

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas



# El Polinomio de Tutte

Tesis presentada para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas

Presenta:

Selena Hernández Carrera

Director de Tesis:

Dr. Carlos Guillén Galván

Diciembre 2019



*A mis padres: Fermín y Angela.*  
*A mis hermanos: Clemente, Fermín*  
*y José Luis.*



# *Agradecimientos*

Quiero agradecer a muchas personas por la dedicación que me han prestado y los conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera.

Entre las más importantes y en primer lugar al Dr. Carlos Guillén Galván por aceptar ser mi director de tesis, por haberme enseñado y ayudado en cada duda que surgiera y el tiempo durante la elaboración de la tesis. Además, de escucharme, darme consejos y el ánimo que me faltaba cuando más lo necesitaba.

Luego, a mis sinodales: Dr. Gabriel Kantún Montiel, Dr. Carlos Alberto López Andrade y Dr. César Bautista Ramos por tomarse el tiempo de revisar y hacerme las correcciones pertinentes para una mejor elaboración de la tesis.

En especial, agradecer a mis padres y hermanos por creer y apoyarme incondicionalmente, a mi padre que supó confiar en mí, a mi madre por sus consejos, además, de escucharme y guiarme en mis decisiones, a mis hermanos que siempre me deseaban lo mejor de la carrera.

Finalmente, a mis amigos, Felipe Juárez, Hernán Cortés, Ivon Merino, América Análco, especialmente a Arely Maldonado que durante la carrera hicieron menos duros los años en ella.

Muchísimas gracias a todos.



# Introducción

La teoría de matroides es una teoría matemática que surge en 1953 con los trabajos de Whitney [33] su desarrollo en gran parte se apoya principalmente en dos tipos de aplicaciones, en el campo de la algoritmia y en la teoría del Polinomio de Tutte.

W. T. Tutte fue un matemático y descifrador de códigos. Durante la Segunda Guerra Mundial su trabajo fue la clave para comprender el cifrado de Lorentz un código alemán muy común. Cuando terminó la guerra, sus trabajos se enfocaron más en la teoría de matroides y grafos. De ahí, uno de sus logros más importantes fue el desarrollo de lo que él llamó el humildemente “dicromático”. Aunque, actualmente es conocido como el Polinomio de Tutte (1954).

Una aplicación de la teoría de matroides es el Polinomio de Tutte. El Polinomio de Tutte para matroides fue inventado por Crapo [6] por una generalización del trabajo de Tutte en coloreo. El polinomio de Tutte es una herramienta general que descubrió en un principio para grafos y sus aplicaciones pueden ser muy variadas. Posteriormente se pudo definir el Polinomio de Tutte en una estructura más rica, la de los matroides, los cuales generalizan algunas de las propiedades de espacios vectoriales.

En base de la teoría de grafos y de matroides presentaremos el Polinomio de Tutte que está definido en dos variables siendo una generalización del polinomio cromático que resulta ser una invariante para grafos y matroides.

El Polinomio de Tutte y su evaluación principal, el polinomio característico se presenta en una variedad de aplicaciones [3]. Por otra parte, el Polinomio de Tutte es especial dentro de la teoría de matroides debido a la estructura que presenta sobre un matroide en general y sobre la naturaleza de una “invariante Tutte-Grothendieck”.

Para darnos cuenta de la gran diversidad de las aplicaciones del Polinomio de Tutte, se enlista algunas de las áreas en las cuales ciertas evaluaciones del Polinomio de Tutte coinciden con importantes invariantes, están son:

1. Cálculo de flujo mínimo en redes.
2. Coloreo de grafos.
3. Teoría de percolación.
4. Estructuras hiperplanas, convexidad, y separación en espacios afines y proyectivos.
5. Aciclicidad y totalmente acíclico, y orientaciones coherentes de grafos y matroides orientados.
6. Zonotopos.
7. Empaquetado y teoría de códigos.
8. Números de intersección para subconjuntos de puntos en un espacio proyectivo y el problema crítico.
9. Redes eléctricas.
10. Diseño combinatorio.
11. Mecánica cuántica y estadística.
12. Árboles.
13. Grafos signados y de voltaje.
14. Caminos eulerianos.
15. Cubrientes.
16. Puntuación en torneos.
17. Disecciones topológicas.
18. Grafos embebidos.
19. Sistemas enraizados.

En el capítulo 5 tratamos algunas áreas enlistadas arriba especialmente las que coinciden al conteo de ciertas estructuras en grafos. También es importante resaltar que las operaciones de reducción en matroides como la eliminación y contracción de los elementos son fundamentales para la definición del Polinomio de Tutte sobre matroides.

Estas operaciones son inspiradas de las operaciones realizadas sobre grafos, así como el concepto de conjuntos independientes es inspirada del álgebra lineal.

La tesis se encuentra organizada de la siguiente manera.



En el primer capítulo se presentan algunos conceptos de la teoría de grafos, operaciones entre grafos y un elemento, y operaciones entre grafos. En el capítulo 2 se trata el tema de coloreo en grafos. En el capítulo 3 se introduce el concepto de matroide y se muestran algunas propiedades. En el capítulo 4 se construye el Polinomio de Tutte para matroides y también se muestra una fórmula cerrada para el caso del Polinomio de Tutte sobre un grafo. En el capítulo 5 se presentan algunas evaluaciones del Polinomio de Tutte que coincide con invariantes de interés considerable.



# Índice general

Agradecimientos	v
Introducción	vii
Índice de Figuras	xiii
<b>1. Teoría de Grafos</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos básicos . . . . .	1
1.2. Operaciones de aristas y vértices . . . . .	7
1.3. Grafos conectados con caminos . . . . .	9
1.4. Operaciones entre grafos . . . . .	10
1.5. Árboles y bosques . . . . .	11
1.6. Menores . . . . .	13
<b>2. Coloreo de grafos</b>	<b>15</b>
2.1. Coloración de vértices . . . . .	15
2.2. Polinomio Cromático . . . . .	16
2.3. Otra forma de coloreo . . . . .	22
<b>3. Teoría de Matroides</b>	<b>25</b>
3.1. Definición de Matroide . . . . .	25
3.2. Lazos y elementos paralelos . . . . .	30
3.3. Grafos y matroides . . . . .	31
3.4. Eliminación y Contracción . . . . .	35
<b>4. El Polinomio de Tutte</b>	<b>39</b>
4.1. Construcción para el Polinomio de Tutte . . . . .	39
4.2. Polinomio de corango-nulidad . . . . .	42
4.3. Suma directa de matroides . . . . .	44
4.4. El Polinomio de Tutte-Gröthendieck . . . . .	45
4.5. Teorema de la Receta . . . . .	46
<b>5. Conteo a través del Polinomio de Tutte</b>	<b>51</b>
5.1. Aplicación del Polinomio de Tutte . . . . .	51
5.2. Conexión del polinomio cromático con el Tutte . . . . .	53
5.3. Flujos en ninguna parte cero . . . . .	54



# Índice de figuras

1.1. Un grafo $G$ .	2
1.2. Un grafo sin aristas.	3
1.3. Grafo con aristas incidentes $G = (V, E)$ .	4
1.4. Un grafo dirigido.	4
1.5. Grafos completos $K_1, K_2, K_3$ y $K_4$ .	5
1.6. Un grafo $G$ y su grafo línea.	5
1.7. Conjuntos independientes de $G$ .	5
1.8. $G \approx G'$ .	6
1.9. Un grafo con su subgrafo, subgrafo inducido y subgrafo abarcador.	7
1.10. Operaciones con aristas y vértices de un grafo.	8
1.11. Un grafo con un camino y un ciclo.	9
1.12. Grafo conectado y no conectado.	9
1.13. Un grafo con todos sus puentes.	10
1.14. Operaciones de unión e intersección entre grafos $G$ y $G'$ .	11
1.15. La suma directa $G \oplus G$ .	11
1.16. Grafo árbol y grafo bosque.	12
1.17. Árbol abarcador de un grafo $G$ .	12
1.18. El grafo $G$ es una subdivisión de $X$ .	13
1.19. $X$ es un menor topológico de $Y$ .	13
1.20. El grafo inflado $IX$ .	14
1.21. $G \subseteq Y = IX$ , entonces $X$ es un menor de $Y$ .	14
2.1. Coloreo del grafo $G$ .	16
2.2. Coloreo del camino de $K_8$ .	17
2.3. Los grafos $G, G - e$ y $G/e$ .	18
2.4. Un grafo $G$ .	19
2.5. El $P(G - e, \lambda) = P(G, \lambda) + P(G/e, \lambda)$ .	19
2.6. Coloreo del ciclo de longitud 3.	20
2.7. Coloración en aristas de un grafo.	22
2.8. Una coloración de vértices de $L(G)$ .	23
3.1. El grafo $K_3$ .	29
3.2. Grafo asociado al matroide representable $M[A]$ .	30
3.3. Lazo y elementos paralelos de un matroide.	31
3.4. Matroide asociado al grafo $G$ .	33
3.5. La suma directa $G \oplus G$ .	33

---

3.6.	Matroide representable $M[A]$ menos el vector 7. . . . .	36
3.7.	Matroide representable $M[A]$ y la contracción del vector 7. . . . .	37
4.1.	El Polinomio de Tutte de un grafo $G$ . . . . .	41
4.2.	El Polinomio de Tutte de un grafo $G$ con bucle y puentes. . . . .	42
4.3.	Matroide para el ejemplo 4.3 . . . . .	43
5.1.	Las 6 orientaciones acíclicas de $K_3$ . . . . .	52
5.2.	La orientación de un grafo tiene un flujo cero en ninguna parte con $H = \mathbb{Z}_4$ . . . . .	54
5.3.	La arista $\{v_3, v_4\}$ se invierte y su peso $p(e) = 3$ se reemplaza por $-p(e) = 1$ en $\mathbb{Z}_4$ . . . . .	55
5.4.	El grafo $G$ . . . . .	56

# Capítulo 1

## Teoría de Grafos

El propósito de este capítulo es introducir los conceptos de la Teoría de Grafos que serán de utilidad en los capítulos posteriores. También son de principal interés las operaciones sobre grafos como la contracción y eliminación de aristas, especialmente en el capítulo 4 donde se define la construcción del Polinomio de Tutte.

### 1.1. Conceptos básicos

Los símbolos  $\mathbb{Z}$  and  $\mathbb{N}$  denotan los enteros y los enteros no negativos respectivamente. Dado  $k \in \mathbb{Z}$  el conjunto de todos los subconjuntos de  $A$  que tienen  $k$  elementos es denotado por  $[A]^k$ . La cardinalidad de un conjunto es denotado por  $|A|$ .

**Ejemplo 1.1.** Dado un  $X$  un conjunto arbitrario,  $[X]^k = \{\emptyset\}$  si  $k \leq 0$  o si  $k > |X|$ . Para el conjunto  $A = \{a, b, c\}$ , entonces  $[A]^0 = \{\emptyset\}$  tenemos:

1.  $[A]^1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ .
2.  $[A]^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ .
3.  $[A]^3 = \{A\}$ .
4.  $[A]^k = \emptyset$  para todo  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2, 3\}$ .

Observe que si  $A = \emptyset$  entonces  $[A]^k = \emptyset$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

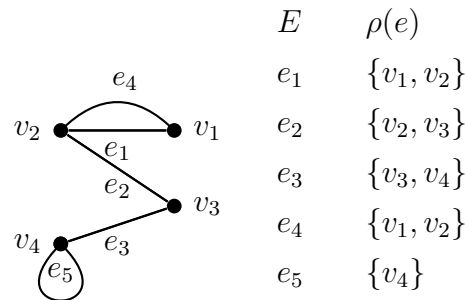
La definición que sigue del concepto de grafo, en algunos textos corresponden a la definición de multigrafo.

**Definición 1.1.** Un **grafo** es un par  $(V, E)$  de conjuntos finitos y disjuntos (de vértices y aristas) junto con un mapeo  $\rho : E \rightarrow V \cup [V]^2$  que asigna a toda arista uno o dos vértices (sus extremos).

**Definición 1.2.** Si  $x, y \in \rho(e)$ , entonces  $x$  e  $y$  son llamados **extremos** de la arista de  $e$ .

**Notación.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo,  $V(G)$  denota el conjunto de vértices de  $G$  y  $E(G)$  su conjunto de aristas. Para simplificar la notación se acostumbra escribir  $e \in G$  en vez de  $e \in E(G)$ , también  $v \in G$  en vez  $v \in V(G)$ . También es costumbre  $v \in e$  si  $v \in \rho(e)$ .

**Ejemplo 1.2.** Sea  $G$  el grafo tal que  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  y  $\rho : E \rightarrow V \cup [V]^2$  definido mediante la tabla de la figura 1.1. La representación gráfica de  $G$  puede verse en la figura 1.1.



**Figura 1.1:** Un grafo  $G$ .

Dos aristas  $e_1$  y  $e_2$  son **múltiples** si comparten sus mismos extremos, es decir,  $\rho(e_1) = \rho(e_2)$ . Luego, una arista  $e$  de  $G$  es un **lazo** si  $\rho(e) = \{x\}$ . Observe que del ejemplo 1.2,  $e_1$  y  $e_4$  son aristas múltiples y  $e_5$  es un lazo.

**Definición 1.3.** Un grafo  $G$  es **simple** si no tiene aristas múltiples ni lazos.

**Ejemplo 1.3.** Sea el grafo  $G$  tal que  $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $E(G) = \emptyset$ , ver la figura 1.2.





**Figura 1.2:** Un grafo sin aristas.

Si  $G$  es un grafo con un conjunto de vértices igual al conjunto vacío entonces  $G$  es llamado **grafo vacío** y se denota por  $\emptyset$  ( $G = (\emptyset, \emptyset)$ ).

Decimos que la arista  $e$  es **incidente** en  $x$  si  $x \in \rho(e)$ . También que  $x$  e  $y$  son **nodos adyacentes** en un grafo, si pertenecen a la misma arista. De manera análoga, dos aristas  $e_1$  y  $e_2$  son **aristas adyacentes** si comparten un nodo. El conjunto de todas las aristas adyacentes o vecinos de un vértice  $v \in V$  se denota por  $N(v)$ . Si  $N(v) = \emptyset$  entonces  $v$  es un vértice aislado.

**Definición 1.4.** El **orden** de un grafo  $G$  es el número de vértices de  $G$  y se denota por  $|G|$ , el número de aristas de  $G$  se denota por  $\|G\|$ . El **grado** o **valencia** de un vértice es el número de aristas incidentes en él.

**Observación.** Observemos que si  $e$  es un lazo incidente en el vértice  $x$ , entonces  $e$  contribuye en 2 al grado de  $x$ . Si  $G$  es un grafo  $d_G(v) = |N(v)|$  es el grado de un vértice  $v$  que pertenece al conjunto de vértices de  $G$ . Cuando es claro en el contexto quién es  $G$ , denotamos  $d_G(v) = d(v)$ .

Definimos el **grado mínimo** como  $\delta(G)$  y el **grado máximo** como  $\Delta(G)$  del grafo  $G$  y lo denotaremos por  $\delta(G)$  y  $\Delta(G)$  respectivamente.

**Ejemplo 1.4.** De la figura 1.1 tenemos que:

1.  $e_1$  y  $e_4$  son aristas múltiples de  $G$  y  $e_5$  es un lazo de  $G$ .
2.  $|G| = 4$  y  $\|G\| = 5$ .
3.  $d(v_1) = 2$ ,  $d(v_2) = 3$ ,  $d(v_3) = 2$  y  $d(v_4) = 3$ .
4.  $\delta(G) = 2$  y  $\Delta(G) = 3$ .

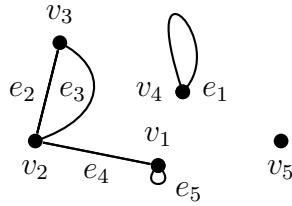
Un grafo particular que se utilizará de manera constante es el siguiente:

**Definición 1.5.** Un **grafo trivial**  $G$  es un grafo con cero o un vértice y ninguna arista.

**Notación.**  $E(v)$  denota el conjunto de todas las aristas incidentes en el vértice  $v$ .

**Ejemplo 1.5.** Ilustremos la notación con un ejemplo. Considere el grafo de la figura 1.3. Para este grafo se tiene:

$$E(v_1) = \{e_4, e_5\}, E(v_2) = \{e_2, e_3, e_4\}, E(v_3) = \{e_2, e_3\}, E(v_4) = \{e_1\} \text{ y } E(v_5) = \emptyset.$$

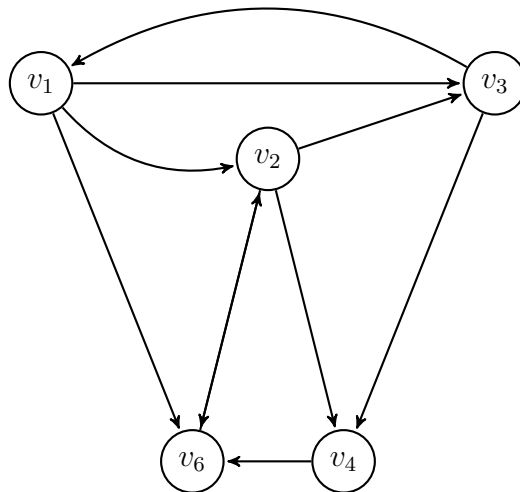


**Figura 1.3:** Grafo con aristas incidentes  $G = (V, E)$ .

En general, se observa que para un vértice  $v$  de un grafo simple  $d_G(v) = |N(v)| = |E(G)|$ .

A las aristas dadas entre los vértices se les puede asignar un sentido. Esto es, si  $v_1, v_2 \in V$  implica que  $\{v_1, v_2\} \neq \{v_2, v_1\}$  como aristas de  $G$ , de ahí la definición que sigue.

**Definición 1.6.** Un **grafo dirigido** o **digrafo** es un grafo  $G = (V, E)$  de conjuntos disjuntos con dos mapeos  $ini : E \rightarrow V$  y  $ter : E \rightarrow V$ , esto es, para cada arista de  $e$  en  $G$  se le asigna un vértice inicial y uno final.

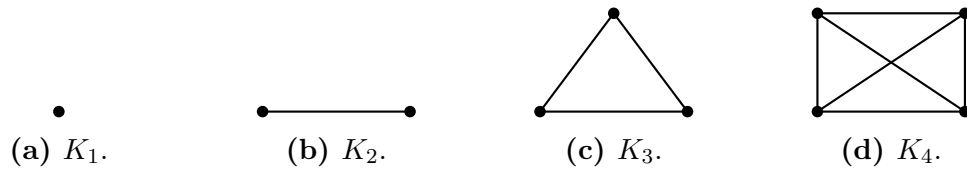


**Figura 1.4:** Un grafo dirigido.

Una orientación de un grafo se obtiene al asignar un sentido a cada una de sus aristas. Así, un grafo dirigido se llama **grafo orientado**.

**Definición 1.7.** Un grafo simple  $G = (V, E)$  es un **grafo completo** si cualquier par de vértices de  $G$  son adyacentes.  $K_n$  denota el grafo completo de  $n$  vértices.

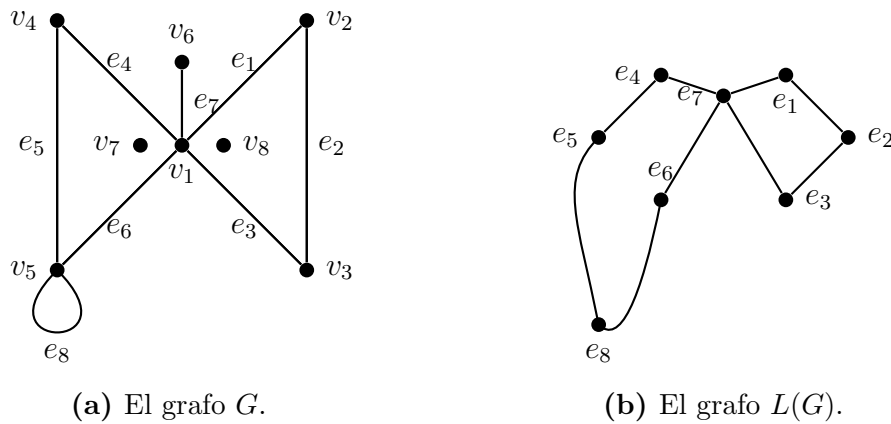
En la figura 1.5 se muestran los grafos completos  $K_n$ , para  $n = 1, 2, 3, 4$ .



**Figura 1.5:** Grafos completos  $K_1, K_2, K_3$  y  $K_4$ .

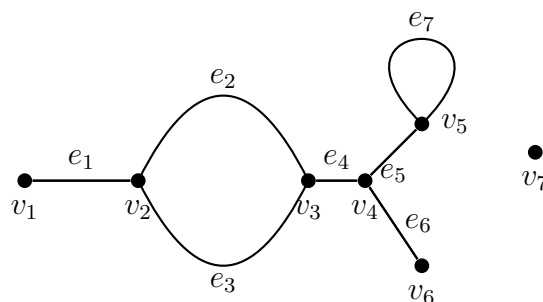
**Definición 1.8.** El **grafo línea**  $L(G)$  es el grafo  $G' = (V', E')$  con vértices donde  $V' = E$  y  $E'$  es el conjunto de pares de aristas  $e_1, e_2 \in E$  tales que  $e_1$  e  $e_2$  son adyacentes.

El grafo de la figura 1.6 b) es el grafo línea de la figura 1.6 a).



**Figura 1.6:** Un grafo  $G$  y su grafo línea.

**Definición 1.9.** Sea  $G$  un grafo, un subconjunto  $I$  de  $V(G)$  se llama **independiente** o **estable** si cualquier par de vértices en  $I$  son no adyacentes.



**Figura 1.7:** Conjuntos independientes de  $G$ .

En el grafo de la figura 1.7 tenemos que sus conjuntos independientes son:  
 $\emptyset$ ,  $\{v_1\}$ ,  $\{v_2\}$ ,  $\{v_3\}$ ,  $\{v_4\}$ ,  $\{v_6\}$ ,  $\{v_7\}$ ,  $\{v_1, v_3\}$ ,  $\{v_1, v_4\}$ ,  $\{v_1, v_6\}$ ,  $\{v_1, v_7\}$ ,  $\{v_1, v_3, v_6\}$ ,  
 $\{v_1, v_3, v_7\}$ ,  $\{v_1, v_4, v_7\}$ ,  $\{v_1, v_6, v_7\}$  y  $\{v_1, v_3, v_6, v_7\}$ .

**Definición 1.10.** Sea  $G$  un grafo, un subconjunto  $J$  de  $E(G)$  es un **conjunto independiente** si cualquier par de aristas en  $J$  no se intersectan.

De la figura 1.7 sus conjuntos independientes son:

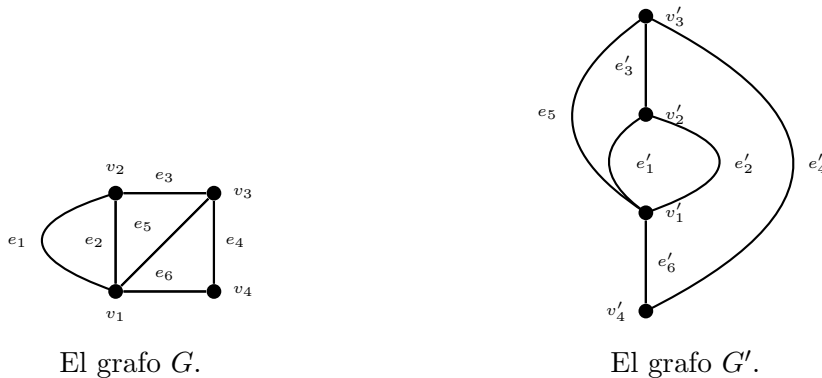
$\emptyset$ ,  $\{e_1\}$ ,  $\{e_2\}$ ,  $\{e_3\}$ ,  $\{e_4\}$ ,  $\{e_5\}$ ,  $\{e_6\}$ ,  $\{e_7\}$ ,  $\{e_1, e_4\}$ ,  $\{e_1, e_5\}$ ,  $\{e_1, e_6\}$ ,  $\{e_1, e_7\}$ ,  
 $\{e_2, e_5\}$ ,  $\{e_2, e_6\}$ ,  $\{e_2, e_7\}$ ,  $\{e_3, e_5\}$ ,  $\{e_3, e_6\}$ ,  $\{e_3, e_7\}$ ,  $\{e_4, e_7\}$ ,  $\{e_6, e_7\}$ ,  $\{e_1, e_4, e_7\}$ ,  
 $\{e_2, e_6, e_7\}$  y  $\{e_3, e_6, e_7\}$ .

**Definición 1.11.** Dos grafos  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  son **isomorfos** ( $G \approx G'$ ) si existen funciones  $f : V \rightarrow V'$  y  $g : E \rightarrow E'$  tales que

1. Si  $e$  tiene puntos extremos  $v_1$  y  $v_2$  entonces  $g(e)$  tiene puntos extremos  $f(v_1)$  y  $f(v_2)$ .
2.  $f$  y  $g$  son funciones biyectivas.

Un isomorfismo entre grafos es un isomorfismo entre sus subgrafos simples con la condición que a las aristas múltiples son la misma y los lazos como vértice.

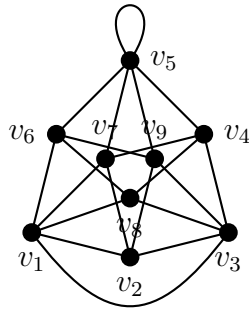
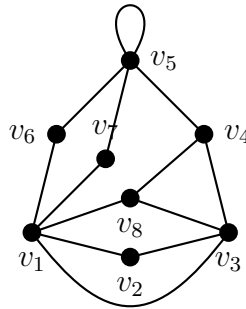
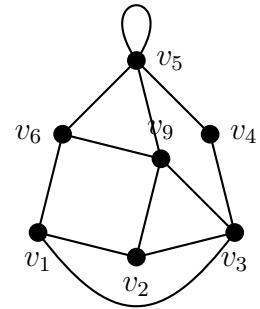
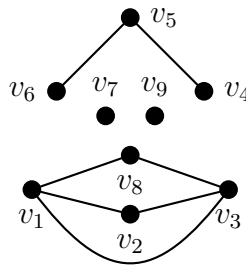
En la figura 1.8 se ilustran dos grafos isomorfos donde las funciones  $f$  y  $g$  de la definición 1.11 están definidas mediante  $f(v_i) = v'_i$  y  $g_j = e'_j$  con  $i, j = 1, 2, 3, 4$ .



**Figura 1.8:**  $G \approx G'$ .

Ahora, sean  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  grafos. Si  $G \cap G' = \emptyset$ , entonces diremos que  $G$  y  $G'$  son **disjuntos**. Si  $V' \subseteq V$  y  $E' \subseteq E$  diremos que  $G'$  es un **subgrafo**

de  $G$  y denotamos esta condición con  $G' \subseteq G$ . Si  $G' \subseteq G$  y  $G' \neq G$  es un **subgrafo propio** de  $G$ . En el caso que  $G' \subseteq G$ , diremos que  $G'$  es un **subgrafo inducido** de  $G$  por  $V'$  si  $G'$  contiene todas las aristas de  $G$  que tenga vértices en  $V'$ , lo denotamos  $G' = G[V]$ . Un subgrafo  $G'$  de  $G$  es un **subgrafo abarcador** si  $V' = V$ . A continuación, veamos un ejemplo para ilustrar los conceptos anteriores.

El grafo  $G$ .(a) El grafo  $G' \subseteq G$ .(b) El grafo  $G''$  es un subgrafo inducido de  $G$ .(c) El grafo  $G'''$  es un subgrafo abarcador de  $G$ .

**Figura 1.9:** Un grafo con su subgrafo, subgrafo inducido y subgrafo abarcador.

## 1.2. Operaciones de aristas y vértices

Hay varios resultados, como los que se presentarán más adelante, donde es necesario estudiar los subgrafos de  $G$  alterados minimamente, que difieren en un único vértice o una única arista. Por lo tanto, se definen operaciones en grafos de manera que el nuevo grafo resulta de añadir, eliminar, contraer, expandir un vértice o una arista.

Sean  $G$  un grafo,  $e \in E(G)$  y  $v \in V(G)$ , se definen:

1. **Adición de aristas o vértices** es agregar una arista  $e$  o un vértice  $v$  al grafo  $G$ .
2. **Eliminación o supresión de aristas o vértices** consiste en eliminar una arista  $e \in G$  pero sin quitar los vértices extremos o eliminar un vértice  $v$  y todas las aristas incidentes a él.
3. **Contracción de aristas** cuando se contrae una arista, dos vértices pasan a ser un vértice y la arista  $e$  se pierde, la representaremos por  $G \setminus e$ . En el caso en que el grado de uno de los vértices extremos de  $e$  sea exactamente igual a uno, la arista no se pierde, sino que se convierte en un lazo dentro del conjunto de aristas de  $G \setminus e$ . Tras la contracción, el resto de vértices de  $G \setminus e$  siguen manteniendo las mismas adyacencias que en  $G$ .
4. **Expansión de un vértice  $v$**  es añadir a  $G$  un nuevo vértice  $v'$  y unirle mediante aristas con  $v$  y con todos los vertices adyacentes a  $v$ .

En la figura 1.10 se ilustran todas estas operaciones sobre el grafo  $G$ .

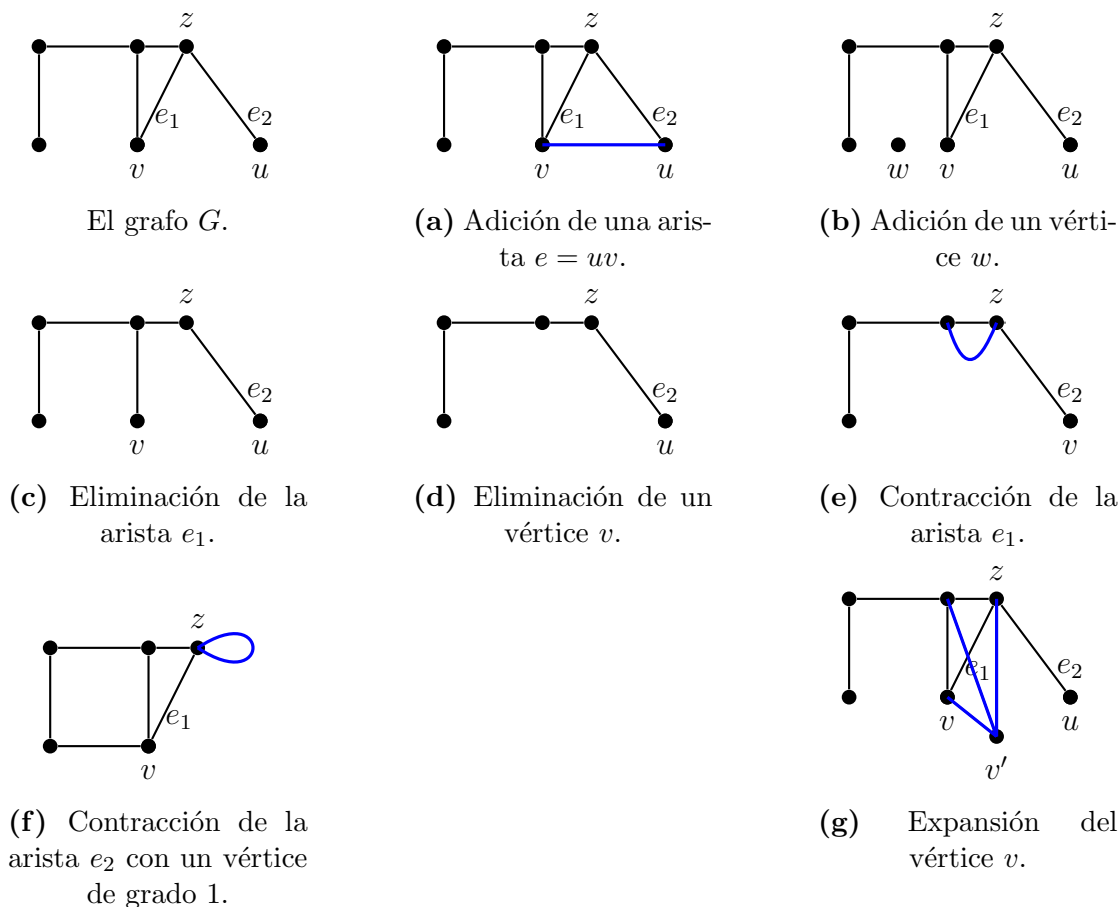
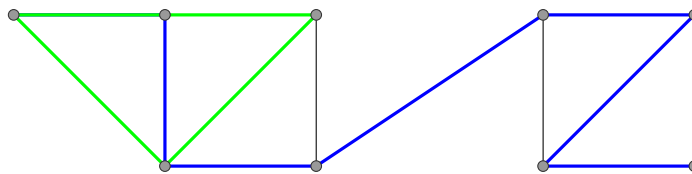


Figura 1.10: Operaciones con aristas y vértices de un grafo.

Definiremos a un **menor** como cualquier subgrafo obtenido de  $G$  al hacer una secuencia de operaciones de aristas y/o vértices.

Diremos que hay un **camino** en  $G$  desde los vértices de  $v$  a  $w$  si hay un conjunto de vértices  $v = v_1, v_2, \dots, v_n = w$  tal que  $v_i$  y  $v_{i+1}$  son adyacentes para todo  $i < n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y ningún vértice usado más de una vez. Además, un **ciclo** en  $G$  es un camino donde el vértice inicial es igual al vértice final es el mismo. Es decir, es un camino tal que  $v_1 = v_n$ . La **longitud** de un ciclo es  $||c||$  donde  $c$  es el ciclo.

La figura 1.11 ilustra las definiciones de camino y ciclo, la línea verde se usa para distinguir un ciclo y la azul el camino.



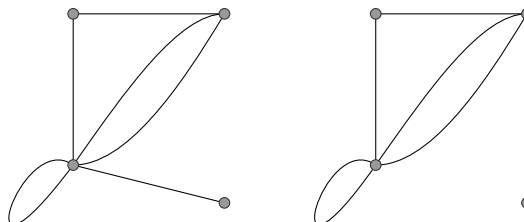
**Figura 1.11:** Un grafo con un camino y un ciclo.

Además, la longitud del ciclo es 4.

### 1.3. Grafos conectados con caminos

Un grafo  $G$  es **conectado (conexo)** si cualquier par de vértices están ligados por un camino en  $G$ . Luego si un grafo es no conectado, decimos que el grafo es **desconectado (disconexo)**.

En la figura 1.12 se ilustran dos "grafos muy parecidos" con la diferencia de que uno es conectado y el otro no.



**Figura 1.12:** Grafo conectado y no conectado.

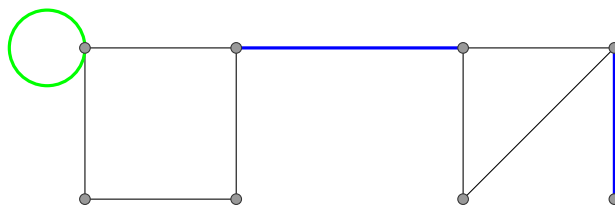
Si  $G$  es un grafo desconexo. Entonces podemos ver si es conexo por porciones del grafo. La siguiente definición formaliza esta idea.

**Definición 1.12.** Una **componente conectada** es un subgrafo conectado maximal de  $G$ . El número de componentes de un grafo se denota como  $k(G)$ .

En el grafo de la derecha ilustrado en la figura 1.12 vemos que tiene dos componentes conectadas el vértice inferior derecho es su propia componente mientras que los otros tres vértices forman otra componente conectada. Más aún, todo grafo no vacío tiene al menos una componente conectada.

**Definición 1.13.** Un **punte** es una arista cuya eliminación causará que el número de componentes aumente.

Ilustremos la definición con un ejemplo. En el grafo de la figura 1.13 la línea azul son todos los puentes. Además, observemos que los puentes no son parte de un ciclo.



**Figura 1.13:** Un grafo con todos sus puentes.

## 1.4. Operaciones entre grafos

Ahora, veamos como se operan los grafos, para esto, sean  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  dos grafos, entonces tenemos las siguientes definiciones:

1. **Grafo unión:**  $G \cup G' = (V \cup V', E \cup E')$ .
2. **Grafo intersección:**  $G \cap G' = (V \cap V', E \cap E')$ .

En la figura 1.14 se ilustran las definiciones de unión e intersección respectivamente, para los grafos  $G$  y  $G'$  ilustrados en la misma figura.



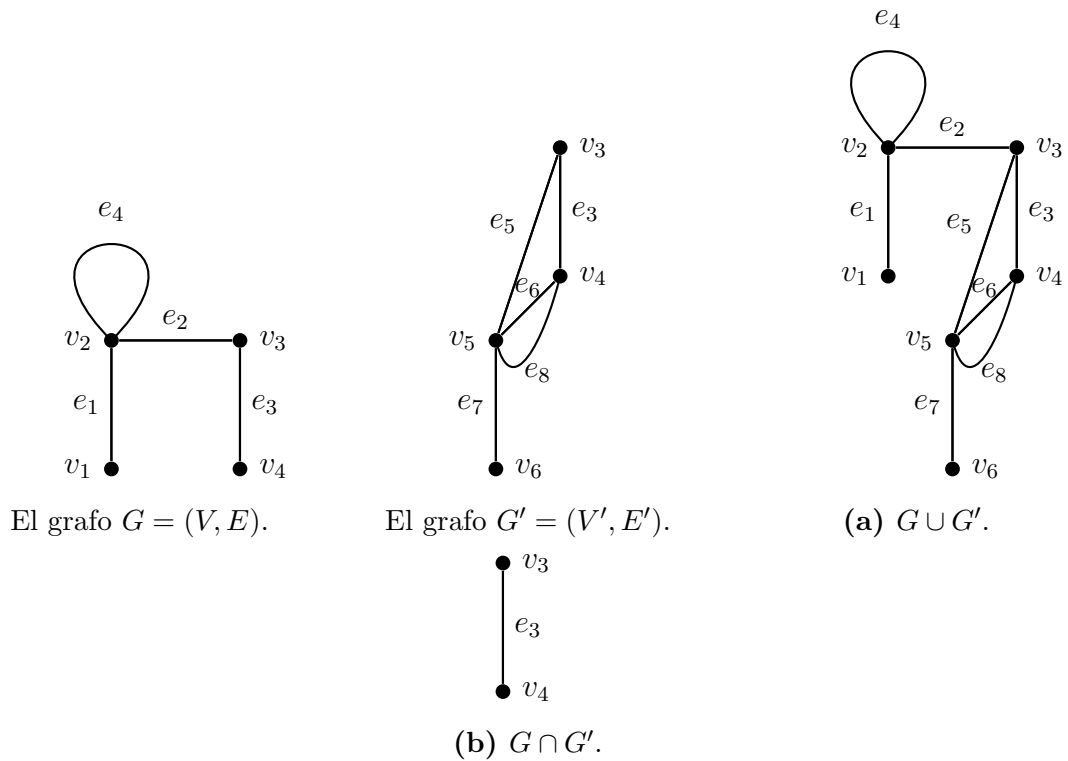


Figura 1.14: Operaciones de unión e intersección entre grafos  $G$  y  $G'$ .

**Definición 1.14.** Sean  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  dos grafos, donde  $V \cap V' = \emptyset$  y  $E \cap E' = \emptyset$ . Entonces  $G \oplus G' = (V \cup V', E \cup E')$  es la unión disjunta de  $G$  y  $G'$  le llamaremos la **suma directa** de dos grafos.

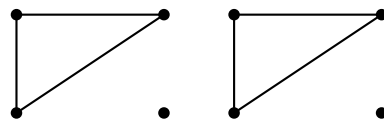
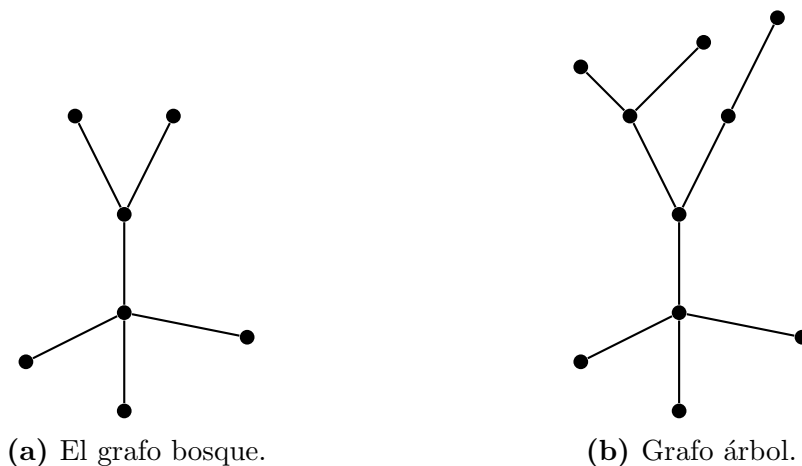


Figura 1.15: La suma directa  $G \oplus G$ .

## 1.5. Árboles y bosques

Un grafo  $G$  se dice **acíclico** si no admite ningún ciclo, esto es, en cada vértice  $v$  no hay un camino directo que empiece y termine en  $v$ . Si un grafo es acíclico y desconexo es un **bosque**. Un **árbol** es un bosque conectado. Los vértices de grado uno se llaman **hojas**.



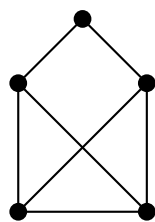
**Figura 1.16:** Grafo árbol y grafo bosque.

Un árbol se puede caracterizar de distintas formas y para ello se enuncia el siguiente teorema.

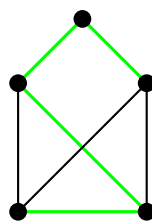
**Teorema 1.1.** *Para cualquier grafo  $T$  son equivalentes:*

1.  $T$  es un árbol.
2. Cualquier par de vértices de  $T$  son conectados por un único camino.
3.  $T$  es minimalmente conectado.
4.  $T$  es maximalmente acíclico.

Observemos que todo grafo conectado contiene un **árbol abarcador**. En la figura 1.17 se muestra un grafo  $G$  y un árbol abarcador de  $G$ .



El grafo  $G$ .

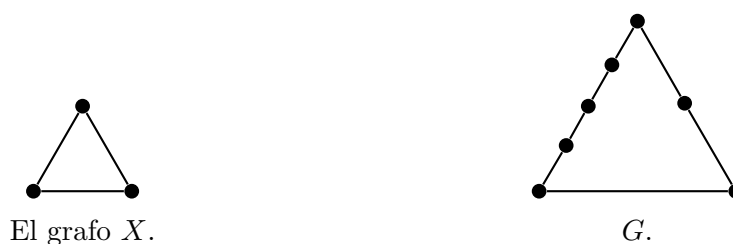


Árbol abarcador de  $G$  es la línea verde

**Figura 1.17:** Árbol abarcador de un grafo  $G$ .

## 1.6. Menores

Si tenemos un grafo  $X$  fijo. Una **subdivisión** de  $G$ , es cualquier grafo obtenido de  $G$  por subdividir algunas o todas sus aristas dibujando nuevos vértices sobre éstas aristas. Por ejemplo, en la figura 1.18 se muestra una subdivisión del grafo  $X$  ilustrado en la misma figura.



**Figura 1.18:** El grafo  $G$  es una subdivisión de  $X$ .

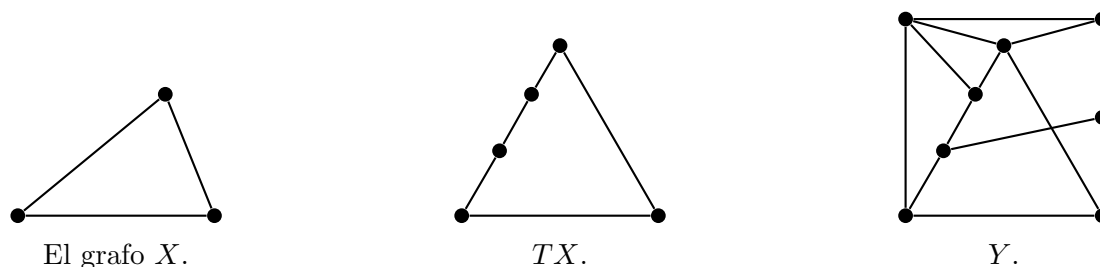
Si  $G$  es una subdivisión de  $X$ , decimos que  $G$  es un  $TX$  ( $TX$  es la clase de grafos que son subdivisiones de  $X$ ),  $TX = \{G, G', G'', \dots\}$  sus nuevos vértices son llamados subdivisiones. Aquí los vértices originales también son llamados vértices rama.

**Observación.** Los vértices subdivisores tienen grado 2 y los vértices rama retienen su grado con respecto de  $X$ .

Veamos a continuación el concepto de menor topológico.

**Definición 1.15.** Si un grafo  $Y$  contiene un  $TX$  como un subgrafo, entonces  $X$  es un **menor topológico** de  $Y$ .

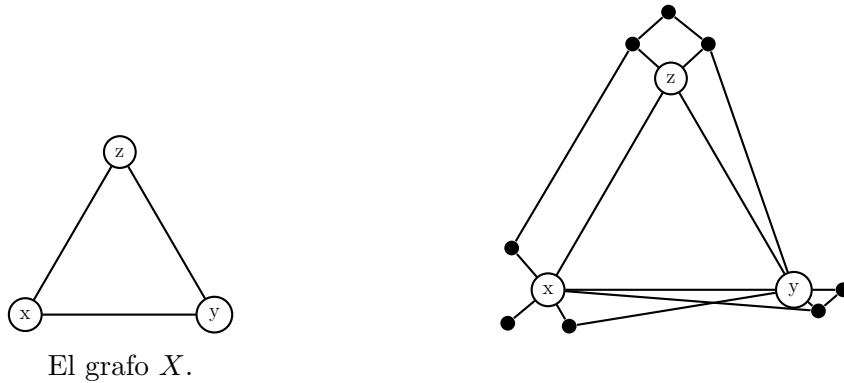
En la figura 1.19, el grafo  $X$  es un menor topológico del grafo  $Y$ .



**Figura 1.19:**  $X$  es un menor topológico de  $Y$ .

Si tenemos grafos conexos, podemos dar la siguiente definición en función de éstos.

**Definición 1.16.** Sea  $X$  un grafo fijo, un grafo obtenido de  $X$  por reemplazar los vértices  $x$  de  $X$  con grafos conexos disjuntos  $G_x$  y la arista  $\{x, y\}$  de  $X$  son conjuntos no vacíos de  $G_x - G_y$  aristas, es llamado **grafo inflado** y lo representaremos como  $IX$ .



**Figura 1.20:** El grafo inflado  $IX$ .

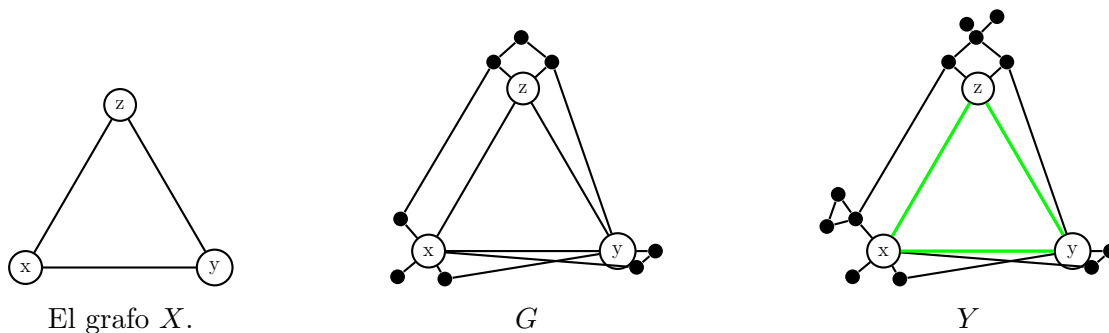
Notemos que de la figura 1.20 no hay restricciones en grafos conexos de los vértices.

De manera formal, un grafo  $G$  es un  $IX$  si su conjunto de vértices admite una partición  $\{V_x | x \in V(X)\}$  de subconjuntos conectados  $V_x$  tales que todo par de vértices distintos pertenecen a  $X$  si y solo si  $X$  contiene una  $V_x - V_y$  arista.

**Definición 1.17.** Los conjuntos  $V_X$  son llamados **conjuntos rama** del grafo  $G$  y decimos que  $X$  surge de  $G$  por **contracción de los subgrafos  $G_x$** .

Si un grafo  $Y$  contiene un  $IX$  como un subgrafo, entonces  $X$  es un **menor** de  $Y$  y escribimos  $X \preceq Y$ .

En la figura 1.21  $X$  es un menor de  $Y$ ,  $G$  es un grafo inflado de  $X$  y  $G$  es un subgrafo de  $Y$ .



**Figura 1.21:**  $G \subseteq Y = IX$ , entonces  $X$  es un menor de  $Y$ .

# Capítulo 2

## Coloreo de grafos

Un coloreo de un grafo consiste en asignar a sus vértices colores de tal manera que dos vértices adyacentes cualesquiera tengan asignados colores distintos. Un problema interesante consiste en saber de cuántas formas distintas podemos colorear un grafo o también si es posible colorearlo con solo  $k$  colores, el polinomio cromático nos proporciona información sobre estos problemas. Además, da origen a la construcción del Polinomio de Tutte.

### 2.1. Coloración de vértices

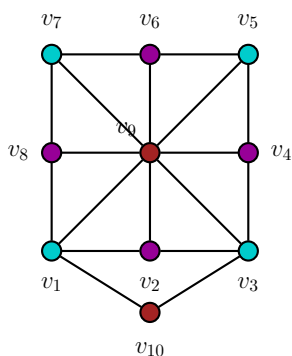
Una **coloración adecuada** de un grafo es una asignación de un color a cada vértice de tal manera que vértices adyacentes no tengan el mismo color.

La siguiente definición expresa formalmente que es una coloración adecuada.

**Definición 2.1.** *Una coloración adecuada es una función  $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$  tal que  $f(v_1) \neq f(v_2)$  para todo par de vértices adyacentes  $v_1, v_2 \in V$ . La función  $f$  se denomina coloreo de los vértices del grafo  $G$  y los distintos colores se identifican con los números enteros  $1, 2, \dots, \lambda$ . El número mínimo de colores necesarios para una coloración adecuada del grafo  $G$  es el **número cromático** de  $G$  y se escribe como  $\chi(G)$ .*

**Observación.** Sea  $G$  un grafo, note que si  $G$  tiene lazos no estaría definida una coloración adecuada y si  $G$  tiene aristas múltiples, podemos eliminar una para encontrar una coloración adecuada.

**Ejemplo 2.1.** Para el grafo  $G$  de la figura 2.1, partimos del vértice  $v_1$  con un color azul para una coloración adecuada de los vértices de  $G$  considerados hasta ese punto. Al pasar al vértice  $v_2$ , el morado un segundo color, puesto que los vértices  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes, siguiendo este mismo procedimiento hasta  $v_8$  observamos que solo necesitamos dos colores para una coloración adecuada de los vértices  $v_1, \dots, v_8$ . Para el vértice  $v_9$ , necesitamos un tercer color, el cual también puede usarse en el vértice  $v_{10}$  pues  $\{v_9, v_{10}\}$  no es un arista de  $G$ . Así, este método de etiquetado de una coloración secuencial nos proporciona una coloración adecuada de  $G$  por lo que  $\chi(G) = 3$ .



**Figura 2.1:** Coloreo del grafo  $G$ .

## 2.2. Polinomio Cromático

Un problema interesante es, dado un grafo  $G$  determinar si es posible encontrar una  $\lambda$ -coloración adecuada, es decir, si podemos colorer los vértices de  $G$  haciendo uso solo de  $\lambda$  colores de tal manera que dos vértices adyacentes de  $G$  no tengan el mismo color. También otro problema interesante es dado un grafo  $G$  determinar de cuántas maneras es posible colorearlo adecuadamente. El polinomio cromático es de utilidad para dicho fin.

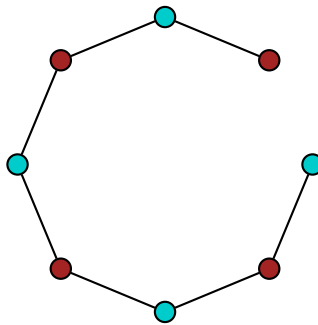
**Definición 2.2.** El **polinomio cromático** de  $G$ ,  $P(G, \lambda)$  es un polinomio definido para cada grafo, cuya salida es el número de formas de colorear adecuadamente  $G$  con  $\lambda$  colores.

Dos coloraciones adecuadas de un grafo  $G$  serán diferentes en el siguiente sentido: una coloración adecuada de los vértices de  $G$  que usa como máximo  $\lambda$  colores es una función  $f$  con dominio  $V$  y codominio  $\{1, 2, \dots, \lambda\}$  tal que  $f(v_1) \neq f(v_2)$  para

los vértices adyacentes  $v_1, v_2 \in V$ . Las coloraciones adecuadas serán diferentes si son diferentes como funciones.

**Ejemplo 2.2.** Algunos ejemplos cromáticos son los siguientes:

1. Si  $G$  es tal que  $|V| = n$  y  $E = \emptyset$ , entonces  $G$  tiene  $n$  puntos aislados y por la regla del producto  $P(G, \lambda) = \lambda^n$ .
2. Si  $G = K_n$ , entonces debemos disponer de al menos  $n$  colores para obtener una coloración adecuada de  $G$ . Entonces por la regla del producto,  $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \cdots (\lambda - n + 1)$ , que denotaremos con  $\lambda^{(n)}$ . Para  $\lambda < n$ ,  $P(G, \lambda) = 0$  y no existe una coloración adecuada de  $K_n$ .  $P(G, \lambda) > 0$  por primera vez cuando  $\lambda = n = \chi(G)$ .
3. Si  $G$  es un camino simple con  $n$  vértices, entonces  $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$ .



**Figura 2.2:** Coloreo del camino de  $K_8$ .

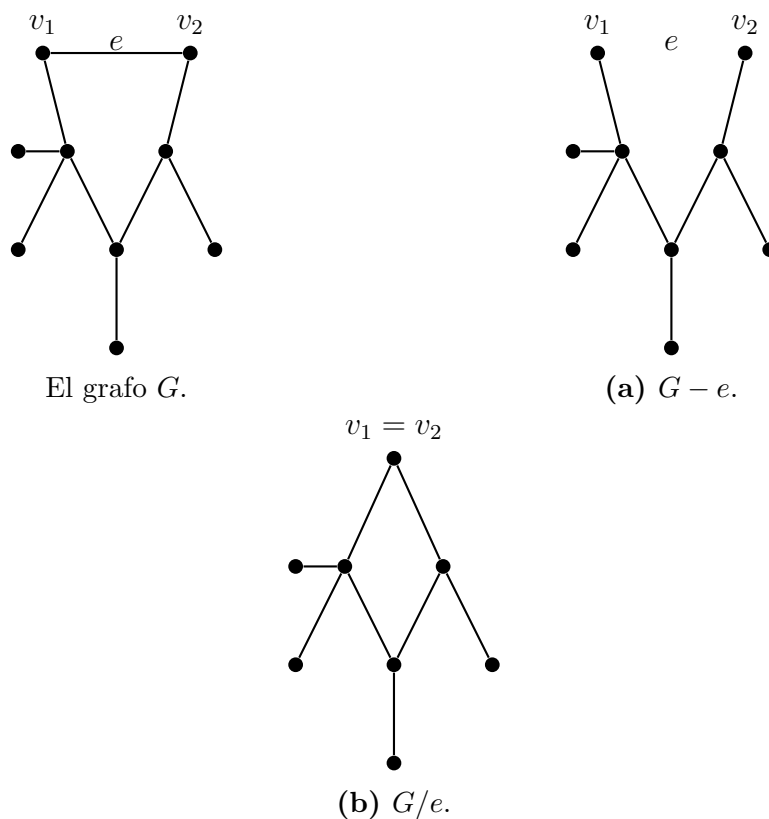
4. Si  $G$  está formado por componentes  $G_1, G_2, \dots, G_k$  entonces usando nuevamente la regla del producto para obtener

$$P(G, \lambda) = P(G_1, \lambda) \cdot P(G_2, \lambda) \cdots P(G_k, \lambda).$$

En virtud de 2.2 del ejemplo 4 nos centraremos solamente en la construcción de polinomios cromáticos de grafos conexos. Existen muchos casos de las matemáticas discretas que utilizan métodos para resolver problemas en casos de gran tamaño mediante la descomposición de éstos en dos o más casos pequeños. De ahí, el *Teorema de descomposición para polinomios cromáticos*. Antes de enunciar el teorema, en la figura 2.3 ilustremos un grafo simple con la eliminación de una arista  $e$  y la contracción de la misma, es decir la eliminación de  $e$  y la **identificación** de los

vértices extremos de la arista. Más adelante tomaremos este ejemplo para mostrar otras construcciones. Además, este ejemplo puede ser utilizado para seguir la demostración del teorema 2.1.

**Ejemplo 2.3.** Dado el grafo  $G$  ilustrado en la figura 2.3, las operaciones de eliminación y la contracción de la arista  $e$  se ven realizadas en los grafos de la figura 2.3 a) y 2.3 b) respectivamente.



**Figura 2.3:** Los grafos  $G$ ,  $G - e$  y  $G/e$ .

**Teorema 2.1.** (*Teorema de descomposición para polinomios cromáticos*). Si  $G$  es un grafo conexo y  $e \in G$ , entonces

$$P(G - e, \lambda) = P(G, \lambda) + P(G \setminus e, \lambda). \quad (2.1)$$

**Demostración:**

Sea  $e$  una arista con extremos  $v_1$  y  $v_2$  vértices de  $V(G)$  y los siguientes conjuntos:

$\mathcal{C}_{G-e}$  = conjunto de coloraciones adecuadas de  $G - e$ ,

$\mathcal{C}_G$  = conjunto de coloraciones adecuadas de  $G$  y

$\mathcal{C}_{G \setminus e}$  = conjunto de coloraciones adecuadas de  $G \setminus e$ .



Si  $f \in \mathcal{C}_G$  entonces  $f \notin \mathcal{C}_{G \setminus e}$  ya que  $f(v_1) = f(v_2) = f(v)$  y recíprocamente si  $f \in \mathcal{C}_{G \setminus e}$  entonces  $f \notin \mathcal{C}_G$  porque  $f(v_1) \neq f(v_2)$ , en consecuencia,  $\mathcal{C}_G \cap \mathcal{C}_{G \setminus e} = \emptyset$ . Por otra parte, se tiene que  $\mathcal{C}_{G-e} = \mathcal{C}_G \cup \mathcal{C}_{G \setminus e}$  ya que toda coloración adecuada de  $\mathcal{C}_{G-e}$  pertenece a  $\mathcal{C}_G$  si y sólo si  $v_1$  y  $v_2$  tienen colores distintos o pertenecen a  $\mathcal{C}_{G \setminus e}$  si  $v_1$  y  $v_2$  tienen el mismo color. Por lo tanto,

$$P(G - e, \lambda) = P(G, \lambda) + P(G \setminus e, \lambda),$$

donde  $\lambda$  es el número de colores de  $G$ . ■

**Observación.** El teorema de descomposición se aplica a grafos simples, ya que si un grafo tiene aristas múltiples al eliminar una de ellas se sigue preservando la adyacencia o si existe un lazo es imposible hallar una coloración adecuada para los vértices que poseen un lazo.

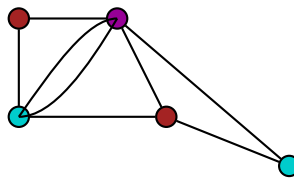
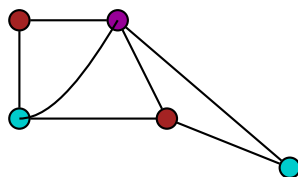
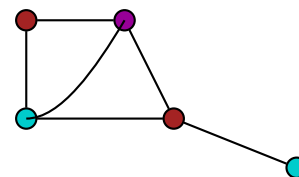


Figura 2.4: Un grafo  $G$ .

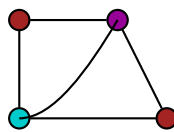
Para poder hacer los cálculos, tenemos la observación que si un grafo tiene aristas múltiples eliminaremos una arista, es decir, hacer al grafo en un grafo simple. Por lo tanto, el nuevo grafo es



El grafo  $G$  de la figura 2.4 sin aristas múltiples.



(a)  $G - e$ .



(b)  $G/e$ .

Figura 2.5: El  $P(G - e, \lambda) = P(G, \lambda) + P(G/e, \lambda)$ .

**Ejemplo 2.4.** Dado el grafo  $G$ , ilustrado en la figura 2.5 tenemos las siguientes evaluaciones del polinomio cromático.

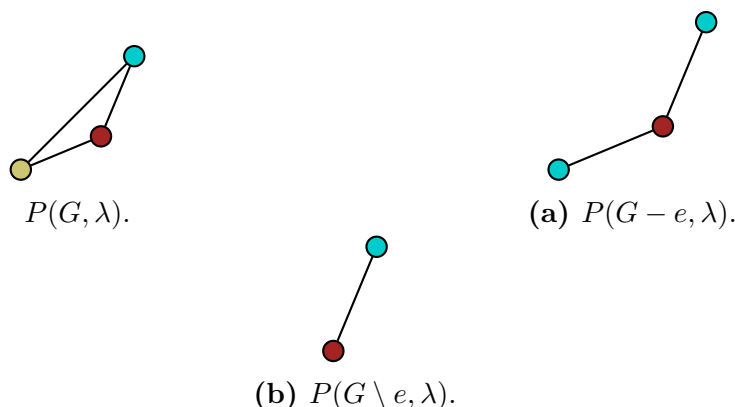
$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 2) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$  es el polinomio cromático del grafo  $G$  sin aristas múltiples (figura 2.5), el polinomio cromático de  $G - e$  (figura 2.5) es  $P(G - e, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda(\lambda - 1)^3(\lambda - 2)$  y el polinomio cromático de  $G/e$  (figura 2.5) es  $P(G \setminus e, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ .

Por lo tanto, se comprueba el teorema de la descomposición 2.1 como sigue

$$\begin{aligned} P(G, \lambda) + P(G \setminus e, \lambda) &= (\lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2) + (\lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)) \\ &= (\lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2))(\lambda - 2 + 1) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda - 1) \\ &= \lambda(\lambda - 1)^3(\lambda - 2) = P(G - e, \lambda). \end{aligned}$$

Observe que para  $\lambda = 1, 2$  el  $P(G, \lambda) = 0$  pero  $P(G, 3) = 12 > 0$  para  $\lambda = 3$ , por tanto,  $\chi(G) = 3$ .

**Ejemplo 2.5.** Un segundo ejemplo es calcular el polinomio cromático del grafo completo  $K_3$  evaluando por separado ambos miembros de la igualdad de la ecuación 2.1 del teorema 2.1.



**Figura 2.6:** Coloreo del ciclo de longitud 3.

En la figura 2.4 se ilustran los grafos  $K_3$ ,  $G - e$  y  $G/e$ , y los polinomios cromáticos de los dos últimos son:

$P(G - e, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{3-1} = \lambda(\lambda - 1)^2$  y  $P(G \setminus e, \lambda) = \lambda^{(2)} = \lambda(\lambda - 1)$ , respectivamente.

En consecuencia, se comprueba nuevamente la ecuación 2.1 del Teorema de Descomposición.

$$P(G - e, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2 - \lambda(\lambda - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Observe también que para  $\lambda = 1, 2$  el  $P(G, \lambda) = 0$  pero  $P(G, 3) = 6 > 0$  para  $\lambda = 3$ , por tanto,  $\chi(G) = 3$ .

Los polinomios de los ejemplos 2.4 y 2.5 son:

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 13\lambda^3 - 12\lambda^2 + 4\lambda \text{ y } \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda,$$

respectivamente y la suma de sus coeficientes son:

$$1 - 6 + 13 - 12 + 4 = 0 \text{ y } 1 - 3 + 2 = 0.$$

Las propiedades vistas en los polinomios cromáticos de los ejemplos 2.4 y 2.5 en general se cumplen para cualquier polinomio cromático, cómo así lo establecen los teoremas 2.2 y 2.3.

**Teorema 2.2.** *Sea  $G$  un grafo con  $|E| > 0$ . Entonces, la suma de los coeficientes del polinomio  $P(G, \lambda)$  es 0.*

**Demostración:**

Como  $|E| \geq 1$ , tenemos que  $\chi(G) \geq 2$ , por lo tanto, no podemos obtener una coloración adecuada de  $G$  con un solo color. Por consiguiente,  $P(G, 1) = 0 =$  la suma de los coeficientes de  $P(G, \lambda)$  coincide con el valor de  $P(G, 1)$ . ■

**Teorema 2.3.** *Para cualquier grafo  $G$ , el término constante en  $P(G, \lambda)$  es 0.*

**Demostración:**

Para cualquier grafo  $G$ ,  $\chi(G) > 0$ , pues  $V \neq \emptyset$ . Si  $P(G, \lambda)$  tiene término constante  $a$ , entonces  $P(G, 0) = a \neq 0$ . Esto implica que hay  $a$  coloraciones adecuadas de  $G$  con 0 colores, lo cual es una contradicción, por lo tanto,  $P(G, 0) = 0$ . ■

Con los siguientes teoremas podemos determinar el polinomio cromático de cualquier grafo completo. A diferencia del teorema 2.1, en el teorema 2.4 se agregan aristas al grafo dado, hasta obtener el grafo completo.

**Teorema 2.4.** *Sea  $G$  un grafo con  $v_1, v_2 \in V$  pero  $\{v_1, v_2\} = e \notin E$ . Escribimos  $G + e$  para el grafo que se obtiene de  $G$  al añadir la arista  $e$ . Al identificar los vértices  $v_1$  y  $v_2$  en  $G$ , obtenemos el subgrafo  $G \setminus e$  de  $G$ . Por lo tanto,*

$$P(G, \lambda) = P(G + e, \lambda) + P(G \setminus e, \lambda). \quad (2.2)$$

**Demostración:**

En este teorema se sigue de sustituir a  $G = G' + e$  en el teorema 2.1 y observando que  $(G' + e) \setminus e = G' \setminus e$ . ■

El siguiente teorema involucra a los grafos completos.

**Teorema 2.5.** *Sea  $G$  un grafo con subgrafos  $G_1, G_2$ . Si  $G = G_1 \cup G_2$  y  $K_n = G_1 \cap G_2$  para algún entero positivo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces*

$$P(G, \lambda) = \frac{P(G_1, \lambda) \cdot P(G_2, \lambda)}{\lambda^{(n)}}.$$

**Demostración:**

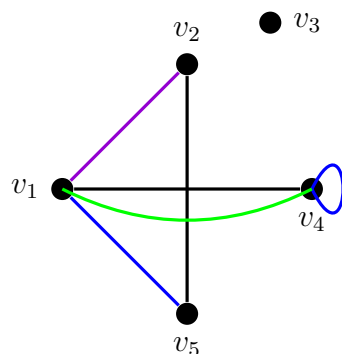
Tenemos que  $K_n = G_1 \cap G_2$ , de aquí que  $K_n$  es un subgrafo tanto de  $G_1$  como de  $G_2$  y  $\chi(G_1), \chi(G_2) \geq n$ . Dados  $\lambda$  colores,  $K_n$  tiene  $\lambda^{(n)}$  coloraciones adecuadas. Para cada una de estas  $\lambda^{(n)}$  coloraciones hay  $\frac{P(G_1, \lambda)}{\lambda^{(n)}}$  coloraciones adecuadas de los vértices restantes de  $G_1$ . De manera análoga, hay  $\frac{P(G_2, \lambda)}{\lambda^{(n)}}$  coloraciones adecuadas de los vértices de  $G_2$ . Así, por la regla del producto,

$$P(G, \lambda) = P(K_n, \lambda) \cdot \frac{P(G_1, \lambda)}{\lambda^{(n)}} \cdot \frac{P(G_2, \lambda)}{\lambda^{(n)}} = \frac{P(G_1, \lambda) \cdot P(G_2, \lambda)}{\lambda^{(n)}}. \blacksquare$$

## 2.3. Otra forma de coloreo

Otra forma de colorear un grafo consiste en colorear sus aristas en lugar de sus vértices. Se define el coloreo de aristas de manera similar al coloreo de vértices.

**Definición 2.3.** *Una **coloración adecuada en aristas** de un grafo  $G$  es una correspondencia tal que a cada arista se le asocia un color de manera que dos aristas incidentes en un vértice no pueden tener el mismo color.*



**Figura 2.7:** Coloración en aristas de un grafo.

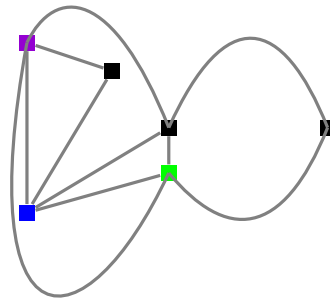
Una coloración en aristas de un grafo  $G$  que usa  $\lambda$  – *colores* se llama  $\lambda$ –**coloración adecuada** en aristas de  $G$

**Definición 2.4.** *El número cromático en aristas o índice cromático de un grafo  $G$  se define como el entero  $k$  más pequeño tal que  $G$  es  $k$ -coloreable en aristas. El índice cromático del grafo  $G$  lo denotaremos por  $\chi'(G)$ .*

En el grafo de la figura 2.7 su número cromático es 4 porque como hemos visto se puede colorear con solamente cuatro colores pero no con menos de cuatro, ya que en el vértice  $v_1$  inciden 4 aristas.

**Observación.** Una  $\lambda$ -coloración adecuada en aristas de un grafo  $G$  es una  $\lambda$ -coloración adecuada en vértices para su correspondiente grafo línea  $L(G)$ . Y recíprocamente, una  $\lambda$ -coloración adecuada de vértices para un grafo  $G'$  es una  $\lambda$ -coloración adecuada en aristas para cualquier grafo  $G$  tal que  $L(G) = G'$ .

El grafo línea  $L(G)$ , del grafo  $G$  ilustrado en la figura 2.7 se muestra en la figura 2.8.



**Figura 2.8:** Una coloración de vértices de  $L(G)$ .

Es claro que la  $\chi(G) = \chi(L(G))$ . En efecto, obteniendo el polinomio cromático de de la figura 2.8 con el teorema 2.1 tenemos que

$$P(L(G), \lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^3(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

y

$$P(L(G) \setminus e, \lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda - 3),$$

por lo tanto,

$$P(L(G) - e, \lambda) = P(L(G), \lambda) - P(L(G) \setminus e, \lambda)$$

$$\begin{aligned} &= (\lambda^2(\lambda - 1)^3(\lambda - 2)(\lambda - 3)) - (\lambda^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda - 3)) \\ &= \lambda^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 1 - 1) = \lambda^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2(\lambda - 3), \end{aligned}$$

luego, si  $1 \leq \lambda \leq 3$ , entonces el  $P(L(G), \lambda) = 0$  pero en  $\lambda \geq 4$  tenemos  $P(L(G), \lambda) > 0$  y vemos que el  $\chi(L(G)) = 4$  y por lo tanto, es una coloración adecuada de vértices de  $L(G)$ .

# Capítulo 3

## Teoría de Matroides

En este capítulo veremos una introducción a la teoría de matroides, comenzando desde su definición, algunas propiedades principales, también introducimos las operaciones de eliminación y contracción de aristas en matroides, éstas operaciones serán útiles en el capítulo 4 para la construcción del Polinomio de Tutte sobre matroides.

### 3.1. Definición de Matroide

La siguiente definición usa el concepto de conjunto independiente para un conjunto donde no contamos con una estructura de espacio vectorial.

**Definición 3.1.** Un **matroide** es un par  $M = (S, \mathcal{I})$ , donde  $S$  es un conjunto y  $\mathcal{I}$  es una colección de subconjuntos de  $S$  tales que

1.  $\emptyset \in \mathcal{I}$ ,
2. Si  $X \in \mathcal{I}$  y  $Y \subseteq X$  entonces  $Y \in \mathcal{I}$ .
3. Si  $X, Y \in \mathcal{I}$  con  $|X| = |Y| + 1$  existe  $x \in X \setminus Y$  tal que  $Y \cup x \in \mathcal{I}$ .

Los elementos de  $\mathcal{I}$  son llamados **conjuntos independientes** y los elementos de  $S$  que no pertenecen a  $\mathcal{I}$  son llamados **dependientes**.

**Notación.** Escribiremos  $M = (S, \mathcal{I})$  o simplemente  $M$ , si es claro en el contexto quienes son  $S$  e  $\mathcal{I}$ , decimos que  $M$  es un matroide en  $S$ .

**Observación.** La primera propiedad implica que  $\mathcal{I}$  es distinto del conjunto vacío. La segunda propiedad es hereditaria, ya que cualquier subconjunto de un conjunto independiente es también independiente. Por último, la tercera propiedad le llamaremos de aumentación.

El siguiente ejemplo es una plantilla de los ejemplos clásicos introductorios al concepto de matroide.

**Ejemplo 3.1.** Sea  $A$  una matriz de  $2 \times 3$  en el campo de los números reales definida como

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etiquetamos a cada vector columna con su respectivo número de columna. Es decir, sean  $S = \{1, 2, 3\}$  el conjunto de columnas etiquetadas de la matriz  $A$  y definimos a  $\mathcal{I} = \{x \subseteq S : x \text{ es un conjunto linealmente independiente en } \mathbb{R}^2\}$ . En este caso  $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$  entonces  $M = (S, \mathcal{I})$  es un matroide.

Siguiendo la analogía con los espacios vectoriales, haremos la siguiente definición.

**Definición 3.2.** Sea  $A \subseteq S$ . Una **función de rango** de un matroide  $M$ , es una función con dominio el conjunto potencia de  $S$ ,  $\mathcal{P}(S)$  y codominio los enteros no negativos, definido por

$$\text{ran}(A) = \max\{|X| : X \subseteq A, X \in \mathcal{I}\}$$

El rango de una matroide  $M$  a veces es denotado por  $\text{ran}(M)$  que es el rango del conjunto  $S$ . Si  $\text{ran}(A \cup a) = \text{ran}(A)$  diremos que  $a$  **depende** de  $A$ .

En el ejemplo 3.1 tenemos que el  $\text{ran}(A) = 2$ .

Existen varias formas de definir un matroide, ya sea a través de bases, independencia, circuitos o rango de una función, en este trabajo nos será de utilidad el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.** Las siguientes proposiciones son equivalentes

1. La función  $\text{ran} : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  es una función rango de un matroide en  $S$ .



2. Sean  $X, Y \subseteq S$  tales que

- a)  $0 \leq \text{ran}(X) \leq |X|$ .
- b)  $Y \subseteq X$ , entonces  $\text{ran}(Y) \leq \text{ran}(X)$ .
- c)  $\text{ran}(X \cup Y) \leq \text{ran}(X) + \text{ran}(Y) - \text{ran}(X \cap Y)$

**Demostración:**

1.  $\Rightarrow$  2. Probaremos que si tenemos un matroide  $M = (S, \mathcal{I})$  y  $\text{ran}$  su función de rango entonces se cumple las tres condiciones de rango.

- a) Si  $X \subseteq S$  entonces  $\text{ran}(X) = |I|$  para algún  $I \subseteq X$ , por lo tanto  $0 \leq \text{ran}(X) \leq |X|$ .
- b) Si  $X \subseteq S$  y  $Y \subseteq X$  entonces  $\text{ran}(Y) = |I|$  para algún  $I \subseteq X$  y  $I \in \mathcal{I}$ , por lo tanto  $\text{ran}(X) \geq |I|$  entonces  $\text{ran}(X) \geq \text{ran}(Y)$ .
- c) Sean  $X, Y \subseteq S$ , sea  $I_1$  un independiente maximal en  $X \cup Y$  y sea  $I_2$  un independiente maximal de  $X \cap Y$ . Si  $|I_2| < |I_1|$ , por la tercera condición de la definición de matroide existe  $a \in I_1 \setminus I_2$  tal que  $I_3 = I_2 \cup \{a\} \in \mathcal{I}$ , es claro que  $I_2 \subseteq I_3 \subseteq X \cap Y \cup I_1 \subseteq X \cup Y$  y  $|I_3| = |I_2| + 1 = |I_1|$ . Sea  $I \subseteq X$  un conjunto independiente maximal, entonces  $|I| = \text{ran}(X)$  como  $I_3 \cap X \subseteq X$  y  $I_3 \cap X \in \mathcal{I}$ , entonces

$$|I_3 \cap X| \leq |X| = \text{ran}(X).$$

Luego,  $\text{ran}(X \cup Y) = |I_3|$  y el  $\text{ran}(X \cap Y) = |I_2|$ ,  $\text{ran}(X) = |X| \geq |I_3 \cap X|$  y  $\text{ran}(Y) \geq |I_3 \cap Y|$ . Por lo tanto,

$$\text{ran}(X) + \text{ran}(Y) \geq |I_3 \cap X| + |I_3 \cap Y| \geq |(X \cup Y) \cap I_3| + |(X \cap Y) \cap I_3|$$

como  $(X \cup Y) \cap I_3 = I_3$  y  $I_2 \subseteq (X \cap Y) \cap I_3$ , tenemos

$$\text{ran}(X) + \text{ran}(Y) \geq |I_3 \cap X| + |I_3 \cap Y| = |I_3| + |I_3 \cap X \cap Y|$$

pero  $|I_3| + |I_3 \cap X \cap Y| \geq \text{ran}(X \cup Y) + \text{ran}(X \cap Y)$ . Por lo tanto,

$$\text{ran}(X) + \text{ran}(Y) - \text{ran}(X \cap Y) \geq \text{ran}(X \cup Y).$$

Vemos que se cumplen las tres condiciones de rango con el matroide  $M$ .

La demostración de 2.  $\Rightarrow$  1. se prueba en la siguiente proposición. ■

La proposición establece que un conjunto  $S$  y una función de rango determinan un matroide.

**Proposición 3.1.** *Dado un conjunto  $S$  y una función  $\text{ran} : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  tal que cumple a), b), y c) del teorema 3.1, se cumple que  $M = (S, \mathcal{I})$  es un matroide sobre  $S$ , donde*

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq S : \text{ran}(X) = |X|\}$$

**Demostración:**

Demostremos que se cumple la definición de matroide.

1. Es claro que  $\emptyset \in \mathcal{I}$ .
2. Sea  $X \in \mathcal{I}$  y  $Y \subseteq X$ . Supongamos que  $Y \notin \mathcal{I}$  entonces  $\text{ran}(Y) < |Y|$ . Se tiene  $X = Y \cup X \setminus Y$ . Entonces  $|X| = \text{ran}(X) = \text{ran}(Y \cup (X \setminus Y)) < |Y| + |X \setminus Y| = |X|$ , lo cual es una contradicción pues  $Y \subseteq X$ . Por lo tanto, se cumple la segunda condición.
3. Sea  $X, Y \in \mathcal{I}$  con  $|X| = |Y| + 1$ . Sea  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_q, z_{q+1}, \dots, z_k, z_{k+1}\}$  y  $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_q, y_{q+1}, \dots, y_k\}$  donde  $z_i \neq z_j$  para algunos  $e$  y  $j$ . Supongamos que  $Y \cup z_i \notin \mathcal{I}$  para algunos  $q + 1 \leq i \leq k + 1$ . Entonces

$$\text{ran}(Y) = \text{ran}(Y \cup z_i) = |Y|.$$

Luego

$$\text{ran}(Y \cup z_i \cup z_j) = \text{ran}(Y) = |Y|,$$

para algunos  $q + 1 \leq i, j \leq k + 1$ . Y así, sucesivamente, tenemos

$$\text{ran}(X) \leq \text{ran}(Y \cup z_{q+1} \cup \dots \cup z_{k+1}) = |Y| < |X|$$

pero esto contradice que  $X \in \mathcal{I}$ . Por lo tanto,  $Y \cup z_i \in \mathcal{I}$  para algún  $i$ , lo cual cumple con la tercera condición de la definición.

Vemos que se cumplen las tres condiciones, de aquí, concluimos que  $\mathcal{I}$  es la colección de conjuntos independientes de un matroide y la función de rango de un matroide. ■

**Definición 3.3.** Decimos que dos matroides  $M$  y  $M'$  en  $S$  y  $S'$  respectivamente son **isomorfos** si existe una biyección  $f : S \rightarrow S'$  que preserva independencia. De manera análoga, definimos que  $f$  es un **isomorfismo** si y sólo si preserva la función de rango.

**Notación.** Denotaremos  $M \approx M'$  si  $M$  y  $M'$  son isomorfos.

**Ejemplo 3.2.** Si  $S = \{\heartsuit, \square\}$ , entonces sus matroides sobre  $S$  son  $M_1 = \{\emptyset\}$ ,  $M_2 = \{\emptyset, \{\heartsuit\}\}$ ,  $M_3 = \{\emptyset, \{\square\}\}$ ,  $M_4 = \{\emptyset, \{\heartsuit\}, \{\square\}\}$  y  $M_5 = \{\emptyset, \{\heartsuit\}, \{\square\}, \{\heartsuit, \square\}\}$ . Hay exactamente 5 matroides pero los matroides  $M_2 = \{\emptyset, \{\heartsuit\}\}$  y  $M_3 = \{\emptyset, \{\square\}\}$  son isomorfos pues tienen la misma estructura y hay una biyección entre ellos dos.

A continuación, ilustraremos algunos ejemplos de matroides.

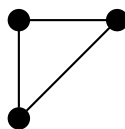
**Ejemplo 3.3.** Sea  $A \subseteq S$ . Sea  $S$  un conjunto de cardinalidad  $n$  e  $\mathcal{I}$  todos los subconjuntos de  $S$  de cardinalidad menor o igual a  $k$ .

$$\text{ran}(A) = \begin{cases} |A|, & \text{si } |A| < k; \\ k, & \text{si } |A| \geq k; \end{cases}$$

Este es un matroide de rango  $k$ , llamado **matroide uniforme** y es denotado por  $U_{k,n}$ .

**Ejemplo 3.4.** Sea  $S$  algún subconjunto finito de una espacio vectorial  $V$ . Sea  $X \subseteq S$ , un conjunto  $X = \{x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{I}$  si sólo si los los vectores  $x_1, \dots, x_k$  son linealmente independientes en  $V$ . Entonces  $\mathcal{I}$  es la colección de conjuntos independientes de  $S$ . La función de rango es justamente el rango (o dimensión) de  $V$  restringida al conjunto  $S$ .  $S, \mathcal{I}$  es un matroide, éste matroide se llama **matroide vectorial**.

**Ejemplo 3.5.** Sean  $G$  un grafo y  $S$  un conjunto de aristas de  $E(G)$ . Sea  $X \in \mathcal{I}$  si y sólo si no contiene ciclos de  $G$ . Entonces  $\mathcal{I}$  es la colección de conjuntos independientes de un matroide en  $S$ , llamado **matroide ciclo** y denotado por  $M(G)$ . Por ejemplo, sea el grafo  $G = K_3$

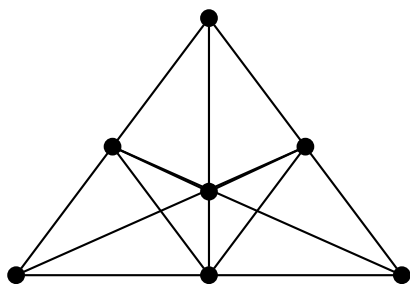


**Figura 3.1:** El grafo  $K_3$ .

Sea  $S = \{e_1, e_2, e_3\}$  y  $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_2, e_3\}\}$ , por tanto, su matroide ciclo es el matroide uniforme  $U_{2,3}$ .

**Ejemplo 3.6.** Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  sobre un campo  $\mathbb{F}$  con las columnas etiquetadas  $x_1, \dots, x_n$ . Sea  $M[A]$  el matroide sobre las etiquetas y cuyo *rango* es la dimensión de  $A$  restringida al conjunto  $S$  de las etiquetas de las columnas. Entonces  $(S, \text{ran})$  es un matroide. A este matroide le llamaremos **matroide representable**. En la figura 3.2 se muestra el grafo asociado al matroide representable de la matriz  $A$  dada en la misma figura.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

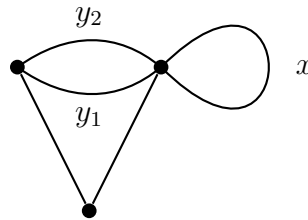


**Figura 3.2:** Grafo asociado al matroide representable  $M[A]$ .

## 3.2. Lazos y elementos paralelos

Definiremos un **lazo (bucle)** de un matroide  $M$  a un elemento  $x$  de  $S$  tal que  $\{x\}$  es un conjunto dependiente. Dos elementos  $x, y \in S$  se dirán **múltiples o paralelos** si no son lazos pero  $\{x, y\}$  es un conjunto dependiente.

**Ejemplo 3.7.** Si  $M(G)$  es el matroide ciclo del grafo  $G$  de la figura 3.3 tenemos que  $y_1$  e  $y_2$  son elementos paralelos de  $M$  y  $x$  es un lazo.



**Figura 3.3:** Lazo y elementos paralelos de un matroide.

**Ejemplo 3.8.** Sea  $A$  una matriz de  $3 \times 7$  en el campo de los números reales definida como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Etiquetamos a cada vector columna con su respectivo número de columnas. Es decir, sea  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  el conjunto de columnas etiquetadas de la matriz  $A$  y definiremos a  $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}, \{4, 5, 6\}\}$ , el  $\{2\}$  es un lazo y la pareja de vectores columnas  $\{4\}, \{7\}$  son elementos paralelos.

En la teoría de grafos definimos un grafo simple como el grafo que no tiene aristas múltiples ni lazos. Así, de manera análoga definiremos a un **matroide simple** si no tiene lazos ni elementos múltiples. De los ejemplos 3.7 y 3.8 son simples si les quitamos sus elementos múltiples y lazos.

### 3.3. Grafos y matroides

En general, un grafo no es un matroide, sin embargo, a todo grafo le podemos asociar un matroide, en esta dirección se enuncia el siguiente teorema. Los grafos se asocian a matroides y para esto se enunciará el teorema a continuación.

**Teorema 3.2.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Sea  $A \subseteq E(G)$  y  $\text{ran} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  como  $\text{ran}(A) = |V| - k(A)$ , donde  $k(A)$  es el número de componentes conectadas del grafo  $(V, A)$ . Entonces la función  $\text{ran}$  es una función rango de un matroide en  $E$ .

**Demostración:**

Sea  $G$  un grafo cualquiera con  $n$  vértices,  $E$  el conjunto de aristas y la función de rango  $ran$ . Demostraremos la parte 2 del teorema 3.1.

1. Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $E$ . Es claro que  $ran(A) > 0$  para todo  $A \subseteq E$  ya que el número de componentes conectadas de un grafo no puede exceder su número de vértices. Usando inducción en el número de aristas de  $A$ . Si suponemos que  $E$  no tiene aristas entonces  $ran(A) = n - n = 0$ , por lo tanto,  $0 \leq 0 = ran(A) \leq |A| = 0$ . Ahora bien, si  $ran(B) \leq |B|$  para todo  $B$  con menos de  $m$  aristas, así, elegimos una arista  $e \in A$ . Luego al quitar  $e$  nos queda un subconjunto  $B$  de  $E$  con  $m - 1$  aristas. Por lo tanto,  $ran(B) \leq |m - 1|$ . Si agregamos la arista  $e$  nuevamente, no cambia el número de vértices pero sí podría disminuir el número de componentes conectados en 1. Por consiguiente  $ran(A) \leq ran(B) + 1 \leq m - 1 + 1 = m$ . Finalmente, cada subconjunto de  $E$  mantiene la primera condición del teorema 3.1 inciso 2.
2. Sean  $A \subseteq B \subseteq E$ . Supongamos que  $k(A) = m$ . Entonces dado que  $B$  contiene todas las aristas de  $A$  vemos que  $k(B) \leq m$ . Por lo tanto,  $ran(A) = n - m$  y  $ran(B) \geq n - m$ , así,  $ran(A) \leq ran(B)$  y se cumple la segunda condición.
3. Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $E$ . Haremos inducción sobre el número de aristas en  $A$  o en  $B$  pero no al mismo tiempo. Es decir,  $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| = m$ . Si  $m = 0$  entonces  $A = B = A \cup B = A \cap B$ , por lo tanto,  $ran(A) = ran(B) = ran(A \cup B) = ran(A \cap B)$ . Por consiguiente,

$$ran(A \cup B) \leq ran(A) + ran(B) - ran(A \cap B).$$

Supongamos que esto es cierto para  $0, 1, \dots, m - 1$  y que  $m \neq 0$ . Como  $m \neq 0$ , sin pérdida de generalidad, hay una arista  $e$  en  $A \setminus B$  y consideremos los siguientes conjuntos  $A \setminus \{e\}$  y  $B$ . Por lo tanto,

$$|((A \setminus \{e\}) \cup B) \setminus ((A \setminus \{e\}) \cap B)| = m - 1.$$

Por la hipótesis de inducción  $ran((A \setminus \{e\}) \cup B) + ran((A \setminus \{e\}) \cap B) \leq ran(A \setminus \{e\}) + ran(B)$  y como  $e$  no está en  $B$ , por tanto,  $ran(A \cap B) = ran(A \cup B) - 1$ . Entonces sabemos que  $A \setminus \{e\}$  tiene un componente más conectado que  $A$ , así,  $ran(A \setminus \{e\}) = ran(A) - 1$ , por lo tanto,  $ran((A \setminus \{e\}) \cup B) + ran((A \setminus$

$\{e\} \cap B) \leq \text{ran}(A) + \text{ran}(B)$ . Como  $\text{ran}((A \setminus \{e\}) \cup B) = \text{ran}(A \cup B)$  y  $\text{ran}((A \setminus \{e\}) \cap B) = \text{ran}(A \cap B)$ , entonces

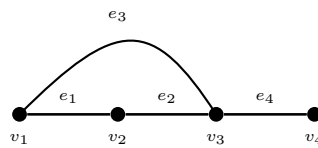
$$\text{ran}(A \cup B) \leq \text{ran}(A) + \text{ran}(B) - \text{ran}(A \cap B).$$

Vemos que se cumplen las tres condiciones, en consecuencia, se concluye que  $(E, \text{ran})$  es un matroide para algún grafo. ■

**Observación.** Notemos que el matroide asociado al grafo  $G = (V, E)$  es  $M = (E, \mathcal{I})$  donde

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |v| - k(X) = |X|\}.$$

**Ejemplo 3.9.** Consideremos el grafo  $G$  ilustrado en la figura 3.4.



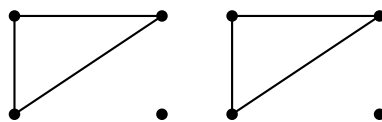
**Figura 3.4:** Matroide asociado al grafo  $G$ .

$M = (S, \mathcal{I})$  donde  $S = E$  y  $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}\}$  es el matroide asociado al grafo  $G$

El concepto de independencia, nos conduce a la siguiente definición.

**Definición 3.4.** La **suma directa** de dos matroides con  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , denotada por  $M_1 \oplus M_2$ , es el matroide generado por  $E = E(M_1) \cup E(M_2)$  con  $\mathcal{I} = \{I_1 \cup I_2 : I_1 \in \mathcal{I}(M_1), I_2 \in \mathcal{I}(M_2)\}$ .

Es decir, la suma directa es el matroide creado por todos los elementos de cada conjunto e indicando que un conjunto de la suma directa de dos matroides es independiente, si es la unión de los matroides  $M_1$  y  $M_2$  ambas independientes. Esta definición es muy simple para grafos. La suma directa se genera colocando  $G_1$  y  $G_2$  lado a lado y definiendo la función de rango. Por ejemplo, en la figura 3.5 se representa la suma directa de un grafo  $G$  consigo mismo.



**Figura 3.5:** La suma directa  $G \oplus G$ .

El siguiente teorema establece que efectivamente la suma directa de matroides es también un matroide.

**Teorema 3.3.** *Si  $M_1$  y  $M_2$  son matroides, entonces  $M_1 \oplus M_2$  es un matroide.*

**Demostración:**

Sean  $M_1 = (E_1, I_1)$  y  $M_2 = (E_2, I_2)$  matroides. Probaremos las tres condiciones de la definición de matroide.

1. Sea  $\emptyset \in I_1$ , entonces  $\emptyset \in I_1 \cup I_2$  y por lo tanto,  $\emptyset \in \mathcal{I}$ .
2. Sea  $X \in \mathcal{I}$  y  $Y \subseteq X$ , entonces  $X \in I_1 \cup I_2$ , por lo tanto,  $X \in I_1$  o  $X \in I_2$  como  $I_1$  y  $I_2$  son independientes, entonces  $Y \in I_1$  o  $Y \in I_2$ , luego  $Y \in I_1 \cup I_2$ , esto es,  $Y \in \mathcal{I}$  y vemos que se cumple la segunda condición.
3. Sean  $X, Y \in \mathcal{I}$  y  $X = X_1 \cup X_2$  y  $Y = Y_1 \cup Y_2$  con  $|X_1 \cup X_2| = |Y_1 \cup Y_2| + 1$ , entonces  $|X_1| > |Y_1|$  o  $|X_2| > |Y_2|$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $|X_1| > |Y_1|$ , como  $I_1$  es independiente entonces existe  $z \in X_1 \setminus Y_1$  tal que  $(z \cup Y_1 \cup Y_2) \in I_1$ , de esta forma tenemos que  $z \in (X_1 \cup X_2) \setminus (Y_1 \cup Y_2)$  tal que  $z \cup Y \in \mathcal{I}$ .

Vemos que se cumplen las tres condiciones de la definición de matroide y por tanto, concluimos que la suma directa de matroides también es un matroide. ■

Como los bucles se definieron para grafos, la función de rango se puede usar para definir este mismo término para matroides.

**Teorema 3.4.** *En un matroide  $M = (E, \text{ran})$ ,  $e \in E$  el  $\text{ran}(e) = 0$  si y solo si  $e$  es un lazo (bucle).*

**Demostración:**

Sea  $A \subseteq E$ ,  $e \in E$  y  $\text{ran}(e) = 0$ . Supongamos que  $e$  no es un lazo, entonces  $e$  es un elemento independiente. Por lo tanto,  $\text{ran}(A \cup e) = |A \cup e| = |A| + |e|$  pues  $e$  es independiente. Como  $|A| = \text{ran}(A)$  y  $1 = |e| = \text{ran}(e)$ . Entonces  $\text{ran}(e) = 1$  pero esto es una contradicción, pues el  $\text{ran}(e) = 0$ . Por lo tanto  $e$  es un bucle.

Ahora, sea  $A \subseteq E$ ,  $e \in E$  y  $e$  un lazo. Entonces el  $\text{ran}(A \cup e) = \text{ran}(A)$  pues  $e$  es un lazo, por lo tanto  $\text{ran}(e) = 0$ . ■



En grafos se define que significa que una arista sea un puente, en la siguiente definición se define el concepto análogo para matroides a través de la función de rango.

**Definición 3.5.** Un **puente** es un elemento  $a \in E$  tal que  $\text{ran}(A \cup \{a\}) = \text{ran}(A) + 1$  para algún conjunto independiente  $A$ .

Del teorema , notemos que cualquier conjunto que contiene un bucle es dependiente y si  $A$  es un conjunto independiente, también lo es  $A \cup a$  siempre que  $a$  es un puente. Dado que los lazos en grafos son dependientes entonces también lo son lazos del matroide. También, dado que los puentes de un grafo no forman parte de un ciclo, agregar uno o cualquier conjunto independiente, no creará un nuevo ciclo. Así los puentes de los grafos también son puentes de los matroides.

### 3.4. Eliminación y Contracción

Recordemos que la operación eliminación de una arista  $e$  de un grafo  $G$  es denotada por  $G - e$ . La siguiente definición establece el concepto análogo para matroides.

**Definición 3.6.** Sea  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide. Sea  $e \in E$  con  $e$  que no es puente. El matroide  $M - e$  tiene el conjunto  $E - \{e\}$  y conjuntos independientes que son aquellos elementos de  $E$  que no contienen a  $e$ :  
 $\mathcal{I}$  es independiente en  $M - e$  si y solo si  $e \notin \mathcal{I}$  e  $\mathcal{I}$  es independiente en  $M$ .

Sabemos que la contracción de una arista  $e$  en un grafo, que hemos representado por  $G/e$  es la identificación de  $e \in E$ .

**Definición 3.7.** Sea  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide,  $e \in E$  ( $e$  no es lazo). La **contracción** de  $M/e$  tiene el conjunto  $E - \{e\}$  y conjuntos independientes que se forman al elegir todos los elementos de  $\mathcal{I}$  que contienen a  $e$  y luego eliminar  $e$  de cada uno de estos conjuntos:

$\mathcal{I} - \{e\}$  es independiente en  $M/e$  si y solo si  $e \in \mathcal{I}$  e  $\mathcal{I}$  es independiente en  $M$ .

**Observación.** Si  $i(M)$  denota el número de conjuntos independientes de un matroide  $M$ , entonces  $i(M) = i(M - e) + i(M/e)$

Queremos saber también que pasa con la función de rango en la eliminación y contracción de un matroide  $M = (E, \text{ran})$ . De aquí surge la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.** *Sea  $M = (E, \text{ran})$  un matroide.*

1. Si  $e$  no es puente, entonces  $\text{ran}(M - e) = \text{ran}(M)$ .
2. Si  $e$  no es lazo, entonces  $\text{ran}(M/e) = \text{ran}(M) - 1$ .

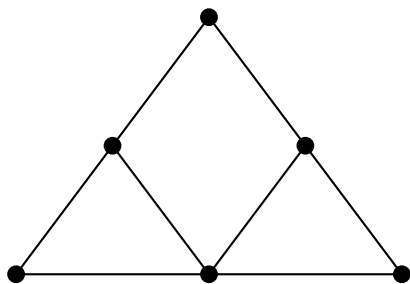
Con la proposición 3.2 tenemos una descripción de las funciones de rangos de  $M - e$  y  $M/e$  en términos de las funciones de rangos de  $M$ . El teorema 3.1 formaliza esta idea.

**Teorema 3.5.** *Sea  $M = (E, \text{ran})$  un matroide y  $e$  un elemento que no es puente ni lazo. Sea  $A \subseteq E$  con  $e \notin A$ , entonces*

1. La **eliminación**  $\text{ran}_{M-e}(A) = \text{ran}_M(A)$ .
2. La **contracción**  $\text{ran}_{M/e}(A) = \text{ran}_M(A \cup e) - 1$ .

**Ejemplo 3.10.** En el ejemplo 3.6, la eliminación del vector  $\{7\} \in E$  es equivalente a eliminar la columna 7 de la matriz  $A$  dada en la figura 3.6. La matriz resultante  $A'$  y el grafo asociado al matroide representable se ilustran en la figura 3.7.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



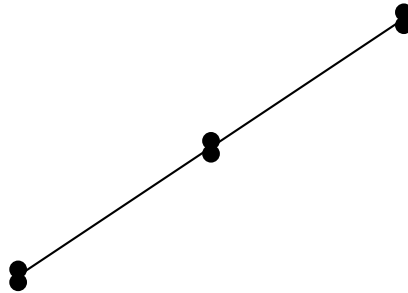
**Figura 3.6:** Matroide representable  $M[A]$  menos el vector 7.

**Ejemplo 3.11.** En el ejemplo 3.6, la operación de contracción del vector 7 equivale a eliminar la matriz  $A$  el primer renglón y su primera y séptima fila columna,

resultando así la matriz  $A''$ .

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la figura 3.7 se ilustra el matroide representable  $M[A]$ .



**Figura 3.7:** Matroide representable  $M[A]$  y la contracción del vector 7.

**Ejemplo 3.12.** La eliminación y contracción de una arista de un grafo  $G = (V, E)$  es análoga a las operaciones de aristas vista en el capítulo 1 sección 1.2.

Cuando aplicamos una sucesión de operaciones ya sea por la eliminación o contracción en un matroide, tenemos un nuevo matroide, que definiremos de la siguiente manera.

**Definición 3.8.** Sea  $M = (S, \mathcal{I})$  un matroide. Un matroide  $N$  obtenido de  $M$  a través de una secuencia de operaciones de eliminación y/o contracción es llamado **menor**. Diremos que  $N$  es un menor que está contenido en  $M$ .

Si alguna clase es obtenida con la propiedad de que todos sus menores son de esa misma clase; entonces, decimos que la clase es **cerrados bajo menores**.



# Capítulo 4

## El Polinomio de Tutte

En esta capítulo introduciremos el Polinomio de Tutte, que como veremos más adelante es una generalización del polinomio cromático que resulta ser una invariante para grafos y matroides. Iniciamos con la definición del Polinomio de Tutte para matroides.

### 4.1. Construcción para el Polinomio de Tutte

El polinomio de Tutte puede ser calculado con distintos algoritmos. Sin embargo, el algoritmo que puede aplicarse de forma general para calcularlo, es el que en principio empleó Tutte, conocido ahora como algoritmo de eliminación-contracción de aristas.

**Definición 4.1.** *El **Polinomio de Tutte** de un matroide  $M$  es un polinomio  $T(M; x, y)$  de dos variables definido recursivamente de la siguiente manera:*

1. Si  $E_M$  es vacío, entonces  $T(M; x, y) = 1$
2.  $T(M; x, y) = yT(M - e; x, y)$  si  $e$  es un bucle.
3.  $T(M; x, y) = xT(M/e; x, y)$  si  $e$  es un puente.
4.  $T(M; x, y) = T(M - e; x, y) + T(M/e; x, y)$  para cualquier otro elemento  $e$ .

Ilustremos con algunos ejemplos sencillos la definición recursiva del Polinomio de Tutte.

**Ejemplo 4.1.** Hay cuatro matroides con dos puntos:

1.  $M_1 = U_{2,2}$  consiste de dos puentes.
2.  $M_2 = U_{1,1} \oplus U_{0,1}$  es la suma directa de un lazo y un puente.
3.  $M_3 = U_{1,2}$  es doble punto.
4.  $M_4 = U_{0,2}$  consiste de dos lazos.

Usando la definición recursiva para calcular el Polinomio de Tutte para cada uno de estos matroides obtenemos:

1. Para  $M_1$ , tenemos puentes  $e_1$  y  $e_2$ , entonces aplicando la definición 4.1 inciso 3 tenemos que  $T(M; x, y) = xT(M/e_1; x, y) = x^2T(M/e_1/e_2; x, y) = x^2T(\emptyset; x, y) = x^2$ .
2. Para  $M_2$  tenemos un lazo  $e_1$  y puente  $e_2$ , entonces aplicando el inciso 2 para el lazo  $e_1$  tenemos que  $T(M; x, y) = yT(M - e_1; x, y) = xy$  y el inciso 3 para el puente  $e_2$  tenemos que  $T(M; x, y) = xT(M/e_2; x, y) = xy$ .
3. Para  $M_3$  tenemos doble punto, es decir no es puente ni lazo, entonces aplicando el inciso 4 y sea  $E = \{a, b\}$  una base, si eliminamos y contraemos a  $a$ . Entonces  $M_3 - a$  es un puente y  $M_3/a$  es un lazo. Así  $T(M; x, y) = T(M - e; x, y) + T(M/e; x, y) = x + y$ .
4. Para  $M_4$  tenemos dos lazos  $e_1$  y  $e_2$ , aplicando el inciso 2 para lazos tenemos que  $T(M; x, y) = yT(M - e_1; x, y) = y^2T(M - e_1 - e_2; x, y) = T(\emptyset; x, y) = y^2$ .

Al igual que el polinomio cromático podemos usar estas relaciones con el Polinomio de Tutte en la definición 4.1 para reducir un matroide. Los grafos son más fáciles de visualizar que un matroide general. Para ilustrar esta facilidad construimos el Polinomio de Tutte de un ejemplo en particular. En este caso se usará el arista verde para reducir y el polinomio de cada grafo inferior indica la contribución de dicho grafo en el Polinomio de Tutte de  $G$ .

En la figura 4.1 se ilustra un árbol de grafos (árbol con nodos etiquetados por grafos) cuya raíz es el grafo  $G$  y las aristas son determinadas por las operaciones contracción, eliminación e identificación en vértices y aristas de los grafos nodo.

Los polinomios de Tutte de los grafos hoja de árbol son sumados para obtener que el Polinomio de Tutte de  $G$  es:

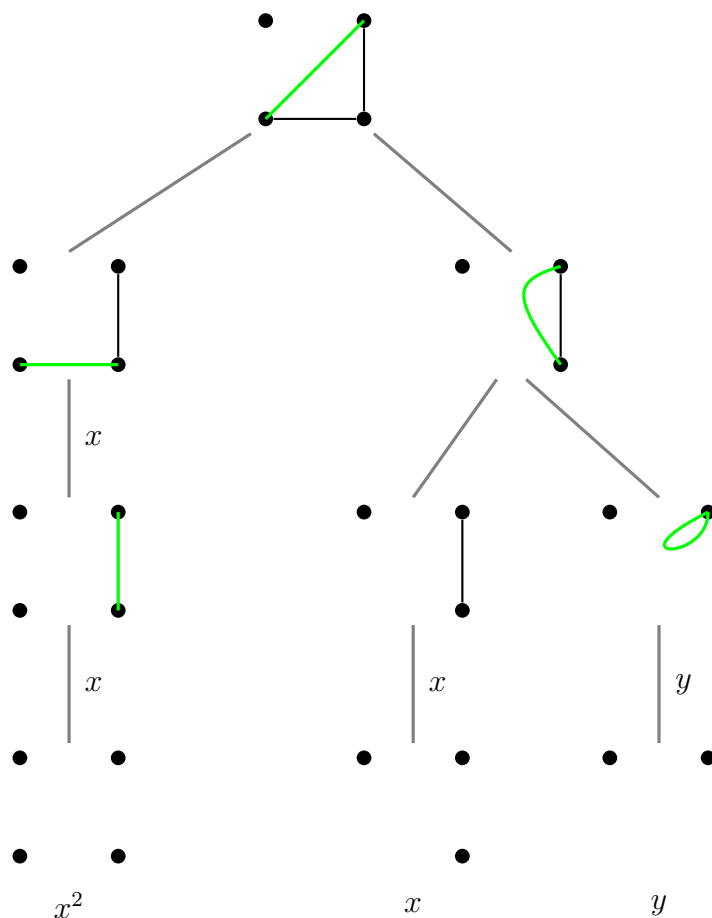


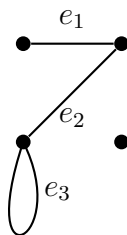
Figura 4.1: El Polinomio de Tutte de un grafo  $G$ .

$$T(G; x, y) = x^2 + x + y.$$

El Polinomio de Tutte contiene mucha información sobre el grafo  $G$ . Por ejemplo, a partir de  $T(G; x, y)$  se pueden calcular el número de vértices y aristas de  $G$ , el número de ciclos e incluso el polinomio cromático, el capítulo 5 estará dedicados a estos y otros problemas de conteo a través del Polinomio de Tutte.

Hay diferencias y semejanzas entre la descomposición cromática que vimos en el capítulo 2 sección 2.2. La diferencia mas notoria es como se tratan los puentes y los bucles, esto es, se descomponen de manera diferente, la reducción para el Polinomio de Tutte es mucho más simple en estos casos.

**Ejemplo 4.2.** En el grafo  $G$  ilustrado en la figura 4.2 se tienen dos puentes  $e_1$  y  $e_2$ , y un bucle  $e_3$ .



**Figura 4.2:** El Polinomio de Tutte de un grafo  $G$  con bucle y puentes.

Una aplicación casi directa de la definición del Polinomio de Tutte para el grafo  $G$ , nos conduce que la variable  $x$  se eleva a la potencia el número de puentes a su vez este resultado se multiplica por la variable  $y$  elevada al número de lazos. Esto es,

$$x^2y.$$

Así nuestra descomposición en la rama izquierda de nuestro árbol de grafos podría haberse detenido después de una iteración y la rama derecha después de dos iteraciones.

Más adelante probaremos que el Polinomio de Tutte está bien definido.

## 4.2. Polinomio de corango-nulidad

La definición 4.1 del Polinomio de Tutte debe estar bien definida, para este fin introduciremos otro polinomio de dos variables como sigue.

**Definición 4.2.** El *polinomio corango-nulidad* o *polinomio generador de rango*  $S(M; u, v)$  de un matroide  $M$  es definido como

$$S(M; u, v) = \sum_{A \subseteq E} u^{\text{ran}(E) - \text{ran}(A)} v^{|A| - \text{ran}(A)},$$

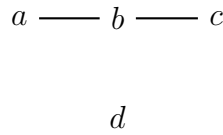
donde  $M = (E, \text{ran})$  es un matroide con función de rango  $\text{ran}$ .

El **corango** de  $A \subseteq E$  es  $\text{ran}(E) - \text{ran}(A)$ , y la **nulidad** es  $|A| - \text{ran}(A)$ .



Observe que estos términos han sido tomados por analogía del álgebra lineal.

**Ejemplo 4.3.** Consideremos el matroide del la figura 4.3. En la tabla de abajo se muestra el corango y nulidad para varios subconjuntos de  $E$ .



**Figura 4.3:** Matroide para el ejemplo 4.3

$A$	$\text{ran}(A)$	$ A $	$\text{ran}(E) - \text{ran}(A)$	$ A  - \text{ran}(A)$	$u^{\text{ran}(E) - \text{ran}(A)} v^{ A  - \text{ran}(A)}$
$\emptyset$	0	0	3	0	$u^3$
$a$	1	1	2	0	$u^2$
$ab$	2	2	1	0	$u$
$abc$	2	3	1	0	$uv$
$abd$	3	3	0	0	1
$E$	3	4	0	1	$v$

Sumando los términos de la tabla de arriba obtenemos el polinomio generador de rango:

$$S(M; u, v) = u^3 + 4u^2 + 6u + uv + 3 + v.$$

**Definición 4.3.** Un *invariante ante matroides* es una función  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{R}$  de la clase de todos los matroides  $\mathcal{M}$  a algún anillo conmutativo  $\mathcal{R}$  con la propiedad de que los matroides isomorfos tienen el mismo valor: esto es, si  $M_1 \cong M_2$ , entonces  $f(M_1) = f(M_2)$ .

Las invariantes son una idea muy conocida y usadas en matemáticas. Por ejemplo, el número de rango es un invariante ante matroides como también lo es el polinomio de corango-nulidad. Así necesitamos probar que el polinomio de Tutte también es un invariante ante matroides.

**Teorema 4.1.** Para todo matroide  $M$ , el Polinomio de Tutte es una evaluación del polinomio rango-nulidad:

$$T(M; x, y) = S(M; x - 1, y - 1).$$

En particular, el Polinomio de Tutte es un matroide bien definido.

La demostración la encontramos en [12].

A continuación veremos un ejemplo de como calcular el Polinomio de Tutte a través del polinomio generador de rango.

**Ejemplo 4.4.** Para el grafo completo  $G = K_3$  tenemos:

$$\begin{aligned} S(M; x, y) &= \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{\text{ran}(E)-\text{ran}(A)} (y-1)^{|A|-\text{ran}(A)} \\ &= (x-1)^{2-2}(y-1)^{3-2} + 3(x-1)^{2-2}(y-1)^{2-2} + 3(x-1)^{2-1}(y-1)^{1-1} + (x-1)^2(y-1)^{0-0} \\ &= (x-1)^0(y-1)^1 + 3(x-1)^0(y-1)^0 + 3(x-1)^1(y-1)^0 + (x-1)^2(y-1)^0 \\ &= x^2 + x + y. \text{ Por lo tanto,} \end{aligned}$$

$$T(M; x, y) = x^2 + x + y.$$

### 4.3. Suma directa de matroides

Si un matroide  $M$  es la suma directa de dos matroides  $M = M_1$  y  $M_2$ , es natural preguntarse si es posible calcular el Polinomio de Tutte de los matroides  $M = M_1$  y  $M_2$ . El siguiente teorema establece que esto se puede hacer y también nos da la relación entre los polinomios de Tutte de  $M$ ,  $M = M_1$  y  $M_2$ .

**Teorema 4.2.** *El Polinomio de Tutte de la suma directa esta dado por:*

$$T(M_1 \oplus M_2; x, y) = T(M_1; x, y)T(M_2, x, y).$$

Para la demostración del teorema 4.2 veamos primero que pasa con la eliminación y contracción en la suma de matroides.

**Teorema 4.3.** *Si  $M = M_1$  y  $M_2$  son matroides definidos sobre conjuntos disjuntos  $E_1$  y  $E_2$  con  $e \in E_1$  entonces*

$$(M_1 \oplus M_2) - e = (M_1 - e) \oplus M_2$$

y

$$(M_1 \oplus M_2)/e = (M_1/e) \oplus M_2.$$

Es análogo si para  $e \in E_2$ .

**Demostración:**

La prueba del teorema 4.2 puede ser consultada en [12].

Concluimos esta sección con el teorema 4.4 que caracteriza a los matroides conectados a través del Polinomio de Tutte.

**Teorema 4.4.** *Sea  $M$  un matroide con el Polinomio de Tutte  $T(M; x, y)$ . Entonces  $T(M; x, y)$  es un polinomio irreducible (en el anillo de los polinomios  $\mathbb{Z}(x, y)$ ) si y solo si  $M$  es un matroide conexo.*

El teorema 4.4 fue demostrado por [20]. Una de las direcciones de esta prueba se sigue del teorema 4.2. Si  $M$  no es conectado, entonces  $T(M; x, y) = T(M_1; x, y) + T(M_2; x, y)$ .

#### 4.4. El Polinomio de Tutte-Gröthendieck

El Polinomio de Tutte de un matroide, proporciona una basta información sobre dicho matroide. Por ejemplo, el número de bases  $b(M)$ , conjuntos independientes  $i(M)$  y conjuntos abarcadores  $ca(M)$ .

Dado el Polinomio de Tutte de un matroide no podemos construir el matroide en sí, pues tenemos en ocasiones que matroides no isomorfos pueden tener el mismo Polinomio de Tutte.

Hay una propiedad clave que satisfacen  $b(M)$ ,  $i(M)$  y  $ca(M)$ , esta propiedad consiste en que todos estos números pueden ser calculados recursivamente a través de la eliminación y contracción de elementos  $e$  del matroide que no son lazos ni puentes. Esto es,

- $b(M) = b(M - e) + b(M/e)$ ,
- $i(M) = i(M - e) + i(M/e)$ ,
- $ca(M) = ca(M - e) + ca(M/e)$ .

Con éstas propiedades en mente, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 4.5.** [5] *Sea  $\mathcal{M}$  el conjunto de clases de isomorfismo de matroides y sea  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{Z}(x, y)$  satisfice*

1.  $f(M_1) = f(M_2)$  para matroides isomorfos  $M_1 \approx M_2$ .

2.  $f(M) = f(M - e) + f(M/e)$  si  $e$  no es un lazo ni puente.
3.  $f(M) = f(P)f(M/e)$  para  $P$  un puente.
4.  $f(M) = f(L)f(M - e)$  para  $L$  un lazo.

Entonces  $f(M) = T(M; f(P), f(L))$

Un invariante que satisface las cuatro condiciones del teorema 4.5 es llamado **Tutte-Gröthendieck** ( $T - G$ ) invariante.

Por ejemplo, para el número de conjuntos independientes, tenemos

1.  $i(M) = i(M - e) + i(M/e)$  si  $e$  no es un lazo ni puente.
2.  $i(M) = 2i(M/e)$  si  $e$  es un puente.
3.  $i(M) = i(M - e)$  si  $e$  es un lazo.

Dado que  $i(P) = 2$  y  $i(L) = 1$  para un puente  $P$  y un lazo  $L$ , por el teorema tenemos

$$i(M) = T(M; x, y) = T(M; 2, 1),$$

donde  $x = 2$  e  $y = 2$ . Para encontrar el número de conjuntos independientes que coincide con la proposición 5.1.

## 4.5. Teorema de la Receta

El teorema que se dará a continuación muestra la relación entre el Polinomio de Tutte y el polinomio cromatico. Más aún, es una generalización del teorema 4.5 que reemplaza la recursión de la eliminación y contracción de 2 en el teorema 4.6 siguiente.

**Teorema 4.6. (El Teorema de la Receta)** *Supongamos que  $C$  es una clase de matroides que es cerrada bajo sumas directas y tomando menores. Si una función  $f$  está bien definida sobre  $C$  y cumple lo siguiente:*

1.  $f(M) = af(M - e) + bf(M/e)$  si  $e$  no es puente ni bucle.

2.  $f(M) = f(P)f(M/e)$  para  $e$  un puente.

3.  $f(M) = f(L)f(M - e)$  para  $e$  un lazo.

y evaluados a 1 en el conjunto vacío, entonces  $f$  está dado por

$$f(M) = a^{|E|-r|E|}b^{r(E)}T(M; \frac{f(P)}{b}, \frac{f(L)}{a}) \quad (4.1)$$

donde  $M = (E, \text{ran})$  es algún matroide en  $C$ .

### Demostración:

Supongamos que  $f$  es una función que satisface la ecuación 4.1. Así, tenemos que demostrar que  $f$  satisface las tres condiciones del teorema. Primero, notemos que si  $E$  es vacío, entonces  $f(M) = a^0b^0T(M; \frac{f(P)}{b}, \frac{f(L)}{a}) = 1$ .

1. Supongamos que reduciremos un elemento que no es ni un puente ni un bucle. De las propiedades de la reducción del Polinomio de Tutte sobre los elementos que no son bucles ni puentes obtenemos de la ecuación 4.1 que

$$f(M) = a^{|E|-r|E|}b^{r(E)}(T(M - e; \frac{f(P)}{b}, \frac{f(L)}{a}) + T(M/e; \frac{f(P)}{b}, \frac{f(L)}{a})).$$

Observemos que la eliminación de un elemento no es un bucle ni un puente reduce a  $|E|$  por 1 pero dejando el rango de  $E$  igual. La contracción de un elemento que no es un bucle ni un puente reduce a  $|E|$  y el rango de  $E$  por 1. Este hecho y con las operaciones de álgebra elemental obtenemos la primera condición.

2. Supongamos que estamos reduciendo sobre un puente, sabemos de la operación eliminación que el Polinomio de Tutte sobre un puente, en la fórmula 4.1, nos conduce a

$$f(M) = a^{|E|-r|E|}b^{r(E)}\frac{f(P)}{b}T(M/e; \frac{f(P)}{b}, \frac{f(L)}{a}).$$

Dado que la eliminación de un puente, reduce tanto  $|E|$  y el rango de  $E$  por 1 se obtiene la segunda condición.

3. Por último, supongamos que estamos eliminando un bucle. La eliminación de elementos en el matroide  $M$  y la evaluación del Polinomio de Tutte en el

matroide y la ecuación 4.1 nos lleva a que

$$f(M) = a^{|E|-r|E|} b^{r(E)} \frac{f(L)}{a} T(M - e; \frac{f(P)}{b}, \frac{f(L)}{a}).$$

Al igual que los casos anteriores eliminar un bucle reduce  $|E|$  por 1 y el rango de  $E$  se queda igual, podemos ver que nos lleva a que  $f$  cumple con la última condición. ■

Dado que el Teorema de la Receta da formas de escribir muchas funciones de matroides en términos del Polinomio de Tutte, los grafos son una clase más restringida que los matroides y por tanto necesita menos condiciones para que el Teorema de la Receta funcione. Para ello veremos dos lemas que sirven para demostrar algunas propiedades de grafos y facilitan el uso del Teorema de la receta.

**Lema 4.1.** *Los grafos son cerrados bajo menores y sumas directa.*

**Demostración:**

De las definiciones de eliminación, contracción y suma directas de grafos, cuando las operaciones se realizan en un grafo o dos para sumas directas nos da otro grafo.

■

**Lema 4.2.** *Sea  $f$  una función definida para todos los grafos y supongamos que la condición  $f(G_1 \oplus G_2) = f(G_1)f(G_2)$  se cumple si  $G_1$  y  $G_2$  no tiene aristas y si además se cumplen las siguientes condiciones:*

1.  $f(G) = af(G - e) + bf(G/e)$  si  $e$  no es un puente ni un bucle.
2.  $f(G) = f(P)f(G/e)$  si  $e$  es un puente.
3.  $f(G) = f(L)(G - e)$  si  $e$  es bucle.

Entonces  $f(G_1 \oplus G_2) = f(G_1)f(G_2)$  para cualesquiera grafos  $G_1$  y  $G_2$ .

**Demostración:**

La primera condición de este lema nos da el caso base para la prueba por inducción sobre el número de aristas en  $G_1 \oplus G_2$ . Supongamos que  $n \geq 1$  y  $f(G_1 \oplus G_2) = f(G_1)f(G_2)$  siempre que  $G_1 \oplus G_2$  tenga menos  $n$  aristas. Ahora, supongamos que  $G_1 \oplus G_2$  tiene  $n$  aristas. Sin pérdida de generalidad, sea  $e$  una de estas aristas y un elemento de  $G_1$ , así, consideremos los casos siguientes:

1. Supongamos que  $e$  no es un puente ni un bucle. Por la condición 1, sabemos que  $f(G_1 \oplus G_2) = af((G_1 - e) \oplus G_2) + bf((G_1/e) \oplus G_2)$  como ambos  $(G_1 - e) \oplus G_2$  y  $(G_1/e) \oplus G_2$  tienen  $n - 1$  aristas y por la hipótesis inductiva tenemos que  $f((G_1 - e) \oplus G_2) = f(G_1 - e)f(G_2)$  y  $f((G_1/e) \oplus G_2) = f(G_1/e)f(G_2)$  de aquí, tenemos que

$$f(G_1 \oplus G_2) = af((G_1 - e) \oplus G_2) + bf((G_1/e) \oplus G_2)$$

y como  $e$  no es un puente ni un bucle entonces se cumple que

$$f(G_1 \oplus G_2) = f(G_1)f(G_2).$$

2. Ahora supongamos que  $e$  es un puente, por la condición 2 tenemos que  $f(G_1 \oplus G_2) = f(P)f((G_1/e) \oplus G_2)$  dado que  $(G_1/e) \oplus G_2$  tiene  $n - 1$  aristas y por la hipótesis inductiva tenemos que  $f((G_1/e) \oplus G_2) = f(G_1/e)f(G_2)$ . Por tanto,  $f((G_1/e) \oplus G_2) = f(P)f(G_1/e)f(G_2)$  y esto pasa si  $e$  es un puente. Por consiguiente,  $f(G_1 \oplus G_2) = f(G_1)f(G_2)$ .
3. Ahora supongamos que  $e$  es un bucle, por la condición 3 tenemos que  $f(G_1 \oplus G_2) = f(L)f((G_1 - e) \oplus G_2)$  dado que  $(G_1 - e) \oplus G_2$  tiene  $n - 1$  aristas y por la hipótesis inductiva tenemos que  $f((G_1 - e) \oplus G_2) = f(G_1 - e)f(G_2)$ . Por tanto,  $f((G_1 - e) \oplus G_2) = f(L)f(G_1 - e)f(G_2)$  dado que  $e$  es un bucle. Por lo tanto,  $f(G_1 \oplus G_2) = f(G_1)f(G_2)$ .

Así,  $f(G_1 \oplus G_2) = f(G_1)f(G_2)$  siempre que cumpla las tres condiciones. ■

Los dos lemas anteriores nos llevan a nuestro siguiente teorema, el cual consiste en ajustar las condiciones del Teorema de la Receta, facilitando su uso cuando es aplicado sobre la clase de grafos.

**Teorema 4.7. (El Teorema de la Receta para grafos)** Si una función  $f$ , está bien definida sobre los grafos y satisface las condiciones:

1.  $f(G) = af(G - e) + bf(G \setminus e)$  si  $e$  no es puente ni bucle.
2.  $f(G) = f(P)f(G/e)$  si  $e$  es un puente.
3.  $f(G) = f(L)f(G/e)$  si  $e$  es un bucle.

Para todos los grafos conectados y  $f(G) = 1$ . Si  $G$  no tiene aristas, entonces  $f$  está dado por

$$f(G) = a^{|E|-r|E|} b^{r(E)} T(G; \frac{f(P)}{b}, \frac{f(L)}{a}) \quad (4.2)$$

**Demostración:**

Demostraremos que estas funciones que cumplen las condiciones de grafos, también satisfacen las condiciones del Teorema de la Receta cuando la clase de matroides es un grafo. Por el lema 4.1 los grafos son una clase que es cerrada bajo la suma directa y los menores. Así, supongamos que  $f$  es una función que satisface este teorema. Por el lema 4.2  $f$  satisface que  $f(G_1 \oplus G_2) = f(G_1)f(G_2)$  para cualesquiera grafos  $G_1$  y  $G_2$ . Las únicas condiciones del Teorema de la Receta las enumeramos de 1 a 3 en este teorema, por consiguiente, se cumple la ecuación 4.2. ■

Por todo lo anterior, podemos ver que los grafos son una clase particular que facilita la aplicación del Teorema de la Receta. Ahora veamos un teorema en función del Polinomio de Tutte de cualquier grafo.

**Teorema 4.8.** *Para cualquier grafo  $G$ ,  $T(G - e; x, y) = T(G/e; x, y)$  si  $e$  es un puente o un bucle.*

**Demostración:**

Supongamos que  $e$  es un puente. Observemos que  $G - e = G_1 \oplus G_2$  para algún  $G_1$  y  $G_2$  grafos. Por lo tanto,  $f(G - e; x, y) = f(G_1; x, y)f(G_2; x, y)$ . Ahora, si  $G \setminus e$  de  $G_1$  y  $G_2$  están unidos por un vértice. Luego, llamemos  $G_1 \times G_2$ . Así,  $G/e = G_1 \times G_2$ . Reduciremos  $G_1 \times G_2$  por cada arista de  $G_1$ . Por lo tanto, tenemos un árbol similar al de la figura 4.1 pero sin terminar. Notemos que cada rama tiene la totalidad de  $G_2$ . Si reducimos cada arista de  $G_2$  tenemos un factor común de  $T(G_2; x, y)$  en la parte inferior de cada rama. Factorizando tenemos que  $T(G_1 \times G_2; x, y) = T(G_1; x, y)T(G_2; x, y)$ . Por lo tanto,  $T(G - e; x, y) = T(G_1/e; x, y)$ .

Supongamos que  $e$  es un bucle. Como los puntos finales es el mismo vértice vemos que la eliminación de  $e$  y la contracción de  $e$  es el mismo grafo y por lo tanto, tienen el mismo Polinomio de Tutte. ■

Este teorema en particular nos permite cambiar a  $G - e$  por  $G/e$  y viceversa.



# Capítulo 5

## Conteo a través del Polinomio de Tutte

En la introducción se presenta una lista de algunas áreas donde ciertas evaluaciones del Polinomio de Tutte coinciden con invariantes gráficas o en matroides. En este capítulo se calcularán algunas evaluaciones del Polinomio de Tutte que nos llevan a determinar, por ejemplo, el número de árboles abarcadores, el número de bosques, el número de orientaciones acíclicas y el número  $\lambda$ -coloreo de un grafo.

### 5.1. Aplicación del Polinomio de Tutte

El siguiente resultado cuya prueba puede ser encontrada en [12] establece que dado  $M = (E, \mathcal{I})$  un matroide podemos determinar  $|\mathcal{I}|$ , es el número de conjuntos abarcadores de  $M$  y  $2^{|E|}$  con simples evaluaciones sobre el conjunto  $E$ .

Las siguientes proposiciones hacen que podamos contar un matroide.

**Proposición 5.1.** *Sea  $M$  un matroide. Entonces*

1.  $T(M; 2, 1) = S(M; 1, 0)$  igual al número de conjuntos independientes de  $M$ .
2.  $T(M; 1, 2) = S(M; 0, 1)$  igual al número de conjuntos abarcadores de  $M$ .
3.  $T(M; 2, 2) = S(M; 1, 1) = 2^{|E|}$ .

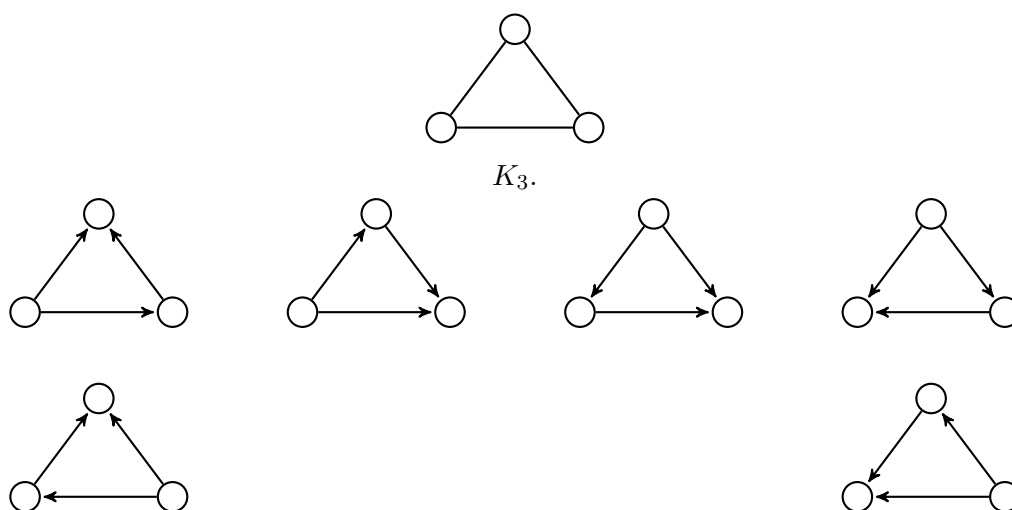
**Ejemplo 5.1.** Retomando el matroide del ejemplo 4.3 del capítulo 4, tenemos que  $T(M; x, y) = x^3 + x^2 + xy$  y de la proposición 5.1 tenemos las siguientes evaluaciones.

1.  $T(M; 2, 1) = 2^3 + 2^2 + 2(1) = 14$
2.  $T(M; 1, 2) = 1^3 + 1^2 + 1(2) = 4$
3.  $T(M; 2, 2) = 2^4 = 16$

Esto es, el matroide  $M$  tiene 14 conjuntos independientes, 4 conjuntos abarcadores y 16 elementos (subconjuntos de  $E$ ).

Si  $G$  es un grafo, podemos orientar  $G$  asignando direcciones a todas las aristas de  $G$ , es decir,  $G$  será un grafo orientado. Si una orientación de  $G$  no tiene ciclo dirigido, diremos que la orientación es acíclica.

**Ejemplo 5.2.** Sea  $G = K_3$  ¿Cuántas orientaciones acíclicas tiene  $K_3$ ? Es más fácil encontrar las malas orientaciones, es decir, son aquellas orientaciones que son ciclos dirigidos. Por lo tanto, todas las posibles orientaciones que son  $2^3 = 8$  le restamos las malas orientaciones, que en este caso son 2 resultado un total de 6 orientaciones acíclicas. En la figura 5.1, se ilustra el grafo completo  $K_3$  junto con sus 6 orientaciones acíclicas.



**Figura 5.1:** Las 6 orientaciones acíclicas de  $K_3$ .

¿Qué pasa con el Polinomio de Tutte? Por lo que ya hemos visto, sabemos que  $M(K_3) = U_{2,3}$  entonces  $T(M(K_3); x, y) = x^2 + x + y$ . Evaluando el Polinomio de Tutte en  $x = 2$  y  $y = 0$  obtenemos  $T(M(K_3); 2, 0) = 6$ .

El siguiente teorema debido a Stanley establece que la evaluación  $x = 2, y = 0$  en el Polinomio de Tutte nos da el número de orientaciones acíclicas en un grafo.

**Teorema 5.1.** [27] *Sea  $G$  un grafo y sea  $a(G)$  el número de orientaciones acíclicas de  $G$ , entonces  $a(G) = T(M(G); 2, 0)$ .*

La demostración de este teorema puede consultarse en [27].

Observe que el número de orientaciones acíclicas depende solamente de la estructura que posea el matroide  $M(G)$ . Por lo tanto, si tenemos dos grafos  $G_1$  y  $G_2$  diferentes con  $M(G_1) = M(G_2)$  entonces  $a(G_1) = a(G_2)$ . En consecuencia, las operaciones de eliminación, contracción e identificación no alteran el número de orientaciones acíclicas en un grafo.

## 5.2. Conexión del polinomio cromático con el Tutte

El matroide ciclo  $M(G)$  de un grafo está definido sobre sus aristas de  $G$ , en cambio el polinomio cromático se define con base a los vértices del grafo  $G$ . Por tanto, si deseamos establecer una conexión entre ambos polinomios es necesario hacer un ajuste sobre la evaluación del Polinomio de Tutte. El siguiente teorema establece dicha conexión entre estos polinomios.

**Teorema 5.2.** *Sea  $G$  un grafo conexo con el conjunto de vértices  $V$ , entonces*

$$\chi_G(\lambda) = (-1)^{|V|-1} \lambda T(M(G); 1 - \lambda, 0).$$

La prueba de este teorema puede consultarse en [12]. Ahora, veamos un ejemplo.

**Ejemplo 5.3.** Para el grafo completo  $K_3$  ya se tenía que su Polinomio de Tutte es  $T(M(K_3); x, y) = x^2 + x + y$ , entonces por el teorema 5.2, obtenemos:

$$\chi_G(\lambda) = (-1)^{3-1} \lambda ((1 - \lambda)^2 + (1 - \lambda)) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Si  $G$  es no conectado, entonces tenemos que reemplazar algunas evaluaciones en el teorema 5.2 tomando en cuenta el número de componentes conectadas  $k(G)$  así la relación:

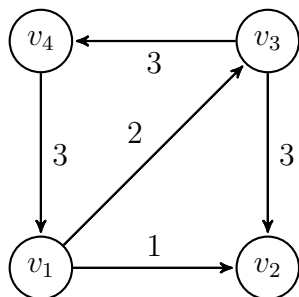
$$\chi_G(\lambda) = \lambda^{k(G)} (-1)^{|V|-k(G)} T(M(G); 1 - \lambda, 0).$$

**Observación.** Observemos que si  $k(G) = 1$  obtenemos la relación del teorema 5.2.

### 5.3. Flujos en ninguna parte cero

Sea  $G$  un grafo y  $H$  un grupo abeliano finito. Podemos orientar las aristas de  $G$  para obtener un grafo dirigido  $G_{\mathcal{O}}$  donde  $\mathcal{O}$  es la orientación. Escribimos  $H$  como un grupo aditivo, con el elemento identidad 0, y asignamos un elemento de  $H$  a cada arista dirigida  $e$  de  $G_{\mathcal{O}}$ . El elemento  $h$  asignado a la arista  $e$  le llamaremos **peso** de  $e$  y lo representaremos por  $p(e)$ . Un  $H$ -flujo es una asignación de los elementos de  $H$  a las aristas del grafo  $G_{\mathcal{O}}$  tales que cumplen la ley de Kirchhoff: *En cada vértice de  $G_{\mathcal{O}}$ , la suma de los pesos de las aristas dirigidas hacia adentro es igual a la suma de los pesos dirigidos hacia afuera.* Finalmente, se dice que un  $H$ -flujo no es cero si el elemento identidad 0 del grupo no es asignado a ninguna arista, esto es,  $p(e) \neq 0$  para toda arista de  $G_{\mathcal{O}}$ .

Por ejemplo, en la figura 5.2 con la orientación dada, podemos verificar el peso de las aristas de  $\mathbb{Z}_4$  dados en la figura dan un flujo cero a ninguna parte. Por ejemplo, el vértice  $v_3$  el peso de la arista dirigida hacia adentro es 2, y el peso total de las dos aristas dirigidas fuera es 6 pero  $6 \equiv 2 \pmod{4}$ .



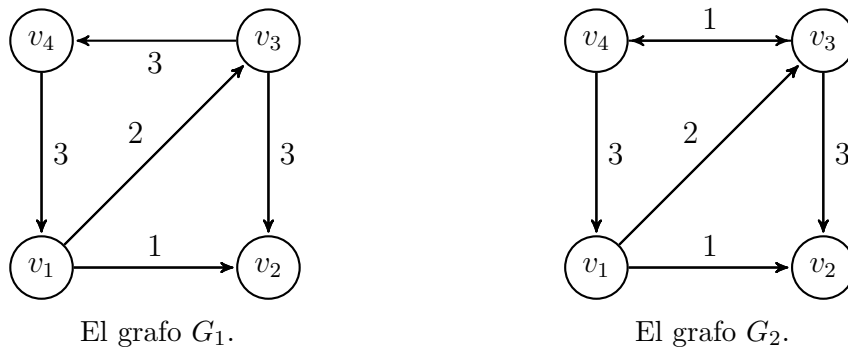
**Figura 5.2:** La orientación de un grafo tiene un flujo cero en ninguna parte con  $H = \mathbb{Z}_4$ .

Ahora, si tenemos un grafo  $G$ , una orientación de las aristas de  $G$  y un grupo finito abeliano  $H$ , ¿cuántos flujos de cero existen? La respuesta a la pregunta tiene

dos resultados y con ellos su respectiva proposición y teorema. Las demostraciones las podemos consultar en [12].

**Proposición 5.2.** *Para un grafo  $G$  y un grupo abeliano finito  $H$ , el número de flujos de cero en ninguna parte es independiente de la orientación de  $\mathcal{O}$ .*

**Ejemplo 5.4.** De la proposición 5.2 sean  $G_1$  y  $G_2$  los grafos ilustrados en la figura 5.3, invertimos la arista  $\{v_3, v_4\}$  para cambiar  $G_1$  a  $G_2$ . por lo tanto, también se cambia el peso de esa arista de 3 en  $G_1$  a 1 en  $G_2$ , el inverso aditivo de 3 en  $\mathbb{Z}_4$ . Es decir, la arista  $\{v_3, v_4\}$  se invierte y su peso  $p(e) = 3$  se reemplaza por  $-p(e) = 1$  en  $\mathbb{Z}_4$ . Esta operación preserva la propiedad de que el flujo no es cero.



**Figura 5.3:** La arista  $\{v_3, v_4\}$  se invierte y su peso  $p(e) = 3$  se reemplaza por  $-p(e) = 1$  en  $\mathbb{Z}_4$ .

**Teorema 5.3.** *Para un grafo  $G$  y un grupo abeliano finito  $H$ , entonces el número de flujos de cero en ninguna parte es dependiente solo en  $|H|$ .*

Una consecuencia del teorema 5.3 es que la estructura del grafo abeliano  $H$  no interesa. Usaremos  $\mathbb{Z}_k$  como un grupo abeliano de orden  $k$ .

Si tenemos que  $|H| = k$  entonces a ese polinomio le llamaremos **polinomio flujo** el cual se encuentra determinado por el siguiente teorema.

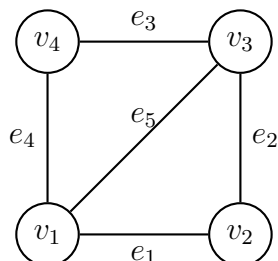
**Teorema 5.4.** *Para un grafo  $G$  y un grupo abeliano finito  $H$ . Entonces*

$$\chi_G^*(k) = (-1)^{|v|+|E|+1} T(M(G); 0, 1 - k).$$

La aportación de cálculo nueva que se hace con respecto al grupo  $H$  ocurre cuando  $y = 1 - k$  en el Polinomio de Tutte donde  $k = |H|$ . De ahí surgió el teorema 5.4.

**Ejemplo 5.5.** En el grafo ilustrado en la figura 5.4, encontramos primero el Polinomio de Tutte del grafo  $G$ .

$$T(M(G); x, y) = x^3 + 2x^2 + 2xy + x + y + y^2.$$



**Figura 5.4:** El grafo  $G$ .

Y por el teorema 5.4 tenemos:

$$\begin{aligned} \chi_G^*(k) &= (-1)^{|V|+|E|+1} T(M(G); 0, 1-k) = (-1)^{10} (1-k) + (1-k)^2 \\ &= (1-k) + (1-2k+k^2) = (k^2 - 3k + 2) = (k-2)(k-1). \end{aligned}$$

Esto nos dice que no hay flujos en ninguna parte cero si  $|H| = k < 3$ . El número de flujos en ninguna parte cero para  $\mathbb{Z}_4$  es 6; así podemos ver los 6 flujos distintos.

# Conclusiones

Dentro de la teoría de grafos y sus aplicaciones existe un cantidad considerable de problemas dedicados a calcular invariantes sobre estructuras gráficas como el número de conjuntos independientes, el número de orientaciones acíclicas, el de conjuntos abarcadores, de circuitos eulerianos, entre muchos otros. La teoría de matroides amplía el espectro a otras estructuras más generales donde podemos plantearnos el cálculo de invariantes gráficos. Para este fin, las evaluaciones del Polinomio de Tutte resultan ser muy fructíferas debido a la gran variedad de áreas en las que pueden ser aplicadas.

Es interesante plantearse a futuro el estudio del cálculo de invariantes sobre estructuras hipergráficas a través del Polinomio de Tutte definido sobre un análogo al matroide ciclo de un grafo.





# Bibliografía

- [1] Claude Berge. *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland mathematical library, volume 6. American Elsevier Publishing Company; Revised edition, 2 edition, 1973.
- [2] Béla Bollobás. *Modern Graph Theory*. Springer, 2013.
- [3] Thomas Brylawski. *Matroid Theory and its Applications*, volume 83 of *C.I.M.E. Summer Schools*, chapter The Tutte Polynomial Part I: General Theory. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010. vii
- [4] Thomas Brylawski and James Oxley. *The Tutte Polynomial and Its Applications*, pages 123–125. Cambridge University Press, 1992.
- [5] Thomas H. Brylawski. A decomposition for combinatorial geometries. *Transactions of the American Mathematical Society*, 171:235–282, 1972. 45
- [6] Henry H. Crapo. The tutte polynomial. *Aequationes mathematicae*, 3:211–229, 1969. vii
- [7] Michel Deza. *Perfect Matroid Designs*, chapter 2, pages 54–90. Cambridge University Press, 1992.
- [8] Reiherd Diestel. *Graph Theory*. Springer, 2010.
- [9] Joanna A. Ellis-Monaghan and Criel Merino. *Graph Polynomials and Their Applications I*, chapter The Tutte Polynomial, pages 219–255. Birkhäuser Boston, 2011.
- [10] Francisco Javier Franco Galvín. Aspectos algebraicos en teoría de grafos (trabajo de fin de grado). Universida de Sevilla, 2016.
- [11] Leslie Ann Goldberg and Mark Jerrumb. Inapproximability of the tutte polynomial. *Information and Computation*, 206:908–929, 2008.

- 
- [12] Gary Gordon and Jennifer McNulty. *Matroids: A Geometric Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012. 43, 44, 51, 53, 55
- [13] Ralph P. Grimaldi. *Matemáticas Discreta y Combinatoria: una introducción con aplicaciones*. Addison Wesley Iberoamericana, 1998.
- [14] J.J.M. Harris. *Combinatorics and Graph Theory*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [15] Francois Jaeger. Tutte polynomials and link polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 103:647–657, 1988.
- [16] D.L. Vertigan Jaeger F. and D. J. A. Welsh. *On the computational complexity of the Jones and Tutte polynomials*, volume 108, pages 35–53. Cambridge University Press, 1990.
- [17] Fernanda López Montes. Grafos métricos: Problemas de dirichlet y neumann (tesis de licenciatura). Benemérita Universidad de Puebla, 2018.
- [18] Dillon Mayhew and Gordon F. Royle. Matroids with nine elements. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 98(2):415 – 431, 2008.
- [19] Criel Merino. Algunos problemas en la teoría de matroides. Presentación en un seminario, 2013.
- [20] Criel Merino, Anna de Mier, and Marc Noy. Irreducibility of the tutte polynomial of a connected matroid. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 83:298–304, 2001. 45
- [21] James Oxley. *Matroid Theory*. Oxford University Press, New York, 1992.
- [22] Wilson Pico Sánchez. Temas de representabilidad de matroides sobre campos finitos e infinitos. Master’s thesis, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. D.C., 2010.
- [23] Alexander Porter M. *The Tutte polynomial and applications*. PhD thesis, Whitman College, Walla Walla, Washington, 2015.
- [24] Victor Reiner, Mike Develin, and Jeremy Martin. Rigidity theory for matroids. 2007.
- [25] A. M. Revyakin. Irreducibility of the tutte polynomial of a connected matroid. *Journal of Mathematical Sciences, Series B*, 108(1):71–130, 2002.

- 
- [26] Saha Ray Santanu. *Graph theory with algorithms and its applications: in applied science and technology*. Springer India, Rourkela, India, 2013.
- [27] Richard P. Stanley. Acyclic orientations of graphs. *Discrete Mathematics*, 5:171–178, 1973. 53
- [28] Fausto A. Toranzos. *Introducción a la teoría de grafos*. Secretaria General de la Organización de los Estados Americanos, 1976.
- [29] Richard J. Trudeau. *Introduction to Graph Theory*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1994.
- [30] W.T. Tutte. On dichromatic polynomials. *Journal of Combinatorial Theory*, 2(3):301–320, 1976.
- [31] J. A. Welsh D. *Matroid Theory*. Academic Press, Mineola, New York, 1976.
- [32] Neil White. *Graph Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [33] Hassler Whitney. On the abstract properties of linear dependence. *American Journal of Mathematics*, 57(3):509–533, 1935. VII
- [34] J. Robin Wilson. *Introduction to graph theory*. Pearson, Harlow, New York, 2010.