Benemérita Universidad Autónoma
de Puebla

Facultad de Ciencias
Físico-Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

# Inversión puntual de la transformada de Fourier para funciones de variación acotada no Lebesgue integrables sobre $\mathbb{R}^2$

TESIS

que para obtener el título de:

Doctor en Ciencias Matemáticas

presenta:

Edgar Torres Teutle

Directores de tesis:

Dr. F. Javier Mendoza Torres
Dra. M. Guadalupe Morales Macías

Puebla, Puebla. 2024

*Dedicado a*
*mis padres y hermanos*

# Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres José Felipe y María por siempre apoyarme en lo que deseo emprender, este logro es uno más en el que ustedes son parte importante. Y por supuesto a mis hermanos Ricardo, Andrea y Julio.

A mis sinodales Dr. Slavisa Djordjević, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, Dr. Gabriel Kantún Montiel, Dr. Carlos Guillén Galván, Dr. Moisés Soto Bajo, Dr. Oswaldo Flores Medina, Dr. Juan Héctor Arredondo Ruiz y a mi asesores Dr. Francisco Javier Mendoza Torres y Dra. María Guadalupe Morales Macías por sus valiosas observaciones para mejorar este trabajo de tesis.

Gracias a CONAHCYT por el apoyo económico.

# Índice General

**Agradecimientos** **V**

**1. Introducción** **1**

**2. Prerrequisitos** **5**
2.1. Integral de Riemann-Stieltjes . . . . . 5
2.1.1. Definiciones . . . . . 5
2.1.2. Propiedades de la Integral de Riemann-Stieltjes . . . . . 6
2.2. Función de Variación Acotada sobre $\mathbb{R}^2$ . . . . . 8
2.2.1. Propiedades de las Funciones de Variación Acotada . . . . 8
2.3. Integral Impropia de Riemann-Stieltjes . . . . . 12
2.3.1. Propiedades de la Integral Impropia de Riemann-Stieltjes 12
2.4. Convergencia Uniforme en un Punto . . . . . 16
2.5. Sucesiones (L) . . . . . 16
2.5.1. Propiedades de las Sucesiones (L) . . . . . 17

**3. Teorema de Dirichlet-Jordan sobre $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$** **19**
3.1. Espacio $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ . . . . . 19
3.1.1. Propiedades de las funciones en $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ . . . . . 19
3.2. Integral de Henstock-Kurzweil . . . . . 23
3.2.1. Teorema del Multiplicador sobre $HK_{loc}(\mathbb{R}^2)$ . . . . . 24
3.3. La Transformada de KP-Fourier . . . . . 29
3.3.1. Propiedades de la Transformada de KP-Fourier sobre $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ 30
3.4. Teorema de Dirichlet-Jordan sobre $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ . . . . . 36
3.5. Inversión Uniforme de la Transformada de KP-Fourier . . . . . 37

**4. Conclusiones** **45**

**Bibliografía** **47**

# Capítulo 1

# Introducción

La transformada de Fourier es un concepto clásico del Análisis Matemático, cuyo origen proviene de las investigaciones de Bernoulli, D'Alembert, Lagrange y Euler, alrededor del año 1740, en el campo de la Física-Matemática. De sus estudios, obtuvieron series asociadas a las ecuaciones involucradas en este campo. Posteriormente, con la intervención de Fourier se fijaron las bases para definir las series de Fourier, las cuales están relacionadas con la transformada que ahora lleva su nombre. Ambos conceptos son los cimientos del desarrollo y evolución del área que actualmente se conoce como Análisis de Fourier. Esta rama de las matemáticas tiene amplias e importantes aplicaciones en otras ciencias, como por ejemplo en la Óptica, la Astronomía, el Reconocimiento de Patrones, la Teoría de Señales, la Medicina, etc. [3, 8, 9, 25].

La **transformada de Fourier** de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), en $t \in \mathbb{R}$, se define como

$$\mathcal{F}(f)(t) = \widehat{f}\,(t) := \int_{\mathbb{R}} f\,(u)\, e^{-itu}\, du, \tag{1.1}$$

cuando $f\,(\cdot)\, e^{-i(\cdot)t}$ es integrable en algún sentido sobre $\mathbb{R}$. Esta transformada en el contexto de la integral de Lebesgue ha sido ampliamente estudiada para funciones en $L^1(\mathbb{R})$, y se garantiza su existencia para toda $t \in \mathbb{R}$, véase [3, 8]. Sin embargo, tal propiedad no se asegura sobre un espacio distinto de $L^1(\mathbb{R})$, por ejemplo, en los espacios $L^p(\mathbb{R})$, con $1 < p \leq 2$, o en el espacio de funciones de variación acotada sobre $\mathbb{R}$ que se desvanecen en el infinito denotado por $BV_0(\mathbb{R})$, [16, 23].

Empleando teorías modernas de integración es posible definir una transformada con dominio igual a $BV_0(\mathbb{R})$, véase [23]. Una integral que nos permite hacer esto es la de Henstock-Kurzweil, la cual fue introducida, separadamente, por Jaroslav Kurzweil y Ralp Henstock a finales de la década de 1950. El operador que se obtiene al usar la integral de Henstock-Kurzweil en (1) es la **transformada de HK-Fourier**, término empleado en 2002 por Erik Talvila

[23], y denotada como $\mathcal{F}_{HK}$.

En algunas aplicaciones del Análisis de Fourier se conoce la transformada de una función y se busca recuperar la función misma, véase [25]. Esto se considera como un problema de inversión o inversión puntual si sólo se desea conocer el valor de la función en ciertos puntos. El **teorema de Dirichlet-Jordan** resuelve el problema de inversión puntual sobre $L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$, el cual afirma lo siguiente.

**Teorema 1. [24, Teo. 23]** *Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$, entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi}(L)\int_M^M \widehat{f}(\omega)e^{ix\omega}d\omega = \frac{1}{2}\{f(x+) + f(x-)\}. \tag{1.2}$$

El símbolo $(L)$ que aparece es para señalar la integración en el sentido de Lebesgue.

En el 2004, Ferenc Móricz publicó un resultado que muestra que la convergencia en (1.2) del Teorema 1 es localmente uniforme en puntos de continuidad de la función, ver Definición 2.4.1. El enunciado de dicho resultado es el siguiente.

**Teorema 2.[17, Cor. 3]** *Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$, y $x \in \mathbb{R}$ es un punto de continuidad de $f$, entonces la convergencia en* (1.2) *es uniforme en $x$. Además, si $f$ es continua sobre $[a, b]$, entonces la convergencia en* (1.2) *es uniforme sobre el intervalo $[a, b]$.*

Por otra parte, se sabe que $L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}) \subseteq BV_0(\mathbb{R})$, $BV(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ y que la integral de Henstock-Kurzweil generaliza a la de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$, además los valores de las integrales coinciden para funciones en $L^1(\mathbb{R})$, véase [4]. Por ende, el resultado que sigue extiende al Teorema 1.

**Teorema 3.[13, Teo. 3.7]** *Si $f \in BV_0(\mathbb{R})$, entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{\substack{\beta\to\infty \\ \alpha\to 0}} \frac{1}{2\pi}(HK)\int_{\alpha\le|t|\le\beta} \mathcal{F}_{HK}(f)(t)e^{ixt}dt = \frac{1}{2}\{f(x+) + f(x-)\}. \tag{1.3}$$

El símbolo $(HK)$ indica la integración en el sentido de Henstock-Kurzweil.

Una versión del teorema anterior fue probado por M. Riesz y A. E. Livingston [20] sin precisar algunas propiedades empleadas. En el 2020 se generaliza el Teorema 2 sobre el espacio $BV_0(\mathbb{R})$ como se muestra a continuación.

**Teorema 4.[14, Teo. 4.3]** *Si $f \in BV_0(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$ es un punto de continuidad de $f$, entonces la convergencia en* (1.3) *es uniforme en $x$. Además, si $f$ es continua sobre $[a, b]$, entonces la convergencia en* (1.3) *es uniforme sobre $[a, b]$.*

El problema de inversión puntual de la transformada de Fourier se puede trasladar a funciones de varias variables. Para abordar este problema comenzamos por definir la transformada de Fourier para funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), en $u \in \mathbb{R}^n$, como

$$\widehat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(v)e^{-i<u,v>}dv,$$

cuando $f(\cdot)e^{-i<\cdot,v>}$ es integrable en algún sentido sobre $\mathbb{R}^n$. El símbolo $< \cdot, \cdot >$ representa el producto escalar.

Para funciones de varias variables hay diferentes conceptos de variación acotada, algunos de estos fueron definidos por Arzelá, Fréchet, Tonelli, Vitali y Hardy, véase [1]. En este trabajo solo consideramos los espacios de funciones de variación acotada en el sentido de Vitali y de Hardy sobre $\mathbb{R}^2$, los cuales se denotan como $BV_V(\mathbb{R}^2)$ y $BV_H(\mathbb{R}^2)$, respectivamente.

Para obtener un resultado análogo al Teorema 2, pero ahora para funciones de dos variables, tomamos como referencia el artículo "On the convergence of double Fourier integrals of functions of bounded variation on $\mathbb{R}^2$" de B. L. Ghodadra y V. Fülop, ver [10], que a la vez está basado en el trabajo "Pointwise convergence of double Fourier integrals of functions of bounded variation over $\mathbb{R}^2$" de F. Móricz, véase [18], puesto que partió de ideas similares presentadas en los resultados auxiliares y en la prueba del Teorema 2. Así que la extensión al caso bidimensional se muestra a continuación.

**Teorema 5.[10]** *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap BV_H(\mathbb{R}^2)$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es un punto de continuidad de $f$, entonces el límite*

$$\lim_{\substack{u\to\infty \\ v\to\infty}} \frac{1}{4\pi^2}(L) \int_{|s|\leq u} \int_{|t|\leq v} e^{-i(xs+yt)} \widehat{f}(s,t)dsdt = f(x,y) \tag{1.4}$$

*es uniforme en $(x, y)$.*

Siguiendo la línea de estudio que previamente se expuso del caso unidimensional, esta tesis tiene como objetivo establecer condiciones específicas que permitan obtener teoremas de inversión puntual, análogos al Teorema 5, para funciones de dos variables y de variación acotada pero que no necesariamente sean Lebesgue integrables, tal como se hizo en los Teoremas 3 y 4. Para ello, se analiza un espacio, compuesto de funciones de variación acotada en el sentido de Vitali no necesariamente absolutamente integrables, sobre el cual la transformada de Fourier esta definida c. d.. El espacio con tales características es la colección de funciones en $BV_V(\mathbb{R}^2)$ con la propiedad que se desvanecan en el infinito, a este lo denotamos como $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$, ver Definición 3.1.1. Además, se demuestra en la expresión (3.4) la siguiente relación de contención

$$L^1(\mathbb{R}^2) \cap BV_H(\mathbb{R}^2) \subsetneq BV_{||0||}(\mathbb{R}^2).$$

De manera que, atendiendo a nuestro objetivo planteado, los resultados principales de este trabajo de tesis los mostramos en seguida. Para $0 < \alpha_i < \beta_i < \infty$ con $i = 1, 2$, denotamos

$$R_{\alpha_1,\alpha_2}^{\beta_1,\beta_2} = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha_1 \leq |\xi| \leq \beta_1,\ \alpha_2 \leq |\eta| \leq \beta_2\}.$$

**Teorema.** *Sean $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ y $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq 0$, $y \neq 0$. Entonces,*

$$\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \to 0 \\ \beta_1,\beta_2 \to \infty}} \iint\limits_{R_{\alpha_1,\alpha_2}^{\beta_1,\beta_2}} \mathcal{F}(f)(\varepsilon,\eta) e^{i(x\varepsilon+y\eta)} d(\varepsilon,\eta)$$
$$= \frac{f(x+,y+) + f(x+,y-) + f(x-,y+) + f(x-,y-)}{4}.$$

**Teorema.** *Sea $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$. Entonces, el límite*

$$\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \to 0 \\ \beta_1,\beta_2 \to \infty}} \iint\limits_{R_{\alpha_1,\alpha_2}^{\beta_1,\beta_2}} \mathcal{F}(f)(\varepsilon,\eta) e^{i(x\varepsilon+y\eta)} d(\varepsilon,\eta) = f(x,y)$$

*converge uniformemente en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ un punto de continuidad de $f$.*

Para obtener los teoremas anteriores se tuvo necesidad de conjeturar y probar algunas proposiciones, lemas y teoremas los cuales, principalmente, se presentan en el Capítulo 3.

# Capítulo 2

# Prerrequisitos

## 2.1. Integral de Riemann-Stieltjes

En esta sección se pueden encontrar definiciones y resultados conocidos que son estudiados tanto en libros como en artículos, algunos se encuentran en [1], [2] y [18].

### 2.1.1. Definiciones

Para lo siguiente, sea $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo compacto de $\mathbb{R}^2$.

**Definición 2.1.1.** *Sea $P = \{R_i\}$ una colección finita de subrectángulos de $R$. Se dice que $P$ es una partición de $R$, si*

- $\bigcup_i R_i = R$.
- $int(R_i) \cap int(R_j) = \emptyset$, *cuando* $i \neq j$.

**Definición 2.1.2.** *La colección de las particiones $P = \{R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \mid a = x_0 < ... < x_n = b \text{ y } c = y_0 < ... < y_m = d\}$ de $R$ se denota como $\mathcal{P}(R)$. La norma de $P = \{R_{i,j}\} \in \mathcal{P}(R)$ se define como*

$$||P|| = \text{máx}\{D_{i,j}\}, \tag{2.1}$$

*donde $D_{i,j}$ es la longitud de la diagonal de $R_{i,j}$.*

**Definición 2.1.3.** *Sean $f, g : R \to \mathbb{R}$ funciones. Se dice que $g$ es **Riemann-Stieltjes integrable con respecto a $f$ sobre** $R$, si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ de modo que si $P = \{R_{i,j}\} \in \mathcal{P}(R)$ con $||P|| < \delta_\varepsilon$ y $(\eta_{i,j}, \tau_{i,j}) \in R_{i,j}$, entonces*

$$|S(g, f, P) - A| < \varepsilon,$$

*donde*

$$\Delta f(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j) - f(x_i, y_{j-1}) + f(x_{i-1}, y_{j-1})$$

*y*

$$S(g, f, P) = \sum_i \sum_j g(\eta_{i,j}, \tau_{i,j}) \Delta f(x_i, y_j).$$

*El número $A$ es el valor de la integral y se denota como*

$$A = \iint_R g df = \iint_R g(t_1, t_1)\, df(t_1, t_2).$$

*Además, el espacio $RS(f, R)$ es el de las funciones Riemann-Stieltjes integrables con respecto a $f$ sobre $R$.*

**Observación 2.1.1.**

1) *La norma en (2.1) es equivalente a la norma*

$$||P||_1 = \text{máx}\{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1}\},$$

*ver [10, pág. 296], debido a que*

$$||P||_1 \leq ||P|| \leq \sqrt{2} \cdot ||P||_1.$$

*Por ende, las integrales de Riemann-Stieltjes definidas con cada una son iguales.*

2) *La integral de Riemann-Stieltjes de una función a valores complejos $g$ con respecto a una función a valores reales $f$ es la suma de las integrales de la parte real e imaginaria de $g$ cada una con respecto a $f$.*

### 2.1.2. Propiedades de la Integral de Riemann-Stieltjes

En seguida se presentan algunos resultados relevantes de esta integral.

**Teorema 2.1.1.** *Sean $g, f : R \to \mathbb{R}$ funciones. Son equivalentes las siguientes proposiciones:*

1) *$g$ es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a $f$ sobre $R$ y su integral es $A$.*

2) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $P$ y $Q$ particiones de $R$ tales que $||P|| < \delta$ y $||Q|| < \delta$, entonces*

$$|S(g, f, P) - S(g, f, Q)| < \varepsilon.$$

3) *Para toda $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de particiones de $R$ tal que $\lim_{n\to\infty} ||P_n|| = 0$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} S(f, g, P_n) = A.$$

*Demostración.* La prueba es inmediata de la Definición 2.1.3.

□

**Definición 2.1.4.** *Sean $f, g : R \to \mathbb{R}$ funciones y $Q \subseteq R$ un subrectángulo. Definamos*

$$w(g, f, Q) = \sup_{P,P' \in \mathcal{P}(Q)} \left\{ \left| S(g, f, P) - S(g, f, P') \right| \right\} \in [0, \infty].$$

**Teorema 2.1.2.** *Sean $f, g : R \to \mathbb{R}$ funciones. Si $g \in RS(f, R)$, entonces*

$$\left| \iint_R g df - S(g, f, P) \right| \leq \sum_i \sum_j w(g, f, R_{i,j}),$$

*para cualquier partición $P = \{R_{i,j}\}$ de $R$.*

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $Q$ es una partición de $R$ con $||Q|| < \delta_\varepsilon$, entonces

$$\left| S(g, f, Q) - \iint_R g df \right| < \varepsilon.$$

Sea $P = \{R_{i,j}\}$ una partición de $R$ con $\overline{x}_{i,j} \in R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Sea $Q$ una partición más fina que $P$ y satisface que $||Q|| < \delta_\varepsilon$. Entonces, $Q = \cup_i \cup_j Q_{i,j}$ donde $Q_{i,j}$ es partición de $R_{i,j}$. Así,

$$\begin{aligned}
\left| \iint_R g df - S(g, f, P) \right| &= \left| \iint_R g df - S(g, f, Q) \right| + |S(g, f, Q) - S(g, f, P)| \\
&< \varepsilon + \left| \sum_i \sum_j S(g, f, Q_{i,j}) - \sum_i \sum_j g(\overline{x}_{i,j}) \Delta f(x_i, y_j) \right| \\
&\leq \varepsilon + \sum_i \sum_j |S(g, f, Q_{i,j}) - g(\overline{x}_{i,j}) \Delta f(x_i, y_j)| \\
&\leq \varepsilon + \sum_i \sum_j w(g, f, R_{i,j}).
\end{aligned}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se obtiene

$$\left| \iint_R g df - S(g, f, P) \right| \leq \sum_i \sum_j w(g, f, R_{i,j}).$$

□

En el resultado anterior, considerando la partición trivial del un subrectángulo de $R$ queda como sigue.

**Corolario 2.1.1.** *Sean $f, g : R \to \mathbb{R}$ funciones. Si $g \in RS(f, R)$, entonces*

$$\left| \iint_{R_1} g df - g(\overline{x}) \Delta f(x_1, y_1) \right| \leq w(g, f, R_1),$$

*para $R_1 = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \subseteq R$ y $\overline{x} \in R_1$.*

## 2.2. Función de Variación Acotada sobre $\mathbb{R}^2$

En lo que sigue trabajamos con rectángulos $Q$ donde sus lados $I_1$ e $I_2$ pueden ser de la forma $(-\infty,\infty)$, $[a,\infty)$, $(-\infty,a]$ o intervalos acotados. Además, utilizaremos el concepto de variación acotada sobre intervalos, véase [17].

**Definición 2.2.1.**

1. *Se dice que la función $f:Q\to\mathbb{R}$ es de **variación acotada en el sentido de Vitali** sobre $Q$, y se denota como $f\in BV_V(Q)$, si*

$$Var(f,Q):=\sup_{R\subset Q}\sup_{\{R_{i,j}\}\in\mathcal{P}(R)}\left\{\sum_i\sum_j|\Delta f(x_i,y_j)|\right\}<\infty,$$

   *donde los rectángulos $R$ son compactos en $Q$.*

2. *Se dice que la función $f:Q\to\mathbb{R}$ es de **variación acotada en el sentido de Hardy** sobre $Q$, y se denota como $f\in BV_H(Q)$, si*

   - *$f\in BV_V(Q)$.*
   - *Para cada $x,y$, $f(\cdot,y)$ y $f(x,\cdot)$ son de variación acotada sobre $I_1$ e $I_2$, respectivamente.*

El espacio $BV_H(\mathbb{R}^2)$ está contenido propiamente en $BV_V(\mathbb{R}^2)$ ya que $f(x,y)=x+y\in BV_V(\mathbb{R}^2)\setminus BV_H(\mathbb{R}^2)$.

### 2.2.1. Propiedades de las Funciones de Variación Acotada

Aquí principalmente mostramos una serie de resultados que relacionan las funciones de variación acotada y la integral de Riemann-Stieltjes, todas estas como consecuencia del criterio de integrabilidad en el sentido de Riemann-Stieltjes.

**Lema 2.2.1.** *Si $f\in BV_V(\mathbb{R}^2)$, entonces*

*1)* $\lim_{m\to\infty}Var(f,[-m,m]\times[-m,m])=Var(f,\mathbb{R}^2)$.

*2)* $\lim_{m\to\infty}\big(Var(f,[m,\infty)\times\mathbb{R})+Var(f,(-\infty,-m]\times\mathbb{R})+Var(f,\mathbb{R}\times[m,\infty))$
$+Var(f,\mathbb{R}\times(-\infty,-m])\big)=0.$

*Demostración.* Por la Definición 2.2.1, dado $\varepsilon>0$, existe $\{R_{i,j}\}$ una partición de $[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned}Var(f,\mathbb{R}^2)-\varepsilon<&\sum_i\sum_j|\Delta f(x_i,y_j)|\\&\le Var(f,[a,b]\times[c,d])\\&\le Var(f,[-k,k]\times[-k,k]),\end{aligned}$$

con $k = \text{máx}\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$.

Para $m \geq k$, se tiene que

$$Var(f, \mathbb{R}^2) - \varepsilon < Var(f, [-m, m] \times [-m, m]).$$

Luego,

$$0 \leq Var(f, \mathbb{R}^2) - Var(f, [-m, m] \times [-m, m]) < \varepsilon.$$

Con esto se prueba el inciso 1). Luego, como

$$\begin{aligned} &Var(f, [m, \infty) \times \mathbb{R}) + Var(f, (-\infty, -m] \times \mathbb{R}) + Var(f, [-m, m] \times [m, \infty)) \\ &+Var(f, [-m, m] \times (-\infty, -m]) = Var(f, \mathbb{R}^2) - Var(f, [-m, m] \times [-m, m]), \end{aligned}$$

para cada $m > 0$. Aplicando el límite, cuando $m \to \infty$, a la igualdad anterior se cumple el inciso 2). □

**Lema 2.2.2.** *Si $g \in C(R)$ y $f \in BV_V(R)$, entonces $g \in RS(f, R)$.*

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$, por la continuidad uniforme de $g$ sobre $R$, existe $\delta > 0$ tal que si $(x, y), (x', y') \in R$ con $||(x, y) - (x', y')|| < \delta$, entonces

$$|g(x, y) - g(x', y')| < \frac{\varepsilon}{2(Var(f, R) + 1)}.$$

Sean $P_1$ y $P_2$ particiones de $R$ tales que $||P_1|| < \delta/4$ y $||P_2|| < \delta/4$. Además, creamos $P = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ a partir de todas las divisiones de los lados del rectángulo $R$ que forman $P_1$ y $P_2$. Luego,

$$\begin{aligned} |S(g, f, P_1) - S(g, f, P_2)| &\leq \sum_i \sum_j |g(\overline{s}_{i,j}) - g(\overline{t}_{i,j})||\Delta f(x_i, y_j)| \\ &\leq \sum_i \sum_j \left( \frac{\varepsilon}{2(Var(f, R) + 1)} \right) |\Delta f(x_i, y_j)| \\ &\leq \left( \frac{\varepsilon}{2(Var(f, R) + 1)} \right) Var(f, R) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Del Teorema 2.1.1, se concluye que $g \in RS(f, R)$. □

**Lema 2.2.3.** *Si $g \in C(R)$ y $f \in BV_V(R)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para $P = \{R_{i,j}\} \in \mathcal{P}(R)$ con $||P|| < \delta$ se cumple que*

$$w(g, f, R_{i,j}) \leq 1 + 2||g||_\infty Var(f, R),$$

*donde $||g||_\infty$ es la norma del supremo de $g$.*

*Demostración.* Sea $\varepsilon_0 = 1 > 0$. Por el Teorema 2.1.1, existe $\delta > 0$ tal que si $Q, T \in \mathcal{P}(R)$ con $||Q|| < \delta$ y $||T|| < \delta$, entonces

$$|S(g, f, Q) - S(g, f, T)| < 1.$$

Sea $P = \{R_{i,j}\} \in \mathcal{P}(R)$ con $||P|| < \delta$. Consideramos $Q_{i,j}$ y $Q'_{i,j}$ particiones arbitrarias de $R_{i,j}$ para crear las respectivas particiones $Q$ y $Q'$ de $R$ más finas que $P$. Además, sean los valores $B$ y $B'$ las sumas de Riemann sobre $Q$ y $Q'$ sin tomar $Q_{i,j}$ y $Q'_{i,j}$. Luego,

$$\begin{aligned}
|S(g, f, Q_{i,j}) - S(g, f, Q'_{i,j})| &= |S(g, f, Q_{i,j}) + B - B - S(g, f, Q'_{i,j}) - B' + B'| \\
&= |S(g, f, Q) - B - S(g, f, Q') + B'| \\
&\leq |S(g, f, Q) - S(g, f, Q')| + |B| + |B'| \\
&< 1 + 2||g||_\infty Var(f, R).
\end{aligned}$$

Esto prueba el resultado. □

**Teorema 2.2.1.** *Sean $g \in C(R)$ y $f \in BV_V(R)$. Entonces, para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $P = \{R_{i,j}\}$ partición de $R$ con $||P|| < \delta$ se cumple*

$$\sum_i \sum_j w(g, f, R_{i,j}) < \varepsilon.$$

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$, como $g \in C(R)$, existe $\delta > 0$ tal que si $||(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|| < \delta$, entonces

$$|g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(Var(f, R) + 1)}.$$

Sea $T = \{R_{i,j} : i = 1, ..., n \text{ y } j = 1, ..., m\}$ una partición de $R$ con $||T|| < \delta$. Por el Lema 2.2.3, existen $P_{i,j}$ y $Q_{i,j}$ particiones de $R_{i,j}$ tales que

$$w(g, f, R_{i,j}) < |S(g, f, P_{i,j}) - S(g, f, Q_{i,j})| + \frac{\varepsilon}{2nm}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_i \sum_j w(g, f, R_{i,j}) &< \sum_i \sum_j \left( |S(g, f, P_{i,j}) - S(g, f, Q_{i,j})| + \frac{\varepsilon}{2nm} \right) \\
&= \sum_i \sum_j \left| S(g, f, P_{i,j}) - S(g, f, Q_{i,j}) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2(Var(f, R) + 1)} \sum_i \sum_j Var(f, R_{i,j}) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \left( \frac{\varepsilon}{2(Var(f, R) + 1)} \right) Var(f, R) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

**Corolario 2.2.1.** *Sean $g : R \to \mathbb{R}$ una función acotada, $f : R \to \mathbb{R}$ una función continua sobre $R$ y se define*

$$h(t_1, t_2) = \iint\limits_{[a,t_1]\times[c,t_2]} f(s_1, s_2)d(s_1, s_2), \text{ para cada } (t_1, t_2) \in R.$$

*Si $g \in RS(h, R)$, entonces*

$$\iint\limits_R g(t_1, t_2)dh(t_1, t_2) = \iint\limits_R g(t_1, t_2)f(t_1, t_2)d(t_1, t_2).$$

*Demostración.* Para $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $P = \{R_{i,j}\}$ es una partición de $R$ con $||P|| < \delta$ y $\overline{x}_{i,j} \in R_{i,j}$, entonces

$$\left| S(g, h, P) - \iint\limits_R gdh \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } \sum_i \sum_j w(f, u, R_{i,j}) < \frac{\varepsilon}{2(||g||_\infty + 1)},$$

donde $u(x, y) = xy$.

Sea $Q = \{J_{i,j}\}$ una partición de $R$ con $J_{i,j} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]$ y $||Q|| < \delta$. Luego, con ayuda del Corolario 2.1.1,

$$\begin{aligned}
\left| S(gf, Q) - \iint\limits_R gdh \right| &\leq \left| S(gf, u, Q) - S(g, h, Q) \right| + \left| S(g, h, Q) - \iint\limits_R gdh \right| \\
&\leq \sum_i \sum_j |g(\overline{x}_{i,j})| \left| f(\overline{x}_{i,j})\Delta u(x_i, y_j) - \iint\limits_{J_{i,j}} f du \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq ||g||_\infty \sum_i \sum_j w(f, u, J_{i,j}) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq ||g||_\infty \left( \frac{\varepsilon}{2(||g||_\infty + 1)} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.2.2** (**[10, Lema 3.9]**). *Sean $f \in BV_V(\mathbb{R}^2)$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto de continuidad de $f$. Entonces, para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$Var(f, [x - \delta, x + \delta] \times [y - \delta, y + \delta]) < \varepsilon.$$

Mostraremos más adelante algunas propiedades que relacionan los conceptos previos, pero antes recordemos los siguientes espacios de funciones definidas sobre $\mathbb{R}^2$.

- $C_b(\mathbb{R}^2)$ es el espacio de funciones continuas a valores reales las cuales están acotadas.

- $C_0(\mathbb{R}^2)$ es el espacio de funciones continuas que se desvanecen en el infinito.
- $C_c(\mathbb{R}^2)$ es el espacio de funciones continuas con soporte compacto.

Además, es bien sabido que $C_c(\mathbb{R}^2) \subsetneq C_0(\mathbb{R}^2) \subsetneq C_b(\mathbb{R}^2)$ y $C_c(\mathbb{R}^2)$ es denso en $C_0(\mathbb{R}^2)$ con respecto a la norma del supremo, [21, Theorem 3.17].

## 2.3. Integral Impropia de Riemann-Stieltjes

Ahora, veamos la definición de la integral impropia de Riemann-Stieltjes y, posteriormente, su relación con las funciones de variación acotada en el sentido de Vitali.

**Definición 2.3.1.** *Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones. El límite múltiple*

$$\lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint_{[a,b]\times[c,d]} g(t_1,t_2)df(t_1,t_2)$$

*se llama **integral impropia de Riemann-Stieltjes de $g$ con respecto a $f$**, cuando existe en el sentido de Pringsheim [22], y se denota como*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} g(t_1,t_2)df(t_1,t_2).$$

### 2.3.1. Propiedades de la Integral Impropia de Riemann-Stieltjes

En [18], F. Móricz propusó un criterio para la existencia de la integral impropia en el sentido de Riemann-Stieltjes, la cual demostramos a continuación, y además enunciamos algunos otros resultados relevantes para el desarrollo de este trabajo.

**Teorema 2.3.1.** *Si $g \in C_b(\mathbb{R}^2)$ y $f \in BV_V(\mathbb{R}^2)$, entonces la integral impropia de Riemann-Stieltjes de $g$ con respecto a $f$ existe.*

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$, por el Lema 2.2.1, existe $M > 0$ tal que si $m > M$, entonces

$$Var(f,[m,\infty)\times\mathbb{R}) + Var(f,(-\infty,-m]\times\mathbb{R}) + Var(f,\mathbb{R}\times[m,\infty)) + Var(f,\mathbb{R}\times(-\infty,-m]) < \frac{\varepsilon}{||g||_\infty + 1}. \quad (2.2)$$

El Lema 2.2.2 nos permite definir la función

$$F(a,b,c,d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} gdf$$

si $a \leq b$ y $c \leq d$ y $F(a,b,c,d) = 0$ si $a > b$ o $c > d$.

Recurriendo a (2.2), para $a_1, a_2, c_1, c_2 < -M, b_1, b_2, d_1, d_2 > M$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $c_1 < c_2$ y $d_1 < d_2$, entonces

$$\begin{aligned}|F(a_1,b_1,c_1,d_1) - F(a_2,b_2,c_2,d_2)| = &\left| \iint\limits_{[b_1,b_2]\times[c_1,d_2]} gdf + \iint\limits_{[a_1,a_2]\times[c_1,d_2]} gdf \right. \\ &\left. + \iint\limits_{[a_2,b_1]\times[c_1,c_2]} gdf + \iint\limits_{[a_2,b_1]\times[d_1,d_2]} gdf \right| \\ &\leq ||g||_\infty \left(Var(f,[m,\infty)\times\mathbb{R}) \right. \\ &\quad + Var(f,(-\infty,-m]\times\mathbb{R}) \\ &\quad + Var(f,\mathbb{R}\times[m,\infty)) \\ &\quad \left. + Var(f,\mathbb{R}\times(-\infty,-m])\right) \\ &\leq ||g||_\infty \left(\frac{\varepsilon}{||g||_\infty + 1}\right) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo que se satisface el criterio de Cauchy.

□

**Teorema 2.3.2** (**[10, Lema 3.6]**). *Si $g \in C_b(\mathbb{R}^2)$ y $f \in BV_V(\mathbb{R}^2)$, entonces*

*1) La función $V(f;x,y) := Var(f,(-\infty,x]\times(-\infty,y])$, para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, pertenece a $BV_V(\mathbb{R}^2)$.*

*2)* $$\left|\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(t_1,t_2)df(t_1,t_2)\right| \leq \iint\limits_{\mathbb{R}^2} |g(t_1,t_2)|dV(f;t_1,t_2) \leq ||g||_\infty Var(f,\mathbb{R}^2).$$

**Teorema 2.3.3.** *Sean $g \in C_0(\mathbb{R}^2)$ y $f \in BV_V(\mathbb{R}^2)$. Entonces, existe una $\sigma$-álgebra $\mathbb{M}$ de $\mathbb{R}^2$ que contiene a los borelianos y existe una única medida finita positiva $\mu$ sobre $\mathbb{M}$ tal que*

*1) $\mu((a,b)\times(c,d)) \leq Var(f,[a,b]\times[c,d])$, para $(a,b)\times(c,d)\subset\mathbb{R}^2$.*

*2)* $$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(t_1,t_2)dV(f;t_1,t_2) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(t_1,t_2)d\mu(t_1,t_2),$$

*donde $V(f;x,y) = Var(f,(-\infty,x]\times(-\infty,y])$.*

*Demostración.* Consideramos la funcional lineal sobre $C_b(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$\Phi(h) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} h(t_1,t_2)dV(f;t_1,t_2).$$

Como $C_c(\mathbb{R}^2)\subset C_0(\mathbb{R}^2)$, $\Phi$ está bien definida sobre $C_c(\mathbb{R}^2)$.

Ahora, si $h\in C_c(\mathbb{R}^2)$ con $h(t_1,t_2)\geq 0$, para cada $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$, entonces

$$\Phi(h) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} h(t_1,t_2)dV(f;t_1,t_2) := \lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} h(t_1,t_2)dV(f;t_1,t_2) \geq 0,$$

ya que

$$\begin{aligned}\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} h(t_1,t_2)dV(f;t_1,t_2) &= \lim_{||P||\to 0}\sum_i\sum_j h(\overline{x_{i,j}})\Delta V(f;x_i,y_j)\\ &= \lim_{||P||\to 0}\sum_i\sum_j h(\overline{x_{i,j}})Var(f,R_{i,j}) \geq 0,\end{aligned}$$

donde $P=\{R_{i,j}\}$ es partición de $[a,b]\times[c,d]$ y $\overline{x_{i,j}} \in R_{i,j}$.

Esto es, $\Phi$ es una funcional lineal positiva sobre $C_c(\mathbb{R}^2)$.

Por el Teorema 2.14 (Teorema de Representación de Riesz) en [21], existe una $\sigma$-álgebra $\mathbb{M}$ de $\mathbb{R}^2$ que contiene a los borelianos y existe una medida positiva $\mu$ sobre $\mathbb{M}$ tal que, para $h \in C_c(\mathbb{R}^2)$,

$$\Phi(h) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} h(t_1,t_2)d\mu(t_1,t_2).$$

Sea $R=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ un rectángulo acotado. Siguiendo un proceso similar al realizado para construir la medida $\mu$ en (1) del Teorema 2.14 en [21], y asumiendo que $sop(h)$ es el soporte de $h$, tenemos

$$\begin{aligned}\mu(int(R)) &= \sup\left\{\Phi(h) : h\in C_c(\mathbb{R}^2),\ 0\leq h\leq 1,\ sop(h)\subset int(R)\right\}\\ &= \sup\left\{\iint\limits_{\mathbb{R}^2} hdV(f;) : h\in C_c(\mathbb{R}^2),\ 0\leq h\leq 1,\ sop(h)\subset int(R)\right\}\\ &= \sup\left\{\iint\limits_{R} hdV(f;) : h\in C_c(\mathbb{R}^2),\ 0\leq h\leq 1,\ sop(h)\subset int(R)\right\}\\ &\leq \iint\limits_R dV(f;t_1,t_2) = Var(f,R)\\ &\leq Var(f,\mathbb{R}^2).\end{aligned}$$

Esto prueba el inciso 1). Además,

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{R}^2) &= \lim_{n\to\infty}\mu((-n,n)\times(-n,n))\\ &\leq Var(f,\mathbb{R}^2).\end{aligned}$$

Ahora, para $g\in C_0(\mathbb{R}^2)$, existe $(g_n)$ una sucesión de funciones en $C_c(\mathbb{R}^2)$ que converge uniformemente a $g$. Esto es, para $\varepsilon>0$, existe $N_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$|g_n(t_1,t_2)-g(t_1,t_2)| < \frac{\varepsilon}{Var(f,\mathbb{R}^2)+1},$$

para cada $n\geq N_0$ y $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$.

Desarrollando la desigualdad anterior e integrando con respecto a $V(f;\cdot,\cdot)$ sobre $R$ se obtiene, para cada $n \geq N_0$,

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{Var(f,\mathbb{R}^2)+1}\iint\limits_R dV(f;t_1,t_2) < &\iint\limits_R g_n dV(f;t_1,t_2) - \iint\limits_R g dV(f;t_1,t_2) \\ &< \frac{\varepsilon}{Var(f,\mathbb{R}^2)+1}\iint\limits_R dV(f;t_1,t_2). \end{aligned}$$

Luego, para cada $n \geq N_0$,

$$\begin{aligned} -\varepsilon\left(\frac{Var(f,R)}{Var(f,\mathbb{R}^2)+1}\right) < &\iint\limits_R g_n dV(f;t_1,t_2) - \iint\limits_R g dV(f;t_1,t_2) \\ &< \varepsilon\left(\frac{Var(f,R)}{Var(f,\mathbb{R}^2)+1}\right). \end{aligned}$$

Dado que $Var(f,R) \leq Var(f,\mathbb{R}^2)$, y aplicando el límite, cuando $a, c \to -\infty$ y $b, d \to \infty$ a la desigualdad anterior, se llega a

$$\begin{aligned} -\varepsilon\left(\frac{Var(f,\mathbb{R}^2)}{Var(f,\mathbb{R}^2)+1}\right) \leq &\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g_n dV(f;t_1,t_2) - \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g dV(f;t_1,t_2) \\ &\leq \varepsilon\left(\frac{Var(f,\mathbb{R}^2)}{Var(f,\mathbb{R}^2)+1}\right), \end{aligned}$$

para cada $n \geq N_0$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left|\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g_n dV(f;t_1,t_2) - \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g dV(f;t_1,t_2)\right| &\leq \varepsilon\left(\frac{Var(f,\mathbb{R}^2)}{Var(f,\mathbb{R}^2)+1}\right) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

para cada $n \geq N_0$.

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g_n(t_1,t_2)dV(f;t_1,t_2) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(t_1,t_2)dV(f;t_1,t_2). \tag{2.3}$$

Por otra parte, como $(g_n)$ converge uniformemente a $g$ y la medida $\mu$ es finita, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g_n(t_1,t_2)d\mu(t_1,t_2) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(t_1,t_2)d\mu(t_1,t_2). \tag{2.4}$$

Así, por (2.3) y (2.4) se concluye que

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(t_1,t_2)dV(f;t_1,t_2) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(t_1,t_2)d\mu(t_1,t_2) \text{ para } g \in C_0(\mathbb{R}^2).$$

□

## 2.4. Convergencia Uniforme en un Punto

En esta sección presentamos la definición de convergencia uniforme sobre un punto, o también conocida como convergencia localmente uniforme, de una sucesión de funciones.

**Definición 2.4.1.**

1. *Sean $(g_\beta)_{\beta\in I}$ una colección de funciones y $g$ una función, ambos de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con $I=[a,\infty]\subseteq\mathbb{R}$. Se dice que $g_\beta$* ***converge uniformemente a*** *$g$* ***en un punto*** *$x\in\mathbb{R}$, cuando $\beta\to\infty$, si para cualquier $\varepsilon>0$, existen $M_\varepsilon>0$ y $V_\varepsilon$ una vecindad de $x$ tales que*

$$|g_\beta(y)-g(y)|<\varepsilon,$$

*para cada $\beta\geq M_\varepsilon$ y $y\in V_\varepsilon$.*

***Notación:***

$$\lim_{\beta\to\infty} g_\beta(x)=g(x) \text{ es uniforme en } x \tag{2.5}$$

2. *Sean $(g_{\alpha,\beta})_{\alpha\in I,\beta\in J}$ una colección de funciones y $g$ una función, ambos de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con $I=[a,\infty], J=[c,d]\subseteq\mathbb{R}$. Se dice que $g_{\alpha,\beta}$* ***converge uniformemente a*** *$g$* ***en un punto*** *$x\in\mathbb{R}$, cuando $\alpha\to\infty$ y $\beta\to c$, si para cualquier $\varepsilon>0$, existen $M_\varepsilon>0$, $L_\varepsilon>0$ y $V_\varepsilon$ una vecindad de $x$ tales que*

$$|g_{\alpha,\beta}(y)-g(y)|<\varepsilon,$$

*para cada $\alpha\geq M_\varepsilon$, $|\beta-c|<L_\varepsilon$ y $y\in V_\varepsilon$.*

***Notación:***

$$\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \beta\to c}} g_{\alpha,\beta}(x)=g(x) \text{ es uniforme en } x \tag{2.6}$$

## 2.5. Sucesiones (L)

Un tipo de sucesión compuesta de números positivos y estrictamente crecientes es mostrada a continuación.

**Definición 2.5.1.** *Una sucesión creciente $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^+$ se dice que satisface* ***la condición (L)*** *, $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}\in(L)$, si existe $A>1$ tal que*

$$u_m\sum_{j=m}^{\infty}\frac{1}{u_j}\leq A,\quad m=1,2,3,....$$

*Notar que $u_j\to\infty$ cuando $j\to\infty$.*

### 2.5.1. Propiedades de las Sucesiones (L)

Algunos resultados en los que intervienen las sucesiones en $(L)$ son las siguientes.

**Teorema 2.5.1** ([**17, Lema 2**]). *Si* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in (L)$, *entonces*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{u_{j-1}\le v\le u_j} \left| \int_{u_{j-1}}^{v} \frac{sen(tu)}{u} du \right| \le 3A + 4, \quad t \neq 0,$$

*donde* $u_0 := 0$ *y* $A$ *proviene de la Definición 2.5.1.*

**Teorema 2.5.2** ([**17, Lema 3**]). *Si* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in (L)$, *entonces*

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \max_{u_{j-1}\le v\le u_j} \left| \int_{u_{j-1}}^{v} \frac{sen(tu)}{u} du \right| \le \frac{3A}{|t|\, u_m}, \quad m \in \mathbb{N};\ t \neq 0.$$

**Lema 2.5.1.** *Sea* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in (L)$ *con constante* $A$. *Entonces, para cualquier* $u_0 \in (0, u_1)$ *se cumple que* $\{u_j\}_{j\in\{0\}\cup\mathbb{N}} \in (L)$ *con constante* $A+1$ *(no depende de* $u_0$*).*

*Demostración.* Sean $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in (L)$ y $u_0 \in (0, u_1)$ arbitrario. Veamos que la sucesión creciente $\{u_j\}_{j\in\{0\}\cup\mathbb{N}}$ satisface la Definición 2.5.1. Por hipótesis,

$$u_m \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{u_j} \le A < A + 1, \quad m = 1, 2, 3, ....$$

Solo resta probar que se mantiene la desigualdad para $m = 0$. Así,

$$\begin{aligned} u_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{u_j} &= u_0 \left( \frac{1}{u_0} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{u_j} \right) \\ &= 1 + u_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{u_j} \\ &< 1 + u_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{u_j} \\ &\le 1 + A. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{u_j\}_{j\in\{0\}\cup\mathbb{N}} \in (L)$. □

**Observación 2.5.1.** *Dado* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in (L)$ *con constante* $A$, *es inmediato que las desigualdades en los Teoremas 2.5.1 y 2.5.2 se satisfacen para* $\{u_j\}_{j\in\{0\}\cup\mathbb{N}}$ *con constante* $A+1$, *cualquiera sea* $u_0 \in (0, u_1)$.

**Teorema 2.5.3** ([**17, Lema 4**]). *Si* $0 < a < b < \infty$, *entonces*

$$\lim_{|t|\to\infty} \int_a^b \frac{sen(tu)}{u} du = 0 \quad y \quad \frac{d}{dt}\left( \int_a^b \frac{sen(tu)}{u} du \right) = \int_a^b \cos(tu) du, \quad t \in \mathbb{R}.$$

# Capítulo 3

# Teorema de Dirichlet-Jordan sobre $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$

En este capítulo se lleva a cabo un análisis con la intención de dar respuesta al problema de inversión puntual. El estudio se basa en los resultados publicados en [18] y [10], los que permiten deducir el Teorema de Dirichlet-Jordan planteado sobre el espacio $L^1(\mathbb{R}^2) \cap BV_H(\mathbb{R}^2)$. Es importante señalar que en nuestro trabajo empleamos una colección de funciones distinta a $L^1(\mathbb{R}^2) \cap BV_H(\mathbb{R}^2)$ y a $L^1(\mathbb{R}^2)$.

## 3.1. Espacio $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$

Al inicio de este apartado definimos el conjunto $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ e inmediatamente presentamos algunas propiedades de estas funciones.

**Definición 3.1.1.** *El espacio de funciones $f$ que están en $BV_V(\mathbb{R}^2)$ y satisfacen que $\lim_{||(x,y)||\to\infty} f(x,y) = 0$ se denota como $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$.*

### 3.1.1. Propiedades de las funciones en $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$

El siguiente resultado nos proporciona algunas cotas que están relacionadas con la variación de la función.

**Proposición 3.1.1.** *Sean $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ y $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces,*

*1)* $|f(x,y)| \leq Var(f(x,\cdot),\mathbb{R}) \leq Var(f,[x,\infty)\times\mathbb{R})$,
*2)* $|f(x,y)| \leq Var(f(x,\cdot),\mathbb{R}) \leq Var(f,(-\infty,x]\times\mathbb{R})$,
*3)* $|f(x,y)| \leq Var(f(\cdot,y),\mathbb{R}) \leq Var(f,\mathbb{R}\times[y,\infty))$,
*4)* $|f(x,y)| \leq Var(f(\cdot,y),\mathbb{R}) \leq Var(f,\mathbb{R}\times(-\infty,y])$.

*Demostración.* Sean $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $d > x$ arbitrario. Se toman $-\infty < y_0 < ... < y_m < \infty$ para crear $P = \{[x,d] \times [y_{j-1}, y_j] \mid j \in \{1,...,m\}\}$ una partición de $[x,\infty) \times \mathbb{R}$. Si $x_0 = x$ y $x_1 = d$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} |f(d,y_j) - f(d,y_{j-1}) + f(x,y_j) - f(x,y_{j-1})| &= \sum_{j=1}^{m} |\Delta f(x_1,y_j)| \\ &\leq Var(f,[x,\infty)\times\mathbb{R}).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Como

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{j=1}^{m} |f(d,y_j) - f(d,y_{j-1})| - \sum_{j=1}^{m} |f(x,y_j) - f(x,y_{j-1})|\right| \\ &\qquad \leq \sum_{j=1}^{m} |f(d,y_j) - f(d,y_{j-1}) + f(x,y_j) - f(x,y_{j-1})|.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\left|\sum_{j=1}^{m} |f(d,y_j) - f(d,y_{j-1})| - \sum_{j=1}^{m} |f(x,y_j) - f(x,y_{j-1})|\right| \leq Var(f,[x,\infty)\times\mathbb{R}). \tag{3.2}$$

Luego, aplicando el límite, cuando $d \to \infty$, en (3.2) se llega a

$$\sum_{j=1}^{m} |f(x,y_j) - f(x,y_{j-1})| \leq Var(f,[x,\infty)\times\mathbb{R}).$$

Por lo tanto, $Var(f(x,\cdot),\mathbb{R}) \leq Var(f,[x,\infty)\times\mathbb{R})$. Para probar la primera desigualdad en el inciso 1) se utiliza la misma idea.

Para los incisos 2), 3) y 4) se argumenta de manera similar al caso 1) con cambios adecuados. □

De la Proposición 3.1.1 y el Lema 2.2.1, obtenemos la siguiente caracterización de funciones en $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ .

**Corolario 3.1.1.** *$f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ si y sólo si $f \in BV_H(\mathbb{R}^2)$ y $\lim_{a\to\pm\infty} f(a,y) = 0 = \lim_{b\to\pm\infty} f(x,b)$, para cada $x,y \in \mathbb{R}$.*

Es importante notar que

$$L^1(\mathbb{R}^2) \cap BV_H(\mathbb{R}^2) \subsetneq BV_{||0||}(\mathbb{R}^2) \not\subset L^1(\mathbb{R}^2) \tag{3.3}$$

es consecuencia del resultado previo y la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (1/x)(1/y) & \text{si } x,y \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \text{ o } y < 1, \end{cases} \tag{3.4}$$

que pertenece a $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2) \setminus L^1(\mathbb{R}^2)$.

**Teorema 3.1.1.** *Si $g \in C_b(\mathbb{R}^2)$ y $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$, entonces*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} g(t_1,t_2)df(t_1,t_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(t_1,t_2)dg(t_1,t_2).$$

*Demostración.* Sea $R = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$ un rectángulo acotado. Como $g \in C(R)$ y $f \in BV_H(R)$, por el inciso *viii)* en [18],

$$\begin{aligned}\iint_R g(t_1,t_2)df(t_1,t_2) =& g(b,d)f(b,d) - g(b,c)f(b,c)\\ &- g(a,d)f(a,d) + g(a,c)f(a,c)\\ &- \int_a^b g(t_1,d)df(t_1,d) + \int_a^b g(t_1,c)df(t_1,c)\\ &- \int_c^d g(b,t_2)df(b,t_2) + \int_c^d g(a,t_2)df(a,t_2)\\ &+ \iint_R f(t_1,t_2)dg(t_1,t_2).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Como $g$ está acotada en $\mathbb{R}^2$, tenemos que

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} g(b,d)f(b,d) = 0, \quad \lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} g(b,c)f(b,c) = 0,\\ &\lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} g(a,d)f(a,d) = 0 \ \text{ y } \lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} g(a,c)f(a,c) = 0.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ahora, por el inciso 3) de la Proposición 3.1.1,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(t_1,d)df(t_1,d)\right| \leq& ||g||_\infty Var(f(\cdot,d),[a,b])\\ \leq& ||g||_\infty Var(f(\cdot,d),\mathbb{R})\\ \leq& ||g||_\infty Var(f,\mathbb{R}\times[d,\infty)).\end{aligned}$$

Dado que $\lim_{d\to\infty} Var(f,\mathbb{R}\times[d,\infty)) = 0$, se tiene que

$$\lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} \int_a^b g(t_1,d)df(t_1,d) = 0.$$

De esta manera llegamos a que

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} \int_a^b g(t_1,d)df(t_1,d) = 0, \quad \lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} \int_a^b g(t_1,c)df(t_1,c) = 0,\\ &\lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} \int_c^d g(b,t_2)df(b,t_2) = 0 \ \text{ y } \lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} \int_c^d g(a,t_2)df(a,t_2) = 0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Finalmente, debido a que la integral impropia de Riemann-Stieltjes de $g$ con respesto a $f$ existe, y de acuerdo a (3.5), (3.6) y (3.7),

$$\iint_{\mathbb{R}^2} g(t_1,t_2)df(t_1,t_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(t_1,t_2)dg(t_1,t_2).$$

□

**Teorema 3.1.2.** *Sea $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$. Entonces, para $u_1 < u_2$ y $v_1 < v_2$,*

$$\lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2)\left(\int_{u_1}^{u_2} cos(t_1\tau)d\tau\right)\left(\int_{v_1}^{v_2} cos(t_2\tau)d\tau\right)d(t_1,t_2)$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f(t_1,t_2)d\left(\int_{u_1}^{u_2} \frac{sen(t_1\tau)}{\tau}d\tau\right)\left(\int_{v_1}^{v_2} \frac{sen(t_2\tau)}{\tau}d\tau\right).$$

*Demostración.* Sea $R = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$ un rectángulo acotado. Definamos las siguientes funciones

$$g(t_1,t_2) = \left(\int_{u_1}^{u_2} cos(t_1\tau)d\tau\right)\left(\int_{v_1}^{v_2} cos(t_2\tau)d\tau\right) \in C(\mathbb{R}^2)$$

y

$$h(t_1,t_2) = \left(\int_{u_1}^{u_2} \frac{sen(t_1\tau)}{\tau}d\tau\right)\left(\int_{v_1}^{v_2} \frac{sen(t_2\tau)}{\tau}d\tau\right) \in C_b(\mathbb{R}^2),$$

para cada $(t_1,t_2) \in R$. Observemos que, por el Teorema 2.5.3,

$$\int_a^{t_1}\int_c^{t_2} g(x,y)dxdy = h(t_1,t_2) - h(t_1,c) - h(a,t_2) + h(a,c), \tag{3.8}$$

para cada $(t_1,t_2) \in R$.

Se sabe que $h \in C(R)$ y $f \in BV_H(R)$, entonces la integral doble de Riemann-Stieltjes de $h$ con respesto a $f$ sobre $R$ existe lo cual implica que, por el inciso *viii*) de [18], existe la integral doble de Riemann-Stieltjes de $f$ con respesto a $h$ sobre $R$.

Con el mismo argumento del párrafo anterior se prueba que las siguientes integrales

$$\iint_R f(t_1,t_2)dh(t_1,c),\ \iint_R f(t_1,t_2)dh(a,t_2) \text{ y } \iint_R f(t_1,t_2)dh(a,c) \tag{3.9}$$

existen y son cero.

Luego, con ayuda de (3.8) se obtiene

$$\begin{aligned}\iint_R f(t_1,t_2)dh(t_1,t_2) - \iint_R f(t_1,t_2)dh(a,t_2) - \iint_R f(t_1,t_2)dh(t_1,c) \\ + \iint_R f(t_1,t_2)dh(a,c) = \iint_R f(t_1,t_2)d\left(\int_a^{t_1}\int_c^{t_2} g(x,y)dxdy\right).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Por el Corolario 2.2.1,

$$\iint_R f(t_1,t_2)d\left(\int_a^{t_1}\int_c^{t_2} g(x,y)dxdy\right) = \iint_R f(t_1,t_2)g(t_1,t_2)d(t_1,t_2). \tag{3.11}$$

De (3.9), (3.10) y (3.11),

$$\iint_R f(t_1,t_2)dh(t_1,t_2) = \iint_R f(t_1,t_2)g(t_1,t_2)d(t_1,t_2).$$

Ahora, como $h \in C_b(\mathbb{R}^2)$ y $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$, por el Teorema 3.1.1, la integral impropia de Riemann-Stieltjes de $f$ con respesto a $h$ existe. Entonces, aplicando el límite, cuando $a, c \to -\infty$ y $b, d \to \infty$, a la igualdad anterior se concluye que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(t_1,t_2)dh(t_1,t_2) = \lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2)g(t_1,t_2)d(t_1,t_2).$$

□

## 3.2. Integral de Henstock-Kurzweil

Empezamos definiendo la integral de Henstock-Kurzweil sobre un rectángulo compacto $R = [a,b] \times [c,d]$, véase [12] y [19].

1. Se dice que la función $\delta : R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **medidora** sobre $R$, si $\delta(t_1,t_2) \geq 0$ para cada $(t_1,t_2) \in R$.

2. Sean $P = \{R_{i,j} = [x_{i-1},x_i] \times [y_{j-1},y_j]\} \in \mathcal{P}(R)$ y $(\xi_{i,j},\eta_{i,j}) \in R_{i,j}$. Se dice que $P$ es $\delta-$**fina**, si
   - $[x_{i-1},x_i] \subset (\xi_{i,j} - \delta(\xi_{i,j},\eta_{i,j}), \xi_{i,j} + \delta(\xi_{i,j},\eta_{i,j}))$,
   - $[y_{j-1},y_j] \subset (\eta_{i,j} - \delta(\xi_{i,j},\eta_{i,j}), \eta_{i,j} + \delta(\xi_{i,j},\eta_{i,j}))$.

3. Sean $P = \{R_{i,j}\} \in \mathcal{P}(R)$ y $(\xi_{i,j},\eta_{i,j}) \in R_{i,j}$. Dado una función $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$, la **suma de Riemann de** $f$ **sobre** $P$ se define como

$$S(f;P) = \sum_{i,j} f(\xi_{i,j},\eta_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

**Definición 3.2.1.** *Sea $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que $f$ es* ***Henstock-Kurzweil (HK) integrable sobre*** *$R$, y se denota como $f \in HK(R)$, si existe*

*$A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe una medidora $\delta_\varepsilon$ sobre $R$ tal que si $P = \{R_{i,j}\} \in \mathcal{P}(R)$ es $\delta_\varepsilon-$fina, se satisface*

$$|S(f;P) - A| < \varepsilon.$$

*Además, $A$ será la integral de Henstock-Kurzweil de $f$.*

El conjunto $HK_{loc}(\mathbb{R}^2)$ se define como el espacio de las funciones HK integrables sobre rectángulos compactos de $\mathbb{R}^2$. En [12], se prueba que el espacio de funciones localmente Lebesgue integrables, $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, está contenido propiamente en $HK_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

### 3.2.1. Teorema del Multiplicador sobre $HK_{loc}(\mathbb{R}^2)$

El objetivo de esta sección es caracterizar a los multiplicadores para el espacio $HK_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Para esto, observamos que un multiplicador para la familia $HK_{loc}(\mathbb{R}^2)$ es precisamente cualquier función $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ debido a que, por el teorema que presentamos enseguida, $fg \in HK_{loc}(\mathbb{R}^2)$ para cada $g \in HK_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

**Teorema 3.2.1.** *Sean $g : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ una función tal que, para cada $(s_1, s_2, x, y) \in \mathbb{R}^4$, $g(\cdot, \cdot, s_1, s_2, x, y) \in HK_{loc}(\mathbb{R}^2)$ y $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$. Supóngase que existe $K > 0$ tal que, para todo $(s_1, s_2, x, y) \in \mathbb{R}^4$ y cualquier rectángulo $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$,*

$$\left| \iint_{[a,b]\times[c,d]} g(t_1, t_2, s_1, s_2, x, y)\, d(t_1, t_2) \right| \leq K.$$

*Entonces, $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1, t_2) g(t_1, t_2, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)\, d(t_1, t_2)$ converge uniformemente sobre $\mathbb{R}^4$, cuando $a, c \to -\infty$ y $b, d \to \infty$.*

*Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$Var(f, [M, \infty) \times \mathbb{R}) + Var(f, (-\infty, -M] \times \mathbb{R}) + Var(f, \mathbb{R} \times [M, \infty)) + Var(f, \mathbb{R} \times (-\infty, -M]) < \frac{\varepsilon}{19K + 1}.$$

Sea $[a, b] \times [c, d]$ un rectángulo fuera de $[-M, M]^2$, digamos que $[a, b] \times [c, d] \subset [M, \infty) \times \mathbb{R}$. Por [12, Teorema 6.5.9] (Teorema de Integración por Partes), para cualquier $(s_1, s_2, x, y) \in \mathbb{R}^4$, tenemos

$$\left| \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1, t_2) g(t_1, t_2, s_1, s_2, x, y)\, d(t_1, t_2) \right| \leq |f(b, d)| \left| \iint_{[0,b]\times[0,d]} g(h_1, h_2, s_1, s_2, x, y)\, d(h_1, h_2) \right|$$

$$
\begin{aligned}
&+ |f(b,c)| \left| \iint_{[0,b]\times[0,c]} g(h_1,h_2,s_1,s_2,x,y)\, d(h_1,h_2) \right| \\
&+ |f(a,d)| \left| \iint_{[0,a]\times[0,d]} g(h_1,h_2,s_1,s_2,x,y)\, d(h_1,h_2) \right| \\
&+ |f(a,c)| \left| \iint_{[0,a]\times[0,c]} g(h_1,h_2,s_1,s_2,x,y)\, d(h_1,h_2) \right| \\
&+ \left| \int_a^b \left( \iint_{[0,t_1]\times[0,d]} g(h_1,h_2,s_1,s_2,x,y)\, d(h_1,h_2) \right) df(t_1,d) \right| \\
&+ \left| \int_a^b \left( \iint_{[0,t_1]\times[0,c]} g(h_1,h_2,s_1,s_2,x,y)\, d(h_1,h_2) \right) df(t_1,c) \right| \\
&+ \left| \int_c^d \left( \iint_{[0,b]\times[0,t_2]} g(h_1,h_2,s_1,s_2,x,y)\, d(h_1,h_2) \right) df(b,t_2) \right| \\
&+ \left| \int_c^d \left( \iint_{[0,a]\times[0,t_2]} g(h_1,h_2,s_1,s_2,x,y)\, d(h_1,h_2) \right) df(a,t_2) \right| \\
&+ \left| \iint_{[a,b]\times[c,d]} \left( \iint_{[0,t_1]\times[0,t_2]} g(h_1,h_2,s_1,s_2,x,y)\, d(h_1,h_2) \right) df(t_1,t_2) \right| \\
&< 4K \left( \frac{\varepsilon}{19K+1} \right) + K(Var(f(\cdot,d),[a,b]) + Var(f(\cdot,c),[a,b]) \\
&\quad + Var(f(b,\cdot),[c,d]) + Var(f(a,\cdot),[c,d])) + KVar(f,[a,b]\times[c,d]) \\
&\leq 4K \left( \frac{\varepsilon}{19K+1} \right) + 5KVar(f,[M,\infty)\times\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Ahora, tomamos dos rectángulos $[-M,M]^2 \subseteq [a,b]\times[c,d]$ y $[-M,M]^2 \subseteq [a_1,b_1]\times[c_1,d_1]$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $[a,b]\times[c,d] \subseteq [a_1,b_1]\times[c_1,d_1]$. Entonces, para cada $(s_1,s_2,x,y)\in\mathbb{R}^4$, se tiene

$$
\begin{aligned}
&\left| \iint_{[a_1,b_1]\times[c_1,d_1]} f(t_1,t_2) g(t_1,t_2,s_1,s_2,x,y)\, d(t_1,t_2) \right. \\
&\qquad \left. - \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) g(t_1,t_2,s_1,s_2,x,y)\, d(t_1,t_2) \right| \\
&\qquad\qquad \leq \left| \iint_{[b,b_1]\times[c_1,d_1]} f(t_1,t_2) g(t_1,t_2,s_1,s_2,x,y)\, d(t_1,t_2) \right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left|\iint_{[a_1,a]\times[c_1,d_1]} f(t_1,t_2)g(t_1,t_2,s_1,s_2,x,y)\,d(t_1,t_2)\right| \\
&+\left|\iint_{[a,b]\times[d,d_1]} f(t_1,t_2)g(t_1,t_2,s_1,s_2,x,y)\,d(t_1,t_2)\right| \\
&+\left|\iint_{[a,b]\times[c_1,c]} f(t_1,t_2)g(t_1,t_2,s_1,s_2,x,y)\,d(t_1,t_2)\right| \\
&< 16K\left(\frac{\varepsilon}{19K+1}\right)+5KVar(f,[M,\infty)\times\mathbb{R})+5KVar(f,(-\infty,-M]\times\mathbb{R}) \\
&\quad+5KVar(f,\mathbb{R}\times[M,\infty))+5KVar(f,\mathbb{R}\times(-\infty,-M]) \\
&< 19K\left(\frac{\varepsilon}{19K+1}\right) \\
&<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Así, se cumple el criterio de Cauchy.

□

**Corolario 3.2.1.** *Sea $f\in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$, entonces el límite*

$$\lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}}\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2)\frac{sens_1(x-t_1)sens_2(y-t_2)}{(x-t_1)(y-t_2)}d(t_1,t_2)$$

*existe y es uniforme sobre $(s_1,s_2,x,y)\in\mathbb{R}^4$.*

*Demostración.* Se sigue del teorema anterior. □

**Lema 3.2.1.** *Sean $f\in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ y $[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ un rectángulo. Entonces,*

*1) El límite*

$$\lim_{s_1,s_2\to0}\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2)\frac{sens_1(x-t_1)sens_2(y-t_2)}{(x-t_1)(y-t_2)}d(t_1,t_2)=0$$

*es uniforme sobre $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.*

*2) El límite, para $i,j\in\{1,2\}$ con $i\neq j$,*

$$\lim_{\substack{s_i\to0\\ s_j\to\infty}}\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2)\frac{sens_i(x-t_1)sens_j(y-t_2)}{(x-t_1)(y-t_2)}d(t_1,t_2)=0$$

*es uniforme sobre $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.*

*Demostración.* Sea $[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ un rectángulo. Vamos a probar 1). Para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, tenemos

$$\left|\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2)\frac{sens_1(x-t_1)sens_2(y-t_2)}{(x-t_1)(y-t_2)}d(t_1,t_2)\right|\leq||f||_\infty|s_1||s_2|(b-a)(d-c).$$

Sea $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $\delta^2||f||_\infty(b-a)(d-c)<\varepsilon$. Si $0<|s_1|<\delta$ y $0<|s_2|<\delta$, entonces, para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\left|\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2)\frac{sens_1(x-t_1)sens_2(y-t_2)}{(x-t_1)(y-t_2)}d(t_1,t_2)\right|&\leq||f||_\infty\delta^2(b-a)(d-c)\\&<\ \varepsilon.\end{aligned}$$

Ahora, probaremos 2) considerando el caso $s_1\to 0$ y $s_2\to\infty$, el otro es parecido. Para ello, definamos la función

$$F(t_2,s_1,x)=\int_a^b f(t_1,t_2)\frac{sens_1(x-t_1)}{(x-t_1)}dt_1,$$

para cada $(t_2,s_1,x)\in\mathbb{R}^3$, el cual satisface que $F(\cdot,s_1,x)\in BV[c,d]$ y

$$Var(F(\cdot,s_1,x),[c,d])\leq|s_1|(b-a)Var(f,\mathbb{R}^2).$$

Además,

$$|F(t_2,s_1,x)|\leq||f||_\infty|s_1|(b-a),$$

para cada $(t_2,s_1,x)\in\mathbb{R}^3$.

Por el Teorema de Fubini (Teorema 2.5.5) y el Teorema de Integración por Partes (Corolario 6.5.10) en [12], para cada $(s_1,s_2,x,y)\in\mathbb{R}^4$, se cumple que

$$\begin{aligned}&\left|\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2)\frac{sens_1(x-t_1)sens_2(y-t_2)}{(x-t_1)(y-t_2)}d(t_1,t_2)\right|\\&=\left|\int_c^d\frac{sens_2(y-t_2)}{(y-t_2)}\left(\int_a^b f(t_1,t_2)\frac{sens_1(x-t_1)}{(x-t_1)}dt_1\right)dt_2\right|\\&=\left|F(d,s_1,x)\left(\int_0^d\frac{sens_2(y-h)}{(y-h)}dh\right)\right|+\left|F(c,s_1,x)\left(\int_0^c\frac{sens_2(y-h)}{(y-h)}dh\right)\right|\\&\quad+\left|\int_c^d\left(\int_0^t\frac{sens_2(y-h)}{(y-h)}dh\right)dF(t,s_1,x)\right|\\&\leq 2||f||_\infty|s_1|(b-a)\pi Si(\pi)+|s_1|\pi Si(\pi)(b-a)Var(f,\mathbb{R}^2)\\&=|s_1|(b-a)\pi Si(\pi)\left(2||f||_\infty+Var(f,\mathbb{R}^2)\right),\end{aligned}$$

donde $Si$ es la función Integral Seno, ver [14, Remark 2].

Sea $\varepsilon > 0$, elegimos $M > 0$ y $\delta > 0$ tal que $\delta(b-a)\pi Si(\pi)(2||f||_\infty + Var(f,\mathbb{R}^2)) < \varepsilon$. Luego, si $0 < |s_1| < \delta$ y $s_2 \geq M$, entonces, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left| \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) \frac{sens_1(x-t_1)sens_2(y-t_2)}{(x-t_1)(y-t_2)} d(t_1,t_2) \right| < \varepsilon.$$

□

**Teorema 3.2.2.** *Sea* $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$. *Entonces,*

*1) El límite*

$$\lim_{s_1,s_2\to 0} \left( \lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) \frac{sens_1(x-t_1)sens_2(y-t_2)}{(x-t_1)(y-t_2)} d(t_1,t_2) \right) = 0$$

*converge uniformemente sobre* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

*2) El límite, para* $i,j \in \{1,2\}$ *con* $i \neq j$,

$$\lim_{\substack{s_i\to 0 \\ s_j\to\infty}} \left( \lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) \frac{sens_i(x-t_1)sens_j(y-t_2)}{(x-t_1)(y-t_2)} d(t_1,t_2) \right) = 0$$

*converge uniformemente sobre* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

*3) El límite, para* $i,j \in \{1,2\}$ *con* $i \neq j$,

$$\lim_{s_i\to 0} \left( \lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) \frac{sens_i(x-t_1)sens_j(y-t_2)}{(x-t_1)(y-t_2)} d(t_1,t_2) \right) = 0$$

*converge uniformemente sobre* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

*Demostración.* Definamos la función, para cada $(s_1,s_2,x,y) \in \mathbb{R}^4$,

$$A(s_1,s_2,x,y) = \lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) \frac{sens_1(x-t_1)sens_2(y-t_2)}{(x-t_1)(y-t_2)} d(t_1,t_2).$$

Sea $\varepsilon > 0$, por el Corolario 3.2.1, existe $M > 0$ tal que si $a,b < -M$ y $c,d > M$, entonces

$$\left| \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) \frac{sens_1(x-t_1)sens_2(y-t_2)}{(x-t_1)(y-t_2)} d(t_1,t_2) - A(s_1,s_2,x,y) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.12}$$

para cada $(s_1, s_2, x, y) \in \mathbb{R}^4$.

Tomamos $a_0 > M$ fijo. Por el Lema 3.2.1, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |s_1| < \delta$ y $0 < |s_2| < \delta$, entonces

$$\left| \iint\limits_{[-a_0,a_0]^2} f(t_1,t_2) \frac{sens_1(x-t_1)sens_2(y-t_2)}{(x-t_1)(y-t_2)} d(t_1,t_2) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.13}$$

para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

De (3.12) y (3.13), si $0 < |s_1| < \delta$ y $0 < |s_2| < \delta$ se tiene, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} |A(s_1,s_2,x,y)| \leq & \left| A(s_1,s_2,x,y) - \iint\limits_{[-a_0,a_0]^2} f(t_1,t_2) \frac{sens_1(x-t_1)sens_2(y-t_2)}{(x-t_1)(y-t_2)} d(t_1,t_2) \right| \\ & + \left| \iint\limits_{[-a_0,a_0]^2} f(t_1,t_2) \frac{sens_1(x-t_1)sens_2(y-t_2)}{(x-t_1)(y-t_2)} d(t_1,t_2) \right| \\ & < \varepsilon. \end{aligned}$$

Con esto se prueba el inciso 1). Análogamente, se demuestran los incisos restantes.

□

## 3.3. La Transformada de KP-Fourier

En este apartado enunciamos un operador que extiende a la transformada de Fourier clásica sobre $L^1(\mathbb{R}^2)$ y que puede aplicarse a funciones no absolutamente integrables.

**Definición 3.3.1.** *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(\cdot)e^{-i<\cdot,v>} \in HK_{loc}(\mathbb{R}^2)$. La **transformada de KP-Fourier** de $f$ en $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ se define como*

$$\mathcal{F}(f)(\xi,\eta) = \lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) e^{-i(\xi t_1+\eta t_2)} d(t_1,t_2),$$

*cuando el límite anterior existe en el sentido de Pringsheim.*

**Observación 3.3.1.** *Notemos que si $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, entonces la transformada de KP-Fourier $\mathcal{F}(f)$ está bien definida para cada $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ y es igual a la transformada de Fourier clásica $\hat{f}$.*

### 3.3.1. Propiedades de la Transformada de KP-Fourier sobre $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$

El siguiente resultado nos muestra que el operador transformada de KP-Fourier está bien definido sobre $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$, el cual sabemos, de acuerdo a (3.3), no está contenido en $L^1(\mathbb{R}^2)$. Para lo que sigue, definimos $S_0 = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi \neq 0,\ \eta \neq 0\}$.

**Teorema 3.3.1.** *Sea $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ y $(\xi,\eta) \in S_0$. Entonces*

$$\mathcal{F}(f)(\xi,\eta) = -\frac{1}{\xi\eta}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi t_1+\eta t_2)}df(t_1,t_2),$$

*Demostración.* Sean $R = [a,b]\times[c,d]$ y $(x,y) \in S_0$. Sean $g(t_1,t_2) = e^{-i(xt_1+yt_2)} \in HK_{loc}(\mathbb{R}^2)$ y $G(t_1,t_2) = -e^{-i(xt_1+yt_2)}/xy$. Por el Ejemplo 6.5.11 de [12], se afirma que $fg \in HK(R)$ y

$$\begin{aligned}\iint\limits_R f(t_1,t_2)e^{-i(xt_1+yt_2)}d(t_1,t_2) = {} & f(b,d)G(b,d) - f(b,c)G(b,c)\\ & - f(a,d)G(a,d) + f(a,c)G(a,c)\\ & - \int_a^b G(t_1,d)df(t_1,d) + \int_a^b G(t_1,c)df(t_1,c)\\ & - \int_c^d G(b,t_2)df(b,t_2) + \int_c^d G(a,t_2)df(a,t_2)\\ & + \iint\limits_R G(t_1,t_2)df(t_1,t_2).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Como $G$ está acotado en $\mathbb{R}^2$, se sigue

$$\lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} f(b,d)G(b,d) = 0,\ \lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} f(b,c)G(b,c) = 0,$$
$$\lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} f(a,d)G(a,d) = 0 \ \text{ y } \lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} f(a,c)G(a,c) = 0.$$

Ahora, por el inciso 3) de la Proposición 3.1.1,

$$\begin{aligned}\left|\left|\int_a^b G(t_1,d)df(t_1,d)\right|\right| &\leq \frac{2}{|xy|}Var(f(\cdot,d),[a,b])\\ &\leq \frac{2}{|xy|}Var(f(\cdot,d),\mathbb{R})\\ &\leq \frac{2}{|xy|}Var(f,\mathbb{R}\times[d,\infty)).\end{aligned}$$

Dado que $\lim_{d\to\infty} Var(f, \mathbb{R}\times[d,\infty)) = 0$, se tiene que

$$\lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} \int_a^b G(t_1,d)df(t_1,d) = 0. \tag{3.15}$$

De la misma forma como se obtuvo (3.15), al aplicar el límite, cuando $a, c \to -\infty$ y $b, d \to \infty$, al resto de las integrales unidimensionales de Riemann-Stieltjes en (3.14) se concluye que son 0.

Luego, como $G \in C_b(\mathbb{R}^2)$, podemos afirmar que existe la integral impropia de Riemann-Stieltjes de $G$ con respecto a $f$. Por lo tanto, aplicando el límite, cuando $a, c \to -\infty$ y $b, d \to \infty$, en (3.14) se obtiene que, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$,

$$\lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} \iint_R f(t_1,t_2)e^{-i(xt_1+yt_2)}d(t_1,t_2) = -\frac{1}{xy}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(xt_1+yt_2)}df(t_1,t_2).$$

□

Enseguida determinamos la transformada de KP-Fourier de una función concreta y vemos que no está definida sobre los ejes coordenados de $\mathbb{R}^2$.

**Observación 3.3.2.** *Considerando la función en (3.4), y por el Teorema 3.3.1, obtenemos que su transformada de KP-Fourier es*

$$\mathcal{F}(f)(\xi,\eta) = \Gamma(0,i\xi)\Gamma(0,i\eta),$$

*para* $(\xi,\eta) \in S_0$*, donde* $\Gamma(\cdot,\cdot)$ *es la función incompleta de Gamma, [6]. Notemos que cuando* $\xi = 0$ *o* $\eta = 0$*,* $\mathcal{F}(f)(\xi,\eta)$ *no existe.*

El teorema posterior nos permite demostrar la continuidad de esta transformada de funciones en $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ sobre el conjunto $S_0$.

**Proposición 3.3.1.** *Sea* $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$*. Entonces* $\mathcal{F}(f)$ *es continua sobre* $S_0$*.*

*Demostración.* Sean $(\xi_0,\eta_0),(\xi,\eta) \in S_0$. Como $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$, por el Teorema 3.3.1, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(\xi_0,\eta_0) = & -\frac{1}{\xi_0\eta_0}\iint_{\mathbb{R}^2} cos(\xi_0t_1+\eta_0t_2)df(t_1,t_2)\\ & +\frac{i}{\xi_0\eta_0}\iint_{\mathbb{R}^2} sen(\xi_0t_1+\eta_0t_2)df(t_1,t_2).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Por el Teorema 2.3.2 y el Teorema de Valor Medio [7, Teorema 2.8], existe $\theta_{\xi,\eta} \in (0,1)$ tal que

$$\left|\iint_{[a,b]\times[c,d]} cos(\xi t_1+\eta t_2)df(t_1,t_2) - \iint_{[a,b]\times[c,d]} cos(\xi_0t_1+\eta_0t_2)df(t_1,t_2)\right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} |cos(\xi t_1+\eta t_2)-cos(\xi_0 t_1+\eta_0 t_2)|\, dV(f;t_1,t_2)\\
&= \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} |-sen((\theta_{\xi,\eta}\xi+(1-\theta_{\xi,\eta})\xi_0)t_1+(\theta_{\xi,\eta}\eta+(1-\theta_{\xi,\eta})\eta_0)t_2)|\\
&\quad\times|(\xi-\xi_0)t_1+(\eta-\eta_0)t_2|dV(f;t_1,t_2)\\
&\leq \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} |(\xi-\xi_0)t_1+(\eta-\eta_0)t_2|dV(f;t_1,t_2)\\
&\leq |\xi-\xi_0| \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} |t_1|dV(f;t_1,t_2)+|\eta-\eta_0| \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} |t_2|dV(f;t_1,t_2).
\end{aligned}$$

Luego, para cada rectángulo $[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{(\xi,\eta)\to(\xi_0,\eta_0)} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} cos(\xi t_1+\eta t_2)df(t_1,t_2)\\
&\qquad = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} cos(\xi_0 t_1+\eta_0 t_2)df(t_1,t_2). \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Por el Lema 2.2.1, dado $\varepsilon>0$, existe $M>0$ tal que

$$\begin{aligned}
Var(f,[M,\infty)\times\mathbb{R})+Var(f,(-\infty,-M]\times\mathbb{R})+Var(f,\mathbb{R}\times[M,\infty))\\
+Var(f,\mathbb{R}\times(-\infty,-M])<\varepsilon.
\end{aligned}$$

Supongamos que $[a,b]\times[c,d],[a_1,b_1]\times[c_1,d_1]\supseteq[-M,M]^2$. Aplicando el inciso 2) del Teorema 2.3.2 sobre rectángulos compactos y la desigualdad anterior, para cada $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left|\iint\limits_{[a_1,b_1]\times[c_1,d_1]} cos(\xi t_1+\eta t_2)df(t_1,t_2)-\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} cos(\xi t_1+\eta t_2)df(t_1,t_2)\right|\\
&\leq Var(f,[M,\infty)\times\mathbb{R})+Var(f,(-\infty,-M]\times\mathbb{R})+Var(f,\mathbb{R}\times[M,\infty))\\
&\qquad+Var(f,\mathbb{R}\times(-\infty,-M])<\varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, podemos afirmar que el límite

$$\lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} cos(\xi t_1+\eta t_2)df(t_1,t_2) \quad (3.18)$$

es uniforme con respecto a $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$.

Por (3.17), (3.18) y [11, Teorema 1],

$$\begin{aligned}
&\lim_{(\xi,\eta)\to(\xi_0,\eta_0)} -\frac{1}{\xi\eta}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} cos(\xi t_1+\eta t_2)df(t_1,t_2)\\
&\qquad = -\frac{1}{\xi_0\eta_0}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} cos(\xi_0 t_1+\eta_0 t_2)df(t_1,t_2). \quad (3.19)
\end{aligned}$$

De manera análoga, se prueba que

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(\xi_0,\eta_0)} \frac{i}{\xi\eta} \iint_{\mathbb{R}^2} sen(\xi t_1 + \eta t_2) df(t_1,t_2)$$
$$= \frac{i}{\xi_0\eta_0} \iint_{\mathbb{R}^2} sen(\xi_0 t_1 + \eta_0 t_2) df(t_1,t_2). \quad (3.20)$$

De acuerdo a (3.16), (3.19) y (3.20), $\mathcal{F}(f)$ es continua en $(\xi_0,\eta_0)$.

□

Para $0 < \alpha_i < \beta_i < \infty$ con $i = 1,2$, denotamos

$$R^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2} = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha_1 \le |\xi| \le \beta_1,\ \alpha_2 \le |\eta| \le \beta_2\}$$

y

$$h_{\beta_i,\alpha_i}(t) = (sen(\beta_i t) - sen(\alpha_i t))/\pi t.$$

**Proposición 3.3.2.** *Sea $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ y sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces, para $0 < \alpha_j < \beta_j < \infty$ con $j = 1,2$,*

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}} \mathcal{F}(f)(\varepsilon,\eta) e^{i(x\varepsilon+y\eta)} d(\varepsilon,\eta) = \frac{1}{\pi^2} \lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x+t_1, y+t_2)$$
$$\times \left(\frac{sen(\beta_1 t_1) - sen(\alpha_1 t_1)}{t_1}\right)\left(\frac{sen(\beta_2 t_2) - sen(\alpha_2 t_2)}{t_2}\right) d(t_1,t_2) \in \mathbb{R}.$$

*Demostración.* El Teorema 3.3.1 y la Proposición 3.3.1, nos proporcionan condiciones para emplear el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue y el Teorema de Fubini en las siguientes igualdades,

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}} \mathcal{F}(f)(\varepsilon,\eta) e^{i(x\varepsilon+y\eta)} d(\varepsilon,\eta)$$
$$= \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint_{R^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}} \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) e^{-i(t_1\varepsilon+t_2\eta)} d(t_1,t_2) e^{i(x\varepsilon+y\eta)} d(\varepsilon,\eta)$$
$$= \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint_{R^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}} \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) e^{-i(t_1-x)\varepsilon} e^{-i(t_2-y)\eta} d(t_1,t_2) d(\varepsilon,\eta)$$
$$= \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint_{[a,b]\times[c,d]} \iint_{R^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}} f(t_1,t_2) e^{-i(t_1-x)\varepsilon} e^{-i(t_2-y)\eta} d(\varepsilon,\eta) d(t_1,t_2)$$
$$= \lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) h_{\beta_1,\alpha_1}(x-t_1) h_{\beta_2,\alpha_2}(y-t_2) d(t_1,t_2)$$
$$= \lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x+\mu, y+\tau) h_{\beta_1,\alpha_1}(\mu) h_{\beta_2,\alpha_2}(\tau) d(\mu,\tau). \quad (3.21)$$

La última igualdad se obtiene con el cambio de variable $\mu = t_1 - x$ y $\tau = t_2 - y$. □

**Proposición 3.3.3.** *Sean $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ y $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces, la función*

$g_{(x,y)}(t_1,t_2) = f(x-t_1, y-t_2)+f(x-t_1, y+t_2)+f(x+t_1, y-t_2)+f(x+t_1, y+t_2)$

*está en $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ y el límite*

$$\lim_{a\to\infty} \iint_{[0,a]\times[0,a]} g_{(x,y)}(t_1,t_2)h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1)h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2)d(t_1,t_2) \tag{3.22}$$

*existe y es uniforme con respecto a $0 < \alpha_i < \beta_i < \infty$ con $i = 1, 2$.*

*Demostración.* Con el cambio de variable $\mu = x - t_1$ y $\tau = y - t_2$ en (3.21) de la Proposición 3.3.2, tenemos que, para $0 < \alpha_i < \beta_i < \infty$ con $i = 1, 2$, el límite

$$\lim_{a\to\infty} \iint_{[-a,a]\times[-a,a]} f(x-t_1, y-t_2)h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1)h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2)d(t_1,t_2)$$

existe.

Haciendo los cambios de variables adecuados se llega a que, para $0 < \alpha_i < \beta_i < \infty$ con $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} &\lim_{a\to\infty} \iint_{[-a,a]\times[-a,a]} f(x-t_1, y-t_2)h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1)h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2)d(t_1,t_2) \\ &\quad = \lim_{a\to\infty} \iint_{[0,a]\times[0,a]} g_{(x,y)}(t_1,t_2)h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1)h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2)d(t_1,t_2). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Veamos que el límite en (3.22) es uniforme. Como $g_{(x,y)}$ pertenece a $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

- Si $(t_1,t_2) \in (0,\infty)\times(0,\infty)$ con $||(t_1,t_2)|| > \delta_0$, entonces $|g_{(x,y)}(t_1,t_2)| < \varepsilon$,
- $Var(g_{(x,y)}, [\delta_0,\infty)\times[0,\infty)) < \varepsilon$,
- $Var(g_{(x,y)}, [0,\infty)\times[\delta_0,\infty)) < \varepsilon$.

Para cada $(z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2$ y $0 < \alpha_i < \beta_i < \infty$ con $i = 1, 2$, definamos la función

$$H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(z_1,z_2) = \int_0^{z_1}\int_0^{z_2} h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1)h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2)dt_1dt_2.$$

Sean $a_2 > a_1 \geq \delta_0$. Por [12, Teorema 6.5.9] (Teorema de Integración por Partes) y los incisos anteriores, se obtiene

$$\left| \iint_{[0,a_1]\times[0,a_1]} g_{(x,y)}(t_1,t_2)h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1)h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2)d(t_1,t_2) \right.$$

$$\left. - \iint_{[0,a_2]\times[0,a_2]} g_{(x,y)}(t_1,t_2)h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1)h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2)d(t_1,t_2) \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left| \iint\limits_{[0,a_2]\times[a_1,a_2]} g_{(x,y)}(t_1,t_2) h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1) h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2) d(t_1,t_2) \right| \\
&\qquad + \left| \iint\limits_{[a_1,a_2]\times[0,a_1]} g_{(x,y)}(t_1,t_2) h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1) h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2) d(t_1,t_2) \right| \\
&= \Big| H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(a_2,a_2) g_{(x,y)}(a_2,a_2) - H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(0,a_2) g_{(x,y)}(0,a_2) \\
&\quad + H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(0,a_1) g_{(x,y)}(0,a_1) - H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(a_2,a_1) g_{(x,y)}(a_2,a_1) \\
&\quad - \int_0^{a_2} H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(\cdot,a_2) dg_{(x,y)}(\cdot,a_2) + \int_0^{a_2} H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(\cdot,a_1) dg_{(x,y)}(\cdot,a_1) \\
&\quad - \int_{a_1}^{a_2} H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(a_2,\cdot) dg_{(x,y)}(a_2,\cdot) + \int_{a_1}^{a_2} H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(0,\cdot) dg_{(x,y)}(0,\cdot) \\
&\quad + \iint\limits_{[0,a_2]\times[a_1,a_2]} H^{\beta 1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2} dg_{(x,y)} \Big| \\
&\quad + \Big| H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(a_2,a_1) g_{(x,y)}(a_2,a_1) - H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(a_1,a_1) g_{(x,y)}(a_1,a_1) \\
&\quad + H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(a_2,0) g_{(x,y)}(a_2,0) - H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(a_1,0) g_{(x,y)}(a_1,0) \\
&\quad - \int_{a_1}^{a_2} H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(\cdot,a_1) dg_{(x,y)}(\cdot,a_1) + \int_{a_1}^{a_2} H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(\cdot,0) dg_{(x,y)}(\cdot,0) \\
&\quad - \int_0^{a_1} H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(a_2,\cdot) dg_{(x,y)}(a_2,\cdot) + \int_0^{a_1} H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2}(a_1,\cdot) dg_{(x,y)}(a_1,\cdot) \\
&\quad + \iint\limits_{[a_1,a_2]\times[0,a_1]} H^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2} dg_{(x,y)} \Big| \\
&\leq 2Si(\pi)^2\varepsilon + Si(\pi)^2 Var(g_{(x,y)}(\cdot,a_2),[0,a_2]) + Si(\pi)^2 Var(g_{(x,y)}(\cdot,a_1),[0,a_2]) \\
&\quad + Si(\pi)^2 Var(g_{(x,y)}(a_2,\cdot),[a_1,a_2]) + Si(\pi)^2 Var(g_{(x,y)},[0,a_2]\times[a_1,a_2]) \\
&\quad + 2Si(\pi)^2\varepsilon + Si(\pi)^2 Var(g_{(x,y)}(\cdot,a_1),[a_1,a_2]) + Si(\pi)^2 Var(g_{(x,y)}(a_2,\cdot),[0,a_1]) \\
&\quad + Si(\pi)^2 Var(g_{(x,y)}(a_1,\cdot),[0,a_1]) + Si(\pi)^2 Var(g_{(x,y)},[a_1,a_2]\times[0,a_1]) \\
&< 12Si(\pi)^2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

donde $Si$ es la función integral seno definida en [14, Remark 2].

Concluimos la prueba observando que de las desigualdades anteriores, se tiene que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$
\left| \iint\limits_{[0,a_1]\times[0,a_1]} g_{(x,y)}(t_1,t_2) h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1) h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2) d(t_1,t_2) - \iint\limits_{[0,a_2]\times[0,a_2]} g_{(x,y)}(t_1,t_2) h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1) h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2) d(t_1,t_2) \right| < 12Si(\pi)^2\varepsilon,
$$

para cada $a_2, a_1 \geq \delta_0$ y $0 < \alpha_i < \beta_i < \infty$ con $i = 1, 2$.

□

## 3.4. Teorema de Dirichlet-Jordan sobre $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$

El siguiente resultado es una versión del Teorema de Dirichlet-Jordan para la transformada de KP-Fourier, el cual consideramos relevante debido a que generaliza la versión clásica al plantearlo sobre un espacio de funciones de dos variables que contiene propiamente a $L^1(\mathbb{R}^2) \cap BV_H(\mathbb{R}^2)$.

**Teorema 3.4.1.** *Sea $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ y sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces,*

$$\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\substack{\alpha_1,\alpha_2 \to 0 \\ \beta_1,\beta_2 \to \infty}} \iint\limits_{R_{\alpha_1,\alpha_2}^{\beta_1,\beta_2}} \mathcal{F}(f)(\varepsilon,\eta) e^{i(x\varepsilon+y\eta)} d(\varepsilon,\eta) = \frac{f(x+,y+) + f(x+,y-) + f(x-,y+) + f(x-,y-)}{4}.$$

*Demostración.* Por la Proposición 3.3.2 y (3.23), para cada $0 < \alpha_i < \beta_i < \infty$ con $i = 1, 2$,

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R_{\alpha_1,\alpha_2}^{\beta_1,\beta_2}} \mathcal{F}(f)(\varepsilon,\eta) e^{i(x\varepsilon+y\eta)} d(\varepsilon,\eta) = \lim_{a\to\infty} \iint\limits_{[0,a]\times[0,a]} g_{(x,y)}(t_1,t_2) h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1) \times h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2) d(t_1,t_2). \tag{3.24}$$

Para $a > 0$, se cumple

- $\lim\limits_{\substack{\alpha_2 \to 0 \\ \beta_2 \to \infty}} \int_0^a g_{(x,y)}(t_1,t_2) h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2) dt_2 = g_{(x,y)}(t_1, 0+)/2$, para $t_1 \in [0, a]$,
- $\left| \int_0^a g_{(x,y)}(t_1,t_2) h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2) dt_2 \right| \leq 2Si(\pi)(||g_{(x,y)}||_\infty + Var(g_{(x,y)}, \mathbb{R}^2))$ para $t_1 \in [0, a]$ y $0 < \alpha_2 < \beta_2 < \infty$,
- $\{\int_0^a g_{(x,y)}(\cdot,t_2) h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2) dt_2\}_{0<\alpha_2<\beta_2<\infty} \subset L^1([0, a])$.

Del Teorema de Fubini y del Teorema de la Convergencia Dominada tenemos, para cada $a > 0$ y $0 < \alpha_1 < \beta_1 < \infty$,

$$\lim_{\substack{\alpha_2 \to 0 \\ \beta_2 \to \infty}} \iint\limits_{[0,a]\times[0,a]} g_{(x,y)}(t_1,t_2) h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1) h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2) d(t_1,t_2) = \int_0^a \frac{g_{(x,y)}(t_1,0+)}{2} \times h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1) dt_1. \tag{3.25}$$

De (3.22), (3.25) y [11, Teorema 1],

$$\lim_{\substack{\alpha_2\to 0\\ \beta_2\to\infty}}\lim_{a\to\infty}\iint_{[0,a]\times[0,a]} g_{(x,y)}(t_1,t_2)h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1)h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2)d(t_1,t_2)$$
$$=\lim_{a\to\infty}\lim_{\substack{\alpha_2\to 0\\ \beta_2\to\infty}}\iint_{[0,a]\times[0,a]} g_{(x,y)}(t_1,t_2)h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1)h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2)d(t_1,t_2). \quad (3.26)$$

Finalmente, con ayuda de (3.24), (3.25) y (3.26) se sigue

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi^2}\lim_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\to 0\\ \beta_1,\beta_2\to\infty}}\iint_{R_{\alpha_1,\alpha_2}^{\beta_1,\beta_2}}\mathcal{F}(f)(\varepsilon,\eta)e^{i(x\varepsilon+y\eta)}d(\varepsilon,\eta) &= \lim_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \beta_1\to\infty}}\lim_{\substack{\alpha_2\to 0\\ \beta_2\to\infty}}\lim_{a\to\infty}\iint_{[0,a]\times[0,a]} g_{(x,y)}(t_1,t_2)\\ &\quad\times h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1)h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2)d(t_1,t_2)\\ &= \lim_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \beta_1\to\infty}}\lim_{a\to\infty}\lim_{\substack{\alpha_2\to 0\\ \beta_2\to\infty}}\iint_{[0,a]\times[0,a]} g_{(x,y)}(t_1,t_2)\\ &\quad\times h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1)h_{\beta_2,\alpha_2}(t_2)d(t_1,t_2)\\ &= \lim_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \beta_1\to\infty}}\lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{g_{(x,y)}(t_1,0+)}{2}h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1)dt_1\\ &= \lim_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \beta_1\to\infty}}\int_0^\infty \frac{g_{(x,y)}(t_1,0+)}{2}h_{\beta_1,\alpha_1}(t_1)dt_1\\ &= \frac{g_{(x,y)}(0+,0+)}{4},\end{aligned}$$

donde $g_{(x,y)}(0+,0+) = f(x+,y+) + f(x+,y-) + f(x-,y+) + f(x-,y-)$. □

## 3.5. Inversión Uniforme de la Transformada de KP-Fourier

En esta sección abordamos debidamente el problema de inversión uniforme en un punto. Pero antes, enunciamos algunas propiedades que nos resultan de utilidad.

**Teorema 3.5.1.** *Sea $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ y sean $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in (L)$ con constantes $A_1$ y $A_2$, respectivamente. Entonces, para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,*

$$\sum_{i=2,j=2}^{\infty}\sup_{u\in[u_{i-1},u_i]}\sup_{v\in[v_{j-1}v_j]}\left|\frac{1}{4\pi^2}\iint_{R_{u_{i-1},v_{j-1}}^{u,v}}\mathcal{F}(f)(t_1,t_2)e^{i(xt_1+yt_2)}d(t_1,t_2)\right| \le kVar(f,\mathbb{R}^2),$$

*donde $k = (3A_1+4)(3A_2+4)/\pi^2$.*

*Demostración.* Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fijo. Para $u \in [u_{i-1}, u_i]$, $v \in [v_{j-1}, v_j]$, con $i,j \geq 2$, definamos la función

$$A_{i,j}(u,v) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^{u,v}_{u_{i-1},v_{j-1}}} \mathcal{F}(f)(t_1,t_2) e^{i(xt_1+yt_2)} d(t_1,t_2).$$

Por la Proposición 3.3.2, se tiene

$$\begin{aligned} A_{i,j}(u,v) =& \frac{1}{\pi^2} \lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x+t_1,y+t_2) \left( \frac{sen(ut_1) - sen(u_{i-1}t_1)}{t_1} \right) \\ & \times \left( \frac{sen(vt_2) - sen(v_{j-1}t_2)}{t_2} \right) d(t_1,t_2) \\ =& \frac{1}{\pi^2} \lim_{\substack{a,c\to-\infty \\ b,d\to\infty}} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x+t_1,y+t_2) \left( \int_{u_{i-1}}^{u} cos(t_1\tau) d\tau \right) \\ & \times \left( \int_{v_{j-1}}^{v} cos(t_2\tau) d\tau \right) d(t_1,t_2). \end{aligned}$$

Como $f(x+\cdot, y+\cdot) \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$, y por los Teoremas 3.1.1 y 3.1.2, se obtiene

$$\begin{aligned} A_{i,j}(u,v) &= \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x+t_1,y+t_2) d \left( \int_{u_{i-1}}^{u} \frac{sen(t_1\tau)}{\tau} d\tau \right) \left( \int_{v_{j-1}}^{v} \frac{sen(t_2\tau)}{\tau} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left( \int_{u_{i-1}}^{u} \frac{sen(t_1\tau)}{\tau} d\tau \right) \left( \int_{v_{j-1}}^{v} \frac{sen(t_2\tau)}{\tau} d\tau \right) df(x+t_1,y+t_2). \end{aligned}$$

Ahora, el inciso 2) del Teorema 2.3.2 asegura lo siguiente

$$\begin{aligned} |A_{i,j}(u,v)| &\leq \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{u_{i-1}}^{u} \frac{sen(t_1\tau)}{\tau} d\tau \right| \left| \int_{v_{j-1}}^{v} \frac{sen(t_2\tau)}{\tau} d\tau \right| dV_{x,y}(f;t_1,t_2) \\ &=: B, \end{aligned} \tag{3.27}$$

donde $V_{x,y}(f;t_1,t_2) = Var(f, (-\infty, x+t_1] \times (-\infty, y+t_2])$.

Empleando el Teorema 2.3.3, existe $\mathbb{M}$ una $\sigma-$álgebra de $\mathbb{R}^2$ y una medida $\mu_{x,y}$ sobre $\mathbb{M}$ tal que

$$\begin{aligned} B =& \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{u_{i-1}}^{u} \frac{sen(t_1\tau)}{\tau} d\tau \right| \left| \int_{v_{j-1}}^{v} \frac{sen(t_2\tau)}{\tau} d\tau \right| d\mu_{x,y}(t_1,t_1) \\ \leq& \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left( \max_{u\in[u_{i-1},u_i]} \left| \int_{u_{i-1}}^{u} \frac{sen(t_1\tau)}{\tau} d\tau \right| \right) \\ & \times \left( \max_{v\in[v_{j-1},v_j]} \left| \int_{v_{j-1}}^{v} \frac{sen(t_2\tau)}{\tau} d\tau \right| \right) d\mu_{x,y}(t_1,t_1). \end{aligned} \tag{3.28}$$

De (3.27) y (3.28), se cumple para $u \in [u_{i-1}, u_i]$ y $v \in [v_{j-1}, v_j]$ lo que sigue

$$\begin{aligned}|A_{i,j}(u,v)| \leq & \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left( \max_{u\in[u_{i-1},u_i]} \left| \int_{u_{i-1}}^{u} \frac{sen(t_1\tau)}{\tau} d\tau \right| \right) \\ & \times \left( \max_{v\in[v_{j-1},v_j]} \left| \int_{v_{j-1}}^{v} \frac{sen(t_2\tau)}{\tau} d\tau \right| \right) d\mu_{x,y}(t_1,t_1).\end{aligned}$$

Definamos, para cada $i, j \geq 2$,

$$M_{i,j}(f;x,y) := \sup_{u\in[u_{i-1},u_i]} \sup_{v\in[v_{j-1}v_j]} |A_{i,j}(u,v)| .$$

Luego, para cada $i, j \geq 2$,

$$\begin{aligned}M_{i,j}(f;x,y) \leq & \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left( \max_{u\in[u_{i-1},u_i]} \left| \int_{u_{i-1}}^{u} \frac{sen(t_1\tau)}{\tau} d\tau \right| \right) \\ & \times \left( \max_{v\in[v_{j-1},v_j]} \left| \int_{v_{j-1}}^{v} \frac{sen(t_2\tau)}{\tau} d\tau \right| \right) d\mu_{x,y}(t_1,t_1).\end{aligned} \tag{3.29}$$

Sumando la desigualdades (3.29) para $i, j \geq 2$, se llega a

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} M_{i,j}(f;x,y) \leq & \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left( \max_{u\in[u_{i-1},u_i]} \left| \int_{u_{i-1}}^{u} \frac{sen(t_1\tau)}{\tau} d\tau \right| \right) \\ & \times \left( \max_{v\in[v_{j-1},v_j]} \left| \int_{v_{j-1}}^{v} \frac{sen(t_2\tau)}{\tau} d\tau \right| \right) d\mu_{x,y}(t_1,t_1) \\ = & \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left( \sum_{i=2}^{\infty} \max_{u\in[u_{i-1},u_i]} \left| \int_{u_{i-1}}^{u} \frac{sen(t_1\tau)}{\tau} d\tau \right| \right) \\ & \times \left( \sum_{j=2}^{\infty} \max_{v\in[v_{j-1},v_j]} \left| \int_{v_{j-1}}^{v} \frac{sen(t_2\tau)}{\tau} d\tau \right| \right) d\mu_{x,y}(t_1,t_1) \\ \leq & \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} (3A_1+4)(3A_2+4) d\mu_{x,y}(t_1,t_1) \\ = & \frac{1}{\pi^2} (3A_1+4)(3A_2+4) Var(f,\mathbb{R}^2).\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.5.2.** *Sea $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$. Si $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in (L)$ con constantes $A_1$ y $A_2$, entonces la serie*

$$\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} \sup_{u\in[u_{i-1},u_i]} \sup_{v\in[v_{j-1}v_j]} \left| \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^{u,v}_{u_{i-1},v_{j-1}}} \mathcal{F}(f)(t_1,t_2) e^{i(\cdot t_1 + \cdot t_2)} d(t_1,t_2) \right| \tag{3.30}$$

*converge uniformemente en puntos de continuidad de $f$.*

*Demostración.* Sean $n, m \in \mathbb{N}$ arbitrarios. De la última parte de la prueba del Teorema 3.5.1, se obtiene para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=m+1}^{\infty} M_{i,j}(f;x,y) \leq \frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathbb{R}^2}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\max_{u\in[u_{i-1},u_i]}\left|\int_{u_{i-1}}^{u}\frac{sen(t_1\tau)}{\tau}d\tau\right|\right) \times\left(\sum_{j=m+1}^{\infty}\max_{v\in[v_{j-1},v_j]}\left|\int_{v_{j-1}}^{v}\frac{sen(t_2\tau)}{\tau}d\tau\right|\right)d\mu_{x,y}(t_1,t_1), \tag{3.31}$$

donde $\mu_{x,y}$ es la medida que resulta de aplicar el Teorema 2.3.3 y que satisface

$$\mu_{x,y}(int(R)) \leq Var(f, cl(R) + (x,y)) \tag{3.32}$$

y

$$\mu_{x,y}(\mathbb{R}^2) \leq Var(f, \mathbb{R}^2). \tag{3.33}$$

Además,

$$M_{i,j}(f;x,y) := \sup_{u\in[u_{i-1},u_i]}\sup_{v\in[v_{j-1}v_j]}\left|\frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^{u,v}_{u_{i-1},v_{j-1}}}\mathcal{F}(f)(t_1,t_2)e^{i(\cdot t_1+\cdot t_2)}d(t_1,t_2)\right|.$$

Sean $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto de continuidad de $f$ y $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 2.2.2, existe $\delta > \delta_0 = \delta/2 > 0$, tal que

$$Var(f, [x_0 - 2\delta_0, x + 2\delta_0] \times [y_0 - 2\delta_0, y_0 + 2\delta_0]) < \varepsilon.$$

Ahora, si $(x', y') \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \times (y_0 - \delta_0, y_0 + \delta_0)$, se cumple $[x' - \delta_0, x' + \delta_0] \times [y' - \delta_0, y' + \delta_0] \subset [x_0 - 2\delta_0, x_0 + 2\delta_0] \times [y_0 - 2\delta_0, y_0 + 2\delta_0]$. Entonces,

$$Var(f, [x' - \delta_0, x' + \delta_0] \times [y' - \delta_0, y' + \delta_0]) < \varepsilon.$$

Sean $0 < \delta_1 < \delta_0$ fijo y $(x', y') \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \times (y_0 - \delta_0, y_0 + \delta_0)$ cualquiera. De (3.31),

$$\begin{aligned}\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=m+1}^{\infty} M_{i,j}(f;x',y') \leq & \frac{1}{\pi^2}\left(\iint_{\substack{|t_1|\leq\delta_1\\|t_2|\leq\delta_1}} + \iint_{\substack{|t_1|\geq\delta_1\\|t_2|\leq\delta_1}} + \iint_{\substack{|t_1|\leq\delta_1\\|t_2|\geq\delta_1}} + \iint_{\substack{|t_1|\geq\delta_1\\|t_2|\geq\delta_1}}\right) \\ & \left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\max_{u\in[u_{i-1},u_i]}\left|\int_{u_{i-1}}^{u}\frac{sen(t_1\tau)}{\tau}d\tau\right|\right) \\ & \times\left(\sum_{j=m+1}^{\infty}\max_{v\in[v_{j-1},v_j]}\left|\int_{v_{j-1}}^{v}\frac{sen(t_2\tau)}{\tau}d\tau\right|\right)d\mu_{x',y'}(t_1,t_1) \\ = & I_1 + I_2 + I_3 + I_4.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Del Teorema 2.5.1 y de (3.32), se tiene

$$\begin{aligned} I_1 \leq & \frac{(3A_1+4)(3A_2+4)}{\pi^2} \iint\limits_{\substack{|t_1|\leq\delta_1 \\ |t_2|\leq\delta_1}} d\mu_{x',y'}(t_1,t_1) \\ \leq & \frac{(3A_1+4)(3A_2+4)}{\pi^2}\mu_{x',y'}([-\delta_1,\delta_1]\times[-\delta_1,\delta_1]) \\ \leq & \frac{(3A_1+4)(3A_2+4)}{\pi^2}\mu_{x',y'}((-\delta_0,\delta_0)\times(-\delta_0,\delta_0)) \\ \leq & \frac{(3A_1+4)(3A_2+4)}{\pi^2}Var(f,[x'-\delta_0,x'+\delta_0]\times[y'-\delta_0,y'+\delta_0]) \\ \leq & \frac{(3A_1+4)(3A_2+4)}{\pi^2}\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.35}$$

De los Teoremas 2.5.1, 2.5.2 y de (3.33), obtenemos

$$\begin{aligned} I_2 \leq & \frac{(3A_2+4)}{\pi^2} \iint\limits_{\substack{|t_1|\geq\delta_1 \\ |t_2|\leq\delta_1}} \frac{3A_1}{|t_1|u_n} d\mu_{x',y'}(t_1,t_1) \\ \leq & \frac{3A_1(3A_2+4)}{\delta_1 u_n \pi^2}\mu_{x',y'}(\{|t_1|\geq\delta_1,|t_2|\leq\delta_1\}) \\ \leq & \frac{3A_1(3A_2+4)}{\delta_1 u_n \pi^2}Var(f,\mathbb{R}^2). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Invirtiendo los índices en el proceso anterior y bajo argumentos similares, se sigue

$$\begin{aligned} I_3 \leq & \frac{(3A_1+4)}{\pi^2} \iint\limits_{\substack{|t_1|\leq\delta_1 \\ |t_2|\geq\delta_1}} \frac{3A_2}{|t_2|v_m} d\mu_{x',y'}(t_1,t_1) \\ \leq & \frac{3A_2(3A_1+4)}{\delta_1 v_m \pi^2}\mu_{x',y'}(\{|t_1|\leq\delta_1,|t_2|\geq\delta_1\}) \\ \leq & \frac{3A_2(3A_1+4)}{\delta_1 v_m \pi^2}Var(f,\mathbb{R}^2). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Finalmente, del Teorema 2.5.2 se llega a

$$\begin{aligned} I_4 \leq & \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\substack{|t_1|\geq\delta_1 \\ |t_2|\geq\delta_1}} \left(\frac{3A_1}{|t_1|u_n}\right)\left(\frac{3A_2}{|t_2|v_m}\right) d\mu_{x',y'}(t_1,t_1) \\ \leq & \frac{9A_1A_2}{\delta_1^2 u_n v_m \pi^2}\mu_{x',y'}(\{|t_1|\geq\delta_1,|t_2|\geq\delta_1\}) \\ \leq & \frac{9A_1A_2}{\delta_1^2 u_n v_m \pi^2}Var(f,\mathbb{R}^2). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Sumando (3.35), (3.36), (3.37) y (3.38), se cumple

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=m+1}^{\infty} M_{i,j}(f;x',y') \leq \frac{(3A_1+4)(3A_2+4)}{\pi^2} \times \left(\varepsilon + \left(\frac{1}{\delta_1 u_n} + \frac{1}{\delta_1 v_m} + \frac{1}{\delta_1^2 u_n v_m}\right) Var(f,\mathbb{R}^2)\right),$$

para todo $(x',y') \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\times(y_0-\delta_0, y_0+\delta_0)$ y $n,m \in \mathbb{N}$.

Teniendo en cuenta la Definición 2.5.1. Para $\varepsilon > 0$ dado, existen $N, M \in \mathbb{N}$ tales que para $n \geq N$ y $m \geq M$, se tiene

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=m+1}^{\infty} M_{i,j}(f;x',y') \leq \frac{(3A_1+4)(3A_2+4)}{\pi^2} 4\varepsilon,$$

para todo $(x',y') \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\times(y_0-\delta_0, y_0+\delta_0)$. □

**Corolario 3.5.1.** *Sean $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$, $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in (L)$, $u_0 \in (0,u_1)$ y $v_0 \in (0,v_1)$. Entonces, la serie (3.30) converge uniformemente en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, punto de continuidad de $f$, y uniformemente sobre $(u_0,v_0) \in (0,u_1)\times(0,v_1)$.*

*Demostración.* Se sigue de la Observación 2.5.1 y el teorema anterior. □

**Corolario 3.5.2.** *Sean $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$, $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in (L)$, $u_0 \in (0,u_1)$ y $v_0 \in (0,v_1)$. Entonces, el límite*

$$\lim_{\beta_1,\beta_2\to\infty} \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R_{u_0,v_0}^{\beta_1,\beta_2}} \mathcal{F}(f)(\varepsilon,\eta) e^{i(x\varepsilon+y\eta)} d(\varepsilon,\eta)$$

*converge uniformemente en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, punto de continuidad de $f$, y uniformemente sobre $(u_0,v_0) \in (0,u_1)\times(0,v_1)$.*

*Demostración.* Es inmediato del Corolario 3.5.1. □

**Teorema 3.5.3.** *Sea $f \in BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$. Entonces, el límite*

$$\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\to 0\\ \beta_1,\beta_2\to\infty}} \iint\limits_{R_{\alpha_1,\alpha_2}^{\beta_1,\beta_2}} \mathcal{F}(f)(\varepsilon,\eta) e^{i(x\varepsilon+y\eta)} d(\varepsilon,\eta) = f(x,y)$$

*converge uniformemente en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ un punto de continuidad de $f$.*

*Demostración.* Sean $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in (L)$, $\alpha_1 \in (0,u_1)$ y $\alpha_2 \in (0,v_1)$. Por el Teorema 3.5.1, podemos definir la función

$$A(\alpha_1,\alpha_2,x,y) = \lim_{\beta_1,\beta_2\to\infty} \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R_{\alpha_1,\alpha_2}^{\beta_1,\beta_2}} \mathcal{F}(f)(\varepsilon,\eta) e^{i(x\varepsilon+y\eta)} d(\varepsilon,\eta),$$

para cada $(\alpha_1, \alpha_2, x, y) \in (0, u_1) \times (0, u_1) \times \mathbb{R}^2$.

Sabemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\to 0\\ \beta_1,\beta_2\to\infty}} \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R_{\alpha_1,\alpha_2}^{\beta_1,\beta_2}} \mathcal{F}(f)(\varepsilon,\eta) e^{i(x\varepsilon+y\eta)} d(\varepsilon,\eta) \\
&\quad = \lim_{\alpha_1,\alpha_2\to 0} \left( \lim_{\beta_1,\beta_2\to\infty} \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R_{\alpha_1,\alpha_2}^{\beta_1,\beta_2}} \mathcal{F}(f)(\varepsilon,\eta) e^{i(x\varepsilon+y\eta)} d(\varepsilon,\eta) \right) \\
&\quad = \frac{f(x+,y+) + f(x+,y-) + f(x-,y+) + f(x-,y-)}{4},
\end{aligned} \tag{3.39}$$

para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la Proposición 3.3.2 y el Corolario 3.5.2, existen $M > 0$ y $U$ vecindad de $(x, y)$ tales que si $\beta_1, \beta_2 > M$, entonces, para cada $(x', y') \in U$ y $(\alpha_1, \alpha_2) \in (0, u_1) \times (0, v_1)$,

$$\begin{aligned}
\Bigg| &\frac{1}{\pi^2} \lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) \frac{sen\beta_1(x'-t_1)}{x'-t_1} \frac{sen\beta_2(y'-t_2)}{y'-t_2} d(t_1,t_2) \\
&- \frac{1}{\pi^2} \lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) \frac{sen\beta_1(x'-t_1)}{x'-t_1} \frac{sen\alpha_2(y'-t_2)}{y'-t_2} d(t_1,t_2) \\
&- \frac{1}{\pi^2} \lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) \frac{sen\alpha_1(x'-t_1)}{x'-t_1} \frac{sen\beta_2(y'-t_2)}{y'-t_2} d(t_1,t_2) \\
&+ \frac{1}{\pi^2} \lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) \frac{sen\alpha_1(x'-t_1)}{x'-t_1} \frac{sen\alpha_2(y'-t_2)}{y'-t_2} d(t_1,t_2) \\
&- A(\alpha_1,\alpha_2,x',y') \Bigg| < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

De (3.39) y al aplicar el límite, cuando $\alpha_1, \alpha_2 \to 0$, a la inecuación anterior obtenemos que si $\beta_1, \beta_2 > M$, entonces

$$\begin{aligned}
\Bigg| &\frac{1}{\pi^2} \lim_{\substack{a,c\to-\infty\\ b,d\to\infty}} \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(t_1,t_2) \frac{sen\beta_1(x'-t_1)}{x'-t_1} \frac{sen\beta_2(y'-t_2)}{y'-t_2} d(t_1,t_2) \\
&- \frac{f(x'+,y'+) + f(x'+,y'-) + f(x'-,y'+) + f(x'-,y'-)}{4} \Bigg| < \varepsilon,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

para cada $(x', y') \in U$.

De (3.40) y el Teorema 3.2.2 se concluye la prueba.

□

# Capítulo 4

# Conclusiones

De acuerdo a (3.3) y a la Observación 3.3.1, los cuales nos dicen respectivamente que $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$ contiene propiamente a $L^1(\mathbb{R}^2) \cap BV_H(\mathbb{R}^2)$ y que la transformada de KP-Fourier extiende a la transformada clásica, podemos afirmar que la versión del Teorema de Dirichlet-Jordan sobre el espacio $BV_{||0||}(\mathbb{R}^2)$, Teorema 3.5.3, es una generalización del Teorema 5, enunciado en la Introducción.

Esto nos conduce a que el Teorema 3.4.1 permite realizar las mismas aplicaciones que el Teorema 5 pero a una gama de funciones más amplia, lo que significa que por medio de este resultado damos solución al problema de inversión de manera puntual o puntual uniforme a una familia de funciones más grande. Además, es importante resaltar que en el proceso de estudio obtuvimos nuevos resultados.

# Bibliografía


[1] Adams, C. R. and Clarkson, J. A., *Properties of functions $f(x, y)$ of bounded variation*. Transactions of the American Mathematical Society, 36(4), pp. 711–730, 1934.

[2] Antunes G., Slavík A., and Tvrdý S., *Henstock-Stieltjes Integral Theory and Applications*. World Scientists, Singapure, 2017.

[3] Bachman, G. and Naciri, L., *Fourier and Wavelet Analysis*. Springer-Verlang, New York, 1991.

[4] Bartle R., *A modern theory of integration*. American Mathematical Society, Illinois, 2001.

[5] Bary N. K., *A treatise on trigonometric series*, Pergamon, New York, 1964.

[6] Bonnar J., *The Gamma function*. Treasure trove of mathematics, 2017.

[7] Bustamante J., *Lecciones de Análisis Matemático*, 2018.

[8] Folland, G. B., *Fourier Analysis and its Applications*. The Wadsworthand Books, California, 1992.

[9] Gasquet, C. and Witomski, P., *Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation, Wavelets*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[10] Ghodadra, B. L. and Fülöp, V., *On the convergence of double Fourier integrals of functions of bounded variation on $\mathbb{R}^2$*. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 53(3), pp. 289–313, 2016.

[11] Kadelburg, Z. and Marjanović, M., *Interchanging two limits*. The Teaching of Mathematics, 8(1), pp. 15–29, 2005.

[12] Lee Tuo Yeong, *Henstock–Kurzweil Integration on Euclidean Spaces*. World Scientific Publishing, Singapore, 2011.

[13] Mendoza, F. J., *On pointwise inversion of the Fourier transform of $BV_0$ functions*. Annals of Functional Analysis, 1(2), pp. 112–120, 2010.

[14] Mendoza, F. J., Torres, E., and Sengul, U., *A contribution to the Dirichlet-Jordan theorem for non Lebesgue integrable functions*. Eurasian Bulletin of Mathematics, 3(3), pp. 114–126, 2020.

[15] Mendoza, F., Arredondo, J., Sánchez, S., Flores, O. and Torres, E., *The double Fourier transform of non-Lebesgue integrable functions of bounded Hardy-Krause variation*. Georgian Mathematical Journal, 30(3), pp. 403-415, 2023.

[16] Morales, M. G., Arredondo, J. H., and Mendoza, F. J., *An extension of some properties for the Fourier transform operator on $L^p(\mathbb{R})$ spaces*. Revista de la Unión Matemática Argentina, 57(2), pp. 85-94, 2016.

[17] Móricz, F., *Pointwise behavior of Fourier integrals of functions of bounded variation over* $\mathbb{R}$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 297(2), pp. 527–539, 2004.

[18] Móricz, F., *Pointwise convergence of double Fourier integrals of functions of bounded variation over* $\mathbb{R}^2$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 424(2), pp. 1530–1543, 2015.

[19] Muldowney, P. and Skvortsov, V., *Improper Riemann Integral and Henstock Integral in* $\mathbb{R}^n$. Mathematical Notes, 78(2), pp. 228-233, 2002.

[20] Riesz, M. and Livingston, A. E., *A short proof of a classical theorem in the theory of Fourier integrals*. American Mathematical Monthly, 62, pp. 434-437, 1955.

[21] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1987.

[22] Pringsheim, A., *Elementare Theorie der unendliche Doppel-reihen*. Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaft, Munich, 27, pp. 101-153, 1897.

[23] Talvila, E., *Henstock-Kurzweil Fourier transforms*. Illinois Journal of Mathematics, 46(4), pp. 1207–1226, 2002.

[24] Tichmarsh, E., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Oxford University Press, Great Britian, 1948.

[25] Vretblad, A., *Fourier Analysis and its Applications*. Springer-Verlag, New York, 2003.