Los criterios antes descritos también se estimaron para los controladores multivariados (aquellos obtenidos antes de la diagonalización) para evaluar el efecto de la reducción de parámetros con respecto a las propiedades del sistema de control inicial usando los mismos cambios de referencia. Estos mismos criterios se calcularon para diversos controladores PI multilazo reportados en literatura (Jung *et al.* 1999; Kadhar *et al.* 2015; Lee *et al.* 1998; Lee & Choi 1993; Loh *et al.* 1993; Luyben 1986; Reynoso-Meza *et al.* 2012; Vu & Lee 2008; Reynoso-Meza *et al.* 2016) con la

finalidad de comparar su funcionamiento contra los obtenidos en este proyecto.

3.2. Diagonalización de controladores PI multivariados existentes

3.2.1. Reactor CSTR no lineal

Para esta etapa se consideró el reactor CSTR no lineal con múltiples estados estacionarios donde ocurre una reacción exotérmica de primer orden y que ha sido estudiado por varios autores (Carrillo-Ahumada *et al.*, 2011; Chen *et al.*, 2002; García-Alvarado & Ruiz-López, 2010; Ruiz-López *et al.*, 2006), el cual es descrito por las Ecs. (3.18) a (3.19):

$$\frac{dC}{dt} = \frac{F}{V} (C_f - C) - k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) C \quad (3.18)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F}{V} (T_f - T) + \frac{(-\Delta H)}{\rho C_P} k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) C + \dots$$

$$\frac{\rho_c C_{pc} F_c}{\rho C_p V} \left(1 - \exp\left(\frac{-h}{\rho_c C_{pc} F_c}\right)\right) (T_{cf} - T) \quad (3.19)$$

donde $F = 100 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$, $F_c = 103.41 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$, $V = 100 \text{ L}$, $C_f = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $k_0 = 7.2 \times 10^{10} \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$, $E/R = 10^4 \text{ K}$, $T_f = 350 \text{ K}$, $T_{cf} = 350 \text{ K}$, $\rho = \rho_c = 1000 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$, $C_p = C_{pc} = 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\Delta H = -2.5 \text{ cal} \cdot \text{mol}^{-1}$, $h = 7 \times 10^5 \text{ cal} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. En este sistema la corriente de alimentación (F) y el caudal de enfriamiento (F_c) se usan para controlar la concentración de reactivo (C) y la temperatura (T) a la salida del reactor. Adicionalmente, se consideraron límites de saturación en F y F_c de $\pm 40 \text{ mol} \cdot \text{L} \cdot \text{min}^{-1}$ respecto a sus valores en estado estacionario.

Las Ecs. (3.18) y (3.19) se pueden expresar en el espacio de estados de las Ecs. (1.27) y (1.28) con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ y los términos distintos de cero de las matrices de estado dados por: $a_{11} = -9.9979$, $a_{12} = -4.6787 \times 10^{-2}$, $a_{21} = 1799.6$, $a_{22} = 7.3245$, $b_{w11} = 1$, $b_{w22} = 1$, $b_{u11} = 9 \times 10^{-3}$, $b_{u21} = -8.8540 \times 10^{-1}$, $b_{u22} = -8.7750 \times 10^{-1}$, $c_{11} = 1$ y $c_{22} = 1$.

3.2.2. Análisis de las matrices de ponderación en la síntesis de controladores PI multilazo

Se aplicó la metodología descrita en la sección (2.2) para diagonalizar los controladores multivariados PI propuestos por Chen *et al.* (2002) y Ruiz-López *et al.* (2006) para este sistema, con las siguientes matrices de ponderación

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-3} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

La selección de las matrices \mathbf{Q} y \mathbf{Q} se realizó considerando que la concentración de salida (C) varía en el orden de magnitud de 10^{-1} y los cambios de temperatura (T) ocurren en el orden de 10^1 , mientras que en la primera iteración del procedimiento de diagonalización las matrices \mathbf{R} y \mathbf{R} se consideraron como matrices identidad.

3.2.3. Caracterización de los controladores PI multilazo

Para este sistema, los índices de funcionamiento cuadrático I_y y I_u se evaluaron para los problemas de seguimiento de referencia y rechazo de perturbaciones ante una entrada escalón usando $\mathbf{k}_1^T = \begin{bmatrix} 0.05 & 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_2^T = \begin{bmatrix} 0.005 & 5 \end{bmatrix}$. Los controladores

multilazo obtenidos se compararon también con sus controladores de partida a través de los índices de funcionamiento cuadrático I_y e I_u . Además, se compararon los controladores multilazo PI sintetizados vía la generalización del enfoque LQR contra el controlador PI multilazo obtenido por la metodología BLT (Luyben, 1986), el cual fue reportado por Chen *et al.* (2002).

3.3. Herramientas de cómputo

La implementación de la metodología LQR; el procedimiento de diagonalización; el cálculo de los índices de funcionamiento cuadrático (I_y y I_u), de la abscisa espectral (α), de las normas H_∞ y del índice de robustez ($\phi_{\text{máx}}$) y las simulaciones se realizaron con el programa Matlab R2013b y sus herramientas adicionales Simulink y Control System Toolbox 9.6 (MathWorks Inc., Natick, MA, USA).

IV. Resultados y discusión

4.1. Características del procedimiento de diagonalización

Como se describe en secciones anteriores, el desempeño de los controladores obtenidos vía la generalización del enfoque LQR depende de la selección de la matriz de ponderación \mathbf{R} ó R , que determina el balance entre el error de la salida y la energía usada por la acción de control proporcional, como se muestra en las Figuras 4.1-4.8 para las columnas de destilación de WW y WB. De acuerdo a estas figuras, los controladores proporcionales que tienen menor error en la salida existen varios métodos para evaluar este criterio, tales como el criterio la norma espectral, entre otros (Luyben, 1996; Ogata, 2010). Los controladores de la Figura 4.1 y 4.3 emplean mayor esfuerzo de control (Figura 4.2 y 4.4) para ambos sistemas. En el caso de la columna de WB, algunas combinaciones de los elementos de la matriz de ponderación \mathbf{R} proporcionan controladores inestables, los cuales están marcados en las Figuras 4.3, 4.4, 4.7 y 4.8 por la región en gris.

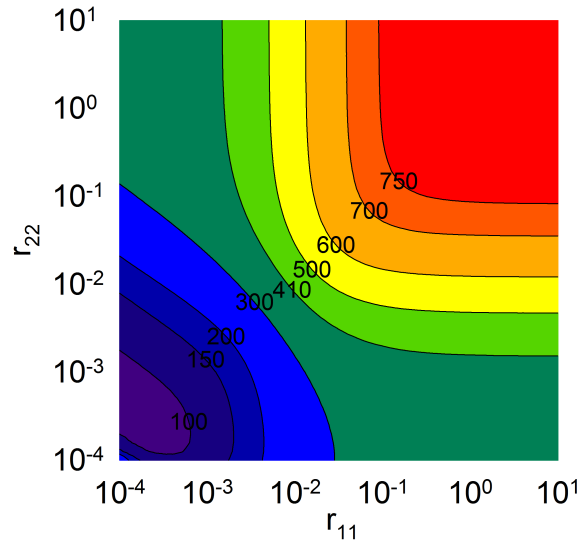


Figura 4.1. Índice del error (I_{y-s}^s) de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 1]$, $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 0]$ y $\mathbf{k}_2^T = [0 \ 1]$ en la columna de WW.

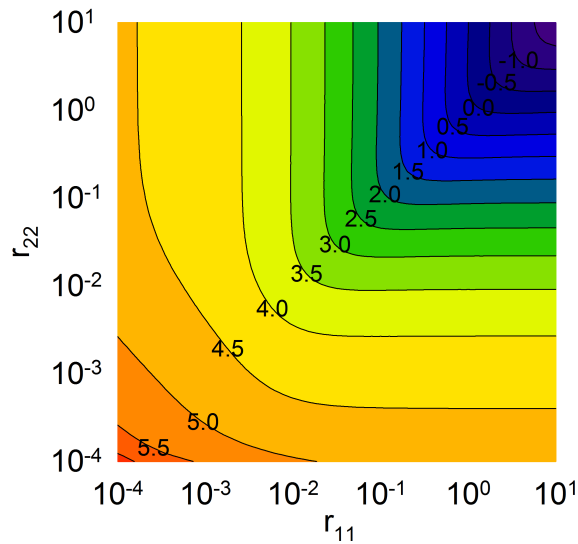


Figura 4.2. Índice del esfuerzo de control (I_{u-s}^s) de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 1]$, $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 0]$ y $\mathbf{k}_2^T = [0 \ 1]$ en la columna de WW.

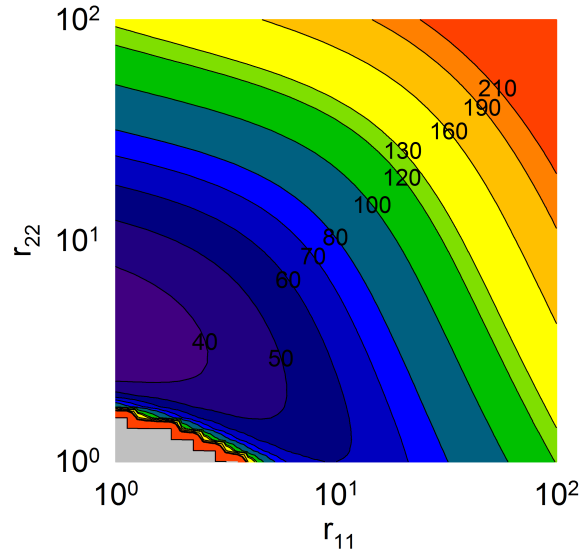


Figura 4.3. Índice del error (I_{y-s}^s) de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 1]$, $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 0]$ y $\mathbf{k}_2^T = [0 \ 1]$ en la columna de WB.

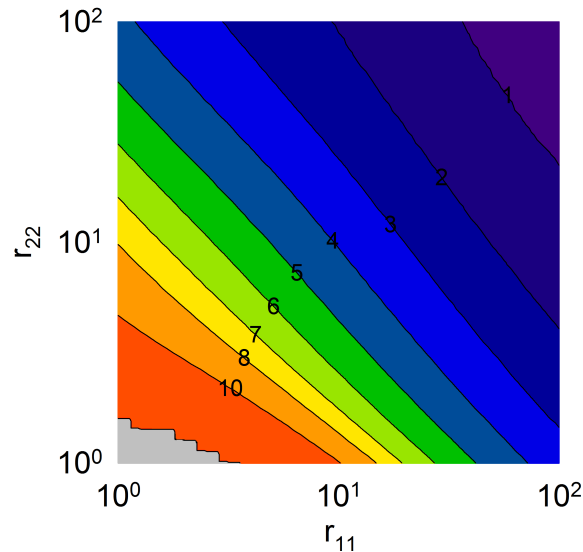


Figura 4.4. Índice del esfuerzo de control (I_{u-s}^s) de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 1]$, $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 0]$ y $\mathbf{k}_2^T = [0 \ 1]$ en la columna de WB.

El cociente de los índices de funcionamiento cuadrático entre los controladores multilazo y multivariados se presenta en las Figuras 4.5-4.8 para mostrar el efecto del procedimiento de diagonalización sobre éstos valores. En el caso del sistema de WW, los índices de funcionamiento I_{y-s}^s e I_{u-s}^s de los controladores multivariados iniciales se obtuvieron en los rangos de $77.2 - 808.5$ y $4.0 \times 10^{-2} - 2.1 \times 10^6$, respectivamente. Por otra parte, los valores correspondientes a los controladores multilazo están en los rangos de $82.5 - 799.2$ para el error de salida y $1.4 \times 10^{-2} - 2.1 \times 10^6$ para la acción de control usada. En todos los casos, el procedimiento de diagonalización produjo un incremento en los índices de funcionamiento del error (con cocientes en el rango de 7.1×10^{-1} a 2.5 y un promedio aritmético de 1.2 , Figura 4.5), justificado por la disminución de la acción de control usada (con cocientes en el rango de 1.5×10^{-1} a 2.4 y un promedio aritmético de 0.6 , Figura 4.6). En el caso de la columna de WB, los índices de funcionamiento I_{y-s}^s e I_{u-s}^s para los controladores iniciales multivariados se obtuvieron en los rangos de $32.2 - 324.0$ y $4.2 \times 10^{-1} - 93.9$, respectivamente. De manera similar, los valores correspondientes a los controladores multilazo se encuentran en los rangos de $32.6 - 298.3$ para el error de salida y $5.1 \times 10^{-1} - 69.4$ para la acción de control usada. A diferencia del ejemplo de la columna de WW, el procedimiento de diagonalización permitió la disminución de los índices de funcionamiento del error (con cocientes multilazo-multivariados en el rango de 2.1×10^{-1} a 2.4 y un promedio aritmético de 0.9 , Figura 4.7), explicado por el incremento del uso de la señal de control (con cocientes multilazo-multivariados en el rango de 5.3×10^{-2} a 2.2 y un promedio aritmético de 1.1 , Figura 4.8).

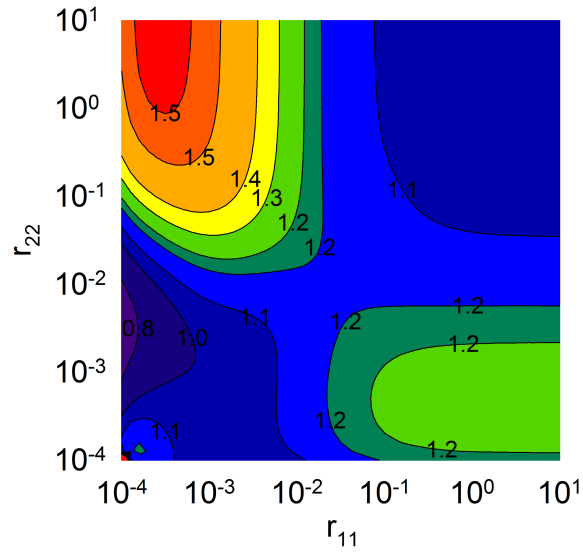


Figura 4.5. Cociente del índice del error (I_{y-s}^s) multilazo-multivariado de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 1]$, $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 0]$ y $\mathbf{k}_2^T = [0 \ 1]$ en la columna de WW.

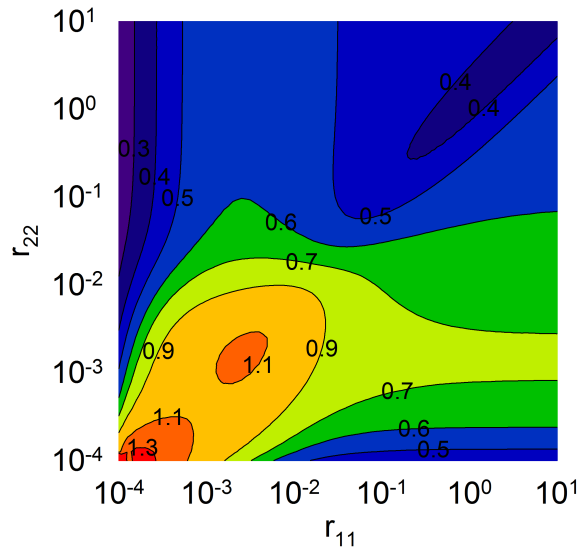


Figura 4.6. Cociente del índice del esfuerzo de control (I_{u-s}^s) multilazo-multivariado de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 1]$, $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 0]$ y $\mathbf{k}_2^T = [0 \ 1]$ en la columna de WW.

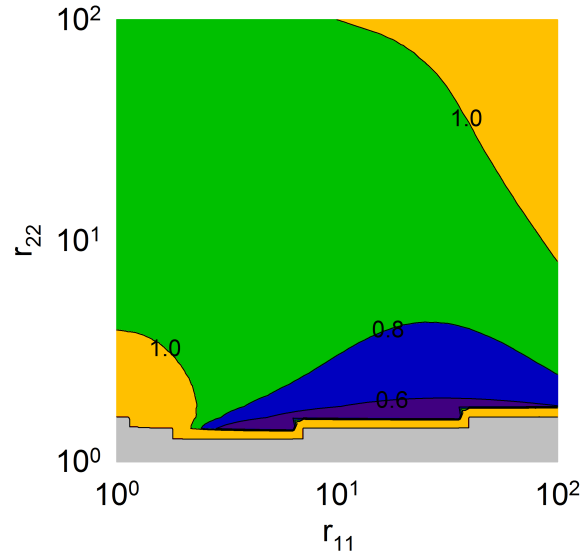


Figura 4.7. Cociente del índice del error (I_{y-s}^s) multilazo-multivariado de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 1]$, $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 0]$ y $\mathbf{k}_2^T = [0 \ 1]$ en la columna de WB.

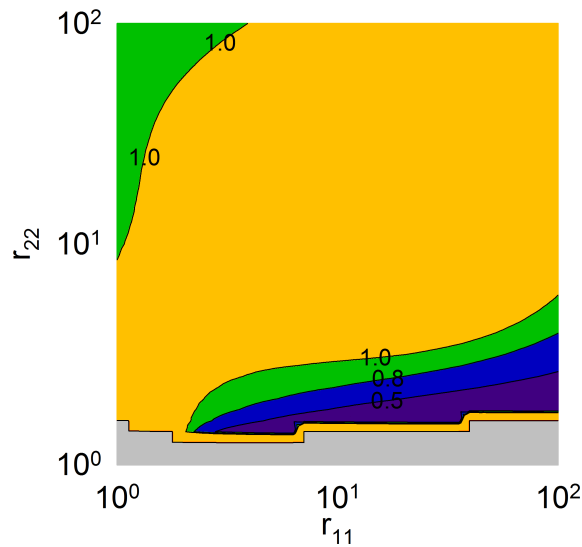


Figura 4.8. Cociente del índice del esfuerzo de control (I_{u-s}^s) multilazo-multivariado de controladores proporcionales multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 1]$, $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 0]$ y $\mathbf{k}_2^T = [0 \ 1]$ en la columna de WB.

La representación de I_{u-s}^s vs I_{y-s}^s para todos los controladores proporcionales del sistema de WW genera un frente de Pareto (Figura 4.9). El límite inferior de este frente agrupa a los controladores proporcionales que tienen el menor uso de la señal de control para un valor dado del índice de funcionamiento del error. Desplazándose hacia la izquierda sobre la región A del límite se obtienen incrementos pequeños en I_{u-s}^s para grandes disminuciones en I_{y-s}^s . Por otra parte, desplazándose en la misma dirección sobre la región B se producen grandes aumentos en I_{u-s}^s para una reducción mínima de I_{y-s}^s . Por lo tanto, el controlador (P LQR) que se complementó con la acción integral se seleccionó sobre el límite entre las regiones A y B donde se equilibran los índices de funcionamiento I_{u-s}^s e I_{y-s}^s con elementos de la matriz de ponderación de control $\{r_{11}, r_{22}\} = \{1.6 \times 10^{-4}, 1.3 \times 10^{-3}\}$ e índices correspondientes $\{I_{y-s}^s, I_{u-s}^s, \phi_{\text{máx}}, \alpha\} = \{99.7, 1.1 \times 10^5, 2.4, -1.4 \times 10^{-2}\}$ (Figura 4.9). En el caso de la columna de WB, el controlador proporcional (P LQR) que se complementó con la acción integral se obtuvo con los elementos de ponderación $\{r_{11}, r_{22}\} = \{1.1, 33.9\}$ e índices correspondientes de $\{I_{y-s}^s, I_{u-s}^s, \phi_{\text{máx}}, \alpha\} = \{83.2, 2.8, 5.6, -4.2 \times 10^{-2}\}$. La Figura 4.11 muestra el frente de Pareto que se obtiene al graficar $\phi_{\text{máx}}$ vs I_{y-s}^s de los controladores proporcionales. Los elementos de ponderación $r_{11} = 2.0$ y $r_{22} = 2.5$ se usaron para obtener el controlador PI final (PI LQR) para el sistema WW siguiendo un procedimiento similar al descrito cuando se seleccionó la acción proporcional (Figura 4.10). Por el contrario, el controlador PI multilazo (PI LQR) de WB se obtuvo empleando los valores $r_{11} = 1.3 \times 10^3$ y $r_{22} = 5.3 \times 10^3$. El análisis de las matrices de ponderación del control para la síntesis de la acción integral en ambos sistemas se presenta en las Figuras 4.12-4.15. Los gráficos de Pareto para los sistemas

de WW y WB son similares a los propuestos por Carrillo-Ahumada *et al.* (2011); Das *et al.* (2015); Reynoso-Meza *et al.* (2012); Reynoso-Meza *et al.* (2016). Las ganancias PI multilazo de los controladores reportados en literatura y del control PI LQR seleccionado para el sistema de WW y WB se reportan en las Tablas 4.1 y 4.2, respectivamente.

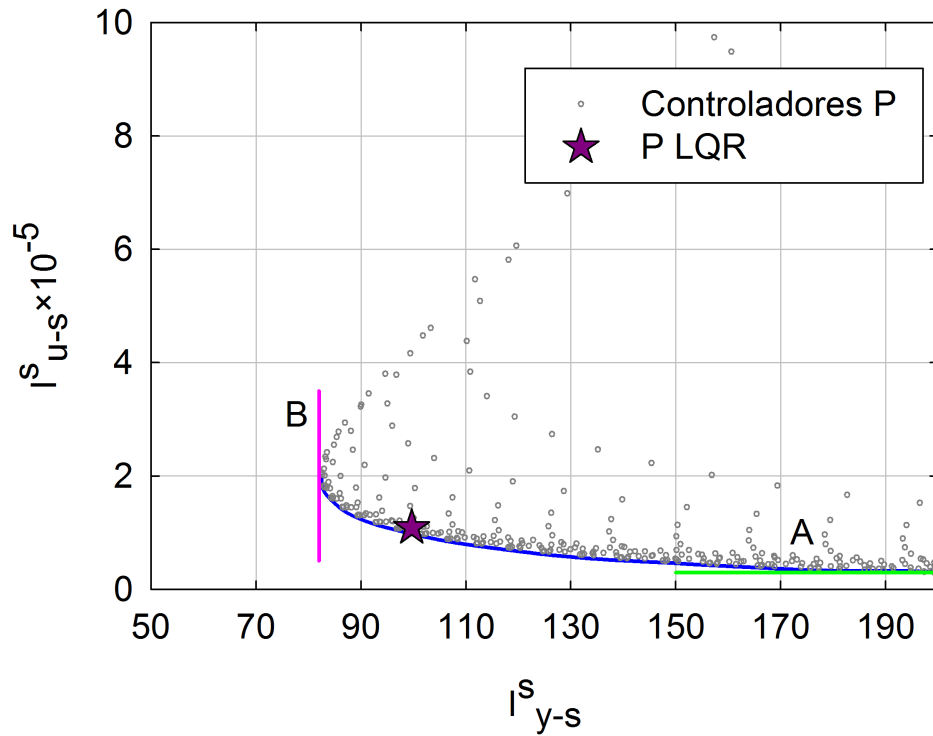


Figura 4.9. Relación entre I_{y-s}^s e I_{u-s}^s de los controladores proporcionales para el sistema de WW. P LQR es el controlador proporcional seleccionado en la primera etapa.

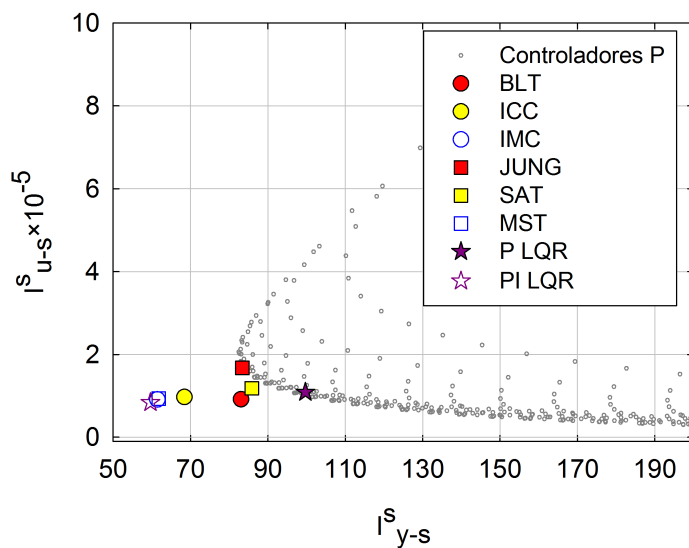


Figura 4.10. Controladores proporcionales multilazo obtenidos y de referencia para la columna de WW. P LQR es el controlador proporcional seleccionado que fue complementado con la acción integral (PI LQR).

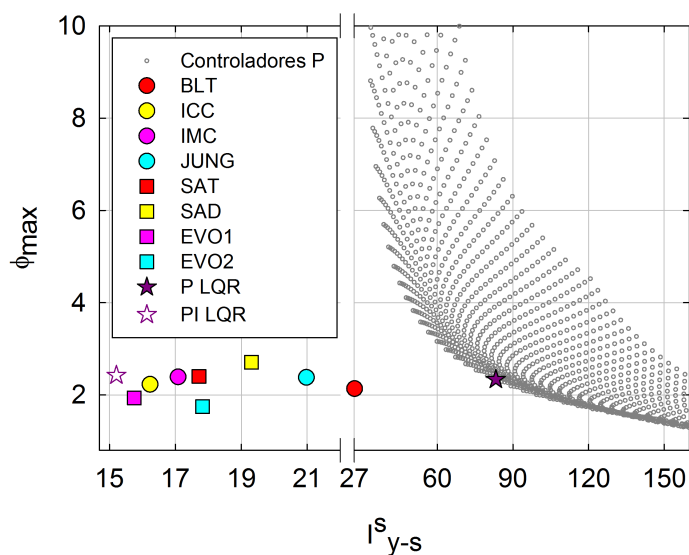


Figura 4.11. Controladores proporcionales multilazo obtenidos y de referencia para la columna de WB. P LQR es el controlador proporcional seleccionado en la primera etapa que fue complementado con la acción integral (PI LQR).

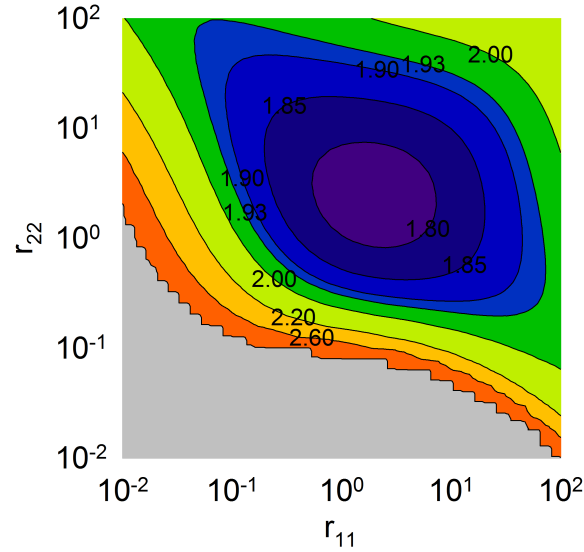


Figura 4.12. Índice del error (I_{y-s}^s) de los controladores PI multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 1]$, $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 0]$ y $\mathbf{k}_2^T = [0 \ 1]$ en la columna de WW.

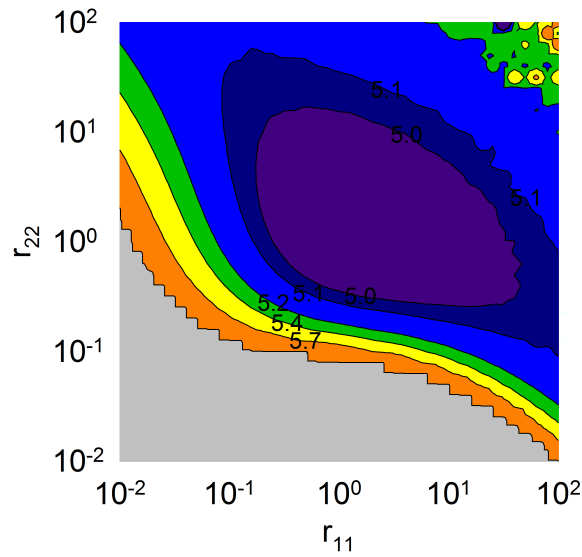


Figura 4.13. Índice del esfuerzo de control (I_{u-s}^s) de los controladores PI multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 1]$, $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 0]$ y $\mathbf{k}_2^T = [0 \ 1]$ en la columna de WW.

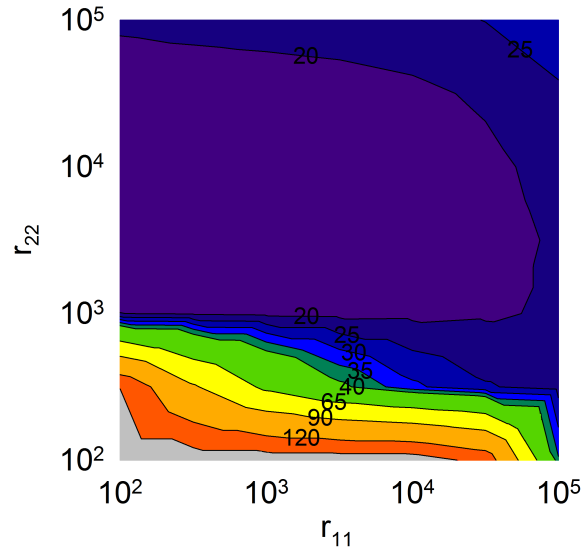


Figura 4.14. Índice del error (I_{y-s}^s) de los controladores PI multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 1]$, $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 0]$ y $\mathbf{k}_2^T = [0 \ 1]$ en la columna de WB.

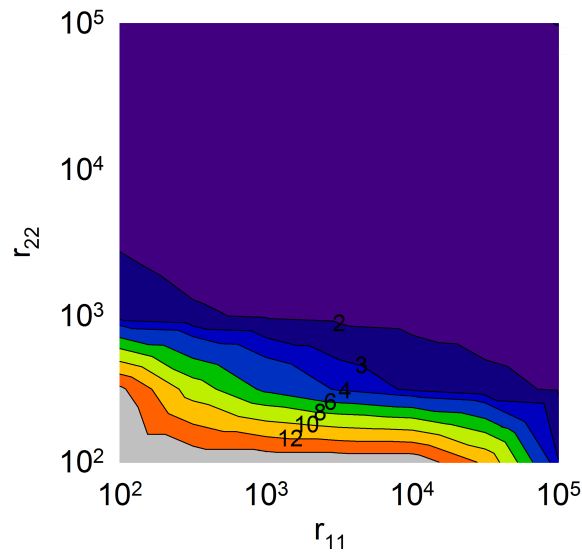


Figura 4.15. Índice del esfuerzo de control (I_{u-s}^s) de los controladores PI multilazo ante entradas $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 1]$, $\mathbf{k}_2^T = [1 \ 0]$ y $\mathbf{k}_2^T = [0 \ 1]$ en la columna de WB.

Tabla 4.1. Ganancias de los controladores PI multilazo para la columna de destilación de WW.

Método	Referencia	$k_{P11}, k_{P22}, k_{I11}, k_{I22}$
BLT	Luyben (1986)	27.4, -13.3, 0.662, -0.251
ICC	Lee <i>et al.</i> (1998)	53.8, -20.3, 1.730, -0.684
IMC	Lee & Choi (1993)	51.5, -21.3, 0.817, -0.546
JUNG	Jung <i>et al.</i> (1999)	19.1, -10.8, 0.813, -0.672
SAT	Loh <i>et al.</i> (1993)	48.1, -25.4, 2.533, -0.966
MST	Vu & Lee (2008)	53.4, -20.9, 0.845, -0.539
LQR	Propuesta PI	42.5, -26.3, 0.696, -0.650

Tabla 4.2. Ganancias de los controladores PI multilazo para la columna de destilación de WB.

Método	Referencia	$k_{P11}, k_{P22}, k_{I11}, k_{I22}$
BLT	Luyben (1986)	0.375, -0.075, 0.045, -0.003
ICC	Lee <i>et al.</i> (1998)	0.850, -0.089, 0.118, -0.010
IMC	Lee & Choi (1993)	0.737, -0.103, 0.045, -0.006
JUNG	Jung <i>et al.</i> (1999)	0.190, -0.099, 0.022, -0.012
SAT	Loh <i>et al.</i> (1993)	0.868, -0.087, 0.267, -0.008
EVO1	Reynoso-Meza <i>et al.</i> (2012)	0.924, -0.078, 0.106, -0.013
EVO2	Reynoso-Meza <i>et al.</i> (2016)	0.740, -0.060, 0.078, -0.018
SAD	Kadhar <i>et al.</i> (2015)	0.324, -0.091, 0.031, -0.016
LQR	Propuesta PI	0.744, -0.106, 0.028, -0.014

4.2. Desempeño de los controladores PI multilazo vía la generalización del enfoque LQR

Los resultados teóricos y de simulación de todos los controladores PI asociados a la columna de WW para tres diferentes cambios de referencia se muestran en las Tablas 4.3 y 4.4, respectivamente. En general, los sistemas de control estudiados tienen el siguiente orden con respecto a la suma de los índices de funcionamiento cuadrático del error evaluados por simulación: LQR < IMC < MST < BLT < ICC < JUNG < SAT. Por otra parte, se obtuvo el siguiente orden para el caso del esfuerzo de control: JUNG < BLT < LQR < IMC < MST < ICC < SAT. Las Figuras 4.16-4.19 muestran la comparación de los controladores seleccionados en una simulación ante un cambio de referencia escalón unitario en la primera salida (y_1).

Los resultados teóricos y de simulación para el sistema perturbado se muestran en las Tablas 4.5 y 4.6, respectivamente. En contraste, el desempeño del sistema perturbado en las simulaciones exhibe el siguiente orden: IMC < MST < LQR < ICC < JUNG < BLT < SAT y JUNG < SAT < ICC < LQR < IMC < MST < BLT para los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control, respectivamente, donde todos los sistemas de control exhiben una respuesta estable (Tabla 4.6). Las diferencias relativas de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control entre el sistema nominal y el sistema perturbado se ordenaron como: LQR < BLT < JUNG < IMC < MST < ICC < SAT y SAT < ICC < MST < IMC < LQR < BLT < JUNG, respectivamente (Tabla 4.7).

Tabla 4.3. Evaluación analítica de los índices de funcionamiento para el sistema nominal de la columna de destilación de WW.

Método	k_2^T	Primer lazo		Segundo lazo	
		I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$	I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$
BLT	[1 1]	12.0	1.26	13.2	0.39
	[1 0]	12.4	1.14	17.0	1.21
	[0 1]	1.75	2.94	26.6	2.23
ICC	[1 1]	9.57	3.31	19.1	0.97
	[1 0]	9.16	2.10	16.8	0.76
	[0 1]	0.45	1.68	13.4	0.92
IMC	[1 1]	8.87	2.54	15.0	0.80
	[1 0]	9.51	1.77	12.6	0.79
	[0 1]	1.28	2.00	14.1	1.22
JUNG	[1 1]	15.6	1.10	21.7	0.50
	[1 0]	14.3	0.50	12.5	0.69
	[0 1]	2.14	2.09	17.0	1.05
SAT	[1 1]	11.9	3.74	29.8	2.22
	[1 0]	10.7	2.18	21.0	1.36
	[0 1]	0.35	1.45	12.2	0.91
MST	[1 1]	8.75	2.68	15.0	0.78
	[1 0]	9.35	1.89	13.2	0.79
	[0 1]	1.20	2.00	14.3	1.21
LQR	[1 1]	9.60	1.91	15.8	1.20
	[1 0]	10.6	1.23	9.29	0.82
	[0 1]	1.81	1.97	12.6	1.30

Tabla 4.4. Evaluación numérica de los índices de desempeño para el sistema nominal de la columna de destilación de WW.

Método	k_2^T	Primer lazo		Segundo lazo	
		I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$	I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$
BLT	[1 1]	12.3	1.26	14.8	0.40
	[1 0]	12.6	1.05	17.0	1.12
	[0 1]	1.56	2.72	25.4	2.02
ICC	[1 1]	10.6	3.62	28.1	1.35
	[1 0]	10.2	2.40	23.0	1.02
	[0 1]	0.46	1.66	14.2	0.94
IMC	[1 1]	9.62	2.73	21.7	1.10
	[1 0]	10.2	1.94	16.7	0.96
	[0 1]	1.18	1.94	14.8	1.21
JUNG	[1 1]	16.0	1.11	23.8	0.53
	[1 0]	14.5	0.49	13.3	0.69
	[0 1]	2.12	2.05	17.5	1.03
SAT	[1 1]	13.6	4.17	48.7	3.51
	[1 0]	12.2	2.55	32.7	2.16
	[0 1]	0.42	1.45	14.1	1.03
MST	[1 1]	9.55	2.90	21.8	1.07
	[1 0]	10.1	2.10	17.5	0.97
	[0 1]	1.10	1.94	15.0	1.19
LQR	[1 1]	10.2	2.02	23.2	1.72
	[1 0]	11.0	1.30	12.6	1.04
	[0 1]	1.69	1.91	13.9	1.35

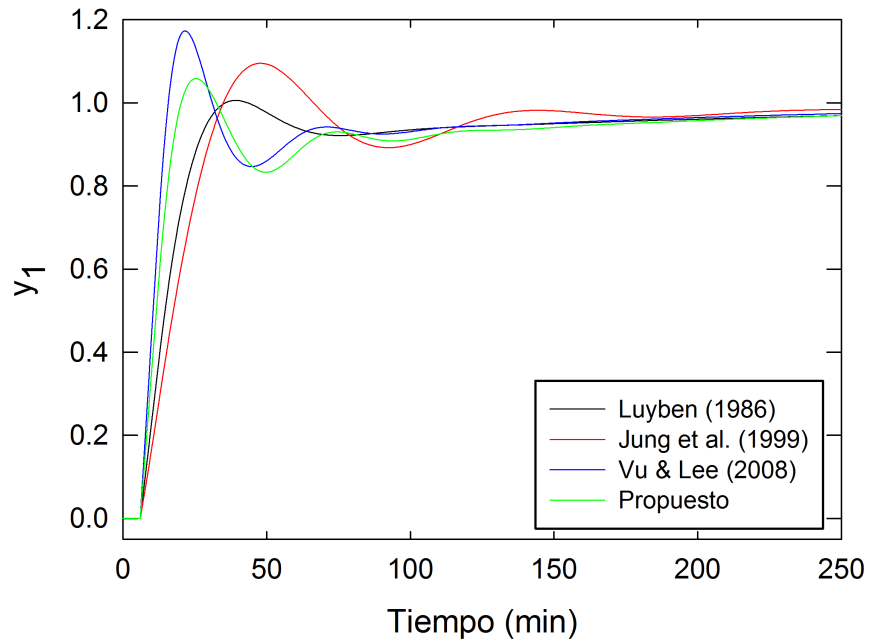


Figura 4.16. Comportamiento de la respuesta y_1 de la columna de destilación de WW ante un cambio de referencia escalón unitario en la primera salida.

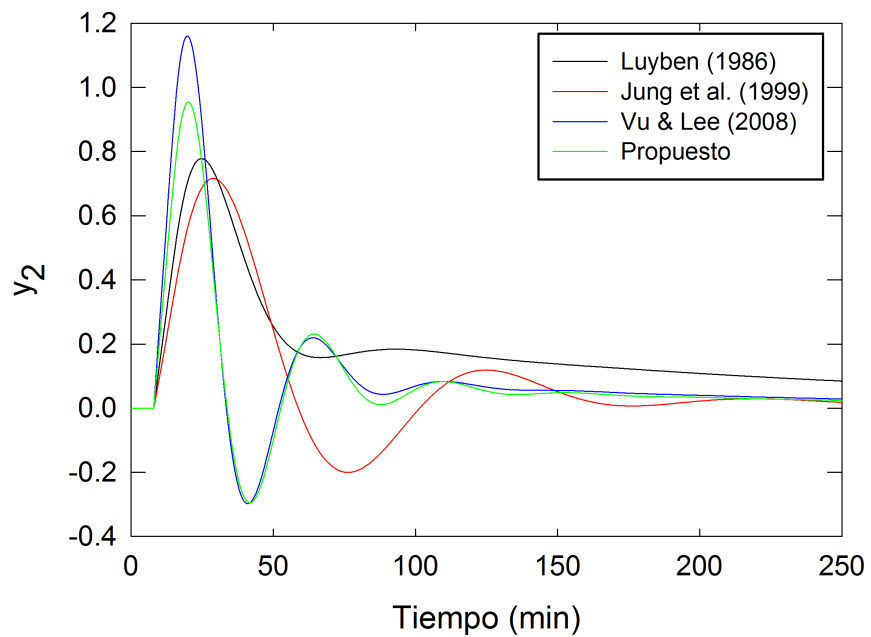


Figura 4.17. Comportamiento de la respuesta y_2 de la columna de destilación de WW ante un cambio de referencia escalón unitario en la primera salida.

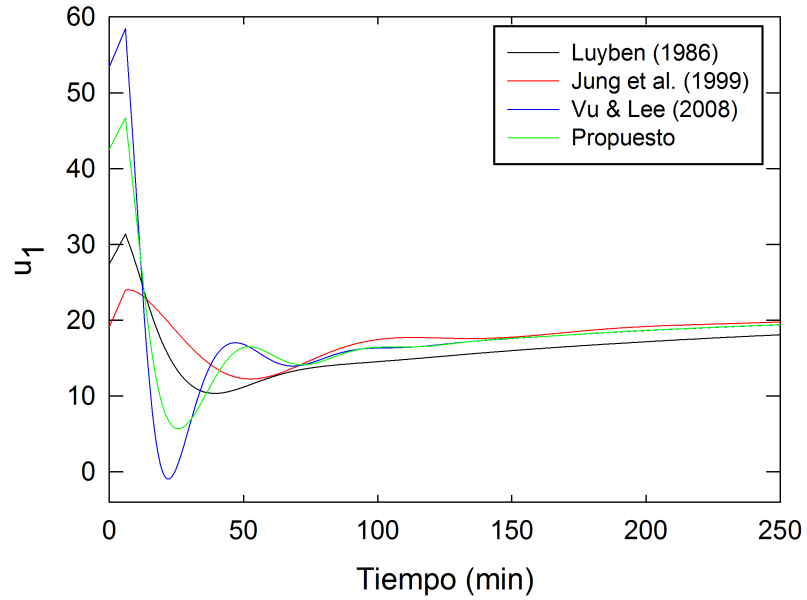


Figura 4.18. Comportamiento de la acción de control u_1 de la columna de destilación de WW ante un cambio de referencia escalón unitario en la primera salida.

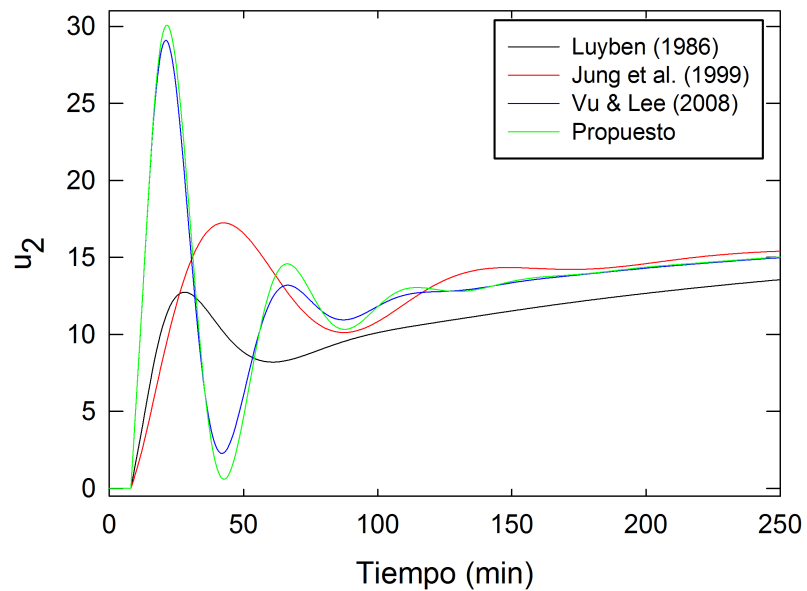


Figura 4.19. Comportamiento de la acción de control u_2 de la columna de destilación de WW ante un cambio de referencia escalón unitario en la primera salida.

Tabla 4.5. Evaluación analítica de los índices de desempeño para el sistema perturbado de la columna de destilación de WW.

Método	k_2^T	Primer lazo		Segundo lazo	
		I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$	I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$
BLT	[1 1]	10.4	2.38	12.4	1.54
	[1 0]	11.2	9.67	20.8	11.7
	[0 1]	2.52	19.3	37.0	21.0
ICC	[1 1]	8.20	3.85	13.8	1.51
	[1 0]	8.08	7.23	14.1	6.74
	[0 1]	0.56	12.9	15.5	12.4
IMC	[1 1]	7.70	3.28	12.0	1.48
	[1 0]	8.72	7.98	12.0	7.99
	[0 1]	1.90	14.5	17.1	14.3
JUNG	[1 1]	13.6	1.97	18.2	1.20
	[1 0]	12.9	6.64	11.7	7.64
	[0 1]	2.58	14.3	19.0	13.6
SAT	[1 1]	9.84	4.01	21.0	2.29
	[1 0]	9.21	6.58	16.7	6.33
	[0 1]	0.35	11.7	13.5	11.0
MST	[1 1]	7.61	3.41	11.8	1.46
	[1 0]	8.56	8.07	12.4	7.98
	[0 1]	1.78	14.5	17.3	14.3
LQR	[1 1]	8.32	2.69	13.5	1.79
	[1 0]	9.74	7.44	9.27	7.85
	[0 1]	2.68	14.3	14.9	13.9

Tabla 4.6. Evaluación numérica de los índices de desempeño para el sistema perturbado de la columna de destilación de WW.

Método	k_2^T	Primer lazo		Segundo lazo	
		I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$	I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$
BLT	[1 1]	10.6	2.15	13.6	1.27
	[1 0]	11.2	7.67	18.8	9.42
	[0 1]	1.96	15.6	32.6	16.8
ICC	[1 1]	9.20	4.04	19.9	1.67
	[1 0]	9.10	6.85	18.5	6.21
	[0 1]	0.51	11.5	16.1	11.0
IMC	[1 1]	8.42	3.35	16.8	1.56
	[1 0]	9.30	7.18	14.8	7.07
	[0 1]	1.56	12.7	17.4	12.4
JUNG	[1 1]	13.8	1.86	19.9	1.10
	[1 0]	13.0	5.80	12.2	6.75
	[0 1]	2.33	12.7	19.2	11.9
SAT	[1 1]	11.1	4.23	34.6	3.13
	[1 0]	10.4	6.34	25.9	6.40
	[0 1]	0.38	10.6	15.5	10.1
MST	[1 1]	8.39	3.51	16.7	1.53
	[1 0]	9.22	7.31	15.4	7.06
	[0 1]	1.46	12.7	17.5	12.4
LQR	[1 1]	8.85	2.67	20.0	2.12
	[1 0]	10.0	6.57	12.1	7.05
	[0 1]	2.23	12.5	16.1	12.2

Tabla 4.7. Diferencias relativas de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control entre el sistema nominal y el sistema perturbado para la columna de destilación de WW.

Método	$e(I_y)$	$e(I_u)$
BLT	6.06	516.81
ICC	-15.37	275.93
IMC	-7.92	347.40
JUNG	-7.81	579.83
SAT	-19.58	174.71
MST	-8.45	337.18
LQR	-4.62	361.19

Los resultados teóricos y de simulación de los controladores PI asociados al sistema nominal de la columna de WB se muestran en las Tablas 4.8 y 4.9. En este caso, los controladores PI tienen el siguiente orden con respecto a la suma de los índices de funcionamiento cuadráticos del error evaluados por simulación: LQR < EVO1 < IMC < ICC < EVO2 < SAD < JUNG < SAT < BLT, mientras que los índices de esfuerzo de control se ordenan como: JUNG < SAD < BLT < LQR < IMC < EVO2 < ICC < EVO1 < SAT. El desempeño de los controladores durante la simulación se muestra en las Figuras 4.20-4.23.

Los resultados teóricos y de la simulación para el sistema perturbado se muestran en las Tablas 4.10 y 4.11, respectivamente. En contraste, el desempeño para el sistema perturbado en las simulaciones exhibe el siguiente orden: EVO1 < LQR < ICC < IMC < EVO2 < SAD < JUNG < SAT < BLT y JUNG < SAD < LQR < EVO2 < IMC < BLT < ICC < EVO1 < SAT para los índices de funcionamiento cuadráticos del error y del esfuerzo de control, respectivamente (Tabla 4.5). Nuevamente, todos los controladores PI lograron estabilizar el sistema perturbado, como ocurre con el sistema nominal. Las diferencias relativas entre los índices de funcionamiento cuadrático I_{y-s}^s e I_{u-s}^s para el sistema nominal y perturbado se ordenan como: EVO1 < ICC < EVO2 < SAT < LQR < IMC < JUNG < SAD < BLT y EVO1 < SAT < ICC < EVO2 < LQR < IMC < SAD < BLT < JUNG, respectivamente (Tabla 4.12).

Tabla 4.8. Evaluación analítica de los índices de desempeño para el sistema nominal de la columna de destilación de WB.

Método	k_2^T	Primer lazo		Segundo lazo	
		I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$	I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$
BLT	[1 1]	2.31	0.49	6.22	2.38
	[1 0]	2.14	0.18	3.82	2.77
	[0 1]	0.22	0.26	12.4	5.59
ICC	[1 1]	1.52	1.25	5.04	2.39
	[1 0]	1.33	0.81	2.21	1.92
	[0 1]	0.08	0.08	6.05	0.10
IMC	[1 1]	1.50	0.88	4.91	2.99
	[1 0]	1.46	0.52	2.09	1.74
	[0 1]	0.23	0.12	6.90	1.07
JUNG	[1 1]	3.50	0.19	5.74	4.31
	[1 0]	3.59	0.02	1.28	2.28
	[0 1]	1.51	0.14	5.36	0.66
SAT	[1 1]	1.80	1.85	5.03	2.13
	[1 0]	1.57	1.30	2.60	1.81
	[0 1]	0.03	0.08	6.68	0.17
SAD	[1 1]	2.83	0.36	6.32	5.26
	[1 0]	2.55	0.09	1.48	2.56
	[0 1]	0.92	0.11	5.20	0.65
EVO1	[1 1]	1.41	1.31	5.28	2.57
	[1 0]	1.26	0.88	2.09	2.36
	[0 1]	0.10	0.07	5.61	0.35
EVO2	[1 1]	1.65	1.00	6.36	3.49
	[1 0]	1.45	0.60	2.29	3.31
	[0 1]	0.21	0.09	5.87	1.44
LQR	[1 1]	1.51	0.86	5.12	4.47
	[1 0]	1.63	0.50	1.47	2.02
	[0 1]	0.47	0.08	5.00	0.57

Tabla 4.9. Evaluación numérica de los índices de desempeño para el sistema nominal de la columna de destilación de WB.

Método	k_2^T	Primer lazo		Segundo lazo	
		I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$	I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$
BLT	[1 1]	2.56	0.52	7.24	2.95
	[1 0]	2.27	0.20	4.32	2.98
	[0 1]	0.24	0.27	12.5	5.86
ICC	[1 1]	1.95	1.57	7.62	4.52
	[1 0]	1.70	1.08	3.54	3.10
	[0 1]	0.10	0.10	6.27	0.27
IMC	[1 1]	1.84	1.07	6.96	5.19
	[1 0]	1.71	0.66	3.03	2.76
	[0 1]	0.25	0.14	7.15	1.41
JUNG	[1 1]	3.83	0.21	6.79	5.43
	[1 0]	3.67	0.02	1.54	2.62
	[0 1]	1.59	0.15	5.67	0.97
SAT	[1 1]	2.50	2.43	8.51	4.84
	[1 0]	2.18	1.80	4.64	3.47
	[0 1]	0.06	0.11	6.89	0.36
SAD	[1 1]	3.26	0.41	8.31	7.27
	[1 0]	2.70	0.11	2.10	3.30
	[0 1]	1.00	0.12	5.59	0.94
EVO1	[1 1]	1.84	1.67	7.88	4.48
	[1 0]	1.65	1.22	3.43	3.48
	[0 1]	0.12	0.09	5.82	0.41
EVO2	[1 1]	1.98	1.18	8.90	4.95
	[1 0]	1.72	0.76	3.54	4.22
	[0 1]	0.22	0.10	6.08	1.34
LQR	[1 1]	1.86	1.06	7.75	7.68
	[1 0]	1.89	0.64	2.52	3.40
	[0 1]	0.51	0.10	5.37	0.98

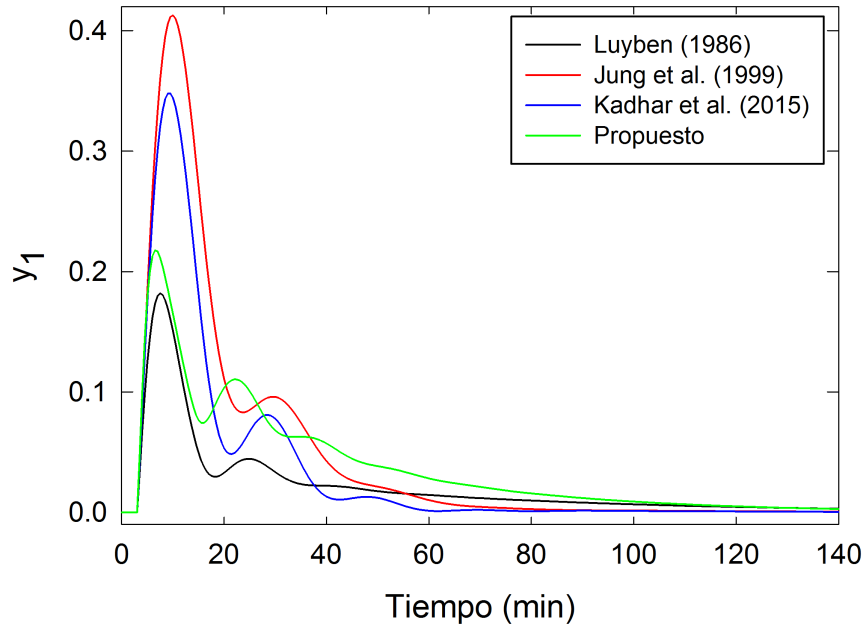


Figura 4.20. Comportamiento de la respuesta y_1 de la columna de destilación de WB ante un cambio de referencia escalón unitario en la segunda salida.

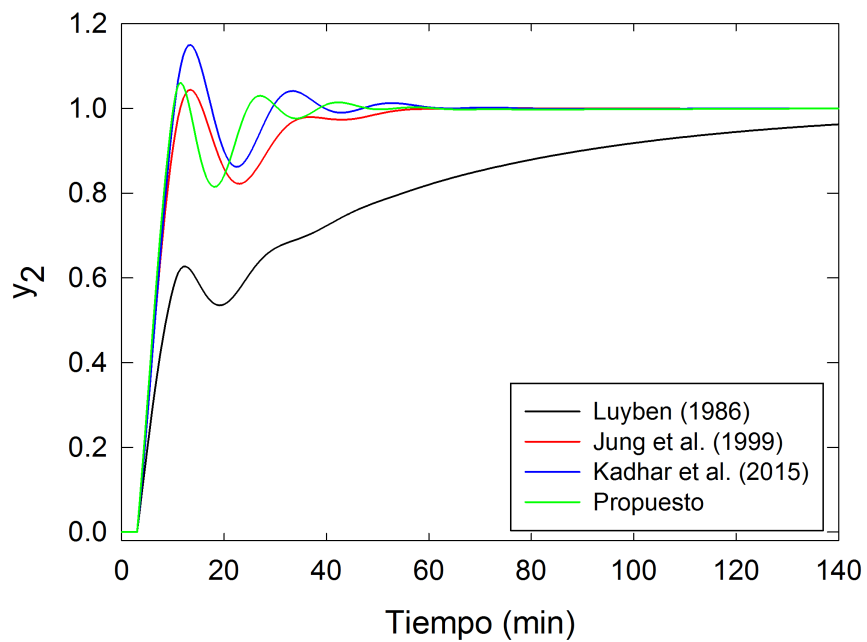


Figura 4.21. Comportamiento de la respuesta y_2 de la columna de destilación de WB ante un cambio de referencia escalón unitario en la segunda salida.

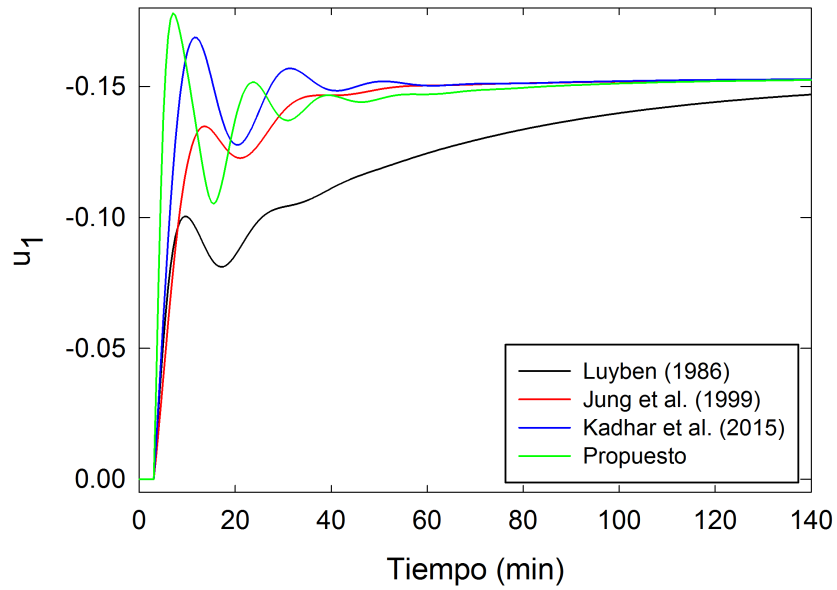


Figura 4.22. Comportamiento de la acción de control u_1 de la columna de destilación de WB ante un cambio de referencia escalón unitario en la primera salida.

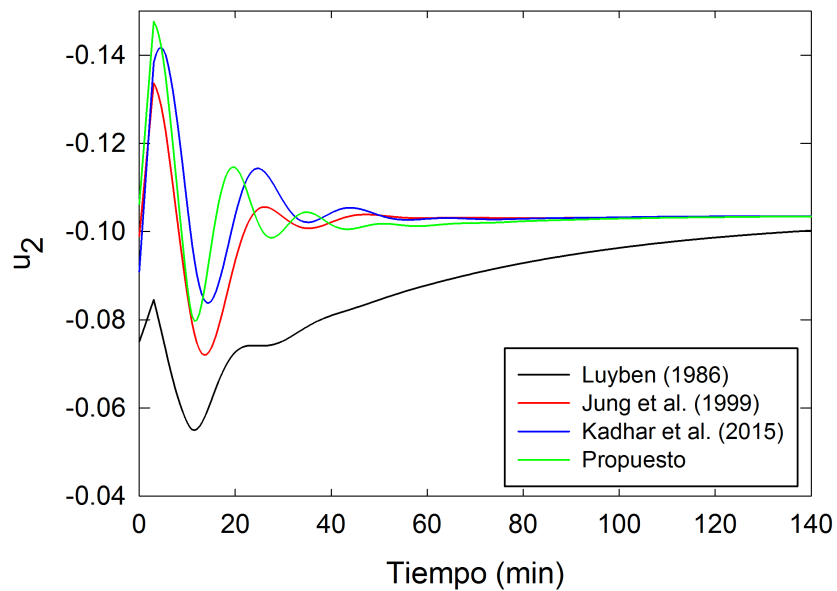


Figura 4.23. Comportamiento de la acción de control u_2 de la columna de destilación de WB ante un cambio de referencia escalón unitario en la primera salida.

Tabla 4.10. Evaluación analítica de los índices de desempeño para el sistema nominal de la columna de destilación de WB.

Método	k_2^T	Primer lazo		Segundo lazo	
		I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$	I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$
BLT	[1 1]	2.67	0.91	7.51	7.16
	[1 0]	2.41	0.34	5.04	10.4
	[0 1]	0.46	1.31	17.2	30.0
ICC	[1 1]	1.76	1.64	5.66	2.93
	[1 0]	1.45	0.81	2.38	4.20
	[0 1]	0.18	0.40	7.02	4.71
IMC	[1 1]	1.75	1.23	5.57	4.42
	[1 0]	1.68	0.56	2.49	5.60
	[0 1]	0.52	0.65	8.68	10.9
JUNG	[1 1]	4.30	0.39	6.11	4.34
	[1 0]	4.29	0.09	1.32	6.05
	[0 1]	3.13	0.67	6.12	7.09
SAT	[1 1]	2.04	2.41	5.74	3.12
	[1 0]	1.68	1.38	2.90	4.29
	[0 1]	0.07	0.43	7.99	6.16
SAD	[1 1]	3.63	0.59	6.92	5.17
	[1 0]	3.04	0.10	1.43	5.01
	[0 1]	1.97	0.47	5.74	3.54
EVO1	[1 1]	1.65	1.69	5.91	2.60
	[1 0]	1.38	0.87	2.10	4.06
	[0 1]	0.22	0.33	6.12	2.43
EVO2	[1 1]	2.03	1.37	7.25	3.40
	[1 0]	1.63	0.59	2.19	4.69
	[0 1]	0.45	0.34	6.13	1.90
LQR	[1 1]	1.83	1.16	5.64	4.42
	[1 0]	2.02	0.51	1.48	4.31
	[0 1]	1.16	0.42	5.54	3.50

Tabla 4.11. Evaluación numérica de los índices de desempeño para el sistema nominal de la columna de destilación de WB.

Método	k_2^T	Primer lazo		Segundo lazo	
		I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$	I_{y-s}^s	$I_{u-s}^s \times 10^{-4}$
BLT	[1 1]	2.96	0.95	8.59	7.75
	[1 0]	2.52	0.35	5.51	10.7
	[0 1]	0.51	1.32	17.3	30.1
ICC	[1 1]	2.18	1.97	8.98	5.73
	[1 0]	1.70	1.01	3.80	5.55
	[0 1]	0.23	0.45	7.43	5.13
IMC	[1 1]	2.12	1.43	8.02	7.08
	[1 0]	1.86	0.66	3.43	6.70
	[0 1]	0.58	0.69	9.10	11.4
JUNG	[1 1]	4.83	0.41	7.35	5.69
	[1 0]	4.37	0.09	1.58	6.44
	[0 1]	3.32	0.68	6.58	7.64
SAT	[1 1]	2.64	3.01	10.4	6.76
	[1 0]	2.07	1.73	5.19	6.23
	[0 1]	0.13	0.50	8.42	6.59
SAD	[1 1]	4.39	0.67	9.62	8.03
	[1 0]	3.22	0.13	2.09	5.88
	[0 1]	2.17	0.50	6.46	4.29
EVO1	[1 1]	2.02	2.02	9.36	5.25
	[1 0]	1.63	1.10	3.55	5.36
	[0 1]	0.50	0.38	6.65	2.14
EVO2	[1 1]	2.41	1.59	11.0	5.84
	[1 0]	1.85	0.72	3.65	5.86
	[0 1]	0.50	0.38	6.55	2.14
LQR	[1 1]	2.28	1.41	9.18	8.86
	[1 0]	2.23	0.63	2.61	5.88
	[0 1]	1.25	0.47	6.24	4.40

Tabla 4.12. Diferencias relativas de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control entre el sistema nominal y el sistema perturbado de la columna de destilación de WB.

Método	$e(I_y)$	$e(I_u)$
BLT	27.98	181.25
ICC	14.76	26.88
IMC	19.88	55.01
JUNG	21.30	200.42
SAT	16.24	22.85
SAD	21.72	98.54
EVO1	14.28	18.05
EVO2	16.13	31.85
LQR	19.58	40.17

Los resultados anteriores indican que todos los controladores PI estudiados tienen propiedades de robustez. De hecho, todos los controladores tienen normas H_∞ similares para las matrices de transferencia $\mathbf{S}(s)$ y $\mathbf{T}(s)$ (Tablas 4.13 y 4.14). Además, los controladores PI multilazo generados con el enfoque LQR exhiben buen seguimiento de referencia, bajo uso de señal de control y adecuadas propiedades de robustez, comparables a otros controladores reportados en literatura.

Tabla 4.13. Criterios de desempeño para el sistema nominal de la columna de destilación de WW.

Método	$\phi_{\text{máx}}$	$\alpha \times 10^3$	$\ \mathbf{S}(s)\ _\infty$	$\ \mathbf{T}(s)\ _\infty$
BLT	1.41	-4.95	2.06	1.59
ICC	2.59	-7.84	4.25	3.84
IMC	2.35	-6.60	3.55	3.06
JUNG	2.79	-7.58	2.62	2.36
SAT	4.23	-8.59	6.35	5.97
MST	2.29	-6.61	3.61	3.13
LQR	2.76	-6.68	3.60	3.03

Tabla 4.14. Criterios de desempeño para el sistema nominal de la columna de destilación de WB.

Método	$\phi_{\text{máx}}$	$\alpha \times 10^3$	$\ \mathbf{S}(s)\ _{\infty}$	$\ \mathbf{T}(s)\ _{\infty}$
BLT	2.14	-1.94	2.19	1.69
ICC	2.23	-3.76	3.15	2.77
IMC	2.39	-3.14	2.92	2.39
JUNG	2.38	-3.68	2.60	2.02
SAT	2.40	-3.69	3.88	3.68
SAD	2.71	-3.80	3.29	2.76
EVO1	1.94	-3.86	3.01	2.64
EVO2	1.75	-3.89	3.15	2.80
LQR	2.43	-3.08	2.66	2.16

4.2.1. Desempeño de las versiones diagonales de los controladores PI multivariados existentes

De acuerdo a la metodología presentada en la sección 3.2, el primer paso para diagonalizar un controlador PI multivariado existente es determinar los elementos de las matrices de ponderación de control (\mathbf{R} ó \mathbf{R}) que producirían este controlador si hubiera sido obtenido por el enfoque LQR. Posteriormente, se aplican los algoritmos de diagonalización secuencialmente para producir acciones de control proporcionales e integrales multilazo, así como sus correspondientes ponderaciones de control. Los resultados que se obtuvieron para los controladores PI multivariados reportados por Chen *et al.* (2002) y Ruiz-López *et al.* (2006) para el reactor CSTR se muestran en las Tablas 4.15- 4.17. Se puede verificar que una característica del procedimiento de diagonalización es que la matriz de ponderación (\mathbf{R} ó \mathbf{R}) de un control proporcional ó integral multilazo, respectivamente, tiene el mismo determinante que la del control multivariado original. Por lo tanto, el determinante de la matriz de ponderación puede ser utilizado para verificar si la diagonalización se está haciendo de forma adecuada.

Tabla 4.15. Ganancias de los controladores PI para el CSTR no lineal.

Método	Controladores originales			
	k_{P11}, k_{P22}	k_{P12}, k_{P21}	k_{I11}, k_{I22}	k_{I12}, k_{I21}
BLT	81.937, -6.2911	-	33.532, -11.651	-
Chen <i>et al.</i> (2002)	5783.1, -137.79	27.816, -8724.2	63687, -1129.1	252.68, -30645
Ruiz-López <i>et al.</i> (2006)	7732.5, -673.64	0, -13771	93939, -6634	142.36, -97507
	Controladores diagonalizados			
Chen <i>et al.</i> (2002)	14778, -89.209	0, 0	61083, -1062.5	0, 0
Ruiz-López <i>et al.</i> (2006)	9967.7, -669.53	0, 0	93092, -6546.4	0, 0

Tabla 4.16. Matrices de ponderación ($\times 10^8$) que producen la acción proporcional en el procedimiento LQR para el CSTR no lineal.

Método	Controladores originales	
	r_{11}, r_{22}	r_{12}, r_{21}
BLT	-	-
Chen <i>et al.</i> (2002)	20.375, 12.484	10.948, 21.533
Ruiz-López <i>et al.</i> (2006)	2.4725, 0.2268	0.2228, 1.3955
	Controladores diagonalizados	
Chen <i>et al.</i> (2002)	-6.1047, 14.124	11.339, -9.2446
Ruiz-López <i>et al.</i> (2006)	-0.5644, 0.2267	0.2230, -1.6946

Tabla 4.17. Matrices de ponderación ($\times 10^{11}$) que producen la acción integral en el procedimiento LQR para el CSTR no lineal.

Método	Controladores originales	
	r_{11}, r_{22}	r_{12}, r_{21}
BLT	-	-
Chen <i>et al.</i> (2002)	31.272, 13.406	8.5665, 21.295
Ruiz-López <i>et al.</i> (2006)	11.992, 0.2450	0.3958, 0.6240
	Controladores diagonalizados	
Chen <i>et al.</i> (2002)	26.750, 8.8419	-0.2902, 0.9266
Ruiz-López <i>et al.</i> (2006)	11.533, 0.2328	-0.0724, 0.0850

Los índices de funcionamiento cuadrático de los sistemas de control evaluados ante cambios en la variable de entrada y el punto de referencia para el modelo del proceso lineal y original se presentan en las Tablas 4.18 y 4.19, respectivamente. Se puede observar que los índices de funcionamiento cuadrático para los controladores multilazo PI pueden degradarse (incrementar) o mejorar (disminuir) en comparación con sus valores iniciales, los cuales corresponden a los controladores multivariados. Sin embargo, en este ejemplo el resultado final está equilibrado, ya que 8 de los 16 índices del error mejoran para el sistema no-lineal, mientras que 7 de los 16 índices del error mejoran en el sistema lineal. Es resaltable que los controladores PI multivariados propuestos por Chen *et al.* (2002) y Ruiz-López *et al.* (2006) se sintonizaron por metodologías basadas en la minimización de la norma H_∞ de la función de transferencia en lazo cerrado por desigualdades lineales matriciales u optimización multiobjetivo, respectivamente. De esta forma, el método propuesto puede aplicarse para diagonalizar controladores PI multivariados obtenidos con otras metodologías de sintonización existentes.

Tabla 4.18. Índices de desempeño para los sistemas de control del CSTR calculados analíticamente con el modelo linealizado.

Índices ¹	BLT	Chen <i>et al.</i> (2002)		Ruiz-López <i>et al.</i> (2006)	
		Original	Diagonalizado	Original	Diagonalizado
$I_{y1-s}^s \times 10^7$	125566	26.869	5.8802	7.4795	5.9798
$I_{y2-s}^s \times 10^2$	173.44	14.903	18.458	2.1698	2.1824
$I_{y1-r}^s \times 10^8$	39012	1.4839	1.5020	1.8139	1.4745
$I_{y2-r}^s \times 10^6$	1515575	244.67	726.04	2.4947	15.029
I_{u1-s}^s	15276	72.123	4.2562	0.4042	1.2496
I_{u2-s}^s	11001	2709.1	1817.2	10463	10080
I_{u1-r}^s	5110.6	2.1270	1.7177	2.1793	1.7740
I_{u2-r}^s	3650.8	7.0570	12.257	3.1221	3.5240
α	-0.0285	-8.5361	-3.9637	-10.276	-9.6056
$\phi_{\text{máx}}$	2.0088	0	0	0	0.0190

¹Los índices cuadráticos fueron evaluados para las expresiones analíticas dadas en la Tabla 1.1. En el caso del seguimiento del punto de referencia $u_{1\infty} = 136.5$ y $u_{2\infty} = 125.2$. En el caso del problema del rechazo de perturbaciones $u_{1\infty} = 94.7$ y $u_{2\infty} = 114.2$.

Tabla 4.19. Índices de desempeño para los sistemas de control del CSTR calculados numéricamente con el modelo no lineal.

Sistema no lineal original					
		Chen <i>et al.</i> (2002)		Ruiz-López <i>et al.</i> (2006)	
Índices ¹	BLT	Original	Diagonalizado	Original	Diagonalizado
$I_{y1-s}^s \times 10^5$	1328.9	4.5977	1.5065	1.1393	0.8417
I_{y2-s}^s	1.5957	2.9755	2.6054	2.4495	1.9769
$I_{y1-r}^s \times 10^8$	36978	1.3371	1.3564	1.6399	1.3318
$I_{y2-r}^s \times 10^6$	1498586	223.23	664.23	2.2964	13.686
I_{u1-s}^s	26735	115.58	46.474	26.158	47.944
I_{u2-s}^s	15637	602.94	725.64	694.30	668.60
I_{u1-r}^s	443.97	0.1802	0.1441	0.1854	0.1506
I_{u2-r}^s	444.07	0.6179	1.1063	0.2626	0.3012

¹Resultados de la evaluación numérica de los índices cuadráticos fueron evaluados. En el caso del seguimiento del punto de referencia $u_{1\infty} = 136.5$ y $u_{2\infty} = 125.2$. En el caso del problema del rechazo de perturbaciones $u_{1\infty} = 94.7$ y $u_{2\infty} = 114.2$.

Una simulación con cambios en ambos puntos de referencia ($C = C_{ss} + 0.005 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ y $T = T_{ss} + 5 \text{ K}$ a $t = 0 \text{ min}$) y perturbaciones en la entrada ($C = C_{ss} + 0.005 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ y $T = T_{ss} + 5 \text{ K}$ a $t = 1 \text{ min}$) para este sistema se presenta en las Figuras 4.24-4.27, donde es fácil verificar que los controladores multilazo tienen un desempeño similar a sus versiones multivariadas y que estos exceden ampliamente el desempeño de otros controladores multilazo sintonizados con otros métodos de referencia como el BLT reportado por Chen *et al.* (2002).

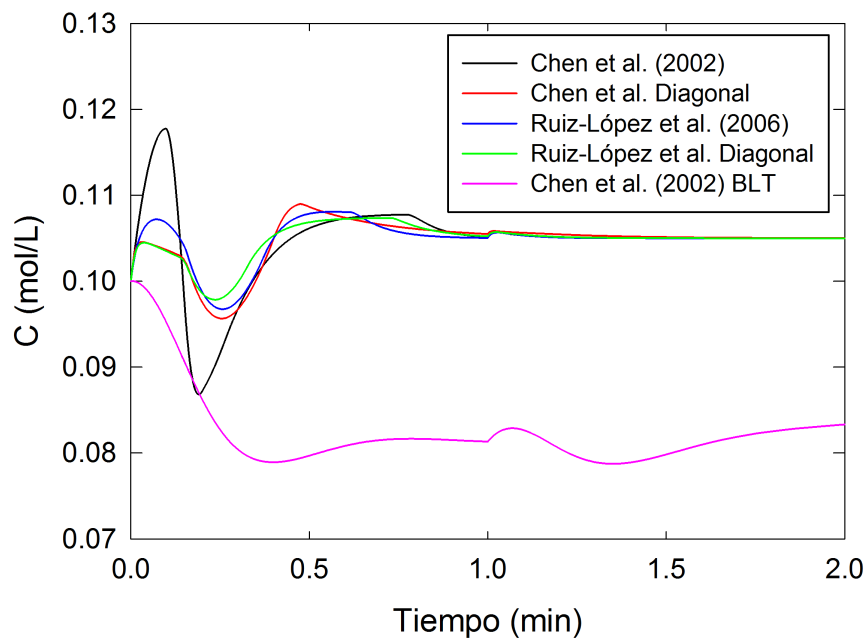


Figura 4.24. Concentración de salida en el CSTR no lineal ante cambios en el punto de referencia y variables de entrada.

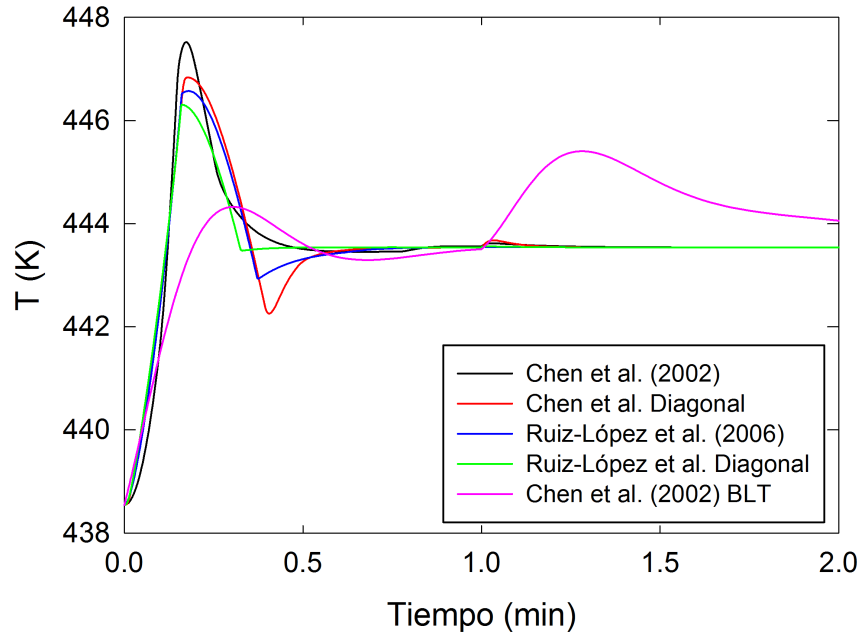


Figura 4.25. Temperatura de salida en el CSTR no lineal ante cambios en el punto de referencia y variables de entrada.

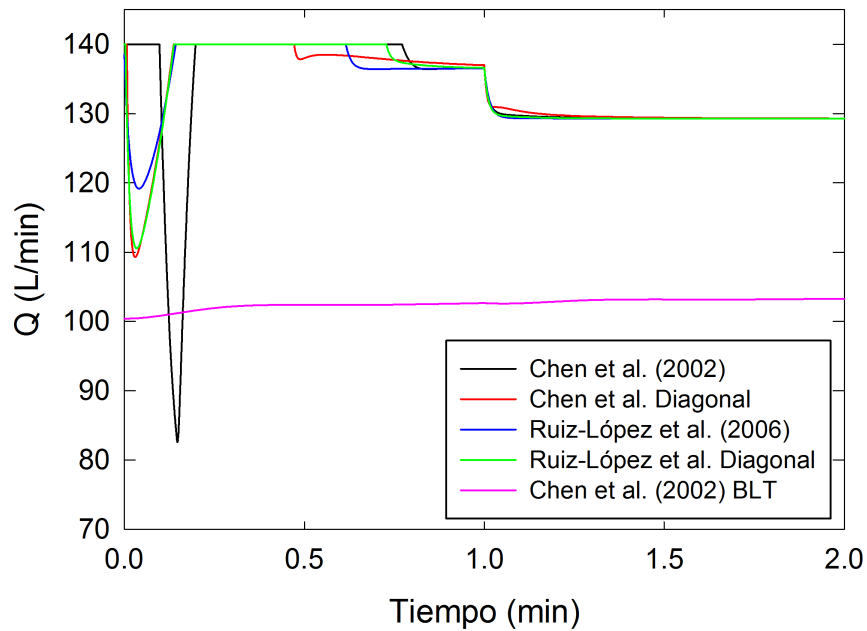


Figura 4.26. Flujo de alimentación para controlar cambios en el punto de referencia y variables de entrada en el CSTR no lineal.

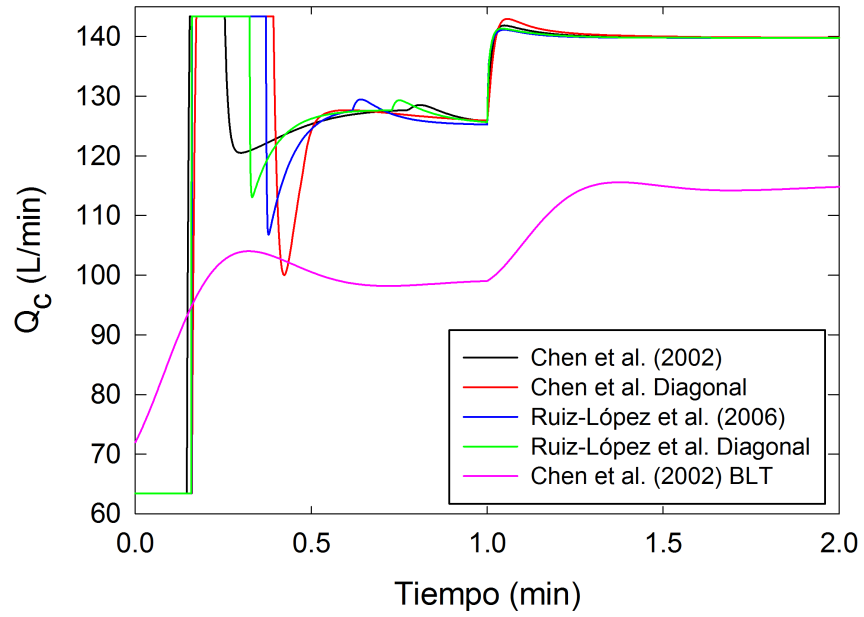


Figura 4.27. Flujo de enfriamiento para controlar cambios en el punto de referencia y variables de entrada en el CSTR no lineal.

V. Conclusiones

En este proyecto se generalizó la metodología LQR para permitir la síntesis de controladores P/PI multilazo. Con este enfoque es posible producir controladores que presentan un buen seguimiento del punto de referencia, uso de la señal de control y propiedades de robustez. Además, se demostró que la teoría desarrollada se puede aplicar para diagonalizar controladores multivariados obtenidos con otros métodos de sintonización existentes, generando versiones diagonales con características de operación similares a los multivariados originales.

VI. Recomendaciones

Aunque la teoría desarrollada se probó en la diagonalización de controladores PI en un sistema no lineal, no se realizó la sintonización de controladores para esta clase de procesos, por lo que para la continuación de este proyecto se recomienda aplicar la metodología propuesta a la sintonización de estos sistemas. Asimismo, se recomienda probar métodos alternativos para la selección de los controladores P y PI sintonizados con los algoritmos planteados, como por ejemplo, con el uso de «*desirability functions*». Finalmente, se puede intentar generalizar los procedimientos propuestos para obtener versiones diagonales de controladores con acción derivativa o de orden superior.

VII. Apéndice A. Soluciones analíticas para I_y e I_u de una acción proporcional

Se considera el sistema de las Ecs. (1.27) y (1.28) sujeto a la ley de control de la Ec. (1.29):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{K}_P(\mathbf{r} - \mathbf{y})$$

Dicho sistema se puede escribir en la representación del espacio de estados en lazo cerrado, Ecs. (3.7) a (3.9), cuyas matrices se definen como las Ecs. (3.10) y (3.11):

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbb{B}_1\mathbf{w} + \mathbb{B}_2\mathbf{r}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_1\mathbf{z}$$

$$\mathbf{u} = \mathbb{C}_2 \mathbf{x} + \mathbb{D}_1 \mathbf{w} + \mathbb{D}_2 \mathbf{r}$$

La solución analítica de la Ec. (3.7) para una perturbación escalón en \mathbf{r} , es decir $\mathbf{r} = \mathbf{k}_2 1(t)$, cuando $\mathbf{w} = 0$ y sujeta a $\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$ está dada por la Ec. (7.1):

$$\mathbf{z}(t) = \mathbb{A}^{-1} \left[e^{\mathbb{A}t} - \mathbf{I} \right] \mathbb{B}_2 \mathbf{k}_2 \quad (7.1)$$

Por lo tanto, la salida se evalúa a partir de la Ec. (7.2):

$$\mathbf{y} = \pi_1 e^{\mathbb{A}t} \boldsymbol{\Omega} + \pi_y \quad (7.2)$$

donde las matrices π_1 , $\boldsymbol{\Omega}$ y π_y están dadas por las Ecs. (7.3) a (7.5):

$$\pi_1 = \mathbb{C}_1 \mathbb{A}^{-1} \quad (7.3)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbb{B}_2 \mathbf{k}_2 \quad (7.4)$$

$$\pi_y = -\mathbb{C}_1 \mathbb{A}^{-1} \boldsymbol{\Omega} \quad (7.5)$$

El índice de funcionamiento del error se evalúa como se muestra en la Ec. (7.6):

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^t (\mathbf{r} - \mathbf{y})^T \mathbb{Q} (\mathbf{r} - \mathbf{y}) dt \\ &= \int_0^t \left(\mathbf{k}_2 - (\pi_1 e^{\mathbb{A}t} \boldsymbol{\Omega} + \pi_y) \right)^T \mathbb{Q} \left(\mathbf{k}_2 - (\pi_1 e^{\mathbb{A}t} \boldsymbol{\Omega} + \pi_y) \right) dt \\ &= \int_0^t \left(\mathbf{k}_2^T \mathbb{Q} - \pi_1^T e^{\mathbb{A}^T t} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbb{Q} - \pi_y^T \mathbb{Q} \right) \left(\mathbf{k}_2 - (\pi_1 e^{\mathbb{A}t} \boldsymbol{\Omega} + \pi_y) \right) dt \\ &= \int_0^t \left(\mathbf{k}_2^T \mathbb{Q} \mathbf{k}_2 - \pi_1^T e^{\mathbb{A}^T t} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbb{Q} \mathbf{k}_2 - \pi_y^T \mathbb{Q} \mathbf{k}_2 - \dots \right. \\ &\quad \left. \mathbf{k}_2^T \mathbb{Q} \pi_1 e^{\mathbb{A}t} \boldsymbol{\Omega} + \pi_1^T e^{\mathbb{A}^T t} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbb{Q} \pi_1 e^{\mathbb{A}t} \boldsymbol{\Omega} + \pi_y^T \mathbb{Q} \pi_1 e^{\mathbb{A}t} \boldsymbol{\Omega} - \dots \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{k}_2^T \mathbb{Q} \pi_y + \pi_1^T e^{\mathbb{A}^T t} \Omega^T \mathbb{Q} \pi_y + \pi_y^T \mathbb{Q} \pi_y) dt \\
 & = \mathbf{k}_2^T \mathbb{Q} \mathbf{k}_2 \int_0^t dt - \Omega^T \pi_1^T \mathbb{Q} \mathbf{k}_2 \int_0^t e^{\mathbb{A}^T t} dt - \pi_y^T \mathbb{Q} \mathbf{k}_2 \int_0^t dt - \dots \\
 & \mathbf{k}_2^T \mathbb{Q} \pi_1 \int_0^t e^{\mathbb{A} t} dt \Omega + \Omega^T \int_0^t e^{\mathbb{A}^T t} \pi_1^T \mathbb{Q} \pi_1 e^{\mathbb{A} t} dt \Omega + \pi_y^T \mathbb{Q} \pi_1 \int_0^t e^{\mathbb{A} t} dt \Omega - \dots \\
 & \mathbf{k}_2^T \mathbb{Q} \pi_y \int_0^t dt + \Omega^T \int_0^t e^{\mathbb{A}^T t} dt \pi_1^T \mathbb{Q} \pi_y + \pi_y^T \mathbb{Q} \pi_y \int_0^t dt
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

En la expresión anterior, la solución al termino $\int_0^t e^{\mathbb{A} t} dt$ es la Ec. (7.7):

$$\int_0^t e^{\mathbb{A} t} dt = \mathbb{A}^{-1} \int_0^t e^{\mathbb{A} t} \mathbb{A} dt = \mathbb{A}^{-1} e^{\mathbb{A} t} \Big|_0^t = \mathbb{A}^{-1} e^{(\mathbb{A} t)} - \mathbb{A}^{-1} \mathbb{A}^{-1} (e^{\mathbb{A} t} - \mathbf{I}) \tag{7.7}$$

mientras que $\int_0^t \theta^T \mathbb{Q}_y \theta dt$ se puede evaluar como la Ec. (7.8)

$$\int_0^t \theta^T \mathbb{Q}_y \theta dt = -\theta^T(t) \mathbb{P} \theta(t) + \theta^T(0) \mathbb{P} \theta(0) = -\theta^T(t) \mathbb{P} \theta(t) + \mathbb{P} \tag{7.8}$$

Los grupos θ y \mathbb{Q}_y están definidos como se indica en las Ecs. (7.9) y (7.10), respectivamente:

$$\theta = e^{\mathbb{A} t} \tag{7.9}$$

$$\mathbb{Q}_y = \pi_1^T \mathbb{Q} \pi_1 \tag{7.10}$$

Insertando la Ec. (7.7) en la Ec. (7.6) se obtiene la solución del índice de funcionamiento del error mostrada en la Ec. (7.11):

$$\begin{aligned}
 I_y & = \mathbf{k}_2^T \mathbb{Q} \mathbf{k}_2 t - \Omega^T \pi_1^T \mathbb{Q} \mathbf{k}_2 \left[\mathbb{A}^{-1^T} (e^{\mathbb{A}^T t} - \mathbf{I}) \right] - \pi_y^T \mathbb{Q} \mathbf{k}_2 t - \dots \\
 & \mathbf{k}_2^T \mathbb{Q} \pi_1 \left[\mathbb{A}^{-1} (e^{\mathbb{A} t} - \mathbf{I}) \right] \Omega + \Omega^T \mathbb{P} \Omega - \Omega^T e^{\mathbb{A}^T t} \mathbb{P} e^{\mathbb{A} t} \Omega + \pi_y^T \mathbb{Q} \pi_1 \left[\mathbb{A}^{-1} (e^{\mathbb{A} t} - \mathbf{I}) \right] \Omega - \dots \\
 & \mathbf{k}_2^T \mathbb{Q} \pi_y t + \Omega^T \left[\mathbb{A}^{-1^T} (e^{\mathbb{A}^T t} - \mathbf{I}) \right] \pi_1^T \mathbb{Q} \pi_y + \pi_y^T \mathbb{Q} \pi_y t
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

En el caso de la acción de control, su solución está dada por la Ec. (7.12):

$$\mathbf{u} = \pi_2 e^{\mathbb{A}t} \boldsymbol{\Omega} + \pi_u \quad (7.12)$$

donde π_2 y π_u son matrices definidas en las Ecs. (7.13) y (7.14), respectivamente:

$$\pi_2 = \mathbb{C}_2 \mathbb{A}^{-1} \quad (7.13)$$

$$\pi_u = -\mathbb{C}_2 \mathbb{A}^{-1} \boldsymbol{\Omega} + \mathbb{D}_2 \mathbf{k}_2 \quad (7.14)$$

Por lo tanto, el índice de funcionamiento del esfuerzo de control se evalúa como se muestra en la Ec. (7.15):

$$\begin{aligned} & \int_0^t \mathbf{u}^T \mathbb{R} \mathbf{u} dt \\ &= \int_0^t (\pi_2 e^{\mathbb{A}t} \boldsymbol{\Omega} + \pi_u)^T \mathbb{R} (\pi_2 e^{\mathbb{A}t} \boldsymbol{\Omega} + \pi_u) dt \\ &= \int_0^t (\pi_2^T e^{\mathbb{A}^T t} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbb{R} + \pi_u^T \mathbb{R}) (\pi_2 e^{\mathbb{A}t} \boldsymbol{\Omega} + \pi_u) dt \\ &= \int_0^t (\pi_2^T e^{\mathbb{A}^T t} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbb{R} \pi_2 e^{\mathbb{A}t} \boldsymbol{\Omega} + \pi_u^T \mathbb{R} \pi_2 e^{\mathbb{A}t} \boldsymbol{\Omega} + \dots \\ & \quad \pi_2^T e^{\mathbb{A}^T t} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbb{R} \pi_u + \pi_u^T \mathbb{R} \pi_u) dt \\ &= \boldsymbol{\Omega}^T \int_0^t e^{\mathbb{A}^T t} \pi_2^T \mathbb{R} \pi_2 e^{\mathbb{A}t} dt \boldsymbol{\Omega} + \pi_u^T \mathbb{R} \pi_2 \int_0^t e^{\mathbb{A}t} dt \boldsymbol{\Omega} + \dots \\ & \quad \boldsymbol{\Omega}^T \pi_2^T \mathbb{R} \pi_u \int_0^t e^{\mathbb{A}^T t} dt + \pi_u^T \mathbb{R} \pi_u \int_0^t dt \end{aligned} \quad (7.15)$$

En la ecuación anterior la solución a $\int_0^t \boldsymbol{\theta}^T \mathbb{R}_u \boldsymbol{\theta} dt$ es la Ec. (7.16):

$$\int_0^t \boldsymbol{\theta}^T \mathbb{R}_u \boldsymbol{\theta} dt = -\boldsymbol{\theta}^T(t) \mathbb{P} \boldsymbol{\theta}(t) + \boldsymbol{\theta}^T(0) \mathbb{P} \boldsymbol{\theta}(0) = -\boldsymbol{\theta}^T(t) \mathbb{P} \boldsymbol{\theta}(t) + \mathbb{P} \quad (7.16)$$

donde \mathbb{R}_u esta definido por la Ec. (7.17).

$$\mathbb{R}_u = \pi_2^T \mathbb{R} \pi_2 \quad (7.17)$$

Insertando la Ec. (7.7) en la Ec. (7.15) se obtiene la solución del índice de funcionamiento del esfuerzo de control mostrada en la Ec. (7.18):

$$\begin{aligned} I_u &= \Omega^T \mathbb{P} \Omega - \Omega^T e^{\mathbb{A}^T t} \mathbb{P} e^{\mathbb{A} t} \Omega + \pi_u^T \mathbb{R} \pi_2 \left[\mathbb{A}^{-1} (e^{\mathbb{A} t} - \mathbf{I}) \right] \Omega + \dots \\ &\Omega^T \pi_2^T \mathbb{R} \pi_u \left[\mathbb{A}^{-1^T} (e^{\mathbb{A}^T t} - \mathbf{I}) \right] + \pi_u^T \mathbb{R} \pi_u t \end{aligned} \quad (7.18)$$

Las ecuaciones (7.11) y (7.18) se pueden escribir finalmente como las Ecs. (7.19) y (7.20), respectivamente:

$$\begin{aligned} I_y &= (\mathbf{k}_2 - \pi_y)^T \mathbb{Q} (\mathbf{k}_2 - \pi_y) t + (\pi_y - \mathbf{k}_2)^T \mathbb{Q} \Sigma_1 + \Sigma_1^T \mathbb{Q} (\pi_y - \mathbf{k}_2) + \dots \\ &\Omega^T (\mathbb{P} - e^{\mathbb{A}^T t} \mathbb{P} e^{\mathbb{A} t}) \Omega \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$I_u = \Omega^T (\mathbb{P} - e^{\mathbb{A}^T t} \mathbb{P} e^{\mathbb{A} t}) \Omega + \Sigma_2^T \mathbb{R} \pi_u + \pi_u^T \mathbb{R} \Sigma_2 + \pi_u^T \mathbb{R} \pi_u t \quad (7.20)$$

definiendo a Σ_i como se presenta en la Ec. (7.21):

$$\Sigma_i = \mathbb{C}_i (\mathbb{A}^2)^{-1} (e^{\mathbb{A} t} - \mathbf{I}) \Omega; \quad (i = 1, 2) \quad (7.21)$$

Bibliografía

- Ablay, G. 2015. Variable structure controllers for unstable processes. *Journal of Process Control*, **32**, 10–15.
- Agrawal, P., & Lakshminarayanan, S. 2003. Tuning proportional integral derivative controllers using achievable performance indices. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **42**(22), 5576–5582.
- Ali, E. 2000. Control of nonlinear chemical processes using adaptive proportional integral algorithms. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **39**(6), 1980–1992.
- Antsaklis, P. J. 1990. Neural networks for control systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **1**(2), 242–244.
- Bao, J., Forbes, J.F., & McLellan, P.J. 1999. Robust multiloop PID controller design: a successive semidefinite programming approach. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **38**(9), 3407–3419.
- Berk, Z. 2013. “*Elements of Process Control*” en *Food Process Engineering and Technology*. Second edn. Food Science and Technology. San Diego, California,

- USA: Academic Press.
- Bishop, P. 1992. *Dynamics and Control of the Activated Sludge Process*. Water Quality Management Library, vol. 6. Lancaster, Pennsylvania, USA: Technomic Publishing Company.
- Carrillo-Ahumada, J., Rodríguez-Jimenes, G.C., & García-Alvarado, M.A. 2011. Tuning optimal-robust linear MIMO controllers of chemical reactors by using Pareto optimality. *Chemical Engineering Journal*, **174**(1), 357–367.
- Cetin, M., & Iplikci, S. 2015. A novel auto-tuning PID control mechanism for non-linear systems. *ISA Transactions*, **58**, 292–308.
- Chen, C.-L., Wang, T.-C., & Hsu, S.-H. 2002. An LMI approach to H_∞ PI controller design. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, **35**(1), 83–93.
- Choudhury, T.A., Berndt, C.C., & Mand, Z. 2015. Modular implementation of artificial neural network in predicting in-flight particle characteristics of an atmospheric plasma spray process. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **45**, 57–70.
- Coughanowr, D.R., & LeBlanc, S.E. 2009. *Process Systems Analysis and Control*. Third edn. New York, USA: McGraw Hill.
- Das, S., Pan, I., Halder, K., Das, S., & Gupta, A. 2013. LQR based improved discrete PID controller design via optimum selection of weighting matrices using fractional order integral performance index. *Applied Mathematical Modelling*, **37**(6), 4253–4268.
- Das, S., Pan, I., & Das, S. 2015. Multi-objective LQR with optimum weight selection to design FOPID controllers for delayed fractional order processes. *ISA*

- Transactions*, 58, 35–49.
- Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P., & Francis, B.A. 1989. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8), 831–845.
- Gao, Z. 2013. On the centrality of disturbance rejection in automatic control. *ISA Transactions*, 53(4), 850–857.
- García-Alvarado, M.A., & Ruiz-López, I.I. 2010. A design method for robust and quadratic optimal MIMO linear controllers. *Chemical Engineering Science*, 65(11), 3431–3438.
- Goncalves, E.N., Palhares, R.M., & Takahashi, R.H.C. 2008. A novel approach for H_2/H_∞ robust PID synthesis for uncertain systems. *Journal of Process Control*, 18(1), 19–26.
- He, J.-B., Wang, Q.-G., & Lee, T.-H. 2000. PI/PID controller tuning via LQR approach. *Chemical Engineering Science*, 55(13), 2429–2439.
- HongboZou, & Li, H. 2015. Tuning of PI-PD controller using extended non-minimal state space model predictive control for the stabilized gasoline vapor pressure in a stabilized tower. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 142, 1–8.
- Hwang, C., & Hsiao, C.-Y. 2002. A new approach to mixed H_2/H_∞ optimal PI/PID controller design. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 41(24), 6107–6119.
- Jung, J., Choi, J.Y., & Lee, J. 1999. One-parameter method for a multiloop control system design. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 38(4),

1580–1588.

- Kadhar, K.M.A., Baskar, S., & Amali, S.M.J. 2015. Diversity controlled self adaptive differential evolution based design of non-fragile multivariable PI controller. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **46**, 209–222.
- Kumar, V.V., Rao, V.S.R., & Chidambaram, M. 2012. Centralized PI controllers for interacting multivariable processes by synthesis method. *ISA Transactions*, **51**(3), 400–409.
- Lee, J., Cho, W., & Edgar, T.F. 1998. Multiloop PI controllers tuning for interacting multivariable processes. *Computers and Chemical Engineering*, **22**(11), 1711–1723.
- Lee, J.-T., & Choi, J.-Y. 1993. Design of multiloop PI controller. *Korean Chemical Engineering Research*, **31**(3), 272–272.
- Leva, A., & Bascetta, L. 2007. Set point tracking optimisation by causal nonparametric modelling. *Automatica*, **43**(11), 1984–1991.
- Liu, Y., Gao, Y., Gao, Z., Wang, H., & Li, P. 2010. Simple nonlinear predictive control strategy for chemical processes using sparse kernel learning with polynomial form. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **49**(17), 8209–8218.
- Loh, A.P., Hang, C.C, Quek, C.K., & Vasnani, V.U. 1993. Autotuning of multiloop proportional-integral controllers using relay feedback. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **32**(6), 1102–1107.
- Luan, X., Chen, Q., & Liu, F. 2014. Centralized PI control for high dimensional multivariable systems based on equivalent transfer function. *ISA Transactions*, **53**(5), 1554–1561.

- Luyben, W.L. 1986. Simple method for tuning SISO controllers in multivariable system. *Industrial and Engineering Chemistry Process Design and Development*, **25**(3), 654–660.
- Luyben, W.L. 1996. *Process modelling, simulation, and control for chemical engineers*. Second edn. McGraw-Hill Company.
- Maghade, D.K., & Patre, B.M. 2012. Decentralized PI/PID controllers based on gain and phase margin specifications for TITO processes. *ISA Transactions*, **51**(4), 550–558.
- Maghade, D.K., & Patre, B.M. 2014. Pole placement by PID controllers to achieve time domain specifications for TITO systems. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, **36**(4), 506–522.
- Michels, K., Klawonn, F., Kruse, R., & Nürnberger, A. 2006. “*Fundamentals of Fuzzy Systems*” en *Fuzzy Control*. Heidelberg, Germany: Springer.
- Mikles, J., & Fikar, M. 2007. *Process Modelling, Identification, and Control*. Heidelberg, Germany: Springer Berlin Heidelberg.
- Mudi, R.K., & Dey, C. 2011. Performance improvement of PI controllers through dynamic set-point weighting. *ISA Transactions*, **50**(2), 220–230.
- Ogata, K. 2010. *Modern Control Engineering*. Fifth edn. New Jersey, USA: Prentice Hall.
- Oka, Y., & Suzuki, K. 2013. “*Control System Basics and PID Control*” en *Nuclear Reactor Kinetics and Plant Control*. Tokyo, Japan: Springer.
- Oz, C., & Leu, M.C. 2011. American sign language word recognition with a sensory glove using artificial neural networks. *Engineering Applications of Artificial*

- Intelligence*, **24**(7), 1204–1213.
- Ram, V.D., & Chidambaram, M. 2015. Simple method of designing centralized PI controllers for multivariable systems based on SSGM. *ISA Transactions*, **56**, 252–260.
- Rao, D.H., Gupta, M.M., & Wood, H.C. 1993. Neural networks in control systems. *Wescanex '93. Communications, Computer and Power in the Modern Environment. Conference Proceedings. IEEE*, 282–290.
- Rao, N.M., Vora, P., & Moudgalya, K.M. 2003. PID control of DAE systems. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **42**(20), 4599–4610.
- Resconi, G., Pessa, G., & Fatmi, H.A. 1991. A computational field theory for adaptive control of neural networks and systems. *International Conference on Control* **91**, **1**, 155–160.
- Reynoso-Meza, G., Sanchis, J., Blasco, X., & Herrero, J.M. 2012. Multiobjective evolutionary algorithms for multivariable PI controller design. *Expert Systems with Applications*, **39**(9), 7895–7907.
- Reynoso-Meza, G., Sanchis, J., Blasco, X., & Freire, R.Z. 2016. Evolutionary multi-objective optimisation with preferences for multivariable PI controller tuning. *Expert Systems with Applications*, **51**, 120–133.
- Ruiz-López, I.I., Rodríguez-Jimenes, G.C., & García-Alvarado, M.A. 2006. Robust MIMO PID controllers tuning based on complex/real ratio of the characteristic matrix eigenvalues. *Chemical Engineering Science*, **61**(13), 4332–4340.
- Sadeghian, H., Salarieh, H., Alasty, A., & Meghdari, A. 2014. On the linear-quadratic regulator problem in one-dimensional linear fractional systems. *Automatica*,

- 50(1), 282–286.
- Singha, A.K., & Datta, K. 2014. Design of PI controllers for systems with time delay. *Journal of The Institution of Engineers (India): Series B*, **95**(1), 29–35.
- Sivatte-Adroer, M., Llanas-Parra, X., Buj-Corral, I., & Vivancos-Calvet, J. 2016. Indirect model for roughness in rough honing processes based on artificial neural networks. *Precision Engineering*, **43**, 505–513.
- Smith, C.A., & Corripio, A.B. 2006. *Principles and Practices of Automatic Process Control*. Second edn. New York, USA: John Wiley and Sons.
- Srivastava, S., Misra, A., Thakur, S.K, & Pandit, V.S. 2016. An optimal PID controller via LQR for standard second order plus time delay systems. *ISA Transactions*, **60**, 244–253.
- Tan, W., Chen, T., & Marquez, H.J. 2002. Robust controller design and PID tuning for multivariable processes. *Asian Journal of Control*, **4**(4), 439–451.
- Tian, Y.-C., & Gao, F. 1998. Double-controller scheme for separating load rejection from set-point tracking. *Chemical Engineering Research and Design*, **76**(4), 445–450.
- Valentas, K. J., Rotstein, Enrique, & Singh, R. Paul (eds). 1997. *Handbook of Food Engineering Practice*. Boca Raton, New York, USA: CRC Press.
- Vargas-González, S., Rodríguez-Jimenes, G.C., García-Alvarado, M.A., & Carrillo-Ahumada, J. 2013. Relation between first order dynamic parameters with PI control parameters in Nash equilibrium. *Proceedings of the 2013 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering (ICMEAE)*, 123–126.

- Vitthal, R., & Rao, C.D. 1995. Process control via artificial neural networks and learning automata. *Proceedings of the IEEE/IAS International Conference on Industrial Automation and Control 1995*, 329–334.
- Vu, T.N.L., & Lee, M. 2008. Multiloop PI controller design for enhanced disturbance rejection in multi-delay process. *International Journal of Mathematics and Computers in Simulation*, 2(1), 89–94.
- Wang, Y.-G., & Cai, W.-J. 2002. Advanced proportional integral derivative tuning for integrating and unstable processes with gain and phase margin specifications. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 41(12), 2910–2914.
- Younkin, G.W. 2002. *Industrial Servo Control Systems: Fundamentals and Applications*. Second edn. New York, USA: Marcel Dekker.
- Zadeh, L.A. 1994. Fuzzy logic: issues, contentions and perspectives. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1994*.
- Zhong, Q.-C., & Li, H.-X. 2002. 2-Degree of freedom proportional integral derivative type controller incorporating the Smith principle for processes with dead time. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 41(10), 2448–2454.