BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

EL ESPECTRO α-FREDHOLM y α-WEYL EN ESPACIOS DE HILBERT

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

M. C. FERNANDO HERNÁNDEZ DÍAZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. SLAVIŠA DJORDJEVIĆ

PUEBLA, MÉXICO, JULIO 2016.

Dedicatoria

Esta tesis la dedico:

Al creador de todas la cosas, el que me ha dado fortaleza para continuar cuando a punto de caer he estado; por ello, con la humildad que de mi corazón puede emanar, dedico primeramente mi trabajo a Dios.

A mis padres, ROSALINA Y SALATIEL, por haberme forjado como la persona que soy en la actualidad, muchos de mis logros se los debo a ustedes entre los que se incluye éste. Me formaron con reglas y muchas libertades, pero al final de cuentas, me motivaron día a día para alcanzar mis anhelos.

A mis hermanos Chary allá donde estés, Omar, Lupe, Zalatiel, Alejandro, Andy, Arturo, Hans, Isa y Bele, gracias por su apoyo y confianza en mí.

A mi abue Rosa, de quien nunca falta un sabio consejo para mí, y a mis otros abuelitos, Delfino, Petra y Ruperto, que aunque ya no están acá, se que me ven desde donde están.

A esa mujer que a pesar de las dificultades de la vida se quedó y me ha apoyado en este recorrido, a tí también, Vero.

A ustedes, que me dieron prueba de fe y amor, gracias a mis Santos.

Agradecimientos

Primero y como más importante, me gustaría agradecer sinceramente a mi asesor de tesis, Dr. Slavisa Djordjevic, su esfuerzo y dedicación.

Sus conocimientos, sus orientaciones, su manera de trabajar, su persistencia y su motivación han sido fundamentales para mi formación.

Él ha inculcado en mí un sentido de seriedad, responsabilidad y rigor académico sin los cuales no podría tener una formación completa.

A su manera, ha sido capaz de ganarse mi lealtad y admiración, así como sentirme en deuda con él por todo lo recibido durante el periodo de tiempo que ha durado esta tesis doctoral.

Gracias a mi jurado:

Presidente DR. JORGE BUSTAMANTE GONZÁLEZ.

Secretario DR. GABRIEL KATÚN MONTIEL.

Vocal DR. DAVID HERRERA CARRASCO.

Vocal DR. MIGUEL ANTONIO JIMÉNEZ POZOS.

Oponente DR. SALVADOR SÁNCHEZ PERALES.
Por sus observaciones y sugerencias para la mejora de este trabajo.

Gracias a cada uno de los maestros catedráticos de esta Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas que participaron en mi desarrollo profesional.

Mi extenso agradecimiento por su apoyo parcial al Cuerpo Académico de Análisis Matemático.

Ha sido muy importante el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), cuya beca permitió la realización de este trabajo.

G R A C I A S .

Índice general

Introducción

Antecedentes

La teoría de las ecuaciones integrales, a menudo originada por problemas físicos, ha dado lugar al estudio de teorías abstractas del análisis funcional.

A principios de 1900, I. Fredholm estudiaba ecuaciones del tipo

$$u(x) = f(x) + \int_b^a k(x,y)u(y)dy,\ u, f \in C([a,b]),$$

$k \in (C[a,b] \times C[a,b])$, ahora conocidas como ecuaciones de Fredholm de segunda especie [27], donde f es conocida y u es la incógnita. Esta ecuación aparece al resolver el problema de Dirichlet (véase [29, Sección VI.4]).

Definamos el operador $K : C([a,b]) \to C([a,b])$ mediante

$$(Ku)(x) = \int_b^a k(x,y)u(y)dy,$$

así, la ecuación original queda

$$u = f + Ku,$$

luego

$$f = (I - K)u.$$

Para encontrar el valor de la incógnita u hay que estudiar el operador $I - K$. Por ejemplo, si supiéramos que $I - K$ es invertible, la solución sería

$$u = (I - K)^{-1} f.$$

Pero lo que sí sabemos es que K es un operador compacto, luego $T = (I - K)$ tiene propiedades interesantes (véase [32, Teorema IV.3.2]):

(a) $\dim KerT < \infty$,

(b) $\dim H/R(T) < \infty$ y

(c) $R(T)$ es cerrado.

A los operadores que cumplen (a), (b) y (c) se les conoce como operadores de Fredholm y al conjunto $\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \text{ no es Fredholm}\}$ como espectro esencial (espectro Fredholm) de T.

Los trabajos de Fredholm llevaron a Hilbert a estudiar, alrededor del año 1910, ciertas ecuaciones integrales y sus aplicaciones a la física matemática. Hilbert, en esa misma época, desarrolló la teoría espectral inspirado en los trabajos que Fredholm había realizado. Al igual que Fredholm, Hilbert comenzó su estudio mediante ecuaciones integrales, dándose cuenta que podría obtener resultados análogos de una forma más sencilla si consideraba el espacio de funciones L^2. Sus estudios llevaron a definir lo que ahora se conoce como espacios de Hilbert y marcaron el inicio del estudio de los operadores llamados auto-adjuntos. Para una discusión histórica más detallada de los inicios de la moderna teoría de operadores, remitimos al lector al libro de Pietsch [28].

Se ha estudiado ampliamente la teoría de Fredholm en el caso de espacios de Hilbert separables, de hecho, es la forma en que se presenta en los libros clásicos de análisis funcional (por ejemplo, en [32]). Para espacios de Hilbert no separables, podemos considerar varios cardinales infinitos (veánse, por ejemplo, [2], [3], [4], [5], [6], entre otros).

Dado un espacio de Hilbert separable H, se tiene que $\dim H = \aleph_0$, donde $\aleph_0$ es la cardinalidad de los números naturales. En este caso, para un operador de Fredholm T resulta que $n(T) = \dim KerT < \aleph_0$.

Para espacios de Hilbert no separables, $\dim H = h$ con $h > \aleph_0$. Consideremos un número cardinal α, $\aleph_0 \leq \alpha \leq h$, resulta natural estudiar el caso en que $n(T) < \alpha$ y el concepto de subespacio α-cerrado. Un subespacio A de H es α-cerrado si existe un subespacio E de H tal que $E \subset A$ y $\dim(A \cap E^{\perp}) < \alpha$.

Se llega de manera natural a la definición de los operadores α-Fredholm [18] y a la definición del espectro α-Fredholm. Un operador T es α-Fredholm si:

(a) $R(T)$ es α-cerrado,

(b) $\dim KerT < \alpha$ y

(c) $\dim R(T)^{\perp} < \alpha$.

El espectro α-Fredholm de T es:

$$\sigma_{\alpha}(T)\{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \text{ no es } \alpha\text{-Fredholm}\}.$$

Es claro que un operador de Fredholm, en el sentido usual, es un operador $\aleph_0$-Fredholm. En este sentido, la teoría α-Fredholm es una generalización de la teoría de Fredholm.

En trabajos recientes, P. Dharmarha presenta la definición de espectro α-Weyl con un índice abstracto, sin embargo, al tratar de generalizar algunas propiedades del espectro Weyl con dicho índice, existen algunas limitaciones, por lo que nos damos a la tarea de proporcionar otra definición de índice, tomando como referencia los trabajos de L. Burlando [8], lo que nos permite obtener resultados nuevos referentes al espectro α-Fredholm sin necesidad de trabajar con el índice abstracto que P. Dharmarha presenta en [12], [13].

Objetivos

Se ha estudiado ampliamente la teoría de los operadores de Fredholm en espacios de Hilbert de dimensión finita, pero para espacios de Hilbert no separables. Hasta la década de los sesenta no se le había otorgado tanto interés. G. Edgar, J. Ernest y S. G. Lee generalizan los operadores de Fredhom y, como se menciona anteriormente, en [18] presentan nuevas definiciones, tales como espacio α-cerrado, lo que les permite generalizar los operadores de Fredholm a lo que llamaron operadores α-Fredholm. Ellos presentan una serie de propiedades análogas a los operadores de Fredholm, una muy importante fue el Teorema de Atkinson generalizado. En años recientes, P. Dharmarha retomó el estudio de los operadores α-Fredholm [12]; en dicho trabajo presenta nuevas propiedades que éstos tienen, análogas a las propiedades de los operadores de Fredholm; también en tal trabajo, presenta una nueva definición de operadores α-Weyl, definición que generaliza a los operadores de Weyl y, para ello, define un índice abstracto con el que trata de generalizar la definición de índice usual de operadores.

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar con más detalle la teoría de los operadores α-Fredholm; ver qué otras propiedades análogas a las de los operadores de Fredholm se cumplen; analizar la Teoría de las regularidades y determinar si los operadores α-Fredholm se puede considerar como una regularidad.

A partir de los trabajos de P. Dharmarha, continuar con el estudio de los operadores de Weyl y analizar dichos operadores para espacios de Hilbert no separables, así como salvar el problema de índice que se presenta al trabajar con el índice abstracto que P. Dharmara definió, para alcanzar una definición de operadores α-Weyl y, así, definir el espectro Weyl de peso α, analizar algunas de las propiedades de este espectro y ver qué se puede decir con respecto a la definición de espectro que Yadav y Arora en [35] presentaron y nuestra definición de espectro Weyl de peso α. También, se tratará de introducir operadores Weyl generalizados para extender la definición dada en [15].

Resultados

(1) Dada la definición de operadores α-Fredholm, se da una serie de propiedades y se presenta en el Capítulo 2 un ejemplo de operadores α-Fredhom. Con este ejemplo mostramos que existen operadores α-Fredholm que no son Fredholm.

(2) En el Capítulo 2, para α y β, números cardinales tales que $\aleph_0 < \alpha < \beta$, se presenta un ejemplo en el que se muestra que no todo operador β-Fredholm es α-Fredholm.

(3) Se demuestra en el Capítulo 2 que el conjunto de operadores α-Fredholm ($\Phi_\alpha(H)$) es un conjunto abierto en $B(H)$.

(4) Hay un resultado en el Capítulo 2: el que muestra que para T, S operadores en $B(H)$ tales que $TS \in \Phi_\alpha(H)$ y $R(T)$ α-cerrado, T es semi α-Fredholm inferior y S es semi α-Fredholm superior.

(5) Se demuestra también, en el Capítulo 2, que para α_1 y α_2 números cardinales tales que $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < h$ ($h = \dim H$), $\Phi_{\alpha_1}(H) \subseteq \Phi_{\alpha_2}(H)$.

(6) Otro resultado que se obtiene en este trabajo de investigación es el siguiente: para un número cardinal α tal que $\aleph_0 \leq \alpha$ y para un operador $T \in \Phi_\alpha(H)$ y un operador $K \in \mathcal{F}_\alpha$, se tiene que $T + K$ es también α-Fredholm.

(7) Para dos operadores S y T en $B(H)$ se tiene que si $TS \in \Phi_\alpha(H)$, entonces $T \in \Phi_\alpha(H)$ si y sólo si $S \in \Phi_\alpha(H)$.

(8) Dados dos operadores S y T tales que $TS \in \Phi_\alpha$ y $\dim Ker(T) < \alpha$, entonces $S, T \in \Phi_\alpha(H)$.

(9) Se puede observar también que dados dos operadores S y T tales que $TS \in \Phi_\alpha$, $R(S)$ α-cerrado y $\dim R(S)^\perp < \alpha$, entonces $S, T \in \Phi_\alpha(H)$.

(10) En el Capítulo 2 se aporta también el resultado siguiente: para dos operadores $S, T \in B(H)$, se demuestra que $ST \in \Phi_\alpha(H)$, $n(S) < \alpha$ y $R(S)$ es α-cerrado si y sólo si $ST \in \Phi_\alpha(H)$, $d(S) < \alpha$ si y sólo si $S, T \in \Phi_\alpha(H)$.

(11) Se demuestra en el Capítulo 2 que el espectro α-Fredholm es una función semi continua superior en $B(H)$.

(12) Otro resultado que se obtiene es el siguiente: en un espacio de Hilbert H, $\Phi(H) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n(H)$.

(13) También, para $T \in B(H)$, $\sigma_e(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)$.

(14) Otro resultado del Capítulo 2 es: en un espacio de Hilbert H, $\dim H = h$ y para α un número cardinal tal que $\aleph_0 < \alpha \leq h$. Entonces $\Phi(H) \subseteq \bigcap_{\aleph_0 < \alpha \leq h} \Phi_\alpha(H)$.

(15) Como consecuencia del resultado anterior se tuvo, para $T \in B(H)$, $\sigma_e(T) \supseteq \bigcup_{\aleph_0 < \alpha \leq h} \sigma_\alpha(T)$.

(16) Estudiando la teoría de las regularidades, se demostró que el conjunto de operadores α-Fredholm es una regularidad, lo que permite la generalización del teorema de la transformación espectral para funciones analíticas.

(17) En el Capítulo 3 se define el espectro α-Weyl de la siguiente manera:

$$\alpha\omega_2(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es un operador } \alpha\text{−Weyl}\}$$

$$= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \sigma_\alpha(T) \text{ o } \operatorname{ind}_\beta(T - \lambda I) \neq 0, \text{ para algún } \beta,\ \aleph_0 \leq \beta < \alpha\}.$$

(18) Un resultado que se obtuvo en el Capítulo 3 es que: para $T \in B(H)$ y α un número cardinal tal que $\aleph_0 \leq \alpha < h$. El espectro α-Weyl de peso α que Yadav y Arora definieron ($\alpha\omega_1(T) = \bigcap_{K \in \mathcal{F}_\alpha} \sigma(T+K)$) y el espectro $\alpha\omega_2(T)$ que nosotros definimos son equivalentes.

(19) $\Phi_\alpha^0(H) =$
$\{T \in B(H) : T \in \Phi_\alpha(H) \text{ e } \operatorname{ind}_\beta(T) = 0, \text{ para toda } \aleph_0 \leq \beta < \alpha\}$.

Para T un operador sobre $B(H)$ y α un número cardinal tal que $\aleph_0 \leq \alpha < h$, se obtiene que las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $T \in \Phi_\alpha^0(H)$;

(ii) $n(T) = n(T^*) < \alpha$ y $R(T)$ es α-cerrado;

(iii) $d(T) = d(T^*) < \alpha$.

(20) Para T un operador sobre $B(H)$ y α un número cardinal tal que $\aleph_0 \leq \alpha < h$, se demuestra:

(i) $\Phi_\alpha^0(H)$ es abierto.

(ii) Si $T, S \in \Phi_\alpha^0(H)$, entonces $TS \in \Phi_\alpha^0(H)$.

(iii) Si $T \in \Phi_\alpha^0(H)$ y $K \in \mathcal{F}_\alpha$, entonces $T + K \in \Phi_\alpha^0(H)$.

(21) El conjunto de los operadores Weyl generalizados, en notación $\Phi_g^0(H)$, es

$$\Phi_g^0(H) = \cup_{\aleph_0 \leq \alpha < h} \Phi_\alpha^0(H).$$

Por lo que se obtienen los resultados:

(i) Si $T, S \in \Phi_g^0(H)$, entonces $TS \in \Phi_g^0(H)$.

(ii) Si $T \in \Phi_g^0(H)$ y $K \in K(H)$, entonces $T + K \in \Phi_g^0(H)$.

(iii) $\Phi_g^0(H)$ es abierto en $B(H)$.

Estos resultados fueron publicados en: “α-Fredholm spectrum of Hilbert space operators”(publicado en The Journal of the Indian Mathematical Society) y “On α-Weyl operatos”(publicado en Advances in Pure Mathematics).

Capítulo 1

Operadores de Fredholm

En este capítulo se presentan resultados básicos de la teoría de los operadores de Fredholm. Se presta atención al Teorema de Atkinson y algunas propiedades de estos operadores, pues sirven de motivación del siguiente capítulo. La mayor parte de los resultados son resultados clásicos tomados de [9], [21], [23], [24], [32] y [33].

1.1. Preliminares

Una operación interna en un conjunto G es una aplicación $* : G \times G \to G$. Escribiremos $a * a$ en lugar de $*(a, b)$.

Un grupo es un conjunto G con una operación $*$ que verifica las siguientes propiedades:

(i) $g * (h * k) = (g * h) * k$ para cualesquiera $g, h, k \in G$ (propiedad asociativa).

(ii) Existe $1 \in G$ (elemento neutro) tal que $1 * g = g * 1 = g$ para cualquier $g \in G$.

(iii) Para cada $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ (elemento inverso) tal que $g * g^{-1} = g^{-1} * g = 1$.

Si además

(iv) $gh = hg$ para cualesquiera $g, h \in G$ (propiedad conmutativa), entonces se dice que G es un grupo abeliano.

Normalmente, se omite el signo $*$ si ello no da lugar a confusión. Es también habitual denotar la operación con el símbolo $+$ cuando el grupo es abeliano, en cuyo caso el elemento neutro se denota con 0 y el inverso de g con $-g$. A la operación $+$ se llama usualmente suma y a la operación $*$, producto.

Definición 1.1.1. Un anillo es un conjunto A con dos operaciones internas, $+$ y $*$, tales que $(A, +)$ es un grupo abeliano, y se verifican las propiedades:

(i) $(a+b)*c = a*c+b*c$ y $a*(b+c) = a*b+a*c$ para cualesquiera $a, b, c \in A$ (distributividad del producto respecto de la suma).

(ii) $a*(b*c) = (a*b)*c$ para cualesquiera $a, b, c \in A$ (asociatividad del producto).

El anillo se dice conmutativo si además se verifica

(iii) $a*b = b*a$ para cualesquiera $a, b \in A$ (conmutatividad del producto).

Y se dice con unidad si se verifica:

(iv) Existe $1 \in A$ tal que $a*1 = 1*a = a$ para cualquier $a \in A$ (existencia de elemento neutro para el producto).

El elemento neutro para la suma usualmente se denota por 0, y al inverso de a por $-a$.

Definición 1.1.2. Una unidad en un anillo A es un elemento $a \in A$ que tiene inverso para el producto, es decir, que existe $a^{-1} \in A$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Un anillo en el que todos los elementos $a \neq 0$ son unidades es un campo.

Definición 1.1.3. Sea $\mathbb{F}$ un campo. Un espacio lineal o vectorial sobre $\mathbb{F}$, en notación $(X, \mathbb{F}, +, *)$, consta de lo siguiente:

1. Un conjunto $X \neq \emptyset$, cuyos elementos se llaman vectores.

2. Una operación binaria en X, llamada adición de vectores (o suma de vectores), denotada por $+$ tal que $(X, +)$ es un grupo.

3. Una operación binaria de $\mathbb{F} \times X$ en X, llamada multiplicación escalar, que a cada escalar $k \in \mathbb{F}$ y cada vector $x \in X$ les asocia otro vector $kx \in X$, y que cumple:

- Para todo $x \in X$, $1x = x$.
- Para cualesquiera $k, l \in \mathbb{F}$, y cualquier $x \in X$, $(kl)x = k(lx)$.

4. Además, se pide que se cumplan las dos leyes distributivas:

   - Para todo $k \in \mathbb{F}$, y para cualesquiera $x, y \in X$, $k(x + y) = kx + ky$.
   - Para cualesquiera $k, l \in \mathbb{F}$, y cualquier $x \in X$, $(k + l)x = kx + lx$.

Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ decimos simplemente que X es un espacio real, y si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ decimos que X es un espacio complejo. Sea S un subconjunto de un espacio vectorial X sobre $\mathbb{F}$. Decimos que S es un subespacio vectorial de X sobre $\mathbb{F}$ (o simplemente un subespacio de X) si S es no vacío y además es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ con respecto a las restricciones de operaciones definidas sobre X.

Sea X un espacio lineal sobre un campo $\mathbb{F}$. Una función

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$$

es una norma sobre X si se satisfacen las siguientes condiciones para todos los vectores $x, y \in X$ y todos los escalares $k \in \mathbb{F}$:

(i) $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$,

(iii) $\|kx\| = |k|\|x\|$,

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espacio lineal X dotado con una norma se llama espacio normado (espacio lineal normado o espacio vectorial normado). Un espacio de Banach es un espacio normado completo.

Definición 1.1.4. Sea X un espacio lineal sobre $\mathbb{F}$. Un producto escalar (o producto interno) definido sobre X es una aplicación $\langle , \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ que verifica ser:

(1) Definida positiva: $\langle x, x\rangle > 0$ para toda $x \in X$, y $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) Lineal por la derecha: $\langle z, \lambda x + \mu y\rangle = \lambda\langle z, x\rangle + \mu\langle z, y\rangle$ para toda $x, y, z \in X$ y para toda $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$.

(3) Hermítica: (Simétrica si el campo es $\mathbb{R}$): $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ para toda $x, y \in X$.

Observación 1.1.1. Sea X un espacio con producto interno y sean $u, v \in X$. Si $\langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle$ para toda $x \in X$, entonces $u = v$.

Lema 1.1.1. [30, Lema 3.12] Sea X un espacio con producto interno, $x, y, z \in X$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Entonces,

(a) $\langle 0, y\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$;

(b) $\langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \overline{\mu}\langle x, z\rangle$;

(c) $\langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y\rangle = |\lambda|^2\langle x, x\rangle + \lambda\overline{\mu}\langle x, y\rangle + \mu\overline{\lambda}\langle y, x\rangle + |\mu|^2\langle y, y\rangle$.

Lema 1.1.2. [30, Lema 3.13] Sea X un espacio con pruducto interno y sean $x, y \in X$. Entonces,

(a) $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz);

(b) la función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ definida por $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ es una norma sobre X.

La norma $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ definida en el Lema 1.1.2 sobre el espacio X con producto interno es llamada la norma inducida por el producto interno $\langle , \rangle$.

Definición 1.1.5. Un espacio pre-Hilbert es una pareja $(H, \langle , \rangle)$. Los subespacios lineales de $(H, \langle , \rangle)$ heredan por restricción el producto escalar.

Se llega de manera natural a la siguiente definición.

Definición 1.1.6. Un espacio pre-Hilbert completo en su norma inducida por el producto interno se denomina espacio de Hilbert denotado por $(H, \langle , \rangle)$. Para nuestra comodidad denotamos al espacio de Hilbert únicamente por H.

Definición 1.1.7. Dos vectores x, y se dicen ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$. Lo denotaremos por $x \perp y$. Diremos que un conjunto de vectores S es ortogonal si todas sus parejas de vectores distintos son ortogonales. Si además $\langle x, x\rangle = 1$ para todo $x \in S$, diremos que el conjunto es ortonormal. Dos conjuntos S_1, S_2 se dicen ortogonales si todas las parejas formadas por un vector de S_1 y un vector de S_2 son ortogonales.

Definición 1.1.8. Sea un subconjunto $A \subset H$ de un espacio de Hilbert $(H, \langle , \rangle)$. Se define y denota el complemento ortogonal de A como $A^{\perp} = \{x \in H : x \perp A\}$.

1.2. Transformaciones Lineales

Una aplicación $T : X \to Y$, con X e Y espacios lineales (ambos reales o complejos sobre el mismo campo $\mathbb{F}$), es homogénea si

$$T(kx) = kT(x)$$

para todo vector $x \in X$ y todo escalar $k \in \mathbb{F}$. Decimos que T es aditiva si

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

para todos los vectores $x, y \in X$. Ahora bien, si X e Y son espacios lineales sobre el mismo campo escalar, y si T es una transformación homogénea y aditiva de X en Y, entonces T es una transformación lineal. Cuando decimos que $T : X \to Y$ es una transformación lineal, se afirma implícitamente que X e Y son espacios lineales sobre el mismo campo $\mathbb{F}$. Si $y \in Y$ es el valor de la transformación lineal $T : X \to Y$ evaluada en $x \in X$, entonces escribimos $y = Tx$ (en vez de escribir $y = T(x)$). A X se le llama el dominio de T y a Y el codominio de T.

$$R(T) = \{y \in Y : y = Tx \text{ para algún } x \in X\},$$

denota el rango de T.

Si A es un subconjunto de X, entonces a la imagen de A bajo T la denotaremos por:

$$T(A) = \{y \in Y : y = Tx \text{ para algún } x \in A \subseteq X\}.$$

Si B es un subconjunto de Y, entonces la imagen inversa de B bajo T lo denotamos por:

$$T^{-1}(B) = \{x \in X : Tx \in B \subseteq Y\}.$$

El espacio nulo (núcleo) de una transformación lineal $T : X \to Y$ es el subconjunto

$$KerT = \{x \in X : Tx = 0\} = T^{-1}(\{0\})$$

de X, que consta de todos los vectores en X transformados en el cero de Y por T. La transformación nula (denotada por 0) es la transformación $0 : X \to Y$ tal que $0x = 0$ para toda $x \in X$, la cual ciertamente es una transformación lineal. De hecho, si $T : X \to Y$ es una transformación lineal, entonces $T = 0$ si y sólo si $KerT = X$. Equivalentemente, $T = 0$ si y sólo si $R(T) = \{0\}$.

Observación 1.2.1. Es bien sabido que dada una transformación lineal $T : X \to Y$, el espacio nulo $KerT$ y el rango $R(T)$ de T son subespacios lineales (del espacio lineal X e Y, respectivamente) (véase [30, Sección 1.1]).

Definición 1.2.1. Sean X e Y espacios lineales (ambos reales o complejos). Sea T una función con dominio $\mathcal{D}(T)$ en X y Rango $R(T)$ en Y. Entonces T se llama operador lineal si $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio de X y si T es homogéneo y aditivo. Si $\mathcal{D}(T) = X$ decimos que T es un operador lineal de X en Y y al conjunto de operadores lineales de X en Y lo denotamos por $L(X, Y)$, si $H = K$es lo escribimos simplemente como $L(H)$.

Recordemos que si M y N son subespacios de H, entonces la suma de M y N, denotada por $M + N$, es el subespacio

$$M + N = \{z \in H : z = x + y,\ x \in M,\ y \in N\}.$$

Supongamos que M y N son subespacios cerrados de H tales que

$$H = M + N \text{ y } \ M \cap N = 0,$$

entonces decimos que H es la suma directa (algebraica) de M y N, lo que denotamos por $M \oplus N$. Más aún, decimos que M y N son algebraicamente complementados uno del otro.

1.3. Transformaciones Lineales Acotadas

Definición 1.3.1. Una transformación $T : H \to H$ se dice que es acotada si existe una constante M tal que

$$\|Tx\| \leq M\|x\|,\ x \in H.$$

Sean H y K espacios de Hilbert. Denotaremos por $B(H,K)$ el espacio de todas las transformaciones lineales acotadas $T : H \to K$ con la norma $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \ : \ \|x\| \leq 1 \}$, y por I denotamos el elemento identidad de $B(H,K)$.

Si $H = K$, denotamos por $B(H)$ el espacio de todas las transformaciones lineales acotadas de H en H. A los elementos de $B(H)$ se les llama operadores. En otras palabras, por operador (o operador lineal acotado) entendemos como una transformación lineal acotada de H en H, así que $B(H)$ es el espacio normado de todos los operadores sobre H.

Proposición 1.3.1. [23, Proposición 4.3] Si $\|\cdot\| : B(H) \to \mathbb{R}$ está definida por

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \ : \ \|x\| \leq 1 \},$$

entonces $\|\cdot\|$ es una norma sobre $B(H)$.

Aunque el siguiente resultado también se cumple en el caso de espacios de Bancah, para nuestra objetivo lo enunciaremos para espacios de Hilbert.

Teorema 1.3.1. [23, Teorema 5.12] Una transformación lineal T de un espacio normado H a un espacio normado K es acotada si y sólo si T transforma subconjuntos acotados de H en subconjuntos acotados de K.

Teorema 1.3.2. [23, Teorema 5.13] Sea $T : H \to H$ lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) T es continua en H.

(b) T es continua en 0.

(c) T es acotada.

Aunque la siguiente sección se cumple también para espacios de Banach, para nuestra conveniencia la trabajaremos en espacios de Hilbert.

1.4. Módulo Mínimo Reducido

Definición 1.4.1. Una transformación lineal T de un espacio normado H a un espacio normado K es acotada por abajo si existe una constante $k > 0$ tal que

$$k\|x\| \leq \|Tx\|$$

para toda $x \in H$ (donde la norma sobre el lado derecho es la norma de H y del lado izquierdo es la norma sobre K).

El módulo mínimo de T es

$$m(T) = \inf_{x \in H} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Observación 1.4.1. Sea $T \in B(H)$. Si T es acotado inferiormente, entonces $m(T) > 0$.

Teorema 1.4.1. [24, Teorema 1.4.0] Sea $T \in B(H)$. $m(T) > 0$ si y sólo si $R(T)$ es cerrado y $KerT = \{0\}$.

Definición 1.4.2. Sea $T \in B(H)$. El módulo mínimo reducido de T es

$$\gamma(T) = \inf_{x \notin KerT} \frac{\|Tx\|}{d(x, KerT)}.$$

Observación 1.4.2. Notemos que si $m(T) > 0$, entonces $\gamma(T) > 0$ (esto es, si $m(T) > 0$, entonces $KerT = \{0\}$, así $d(x, KerT) = d(x, 0) = \|x\| \neq 0$).

Teorema 1.4.2. [24, Teorema 1.4.1] Sea $T \in B(H)$, entonces $\gamma(T) > 0$ si y sólo si $R(T)$ es cerrado.

1.5. El Operador Adjunto

Teorema 1.5.1. [30, Teorema 5.1] Sean H y K espacios de Hilbert complejos y sea $T \in B(H, K)$. Entonces existe un único operador $T^* \in B(H, K)$ tal que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

para todo $x \in H$ y toda $y \in K$.

Definición 1.5.1. Si H y K son espacios de Hilbert complejos y $T \in B(H, K)$, el operador T^* del Teorema 1.5.1 es llamado el operador adjunto de T.

La parte de unicidad del Teorema 1.5.1 es muy útil cuando encontramos el adjunto de un operador. En la notación del Teorema 1.5.1, si un operador S satisface la ecuación $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$ para toda x y y, entonces $S = T^*$.

Un operador $T \in B(H)$ es auto-adjunto si $T = T^*$, y es positivo si es auto-adjunto y $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para toda $x \in H$.

Lema 1.5.1. [30, Lema 5.8] Sean H, K y L espacios de Hilbert complejos, sean $R, S \in B(H, K)$ y $T \in B(K, L)$. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Entonces:

(a) $(\mu R + \lambda S)^* = \overline{\mu} R^* + \overline{\lambda} S^*$;

(b) $(TR)^* = R^* T^*$.

Teorema 1.5.2. [33, Teorema 2.4.7] Sean H, K espacios de Hilbert complejos y $T \in B(H, K)$.

(a) $(T^*)^* = T^*$.

(b) $\|T^*\| = \|T\|$.

Lema 1.5.2. [30, Lema 5.11] Sean H y K espacios de Hilbert complejos y sea $T \in B(H, K)$. Entonces,

(a) $KerT = R(T^*)^\perp$ y

(b) $KerT^* = R(T)^\perp$.

Además de que el adjunto nos permite obtener información adicional de todos los operadores sobre un espacio de Hilbert, éste puede también usarse para definir clases particulares de operadores.

Lema 1.5.3. [30, Lema 5.14] Si H es un espacio de Hilbert complejo y $T \in B(H)$ es invertible, entonces T^* es invertible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Teorema 1.5.3. [30, Teorema 6.13] Si H es un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$, entonces $\dim R(T) = \dim R(T^*)$ (ya sea un número finito o no). En particular, $\dim R(T)$ es finita si y sólo si $\dim R(T^*)$ es finita.

1.6. Transformaciones Lineales Compactas

Una clase de transformaciones en especial que será importante para nuestro estudio es la de los operadores compactos. En esta sección mencionaremos brevemente algunas de sus propiedades que se usarán frecuentemente más adelante.

La noción esencial de una función compacta fue introducida por David Hilbert en 1906; once años después, F. Riesz publicó un estudio completo respecto a operadores compactos (para una mejor reseña histórica véase por ejemplo [30, Sección 6.1].

Definición 1.6.1. Sean H, K espacios vectoriales normados. Una transformación lineal $T : H \to K$ es compacta (o completamente continua) si transforma subconjuntos acotados de H en subconjuntos relativamente compactos de K. Esto es, si $\overline{T(A)}$ es compacta en K, siempre que A sea acotado en H.

Equivalentemente, $T : H \to K$ es compacta si $T(A)$ está contenida en un subconjunto compacto de K, siempre que A esté acotado en H.

Al conjunto de todos los operadores compactos de H a K lo vamos a denotar por $K(H, K)$. Si $H = K$, lo denotamos simplemente por $K(H)$.

Definición 1.6.2. Diremos que $T \in B(H)$ es un operador de rango finito si $\dim R(T) < \infty$.

Vamos a denotar por $K_0(H)$ el conjunto de operadores lineales acotados de rango finito.

Los operadores compactos tienen muchas de las propiedades de los operadores acotados de rango finito. El límite en norma de los operadores con rango finito es un operador compacto. Si H es un espacio de Hilbert, se cumple el recíproco, pero no se cumple, en general, en un espacio de Banach.

Teorema 1.6.1. [23, Teorema 4.49] Si una transformación lineal $T : H \to K$ es compacta, entonces $T \in B(H, K)$.

Teorema 1.6.2. [30, Teorema 6.3] Sea H un espacio de Hilbert complejo.

(a) Si $S, T \in K(H)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha S + \beta T$ es compacto. Por lo tanto $K(H)$ es un subespacio lineal de $B(H)$.

(b) Si $S, T \in B(H)$ y por lo menos uno de los operadores es compacto, entonces $ST \in B(H)$ es compacto.

Teorema 1.6.3. [30, Teorema 6.5] Sea $T \in B(H)$.

(a) Si T es de rango finito, entonces T es compacto.

(b) Si $\dim H$ es finita, entonces T es compacto.

Teorema 1.6.4. [30, Teorema 6.6] Si H es un espacio de Hilbert de dimensión infinita, entonces el operador identidad I sobre H no es compacto.

Corolario 1.6.1. [30, Corolario 6.7] Si H es un espacio de Hilbert de dimensión infinita y $T \in K(H)$, entonces T no es invertible.

1.7. El álgebra de Calkin

Definición 1.7.1. Un subanillo de un anillo A es un subconjunto $B \subset A$ tal que para cualesquiera $a, b, c, d \in B$ se tiene que $ab + cd \in B$; en otras palabras, B tiene estructura de anillo con las mismas operaciones que A.

Definición 1.7.2. Un ideal en un anillo A es un subconjunto $I \subset A$ tal que para cualesquiera elementos $a, b \in A$, $c, d \in I$ se tiene $ac + bd \in I$.

La relación

$$a \equiv b \Leftrightarrow a + I = b + I \Leftrightarrow (a - b) \in I$$

(donde $a + I = \{a + a' : a' \in I\}$) es una relación de equivalencia. El correspondiente conjunto cociente A/I tiene, con las operaciones naturales, estructura de anillo, y se llama anillo cociente. Puede considerarse como el conjunto formado por los subconjuntos de A de la forma $a + I$.

Ejemplo 1.7.1. $K(H)$ y $K_0(H)$ son ideales en el anillo $B(H)$.

Definición 1.7.3. Un homomorfismo de anillos es una aplicación $\varphi : A \to A'$ entre dos anillos tal que $\varphi(ab+cd) = \varphi(a)\varphi(b)+\varphi(c)\varphi(d)$ para cualesquiera $a, b, c, d \in A$. Si consideramos anillos con unidad, pediremos también la condición $\varphi(1_A) = 1_{A'}$ (donde 1_A y $1_{A'}$ son, respectivamente, los elementos unidad para el producto de A y A'). Si φ es inyectiva, se dice que es un monomorfismo; si es suprayectiva, es un epimorfismo, y si es biyectiva, es un isomorfismo (y en este caso, su inversa es también un homomorfismo).

Definición 1.7.4. Sea $(H, +)$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y supongamos que existe una operación binaria definida entre vectores:

$$* : H \times H \to H,$$

llamada producto, definida por $*(x, y) = x * y \in H$ que a $x * y \in H$ se denotará por $xy \in H$. Decimos que $(H, +, *)$ es un álgebra si H es también un anillo con respecto a esta nueva operación binaria.

Ejemplo 1.7.2. $B(H)$ es un álgebra de Banach bajo las definiciones usuales de suma y multiplicación por escalar y la multiplicación dada por $(S, T) \mapsto T \circ S = (S, T)x = T(S(x))$.

Si M es un subespacio de un espacio normado H, el espacio cociente H/M es la colección de todas las clases laterales $[x] = x + M$. Si M es un subespacio cerrado entonces H/M es un espacio normado y si además H es un espacio de Banach, entonces H/M es un espacio de Banach.

Como $K(H)$ es un ideal cerrado en $B(H)$. El álgebra de Calkin sobre H es el álgebra cociente $C(H) = B(H)/K(H)$ con la operación adicional $[S][T] = [ST]$, donde $[S]$ y $[T]$ son las clases $S + K(H)$ y $T + K(H)$ respectivamente [24, Sección 1.7].

$C(H)$ es un álgebra de Banach con la norma cociente

$$\|T + K(H)\| = \inf_{U \in K(H)} \|T + U\|.$$

Usaremos π para denotar el homomorfismo natural de $B(H)$ sobre $C(H)$ dado por $\pi(T) = T + K(H)$.

Anque la siguiente sección se cumple para espacios de Banach, para nuestra conveniencia la presentaremos para espacios de Hilbert complejos.

1.8. Operadores de Fredholm

Sea H un espacio de Hilbert; para $T \in B(H)$ definamos

$$n(T) = \dim KerT;$$

$$d(T) = \text{codim} R(T) = \dim H/R(T).$$

Definición 1.8.1. Sea $T \in B(H)$. T es un operador de Fredholm si:

(1) $n(T)$ es finito,

(2) $d(T)$ es finito,

Observación 1.8.1. (2) de la definición anterior implica que $R(T)$ es cerrado.

Obtenemos una generalización inmediata debilitando las condiciones de la definición de operadores de Fredholm.

Definición 1.8.2. Dado $T \in B(H)$, entonces:

(a) T es semi-Fredholm superior si $n(T) < \infty$ y $R(T)$ es cerrado.

(b) T es semi-Fredholm inferior si $d(T) < \infty$.

Denotemos por $\Phi_+(H)$, $\Phi_-(H)$, y $\Phi(H)$ al conjunto de todos los operadores semi-Fredholm superior, semi-Fredholm inferior y Fredholm, respectivamente.

El índice de un operador es un concepto importante para estudiar la teoría de Fredholm.

Definición 1.8.3. El índice de un operador $T \in \Phi(H)$ se define como $i(T) = n(T) - d(T)$.

El producto de operadores de Fredholm es un operador de Fredholm, como se ve en el siguiente teorema.

Teorema 1.8.1. [32, Teorema 2.3] Si T y S son operadores de Fredholm en $B(H)$, entonces también ST es un operador de Fredholm. Aún más, se cumple que $i(TS) = i(T) + i(S)$.

Teorema 1.8.2. [24, Teorema 1.7.1] Si $T \in B(H, K)$, entonces T es Fredholm si y sólo si existe $S \in B(H, K)$ tal que $I - ST$ e $I - TS$ son de rango finito.

1.9. Teorema de Atkinson

En ocasiones saber cuándo un operador es de Fredholm utilizando únicamente la definición resulta complicado, es por eso, se mencionan los siguiente resultado:

Teorema 1.9.1. [24, Teorema 1.7.2] $T \in B(H)$ es invertible si y sólo si T es inyectivo y sobreyectivo.

Teorema 1.9.2. [9, Teorema 3.2.6] Sea T un operador en $B(H)$. Entonces T es operador de Fredholm si y sólo si existen operadores acotados T_1 y T_2 y operadores compactos K_1 y K_2 tales que

$$T_1 T = I + K_1. \tag{1.1}$$

$$T T_2 = I + K_2. \tag{1.2}$$

Teorema 1.9.3. [24, Teorema 1.7.3] Sea $T \in B(H)$. Entonces T es Fredholm si y sólo si $[T]$ es invertible en $B(H)/K(H)$.

Observación 1.9.1. Otra forma de enunciar el Teorema 1.9.3 es la siguiente: $T \in B(H)$ es un operador de Fredholm si y sólo si $\pi(T)$ es invertible en el álgebra de Calkin $B(H)/K(H)$.

Definamos como $\pi_0 : B(H) \to B(H)/K_0(H)$ el homomorfismo natural, dado por $\pi_0(T) = T + K_0(H)$.

Teorema 1.9.4. [9, Teorema 3.2.8][Teorema de Atkinson] Si $T \in B(H)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) T es un operador de Fredholm;

(2) $\pi_0(T)$ es invertible en el álgebra $B(H)/K_0(H)$;

(3) $\pi(T)$ es invertible en el álgebra de Calkin $B(H)/K(H)$.

Lema 1.9.1. [24, Lema 1.5.1] Sea $T : H \to K$ un operador lineal acotado y $M \subset H$ con $\text{codim}M = n < \infty$. Entonces T es Fredholm si y sólo si $T_0 : M \to K$ es Fredholm, aún más, $i(T) = i(T_0) + n$.

Teorema 1.9.5. [24, Teorema 1.5.2] Sean $S \in B(H)$ y $T \in B(H)$, $ST = TS$ y ST Fredholm, entonces S y T son Fredholm.

1.10. Teorema de la Transformación Espectral

Para un operador $T \in B(H)$, un escalar λ para el cual $n(T - \lambda I) \neq 0$ se llama valor propio de T. Cualquier elemento $x \neq 0$ de H tal que $(T - \lambda I)x = 0$ se llama vector propio. Los puntos λ para los cuales $n(T - \lambda I) = 0$ y $R(T - \lambda I) = H$ forman el conjunto resolvente de T denotado por $res(T)$. El espectro de T denotado por $\sigma(T)$ consta de todos los escalares que no están en el conjunto resolvente [32].

De forma análoga, se define el espectro Fredholm o espectro esencial como:

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ no es Fredholm}\}.$$

Observación 1.10.1. Para un operador T en $B(H)$, $\sigma_e(T) \neq \emptyset$.

Ejemplo 1.10.1. Sea H un espacio de Hilbert complejo e I el operador identidad sobre H. Si μ es cualquier número complejo, entonces $\sigma_e(\mu I) = \{\mu\}$.

Lema 1.10.1. [30, Lema 5.37] Si H es un espacio de Hilbert complejo y $T \in B(H)$, entonces $\sigma_e(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_e(T)\}$.

Teorema 1.10.1. [30, Teorema 5.39] Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T \in B(H)$. Si T es invertible, entonces $\sigma_e(T^{-1}) = \{\mu^{-1} : \mu \in \sigma_e(T)\}$.

Teorema 1.10.2. [32, Lema 1.6] Sea $T \in B(H)$. Si $\lambda \in \sigma_e(T)$, entonces para cada n tenemos que $\lambda^n \in \sigma_e(T^n)$.

El Teorema 1.10.2 tiene una generalización interesante. Sea $p(t)$ un polinomio de la forma

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n.$$

Entonces, para cualquier operador $T \in B(H)$ definimos el operador

$$p(T) = a_0 T^0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_n T^n,$$

donde tomamos a $T^0 = I$. Tenemos:

Teorema 1.10.3. [32, Teorema 1.7] Si $\lambda \in \sigma_e(T)$, entonces $p(\lambda) \in \sigma_e(p(T))$ para cualquier polinomio $p(t)$.

Una forma simbólica de escribir el teorema anterior es la siguiente: $p(\sigma_e(T)) \subseteq \sigma_e(p(T))$.

Observación 1.10.2. Notemos que, en general, puede haber puntos en $\sigma_e(p(T))$ que pueden no ser de la forma $p(\lambda)$ para algún $\lambda \in \sigma_e(T)$. Por ejemplo, consideremos el operador sobre E^2 (espacio euclidiano 2-dimensional) dado por $T(\alpha_1, \alpha_2) = (-\alpha_2, \alpha_1)$[32].

T tiene espectro vacío; $T - \lambda I$ es invertible para todo real λ; T^2 tiene a -1 como un valor propio. ¿Cuál es la razón? Es simplemente que nuestros escalares son reales y por consecuencia los números imaginarios no se pueden considerar como valores propios [32].

Ahora supongamos que queremos resolver la ecuación de la forma

$$p(T)x = y, \ x, y \in H,$$

donde $p(t)$ es un polinomio y $T \in B(H)$.

Si $0 \notin \sigma_e(p(T))$, entonces $p(T)$ tiene un inverso en $B(H)$, luego la ecuación anterior se puede resolver para toda $y \in H$. Así que una pregunta natural se plantea es: ¿Cuál es el espectro de $p(T)$? Como vimos en el teorema anterior, $p(\sigma_e(T)) \subseteq \sigma_e(p(T))$, pero por la observación anterior, éste puede tener otros puntos. Si fuera cierto que $p(\sigma_e(T)) = \sigma_e(p(T))$, entonces la ecuación anterior se resuelve de manera única para todo $y \in H$ si y sólo si $p(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma_e(T)$.

Una propiedad importante que cumple el espectro esencial es el teorema de la transformación espectral.

Teorema 1.10.4. [32, Teorema 2.1][Teorema de la Transformación Espectral] Sea H un espacio de Hilbert complejo, entonces $\mu \in \sigma_e(p(T))$ si y sólo si $\mu = p(\lambda)$ para algún $\lambda \in \sigma_e(T)$, es decir, $p(\sigma_e(T)) = \sigma_e(p(T))$.

Capítulo 2

Operadores α-Fredholm

2.1. Propiedades Básicas de Conjuntos α-cerrados

En este capítulo, a menos de que se diga lo contrario, H denotará un espacio de Hilbert de dimensión infinita h, $h \geq \aleph_0$, donde $\aleph_0$ es la cardinalidad del conjunto de los números naturales.

Para cada número cardinal α, $\aleph_0 \leq \alpha \leq h$, $\mathcal{F}_\alpha$ denota el ideal en $B(H)$ de todos los operadores lineales de rango menor que α ($\mathcal{F}_\alpha = \{T \in B(H) : \dim R(T) < \alpha\}$) y denotamos $\mathcal{I}_\alpha = \bar{\mathcal{F}}_\alpha$, donde $\bar{\mathcal{F}}_\alpha$ denota la cerradura topológica de $\mathcal{F}_\alpha$.

Lema 2.1.1. [18, Observación] Los ideales $\mathcal{I}_\alpha = \bar{\mathcal{F}}_\alpha$ son auto-adjuntos, es decir, si $T \in \mathcal{I}_\alpha$, entonces $T^* \in \mathcal{I}_\alpha$.

Demostración: Sea $T \in \mathcal{I}_\alpha = \overline{\mathcal{F}_\alpha}$, existe $\{T_n\} \subset \mathcal{F}_\alpha$ tal que $T_n \longrightarrow T$ y $\dim R(T_n) < \alpha$. Por el Teorema 1.5.3 se tiene que $\dim R(T_n) = \dim R(T_n^*) < \alpha$. Como $T_n^* \longrightarrow T^*$, entonces $T^* \in \mathcal{I}_\alpha$, es decir, $\mathcal{I}_\alpha$ es auto-adjunto.

▲

Definición 2.1.1. [18, Definición 0] Un subconjunto S de un espacio de Hilbert H se llama α-acotado si para toda $\epsilon > 0$ existe un conjunto $\{x_m : m \in M\} \subseteq S$, $cardM < \alpha$ y

$$S \subset \bigcup_{m \in M} B_\epsilon(x_m),$$

donde $B_\epsilon(x_m)$ denota la bola alrededor de x_m con radio ϵ.

Definición 2.1.2. [18, Definición 1] Un operador lineal T se llama α-compacto si la imagen de la bola unitaria bajo T es α-acotada.

Teorema 2.1.1. [18, Teorema 0] Sea T un operador sobre un espacio de Hilbert H y sea α un número cardinal, $\aleph_0 \leq \alpha \leq \dim H$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) $T \in \mathcal{I}_\alpha$.

(2) T es α-compacto.

(3) Cada subespacio lineal cerrado H_0 de H para el cual $H_0 \subset T(H)$ tiene dimensión menor que α.

(4) Para cada $\epsilon > 0$ existe un subespacio cerrado $H_\epsilon \subset H$ con codimensión menor que α tal que $\|T|_{H_\epsilon}\| < \epsilon$.

(5) Todo subespacio de H sobre el cual T es acotado por abajo tiene dimensión menor que α.

Lema 2.1.2. [18, Lema 1.1] Sea T un operador lineal sobre un espacio de Hilbert H y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe un subespacio cerrado K de H que contiene el núcleo de T, tal que

$$\|Tx\| < \epsilon\|x\| \text{ para toda } x \in K,\ x \neq 0,$$

y

$$\|Tx\| \geq \epsilon\|x\| \text{ para toda } x \in K^\perp.$$

Definición 2.1.3. [33, Definición 4.2.2] Sean H, K espacios de Hilbert. Un operador $U \in B(H, K)$ que satisface alguna de las siguientes condiciones:

(a) $U = UU^*U$;

(b) $P = U^*U$ es una proyección;

(c) $U|_{(KerU)^\perp}$ es una isometría

se llama isometría parcial.

Lema 2.1.3. [18, Lema 1.2] Sea T un operador sobre H y sea $\epsilon > 0$. Supongamos que K es un subespacio cerrado de H tal que $\|Tx\| < \epsilon\|x\|$ para toda $x \in K$, $x \neq 0$, y supongamos que L es un subespacio cerrado tal que $\|Tx\| \geq \epsilon\|x\|$ para toda $x \in L^\perp$. Entonces se tiene que $\dim K \leq \dim L$ y $\dim L^\perp \leq \dim K^\perp$.

Sea $\delta_\epsilon(T)$ la dimensión común de todos los subespacios K que satisfacen la condición del Lema 2.1.2. Entonces podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.1.4. [18, Definición 1.3] La nulidad aproximada de un operador T, denotada por $\delta(T)$, se define como

$$\delta(T) = \min_{\epsilon>0} \delta_\epsilon(T).$$

Definición 2.1.5. [18, Definición 2.1] Un subespacio A de H se llama α-cerrado si existe un subespacio cerrado E de H tal que $E \subset A$ y $\dim(A \cap E^\perp) < \alpha$.

Lema 2.1.4. [18, Lema 2.2] Sea K un subespacio lineal de un espacio de Hilbert H y sea L un subespacio cerrado de H contenido en K. Entonces

$$(\overline{K \cap L^\perp}) = \overline{K} \cap L^\perp.$$

Lema 2.1.5. Sean H un espacio de Hilbert y α un número cardinal. Si A es un subespacio cerrado de H, entonces A es α-cerrado.

Demostración: Como $A \subseteq A$ y $\dim(A \cap A^\perp) = \dim\{0\} < \alpha$, tenemos que A es α-cerrado.

▲

Lema 2.1.6. [18, Lema 2.3] Sea A un subespacio de H. Entonces A es $\aleph_0$-cerrado si y sólo si A es cerrado.

De hecho, el resultado anterior se cumple para todo número cardinal α, $\alpha \leq \aleph_0$.

Otras propiedades de los subespacios α-cerrados son las siguientes:

Corolario 2.1.1. Sea α un número cardinal, $1 \leq \alpha \leq \aleph_0$. Si $\dim F < \alpha$, entonces F es α-cerrado.

Demostración: $\{0\}$ es un subespacio cerrado de H tal que $\{0\} \subset F$. Además, $\dim(F \cap \{0\}^\perp) = \dim F \cap H = \dim F < \alpha$. Por lo tanto F es α-cerrado.

▲

Lema 2.1.7. [18, Lema 2.4] Sea H un espacio de Hilbert de dimensión h y $1 \leq \alpha \leq h$. Si K y L son subespacios de H, con K subespacio cerrado y $\dim L < \alpha$, entonces $K + L$ es α-cerrado.

Lema 2.1.8. [18, Lema 2.5] Supongamos que T es un operador lineal acotado inyectivo de un espacio de Hilbert K en otro espacio de Hilbert L. Sea A un subespacio de K tal que $T(A)$ es cerrado. Entonces $\dim A^{\perp} \leq \dim(T(A))^{\perp}$.

Un resultado importante en la teoría de los operadores α-Fredholm es el siguiente:

Teorema 2.1.2. [18, Teorema 2.6] Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita h. Sea $T \in B(H)$ y sea α un número cardinal tal que $1 \leq \alpha \leq h$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) T es invertible por la izquierda módulo $\mathcal{F}_{\alpha}$.

(2) T es invertible por la izquierda módulo $\mathcal{I}_{\alpha}$.

(3) T es acotado por abajo sobre algún subespacio cerrado de codimensión menor que α.

(4) $\delta(T) < \alpha$.

(5) $n(T) < \alpha$ y $R(T)$ es α-cerrado.

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2) Como T es invertible por la izquierda en $\mathcal{F}_{\alpha}$, es claro que también es invertible por la izquierda en $\mathcal{I}_{\alpha}$, ya que $\mathcal{I}_{\alpha} = \overline{\mathcal{F}_{\alpha}}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea S un operador en $B(H)$ tal que $(I - ST) \in \mathcal{I}_{\alpha}$. Claramente $S \neq 0$. Por el Lema 2.1.2, existe un subespacio cerrado K de H tal que $\|STx\| < \frac{1}{2}\|x\|$, para $x \in K$, $x \neq 0$, entonces $-\|STx\| \geq \frac{1}{2}\|x\|$ para $x \in K$, $x \neq 0$ y $\|STx\| \geq \frac{1}{2}\|x\|$ para $x \in K^{\perp}$.

Por lo que $\|Tx\| \geq \frac{1}{2}\|S\|^{-1}\|x\|$ para $x \in K^{\perp}$, lo que significa que T es acotado por abajo en $K^{\perp}$.

Sólo nos resta ver que $\dim K = \mathrm{codim} K^{\perp} < \alpha$.

Pero para $x \in K$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(I - ST)x\| &\geq \|x\| - \|STx\| \\
&\geq \|x\| - 1/2\|x\| \\
&\geq (1 - 1/2)\|x\| \\
&= 1/2\|x\|,
\end{aligned}$$

lo que nos dice que $(I - ST)$ es acotado por abajo en K. Como $(I - ST) \in \mathcal{I}_\alpha$, por el Teorema 2.1.1 (5) tenemos que $\dim K < \alpha$, esto es, $\mathrm{codim} K^\perp < \alpha$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Supongamos que T es acotado por abajo en algún subespacio cerrado L tal que $\mathrm{codim} L = \dim L^\perp < \alpha$.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $\|Tx\| \geq \epsilon\|x\|$ para toda $x \in L$.

Para esa ϵ, denotemos por K un subespacio cerrado que satisfaga las condiciones del Lema 2.1.2; por el Lema 2.1.3, $\dim K \leq L^\perp < \alpha$. Pero $\delta_\epsilon(T) = \dim K$, luego $\delta(T) \leq \delta_\epsilon(T) < \alpha$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Como $\delta(T) = \text{mín}_{\epsilon > 0} \delta_\epsilon(T)$, existe un $\epsilon_0 > 0$ tal que $\delta(T) = \delta_{\epsilon_0}$. Luego, por el Lema 2.1.2, existe un subespacio cerrado K tal que $N(T) \subset K$, $\dim K = \delta_{\epsilon_0}(T) < \alpha$, $\|Tx\| < \epsilon_0\|x\|$ para $x \in K$, $x \neq 0$ y $\|Tx\| \geq \epsilon_0\|x\|$ para $x \in K^\perp$. Como T es acotado por abajo sobre $K^\perp$, $T(K^\perp)$ es cerrado. De hecho se tiene que $\dim T(K) \leq \dim K < \alpha$. Más aún, $R(T) = T(K^\perp) + T(K)$. Luego, por el Lema 2.1.7, tenemos que el $R(T)$ es α-cerrado. Finalmente, $\dim KerT \leq \delta(T) < \alpha$.

(5) $\Rightarrow$ (1) Como $\overline{R(T)}$ es α-cerrado, existe un subespacio N, $N \subset R(T)$ tal que $\dim(\overline{R(T)} \cap N^\perp) < \alpha$ (si α es finito, $R(T)$ es cerrado y consideramos a $N = R(T)$). Sea $M = T^{-1}(N) \cap (KerT)^\perp$. Entonces A es una transformación lineal acotada uno a uno del $(KerT)^\perp$ en el $\overline{R(T)}$, la cual transforma a M en el subespacio cerrado N. Por lo que podemos aplicar el Lema 2.1.8, con $K = (KerT)^\perp$ y $L = \overline{R(T)}$ para concluir que

$$\dim(M^\perp \cap (KerT)^\perp) \leq \dim(N^\perp \cap \overline{R(T)}).$$

Como T transforma a M uno a uno sobre N, $T|_M$ admite una transformación inversa sobre N, y anula $N^\perp$. Por lo tanto $BT|_M = I|_M$ o $(I - BT)|_M = 0$. Luego $\dim KerT \leq \dim M^\perp$. Como $M \subset (KerT)^\perp$, tenemos que $KerT \subset M^\perp$ y por lo tanto

$$\dim M^\perp = \dim(KerT) + \dim(M^\perp \cap (KerT)^\perp).$$

Luego

$$\begin{aligned}
\dim ker(I - BT) &\leq \dim(KerT) + \dim(M \cap (KerT)^\perp) \\
&\leq \dim(T) + \dim(N^\perp \cap (\overline{R(A)}) \\
&< \alpha + \alpha = 0 \ \text{ si } \ \alpha \ \text{ es infinita} \\
&< \alpha + 0 = \alpha \ \text{ si } \ \alpha \ \text{ es finita.}
\end{aligned}$$

De aquí vemos que $\dim ker(I - BT) < \alpha$ para toda α, así $(I - BT) \in \mathcal{F}_\alpha$.
▲

2.2. Operadores α-Fredholm

La definición de subespacio α-cerrado, les permitió a G. Edgar, J. Ernest y S. G. Lee generalizar la definición de operadores de Fredholm [18].

Definición 2.2.1. [18, Definition 2.7] Un operador $T \in B(H)$ se llama α-Fredholm si

(a) $R(T)$ es α-cerrado.

(b) $n(T) < \alpha$.

(c) $\rho(T) = \dim R(T)^\perp < \alpha$.

Denotamos por $\Phi_\alpha(H)$ el conjunto de operadores α-Fredholm en $B(H)$.

Debilitando la definición anterior se tiene lo siguiente:

Definición 2.2.2. Sean $h = \dim H$, α un número cardinal tal que $\alpha < h$ y T un operador sobre $B(H)$. Decimos que T es:

(a) Semi α-Fredholm superior si $\dim KerT < \alpha$ y $R(T)$ es α-cerrado.

(b) Semi α-Fredholm inferios si $\dim R(T)^\perp < \alpha$.

Denotamos por $\Phi_\alpha^+(H)$ y $\Phi_\alpha^-(H)$) el conjunto de operadores semi α-Fredholm superior y semi α-Fredholm inferior respectivamente.

Un resultado inmediato de esta definición es el siguiente:

Teorema 2.2.1. Sean T, S operadores en $B(H)$ tales que $TS \in \Phi_\alpha(H)$ y $R(T)$ α-cerrado. Entonces T es semi α-Fredholm inferior y S es semi α-Fredholm superior.

Demostración: Como $TS \in \Phi_\alpha(H)$, entonces S es invertible por la izquierda modulo $\mathcal{F}_\alpha$, por tanto $n(S) < \alpha$ y $R(S)$ es α-cerrado (ver [18, Theorem 2.6]), en otras palabras, $S \in \Phi_\alpha^+(H)$.

Por otro lado, como $R(TS) \subseteq R(T)$ se sigue que $\dim H/R(T) \leq \dim H/R(TS) < \alpha$, es decir, $d(T) < \alpha$, concluimos que $T \in \Phi_\alpha^-(H)$.
▲

Observación 2.2.1. Sea H un espacio de Hilbert no separable. Sea T un operador semi-Fredholm inferior que no sea Fredholm. Entonces T es un operador α-Fredholm para todo cardinal α tal que $\aleph_0 \leq \alpha < h$, pero no es Fredholm.

Ejemplo 2.2.1. Sea H_1 un espacio de Hilbert (separable) y sea T_1 un operador tal que $n(T_1) = \infty$, $d(T_1) < \infty$ (notemos que T_1 es semi-Fredholm inferior, pero no Fredholm). Tomemos $H = H_1 \oplus H_2$, donde H_2 es un espacio de Hilbert no separable y $T \in B(H)$ definido por $T = T_1 \oplus I$. Como $R(T) = R(T_1) \oplus H_2$ y $n(T) = n(T_1) \oplus \{0\} = \aleph_0$, entonces T es un operador α-Fredholm para todo cardinal α, $\aleph_0 < \alpha < \dim H_2$, pero no es Fredholm.

Surge una pregunta natural: ¿Existe un teorema análogo al teorema de Atkinson que nos permita caracterizar a los operadores α-Fredholm? En efecto, el siguiente resultado es una generalización del teorema de Atkinson para operadores α-Fredholm.

Teorema 2.2.2. [18, Teorema 2.8] Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita h, α un número cardinal, $1 \leq \alpha \leq h$ y $T \in B(H)$, entonces son equivalentes:

(1) T es un operador α-Fredholm.

(2) T es invertible módulo $\mathcal{F}_\alpha$.

(3) T es invertible módulo $\mathcal{I}_\alpha$.

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2) Como $R(T)$ es α-cerrado, existe un subespacio cerrado K contenido en $R(T)$ tal que $\dim(\overline{R(T)} \cap K^\perp) < \alpha$ (si α es finito, entonces $R(T)$ es cerrado y en tal caso tomamos $K = R(T)$). Sea $M = T^{-1}(K) \cap (KerT)^\perp$. Como $T : H \to H$ y $H = KerT \oplus (KerT)^\perp$ con $KerT \cap (KerT)^\perp = \{0\}$, entonces $T|_{(KerT)^\perp} : (KerT)^\perp \to R(T)$ es inyectiva, pues $Ker(T|_{(KerT)^\perp}) = \{0\}$ y sobre, debido a que $T|_{(KerT)^\perp} x = Tx$. Además, T transforma a M uno a uno sobre K (pues $M = T^{-1}(K) \cap (KerT)^\perp$, luego $T(M) = T(T^{-1}(K) \cap (KerT)^\perp) = T|_{(KerT)^\perp}(T^{-1}(K)) = K$, por lo que $T|_M : T^{-1}(K) \cap (KerT)^\perp \to K$ es inyectivo y sobre). Como K es cerrado, T tiene una inversa lineal acotada sobre M. Definamos a $S \in B(H)$ tal que $ST|_M = I|_M$, $TS|_K = I|_K$, además, $(I - ST)|_M = I|_M - ST|_M = 0$. Luego $\dim R(I - ST) \leq \dim M^\perp$. Como $M \subset (KerT)^\perp$, entonces, $M^\perp \supset KerT$ por lo que $\dim M^\perp \geq \dim KerT$. Además $M^\perp = (M^\perp \cap KerT) \cup (M^\perp \cup (KerT)^\perp)$ con $(M^\perp \cap KerT) \cap$

$(M^{\perp} \cup (KerT)^{\perp}) = \{0\}$, por lo que $\dim M^{\perp} = \dim(M^{\perp} \cap KerT) + \dim(M^{\perp} \cup (KerT)^{\perp})$, así, $\dim M^{\perp} = \dim KerT + \dim(M^{\perp} \cup (KerT)^{\perp})$. Como $\dim R(I - ST) \leq \dim M^{\perp}$, entonces, como en la demostración del Teorema 2.1.2, la condición (5) implica (1), podemos argumentar que $\dim R(I - ST) \leq \alpha$, así terminamos la demostración.

(2) $\Rightarrow$ (3) La implicación es clara, pues $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{I}_\alpha$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Como T es invertible por la izquierda módulo $\mathcal{I}_\alpha$, por el Teorema 2.1.2 tenemos que $n(T) < \alpha$ y $R(T)$ es α-cerrado. Ahora sólo nos resta ver que $\dim R(T)^{\perp} < \alpha$. En efecto, también por hipótesis sabemos que T es invertible por la derecha módulo $\mathcal{I}_\alpha$, esto es, $TS = I + \mathcal{I}_\alpha$. De la Observación 2.1.1 tenemos que $\mathcal{I}_\alpha$ es auto adjunto, por tanto

$$(TS)^* = S^*T^* = (I + \mathcal{I}_\alpha)^* = I^* + {\mathcal{I}_\alpha}^* = I + \mathcal{I}_\alpha,$$

esto es, T^* es invertible por la derecha módulo $\mathcal{I}_\alpha$, y por el Teorema 2.1.2, $n(T^*) = \dim R(T)^{\perp} < \alpha$. Por lo tanto T es α-Fredholm.

▲

Teorema 2.2.3. Sea $\alpha \geq \aleph_0$. El conjunto $\Phi_\alpha(H)$ de operadores α-Fredholm es abierto en $B(H)$.

Demostración: Sea $T \in \Phi_\alpha(H)$, por el Teorema 2.2.2, existen $T_1 \in B(H)$ y $K_1, K_2 \in \mathcal{F}_\alpha$ tales que

$$\begin{aligned} T_1T &= I + K_1, \\ TT_1 &= I + K_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sean $\epsilon = \|T_1\|^{-1}$ y $S \in \Phi_\alpha(H)$ tales que $\|S\| < \epsilon$.
De (2.1) tenemos

$$\begin{aligned} T_1(T + S) &= (I + T_1S) + K_1, \\ (T + S)T_1 &= (I + ST_1) + K_2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

$\|T_1S\| \leq \|T_1\|\|S\| < \|T_1\|\epsilon \leq \epsilon 1/\epsilon = 1$, por lo que $\|T_1S\| < 1$. Entonces $(I + T_1S)^{-1} \in B(H)$, análogamente $(I + ST_1)^{-1} \in B(H)$.
De (2.2) tenemos

$$\begin{aligned} (I + T_1S)^{-1}T_1(T + S) &= I + (I + T_1S)^{-1}K_1, \\ (T + S)T_1(I + ST_1)^{-1} &= I + K_2(I + ST_1)^{-1}. \end{aligned}$$

Como $(I + T_1 S)^{-1} K_1, K_2(I + ST_1)^{-1} \in \mathcal{F}_\alpha$, entonces, por el Teorema 2.2.2, $T + S \in \Phi_\alpha(H)$. Esto es, $\Phi_\alpha(H)$ es un conjunto abierto en $B(H)$.

▲

Se han visto algunas propiedades de los operadores de Fredholm; cabría preguntarse si se tienen propiedades similares para los operadores α-Fredholm.

Teorema 2.2.4. [12, Lema 2.1.7] Sean $S \in B(H)$ y $T \in B(H)$ α-Fredholm con $\alpha \geq \aleph_0$. Entonces ST es α-Fredholm.

Demostración: Sean $S \in B(H)$ y $T \in B(H)$ α-Fredholm. Por el Teorema 2.2.2 existen $S_1, T_1, S_2, T_2 \in B(H)$ y $K_1, K_1', K_2, K_2' \in \mathcal{I}_\alpha$ tales que

$$S_1 S = I - K_1 \;\; ; \;\; SS_2 = I - K_1$$

$$T_1 T = I - K_1' \;\; ; \;\; TT_2 = I - K_2'.$$

De aquí se sigue que,

$$\begin{aligned} (T_1 S_1)(ST) &= T_1(I - K_1)(T) \\ &= T_1 T - T_1 K_1 T \\ &= I - K_2 - T_1 K_1 T \\ &= I + (-K_1 - T_1 K_1 T). \end{aligned}$$

Lo que significa que $(T_1 S_1)(ST) \in I + \mathcal{I}_\alpha$, es decir, ST es invertible por la izquierda módulo $\mathcal{I}_\alpha$.

De forma similar tenemos que $(ST)(T_1' S_1') \in I + \mathcal{I}_\alpha$, es decir, ST es invertible por la derecha módulo $\mathcal{I}_\alpha$. Por lo tanto de esto y lo anterior tenemos que ST es invertible módulo $\mathcal{I}_\alpha$, o lo que es lo mismo ST es α-Fredholm.

▲

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.2.5. Sea H un espacio de Hilbert, $\dim H = h$. Sean α_1 y α_2 dos cardinales tales que $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq h$, entonces $\Phi_{\alpha_1}(H) \subseteq \Phi_{\alpha_2}(H)$.

Demostración: Como $\alpha_1 < \alpha_2$, tenemos que $\mathcal{I}_{\alpha_1} \subseteq \mathcal{I}_{\alpha_2}$, entonces todo operador $T \in B(H)$ invertible módulo $\mathcal{I}_{\alpha_1}$ (y del Teorema 2.2.2 tenemos que T es α_1-Fredholm) también es invertible módulo $\mathcal{I}_{\alpha_2}$, luego del Teorema 2.2.2, T también es α_2-Fredholm. Por lo tanto, $\Phi_{\alpha_1}(H) \subseteq \Phi_{\alpha_2}(H)$.

▲

El ejemplo siguiente nos muestra que la contención del teorema anterior es estricta.

Ejemplo 2.2.2. Sean α y β números cardinales tales que $\aleph_0 < \alpha < \beta$. Sea H un espacio vectorial de Hilbert de dimensión $h(> \beta)$ del tipo ℓ^p-type ($p \leq 1 < \infty$) con base estándar $\{e_\lambda\}_{\lambda=1}^h$ ($x = \sum_{\lambda=1}^h x_\lambda e_\lambda \in H \leftrightarrow \sum_{\lambda=1}^h |x_\lambda|^p < \infty$, x_λ coeficientes reales o complejos). Consideremos el operador del tipo traslación a la izquierda $T : H \to H$ definido por

$$T(x_1, \ldots, x_{\aleph_0}, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_\beta, \ldots) = (x_\alpha, \ldots, x_\beta, \ldots).$$

Entonces $n(T) = \alpha$ y $R(T)(= H)$ es β-cerrado, es decir, T es un operador β-Fredholm que no es α-Fredholm.

Una pregunta que se plantea es la siguiente: ¿Con hipótesis similares al Teorema 2.2.4 y α finito podemos concluir que el producto de dos operadores α-Fredholm es α-Fredholm?

Teorema 2.2.6. Sean $S \in B(H)$ y $T \in B(H)$ α-Fredholm con $\alpha < \aleph_0$. Entonces ST es 2α-Fredholm.

Demostración: Como este teorema satisface las condiciones del Teorema 2.2.2, existen $S_1, T_1, S_2, T_2 \in B(H)$ y $K_1, K_1', K_2, K_2' \in \mathcal{I}_\alpha$ tales que

$$S_1 S = I - K_1 \ \ ; \ SS_2 = I - K_1$$
$$T_1 T = I - K_1' \ \ ; \ TT_2 = I - K_2',$$

y llegamos a que $(T_1S_1)(ST) = I + (-K_1 - T_1K_1T)$, pero la dimensión del rango de $(-K_1 - T_1K_1T)$ es menor que 2α, por tanto $I + (-K_1 - T_1K_1T) \in I + \mathcal{I}_{2\alpha}$.

▲

El resultado siguiente nos dice bajo qué condiciones tendremos que, si el producto de dos operadores es α-Fredholm, entonces cada operador será α-Fredholm.

Teorema 2.2.7. [12, Lema 2.1.8] Sean $S \in B(H)$ y $T \in B(H)$. Si ST es α-Fredholm y $ST = TS$, entonces S y T son α-Fredholm.

Otras propiedades de los operadores α-Fredholm son:

Teorema 2.2.8. Sea α un número cardinal tal que $\aleph_0 \leq \alpha$. Sea T un operador α-Fredholm y K un operador en $\mathcal{F}_\alpha$. Entonces $T+K$ es un operador α-Fredholm.

Demostración: Por el Teorema 2.2.2, existen

$$\begin{aligned} T_0T &= I - F_0; \\ TT_1 &= I - F_1. \end{aligned}$$

Entonces,

$$T_0(T+K) = T_0T + T_0K = I - F_0 + T_0K = I - F_0', \tag{2.3}$$

donde $F_0' \in \mathcal{F}_\alpha$.

De la misma manera,

$$(T+K)T_1 = I - F_1 + KT_1 = I - F_1', \tag{2.4}$$

con $F_1' \in \mathcal{F}_\alpha$.

De (2.3) y (2.4) tenemos que $(T+K) \in \Phi_\alpha(H)$.

▲

Teorema 2.2.9. Sean $S, T \in B(H)$ tales que $TS \in \Phi_\alpha(H)$. Entonces $S \in \Phi_\alpha(H)$ si y sólo si $T \in \Phi_\alpha(H)$.

Demostración: $\Longrightarrow$ Primero, supongamos que $S \in \Phi_\alpha(H)$.

Sea S_1 un operador que satisface el Teorema 2.2.2. Por lo tanto, $SS_1 = I - F$ sobre H, donde $F \in \mathcal{F}_\alpha$, entonces,

$$TSS_1 = T - TF. \tag{2.5}$$

Ahora, $S_1 \in \Phi_\alpha(H)$ por el Teorema 2.2.2, mientras que $TS \in \Phi_\alpha(H)$, por hipótesis. Luego $TSS_1 \in \Phi_\alpha(H)$, por el Teorema 2.2.4. De (2.5) tenemos que $T = TSS_1 + TF$. Como $TF \in \mathcal{F}_\alpha$ y $TSS_1 \in \Phi_\alpha(H)$, se sigue del teorema anterior que $T \in \Phi_\alpha(H)$.

$\Longleftarrow$ Lo mismo se tiene para S, lo que completa la prueba.

▲

Teorema 2.2.10. Sean S y T operadores sobre $B(H)$. Si $TSA \in \Phi_\alpha(H)$ y $\dim KerT < \alpha$, entonces $S, T \in \Phi_\alpha(H)$.

Demostración: $R(TS) \subseteq R(T)$, entonces $R(T)^{\perp} \subseteq R(TS)^{\perp}$ y $\dim R(T)^{\perp} \leq \dim R(TS)^{\perp} < \alpha$.

Existe $E = \bar{E} \subset R(TS) \subset R(T) \subset H$ tal que $\dim(R(TS) \cap E^{\perp}) < \alpha$, luego $\dim(R(T) \cap E^{\perp}) < \alpha$, es decir, $R(T)$ es α-cerrado; $\dim Ker(T) < \alpha$ por hipótesis, entonces $T \in \Phi_{\alpha}(H)$ y $S \in \Phi_{\alpha}(H)$, por el Teorema 2.2.9.

▲

Teorema 2.2.11. Sea S, T operadores sobre $B(H)$, $TS \in \Phi_{\alpha}(H)$, $R(S)$ α-cerrado y $\dim R(S)^{\perp} < \alpha$, entonces $S, T \in \Phi_{\alpha}(H)$.

Demostración: Como $KerS \subset KerTS, \dim KerS \leq \dim KerTS < \alpha$, por tanto $S \in \Phi_{\alpha}(H)$, entonces $T \in \Phi_{\alpha}(H)$, por el Teorema 2.2.9.

▲

Teorema 2.2.12. Sean $\aleph_0 \leq \alpha$ y $S, T \in B(H)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $ST \in \Phi_{\alpha}(H)$, $n(S) < \alpha$ y $R(S)$ α-cerrado;

(ii) $ST \in \Phi_{\alpha}(H)$, $d(T) < \alpha$;

(iii) $T, S \in \Phi_{\alpha}(H)$.

Demostración: (iii) $\Longrightarrow$ (i), (ii): Sean $T, S \in \Phi_{\alpha}(H)$. Entonces, del Teorema 2.2.4 (i) y de la definición de operadores α-Fredholm, se sigue que $ST \in \Phi_{\alpha}(H)$, $\dim N(S) < \alpha$, $\dim R(T)^{\perp} < \alpha$ y $R(T)$ es α-cerrado.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Si suponemos que $ST \in \Phi_{\alpha}(H)$, entonces, de $R(ST) \subseteq R(S)$ se sigue que $\dim R(S)^{\perp} \leq \dim R(ST)^{\perp} < \alpha$. Adicionalmente, de la suposición de que $R(S)$ es α-cerrado y $n(S) < \alpha$, tenemos que $S \in \Phi_{\alpha}(H)$. Ahora, del Teorema 2.2.9, $T \in \Phi_{\alpha}(H)$ también.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Si $ST \in \Phi_{\alpha}(H)$, entonces T es invertible por la izquierda módulo $\mathcal{I}_{\alpha}$ (y $\mathcal{F}_{\alpha}$) y, por [18, Teorema 2.6], $R(T)$ es α-cerrado y $n(T) < \alpha$. Como por hipótesis $d(T) < \alpha$, tenemos que $T \in \Phi_{\alpha}(H)$. Finalmente, por el Teorema 2.2.9, $S \in \Phi_{\alpha}(H)$. ▲

2.3. Espectro α-esencial

El espectro α-esencial se define como

$$\sigma_{\alpha}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es } \alpha - \text{Fredholm}\}.$$

Observación 2.3.1. Por el Teorema 2.2.3 tenemos que el espectro α-esencial de un operador T es un conjunto cerrado.

Observación 2.3.2. Notemos que para cualesquiera dos números cardinales α_1 y α_2 tales que $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2$, se tiene que, $\sigma_{\alpha_2}(T) \subseteq \sigma_{\alpha_1}(T)$.

En efecto, sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \notin \sigma_{\alpha_1}(T)$, entonces $(T - \lambda I)$ es α_1-Fredholm y, por el Teorema 2.2.5, $(T - \lambda I)$ también es α_2-Fredholm, por lo que $\lambda \notin \sigma_{\alpha_2}(T)$. Podemos concluir que $\sigma_{\alpha_2}(T) \subseteq \sigma_{\alpha_1}(T)$.

Sea $\{A_n\}$ una sucesión de subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. Se define:

(i) el límite inferior, $\liminf f(A_n) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid$ para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ finito tal que $B(\lambda, \epsilon) \cap f(A_n) \neq \varnothing$ para todo $n \geq N\}$,

(ii) el límite superior, $\limsup f(A_n) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid$ para todo $\epsilon > 0$ existe $J \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $B(\lambda, \epsilon) \cap f(A_n) \neq \varnothing$ para todo $n \in J\}$.

Definición 2.3.1. Sea $\{A_n\} \subset \mathbb{C}$. Una función f definida en $B(X)$ cuyos valores son subconjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{C}$ es:

(i) semi-continua superior en A, cuando $\|A_n - A\| \to 0$, implica, $\limsup f(A_n) \subseteq f(A)$,

(i) semi-continua inferior en A, cuando $\|A_n - A\| \to 0$, implica, $f(A) \subseteq \liminf f(A_n)$.

Observación 2.3.3. Si f es semi-continua superior e inferior en A, entonces se dice f que es continua en A.

Teorema 2.3.1. El espectro α-esencial de un operador T es una función semi continua superior en $B(H)$.

Demostración: Sea $0 < \alpha < h$, $\{T_n\} \subset B(H)$ una sucesión de operadores que converge (en norma) a $T \in B(H)$ y $\lambda \notin \sigma_\alpha(T)$. Entonces $T - \lambda I \in \Phi_\alpha(H)$, más aún, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(T - \lambda I, \epsilon) \subset \Phi_\alpha(H)$. También, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $T_n - \lambda I \in B(T - \lambda I, \epsilon)(\subset \Phi_\alpha(H))$ y por consiguiente, $\lambda \notin \sigma_\alpha(T_n)$. Luego, $\lambda \notin \limsup \sigma_\alpha(T_n)$. ▲

Otra propiedad importante del espectro α-esencial es el teorema de la transformación espectral.

Teorema 2.3.2. [12, Teorema 3.3.7] Si T es un operador y p un polinomio, entonces $\sigma_\alpha(p(T)) = p(\sigma_\alpha(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma_\alpha(T)\}$.

También, se tiene para operadores α-Fredholm lo siguiente:

Teorema 2.3.3. Sea H un espacio de Hilbert. Entonces

$$\Phi(H) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n(H).$$

Demostración: $\subseteq$] Sea $T \in \Phi(H)$. Existen $T_1, T_2 \in B(H)$ y $F_1, F_2 \in K_0(H)$ tales que

$$\begin{aligned} T_1 T &= I + F_1, \\ T T_2 &= I + F_2, \end{aligned}$$

con $\dim R(F_1) = n_1 < \infty$ y $\dim R(F_2) = n_2 < \infty$. Existe n_0: $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$, entonces $\dim R(F_1) < n_0$ y $\dim R(F_2) < n_0$, por lo que $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{n_0}$. Por lo tanto, de las ecuaciones anteriores concluimos que T es invertible módulo $\mathcal{F}_{n_0}$ y, por el Teorema 2.2.2, $T \in \Phi_{n_0}(H)$, o lo que es igual,

$$T \in \Phi(H) \subseteq \Phi_{n_0}(H) \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} \Phi_n(H). \tag{2.6}$$

$\supseteq$] Sea $T \in \cup_{n=1}^{\infty} \Phi_n(H)$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T \in \Phi_{n_0}(H)$. Por tanto, existen $T_1, T_2 \in B(H)$ y $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{n_0}$ tales que

$$\begin{aligned} T_1 T &= I + F_1, \\ T T_2 &= I + F_2, \end{aligned}$$

$\dim R(F_1) < n_0$ y $\dim R(F_2) < n_0$, lo que significa que T es invertible módulo $K_0(H)$, así, del Teorema 1.9.4, $T \in \Phi(H)$. Por tanto tenemos que

$$T \in \cup_{n=1}^{\infty} \Phi_n(H) \subseteq \Phi(H). \tag{2.7}$$

Finalmente, podemos concluir de 2.6 y 2.7 que $\Phi(H) = \cup_{n=1}^{\infty} \Phi_n(H)$.

▲

Un resultado inmediato del teorema anterior es el siguiente:

Corolario 2.3.1. Sea $T \in B(H)$. Entonces

$$\sigma_e(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T).$$

Demostración: $\subseteq]$ Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \notin \cap_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)$. Existe n' tal que $\lambda \notin \sigma_{n'}(T)$, entonces $(T - \lambda I)$ es n'-Fredholm. Por lo tanto, $(T - \lambda I) \in \cup_{n=1}^{\infty} \Phi_n(H)$, y del Teorema 2.3.3 tenemos que $(T - \lambda I) \in \Phi(H)$. Lo que significa que $\lambda \notin \sigma_e(T)$. Con lo que concluimos que

$$\sigma_e(T) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T). \tag{2.8}$$

$\supseteq]$ Sea $\lambda \in \cap_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)$. Entonces $\lambda \in \sigma_n(T)$ para toda n. Luego $(T - \lambda I)$ no es n-Fredholm para toda n, más aún, $T \notin \cup_{n=1}^{\infty} \Phi_n(H)$, y del Teorema 2.3.3 concluimos que $(T - \lambda I) \notin \Phi(H)$. Lo que significa que $\lambda \in \sigma_e(T)$. Por lo tanto,

$$\sigma_e(T) \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T). \tag{2.9}$$

Concluimos de 2.8 y 2.9 que $\sigma_e(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)$.

▲

Un resultado similar al Teorema 2.3.3, que relaciona a los operadores Fredholm y a los operadores α-Fredholm para un número cardinal α, $\aleph_0 < \alpha \leq h$, es el siguiente:

Teorema 2.3.4. Sea H un espacio de Hilbert, $\dim H = h$ tal que $\aleph_0 < \alpha \leq h$. Entonces

$$\Phi(H) \subseteq \bigcap_{\aleph_0 < \alpha \leq h} \Phi_\alpha(H).$$

Demostración: Para cualesquiera dos números cardinales α_1 y α_2 tales que $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2$, tenemos $\mathcal{I}_{\alpha_1} \subseteq \mathcal{I}_{\alpha_2}$. Por otro lado, $K_0(H) \subset \mathcal{I}_\alpha$ para todo $\alpha > \aleph_0$. Esto es, para toda α, $\aleph_0 < \alpha \leq h$, si $T \in \Phi(H)$ (T es invertible módulo $K_0(H)$), entonces $T \in \Phi_\alpha(H)$ (T es invertible módulo $\mathcal{I}_\alpha$) para todo número cardinal $\alpha > \aleph_0$. Podemos concluir que, para $T \in \Phi(H)$, tenemos $T \in \cap_{\aleph_0 < \alpha \leq h} \Phi_\alpha(H)$.

▲

Una consecuencia del teorema anterior es la siguiente:

Corolario 2.3.2. Sea $T \in B(H)$. Entonces

$$\sigma_e(T) \supseteq \bigcup_{\aleph_0 < \alpha \leq h} \sigma_\alpha(T).$$

Demostración: Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \notin \sigma_e(T)$, lo que significa que $T - \lambda I$ es Fredholm. Del Teorema 2.3.4 tenemos que $(T - \lambda I) \in \cap_{\aleph_0 < \alpha \leq h} \Phi_\alpha(H)$, esto es, $(T - \lambda I) \in \Phi_\alpha(H)$ para todo α, $\aleph_0 < \alpha \leq h$. Por tanto, $\lambda \notin \sigma_\alpha(T)$ para todo α, $\aleph_0 < \alpha \leq h$. Luego, $\lambda \notin \bigcup_{\aleph_0 < \alpha \leq h} \sigma_\alpha(T)$. Concluimos que $\sigma_e(T) \supseteq \bigcup_{\aleph_0 < \alpha \leq h} \sigma_\alpha(T)$.

▲

2.4. Regularidades

La teoría de las regularidades, desarrollada por V. Kordula y V. Müller en 1996, es un concepto de la teoría espectral que trata de clasificar el espectro en forma axiomática describiendo el conjunto esencial de elementos sobre el cual el espectro está definido. En esta sección examinamos la correspondiente teoría. Comenzamos con la definición de una regularidad.

Definición 2.4.1. [22, Definición 1.1.1] Un subconjunto no vacío R de un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es llamada una regularidad si cumple con las siguientes condiciones:

(a) si $a \in \mathcal{A}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $a^n \in R$ si y sólo si $a \in R$,

(b) si $a, b, c, d \in \mathcal{A}$ son tales que el producto de entre cada dos de ellos conmuta y $ac + bd = 1_\mathcal{A}$, entonces $ab \in R$ si y sólo si $a, b \in R$.

Proposición 2.4.1. [22, Proposición 2.1.3] Sea R un subconjunto no vacío de un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ que satisface que

$$a, b \in \mathcal{A}, ab = ba, ab \in R \text{ si y sólo si } a, b \in R. \tag{2.10}$$

Entonces R es una regularidad.

Lema 2.4.1. [22, Lema 2.1.4] Sea R una regularidad en un álgebra de Banach $\mathcal{A}$. Si $a, b \in \mathcal{A}$, $ab = ba$, y $a \in \mathcal{A}^{-1}$, entonces

$$ab \in R \text{ si y sólo si } a, b \in R.$$

En el siguiente teorema veremos algunas propiedades características de las regularidades.

Teorema 2.4.1. [22, Teorema 2.1.5] Sea $R \subset \mathcal{A}$ una regularidad. Entonces,

(a) $1_\mathcal{A} \in R$;

(b) $\mathcal{A}^{-1} \subset R$;

(c) $\beta R \subset R$ para todo $0 \neq \beta \in \mathbb{C}$.

Dado que toda álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es una regularidad, llamaremos a un subconjunto R de $\mathcal{A}$ una regularidad propia si R es una regularidad y $R \neq \mathcal{A}$.

La principal consecuencia de la teoría de las regularidades es que toda regularidad R da origen a un correspondiente espectro, el cual definimos formalmente a continuación.

Definición 2.4.2. [22, Definición 2.1.10] El espectro correspondiente a una regularidad R será definido por

$$\sigma_R(a, \mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1_{\mathcal{A}} \notin R\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \notin R\}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. Cuando es claro en qué álgebra estamos trabajando, simplemente denotaremos tal espectro como $\sigma_R(a)$.

Sea $a - \lambda \in R$. Haciendo $\beta = -1$, se sigue del Teorema 2.4.1 (c) que $\lambda - a \in R$. Por tanto, es válido definir el espectro correspondiente a una regularidad R como $\sigma_R(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - a \notin R\}$ [22].

Lema 2.4.2. [22, Lema 2.1.11] Sea $R \subset \mathcal{A}$ una regularidad con el correspondiente espectro $\sigma_R(a)$. Entonces $\sigma_R(a + \lambda) = \lambda + \sigma_R(a)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Otras propiedades importantes son:

Proposición 2.4.2. [22, Proposición 2.1.12] Sea $R \subset \mathcal{A}$ una regularidad con el correspondiente espectro $\sigma_R(a)$. Entonces $\sigma_R \subset \sigma(a)$.

Teorema 2.4.2. [22, Teorema 2.1.15] Sea I que denota un conjunto indexado. La intersección $R = \bigcap_\alpha R_\alpha$ de una familia $(R_\alpha)_{\alpha \in I}$ de regularidades es también una regularidad, cuyo correspondiente espectro satisface $\sigma_R(a) = \bigcup_\alpha \sigma_{R_\alpha}(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Teorema 2.4.3. [22, Teorema 2.1.16] Sea I que denota un conjunto indexado. La unión $R = \bigcup_\alpha R_\alpha$ de cualquier sistema dirigido $(R_\alpha)_{\alpha \in I}$ de regularidades es también una regularidad, con el correspondiente espectro que satisface $\sigma_R(a) = \bigcap_\alpha \sigma_{R_\alpha}(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Una de las más importantes propiedades del espectro correspondiente a una regularidad R es que satisface el teorema de la transformación espectral, el cual se muestra a continuación.

Teorema 2.4.4. [22, Teorema 2.2.3] Sea R una regularidad en un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ y sea $\sigma_R(a)$ su correspondiente espectro. Entonces

$$\sigma_R(f(a)) = f(\sigma_R(a))$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ y toda función analítica f sobre una vecindad de $\sigma(a)$, la cual no es constante sobre cada componente de su dominio de definición.

El resultado siguiente muestra que el conjunto de operadores α-Fredholm es una regularidad de $B(H)$.

Teorema 2.4.5. Sean H un espacio de Hilbert y α un número cardinal cualquiera tal que $\alpha \geq \aleph$. Entonces $\Phi_\alpha(H)$ es una regularidad de $B(H)$.

Demostración:

(a) Como $\Phi(H) \in \Phi_\alpha(H)$, $\Phi_\alpha(H) \neq \emptyset$.

(b) Si $T^n \in B(H)$, $T^n \in \Phi_\alpha(H)$ si y sólo si $T \in \Phi_\alpha(H)$. En efecto, para $n = 2$, si $T^2 \in \Phi_\alpha(H)$, por el Teorema 2.2.7, $T \in \Phi_\alpha(H)$. Por inducción, si $T^n \in \Phi_\alpha(H)$, entonces $T \in \Phi_\alpha(H)$. Por otro lado, si $T \in \Phi_\alpha(H)$, por el Teorema 2.2.4, $TT \in \Phi_\alpha(H)$. Por inducción, $T^n \in \Phi_\alpha(H)$.

(c) Sean $P, Q, S, T \in B(H)$, cuyo producto entre cada dos de ellos conmuta tales que $SP + TQ = I_{B(H)}$, entonces, por el Teorema 2.2.7 y el Teorema 2.2.4, $ST \in \Phi_\alpha(H)$ si y sólo si $S, T \in \Phi_\alpha(H)$.

▲

Observación 2.4.1. Como $\Phi_\alpha(H)$ es una regularidad de $B(H)$, por el Teorema 2.4.1 (a), $I_{B(H)} \in \Phi_\alpha(H)$.

Del Teorema(2.4.4) tenemos lo siguiente:

Corolario 2.4.1. Sea $\Phi_\alpha(H)$ una regularidad de Banach $\mathcal{A}$. Entonces

$$\sigma_\alpha(f(T)) = f(\sigma_\alpha(T))$$

para todo $T \in \Phi_\alpha(H)$ y toda función analítica f sobre una vecindad de $\sigma(T)$, la cual no es constante sobre cada componente de su dominio de definición.

Capítulo 3

Operadores α-Weyl

En este capítulo veremos otro tipo de operadores, que son una clase de operadores α-Fredholm con ciertas características, llamados Operadores α-Weyl.

3.1. Operadores de Weyl

Recordemos que el índice de un operador T se define como: $i(T) = n(T) - d(T)$.

Definición 3.1.1. Sea $\Phi_0(H) = \{T \in \Phi(H) : i(T) = 0\}$.

La clase $\Phi_0(H)$ consta de todos los operadores Weyl.

Se define el espectro Weyl de un operador de la siguiente forma:

$$\omega(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es Weyl }\},$$

luego tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.1.1. Si $T : H \to H$ es un operador lineal acotado y p un polinomio, entonces $\omega(p(T)) \subseteq p(\omega(T))$.

3.2. Operadores α-Weyl

Para espacios de Hilbert, en 1966, L. A Coburn, en [10], definió el espectro Weyl de un operador como

$$\omega_1(T) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(H)} \sigma(T+K),$$

donde $\sigma(T)$ denota el espectro usual de $T \in B(H)$.

Por otro lado, en el mismo año, M. Schechter, en [31], definió el espectro Weyl de T como

$$\omega_2(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es Fredhom de índice } 0\}.$$

En 1970, S. K. Berberian, en [7], estableció la equivalencia entre ambos conjuntos.

Yadav y Arora, en 1980, en [35], definieron el espectro Weyl de peso α para un operador $T \in B(H)$ como

$$\alpha\omega_1(T) = \bigcap_{K \in \mathcal{F}_\alpha} \sigma(T+K).$$

P. Dharmarha, en 2009, en [12], definió a los operadores α-Weyl; para ello, consideró un índice abstracto de la forma siguiente:

Sea A un anillo con unitario I y τ un ideal. Sea

$$\pi : A \to A/\tau$$

que denota el homomorfismo natural, G denota el grupo de invertibles en A/τ y F denota el semigrupo $\pi^{-1}(G)$.

Un índice abstracto consta de un homomorfismo "*ind*"del semigrupo F en el grupo aditivo $\mathbb{Z}$ de enteros ($ind : F \to \mathbb{Z}$) tal que

(a) $ind(T) = 0$ para todo elemento invertible $T \in A$.

(b) $ind(I + K) = 0$ para todo $K \in \tau$.

Observación 3.2.1. De la definición se desprende que $ind(T + K) = ind(T)$ para todo $T \in F$ y $K \in \tau$, pues para $T \in F$ existen $S \in F$, $K_1 \in \tau$ tales que $ST = I + K_1$. Luego $S(T + K) = I + K_1 + SK$, y como ind es un homomorfismo, tenemos que $ind(S(T+K)) = ind(S)+ind(T+K) = ind(I + K_1 + SK) = 0$. Por otro lado, $ind(ST) = ind(S) + ind(T) = ind(I + K_1) = 0$. Luego tenemos que $ind(S) = -ind(T)$. Pero vimos que $ind(S) + ind(T + K) = 0$, entonces $-ind(T) + ind(T + K) = 0$. Por lo que $ind(T + K) = ind(T)$ para todo $T \in F$ y todo $K \in \tau$.

Tomando a A como $B(H)$, τ como $\mathcal{I}_\alpha$ y π el homomorfismo canónico en el álgebra de Calkin $B(H)/\mathcal{I}_\alpha$. Vemos que el semigrupo $\pi^{-1}(G)$ es el mismo que el conjunto $\Phi_\alpha(H)$ de todos los operadores α-Fredholm. El índice correspondiente se denota como "ind", luego tenemos que ind : $\Phi_\alpha(H) \to \mathbb{Z}$ y $ker(ind) = \{T \in \Phi_\alpha(H) : ind(T) = 0\}$. De aquí se sigue la siguiente definición:

Definición 3.2.1. Un operador $T \in B(H)$ se llama α-Weyl si:

(a) T es α-Fredholm;

(b) $T \in Ker(ind)$.

Lo anterior nos permite enunciar el siguiente resultado:

Proposición 3.2.1. [12, Lema 2.1.3] Si K es un operador en $\Phi_\alpha(H)$, entonces $I + K$ es α-Weyl.

Proposición 3.2.2. [12, Lema 2.1.4] Si S es invertible y $K \in \mathcal{I}_\alpha$, entonces $S + K$ es α-Weyl.

Otras propiedades que se tienen son:

Teorema 3.2.1. [12, Lema 2.1.5] Si T es α-Fredholm con $n(T) = n(T^*)$ y $R(T)$ cerrado, entonces existe un operador K de rango menor que α tal que $T + K$ es invertible.

Cuando α no sea finito, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 3.2.1. Sea α finito. Si T es α-Fredholm con $n(T) = n(T^*)$, entonces existe un operador K de rango menor que α tal que $T + K$ es invertible.

Demostración: Sea T α-Fredholm, $n(T) = n(T^*)$ y $R(T)$ α-cerrado, luego cerrado, pues α es finito.

Sea $K : KerT \to KerT^*$ una isometría que se anula en $(KerT)^\perp$. Por tanto, $\dim R(K) = n(T^*) < \alpha$. Por lo que K tiene rango menor que α.

Como $KerT$ es un subespacio de H, $H = KerT \oplus (KerT)^\perp$, cualquier $x \in H$ es de la forma $x = y + z$ con $y \in KerT$ y $z \in (KerT)^\perp$. Así, $(T + K)(x) = (T + K)(y + z) = Tz + Ky$. Por lo tanto, $(T + K)(x) = 0$ si y sólo si $Tz = 0$ y $Ky = 0$ si y sólo si $z \in KerT$ e $y \in (KerT)^\perp$. Pero

$y \in KerT$ y $z \in (KerT)^{\perp}$. Luego $y = 0$ y $z = 0$. Por lo que $(T+K)(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$, es decir, $(T + K)$ es inyectivo.

Como $R(T)$ es cerrado y $H = R(T) \oplus R(T)^{\perp}$, cualquier $x \in H$ es de la forma $x = y+z$ con $y \in R(T)$ y $z \in R(T)^{\perp}$ $(= KerT^*)$. Y como $y \in R(T)$, existe $y_1 \in H$ tal que $y = Ty_1$, y como $z \in R(T)^{\perp}$ $(= KerT^*)$, existe $z_1 \in KerT$ tal que $Kz_1 = z$. Luego $x = Ty_1 + Kz_1 = Ty_1 + (T + K)(z_1)$. Otra vez, como $y_1 \in H$, existen $y_1^{'} \in KerT$ e $y_1^{''} \in (KerT)^{\perp}$ tales que $y_1 = y_1^{'} + y_1^{''}$. Por tanto, $Ty_1 = Ty_1^{''} = (T + K)y_1^{''}$ por definición de K y el hecho de que $y_1^{''} \in (KerT)^{\perp}$. Por lo tanto, cualquier $x \in H$ es de la forma $x = (T + K)(y_1^{''} + z_1)$, lo que nos dice que $x \in R(T + K)$. Luego $(T + K)$ es sobre, y por lo anterior, invertible.

▲

Teorema 3.2.2. [12, Teorema 2.1.6] Sea T un operador α-Fredholm con $R(T)$ cerrado tal que $n(T) = n(T^*)$. Entonces $T \in ker(ind)$.

Se puede plantear, como en el capítulo anterior, cuándo el producto de dos operadores α-Weyl es un operador α-Weyl y cuándo la implicación contraria se cumple. La respuesta a tales cuestiones se halla en los siguientes resultados:

Proposición 3.2.3. [12, Lema 2.1.9] Sea $\alpha \geq \aleph_0$ y sean $S, T \in B(H)$ que conmutan de rango cerrado con $n(S) = n(S^*)$ y $n(T) = n(T^*)$, entonces ST es α-Weyl si y sólo si S y T son α-Weyl.

Cuando $\alpha < \aleph_0$, la primera implicación de la proposición anterior se cumple.

Proposición 3.2.4. Supongamos que $\alpha < \aleph_0$. Sean $S, T \in B(H)$ que conmutan de rango cerrado con $n(S) = n(S^*)$, $n(T) = n(T^*)$ y ST sea α-Weyl, entonces S y T son operadores α-Weyl.

Demostración: Como ST es α-Weyl, tenemos que ST es α-Fredholm, además, como S y T son operadores tales que $ST = TS$, entonces S y T son operadores α-Fredholm, además estos operadores satisfacen las hipótesis del Teorema 3.2.2, luego $S \in Ker(ind)$ y $T \in Ker(ind)$. Por lo que S y T son operadores α-Weyl.

▲

No podemos asegurar en general que cuando $\alpha < \aleph_0$ se tenga la segunda implicación de la Proposición 3.2.3, pero sí tenemos un resultado relacionado.

Proposición 3.2.5. Supongamos que $\alpha < \aleph_0$. Sean $S, T \in B(H)$ que conmutan de rango cerrado con $n(S) = n(S^*)$, $n(T) = n(T^*)$, S y T operadores α-Weyl, entonces ST es un operador 2α-Weyl.

Demostración: Como S y T son operadores α-Weyl, entonces S y T son operadores α-Fredholm con $indS = indT = 0$, y como $\alpha < \aleph_0$, tenemos que ST es un operador 2α-Fredholm, además $indST = indS + indT = 0$, luego ST es un operador 2α-Weyl.

▲

Por otra parte del Teorema 3.2.2, tenemos la siguiente definición:

Definición 3.2.2. Sea $T \in B(H)$ y α un número cardinal, decimos que T es un operador sigma-alfa-Weyl si:

(a) $T \in \Phi_\alpha(H)$,

(b) $n(T) = n(T^*)$.

Usando esta definición se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.2.3. Sea α tal que $1 \leq \alpha < \aleph_0$. Sea $T \in B(H)$ un operador sigma-alfa-Weyl, entonces $i(T) = ind(T) = 0$.

Demostración: Sea α tal que $1 \leq \alpha < \aleph_0$.

Sea T un operador sigma-alfa-Weyl, entonces $n(T) = n(T^*)$, y como T es a su vez α-Fredholm, $n(T) < \alpha$, ahora bien, $i(T) = n(T) - d(T) = n(T) - n(T^*) = 0$. Por otra parte, por hipótesis, T es sigma-alfa-Weyl, así, del Teorema 3.2.2 se tiene que $T \in Ker(ind)$, es decir, $ind(T) = 0$, por tanto $i(T) = ind(T) = 0$.

▲

De aquí extrae el siguiente resultado:

Teorema 3.2.4. Sea α un número cardinal, $1 \leq \alpha < \aleph_0$. Sea $T \in B(H)$, entonces T es un operador α-Weyl si y sólo si T es sigma-alfa-Weyl.

Demostración: $\Longrightarrow$ Sea $T \in B(H)$ un operador α-Weyl, entonces $T \in Ker(ind)$, es decir, $ind(T) = 0$. Del Teorema 3.2.3, $i(T) = ind(T) = 0$, esto es, $i(T) = 0 = n(T) - d(T) = n(T) - n(T^*)$, por lo que $n(T) = n(T^*) < \alpha$.

$\Longleftarrow$ Para $T \in B(H)$ supongamos que T es un operador sigma-alfa-Weyl, esto es, $n(T) = n(T^*) < \alpha < \aleph_0$.

Como $i(T) = n(T) - d(T) = n(T) - n(T^*) = 0$ e $i(T) = ind(T)$ tenemos que $ind(T) = 0$, es decir, $T \in Ker(ind)$.

▲

Dado que Yadav y Arora, en 1980, definieron el espectro Weyl de peso α de un operador $T \in B(H)$ $(\sigma_{\alpha\omega}(T))$ como

$$\alpha\omega_1(T) = \bigcap_{K \in \mathcal{F}_\alpha} \sigma(T + K),$$

damos la siguiente definición:

Definición 3.2.3. Sea $T \in B(H)$. T se llama operador Weyl de peso α si $0 \notin \alpha\omega_1(T)$.

Así, notemos que existe la siguiente relación entre la Definición 3.2.2 y la Definición 3.2.3:

Teorema 3.2.5. Sea α un número cardinal y sea $T \in B(H)$ de rango cerrado. Si T es un operador sigma-alfa-Weyl, entonces T es un operador Weyl de peso α.

Demostración: Supongamos que T es un operador sigma-alfa-Weyl y que T no es Weyl de peso α.

Como T no es Weyl de peso α, entonces $0 \in \sigma_{\alpha\omega}(T)$, esto es, $0 \in \bigcap_{K \in \mathcal{F}_\alpha} \sigma(T + K)$, por lo que $0 \in \sigma(T + K)$ para algún $K \in \mathcal{F}_\alpha$, entonces $T + K$ no es invertible, lo cual es una contradicción, pues por hipótesis T es un operador sigma-alfa-Weyl, por tanto, como T es de rango cerrado y del Teorema 3.2.2, existe $K \in \mathcal{F}_\alpha$ tal que $T + K$ es invertible.

▲

Por otra parte, Dragan S. Djordjevic, en [14], definió una clase de operadores llamada Clase de Operadores Weyl Generalizados de la forma

$$\Phi_o^g(H) = \{T \in B(H) : R(T) \text{ es cerrado}, \ n(T) = n(T^*) \text{ e } i(T) = 0\}.$$

Observemos que esta definición es equivalente a la de la Definición 3.2.2 cuando $1 \leq \alpha < \aleph_0$, por lo que algunos resultados presentados en [14] se cumplen para operadores que cumplen la Definición 3.2.2.

3.3. Índice β

Sea $T \in B(H)$ un operador α-Fredholm, $1 \leq \alpha < h$, podemos extender la definición de índice, para todo $\beta < \alpha$, con una pequeña modificación de la definición en [11]:

$$\operatorname{ind}_{\beta}(T) = \begin{cases} n(T) - n(T^*), & \text{si } \beta = \aleph_0 \text{ o } \beta > \aleph_0 \\ & \quad \text{y } \max\{n(T), n(T^*)\} \geq \beta; \\ & \\ 0, & \text{si } \beta > \aleph_0 \text{ y } \max\{n(T), n(T^*)\} < \beta. \end{cases}$$

De forma similar como Schechter definió a los operadores de Weyl, definimos a los operadores α-Weyl de la siguiente forma:

Definición 3.3.1. Sea α un número cardinal tal α, $\aleph_0 \leq \alpha < h$ y sea un operador $T \in B(H)$. Decimos que T es un operador α-Weyl si T es un operador α-Fredholm con $\operatorname{ind}_{\beta}(T) = 0$ para todo cardinal β, $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$.

Podemos definir el espectro α-Weyl de la siguiente manera:

$$\alpha\omega_2(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es un operador } \alpha - \text{Weyl}\}$$

$$= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \sigma_{\alpha}(T) \text{ o } \operatorname{ind}_{\beta}(T - \lambda I) \neq 0, \text{ para algún } \beta, \aleph_0 \leq \beta < \alpha\}.$$

De aquí surge una pregunta, ¿qué relación hay entre $\alpha\omega_1(T)$ y$\alpha\omega_2(T)$? El siguiente teorema nos da la respuesta para todo α, $\aleph_0 \leq \alpha < h$.

Teorema 3.3.1. Sea T un operador sobre $B(H)$ y sea α un número cardinal tal que $\aleph_0 \leq \alpha < h$. Entonces $\alpha\omega_1(T) = \alpha\omega_2(T)$.

Demostración: Si $\alpha = \aleph_0$, entonces los siguientes resultados se siguen de la teoría clásica de Fredholm.

Sea $\alpha > \aleph_0$ y $\lambda \notin \alpha\omega_1(T)$. Entonces existe un $K \in \mathcal{F}_{\alpha}$ tal que $T - \lambda I + K$ es invertible. Luego $T - \lambda I + K$ es un operador (invertible) α-Fredholm con $\operatorname{ind}_{\beta}(T - \lambda I + K) = 0$ para todo $\beta < \alpha$. Como $T - \lambda I = (T - \lambda I + K) - K$, por [20, Teorema 2.6] y [11, Corolario 1], $T - \lambda I$ es un operador α-Fredholm e $\operatorname{ind}_{\beta}(T - \lambda I) = 0$, para todo $\beta < \alpha$, es decir, $\lambda \notin \alpha\omega_2(T)$.

Sea $\lambda \notin \alpha\omega_2(T)$. Entonces $T - \lambda I$ es un operador α-Fredholm y, para todo cardinal β tal que $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$, tenemos que $\operatorname{ind}_{\beta}(T - \lambda I) = 0$. En este caso tenemos $0 \leq n(T) = n(T^*) = \gamma < \alpha$. Si $\gamma \leq \aleph_0$, entonces el resultado se sigue de las propiedades de espectro Weyl (usual).

Sea $\aleph_0 < \gamma < \alpha$. Supongamos que $T - \lambda I$ tiene rango cerrado. Sea i una isometría de $N(T - \lambda I)$ sobre $N((T - \lambda I)^*)$ (que son de la misma dimensión γ) y sea $K \in B(X)$ definida por:

$$K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(T-\lambda I) \\ R(T-\lambda I)^* \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} N(T-\lambda I)^* \\ R(T-\lambda I) \end{pmatrix}.$$

En la misma descomposición de H podemos presentar $T - \lambda I$ de la forma:

$$T - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(T-\lambda I) \\ R(T-\lambda I)^* \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} N(T-\lambda I)^* \\ R(T-\lambda I) \end{pmatrix},$$

donde $T_1 \in B(R(T-\lambda I)^*, R(T-\lambda I))$ es invertible. Vemos que el operador $T - \lambda I + K$ es invertible y $K \in \mathcal{F}_\alpha$.

Cuando $T - \lambda I$ es un operador α-Fredholm de rango no cerrado, de [18, Teorema 2.6], para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe un subespacio cerrado W_ϵ de H que contiene a $N(T - \lambda I)$ y $\|(T - \lambda I)y\| < \epsilon\|y\|$ para cualquier vector no-cero en W_ϵ. Más aún, $\|(T - \lambda I)y\| \geq \epsilon\|y\|$ para todo $y \in W_\epsilon^\perp$, $\dim W_\epsilon = d(T - \lambda I)$ y $\dim((T - \lambda I)W_\epsilon^\perp)^\perp = d((T - \lambda I)^*)$. También, de [8, Lema 4.8], $d(T-\lambda I) = d((T-\lambda I)^*)(= n(T-\lambda I) = n((T - \lambda)^*))$. Como $T - \lambda I$ es acotado por abajo en $W_\epsilon^\perp$, se sigue que $(T-\lambda I)(W_\epsilon^\perp)$ es un subespacio cerrado, y como $N(T-\lambda I) \subset W_\epsilon$, tenemos que $T_3 = (T - \lambda I)_{|W_\epsilon^\perp} : W_\epsilon^\perp \to (T - \lambda I)(W_\epsilon^\perp)$ es un operador invertible. Sea

$$T_\epsilon = \begin{pmatrix} Iso & 0 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} W_\epsilon \\ W_\epsilon^\perp \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ((T-\lambda I)W_\epsilon^\perp)^\perp \\ (T-\lambda I)W_\epsilon^\perp \end{pmatrix},$$

donde $Iso \in B(W_\epsilon, ((T - \lambda I)W_\epsilon^\perp)^\perp)$ es un isomorfismo arbitrario entre espacios (cerrado) γ-dimensional. Entonces T_ϵ es un operador invertible y $K_\epsilon = T_\epsilon - (T - \lambda I) \in \mathcal{F}_\alpha$. Para terminar la demostración, sea

$$T - \lambda I = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} W_\epsilon \\ W_\epsilon^\perp \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ((T-\lambda I)W_\epsilon^\perp)^\perp \\ (T-\lambda I)W_\epsilon^\perp \end{pmatrix},$$

entonces

$$K_\epsilon = \begin{pmatrix} Iso - T_1 & 0 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} W_\epsilon \\ W_\epsilon^\perp \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ((T-\lambda I)W_\epsilon^\perp)^\perp \\ (T-\lambda I)W_\epsilon^\perp \end{pmatrix}$$

y $R(K_\epsilon) \subset ((T-\lambda I)W_\epsilon^\perp)^\perp$, que implica $\dim R(K_\epsilon) \leq \dim((T-\lambda I)W_\epsilon^\perp)^\perp = \gamma < \alpha$. Luego $(T - \lambda I) + K_\epsilon = T_\epsilon$ es un operador invertible, es decir, $\lambda \notin \alpha\omega_1(T)$. ▲

Observación 3.3.1. Se tiene que

$$_{\aleph_0}\omega_1(T) = {}_{\aleph_0}\omega_2(T) = \omega(T).$$

Observación 3.3.2. (i) En lo que sigue utilizaremos la notación $\alpha\omega(T)$ para el espectro α-Weyl de T.

(ii) En el caso cuando $\aleph_0 < \alpha$, si modificamos un poco la demostración del Teorema 3.3.1 con la condición adicional $\|Iso\| \leq \epsilon$,vemos que un operador α-Weyl que no es invertible puede ser aproximado (en norma) con un operador invertible, es decir, éste pertenece a $\partial B^{-1}(H)$.

Sea $\aleph_0 \leq \alpha < h$, entonces podemos definir la familia de operadores α-Weyl, en notación $\Phi_\alpha^0(H)$, como:

$$\Phi_\alpha^0(H) = \{T \in B(H) : T \in \Phi_\alpha(H) \text{ e } \operatorname{ind}_\beta(T) = 0 \text{ para toda } \aleph_0 \leq \beta < \alpha\}.$$

Teorema 3.3.2. Sea T un operador sobre $B(H)$ y sea α un número cardinal tal que $\aleph_0 \leq \alpha < h$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $T \in \Phi_\alpha^0(H)$;

(ii) $n(T) = n(T^*) < \alpha$ y $R(T)$ es α-cerrado;

(iii) $d(T) = d(T^*) < \alpha$.

Demostración: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) se sigue directamente de la definición de operador α-Fredholm y de la definición de $\operatorname{ind}_\beta(T)$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) se sigue de [18, Teorema 2.6] y [8, Teorema 3.1 y Lema 4.8]. ▲

Observación 3.3.3. Cualquiera de las condiciones equivalentes (i)-(iii) del Teorema 3.3.2 implica que existe un subespacio cerrado M y N de H tal que $M \cap N(T) = \{0\}$, $N \subset R(T)$ y $\dim M^\perp = \dim N^\perp = \gamma < \alpha$. Efectivamente, sea $d(T) = d(T^*)(= \gamma < \alpha)$. Entonces, de [8, p. 221], existe un $\epsilon_0 > 0$ tal que $d_\epsilon(T) = d(T) = d(T^*) = d_\epsilon(T^*)$ para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$. Para algún $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ fijo, sea $M = H_\epsilon$ de la definición de d_ϵ para T y N definimos de forma similar, utilizando sólo el operador T^*.

Teorema 3.3.3. Sea T un operador sobre $B(H)$ y sea α un número cardinal tal que $\aleph_0 \leq \alpha < h$.

(i) $\Phi_\alpha^0(H)$ es abierto.

(ii) Si $T, S \in \Phi_\alpha^0(H)$, entonces $TS \in \Phi_\alpha^0(H)$.

(iii) Si $T \in \Phi_\alpha^0(H)$ y $K \in \mathcal{F}_\alpha$, entonces $T + K \in \Phi_\alpha^0(H)$.

Demostración: (i) Sea $T \in \Phi_\alpha^0(H)$. Por el Teorema 3.3.2 (iii), $d(T) = d(T^*) < \alpha$ y para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe un subespacio cerrado H_ϵ tal que

$$\|Tx\| < \epsilon\|x\|, \text{ para toda } x \in H_\epsilon \setminus \{0\}, \; N(T) \subset H_\epsilon, \; \|Tx\| \geq \epsilon\|x\|,$$

para toda $x \in H_\epsilon^\perp$ y

$$N(T^*) \subset (T(H_\epsilon^\perp))^\perp, \; \|T^*x\| < \epsilon\|x\|, \text{ para toda } x \in (T(H_\epsilon^\perp))^\perp \setminus \{0\}, \text{ y}$$

$$\|T^*x\| \geq \epsilon\|x\|, \text{ para toda } x \in T(H_\epsilon^\perp).$$

Más aún, $\dim H_\epsilon = d(T) = d(T^*) = \dim(T(H_\epsilon^\perp))^\perp < \alpha$, donde $T(H_\epsilon^\perp)$ es un subespacio cerrado de H. (Para más detalles [8, p. 220-221]).

Sea $S \in B(H)$ tal que $\|T - S\| < \epsilon/2$. Supongamos que existe un $x \in N(S) \cap H_\epsilon^\perp$ no-cero. Entonces $\|Tx\| \leq \|(T-S)x\| \leq \frac{\epsilon}{2}\|x\|$, que contradice con la selección del subespacio H_ϵ. Luego, $N(S) \subset H_\epsilon$ y $n(S) < \alpha$. También, por $N(S^*) \subset (T(H_\epsilon^\perp))^\perp$, tenemos $n(S^*) < \dim(T(H_\epsilon^\perp))^\perp < \alpha$.

Más aún, S es acotado por abajo sobre $H_\epsilon^\perp$,

$$\|Sx\| \geq |\, \|Tx\| - \|(T-S)x\| \,| \geq \frac{\epsilon}{2}\|x\|,$$

que implica $S(H_\epsilon^\perp)$ es un subespacio cerrado contenido en $R(S)$. Utilizando la representación matricial de S con respecto a la descomposición $H = H_\epsilon \oplus H_\epsilon^\perp$ y $H = (S(H_\epsilon^\perp))^\perp \oplus S(H_\epsilon^\perp)$, obtenemos $(S(H_\epsilon^\perp))^\perp \cap R(S) \subset S(H_\epsilon)$ y $\dim(S(H_\epsilon^\perp))^\perp \cap R(S)) < \alpha$, que implica que $R(S)$ es un subespacio α-cerrado.

Luego para todo $S \in B(H)$ tal que $\|T - S\| < \epsilon/2$, $R(S)$ es un subespacio α-cerrado y $n(T) = n(T^*) < \alpha$, es decir, $S \in \Phi_\alpha^0(H)$.

(ii) Sea $T, S \in \Phi_\alpha^0(H)$, entonces $0 \notin \alpha\omega(T) \cup \alpha\omega(S)$. Del Teorema 3.3.1, existe un $K_1, K_2 \in \mathcal{F}_\alpha$ tal que $T + K_1, S + K_2 \in B(H)^{-1}$. Entonces,

$$B(H)^{-1} \ni (T + K_1)(S + K_2) = TS + (TK_2 + K_1S + K_1K_2) \text{ y}$$

$$TK_2 + K_1S + K_1K_2 \in \mathcal{F}_\alpha,$$

es decir, $TS \in \Phi_\alpha^0(H)$.

(iii) Del Teorema 3.3.1 y [11, Corolario 1] (véase [35, Teorema 3]). ▲

3.4. Operadores Weyl generalizados

Sean ϑ y α números cardinales tales que $\aleph_0 \leq \vartheta < \alpha < h$. De [20, Observación 3.2], tenemos que $\Phi_\vartheta(H) \subset \Phi_\alpha(H)$. Más aún, si para algún $T \in \Phi_\vartheta(H)$, $\operatorname{ind}_\beta(T) = 0$ para todo $\aleph_0 \leq \beta < \vartheta$, entonces $\operatorname{ind}_\beta(T) = 0$ para todo $\vartheta \leq \beta < \alpha$, es decir, $\Phi^0_\vartheta(H) \subset \Phi^0_\alpha(H)$.

Definición 3.4.1. El conjunto de los operadores Weyl generalizados, en notación $\Phi^0_g(H)$, es

$$\Phi^0_g(H) = \cup_{\aleph_0 \leq \alpha < h} \Phi^0_\alpha(H).$$

En [14], D. S. Djordjević definió la clase de operadores Weyl generalizados como

$$\Phi^g_0(H) = \{T \in B(H) \,:\, R(T) \text{ es cerrado y } n(T) = n(T^*)\}.$$

Como un subespacio cerrado en H es α-cerrado para todo cardinal α, $1 \leq \alpha < h$, y $n(T) = n(T^*)$ implica que $\operatorname{ind}_\beta(T) = 0$, tenemos que $\Phi^g_0(H) \subset \Phi^0_g(H)$. Además de eso, las propiedades de $\Phi^0_g(H)$ son más similares a $\Phi_0(H)$ que las de $\Phi^g_0(H)$. El conjunto $\Phi^g_0(H)$ no es abierto, pero, por el Teorema 3.3.3, el conjunto $\Phi^0_g(H)$ es abierto (como $\Phi_0(H)$). De forma análoga, el conjunto $\Phi^g_0(H)$ es cerrado con respecto a la composición de operadores (del Teorema 3.3.3 (ii)) y perturbaciones de compactos. Luego, tenemos el siguiente teorema que generaliza los resultados de [14].

Teorema 3.4.1. (i) Si $T, S \in \Phi^0_g(H)$, entonces $TS \in \Phi^0_g(H)$.
(ii) Si $T \in \Phi^0_g(H)$ y $K \in K(H)$, entonces $T + K \in \Phi^0_g(H)$.
(iii) $\Phi^0_g(H)$ es abierto en $B(H)$.

Conclusiones

- En el Capítulo 1 aportamos las bases para los Capítulos 2 y 3.
- En el Capítulo 2:

  (1) Se presenta un ejemplo de operadores α-Fredhom con el cual, además, mostramos que existen operadores α-Fredholm que no son Fredholm.

  (2) Se demuestra que el conjunto de operadores α-Fredholm ($\Phi_\alpha(H)$) es un conjunto abierto en $B(H)$.

  (3) Se plantea un resultado interesante: para T, S operadores en $B(H)$ tales que $TS \in \Phi_\alpha(H)$ y $R(T)$ α-cerrado, T es semi α-Fredholm inferior y S es semi α-Fredholm superior.

  (4) Se demuestra también que para α_1 y α_2 números cardinales tales que $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < h$ ($h = \dim H$), $\Phi_{\alpha_1}(H) \subseteq \Phi_{\alpha_2}(H)$.

  (5) Se presenta un ejemplo en el que se demuestra que la contención del resultado (4) es estricta.

  (6) Otro resultado importante de este trabajo de investigación es el siguiente: para un número cardinal α tal que $\aleph_0 \leq \alpha$ y para un operador $T \in \Phi_\alpha(H)$ y $K \in \mathcal{F}_\alpha$, se tiene que $T + K$ es también α-Fredholm.

  (7) También, para dos operadores S y T en $B(H)$ se tiene que si $TS \in \Phi_\alpha(H)$, entonces $T \in \Phi_\alpha(H)$ si y sólo si $S \in \Phi_\alpha(H)$.

  (8) Se aporta la siguiente propiedad: dados dos operadores S y T tales que $TS \in \Phi_\alpha$ y $\dim Ker(T) < \alpha$, entonces $S, T \in \Phi_\alpha(H)$.

  (9) Se constata también que dados dos operadores S y T tales que $TS \in \Phi_\alpha$, $R(S)$ α-cerrado y $\dim R(S)^\perp < \alpha$, entonces $S, T \in \Phi_\alpha(H)$.

(10) Se obtiene el resultado: Para dos operadores $S, T \in B(H)$ se demuestra que $ST \in \Phi_\alpha(H)$, $n(S) < \alpha$ y $R(S)$ es α-cerrado si y sólo si $ST \in \Phi_\alpha(H)$, $d(S) < \alpha$ si y sólo si $S, T \in \Phi_\alpha(H)$.

(11) Se demuestra también que el espectro α-Fredholm es una función semi continua superior en $B(H)$.

(12) Otro resultado: en un espacio de Hilbert H, $\Phi(H) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n(H)$.

(13) También, para $T \in B(H)$, $\sigma_e(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma_n(T)$.

(14) Se demuestra también que en un espacio de Hilbert H, $\dim H = h$ tal que $\aleph_0 < \alpha \leq h$, entonces $\Phi(H) \subseteq \bigcap_{\aleph_0 < \alpha \leq h} \Phi_\alpha(H)$.

(15) Como consecuencia del resultado (14) se tiene, para $T \in B(H)$, $\sigma_e(T) \supseteq \bigcup_{\aleph_0 < \alpha \leq h} \sigma_\alpha(T)$.

(16) Estudiando la teoría de las regularidades, desarrollada por V. Kordula y V. Müller en 1996, se demuestra que el conjunto de operadores α-Fredholm es una regularidad, lo que permite la generalización del teorema de la transformación espectral para todas las funciones analíticas y no sólo para polinomios como lo hizo P. Dharmara.

- En el Capítulo 3:

(17) Se analizan los trabajos de L. A. Coburn, M. Schechter, S. K. Berberian, Yadav, Arora y L. Burlando, lo que permite extender la definición de índice para todo $< \alpha$ como

$$\operatorname{ind}_\beta(T) = \begin{cases} n(T) - n(T^*), & \text{si } \beta = \aleph_0 \text{ o } \beta > \aleph_0 \\ & \quad \text{y } \max\{n(T), n(T^*)\} \geq \beta; \\ 0, & \text{si } \beta > \aleph_0 \\ & \quad \text{y } \max\{n(T), n(T^*)\} < \beta. \end{cases}$$

(18) Dicho índice permite forjar la definición siguiente: Dado un operador $T \in B(H)$, decimos que éste es un operador α-Weyl para algún cardinal α, $\aleph_0 \leq \alpha < h$, si T es un operador α-Fredholm con $\operatorname{ind}_\beta(T) = 0$ para todo cardinal β, $\aleph_0 \leq \beta < \alpha$.

(19) También, se define el espectro α-Weyl de la siguiente manera:

$$\alpha\omega_2(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \text{ no es un operador } \alpha\text{-Weyl}\}$$

$= \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \sigma_\alpha(T)$ o ind$_\beta(T-\lambda) \neq 0$ para algún β, $\aleph_0 \leq \beta < \alpha\}$.

(20) Otro resultado que se obtiene: El espectro α-Weyl de peso α que Yadav y Arora definieron ($\alpha\omega_1(T) = \bigcap_{K\in\mathcal{F}_\alpha} \sigma(T+K)$) y el espectro $\alpha\omega_2(T)$ que nosotros definimos son equivalentes para $T \in B(H)$ y α un número cardinal tal que $\aleph_0 \leq \alpha < h$.

(21) Se define la familia de operadores α-Weyl como:
$\Phi^0_\alpha(H) =$
$\{T \in B(H) : T \in \Phi_\alpha(H)$ y ind$_\beta(T) = 0$ para toda $\aleph_0 \leq \beta < \alpha\}$.
Por consiguiente, se obtiene que para T un operador sobre $B(H)$ y para un número cardinal α tal que $\aleph_0 \leq \alpha < h$, las siguientes condiciones son equivalentes:
(i) $T \in \Phi^0_\alpha(H)$;
(ii) $n(T) = n(T^*) < \alpha$ y $R(T)$ es α-cerrado;
(iii) $d(T) = d(T^*) < \alpha$.

(22) Se obtiene también: para T un operador sobre $B(H)$ y un número cardinal α tal que $\aleph_0 \leq \alpha < h$,
(i) $\Phi^0_\alpha(H)$ es abierto en $B(H)$.
(ii) Si $T, S \in \Phi^0_\alpha(H)$, entonces $TS \in \Phi^0_\alpha(H)$.
(iii) Si $T \in \Phi^0_\alpha(H)$ y $K \in \mathcal{F}_\alpha$, entonces $T + K \in \Phi^0_\alpha(H)$.

(23) Se define el conjunto de los operadores Weyl generalizados, en notación $\Phi^0_g(H)$, como

$$\Phi^0_g(H) = \cup_{\aleph_0 \leq \alpha < h} \Phi^0_\alpha(H).$$

Con lo que se obtiene el resultado:
(i) Si $T, S \in \Phi^0_g(H)$, entonces $TS \in \Phi^0_g(H)$.
(ii) Si $T \in \Phi^0_g(H)$ y $K \in K(H)$, entonces $T + K \in \Phi^0_g(H)$.
(iii) $\Phi^0_g(H)$ es abierto en $B(H)$.

Estos resultados son parte de dos artículos: el primero "α-Fredholm spectrum of Hilbert space operators"(publicado en The Journal of the Indian Mathematical Society) y el segundo "On α-Weyl operatos"(publicado en Advances in Pure Mathematics).

El trabajo no termina con dichos resultados; se abre una nueva brecha para una investigación, ya que la teoría de los operadores α-Fredholm tiene mucho por analizar; también, la teoría de los operadores α-Weyl nos da la pauta para seguir analizando y obtener nuevos resultados importantes.

Queda también, para futuros trabajos, analizar si se puede generalizar la teoría de los operadores de Browder en espacios de Hilbert no separables; si se puede dar una definición de operadores α-Browder.

Bibliografía

[1] P. Aiena, *Fredholm and Local Spectral Theory with Applications to Multipliers*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2004.

[2] S. C. Arora and P. Arora, *On operators satisfying* $Re\sigma_\alpha(T) = \sigma_\alpha(ReT)$, Journal of Indian Mathematical Society, 48 (1984), 201-204.

[3] S. C. Arora and P. Dharmarha, *A generalization of the joint essential spectrum*, The Mathematics Student 52, No. 1-4 (1984), 25-28.

[4] S. C. Arora and P. Dharmarha, *Weighted Weyl spectrum II*, Bull. of Korean Mathematical Society 43 (2006), No. 4, 715-722.

[5] S. C. Arora and P. Dharmarha, *Operators satisfying* $Re\sigma_\alpha(T) = \sigma_\alpha(ReT)$, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Bulgaria, Vol. 2 (2007), 197-202.

[6] S. C. Arora and P. Dharmarha, *On joint weighted spectrum*, Bull. Cal. Math. Soc., 99, (5)(2007), 539-546.

[7] S. Berberian, *The Weyl spectrum of an operator*, Indiana Univ. Math. J. 20 (1971), 529-544.

[8] L. Burlando, *Approximation by semi-Fredholm and semi-α-Fredholm operators in Hilbert spaces of arbitrary dimension*, Acta Sci. Math (Szeged) 65/1-2 (1999), 217-275

[9] S. R. Caradus, W. E. Pfaffenberger, B. Yood, *Calkin Algebras and Algebras of Operators on Banach Spaces*, Marcel Dekker, Inc. New York, 1974.

[10] L. A. Coburn, *Weyl's theorem for nonnormal operators*, Michigan Math. J. 13 (3) (1966), 285-288.

[11] L. A. Coburn and A. Lebow, *Components of Invertible Elements in Quotient Algebras of Operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 359-365.

[12] P. Dharmarha, *A Study of Weighted Weyl Spectra of Operators*, Department of Mathematics University of Delhi, India, 2009.

[13] P. Dharmarha, *Weighted Weyl spectrum*, Ganita, Vol. 58, No. 1(2007), 67-74.

[14] D. S. Djordjevic, *On generalized Weyl operators*, Proc. American Math. Soc., Vol. 130, No. 1, (2001), 81-84.

[15] D. S. Djordjevic and V. S. Djordjevic, *On the a-Weyl's theorem*, Rev. Roumaine Math. Pures. Appl. 44(3) (1999), 361-369.

[16] B. P. Duggal and V. S. Djordjevic, *Weyl's theorems and continuity of the spectra in the class of p-hyponormal operators*, Studia Math., 143, No. 1, (2000), 23-32.

[17] S. V. Djordjeviv and H. D. Fernando, *On α-Weyl operators*

[18] G. Edgar, J. Ernest and S. G. Lee, *Weighing operator spectra*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 21, No. 1 (1972), 61-80.

[19] J. Ernest, *Left invertibility of closed operators modulo an α-compact operator*, Tôhoku Math. Journ., 24(1972), 529-537.

[20] F. Hernández-Díaz and S.V. Djordjević, *α-Fredholm spectrum of Hilbert space operators*, aceptado.

[21] H. G. Heuser, *Functional Analysis*, John Wiley & Sons, United States of America, 1982.

[22] V. Kordula and V. Müller, *On the axiomatic theory of spectrum*, Studia Math. 119 (1996), 109-128.

[23] C. S. Kubrusly, *Elements of Operator Theory*, Birkhäuser, Boston, 2001.

[24] W. Y. Lee, *Lecture Notes on Operator Theory*, Seoul National University, Seoul Korea, Spring 2008.

[25] E. Luft, *The two-sided closed ideals of the algebra of bounded linear operators of a Hilbert space*, Czechoslovak Mathematical Journal, 18 (4) (1968), 595-605.

[26] V. Müller, *Spectral Theory of Linear Operators: and Spectral Systems in Banach Algebras*, (Operator Theory: Advances and Applications 139), Birkhäuser Basel, 2007.

[27] J. Ortega, *Ecuaciones integrales*, Publicaciones Matematiques, Vol. 6(1) (1977), 17-36.

[28] A. Pietsch, *History of Banach Spaces and Linear Operators*, Birkhäuser, Boston, 2007.

[29] M. Reed and B. Simons, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press, New York, 1980.

[30] B. P. Rynne and M. A. Youngson, *Linear Functional Analysis*, Springer, Great Britain, 1958.

[31] M. Schechter, *Invariance of the essential spectrum*, Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), 365-367.

[32] M. Schechter, *Principles of Functional Analysis*, Academic Press, Inc. United States of America, 1971.

[33] V. S. Sunder, *Functional Analysis Spectral Theory*, Birkhäuser, 1998.

[34] C. S. Weitz, *Regularities in Banach Algebras*, University of Johannesburg, Johannesburg, 2008.

[35] B. S. Yadav and S. C. Arora, *A generalization of Weyl's Spectrum*, Glasnik Mathematici, Vol. 15 (35), (1980), 315-319.