



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
PUEBLA**

---

**DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**Representaciones de grupos de enlaces vía Quandles**

(Un primer paso hacia la generalización de la rebanada de Riley)

**TESIS**

PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

P R E S E N T A:

**ANGEL RODRÍGUEZ SÁNCHEZ**

DIRECTORES DE TESIS:

**DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO**

**DR. ANGEL CANO CORDERO**

PUEBLA, PUEBLA. 2021.



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
PUEBLA**

---

**DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**Representaciones de grupos de enlaces vía Quandles**

(Un primer paso hacia la generalización de la rebanada de Riley)

**TESIS**

PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

P R E S E N T A:

**ANGEL RODRÍGUEZ SÁNCHEZ**

DIRECTORES DE TESIS:

**DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO  
DR. ANGEL CANO CORDERO**

PUEBLA, PUEBLA. 2021.



**Jurado asignado:**

Presidente: Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna

Secretario: Dr. Carlos Guillén Galván

1<sup>er</sup> Vocal: Dr. Alexander I. Bykov Barabanov

2<sup>do</sup> Vocal: Dr. Faustino Agustín Romano Velázquez

Oponente: Dr. Guillermo Javier Francisco Sierra Loera

Lugar donde se realizó la tesis:

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM)

de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

Director de tesis:

---

**Dra. Patricia Domínguez Soto.**

Director de tesis:

---

**Dr. Angel Cano Cordero.**



# Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud a mis asesores la Dra. Patricia Domínguez Soto y el Dr. Angel Cano Cordero por su estupenda labor como directores de tesis. La tesis que ahora presento es la culminación de 4 años de trabajo en los que han sabido motivarme, orientarme con sus acertados consejos y, en cualquier caso, ofrecerme su entera disponibilidad. El apoyo, disponibilidad y consejos que me han mostrado ha sido fundamental para el buen término de esta tesis.

Quiero mostrar también mi agradecimiento a los profesores de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, así como también agradezco al personal del UCIM de la UNAM por su amabilidad y ayuda durante mi estadía ahí.

Doy también testimonio de mi gratitud hacia el M.C. Juan Francisco Estrada García quien me formó en la licenciatura y maestría sin su apoyo no habría logrado tanto.

También agradezco al Dr. Faustino Agustín Romano Velázquez por sus amables comentarios e innumerables consejos en transcurso de este trabajo.

Quiero agradecer a los miembros de jurado quienes han seguido semestre con semestre mi trabajo y han sabido aconsejarme para mejorarlo.

Con especial cariño, quisiera agradecer a mi familia su incondicional apoyo así como también a los amigos que me han estado presentes en mi vida.

Quiero hacer extensivo mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (**CONACyT**), por el apoyo brindado para poder realizar mis estudios de Doctorado.





A  
mi familia



así

como también a todos los que me apoyaron.



Nadie puede enfrentarse al infinito sin sentir vértigo.  
Nadie puede experimentarlo sin sentir un desconcierto profundo.  
¡Es normal!

*Gustavo Mosquera*

A mis soledades voy,  
de mis soledades vengo,  
porque para andar conmigo  
me bastan mis pensamientos.

*Lope de Vega*

Las matemáticas pueden ser definidas como aquel tema del cual no  
sabemos nunca lo que decimos ni si lo que decimos es verdadero.

*Bertrand Russell*

Por ti, trasnocho y madrugo  
Por ti, yo me acuesto tarde.

*Manu Chao. Libertad*



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Geometría proyectiva compleja . . . . .	3
1.1.1. Curva de Veronese . . . . .	4
1.1.2. Geometría hiperbólica compleja . . . . .	5
1.2. Enlaces . . . . .	7
1.3. Quandles . . . . .	12
<b>2. Descomposiciones QR, KAN y su implementación computacional</b>	<b>21</b>
2.1. Descomposición QR . . . . .	21
2.2. Descomposición de Iwasawa (KAN) . . . . .	23
<b>3. Qandle Parabólico Unipotente en <math>PSL(3, \mathbb{C})</math></b>	<b>25</b>
3.1. Clase de conjugación del elemento Parabólico Unipotente y su espacio homogéneo asociado . . . . .	25
3.2. Rebanada de Riley Compleja . . . . .	36
<b>4. Coloraciones del nudo ocho en el quandle parabólico unipotente de <math>PSL(3, \mathbb{C})</math></b>	<b>41</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>Apéndices</b>	<b>53</b>
<b>A. Grupos Libres</b>	<b>55</b>
A.1. Grupos Libres . . . . .	55
<b>B. La rebanada de Riley Clásica</b>	<b>59</b>
<b>C. Grupos de Lie y espacios homogéneos</b>	<b>61</b>
C.1. Espacios homogéneos . . . . .	61
C.2. Versión Algebraica de Generadores . . . . .	62
<b>D. Algoritmo de la operación del Qandle Parabolico Unipotente en <math>PSL(3, \mathbb{C})</math></b>	<b>65</b>
<b>E. Polinomios subyacentes de los cruces del nudo ocho</b>	<b>67</b>
Bibliografía	77



# Introducción

El estudio de los grupos discretos de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  fue iniciado de manera independiente por F. Schottky, F. Klein y H. Poincaré a finales del siglo XIX como una forma de estudiar de forma cualitativa las soluciones a ecuaciones diferenciales de Riccati. A finales del siglo XX, a partir de los trabajos de W. P. Thurston que conecta este tipo de grupos con el estudio de las tres variedades, véase [46], y los trabajos de R. Penrose en Teoría de Cuerdas que en la base Matemática pasan por el uso de superficies de Riemann, véase [42], es que el estudio de los grupos discretos de transformaciones de Möbius que actúan en la esfera de Riemann se convierten en un tema central dentro de la Matemática.

Uno de los grandes problemas dentro del estudio de grupos de transformaciones de Möbius que está abierto es decidir cuando un subgrupo de transformaciones de Möbius es discreto o no, para darse una idea de lo complicado de este problema M. Kapovich muestra que este es un problema indecidible en términos computacionales véase [25]. Uno de los primeros intentos para resolver este problema fue dado por T. Jørgensen quien en [23] propone una desigualdad que es una condición necesaria para que un subgrupo no elemental de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  generado por dos elementos sea discreto (un grupo  $G < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  se dice **no elemental** si su acción en la esfera de Riemann no tiene puntos con órbita finita). Motivado por este resultado e inspirado por su trabajo en Teoría de Nudos R. Riley propone en los 70's estudiar la discretos de grupos no elementales generados por dos transformaciones parabólicas, lo cual vía conjugación equivale a estudiar el conjunto de parámetros  $z \in \mathbb{C}$  para los cuales el grupo generado por elementos

$$\left\{ p(z) = \frac{z}{z+1}; q(z) = z+1 \right\}$$

es discreto, dicho conjunto de parámetros es conocido como la Rebanada de Riley. Vía el uso de la computadora Riley muestra que el grupo fundamental del nudo ocho aparece en la frontera de este conjunto y conjetura (entre otras cosas) que su frontera es una curva fractal, aunque una prueba completa de esto tuvo que esperar hasta los trabajos de L. King, C. Series y Y. Komori [26, 28, 40].

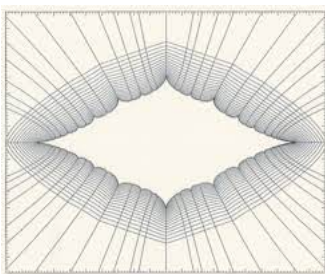


Figura 1: Rebanada de Riley. Imagen de David Wright hecha en 1992.

El objetivo inicial de esta tesis es generalizar en dimensión superior las ideas de Riley, *i. e.* tratar de entender condiciones bajo las cuales un grupo de  $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$  “no elemental” generado por

dos elementos “parabólicos” es discreto. Es de resaltar que en el caso de grupos biholomorfismos que preservan la bola unitaria en  $\mathbb{C}^2$  hay importantes avances debidos a J. Parker y P. Will quienes en [36] generalizan la rebanada de Riley, obtienen un espacio de parámetros, una región donde los grupos asociados son discretos e incluyen como ejemplo a una representación del grupo fundamental del complemento del nudo ocho en  $PU(2, 1)$ . Ante la falta de objetos geométricos y/o herramientas analíticas “adecuadas” para generalizar las ideas de L. King, C. Series y Y. Komori ahora en  $PSL(3, \mathbb{C})$ , el problema de estudiar la naturaleza geométrica analítica de la rebanada de Riley se convierte en un problema difícil de tratar. Por tal motivo y regresando a las ideas que inspiraron a Riley, *i. e.* el estudio de grupos de nudos hiperbólicos, en esta tesis se construye un método Teórico-Computacional para calcular las representaciones de grupos de “enlaces” y se verá como esto implica la reaparición del grupo fundamental del nudo ocho en la generalización de la Rebanada de Riley (Véase Corolario 4.0.11). Hay que mencionar que E. Falbel en [12] propone un método computacional (basado en una generalización del método de Thurston *et. al.* para calcular representaciones de grupos de enlaces) para construir representaciones de grupos fundamentales de 3-variedades de volumen finito lo cual incluiría la propuesta de este trabajo, sin embargo hay que mencionar que la construcción de E. Falbel tiene dos limitantes que la que aquí se presenta no, la primera es que el número de ecuaciones a resolver para encontrar las representaciones crece de forma exponencial con respecto al “número cruces” del enlace (la nuestra crece de forma polinomial véase Teorema 3.1.21) y la segunda es que el método de E. Falbel no calcula todas las representaciones (Véase Teorema 4.0.5 y Tesis Doctoral Alex Ucan [47]), estas limitantes aparecen debido a que E. Falbel considera un espectro mas amplio de tres variedades ya que busca entender cuando estas son la frontera de una 2-variedad compleja, véase [10].

Este trabajo de tesis se divide en dos partes: una computacional, donde mediante la ayuda de programas computacionales se obtiene información que rendirá cuentas respecto a las representaciones que se construirán; la segunda parte es una construcción basada en el concepto de Quandle que generaliza el trabajo de Inoue y Kabaya véase [21] y que nos permite encontrar de manera mas “eficiente” tales representaciones.

La tesis esta organizada de la manera siguiente: En el primer capítulo se describen los elementos principales de la Geometría Proyectiva, la Teoría de Nudos así como sus resultados básicos. También se introducen los conceptos básicos de la Teoría de Quandles y los resultados que relacionan a los nudos con esta estructura algebraica, se construye el quandle parabólico de  $PSL(2, \mathbb{C})$  y usando este quandle se ejemplifica como se obtiene la representación del grupo fundamental del complemento del nudo ocho en  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

En el segundo capítulo se plantea la importancia de la descomposición QR (se enuncia su Teorema), como se utiliza para obtener la Descomposición de Iwasawa y posteriormente se dan los programas que generan tales descomposiciones los cuales serán la base para poder estudiar las representaciones irreducibles del nudo ocho.

En el tercer Capítulo se construye un Quandle isomorfo a la clase de conjugación del elemento parabólico unipotente

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

llamado **Quandle parabólico unipotente** de  $PSL(3, \mathbb{C})$ . Para tal construcción fue necesario recurrir a algunos resultado sobre espacios homogéneos (véase Apéndice C) y a la Descomposición de Iwasawa (véase Teorema 2.2.1), también se define la rebanada de Ryley Compleja y se dan algunos resultados.

En el Cuarto Capítulo se usa el Quandle Parabólico Unipotente para obtener coloraciones del Quandle Fundamental del nudo ocho en él, posteriormente mediante la aplicación de un programa (cuya algoritmo está descrito en el Apéndice D) se obtienen sistemas de ecuaciones más agradables y con menos variables que en el caso de E. Falbel y cuya solución arroja las representaciones irreducibles del grupo fundamental del nudo ocho en  $PSL(3, \mathbb{C})$ .



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se darán definiciones y resultados básicos que se emplearán a lo largo de toda la tesis. Entre los temas a tratar se encuentran: Geometría Projectiva, Enlaces y Quandles.

### 1.1. Geometría proyectiva compleja

**Definición 1.1.1** (Véase [5]). *Se define el espacio proyectivo complejo de dimensión  $n$ , como*

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*,$$

donde  $\mathbb{C}^*$  actúa en  $\mathbb{C}^{n+1}$  mediante la multiplicación por escalar usual.

**Lema 1.1.2.** *El espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  es una variedad compleja de dimensión  $n$  compacta y conexa.*

**Definición 1.1.3.** *Sea*

$$[\ ]_n : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$$

la función cociente, entonces un subconjunto no vacío  $H$  de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  se dice que es un subespacio proyectivo de dimensión  $k$  si existe un subespacio  $\tilde{H}$  de  $\mathbb{C}^{n+1}$  de dimensión  $k+1$  que es  $\mathbb{C}$ -lineal y tal que  $[\tilde{H}]_n = H$ .

**Lema 1.1.4.** *Sea  $H$  subconjunto de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , se define*

$$\langle H \rangle = \bigcap \{l \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid l \text{ es un subespacio proyectivo y } H \subset l\},$$

así  $\langle H \rangle$  es un subespacio proyectivo. En particular, si  $p, q$  son puntos distintos de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , entonces  $\langle \{p, q\} \rangle$  es el único subespacio complejo propio que pasa a través de  $p$  y  $q$ .

**Definición 1.1.5.** *El subespacio proyectivo complejo  $\langle \{p, q\} \rangle$  se define como la línea proyectiva compleja entre  $p$  y  $q$  y se denotará por  $\overleftrightarrow{pq}$ .*

**Teorema 1.1.6** (Véase [5]). *El grupo de automorfismos proyectivos es:*

$$\mathrm{PSL}(n+1, \mathbb{C}) := \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})/(\mathbb{C}^*)^{n+1} \cong \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_n,$$

donde  $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$  se considera como el subgrupo de matrices diagonales con un solo eigenvalor distinto de cero y la acción de  $\mathbb{Z}_n$  (vista como las raíces  $n$ -ésimas de la unidad) en  $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C})$  dada por la multiplicación por escalar usual.

**Definición 1.1.7.** *Sean*

$$[[\ ]] : \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{PSL}(n+1, \mathbb{C})$$

la función cociente,  $g \in \mathrm{PSL}(n+1, \mathbb{C})$  y  $\hat{g} \in \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C})$ . Se dice que  $\hat{g}$  es un levantamiento de  $g$  si existe una raíz  $n$ -ésima  $\mu$  del determinante de  $g$  tal que  $[[\mu\hat{g}]] = g$ .

**Lema 1.1.8.** *El grupo  $\mathrm{PSL}(n+1, \mathbb{C})$  actúa en  $\mathbb{CP}^n$  de manera transitiva, efectiva y por biholomorfismos, además tiene la propiedad de mandar líneas proyectivas complejas en líneas proyectivas complejas.*

**Definición 1.1.9** (Véase [5]). *Un elemento  $g \in \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$  se dice parabólico si tiene un levantamiento que no es diagonalizable y cuyos valores propios son de norma uno. El elemento  $g$  se llama elíptico si tiene un levantamiento que es diagonalizable y cuyos valores propios son unitarios y se dice que  $g$  es loxodrómico en cualquier otro caso.*

**Definición 1.1.10** (Véase [30]). *Sea  $G$  un subgrupo de  $\mathrm{PSL}(n+1, \mathbb{C})$ , se define*

1. *El conjunto  $L_0(G)$  como la clausura del conjunto de puntos en  $\mathbb{CP}^n$  con grupo de isotropía infinito.*
2. *El conjunto  $L_1(G)$  como la clausura de los puntos de acumulación de las orbitas  $Gz$  para cada  $z$  en  $\mathbb{CP}^n \setminus L_0$ .*
3. *El conjunto  $L_2(G)$  es la clausura del conjunto de puntos  $GK$  donde  $K$  corre sobre todos los conjuntos compactos en  $\mathbb{CP}^n \setminus \{L_0(G) \cup L_1(G)\}$ .*
4. *El conjunto límite de Kulkarni de  $G$  se define como:*

$$\Lambda_{\mathrm{Kul}}(G) := L_0(G) \cup L_1(G) \cup L_2(G).$$

5. *La región de discontinuidad de Kulkarni de  $G$  es*

$$\Omega_{\mathrm{Kul}}(G) := \mathbb{CP}^n \setminus \Lambda_{\mathrm{Kul}}(G).$$

### 1.1.1. Curva de Veronese

**Definición 1.1.11** (Véase [4]). *El encaje de **Veronese** se define de la manera siguiente*

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{CP}^1 &\longrightarrow \mathbb{CP}^2 \\ \psi([z, w]) &\mapsto [z^2, 2zw, w^2]. \end{aligned}$$

*La imagen de este encaje es conocida como **la curva de Veronese**.*

**Proposición 1.1.12** (Véase [4]). *Se define  $\iota : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$  por*

$$\iota \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2ac & ad+bc & 2bd \\ c^2 & dc & d^2 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

*Entonces:*

1. *La función  $\iota$  es un morfismo inyectivo de grupos.*
2. *El morfismo  $\iota$  preserva el tipo i.e.  $\iota$  envía elementos elípticos en elementos elípticos y similarmente para elementos loxodrómicos y parabólicos.*
3. *Si  $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  es un subgrupo discreto, se tiene que  $\iota(\Gamma)$  es un grupo discreto.*
4. *La imagen de  $\iota$  es el grupo de biholomorfismo de  $\mathbb{CP}^2$  que preservan la curva de Veronese.*

**Teorema 1.1.13** (Véase [4]). *Sea  $G$  un subgrupo discreto de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ . Entonces*

$$\mathbb{CP}^2 \setminus \Omega_{\mathrm{Kul}}(\iota(G)) = \bigcup_{z \in \Lambda(G)} T_{\psi(z)} \psi(\mathbb{CP}^1). \quad (1.2)$$

*Donde  $T_{\psi(z)} \psi(\mathbb{CP}^1)$  es el espacio tangente de la imagen de  $\mathbb{CP}^1$  bajo el mapeo de Veronese en el punto  $\psi(z)$  con  $z$  en el conjunto límite  $\Lambda(G)$  de  $G$ .*

### 1.1.2. Geometría hiperbólica compleja

**Definición 1.1.14.** *Considérese la matriz hermitiana siguiente*

$$H = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & I_{n-1} & \\ 1 & & \end{bmatrix},$$

con  $I_{n-1}$  la matriz identidad de tamaño  $(n-1) \times (n-1)$ . Se define el grupo

$$U(n, 1) = \{g \in \text{GL}(n+1, \mathbb{C}) : gHg^* = H\},$$

donde  $g^*$  denota la matriz conjugada transpuesta de  $g$  y el producto hermitiano siguiente

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C},$$

inducido por la matriz  $H$ .

**Lema 1.1.15.** *El producto hermitiano  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tiene signatura  $(n, 1)$  y el grupo  $U(n, 1)$  es su grupo de isometrías. Además la proyectivización  $\text{PU}(n, 1)$  del grupo  $U(n, 1)$  preserva la bola unitaria compleja*

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n := \{[z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n : \langle z, z \rangle < 0\}.$$

Ahora se define el conjunto límite de un subgrupo  $G$  del grupo  $\text{PU}(n, 1)$  según Chen y Greenberg (Véase [6]).

**Definición 1.1.16** (Véase [6, 5]). *Sea  $G$  un subgrupo de  $\text{PU}(n, 1)$ . Se define el conjunto límite de Chen-Greenberg como:*

$$\Lambda_{\text{CG}}(G) = \overline{Gx} \cap \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n,$$

donde  $x$  es cualquier punto en  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ .

**Definición 1.1.17.** *Dado un subespacio proyectivo  $P \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  se define el conjunto siguiente*

$$P^{\perp} := \{[w \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle w, v \rangle = 0 \text{ para cada } v \in [P]_n^{-1}\} \setminus \{0\}.$$

**Teorema 1.1.18** (Véase [3],[34]). *Sea  $G$  un subgrupo discreto de  $\text{PU}(n, 1)$ , entonces el conjunto límite de Kulkarni de  $G$  se puede describir como la unión de los hiperplanos tangentes a  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$  en los puntos del conjunto límite de Chen-Greenberg de  $G$ , i.e.*

$$\Lambda_{\text{Kul}}(G) = \bigcup_{p \in \Lambda_{\text{CG}}} p^{\perp}.$$

Más aún  $\Omega_{\text{Kul}}$  es el abierto más grande en el que el grupo actúa de manera propia y discontinuamente.

#### Invariante angular de tripletes de puntos.

Se define un invariante angular para tripletas de puntos distintos  $p_1, p_2, p_3$  en  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

**Definición 1.1.19** (Véase [18]). *Sean  $p_1, p_2, p_3$  en  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Para los levantamientos  $\mathbf{P}_j$  de  $p_j$  en  $\mathbb{C}^3$ , el invariante de **Cartan** está definido por*

$$\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \arg(-\langle \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \rangle \langle \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 \rangle \langle \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_1 \rangle).$$

**Teorema 1.1.20** (Véase [18]). *1. Para cualquier terna de puntos  $p_1, p_2, p_3$  en  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  se tiene que*

$$-\pi/2 \leq \mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) \leq \pi/2.$$

2. El invariante  $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \pi/2$  si y solo si  $p_1, p_2$  y  $p_3$  están en la misma línea compleja.
3. El invariante  $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = 0$  si y solo si  $p_1, p_2$  y  $p_3$  están en el mismo subespacio real totalmente geodésico.
4. Dadas dos tripletas de puntos  $p_1, p_2, p_3$  y  $q_1, q_2, q_3$ , se cumple que  $\mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \mathbb{A}(q_1, q_2, q_3)$  si y solo si existe  $A \in \text{SU}(2, 1)$  tal que  $A(p_i) = q_i$  para  $i = 1, 2, 3$ .

**Teorema 1.1.21** (Véase [13, 14]). *Sea  $M$  el complemento del nudo ocho en  $\mathbb{S}^3$ , entonces existen al menos tres representaciones  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : \pi_1(M) \rightarrow \text{PU}(2, 1)$ , donde la presentación de  $\pi_1(M)$  esta dada por*

$$\langle g_1, g_2, g_3 \mid g_2 = [g_3, g_1^{-1}], \quad g_1 g_2 = g_2 g_3 \rangle,$$

cuyas imágenes son

$$\begin{aligned} \sigma_1(g_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \sigma_1(g_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \sigma_2(g_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \sigma_2(g_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \sigma_3(g_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \sigma_3(g_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{5}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Además las representaciones  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  son conjugadas complejas i.e.  $\sigma_3 = \overline{\sigma_2}$ .

**Teorema 1.1.22** (Véase [10], [14]). *Se denota por  $\Gamma_i$  el subgrupo de  $\text{PU}(2, 1)$  que es la imagen de  $\sigma_i$  para cada  $i = 1, 2, 3$ .*

1. El conjunto límite de  $\Gamma_1$  es igual a todo  $\mathbb{S}^3$ .
2. El conjunto límite de  $\Gamma_2$  es un conjunto propio de la esfera  $\mathbb{S}^3$ .

## 1.2. Enlaces

**Definición 1.2.1.** El subconjunto  $L \subset \mathbb{S}^3$  es un **nudo** si existe un homeomorfismo del círculo  $\mathbb{S}^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  en  $\mathbb{S}^3$  cuya imagen es  $L$ .

**Definición 1.2.2.** Un **enlace**  $L$  es una colección ordenada finita de nudos que no se intersectan entre sí. Cada nudo  $L_i$  se dice que es una componente del enlace. Se denotará por  $\sharp L$  el número de componentes de  $L$ .

En la figura 1.1 se presentan ejemplos de un nudo y dos enlaces respectivamente.



Figura 1.1: a. Nudo trébol; b. Anillos de Borromeo; c. Enlace de Hopf.

Se tiene una definición de cuando dos enlaces son equivalentes

**Definición 1.2.3.** Dos enlaces  $L = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$  y  $L' = \{L'_1, L'_2, \dots, L'_m\}$  son equivalentes si se satisfacen las condiciones siguientes

1. Los enlaces  $L$  y  $L'$  tienen el mismo número de componentes, es decir  $m = n$ .
2. Existe un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  en sí mismo que preserva la orientación que manda la colección  $L_1 \cup \dots \cup L_n$  en la colección  $L'_1 \cup \dots \cup L'_n$ .

**Definición 1.2.4.** Un **nudo poligonal** es aquel formado por una unión finita de segmentos de recta llamados aristas cuyos puntos extremos son los vértices del nudo. Un nudo es **dócil** si es equivalente a un nudo poligonal.

**Definición 1.2.5.** Una **orientación** para un nudo (o enlace)  $L$  es una dirección en la que se recorre el nudo.

**Definición 1.2.6.** Se considera la proyección paralela dada por

$$\text{Pr} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

definida por  $\text{Pr}(x, y, z) := (x, y, 0)$ . Si  $L$  es un nudo (o enlace), se dirá que  $\text{Pr}(L) = \hat{L}$  es la proyección de  $L$ , además si  $L$  tiene una orientación,  $\hat{L}$  hereda la orientación de manera natural. Un nudo (o enlace)  $L$  está en posición regular si su proyección satisface lo siguiente:

1. Los únicos puntos de cruce de  $\hat{L}$  son puntos dobles.
2. Ningún punto doble es la imagen de ningún vértice de  $L$ .

La segunda condición asegura que todo punto doble represente un punto de cruce genuino como en la Figura 1.2.

**Teorema 1.2.7** (Véase [41]). Todo nudo poligonal es equivalente bajo una rotación de  $\mathbb{R}^3$  a un nudo poligonal en posición regular.

**Definición 1.2.8.** La proyección de un nudo en posición regular se dice que es una **proyección regular**.

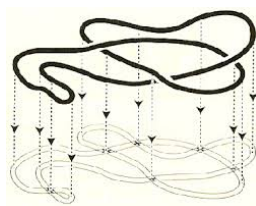


Figura 1.2: Proyección Regular

De ahora en adelante durante toda la tesis se trabajará exclusivamente con **nudos dociles orientados** y con sus proyecciones regulares, tomando en cuenta que: “en los puntos de cruce se dibujará la proyección de tal manera que parezca cortada, indicando así que parte pasa por abajo y cuál por arriba.

**Definición 1.2.9.** *A una proyección dibujada de la manera anterior la llamaremos **diagrama regular**.*

**Definición 1.2.10.** *Sea  $D$  el diagrama regular de un nudo  $L$ . Un arco de  $D$  es un camino que se extiende desde un cruce por arriba hasta el siguiente cruce por debajo.*

**Definición 1.2.11.** *Sea  $D$  el diagrama regular de un nudo  $L$  y sea  $p$  un punto en  $D$ . Si al recorrer el diagrama  $D$  a partir de  $p$  pasamos por los puntos de cruce, por arriba y por abajo de manera alternada, decimos que el **diagrama es alternante**. Un nudo que posea al menos un diagrama alternante es llamado **nudo alternante**.*

Ejemplos de nudos alternantes son el nudo trébol y el nudo 8 (véase Figura 1.3).

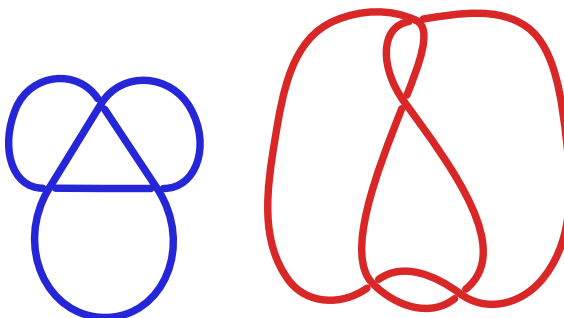


Figura 1.3: Nudo trébol; Nudo ocho

La definición de **enlace alternante** se sigue directamente de la definición de nudo alternante, y los anillos de Borromeo son ejemplo de un enlace alternado (véase Figura 1.4).

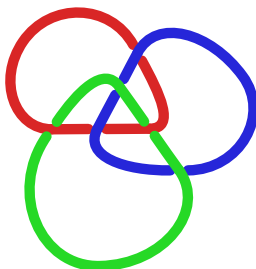


Figura 1.4: Anillos de Borromeo

**Definición 1.2.12.** Dos diagramas  $D$  y  $D'$  son llamados isotópicos, si hay una familia suave de difeomorfismos  $h_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que cada  $h_t(D)$  es un diagrama, con  $h_1(D) = D'$  y  $h_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ .

**Movimientos de Reidemeister** (Véase Figura 1.5):

- **Tipo I:** Agregar o remover un rizo.
- **Tipo II:** Agregar o remover dos cruces por arriba (por debajo) consecutivos.
- **Tipo III:** Movimientos triangulares

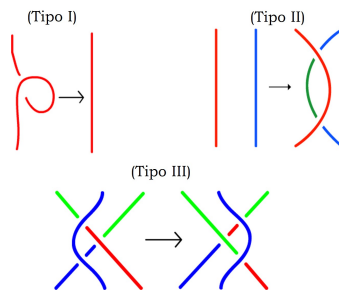


Figura 1.5: Movimientos de Reidemeister

El teorema siguiente garantiza cuando dos enlaces son equivalentes.

**Teorema 1.2.13 (Teorema de Reidemeister).** Dos enlaces  $L$  y  $L'$  son equivalentes si y solo si sus respectivos diagramas regulares están relacionados por una sucesión finita de isotopías en  $\mathbb{R}^2$  y de Movimientos de Reidemeister.

**Definición 1.2.14.** Un diagrama de un enlace es tricolorable, si se puede asignar un color a cada arco del diagrama, tal que

1. A cada arco le asignamos exactamente un color.
2. No podemos usar más de 3 colores (fijos).
3. En cada cruce, sucede que todos los arcos tienen el mismo color, o todos distintos.

**Definición 1.2.15.** Sea  $N \subset \mathbb{R}^n$  una subvariedad compacta sin frontera. Para cada  $\epsilon > 0$ , sea  $N_\epsilon$  el conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^n$  que distan de  $N$  menos que  $\epsilon$ . Llamamos a  $N_\epsilon$  una vecindad tubular de  $N$  en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.2.16.** (Véase [41, 31]) Sean  $L$  un enlace,  $N(L) \subset \mathbb{S}^3$  la vecindad tubular de  $L$  en  $\mathbb{S}^3$  y  $x_0$  un punto en la frontera de  $N(L)$ . El lazo que pasa por  $x_0$  y que acota un disco en  $N(L)$ , es llamado el **meridiano** de  $L$ . La curva simple en la frontera de  $N(L)$  paralela al enlace  $L$  se le llama **longitud** de  $L$ .

Una discusión completa de la construcción de grupo fundamental de un espacio topológico se puede consultar en [29], para esta tesis solo se utilizará el concepto de grupo fundamental del complemento de un nudo, ya que obviamente no tiene sentido estudiar el grupo fundamental del nudo porque todos los nudos son homeomorfos entre sí y por tanto el grupo fundamental de cualquier nudo será isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . A su vez conocemos algo que sí caracteriza a un nudo, que es el espacio complementario del nudo ( $\mathbb{S}^3 \setminus L$ ) como espacio topológico.

**Definición 1.2.17.** Si  $L$  es un nudo (o enlace) y  $x$  cualquier punto en  $\mathbb{S}^3 \setminus L$ , entonces el grupo fundamental

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L, x)$$

es llamado el grupo del nudo (o del enlace)  $L$ .

El Teorema siguiente debido a Wirtinger, es una forma esquemática útil para describir el grupo fundamental del un nudo (o enlace).

**Teorema 1.2.18 (Presentación de Wirtinger (Véase [31])).** *Sea  $L$  un enlace y  $D$  un diagrama regular de  $L$ , se designa por  $\alpha_i$  los arcos del diagrama regular. El grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$  está generado por las clases de homotopía de los lazos  $x_i$  (correspondiente a cada  $\alpha_i$ ) y tiene la presentación finita siguiente*

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L, x) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle,$$

donde los  $r_i$  son las relaciones que subyacen de cada cruce (Véase Figura 1.6).

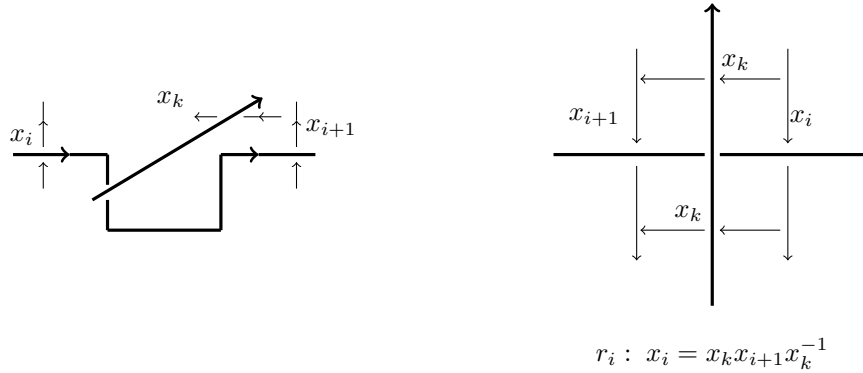


Figura 1.6: Vista frontal y aérea de un cruce con la relación que dictamina.

**Ejemplo 1.2.19. Grupo fundamental del nudo ocho en  $\mathbb{S}^3$ .**

Se denotó al nudo ocho por  $\mathfrak{S}$ . De acuerdo con el Teorema de Wirtinger el grupo  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \mathfrak{S})$  tiene como generadores al conjunto de lazos  $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$  indexados igual que los arcos  $\alpha_i$  y las relaciones están dadas en los cruces (Véase Figura 1.7), las cuales son

$$r_1 : g_1 g_3 = g_3 g_2, \tag{1.3}$$

$$r_2 : g_4 g_2 = g_3 g_4, \tag{1.4}$$

$$r_3 : g_3 g_1 = g_1 g_4, \tag{1.5}$$

$$r_4 : g_2 g_4 = g_1 g_2. \tag{1.6}$$

Se mostrará que la relación (1.6) es consecuencia de las tres anteriores y por tanto se prescindirá

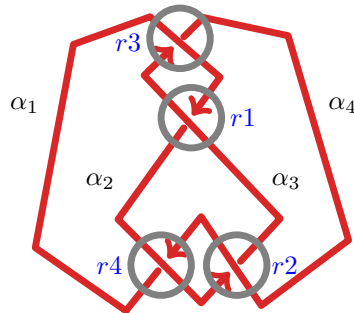


Figura 1.7

de ella. De (1.3) y (1.4) se obtiene que  $g_1 = g_3 g_2 g_3^{-1}$  y  $g_3 = g_4 g_2 g_4^{-1}$ , al substituir ambos en (1.5) se obtiene

$$g_4 g_2 g_4^{-1} g_4 g_2 g_4^{-1} g_2 g_4 g_2^{-1} g_4^{-1} = g_4 g_2 g_4^{-1} g_2 g_4 g_2^{-1} g_4^{-1} g_4,$$



simplificando se obtiene que

$$g_4 g_2 g_2 g_4^{-1} g_2 g_4 g_2^{-1} g_4^{-1} = g_4 g_2 g_4^{-1} g_2 g_4 g_2^{-1},$$

cancelando el término  $g_4 g_2$  se tiene

$$g_2 g_4^{-1} g_2 g_4 g_2^{-1} g_4^{-1} = g_4^{-1} g_2 g_4 g_2^{-1},$$

se multiplica por la izquierda ambos lados de la igualdad por  $g_4$  y se obtiene que

$$g_4 g_2 g_4^{-1} g_2 g_4 g_2^{-1} g_4^{-1} = g_2 g_4 g_2^{-1}.$$

Como  $g_3 = g_4 g_2 g_4^{-1}$  se tiene entonces

$$g_3 g_2 g_3^{-1} = g_2 g_4 g_2^{-1},$$

puesto que  $g_1 = g_3 g_2 g_3^{-1}$ ,

$$g_1 = g_2 g_4 g_2^{-1},$$

que es equivalente a

$$g_1 g_2 = g_2 g_4.$$

Por lo tanto podemos prescindir de (1.6). Ahora, de (1.3) y (1.5) se tiene que  $g_2 = g_3^{-1} g_1 g_3$  y  $g_4 = g_1^{-1} g_3 g_1$  al substituir ambos en (1.4), se tiene que

$$g_1^{-1} g_3 g_1 g_3^{-1} g_1 g_3 = g_3 g_1^{-1} g_3 g_1.$$

Por lo tanto se obtiene que el grupo fundamental del complemento del nudo ocho tiene la presentación siguiente.

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \mathfrak{O}) = \langle g_1, g_3 \mid g_1^{-1} g_3 g_1 g_3^{-1} g_1 g_3 = g_3 g_1^{-1} g_3 g_1 \rangle. \quad (1.7)$$

### 1.3. Quandles

Históricamente los axiomas de la estructura algebraica de quandle fueron motivados por los movimientos de Reidemeister, adicionalmente D. Joyce en su Disertación Doctoral (Véase [24]) demuestra que el quandle fundamental es un invariante completo en la Teoría de Nudos.

**Definición 1.3.1.** *Un quandle es un conjunto  $X$  con una operación binaria*

$$\triangleleft : X \times X \longrightarrow X$$

que satisface las tres condiciones siguientes

1. Para cada  $a \in X$ ,  $a \triangleleft a = a$ .
2. La función  $\tau_b : X \longrightarrow X$ , dada por  $\tau_b(a) = a \triangleleft b$ , es biyectiva para cualquier  $b \in X$ . En todo lo que resta del escrito se denotará a la operación inversa de “ $\triangleleft$ ” como  $a \triangleleft^{-1} b = \tau_b^{-1}(a)$ .
3. Para cada  $a, b, c \in X$  se cumple que

$$(a \triangleleft b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \triangleleft (b \triangleleft c).$$

**Definición 1.3.2.** *Un subconjunto  $A$  del quandle  $X$  forma un subquandle si y solo si,  $A$  es cerrado bajo la operación “ $\triangleleft$ ”.*

**Definición 1.3.3.** *Una función  $\varphi : X \longrightarrow Y$  entre quandles es un morfismo de quandles si*

$$\varphi(a \triangleleft b) = \varphi(a) \bullet \varphi(b) \text{ para cada } a, b \in X,$$

dónde  $\triangleleft$  es la operación de  $X$  y  $\bullet$  la operación de  $Y$ . Un morfismo de quandles se dice que es un **isomorfismo de quandles** si este es biyectivo.

**Ejemplo 1.3.4 (Quandle  $\text{Conj}(G)$ ).** *Sea  $G$  un grupo y  $H \subset G$  invariante bajo conjugación, se define la operación binaria siguiente*

$$\text{conj} : H \times H \longrightarrow H$$

dada por

$$\text{conj}(g, h) := g \text{ conj } h = h^{-1}gh.$$

Entonces  $(H, \text{conj})$  es un quandle, que en lo que sigue se denotará por  $\text{Conj}(H)$ .

**Prueba.** *La idempotencia es clara. Ahora se muestra el segundo axioma de Quandle. Sea*

$$\tau_h : H \longrightarrow H,$$

la función dada por

$$g \mapsto \tau_h(g) := g \text{ conj } h.$$

Considérese  $g, r \in H$  tales que

$$\tau_h(g) = h^{-1}gh = h^{-1}rh = \tau_h(r),$$

luego  $g = r$ , y por tanto  $\tau_h$  es inyectiva. Sea  $g \in H$ , entonces

$$\begin{aligned} g &= h^{-1}gh^{-1}h \\ &= hgh^{-1} \text{ conj } h \\ &= (\tau_h)(hgh^{-1}). \end{aligned}$$

De aquí que  $(\tau_h)$  es sobreyectiva y por tanto es biyectiva para cualquier  $h \in H$ . Su función inversa esta dada por  $\tau_h^{-1}(g) = g \text{ conj }^{-1}h = hgh^{-1}$ . Para concluir que  $H$  es un quandle se debe demostrar que  $(g \text{ conj } h) \text{ conj } k = (g \text{ conj } k) \text{ conj } (h \text{ conj } k)$ .

$$\begin{aligned} (g \text{ conj } h) \text{ conj } k &= (h^{-1}gh) \text{ conj } k \\ &= k^{-1}h^{-1}ghk. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (g \text{ conj } k) \text{ conj } (h \text{ conj } k) &= (k^{-1}gk) \text{ conj } (k^{-1}hk) \\ &= (k^{-1}hk)^{-1}(k^{-1}gk)(k^{-1}hk) \\ &= (k^{-1}h^{-1}k)(k^{-1}gk)(k^{-1}hk) \\ &= k^{-1}h^{-1}ghk. \end{aligned}$$

Con esto se demuestra la afirmación.

**Ejemplo 1.3.5.** Del ejemplo anterior se deduce que  $\text{PSL}(n+1, \mathbb{C})$  con la operación  $\text{conj}$  es un quandle para cada  $n \geq 2$ . En particular, si se considera la clase de conjugación de

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{C}),$$

i. e.,

$$\mathcal{P} = \{g^{-1}pg \mid g \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})\}.$$

Entonces  $\mathcal{P}$  es un subquandle de  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ . Además cada elemento de  $\mathcal{P}$  es de la forma

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+dc & d^2 \\ -c^2 & 1-cd \end{bmatrix}.$$

**Proposición 1.3.6.** Existe una biyección entre los espacios  $\mathcal{P}$  y  $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\{\pm 1\}$ , además mediante esta biyección la operación de conjugación en  $\mathcal{P}$  induce la operación de quandle  $\star$  en  $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\{\pm 1\}$  definida por

$$[a, b] \star [c, d] = [acd + a - bc^2, ad^2 - bcd + b]. \quad (1.8)$$

*Demostración.* Es claro que la función

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{P} &\longrightarrow (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\{\pm 1\} \\ \begin{bmatrix} 1+ab & b^2 \\ -a^2 & 1-ab \end{bmatrix} &\longmapsto [a, b], \end{aligned} \quad (1.9)$$

es una biyección. Además

$$\begin{aligned} \phi^{-1}([a, b]) \text{ conj } \phi^{-1}([c, d]) &= \begin{bmatrix} 1+ab & b^2 \\ -a^2 & 1-ab \end{bmatrix} \text{ conj } \begin{bmatrix} 1+cd & d^2 \\ -c^2 & 1-cd \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+cd & d^2 \\ -c^2 & 1-cd \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1+ab & b^2 \\ -a^2 & 1-ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+cd & d^2 \\ -c^2 & 1-cd \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+(acd+a-bc^2)(ad^2-bcd+b) & (ad^2-bcd+b)^2 \\ -(acd+a-bc^2)^2 & 1-(acd+a-bc^2)(ad^2-bcd+b) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando la biyección  $\phi$  se tiene el resultado.  $\square$

**Definición 1.3.7 (Quandle Parabólico).** El conjunto  $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\{\pm 1\}$  con la operación binaria siguiente

$$[a, b] \star [c, d] = [acd + a - bc^2, ad^2 - bcd + b] \quad (1.10)$$

y cuya operación inversa es

$$[a, b] \star^{-1} [c, d] = [a - acd + bc^2, b - ad^2 + bcd], \quad (1.11)$$

es un quandle conocido como el **Quandle Parabólico** y se denotará por  $\mathcal{P}ar$  (Véase [21]).

**Ejemplo 1.3.8 (Quandle de Joyce-Matveev).** Sean  $G$  un grupo,  $H$  un subgrupo de  $G$  y

$$\rho : G \longrightarrow G$$

un automorfismo de  $G$ , tal que  $\rho(h) = h$  para cada  $h \in H$ . El espacio  $G/H$  con la operación siguiente es un quandle:

$$* : G/H \times G/H \longrightarrow G/H$$

dada por

$$aH * bH = b\rho(b^{-1}a)H,$$

cuya operación inversa es

$$aH *^{-1} bH = b\rho^{-1}(b^{-1}a)H.$$

**Prueba.** Se dará la prueba de la ley distributiva de los axiomas de quandle ya que los dos restantes son inmediatos de la definición.

$$\begin{aligned} (aH * bH) * dH &= (b\rho(b^{-1}a)H) * dH \\ &= d\rho(d^{-1}b\rho(b^{-1}a))H \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (aH * dH) * (bH * dH) &= (d\rho(d^{-1}a)H) * (d\rho(d^{-1}b)H) \\ &= d\rho(d^{-1}b)\rho((d\rho(d^{-1}b))^{-1}d\rho(d^{-1}a))H \\ &= d\rho(d^{-1}b)\rho(\rho(b^{-1})(\rho(d^{-1}))^{-1}d^{-1}d\rho(d^{-1})\rho(a))H \\ &= d\rho(d^{-1}b)\rho(\rho(b^{-1})\rho(a))H \\ &= d\rho(d^{-1}b\rho(b^{-1}a))H. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.3.9 (Quandle n-Dihedral).** Sea  $n$  un entero positivo,  $X = D_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  y sean  $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Se define la operación binaria

$$i * j := 2j - i \pmod n.$$

Entonces  $(D_n, *)$  es un quandle.

**Ejemplo 1.3.10 (Quandle libre).** Sea  $X$  un conjunto y  $F(X)$  el grupo libre generado por  $X$ . Entonces el quandle libre en  $X$  es un subquandle  $Q^f(X)$  de  $\text{Conj}(F(X))$  que consiste de las conjugaciones de los generadores de  $F(X)$ .

**Proposición 1.3.11 (Propiedad universal (Véase [35])).** Sea  $Q^f(X)$  el quandle Libre de conjunto base  $X$  y sea  $j : X \longrightarrow Q^f(X)$  la inclusión natural. Entonces para cada función  $f : X \longrightarrow Y$ , donde  $Y$  es un quandle cualquiera, entonces existe un único morfismo de quandles  $\tilde{f} : Q^f(X) \longrightarrow Y$  que extiende a  $f$ , es decir,  $\tilde{f} \circ j = f$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ j \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ Q^f(X) & & \end{array}$$

**Ejemplo 1.3.12 (Descripción Algebraica del Quandle Fundamental de un Enlace).** Sea  $L$  un enlace y  $D$  el diagrama de  $L$ . Definimos el conjunto  $A_D = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de todos los caminos del diagrama  $D$  y sea  $G_D$  el grupo libre generado por  $A_D$ . En cada cruce  $p$  del diagrama convergen tres arcos, donde dos de ellos pasan por debajo digamos  $\alpha_i$  y  $\alpha_k$  y uno por arriba  $\alpha_j$ , a esta relación se denota como:  $\alpha_i \triangleleft \alpha_j = \alpha_k$ , dónde  $\alpha_i$  es el arco que se encuentra a la derecha con respecto a  $\alpha_j$  y  $\alpha_k$  el arco que se encuentra a la izquierda con respecto a  $\alpha_j$  (Véase Figura 1.8 donde también se define la operación inversa).

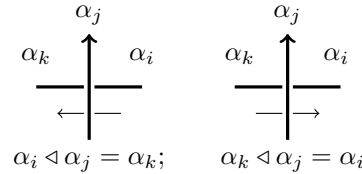


Figura 1.8: Cruce positivo; Cruce negativo

Se denotó el conjunto de todas las relaciones para todos los cruces por  $R_D$ . Se define la siguiente relación de equivalencia en  $G_D$ :  $W_1 \sim W_2$  si y solo si existe un número finito de transformaciones sucesivas que transforman a  $W_1$  en  $W_2$  de acuerdo con las reglas siguientes:

1. Para cada  $x \in G_D$ :  $x \triangleleft x \sim x$ .
2. Para todo  $x, y, z \in G_D$ :  $(x \triangleleft y) \triangleleft z \sim (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$ .
3. Para cada  $\alpha \in I$ :  $r_\alpha \sim s_\alpha$ .

El conjunto de clases de equivalencia se denota por  $Q\langle A_D | R_D \rangle$ . Este conjunto es un quandle con respecto a la operación  $[W_1] * [W_2] = [W_1 W_2]$ , y es llamado el Quandle fundamental de  $L$ .

**Ejemplo 1.3.13 (Descripción Geométrica del Quandle Fundamental de un Enlace).** Sea  $L$  un enlace en  $\mathbb{S}^3$  y sea  $N(L)$  la vecindad tubular de  $L$ . Se define  $E(L) = \overline{\mathbb{S}^3} \setminus N(L)$  la clausura de complemento de esta vecindad tubular. Fijamos un punto base  $x_L$  en  $E(L)$ . Denotamos por  $Q(L)$  el conjunto de todas las clases de homotopía de los caminos en el espacio  $E(L)$  con punto fijo  $x_L$  y punto final en  $\partial N(L)$ . Las homotopias entre tales caminos requieren que tengan sus límites inferiores en  $\partial N(L)$  y sus límites superiores en el punto base ( $H(s, 0) \in \partial N(L)$  mientras que  $H(s, 1) = x_L$ , para toda  $s \in [0, 1]$  y  $H(i, t) = a_i(t)$  para  $i = 0, 1$ ). Si  $a$  y  $b$  son tales caminos, entonces existe un único meridiano orientado  $\mu_b$  que pasa por el punto inicial de  $b$ . A  $Q(L)$  se le puede dotar de estructura de quandle, definiendo la siguiente operación de caminos

$$a \circ b = ab^{-1}\mu_b b.$$

Es decir, primero viaja sobre el camino  $a$  que va de la vecindad tubular al punto base luego se retrocede por  $b$  hasta la vecindad tubular, luego rodea el meridiano una vez y sigue el camino  $b$ .

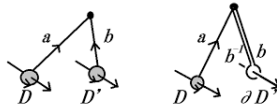


Figura 1.9:  $a \circ b = ab^{-1}\mu_b b$ .

**Teorema 1.3.14** (Véase [31]). Los Quandles  $Q(L)$  y  $Q\langle A_D | R_D \rangle$  son isomorfos.

**Corolario 1.3.15.** El Quandle Fundamental es independiente de la elección del diagrama.

**Teorema 1.3.16** (Véase [24, 35]). Sean  $L$  y  $L'$  dos enlaces orientados en  $\mathbb{S}^3$ . Entonces  $L'$  es isotópico ya sea a  $L$  o  $-L$  si y solo si existe un isomorfismo de quandles entre los quandles  $Q(L)$  y  $Q(L')$ .

**Proposición 1.3.17 (Quandle Fundamental del nudo ocho).** El quandle fundamental del nudo ocho tiene la presentación siguiente

$$Q(\mathfrak{S}) = \langle \alpha, \gamma \mid \gamma \triangleleft \alpha = \alpha \triangleleft (\alpha \triangleleft \gamma); \alpha \triangleleft \gamma = \gamma \triangleleft (\gamma \triangleleft \alpha) \rangle. \quad (1.12)$$

*Demostración.* Considérese el diagrama regular  $D$  del nudo ocho (Véase figura 1.10), y sea  $A_D$  el conjunto de todos los arcos de  $D$ , entonces el quandle fundamental del nudo ocho tiene cuatro generadores  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ .

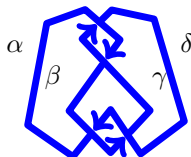
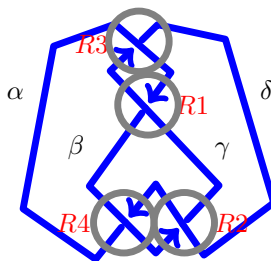


Figura 1.10: Diagrama regular del nudo ocho

De acuerdo con la descripción algebraica del quandle fundamental, en cada cruce del diagrama  $D$  se tienen dictaminadas las relaciones de la presentación del quandle fundamental, es decir

$$\begin{aligned} R1 : \alpha \triangleleft \gamma &= \beta, \\ R2 : \gamma \triangleleft \delta &= \beta, \\ R3 : \gamma \triangleleft \alpha &= \delta, \\ R4 : \alpha \triangleleft \beta &= \delta. \end{aligned}$$



El quandle fundamental tiene la presentación siguiente

$$\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \delta = \gamma \triangleleft \alpha, \beta = \alpha \triangleleft \gamma, \delta = \alpha \triangleleft \beta, \beta = \gamma \triangleleft \delta \rangle. \quad (1.13)$$

Se sustituye el valor de  $\beta$  y  $\delta$  en la relación  $R2$  y  $R4$  respectivamente se tiene que

$$\gamma \triangleleft \alpha = \alpha \triangleleft (\alpha \triangleleft \gamma), \quad (1.14)$$

$$\alpha \triangleleft \gamma = \gamma \triangleleft (\gamma \triangleleft \alpha). \quad (1.15)$$

Por lo tanto se tiene que la presentación del quandle fundamental del nudo ocho es

$$Q(\mathfrak{S}) = \langle \alpha, \gamma \mid \gamma \triangleleft \alpha = \alpha \triangleleft (\alpha \triangleleft \gamma), \alpha \triangleleft \gamma = \gamma \triangleleft (\gamma \triangleleft \alpha) \rangle.$$

□

**Lema 1.3.18** (Véase [2]). El Quandle fundamental de los anillos de Borromeo es:

$$\langle a, b, c \mid a \triangleleft (c \triangleleft b) = a \triangleleft c, b \triangleleft (a \triangleleft c) = b \triangleleft a, c \triangleleft (b \triangleleft a) = c \triangleleft b \rangle$$

**Definición 1.3.19 (Grupo Asociado a un quandle (Véase [2])).** Dado un quandle  $X$ , se define el grupo asociado  $\text{As}(X) = \langle X \mid \mathcal{R} \rangle$  como el grupo cociente de el grupo libre  $F(X)$  generado por  $X$ , modulo las relaciones inducidas por la operación de quandle,

$$\mathcal{R} = \{a \text{ conj } b = b^{-1}ab \mid a, b \in X\}.$$

Por construcción se obtiene una función

$$\mathcal{AS} : X \hookrightarrow F(X) \longrightarrow \text{As}(X),$$

tal que  $\mathcal{AS}(a \triangleleft b) = \mathcal{AS}(a) \text{ conj } \mathcal{AS}(b)$ .

**Proposición 1.3.20** (Véase [2]). Sean  $X, Y$  dos quandles y  $G$  un grupo, entonces:

1. **Propiedad Universal.** Si  $\varphi : X \longrightarrow G$  satisface,

$$\varphi(a \triangleleft b) = (\varphi(b))^{-1}\varphi(a)\varphi(b),$$

para todo  $a, b \in X$ , entonces existe un único morfismo de grupos  $\mathfrak{h} : \text{As}(X) \longrightarrow G$  tal que  $\varphi = \mathfrak{h} \circ \mathcal{AS}$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \mathcal{AS} \downarrow & \nearrow \mathfrak{h} & \\ \text{As}(X) & & \end{array}$$

2. **Funtorialidad.** Todo morfismo de Quadles  $\psi : X \longrightarrow Y$  induce un morfismo de grupos  $\psi^* : \text{As}(X) \longrightarrow \text{As}(Y)$ , es decir, el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & Y \\ \mathcal{AS}_X \downarrow & & \downarrow \mathcal{AS}_Y \\ \text{As}(X) & \xrightarrow{\psi^*} & \text{As}(Y) \end{array}$$

$$\psi^* \circ \mathcal{AS}_X = \mathcal{AS}_Y \circ \psi.$$

3. **Funtores adjuntos.** El functor  $\text{As}$  es el functor adjunto de  $\text{Conj}$ . En otras palabras, existe una biyección natural

$$\text{Hom}_{\text{Gr}}(\text{As}(X), G) \cong \text{Hom}_{\text{Qnd}}(X, \text{Conj}(G)).$$

4. **Equivarianza.** Considérese un morfismo de quandles  $\psi : X \longrightarrow Y$ . Puesto que  $\psi$  induce una morfismo de grupos  $\psi^* : \text{As}(X) \longrightarrow \text{As}(Y)$ , esto permite definir una acción derecha de  $\text{As}(X)$  en  $Y$  dada por  $y \cdot g := y \cdot \psi^*(g)$ . En este sentido la función  $\psi$  se vuelve una función **equivariante** bajo la acción derecha de  $\text{As}(X)$ .

**Lema 1.3.21.** Considérese al quandle de conjugación  $\mathcal{P}$  de matrices parabólicas. Sea  $\text{As}(\mathcal{P})$  el grupo asociado de  $\mathcal{P}$ . Sea

$$i : \mathcal{P} \longrightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$$

la inclusión natural. De acuerdo con la **Propiedad Universal** de la Proposición 1.3.20 se tiene el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{i} & \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \\ \mathcal{AS}_{\mathcal{P}} \downarrow & \nearrow \xi & \\ \text{As}(\mathcal{P}) & & \end{array}$$

Entonces  $\xi$  es sobreyectiva.

En general, es difícil determinar explícitamente el grupo asociado de un quandle, pero en el caso de los nudos se tiene el resultado siguiente.

**Teorema 1.3.22** (Véase [35]). *Sea  $L$  un enlace. El grupo asociado  $\text{As}(\mathbb{Q}(L))$  al quandle fundamental del enlace  $L$  es isomorfo al grupo fundamental  $\pi(\mathbb{S}^3 \setminus L)$  del enlace.*

**Corolario 1.3.23.** *Sea  $G$  un grupo,  $L$  un enlace y  $D$  su diagrama regular, entonces*

$$\text{Hom}_{\text{Gr}}(\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L), G) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(L), \text{Conj}(G)).$$

*Demostración.* Usando el Teorema anterior y de acuerdo con el Proposición 1.3.20 parte 3, se obtiene el resultado.  $\square$

**Definición 1.3.24** (Véase [35]). *Sea  $X$  un Quadle, y  $D$  el diagrama orientado del enlace  $L$ .*

1. *Una  $X$ -coloración de  $D$  es una función*

$$\mathcal{C} : \{\text{Arcos de } D\} \longrightarrow X$$

*que satisface la condición  $\mathcal{C}(\gamma_\zeta) = \mathcal{C}(\alpha_\zeta) * \mathcal{C}(\beta_\zeta)$  en cada cruce  $\zeta$  de  $D$ .*

2. *Se denota el conjunto de  $X$ -coloración de  $D$  por  $\text{Col}_X(D)$ .*

**Proposición 1.3.25.** *Decir que el diagrama de un enlace es 3-coloreable (Véase Definición 1.2.14) es equivalente a tener una  $X$ -coloración sobreyectiva  $\mathcal{C} : \mathbb{Q}\langle A_D | R_D \rangle \longrightarrow X$ , donde  $X$  es el quandle 3-dihedral (Véase Ejemplo 1.3.9).*

Del Corolario 1.3.23 se tiene el resultado siguiente.

**Corolario 1.3.26** (Véase [35]). *Sea  $G$  un grupo,  $D$  el diagrama de un enlace  $L$  y  $X = \text{Conj}(G)$ . Entonces, existe una biyección*

$$\text{Col}_X(D) \simeq \text{Hom}_{\text{Gr}}(\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L), G).$$

El resultado siguiente garantiza una relación biunívoca entre coloraciones en el quandle parabólico y las representaciones del grupo fundamental de un enlace en el grupo  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ .

**Corolario 1.3.27** (Véase [2]). *Sea  $L$  un enlace orientado en  $\mathbb{S}^3$ ,  $D$  un diagrama regular de  $L$  y  $\mathcal{C}$  una coloración para  $D$  con respecto al quandle parabólico  $\mathcal{P}\text{ar}$ . Entonces se tiene una representación*

$$\rho_{\mathcal{C}} : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L) \longrightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$$

*inducida por la coloración  $\mathcal{C}$  que envía meridianos en elementos parabólicos. Recíprocamente, sea*

$$\rho : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L) \longrightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$$

*una representación que envía meridianos en elementos parabólicos, entonces se puede definir una coloración  $\mathcal{C}_\rho$  de  $D$  respecto al quandle  $\mathcal{P}\text{ar}$  tal que la representación inducida en  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  coincide con  $\rho$ .*

Como aplicación del teorema anterior se calcula una representación fiel, discreta y que envía meridianos en elementos parabólicos del grupo fundamental del complemento del nudo ocho en  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ .

**Proposición 1.3.28.** *Salvo conjugación, existen dos coloraciones irreducibles,  $\mathcal{C}_{\rho_1}$  y  $\mathcal{C}_{\rho_2}$ , del quandle fundamental del nudo ocho en el quandle  $\mathcal{P}\text{ar}$ . Más aún tales que coloraciones inducen representaciones ( $\rho_1$  y  $\rho_2$  respectivamente) fieles, discretas, que envían meridianos en elementos parabólicos y que satisfacen  $\bar{\rho}_1 = \rho_2$ .*



*Demostración.* Una coloración del nudo ocho es una función del conjunto de arcos del diagrama regular del nudo ocho al quandle parabólico,

$$\mathcal{C} : \{\alpha, \gamma\} \longrightarrow \mathcal{P}ar.$$

Tal que (Véase la Proposición 1.3.17),

$$\mathcal{C}(\gamma) \star \mathcal{C}(\alpha) = (\mathcal{C}(\alpha) \star (\mathcal{C}(\alpha) \star \mathcal{C}(\gamma))), \quad (1.16)$$

$$\mathcal{C}(\alpha) \star \mathcal{C}(\gamma) = (\mathcal{C}(\gamma) \star (\mathcal{C}(\gamma) \star \mathcal{C}(\alpha))). \quad (1.17)$$

Designamos por

$$\mathcal{C}(\alpha) = [1, 0]; \mathcal{C}(\gamma) = [0, t], \quad (1.18)$$

para alguna  $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , dónde  $t$  esta bien definida salvo el signo. Al considerar las relaciones (1.16) y (1.17), obtenemos que

$$[0, t] \star [1, 0] = [1, 0] \star ([1, 0] \star [0, t]),$$

$$[1, 0] \star [0, t] = [0, t] \star ([0, t] \star [1, 0]).$$

Que es equivalente a

$$[0, t] = ([1, 0] \star ([1, 0] \star [0, t])) \star^{-1} [1, 0],$$

$$[1, 0] = ([0, t] \star ([0, t] \star [1, 0])) \star^{-1} [0, t].$$

Operando acorde con la formula de la operación de  $\mathcal{P}ab$  se obtiene lo siguiente:

$$[0, t] = [t^4 + t^2 + 1, t^4],$$

$$[1, 0] = [-t^3, t^5 + t^3 + t].$$

Consideremos las ecuaciones de la primera igualdad, puesto que son clases de equivalencia salvo el signo, se inducen los siguientes sistemas de ecuaciones:

Caso Positivo.

$$1 + t^2 + t^4 = 0 \quad (1.19)$$

$$t = t^4 \quad (1.20)$$

Caso Negativo.

$$1 + t^2 + t^4 = 0 \quad (1.21)$$

$$t^4 = -t, \quad (1.22)$$

Sustituyendo respectivamente (1.20) en (1.19) y (1.22) en (1.21), obtenemos, que la solución a nuestro problema pertenece a la unión de los conjunto soluciones de los siguientes polinomios cuadráticos

$$t^2 + t + 1 = 0; \quad t^2 - t + 1 = 0. \quad (1.23)$$

Entonces

$$t = \frac{\mp 1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Al substituir las soluciones en las Ecuaciones (1.20) y (1.22) se obtiene que

$$t = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}.$$

Ahora las representaciones se obtienen mediante el isomorfismo de quandles  $\phi^{-1}$  (Véase (1.9)) y el Corolario 1.3.27, la cuales son:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad (1.24)$$

Por [20] se sabe que son fieles discretas y que dotan de una estructura hiperbólica completa al complemento del nudo ocho.  $\square$

**Proposición 1.3.29** (Véase [2]). *Salvo conjugación, existen exactamente dos coloraciones inyectivas,  $\mathcal{C}_{e_1}$  y  $\mathcal{C}_{e_2}$ , del quandle fundamental de los Anillos de Borromeo en el quandle  $\mathcal{P}ar$ , que inducen dos representaciones*

$$\varrho_1, \varrho_2 : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L) \longrightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C}),$$

*fieles, discretas y que envía meridianos en elementos parabólicos. Más aún  $\varrho_1 = \overline{\varrho_2}$ .*

## Capítulo 2

# Descomposiciones QR, KAN y su implementación computacional

En este capítulo se presentan tres programas computacionales realizados en el lenguaje de programación de Python para calcular la descomposición QR, la Descomposición de Iwasawa de manera simbólica (usando la paquetería Sympy). Lo cual es necesario para el estudio de representaciones irreducibles de un enlace (Ver Teorema 1.3.27).

### 2.1. Descomposición QR

La descomposición QR en matemáticas es utilizada para la solución de sistemas de ecuaciones polinomiales por mínimos cuadrados (ver [17]), da un algoritmo numérico para determinar los valores propios de una matriz cuadrada, en Teoría de la información resulta ser de gran ayuda para el “movimiento” de datos entre diferentes niveles de la jerarquía de memoria (transferencia de datos, Ver [44]) y en el caso de sistemas de identificación optimiza el reconocimiento de ciertos patrones para el mejor manejo de programas de filtrado transversal. En esta tesis la descomposición QR se usa para obtener la descomposición de Iwasawa y posteriormente para definir un quandle que permita calcular representaciones de grupos de enlaces de manera más “sencilla”. Desde el punto de vista computacional la descomposición QR a sido implementada en varios programas, como: Mathematica, Python, WXmaxima, etc. desafortunadamente tales rutinas no funcionan bien con números reales, complejos y mucho menos con símbolos [22] el problema de base que provoca el mal funcionamiento en estas rutinas es que conllevan el uso de reflexiones de Husholdem y reflexiones de Geves y eso provoca errores de simplificación o reducción de términos. Por otra parte en esta tesis nos interesa el cálculo de tal descomposición sobre matrices simbólicas lo que hace que los métodos anteriores no son útiles por su naturaleza geométrica. Por lo cual en esta tesis se recurre al Proceso de Gram-Schmidt para obtener la descomposición QR, parte de las dificultades de este proceso son la “inestabilidad numérica” y el rápido consumo de la memoria (si no se programa de manera eficiente se consumen el número permitido de caracteres simbólicos [44]). Previo a la exposición del programa se recordará que es la Descomposición QR y como se calcula en términos de Gram-Schmidt.

**Teorema 2.1.1** (Descomposición QR (Véase [16])). *Dada una matriz  $g$  de  $n \times n$  coeficientes complejos, existen una única matriz unitaria  $Q$  y una única matriz triangular superior tal que*

$$g = QR,$$

*donde una matriz unitaria es aquella que tiene por inversa su conjugada transpuesta.*

**Teorema 2.1.2** (Descomposición QR vía Gram-Schmidt(Véase [16])). *Sea  $g$  una matriz de  $n \times n$  coeficientes complejos y  $g = Q(g)R(g)$  la Descomposición QR, entonces*

$$Q(g) = \begin{pmatrix} \frac{g_1}{|g_1|} & \frac{g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1}{\left| g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1 \right|} & \frac{g_3 - \frac{\langle g_3, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1 - \frac{\langle g_3, g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1 \rangle}{\left| g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1 \right|^2} \left( g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1 \right)}{\left( |g_1| \cdot \left| g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1 \right| \right)^{-1}} \end{pmatrix}$$

y

$$R(g) = \begin{pmatrix} |g_1| & \left\langle g_2, \frac{g_1}{|g_1|} \right\rangle & \left\langle g_3, \frac{g_1}{|g_1|} \right\rangle \\ 0 & \left| g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1 \right| & \left\langle g_3, \frac{g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1}{\left| g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1 \right|} \right\rangle \\ 0 & 0 & \left( |g_1| \cdot \left| g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1 \right| \right)^{-1} \end{pmatrix}.$$

El primer algoritmo aquí presentado calcula la matriz compacta de la Descomposición QR de una matriz  $B$ .

---

**Algorithm 1:** Descomposición QR

---

```

1 import sympy;
2 function QR(A) ;
   Input :  $B$ – Una matriz cuadrada en  $SL(3, \mathbb{C})$ .
   Output:  $Q$ – matriz compacta.
            $R$ – matriz triangular superior.
3  $M = \text{sympy.Matrix}([[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0]])$ ;
4  $G1 = A.col(0)$ ;
5  $un1 = \text{sympy.sqrt}((G1).dot(G1, hermitian = True))$ ;
6  $UF1 = G1/un1$ ;
7  $G2 = A.col(1) - (((A.col(1)).dot(G1, hermitian = True))/((un1) * *2)) * G1$ ;
8  $un2 = \text{sympy.sqrt}((G2).dot(G2, hermitian = True))$ ;
9  $UF2 = G2/un2$ ;
10  $G3 = A.col(2) - (((A.col(2)).dot(G1, hermitian = True))/((un1) * *2)) * G1 +$ 
     $(((A.col(2)).dot(G2, hermitian = True))/((un2) * *2)) * G2$ ;
11  $un3 = \text{sympy.sqrt}((G3).dot(G3, hermitian = True))$ ;
12  $UF3 = G3/un3$ ;
13  $M.col_{del}(0)$ ;
14  $M \leftarrow M.col_{insert}(0, UF1)$ ;
15  $M.col_{del}(1)$ ;
16  $M \leftarrow M.col_{insert}(1, UF2)$ ;
17  $M.col_{del}(2)$ ;
18  $M \leftarrow M.col_{insert}(2, UF3)$ ;
19  $Q = M$ ;
20  $R = ((Q.adjoint()) * A)$ ;
21 return ( $Q, R$ )

```

---

Es de comentar que además de la optimización de caracteres tomamos particular cuidado con el producto hermitiano puesto que mathematica y WXmaxima tienen dificultades con la conjugación compleja.

## 2.2. Descomposición de Iwasawa (KAN)

Una discusión completa de la descomposición de Iwasawa puede consultarse en [19]. El teorema siguiente de la descomposición de Iwasawa esta escrito para el el caso de  $\text{SL}(3, \mathbb{C})$  y utiliza a la descomposición QR.

**Teorema 2.2.1 (Descomposición de Iwasawa en  $\text{SL}(3, \mathbb{C})$  (Véase [43])).** *La función multiplicación*

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{K} \times \mathcal{A} \times N &\longrightarrow \text{SL}(3, \mathbb{C}) \\ (k, a, n) &\longmapsto kan = g, \end{aligned} \quad (2.1)$$

es un difeomorfismo, i.e. todo elemento  $g \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$  tiene una única expresión como un producto ordenado de tres elementos

$$g = k(g) \cdot a(g) \cdot \eta(g),$$

donde  $k(g) \in \text{SU}(3)$  se llama la parte compacta,  $a(g) \in \mathcal{A}$  se llama la parte abeliana ( $\mathcal{A}$  consiste de todas aquellas matrices diagonales de determinante igual a 1, cuyas entradas son positivas) y  $\eta(g) \in \text{Heis}(3, \mathbb{C})$  se llama parte nilpotente. Más aún se tiene que

$$\begin{aligned} k(g) &= \begin{bmatrix} \frac{g_1}{|g_1|} & & & \\ & \frac{g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1}{|g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1|} & & \\ & & \frac{g_3 - \frac{\langle g_3, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1 - \frac{\langle g_3, g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1 \rangle}{|g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1|^2} (g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1)}{(|g_1| \cdot |g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1|)^{-1}} & \\ & & & \end{bmatrix}, \\ a(g) &= \begin{bmatrix} |g_1| & 0 & 0 & \\ 0 & |g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1| & 0 & \\ 0 & 0 & (|g_1| \cdot |g_2 - \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{|g_1|^2} g_1|)^{-1} & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \\ \eta(g) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{\langle g_2, g_1 \rangle}{(g_1, g_1)} & \frac{\langle g_3, g_1 \rangle}{(g_1, g_1)} & \\ 0 & 1 & \frac{|g_1|^2 \langle g_3, g_2 \rangle - \langle g_2, g_1 \rangle \langle g_3, g_1 \rangle}{|g_1|^2 \langle g_2, g_2 \rangle - |\langle g_2, g_1 \rangle|^2} & \\ 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donde  $\{g_1, g_2, g_3\}$  son los vectores columna de  $g$ .

Con la finalidad de exhibir como se usa la Descomposición QR para obtener la la Descomposición de Iwasawa (Véase [43]) se comenta a continuación la demostración de el Teorema anterior.

De acuerdo con la con la Descomposición QR (Teorema 2.1.1) se tiene que para cada  $g \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$ , este elemento se puede reescribir de manera única como

$$g = Q(g) \cdot R(g),$$

donde  $Q(g) \in \text{SU}(3) = \{A \in \text{GL}(3, \mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^t \text{ y } \text{Det}(A) = 1\}$  y  $R(g)$  es una matriz triangular superior en  $\mathbb{C}$  con entradas positivas en la diagonal principal. Si se considera a la matriz  $a(g)$  como la matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal principal son iguales a las entradas de la diagonal principal de la matriz  $R(g)$ . Entonces

$$g = Q(g) \cdot a(g) \cdot (a^{-1}(g)R(g)) = k(g) \cdot a(g) \cdot \eta(g),$$

es la Descomposición de Iwasawa del elemento  $g \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$ .

Dada una matriz  $g \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$  el algoritmo siguiente calcula la matriz compacta  $k(g)$ , las entradas  $a_{11}(g)$ ,  $a_{22}(g)$  de la matriz  $a(g)$  y la diferencia de los coeficientes  $\eta_{12}(g)$ ,  $\eta_{23}(g)$  de la

matriz  $\eta(g)$  y para tal tarea se utiliza el algoritmo de la Descomposición QR.

---

**Algorithm 2:** Descomposición de Iwasawa.

---

```

1 import sympy;
2 function KAN(A) ;
   Input :  $B$ – Una matriz cuadrada en  $SL(3, \mathbb{C})$ .
   Output:  $K$ – matriz compacta.
              $a_{11}(B), a_{22}(B)$ – coeficientes de matriz abeliana  $A$ .
              $z_{23}(B) = (\eta_{23}(B) - \eta_{12}(B))$ – diferencia de los coeficientes de la matriz
             nilpotente  $N$ .
3  $(Q', R') = QR(B)$ ;
4  $K = Q'$ ;
5  $z1 \leftarrow ((A.col(1)).dot(G1, hermitian = True))/(un1 * *2)$ ;
6  $z2 \leftarrow ((A.col(2)).dot(G2, hermitian = True))/(un2 * *2)$ ;
7  $zz = z2 - z1$ ;
8 return ( $K, R[0], R[4], zz$ )

```

---

## Capítulo 3

# Quandle Parabólico Unipotente en $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$

En el Capítulo presente se construye el quandle sobre él que se trabajaran las coloraciones que permitirán estudiar representaciones irreducibles del grupo fundamental del nudo ocho, para tal construcción es importante la Descomposición QR (Véase Teoremas 2.1.1, 2.1.2), algunos resultados sobre espacios homogéneos y la Descomposición de Iwasawa (Véase Teorema 2.2.1), también se definirá un conjunto de parámetros (generalizando la Rebanada de Riley clásica Véase Apéndice B y Definición B.0.4) al que llamaremos Rebanada de Riley compleja.

### 3.1. Clase de conjugación del elemento Parabólico Unipotente y su espacio homogéneo asociado

En esta sección se usaran los conceptos expuestos en la Sección 1.1, del Capítulo 1, para dotar al espacio de orbitas de una estructura de quandle, lo cual permitirá construir el objeto principal de esta tesis.

Considérese la acción izquierda de  $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$  en si mismo por conjugación, en otras palabras

$$\begin{aligned} \cdot : \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C}) \times \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C}) \\ (g, h) &\mapsto g \cdot h = g^{-1}hg. \end{aligned}$$

Sea

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C}) \quad (3.1)$$

un elemento **parabólico unipotente**. Este elemento tiene como punto fijo a  $e_1 = (1, 0, 0)$  y deja invariante a la línea  $l_1 := \overleftrightarrow{e_1, e_2}$ , con  $e_2 = (0, 1, 0)$ . Durante todo este Capítulo y hasta que se diga lo contrario se denotará por  $G = \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$  y  $GP$  a la órbita de  $P$ , es decir,

$$GP = \{B^{-1}PB \mid B \in G\}.$$

**Proposición 3.1.1.** *Sea  $G$  actuando en si mismo por conjugación y sea  $P$  como en (3.1), entonces el subgrupo de isotropía con respecto a la acción tiene la forma siguiente*

$$\mathrm{Isot}(P, G) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{C} \right\}. \quad (3.2)$$

*Demostración.* Por definición de subgrupo de isotropía, se tiene que

$$\text{Isot}(P, G) = \{B \in G : B^{-1}PB = P\}$$

es decir, es el subgrupo **centralizador** de  $P$  en  $G$ . Sea

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & q \end{bmatrix} \in G,$$

entonces

$$PB = \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+q \\ g & h & q \end{bmatrix},$$

por otro lado

$$BP = \begin{bmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+q \end{bmatrix},$$

como  $PB = BP$ , entonces

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Puesto que el determinante de  $B$  es igual a uno, se tiene que  $a$  es una raíz cubica de la unidad. Ya que  $\text{PSL}(3, \mathbb{C}) = \text{SL}(3, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_3$  se puede suponer que  $a = 1$  y así se obtiene que

$$\text{Isot}(P, G) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{C} \right\}. \quad (3.3)$$

□

Puesto que el subgrupo de isotropía con la acción por conjugación es el centralizador, se denotará a partir de ahora a  $\text{Isot}(P, G)$  como  $C_G(P)$

**Proposición 3.1.2.** *El grupo de matrices  $\text{SL}(3, \mathbb{C})$  es un grupo de Lie. Más aún, la dimensión compleja de  $\text{SL}(3, \mathbb{C})$  es igual a 8.*

**Corolario 3.1.3.** *El grupo  $G$  tiene dimensión compleja igual a 8.*

**Corolario 3.1.4.** *El espacio cociente  $G/C_G(P)$  es un espacio homogéneo.*

**Proposición 3.1.5.** *El espacio homogéneo  $G/C_G(P)$ , tiene dimensión compleja igual a 6.*

*Demostración.* Puesto que  $\dim_{\mathbb{C}}(G/\text{Isot}(x, G)) = \dim_{\mathbb{C}}(Gx)$  (Véase Lema C.1.5), se sustituye en (C.1), entonces

$$\dim_{\mathbb{C}} G = \dim_{\mathbb{C}} \text{Isot}(x, G) + \dim_{\mathbb{C}} (G/\text{Isot}(x, G)).$$

Aplicando el lema C.1.5 al espacio homogéneo  $G/C_G(P)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} (G/C_G(P)) &= \dim_{\mathbb{C}} (G) - \dim_{\mathbb{C}} (C_G(P)) \\ &= 8 - 2 = 6. \end{aligned}$$

Esto ya que la dimensión del subgrupo de isotropía de la matriz  $P$  tiene dimensión dos. □

El grupo  $G$  es un quandle con la operación  $g \text{ conj } h = h^{-1}gh$  (Véase la Observación 1.3.5), más aún.



**Corolario 3.1.6.** *La clase de conjugación del elemento parabólico unipotente  $GP$  es un subquandle de  $G$*

*Demostración.*  $GP$  es cerrado bajo la operación “conj”. □

El resultado siguiente garantiza que el espacio homogéneo  $G/C_G(x)$  es un quandle.

**Lema 3.1.7.** *Sea  $G$  un grupo de Lie y considérese la acción izquierda de  $G$  en si mismo por conjugación, es decir,  $g \cdot h = g^{-1}hg$ , entonces para cada  $x \in G$ , se tiene que  $Gx$  es una variedad difeomorfa a  $G/C_G(x)$ . Además, si se considera el automorfismo  $\hat{\rho} : G \rightarrow G$  dado por  $\hat{\rho}(g) = x^{-1}gx$ , entonces se puede dotar de una estructura de quandle de Joyce-Matveev a  $G/C_G(x)$  cuya operación es*

$$\begin{aligned} gC_G(x) * hC_G(x) &= hx^{-1}h^{-1}gxC_G(x) = hx^{-1}h^{-1}gC_G(x), \\ gC_G(x) *^{-1} hC_G(x) &= hxx^{-1}gC_G(x) = hxx^{-1}gC_G(x). \end{aligned}$$

*Demostración.* Considérese a

$$\begin{aligned} \xi : G/C_G(x) &\rightarrow Gx \\ gC_G(x) &\mapsto g^{-1} \cdot x. \end{aligned}$$

La regla de correspondencia anterior esta bien definida y es inyectiva, ya que, si  $gC_G(x) = hC_G(x)$ , equivale a decir que  $h = gc_G(x)$  con  $c_G(x) \in C_G(x)$ , y esto pasa si y solo si

$$\begin{aligned} h^{-1} \cdot x &= hxx^{-1} \\ &= gc_G(x)x(gc_G(x))^{-1} \\ &= gc_G(x)x(c_G(x))^{-1}(g^{-1}) \\ &= gxg^{-1}. \end{aligned}$$

También es sobreyectiva, esto se debe a que si  $y \in Gx$ , entonces existe  $g \in G$  tal que  $y = gxg^{-1}$ . La función inversa de  $\xi$  está definida de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \xi^{-1} : Gx &\rightarrow G/C_G(x) \\ \xi^{-1}(g \cdot x) &= g^{-1}C_G(x) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Más aún la función  $\xi$  es diferenciable, y por tanto se tiene la primera parte del lema. La segunda parte se sigue del ejemplo 1.3.8. □

**Corolario 3.1.8.** *El espacio homogéneo  $G/C_G(P)$  es un quandle de Joyce-Matveev cuya operación es*

$$gC_G(P) * hC_G(P) = hP^{-1}h^{-1}gPC_G(P) = hP^{-1}h^{-1}gC_G(P) \tag{3.5}$$

$$gC_G(P) *^{-1} hC_G(P) = hPh^{-1}gP^{-1}C_G(P) = hPh^{-1}gC_G(P). \tag{3.6}$$

El resultado siguiente garantiza que los espacios  $G/C_G(P)$  y  $GP$  son isomorfos como quandles.

**Lema 3.1.9.** *Los quandles  $(GP, \text{conj})$  y  $(G/C_G(P), *)$  son isomorfos.*

*Demostración.* De la demostración de Lema 3.1.7 se sigue que  $\xi$  es biyección, resta demostrar que  $\xi$  es morfismo de quandles. Sean  $gC_G(P), hC_G(P) \in G/C_G(P)$ ,

$$\begin{aligned} \xi(gC_G(P) * hC_G(P)) &= \xi(hP^{-1}h^{-1}gC_G(P)) \\ &= hP^{-1}h^{-1}gPg^{-1}hPh^{-1} \\ &= gPg^{-1} \text{ conj } hPh^{-1} \\ &= \xi(gC_G(P)) \text{ conj } \xi(hC_G(P)). \end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba. □

**Proposición 3.1.10.** *Considérese al grupo de Heisenberg  $\text{Heis}(3, \mathbb{C})$  entonces,*

$$\text{Heis}(3, \mathbb{C}) \cong \mathcal{L} \cdot C_G(P),$$

donde

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \right\}.$$

*Demostración.* Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Heis}(3, \mathbb{C}),$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in C_G(P),$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \in G.$$

Se considera el siguiente producto de matrices

$$A = UB.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior en términos de los coeficientes de  $U$ , se tiene que

$$\begin{aligned} u_{11} &= 1, & u_{12} &= 0, & u_{13} &= 0, \\ u_{21} &= 0, & u_{22} &= 1, & u_{23} &= c - a, \\ u_{31} &= 0, & u_{32} &= 0, & u_{33} &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto cada elemento de  $\text{Heis}(3, \mathbb{C})$  se puede escribir como el producto de una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c - a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y un elemento del grupo  $C_G(P)$ . Si hacemos  $z = c - a$ , se tiene el grupo

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \right\}.$$

□

**Corolario 3.1.11.** *Se definen las funciones siguientes*

$$\hat{a} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} := (\mathbb{R}^2)^* \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \hat{a}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha, \beta)^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\eta} : \mathbb{C}^3 \longrightarrow N$$

$$(a, b, c) \mapsto \hat{\eta}(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{SU}(3) \times (\mathbb{R}^*)^2 \times \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathrm{SL}(3, \mathbb{C}) \\ (k, \alpha, \beta, a, b, c) &\mapsto \phi(k, \alpha, \beta, a, b, c) = k\hat{a}(\alpha, \beta)\hat{\eta}(a, b, c). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Entonces  $\phi$  es un difeomorfismo.

*Demostración.* Consecuencia inmediata de la Descomposición de Iwasawa (Véase Teorema 2.2.1)  $\square$

**Corolario 3.1.12.** *El espacio homogéneo  $G/C_G(P)$  es difeomorfo a  $\mathrm{SU}(3) \times (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{C}$ .*

*Demostración.* Se define la función

$$\zeta : \mathrm{SU}(3) \times (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{C} \longrightarrow G/C_G(P)$$

dada por

$$\zeta(k, \alpha, \beta, z) = \phi(k, \alpha, \beta, 0, 0, z)C_G(P) \quad (\text{el difeomorfismo } \phi \text{ es como en (3.7)}).$$

Ahora se define la función

$$\begin{aligned} \chi : G/C_G(P) &\longrightarrow \mathrm{SU}(3) \times (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{C} \\ \chi(gC_G(P)) &= (k(g), a_{11}(g), a_{22}(g), z_{23}(g)), \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde  $k(g)$  es la matriz en  $\mathrm{SU}(3)$  que resulta de la Descomposición de Iwasawa de  $g$ ,  $a_{11}(g)$ ,  $a_{22}(g)$  los coeficientes (cuya posición es la que indica el subíndice) de la matriz  $a(g)$  que es la matriz diagonal de la Descomposición de Iwasawa de  $g$  y  $z_{23}(g) = \eta_{23}(g) - \eta_{12}(g)$  con  $\eta_{12}(g), \eta_{23}(g)$  coeficientes de la matriz  $\eta(g)$ , que es la matriz triangular superior con unos en la diagonal principal de la Descomposición de Iwasawa de  $g$ . Esta función está bien definida ya que, si  $gC_G(P) = hC_G(P)$  entonces

$$h = gc_P, \text{ con } c_P \in C_G(P),$$

aplicando la Descomposición de Iwasawa a  $h$  y a  $g$ , se tiene entonces que

$$\begin{aligned} k(h) &= k(g) \\ a(h) &= a(g) \\ \eta(h) &= \eta(g). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Luego

$$\eta(g)c_P = \eta(g) \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a + \eta(g)12 & b + \eta(g)13 + a\eta_{12}(g) \\ 0 & 1 & a + \eta_{23}(g) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \chi(gC_G(P)) &= (k(g), a_{11}(g), a_{22}(g), a + \eta_{23}(g) - (a + \eta_{12}(g))) \\ &= (k(g), a_{11}(g), a_{22}(g), \eta_{23}(g) - \eta_{12}(g)) \\ &= (k(h), a(h)_{11}, a(h)_{22}, z(h)_{23}) \\ &= \chi(hC_G(P)). \end{aligned}$$

Se probará que  $\chi$  es inversa por la izquierda y por la derecha de  $\zeta$ ;

$$\begin{aligned} \chi(\zeta(k, \alpha, \beta, z)) &= \chi(\phi(k, \alpha, \beta, 0, 0, z)C_G(P)) \\ &= \chi(k\hat{a}(\alpha, \beta)\hat{\eta}(0, 0, z)C_G(P)) \\ &= (k, \alpha, \beta, z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(\chi(gC_G(P))) &= \zeta(k(g), a_{11}(g), a_{22}(g), z_{23}(g)) \\ &= \phi(k(g), a_{11}(g), a_{22}(g), 0, 0, z_{23}(g)) \\ &= k(g)\hat{a}(a_{11}(g), a_{22}(g))\hat{\eta}(0, 0, z_{23}(g))C_G(P).\end{aligned}$$

Por la unicidad de la Descomposición de Iwasawa se tiene que

$$gC_G(P) = k(g)\hat{a}(a_{11}(g), a_{22}(g))\hat{\eta}(0, 0, z_{23}(g))C_G(P).$$

De aquí que  $\zeta$  es biyectiva cuya inversa  $\zeta^{-1} = \chi$ .  $\square$

Se debe definir una operación de quandle para  $SU(3) \times (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{C}$ , para tal propósito se debe hacer uso de la función  $\zeta$  y su función inversa  $\zeta^{-1}$  definidas en el Corolario anterior.

**Lema 3.1.13.** *Las siguientes operaciones binarias dotan de una estructura de quandle al espacio  $SU(3) \times (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{C}$*

$$\begin{aligned}(U, x_1, x_2, z) \bullet (V, y_1, y_2, w) &= (k((s_{ij})), a((s_{ij}))_{11}, a((s_{ij}))_{22}, z((s_{ij}))_{23}), \\ (U, x_1, x_2, z) \bullet^{-1} (V, y_1, y_2, w) &= (k((t_{ij})), a((t_{ij}))_{11}, a((t_{ij}))_{22}, z((t_{ij}))_{23}),\end{aligned}\tag{3.10}$$

donde

$$(s_{ij}) = (V\hat{a}(y_1, y_2)\hat{\eta}(0, 0, w))P^{-1}(V\hat{a}(y_1, y_2)\hat{\eta}(0, 0, w))^{-1}(U\hat{a}(x_1, x_2)\hat{\eta}(0, 0, z))$$

y

$$(t_{ij}) = (V\hat{a}(y_1, y_2)\hat{\eta}(0, 0, w))P(V\hat{a}(y_1, y_2)\hat{\eta}(0, 0, w))^{-1}(U\hat{a}(x_1, x_2)\hat{\eta}(0, 0, z)).$$

*Demostración.* Del Corolario 3.1.12 se tiene que  $\zeta$  es una biyección entre  $SU(3) \times (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{C}$  y  $G/C_G(P)$ , puesto que  $(G/C_G(P), *)$  es un quandle, se puede heredar la estructura de quandle a  $SU(3) \times (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{C}$  mediante  $\zeta$ . Es decir, sean  $(U, x_1, x_2, z), (V, y_1, y_2, w) \in SU(3) \times (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned}(U, x_1, x_2, z) \bullet (V, y_1, y_2, w) &= \zeta^{-1}(\zeta(U, x_1, x_2, z) * \zeta(V, y_1, y_2, w)) \\ &= \zeta^{-1}(\phi(U, x_1, x_2, 0, 0, z) * \phi(V, y_1, y_2, 0, 0, w)) \\ &= \zeta^{-1}(U\hat{a}(x_1, x_2)\hat{\eta}(0, 0, z)C_G(P) * V\hat{a}(y_1, y_2)\hat{\eta}(0, 0, w)C_G(P)) \\ &= \zeta^{-1}\left((V\hat{a}(y_1, y_2)\hat{\eta}(0, 0, w))P^{-1}(V\hat{a}(y_1, y_2)\hat{\eta}(0, 0, w))^{-1}(U\hat{a}(x_1, x_2)\hat{\eta}(0, 0, z))C_G(P)\right).\end{aligned}$$

Sean

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix}, \hat{a}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & (x_1x_2)^{-1} \end{bmatrix}, \hat{\eta}(0, 0, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}, \hat{a}(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & (y_1y_2)^{-1} \end{bmatrix}, \hat{\eta}(0, 0, w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces la matriz

$$(V\hat{a}(y_1, y_2)\hat{\eta}(0, 0, w))P^{-1}(V\hat{a}(y_1, y_2)\hat{\eta}(0, 0, w))^{-1}(U\hat{a}(x_1, x_2)\hat{\eta}(0, 0, z)) = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix},$$

donde

$$s_{11} = (y_2)^{-1}(x_1(y_1^2 y_2^2(w+1)v_{1,1}(u_{1,1}\overline{v_{13}} + u_{21}\overline{v_{23}} + u_{31}\overline{v_{33}}) - y_1 y_2^3 v_{12}(u_{11}\overline{v_{13}} + u_{21}\overline{v_{23}} + u_{32}\overline{v_{33}}) - y_1 v_{11}(u_{11}\overline{v_{12}} + u_{21}\overline{v_{22}} + u_{31}\overline{v_{32}}) + y_2 u_{11})),$$

$$s_{12} = (y_2)^{-1}(x_2(y_1^2 y_2^2(w+1)v_{11}(u_{12}\overline{v_{13}} + u_{22}\overline{v_{23}} + u_{32}\overline{v_{33}}) - y_1 y_2^3 v_{12}(u_{12}\overline{v_{13}} + u_{22}\overline{v_{23}} + u_{32}\overline{v_{33}}) - y_1 v_{11}(u_{12}\overline{v_{12}} + u_{22}\overline{v_{22}} + u_{32}\overline{v_{32}}) + y_2 u_{12})),$$

$$s_{13} = (x_1 x_2 y_2)^{-1}(x_1 x_2^2 z(y_1^2 y_2^2(w+1)v_{11}(u_{12}\overline{v_{13}} + u_{22}\overline{v_{23}} + u_{32}\overline{v_{33}}) - y_1 y_2^3 v_{12}(u_{12}\overline{v_{13}} + u_{22}\overline{v_{23}} + u_{32}\overline{v_{33}}) - y_1 v_{11}(u_{12}\overline{v_{12}} + u_{22}\overline{v_{22}} + u_{32}\overline{v_{32}}) + y_2 u_{12}) + y_1^2 y_2^2(w+1)v_{1,1}(u_{13}\overline{v_{13}} + u_{23}\overline{v_{23}} + u_{33}\overline{v_{33}}) - y_1 y_2^3 v_{1,2}(u_{13}\overline{v_{13}} + u_{23}\overline{v_{23}} + u_{33}\overline{v_{33}}) - y_1 v_{11}(u_{13}\overline{v_{12}} + u_{23}\overline{v_{22}} + u_{33}\overline{v_{32}}) + y_2 u_{13}),$$

$$s_{21} = (y_2)^{-1}(x_1(y_1^2 y_2^2(w+1)v_{21}(u_{11}\overline{v_{13}} + u_{21}\overline{v_{23}} + u_{31}\overline{v_{33}}) - y_1 y_2^3 v_{22}(u_{11}\overline{v_{13}} + u_{21}\overline{v_{23}} + u_{31}\overline{v_{33}}) - y_1 v_{21}(u_{11}\overline{v_{12}} + u_{21}\overline{v_{22}} + u_{31}\overline{v_{32}}) + y_2 u_{21})),$$

$$s_{22} = (y_2)^{-1}(x_2(y_1^2 y_2^2(w+1)v_{21}(u_{12}\overline{v_{13}} + u_{22}\overline{v_{23}} + u_{32}\overline{v_{33}}) - y_1 y_2^3 v_{22}(u_{12}\overline{v_{13}} + u_{22}\overline{v_{23}} + u_{32}\overline{v_{33}}) - y_1 v_{21}(u_{12}\overline{v_{12}} + u_{22}\overline{v_{22}} + u_{32}\overline{v_{32}}) + y_2 u_{22})),$$

$$s_{23} = (x_1 x_2 y_2)^{-1}(x_1 x_2^2 z(y_1^2 y_2^2(w+1)v_{21}(u_{12}\overline{v_{13}} + u_{22}\overline{v_{23}} + u_{32}\overline{v_{33}}) - y_1 y_2^3 v_{22}(u_{12}\overline{v_{13}} + u_{22}\overline{v_{23}} + u_{32}\overline{v_{33}}) - y_1 v_{21}(u_{12}\overline{v_{12}} + u_{22}\overline{v_{22}} + u_{32}\overline{v_{32}}) + y_2 u_{22}) + y_1^2 y_2^2(w+1)v_{21}(u_{13}\overline{v_{13}} + u_{23}\overline{v_{23}} + u_{33}\overline{v_{33}}) - y_1 y_2^3 v_{22}(u_{13}\overline{v_{13}} + u_{23}\overline{v_{23}} + u_{33}\overline{v_{33}}) - y_1 v_{21}(u_{13}\overline{v_{12}} + u_{23}\overline{v_{22}} + u_{33}\overline{v_{32}}) + y_2 u_{23}),$$

$$s_{31} = (y_2)^{-1}(x_1(y_1^2 y_2^2(w+1)v_{31}(u_{11}\overline{v_{13}} + u_{21}\overline{v_{23}} + u_{31}\overline{v_{33}}) - y_1 y_2^3 v_{32}(u_{11}\overline{v_{13}} + u_{21}\overline{v_{23}} + u_{31}\overline{v_{33}}) - y_1 v_{31}(u_{11}\overline{v_{12}} + u_{21}\overline{v_{22}} + u_{31}\overline{v_{32}}) + y_2 u_{31})),$$

$$s_{32} = (y_2)^{-1}(x_2(y_1^2 y_2^2(w+1)v_{31}(u_{12}\overline{v_{13}} + u_{22}\overline{v_{23}} + u_{32}\overline{v_{33}}) - y_1 y_2^3 v_{32}(u_{12}\overline{v_{13}} + u_{22}\overline{v_{23}} + u_{32}\overline{v_{33}}) - y_1 v_{31}(u_{12}\overline{v_{12}} + u_{22}\overline{v_{22}} + u_{32}\overline{v_{32}}) + y_2 u_{32})),$$

$$s_{33} = (x_1 x_2 y_2)^{-1}(x_1 x_2^2 z(y_1^2 y_2^2(w+1)v_{31}(u_{12}\overline{v_{13}} + u_{22}\overline{v_{23}} + u_{32}\overline{v_{33}}) - y_1 y_2^3 v_{32}(u_{12}\overline{v_{13}} + u_{22}\overline{v_{23}} + u_{32}\overline{v_{33}}) - y_1 v_{31}(u_{12}\overline{v_{12}} + u_{22}\overline{v_{22}} + u_{32}\overline{v_{32}}) + y_2 u_{32}) + y_1^2 y_2^2(w+1)v_{31}(u_{13}\overline{v_{13}} + u_{23}\overline{v_{23}} + u_{33}\overline{v_{33}}) - y_1 y_2^3 v_{32}(u_{13}\overline{v_{13}} + u_{23}\overline{v_{23}} + u_{33}\overline{v_{33}}) - y_1 v_{31}(u_{13}\overline{v_{12}} + u_{23}\overline{v_{22}} + u_{33}\overline{v_{32}}) + y_2 u_{33}).$$

Se denota a  $\{S_1, S_2, S_3\}$  los vectores columna de la matriz de  $(s_{ij})$ , se tiene entonces que

$$\zeta^{-1}((s_{ij})C_G(P)) = (k((s_{ij})), a((s_{ij}))_{11}, a((s_{ij}))_{22}, z((s_{ij}))_{23}),$$

donde

$$k((s_{ij})) = \begin{bmatrix} \frac{S_1}{|S_1|} & \frac{S_2 - \frac{\langle S_2, S_1 \rangle}{|S_1|^2} S_1}{\left| S_2 - \frac{\langle S_2, S_1 \rangle}{|S_1|^2} S_1 \right|} & \frac{S_3 - \frac{\langle S_3, S_1 \rangle}{|S_1|^2} S_1 - \frac{\langle S_3, S_2 - \frac{\langle S_2, S_1 \rangle}{|S_1|^2} S_1 \rangle}{\left| S_2 - \frac{\langle S_2, S_1 \rangle}{|S_1|^2} S_1 \right|^2} (S_2 - \frac{\langle S_2, S_1 \rangle}{|S_1|^2} S_1)}{\left( |S_1| \left| S_2 - \frac{\langle S_2, S_1 \rangle}{|S_1|^2} S_1 \right| \right)^{-1}} \end{bmatrix},$$

$$a((s_{ij}))_{11} = |S_1|,$$

$$a((s_{ij}))_{22} = \left| S_2 - \frac{\langle S_2, S_1 \rangle}{|S_1|^2} S_1 \right|$$

y

$$z((s_{ij}))_{23} = \frac{|S_1|^2 \langle S_3, S_2 \rangle - \overline{\langle S_2, S_1 \rangle} \langle S_3, S_1 \rangle}{|S_1|^2 \langle S_2, S_2 \rangle - |\langle S_2, S_1 \rangle|^2} - \frac{\langle S_2, S_1 \rangle}{\langle S_1, S_1 \rangle}.$$

Para la operación inversa se tiene

$$\begin{aligned}
 [U, x_1, x_2, z] \bullet^{-1} [V, y_1, y_2, w] &= \zeta^{-1} (\zeta(U, x_1, x_2, z) *^{-1} \zeta(V, y_1, y_2, w)) \\
 &= \zeta^{-1} (\phi(U, x_1, x_2, 0, 0, z) *^{-1} \phi(V, y_1, y_2, 0, 0, w)) \\
 &= \zeta^{-1} (U\hat{a}(x_1, x_2)\hat{\eta}(0, 0, z)C_G(P) *^{-1} V\hat{a}(y_1, y_2)\hat{\eta}(0, 0, w)C_G(P)) \\
 &= \zeta^{-1} \left( (V\hat{a}(y_1, y_2)\hat{\eta}(0, 0, w))P(V\hat{a}(y_1, y_2)\hat{\eta}(0, 0, w))^{-1} (U\hat{a}(x_1, x_2)\hat{\eta}(0, 0, z))C_G(P) \right),
 \end{aligned}$$

haciendo cálculos se tiene que

$$(V\hat{a}(y_1, y_2)\hat{\eta}(0, 0, w))P(V\hat{a}(y_1, y_2)\hat{\eta}(0, 0, w))^{-1} (U\hat{a}(x_1, x_2)\hat{\eta}(0, 0, z)) = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix},$$

con

$$t_{11} = (y_2^{-1})(x_1(-wy_1^2y_2^2v_{11}(u_{11}(\bar{v}_{13}) + u_{21}(\bar{v}_{23}) + u_{31}(\bar{v}_{33})) + y_1y_2^3v_{12}(u_{11}(\bar{v}_{13}) + u_{21}(\bar{v}_{23}) + u_{31}(\bar{v}_{33})) + y_1v_{11}(u_{11}(\bar{v}_{12}) + u_{21}(\bar{v}_{22}) + u_{31}(\bar{v}_{32})) + y_2u_{11})),$$

$$t_{12} = (y_2^{-1})(x_2(-wy_1^2y_2^2v_{11}(u_{1,2}(\bar{v}_{13}) + u_{22}(\bar{v}_{23}) + u_{32}(\bar{v}_{33})) + y_1y_2^3v_{12}(u_{12}(\bar{v}_{13}) + u_{22}(\bar{v}_{23}) + u_{32}(\bar{v}_{33})) + y_1v_{11}(u_{12}(\bar{v}_{12}) + u_{22}(\bar{v}_{22}) + u_{32}(\bar{v}_{32})) + y_2u_{12})),$$

$$t_{13} = ((x_1x_2y_2)^{-1})(y_1(x_1x_2^2zu_{22} + u_{23})(y_2^2(\bar{v}_{23})(y_2v_{12} - wy_1v_{11}) + v_{11}(\bar{v}_{22})) + y_1(x_1x_2^2zu_{32} + u_{33})(y_2^2(\bar{v}_{33})(y_2v_{12} - wy_1v_{11}) + v_{11}(\bar{v}_{32})) + (x_1x_2^2zu_{12} + u_{13})(y_1y_2^2(\bar{v}_{13})(y_2v_{12} - wy_1v_{11}) + y_1v_{11}(\bar{v}_{12}) + y_2)),$$

$$t_{21} = (y_2^{-1})(x_1(-wy_1^2y_2^2v_{21}(u_{11}(\bar{v}_{13}) + u_{21}(\bar{v}_{23}) + u_{31}(\bar{v}_{33})) + y_1y_2^3v_{22}(u_{11}(\bar{v}_{13}) + u_{21}(\bar{v}_{23}) + u_{31}(\bar{v}_{33})) + y_1v_{21}(u_{11}(\bar{v}_{12}) + u_{21}(\bar{v}_{22}) + u_{31}(\bar{v}_{32})) + y_2u_{21})),$$

$$t_{22} = (y_2^{-1})(x_2(-wy_1^2y_2^2v_{21}(u_{12}(\bar{v}_{13}) + u_{22}(\bar{v}_{23}) + u_{32}(\bar{v}_{33})) + y_1y_2^3v_{22}(u_{12}(\bar{v}_{13}) + u_{22}(\bar{v}_{23}) + u_{32}(\bar{v}_{33})) + y_1v_{21}(u_{12}(\bar{v}_{12}) + u_{22}(\bar{v}_{22}) + u_{32}(\bar{v}_{32})) + y_2u_{22})),$$

$$t_{23} = ((x_1x_2y_2)^{-1})(y_1(x_1x_2^2zu_{12} + u_{13})(y_2^2(\bar{v}_{13})(y_2v_{22} - wy_1v_{21}) + v_{21}(\bar{v}_{12})) + y_1(x_1x_2^2zu_{32} + u_{33})(y_2^2(\bar{v}_{33})(y_2v_{22} - wy_1v_{21}) + v_{21}(\bar{v}_{32})) + (x_1x_2^2zu_{22} + u_{23})(y_1y_2^2(\bar{v}_{23})(y_2v_{22} - wy_1v_{21}) + y_1v_{21}(\bar{v}_{22}) + y_2)),$$

$$t_{31} = (y_2^{-1})(x_1(-wy_1^2y_2^2v_{31}(u_{11}(\bar{v}_{13}) + u_{21}(\bar{v}_{23}) + u_{31}(\bar{v}_{33})) + y_1y_2^3v_{32}(u_{11}(\bar{v}_{13}) + u_{21}(\bar{v}_{23}) + u_{31}(\bar{v}_{33})) + y_1v_{31}(u_{11}(\bar{v}_{12}) + u_{21}(\bar{v}_{22}) + u_{31}(\bar{v}_{32})) + y_2u_{31})),$$

$$t_{32} = (y_2^{-1})(x_2(-wy_1^2y_2^2v_{31}(u_{12}(\bar{v}_{13}) + u_{22}(\bar{v}_{23}) + u_{32}(\bar{v}_{33})) + y_1y_2^3v_{32}(u_{12}(\bar{v}_{13}) + u_{22}(\bar{v}_{23}) + u_{32}(\bar{v}_{33})) + y_1v_{31}(u_{12}(\bar{v}_{12}) + u_{22}(\bar{v}_{22}) + u_{32}(\bar{v}_{32})) + y_2u_{32})),$$

$$t_{33} = ((x_1x_2y_2)^{-1})(y_1(x_1x_2^2zu_{12} + u_{13})(y_2^2(\bar{v}_{13})(y_2v_{32} - wy_1v_{31}) + v_{31}(\bar{v}_{12})) + y_1(x_1x_2^2zu_{22} + u_{23})(y_2^2(\bar{v}_{23})(y_2v_{32} - wy_1v_{31}) + v_{31}(\bar{v}_{22})) + (x_1x_2^2zu_{32} + u_{33})(y_1y_2^2(\bar{v}_{33})(y_2v_{32} - wy_1v_{31}) + y_1v_{31}(\bar{v}_{32}) + y_2)).$$

De manera análoga, se denota a  $\{T_1, T_2, T_3\}$  como los vectores columna de la matriz de  $(t_{ij})$ , se tiene entonces que

$$\zeta^{-1}((t_{ij})C_G(P)) = [k((t_{ij})), a((t_{ij}))_{11}, a((t_{ij}))_{11}, z((t_{ij}))_{23}],$$

donde

$$k((t_{ij})) = \left[ \begin{array}{c} \frac{T_1}{|T_1|} \quad \frac{T_2 - \frac{\langle T_2, T_1 \rangle}{|T_1|^2} T_1}{\left| T_2 - \frac{\langle T_2, T_1 \rangle}{|T_1|^2} T_1 \right|} \quad \frac{T_3 - \frac{\langle T_3, T_1 \rangle}{|T_1|^2} T_1 - \frac{\langle T_3, T_2 - \frac{\langle T_2, T_1 \rangle}{|T_1|^2} T_1 \rangle}{\left| T_2 - \frac{\langle T_2, T_1 \rangle}{|T_1|^2} T_1 \right|^2} (T_2 - \frac{\langle T_2, T_1 \rangle}{|T_1|^2} T_1)}{\left( |T_1| \cdot \left| T_2 - \frac{\langle T_2, T_1 \rangle}{|T_1|^2} T_1 \right| \right)^{-1}} \end{array} \right],$$

$$a((t_{ij}))_{11} = |T_1|,$$

$$a((t_{ij}))_{22} = \left| T_2 - \frac{\langle T_2, T_1 \rangle}{|T_1|^2} T_1 \right|$$

y

$$z((t_{ij}))_{23} = \frac{|T_1|^2 \langle T_3, T_2 \rangle - \overline{\langle T_2, T_1 \rangle} \langle T_3, T_1 \rangle}{|T_1|^2 \langle T_2, T_2 \rangle - |\langle T_2, T_1 \rangle|^2} - \frac{\langle T_2, T_1 \rangle}{\langle T_1, T_1 \rangle}.$$

□

**Definición 3.1.14.** Se denotará al conjunto  $\mathrm{SU}(3) \times (\mathbb{R}^2)^* \times \mathbb{C}$  por  $\mathcal{P}ab$ . Al quandle  $(\mathcal{P}ab, \bullet)$  se le llamará el **Quandle parabólico unipotente** de  $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ .

**Corolario 3.1.15.** Los quandles  $(GP, \mathrm{conj})$  y  $(\mathcal{P}ab, \bullet)$  son isomorfos

*Demostración.* Considérese la función  $\psi = \zeta^{-1} \circ \xi^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} GP & \xrightarrow{\xi^{-1}} & G/C_G(P) \\ \psi \downarrow & \nearrow \zeta & \\ \mathcal{P}ab & & \end{array}$$

definida por

$$\psi(g \cdot P) = (K(g^{-1}), a_{11}(g^{-1}), a_{22}(g^{-1}), z_{23}(g^{-1})), \quad (3.11)$$

está función es un morfismo de quandles biyectivo. Por tanto los quandles son isomorfos. □

**Lema 3.1.16.** Sean  $AC_G(P), BC_G(P) \in G/C_G(P)$  tales que  $AC_G(P) = BC_G(P)$ , entonces el primer vector columna de la matriz compacta  $K(A)$  en  $\mathcal{P}ab$  es igual al primer vector columna de la matriz compacta  $K(B)$  en  $\mathcal{P}ab$ .

*Demostración.* Si  $AC_G(P), BC_G(P) \in G/C_G(P)$  y son tales que  $AC_G(P) = BC_G(P)$ , aplicando  $\zeta^{-1}$  (Véase Corolario 3.1.12) a ambos lados de la igualdad se tiene que

$$(K(A), a_{11}(A), a_{22}(A), z_{23}(A)) = (K(B), a_{11}(B), a_{22}(B), z_{23}(B)),$$

más aún

$$\begin{aligned} K(A) &= K(B), \\ a_{11}(A) &= a_{11}(B), \\ a_{22}(A) &= a_{22}(B), \\ z_{23}(A) &= z_{23}(B). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Si se designa por  $A_i$  y  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) los vectores columna de las matrices  $A$  y  $B$  respectivamente y acorde con la Descomposición de Iwasawa, las igualdades anteriores quedan rescritas la manera siguiente:

Primer vector columna de las matrices  $K(A)$  y  $K(B)$  igualados

$$\frac{A_1}{|A_1|} = \frac{B_1}{|B_1|}, \quad (3.13)$$

Números reales  $a_{11}(A)$  y  $a_{11}(B)$  igualados

$$|A_1| = |B_1|, \quad (3.14)$$

Usando (3.14) se tiene que

$$A_1 = B_1. \quad (3.15)$$

Que es lo que se deseaba.  $\square$

**Lema 3.1.17.** *Teniendo las mismas hipótesis del Lema 3.1.16 se tiene que, el segundo y tercer vector columna de la matriz compacta  $K(A)$  son iguales al segundo y tercer vector columna de la matriz compacta  $K(B)$  respectivamente.*

*Demostración.* Por hipótesis se tienen las mismas igualdades que en (3.12), al igual que en la prueba del lema anterior se designara por  $A_i$  y  $B_i$  los vectores columna de las matrices  $A$  y  $B$  respectivamente, entonces al igualar respectivamente el segundo y el tercer vector columna de  $K(A)$  y  $K(B)$  se tiene

$$\frac{A_2 - \frac{\langle A_2, A_1 \rangle}{|A_1|^2} A_1}{\left| A_2 - \frac{\langle A_2, A_1 \rangle}{|A_1|^2} A_1 \right|} = \frac{B_2 - \frac{\langle B_2, B_1 \rangle}{|B_1|^2} B_1}{\left| B_2 - \frac{\langle B_2, B_1 \rangle}{|B_1|^2} B_1 \right|} \quad (3.16)$$

$$\frac{A_3 - \frac{\langle A_3, A_1 \rangle}{|A_1|^2} A_1 - \frac{\langle A_3, A_2 - \frac{\langle A_2, A_1 \rangle}{|A_1|^2} A_1 \rangle}{\left| A_2 - \frac{\langle A_2, A_1 \rangle}{|A_1|^2} A_1 \right|^2} \left( A_2 - \frac{\langle A_2, A_1 \rangle}{|A_1|^2} A_1 \right)}{\left( |A_1| \left| A_2 - \frac{\langle A_2, A_1 \rangle}{|A_1|^2} A_1 \right| \right)^{-1}} = \frac{B_3 - \frac{\langle B_3, B_1 \rangle}{|B_1|^2} B_1 - \frac{\langle B_3, B_2 - \frac{\langle B_2, B_1 \rangle}{|B_1|^2} B_1 \rangle}{\left| B_2 - \frac{\langle B_2, B_1 \rangle}{|B_1|^2} B_1 \right|^2} \left( B_2 - \frac{\langle B_2, B_1 \rangle}{|B_1|^2} B_1 \right)}{\left( |B_1| \left| B_2 - \frac{\langle B_2, B_1 \rangle}{|B_1|^2} B_1 \right| \right)^{-1}}. \quad (3.17)$$

Ahora al igualar respectivamente  $a_{11}(A)$ ,  $a_{11}(B)$ ,  $a_{22}(B)$  y  $a_{22}(B)$  se obtiene

$$|A_1| = |B_1|, \quad (3.18)$$

$$\left| A_2 - \frac{\langle A_2, A_1 \rangle}{|A_1|^2} A_1 \right| = \left| B_2 - \frac{\langle B_2, B_1 \rangle}{|B_1|^2} B_1 \right|. \quad (3.19)$$

Al combinar (3.20) y (3.19) se tiene que

$$A_2 - \frac{\langle A_2, A_1 \rangle}{|A_1|^2} A_1 = B_2 - \frac{\langle B_2, B_1 \rangle}{|B_1|^2} B_1. \quad (3.20)$$

Haciendo el respectivo producto de (3.18) y (3.19) y combinándolo con (3.21) se tiene que

$$A_3 - \frac{\langle A_3, A_1 \rangle}{|A_1|^2} A_1 - \frac{\langle A_3, A_2 - \frac{\langle A_2, A_1 \rangle}{|A_1|^2} A_1 \rangle}{\left| A_2 - \frac{\langle A_2, A_1 \rangle}{|A_1|^2} A_1 \right|^2} \left( A_2 - \frac{\langle A_2, A_1 \rangle}{|A_1|^2} A_1 \right) = B_3 - \frac{\langle B_3, B_1 \rangle}{|B_1|^2} B_1 - \frac{\langle B_3, B_2 - \frac{\langle B_2, B_1 \rangle}{|B_1|^2} B_1 \rangle}{\left| B_2 - \frac{\langle B_2, B_1 \rangle}{|B_1|^2} B_1 \right|^2} \left( B_2 - \frac{\langle B_2, B_1 \rangle}{|B_1|^2} B_1 \right). \quad (3.21)$$

Teniendo así lo requerido.  $\square$

**Definición 3.1.18.** *Sea  $L$  un enlace, se define a:*

$$\text{Col}_L^{irr} = \{g \in \text{Hom}_{Qnd}(Q(L), \mathcal{P}ab) \mid \langle \psi^{-1}(g(\alpha)), \psi^{-1}(g(\gamma)) \rangle \text{ es irreducible} \} / \text{PSL}(3, \mathbb{C}).$$

Donde  $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$  actúa por conjugación en  $\text{Hom}_{Qnd}(Q(L), \mathcal{P}ab)$  y  $\psi$  la función definida en (3.11).

**Corolario 3.1.19.** *Sea  $L$  un enlace y  $D$  su diagrama regular. Considérese la presentación del quandle fundamental del enlace  $L$  siguiente*

$$Q(L) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \mid r_1, \dots, r_n \rangle.$$

Entonces  $\text{Col}_L^{irr}$  es el conjunto solución de un sistema de  $12n$  ecuaciones polinomiales mezcladas homogéneo, de los cuales al menos  $3n$  no son mezclados.



**Corolario 3.1.20.** Sea  $L$  un enlace, entonces el conjunto  $\text{Col}_L^{\text{irr}}$  es una variedad algebraica afín, que subyace como solución de polinomios mezclados.

**Teorema 3.1.21.** El crecimiento de los polinomios que subyacen en las relaciones determinadas por los cruces del nudo es de forma polinomial.

**Proposición 3.1.22.** El morfismo de grupos  $\iota : \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{PSL}(3, \mathbb{C})$  inducido por el encaje de Veronese, es también un morfismo de quandles.

*Demostración.* Considérese a  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  y a  $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$  con al operación de conjugación. Sean  $g, h \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ , entonces

$$\begin{aligned} \iota(g \text{ conj } h) &= \iota(h^{-1}gh) \\ &= \iota(h^{-1})\iota(g)\iota(h) \\ &= (\iota(h))^{-1}\iota(g)\iota(h) \\ &= \iota(g) \text{ conj } \iota(h). \end{aligned}$$

□

Como consecuencia de la Proposición 3.1.22 se tiene que existe un morfismo de quandles entre el quandle parabólico en  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  y el quandle **parabólico unipotente** en  $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$ .

**Proposición 3.1.23.** La imagen de  $\mathcal{P}ar$  bajo  $\iota$  está contenido en  $G P$  y

$$\iota \left( \begin{bmatrix} 1+ab & b^2 \\ -a^2 & 1-ab \end{bmatrix} \right) = S^{-1}PS \quad (3.22)$$

donde

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{a^6}} \\ \frac{a^4}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{a^6}} & \frac{(a^6)^{2/3}(ab-1)}{\sqrt[3]{2}a^4} & \frac{(a^6)^{2/3}b(ab-2)}{\sqrt[3]{2}a^5} \\ \frac{2^{2/3}a^4}{\sqrt[3]{a^6}} & \frac{2^{2/3}a^3b}{\sqrt[3]{a^6}} & \frac{2^{2/3}a^2b^2}{\sqrt[3]{a^6}} \end{bmatrix}.$$

*Demostración.* Considérese un elemento del quandle  $\mathcal{P}ar$ , es decir una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} 1+ab & b^2 \\ -a^2 & 1-ab \end{bmatrix},$$

y le aplicamos el morfismo  $\iota$ , se tiene entonces

$$\begin{aligned} \iota \left( \begin{bmatrix} 1+ab & b^2 \\ -a^2 & 1-ab \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 1+a^2b^2+2ab & ab^3+b^2 & b^4 \\ -2a^3b-2a^2 & 1-2a^2b^2 & 2b^2-2ab^3 \\ a^4 & a^3b-a^2 & 1+a^2b^2-2ab \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{b^2}{a^2} & \frac{b}{a^3} & \frac{1-ab}{2a^4} \\ -\frac{2b}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{2a^2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a^4 & 2a^6 \left( \frac{b}{2a^3} - \frac{1}{2a^4} \right) & 2a^6 \left( \frac{b^2}{2a^4} - \frac{b}{a^5} \right) \\ 2a^4 & 2a^3b & 2a^2b^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nótese que el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a^4 & 2a^6 \left( \frac{b}{2a^3} - \frac{1}{2a^4} \right) & 2a^6 \left( \frac{b^2}{2a^4} - \frac{b}{a^5} \right) \\ 2a^4 & 2a^3b & 2a^2b^2 \end{bmatrix}$$

es igual a  $2a^6$ , por lo tanto multiplicamos a la matriz anterior por  $\frac{1}{(2a^6)^{\frac{1}{3}}}$ , teniendo así la matriz

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{a^6}} \\ \frac{a^4}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{a^6}} & \frac{(a^6)^{2/3}(ab-1)}{\sqrt[3]{2}a^4} & \frac{(a^6)^{2/3}b(ab-2)}{\sqrt[3]{2}a^5} \\ \frac{2^{2/3}a^4}{\sqrt[3]{a^6}} & \frac{2^{2/3}a^3b}{\sqrt[3]{a^6}} & \frac{2^{2/3}a^2b^2}{\sqrt[3]{a^6}} \end{bmatrix}.$$

□

**Definición 3.1.24.** *Considérese la composición  $\Upsilon = \psi \circ \iota : \mathcal{P}ar \rightarrow \mathcal{P}ab$ , dónde  $\iota$  es el morfismo de grupos inducido por el encaje de Veronese y  $\psi$  definido como en (3.11). El morfismo de quandles  $\Upsilon$  se denomina como el **encaje a la Veronese** entre los quandles  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}ab$ .*

### 3.2. Rebanada de Riley Compleja

En esta sección se generaliza la Rebanada de Riley clásica, para tal tarea se usaran los conceptos y resultados del Apéndice B, además de conectar este conjunto con el conjunto de parámetros de Jonh Parker.

**Proposición 3.2.1.** *Considérese tres puntos  $p_1, p_2, p_3$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  y dos transformaciones proyectivas  $A, B$  en  $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$  con las propiedades siguientes:*

1. *La transformación  $A$  deja fijo al punto  $p_1$  e invariante a la línea proyectiva  $\overleftrightarrow{p_1, p_2}$ .*
2. *La transformación  $B$  deja fijo al punto  $p_3$  e invariante a la línea proyectiva  $\overleftrightarrow{p_2, p_3}$ .*
3. *Las transformaciones  $A$  y  $B$  son conjugadas al bloque de Jordan de tres por tres.*

*Entonces existe  $C \in \text{PSL}(3, \mathbb{C})$  tal que  $C^{-1}AC$  es una transformación triangular superior con variable  $x$  en la entrada superior derecha y  $C^{-1}BC$  es una transformación triangular inferior con variables  $a, b, c$ .*

*Demostración.* Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \in \text{PSL}(3, \mathbb{C}).$$

Sin perdida de generalidad se supone que la transformación  $A$  deja fijo a  $e_1$ , es decir

$$A \cdot e_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

se concluye entonces que  $d = 0$ ;  $g = 0$ . Como la transformación  $A$  también deja invariante a la línea proyectiva  $\overleftrightarrow{e_1, e_2}$ , es decir,

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + bt \\ et \\ ht \end{bmatrix}.$$

Se tiene entonces que  $h = 0$ , además como  $A$  es conjugada al bloque de Jordan de  $3 \times 3$  tenemos que  $a = e = j$ . Como el determinante es  $a^3 = 1$  y como es una transformación proyectiva se concluye que  $a = 1$ . Procediendo de manera análoga, obtenemos que la transformación  $B$  es de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 \\ g & h & 1 \end{bmatrix}.$$

Conjugando a  $A$  y a  $B$  de la siguiente forma obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que

$$\begin{bmatrix} 1 & b & -bz + c + fx \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} dx + gy + 1 & hy - x(dx + gy) & (xz - y)(dx + gy + 1) - z(hy + x) + y \\ d + gz & -x(d + gz) + hz + 1 & (d + gz)(xz - y) + z(-(hz + 1)) + z \\ g & h - gx & gxz - gy - hz + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De donde se deduce que  $b = 1 = f$  y  $c = z - x$  y en el segundo no hay solución en términos de  $x, y, z$  para las variables  $d, h, g$ . Teniendo así el resultado.  $\square$

Una versión algebraica de la Proposición 3.2.1 puede consultarse en el Apéndice C.2.

**Definición 3.2.2.** *Los grupos generados por dos elementos que no tiene puntos ni líneas invariantes en común, se llaman **grupos irreducibles**.*

**Corolario 3.2.3.** *El conjunto de grupos irreducibles en  $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$  generados por dos parabólicos unipotentes es difeomorfo a  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ .*

*Demostración.* Se define

$$\mathcal{A} = \{\langle A, B \rangle < \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C}) \mid A, B \text{ son parabólicos unipotentes y } \langle A, B \rangle \text{ es irreducible}\} \quad (3.23)$$

Puesto que el grupo debe ser irreducible y por la Proposición 3.2.1 los elementos  $A$  y  $B$  son de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \kappa : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ \langle A, B \rangle &\mapsto (x, b, a, c). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Es el difeomorfismo requerido.  $\square$

**Definición 3.2.4.** *Con la notación del Corolario anterior el conjunto de parámetros en  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  de tal forma que el respectivo grupo es discreto le llamaremos **la rebanada de Riley compleja** y se denotará por  $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}$ .*

Recuérdese que la rebanada de Rayley clásica se define como el conjunto de complejos distintos de cero para los cuales el grupo generado por los elementos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix},$$

es discreto (Véase Definición B.0.1). Con la definición de la Rebanada de Riley clásica en mente se tiene que.

**Proposición 3.2.5.** *Sea  $\mathcal{R}$  la rebanada de Riley clásica entonces, se encaja de manera natural  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}$ .*

*Demostración.* Sea

$$\Gamma_t = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Se aplica el morfismo  $\iota$  a los generadores de  $\Gamma_t$ , *i.e.*

$$\iota \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\iota \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ t^2 & t & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Luego, a las transformaciones resultantes se conjugan simultáneamente por la transformación

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Obteniendo las estas transformaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 2t^2 & 2t & 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Luego para los valores de  $t$  que hacen a  $\Gamma_t$  discreto también hacen discreto al grupo

$$G_t = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ 2t^2 & 2t & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Entonces aplicando el difeomorfismo  $\kappa$  (Véase (3.24)) se tiene que el conjunto

$$\{(1/2, 2t^2, 2t, 2t) \mid t \in \mathbb{C}^*\},$$

se encaja de manera natural en  $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}$ . □

**Definición 3.2.6.** *Al conjunto de parámetros*

$$\{(1/2, 2t^2, 2t, 2t) \mid t \in \mathbb{C}^*\}.$$

*Se le llamara el conjunto de parámetros de Riley a la Véaseonese y se denotara por  $\mathcal{R}_\iota$ .*

**Lema 3.2.7.** *Existe un encaje del conjunto de parámetros de Parker  $\mathcal{J}$  (Véase Definición B.0.4) en la rebanada de Riley compleja  $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}$ .*

*Demostración.* Considérese la función  $\Pi^{-1} : (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathcal{J}$  (como en el Teorema B.0.5) dada por

$$\Pi^{-1}((x_1, x_2)) = \left( \begin{bmatrix} 1 & -x_1 x_2^2 & -x_1^2 x_2^2 e^{-i\alpha_2} \\ 0 & 1 & x_1 x_2^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 x_2^2 e^{i\alpha_1} & 1 & 0 \\ -x_1^2 x_2^2 e^{i\alpha_2} & -x_1 x_2^2 e^{i\alpha_1} & 1 \end{bmatrix} \right), \quad (3.27)$$

donde  $x_1 = \sqrt{2\cos(\alpha_1)}$ ,  $x_2 = \sqrt{2\cos(\alpha_2)}$ , con  $\alpha_j \in (-\pi/2, \pi/2)$   $j = 1, 2$ . Denotando por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -x_1x_2^2 & -x_1^2x_2^2e^{-i\alpha_2} \\ 0 & 1 & x_1x_2^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1x_2^2e^{i\alpha_1} & 1 & 0 \\ -x_1^2x_2^2e^{i\alpha_2} & -x_1x_2^2e^{i\alpha_1} & 1 \end{bmatrix}$$

Conjugando a  $A$  y  $B$  por la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_1x_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{x_1^2x_2^2} \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{e^{i\alpha_2}}{x_2^2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1}BX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -e^{i\alpha_1}x_1^2x_2^4 & 1 & 0 \\ e^{i\alpha_2}x_1^4x_2^6 & -e^{i\alpha_1}x_1^2x_2^4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando el difeomorfismo  $\kappa$  a  $X^{-1}AX$  y  $X^{-1}BX$  se tiene entonces que el conjunto de parámetros de la forma  $\left(\frac{e^{i\alpha_2}}{x_2^2}, e^{i\alpha_2}x_1^4x_2^6, -e^{i\alpha_1}x_1^2x_2^4, -e^{i\alpha_1}x_1^2x_2^4\right)$  para los que el grupo  $\langle X^{-1}AX, X^{-1}BX \rangle$  es discreto esta contenido en  $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}$ .  $\square$

**Notación.** A la imagen de  $\mathcal{J}$  bajo  $\varepsilon = \kappa \circ \Pi$  se denotara por  $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$ .

**Teorema 3.2.8.** *Considérese el conjunto de parámetros de Riley a la Véaseonese  $\mathcal{R}_t$  y al conjunto  $\mathcal{J}_{\mathbb{C}}$ . Si*

$$\mathcal{R}_t \cap \mathcal{J}_{\mathbb{C}} \neq \emptyset,$$

entonces el parámetro  $t$  es real y esta en el conjunto  $(-4, 4)$ .

*Demostración.* Considérese

$$(x, b, a, c) \in \mathcal{R}_t \cap \mathcal{J},$$

entonces

$$((1/2, 2t^2), (2t, 2t)) = \left(\frac{e^{i\alpha_2}}{x_2^2}, e^{i\alpha_2}x_1^4x_2^6, -e^{i\alpha_1}x_1^2x_2^4, -e^{i\alpha_1}x_1^2x_2^4\right),$$

con  $x_1 = \sqrt{2\cos(\alpha_1)}$ ,  $x_2 = \sqrt{2\cos(\alpha_2)}$  y  $\alpha_j \in (-\pi/2, \pi/2)$   $j = 1, 2$ . Simplificando se tiene que

$$\left(\frac{1}{2}, 2t^2, 2t, 2t\right) = \left(\frac{1}{2}(1+i\tan(\alpha_2)), 32e^{i\alpha_2}\cos^2(\alpha_1)\cos^3(\alpha_2), -32e^{i\alpha_1}\cos^2(\alpha_1)\cos^3(\alpha_2), -4(1+e^{2i\alpha_1})\cos^2(\alpha_2)\right),$$

de igualar la primera entrada se deduce que  $\alpha_2 = 0$ . Luego entonces

$$\begin{aligned} 2t^2 &= e^{i\alpha_2}x_1^4x_2^6 \\ &= 32e^{i\alpha_2}\cos^2(\alpha_1)\cos^3(\alpha_2) \\ &= 32\cos^2(\alpha_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $t = 4\cos(\alpha_1)$  lo que concluye que  $t$  es un número real en el conjunto  $(-4, 4)$ .  $\square$



## Capítulo 4

# Coloraciones del nudo ocho en el quandle parabólico unipotente de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$

En el presente Capítulo se exhiben los resultados principales de la tesis, los cuales proporcionan las representaciones irreducibles del grupo fundamental del nudo ocho en  $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ . A lo largo de este Capítulo se trabajara con el Quandle Parabólico Unipotente  $\mathcal{P}ab$  y como en Capítulo 1 Sección 1.3 se denotara por  $\mathfrak{S}$  al nudo ocho.

El objetivo de este capítulo es exhibir el uso de coloraciones del nudo ocho en  $\mathcal{P}ab$  para poder obtener las representaciones irreducibles del grupo fundamental en  $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ .

Se comienza el Capítulo exhibiendo un Teorema que generalización del Corolario 1.3.27, posteriormente damos la forma explicita de los elementos de la Proposición 3.2.1 en  $\mathcal{P}ab$ , que se utilizaran para demostrar el Teorema 4.0.5 el cual será la columna vertebral de los resultados subsecuentes.

**Teorema 4.0.1.** *Sea  $L$  un enlace orientado en  $\mathbb{S}^3$ ,  $D$  un diagrama regular de  $L$  y  $\mathcal{C}$  una coloración en  $D$  con respecto al quandle  $\mathcal{P}ab$ , entonces se tiene una representación*

$$\varrho_{\mathcal{C}} : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L) \longrightarrow \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$$

*inducida por la coloración  $\mathcal{C}$  que envía meridianos en elementos parabólicos unipotentes. Recíprocamente, sea*

$$\varrho : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L) \longrightarrow \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$$

*una representación que envía meridianos en elementos parabólicos unipotentes, entonces se puede definir una coloración  $\mathcal{C}_{\varrho}$  de  $D$  respecto del quandle  $\mathcal{P}ab$  tal que la representación inducida por esta coloración en  $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$  coincide con  $\varrho$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C} : \mathcal{Q}(L) \longrightarrow \mathcal{P}ab$  una coloración de quandle fundamental del enlace  $L$  en el quandle  $\mathcal{P}ab$ , dado que el quandle  $\mathcal{P}ab$  es isomorfo a la clase de conjugación del elemento parabólico unipotente  $P$ , entonces se tiene una coloración  $\mathcal{C} : \mathcal{Q}(L) \longrightarrow \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$  que envía arcos en elementos parabólicos unipotentes. Por la propiedad universal (Ver Proposición 1.3.20 Parte 1) se tiene el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}(L) & \xrightarrow{\mathcal{C}} & \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C}) \\ \mathcal{AS}_{\mathcal{Q}(L)} \downarrow & \nearrow \varrho_{\mathcal{C}} & \\ \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L) & & \end{array}$$

es decir, existe una única representación  $\varrho$  tal que  $\mathcal{C} = \varrho_c \circ \mathcal{AS}_{\mathbb{Q}(L)}$ , dado que  $\mathcal{AS}_{\mathbb{Q}(L)}$  envía arcos en meridianos, se tiene entonces que  $\varrho_c$ , envía meridianos en elementos parabólicos unipotentes. El recíproco se sigue del hecho de que la representación envía meridianos en elementos parabólicos unipotentes y la unicidad de la Propiedad universal.  $\square$

**Proposición 4.0.2.** Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$$

en  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ , estas matrices son conjugadas a la matriz  $P$  mediante las matrices

$$s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt[3]{-ac^2}} \\ -\frac{b(-ac^2)^{2/3}}{ac^2} & -\frac{(-ac^2)^{2/3}}{ac} & 0 \\ -\frac{(-ac^2)^{2/3}}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Además tienen asociados los vectores siguientes en el quandle parabólico  $\mathcal{P}ab$

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, 1, -x \right),$$

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c}{(-ac^2)^{2/3} \sqrt{\frac{c \left( \frac{c}{(-ac^2)^{2/3}} \right)}{(-ac^2)^{2/3}}}} \\ 0 & \frac{\sqrt[3]{-ac^2}}{c \sqrt{\frac{3 \sqrt[3]{-ac^2} \sqrt[3]{-ac^2}}{c^2}}} & 0 \\ \frac{\sqrt[3]{-ac^2}}{\sqrt{\frac{3 \sqrt[3]{-ac^2} \sqrt[3]{-ac^2}}{c^2}}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, |ac^2|^{1/3}, \left| \frac{a^{1/3}}{c^{1/3}} \right|, -\frac{b}{ac} \right)$$

respectivamente.

*Demostración.* Considérese la Descomposición de Jordan de las matrices  $A$  y  $B$ , es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} & -\frac{b}{ac^2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b & c & 0 \\ ac & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nótese que la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b & c & 0 \\ ac & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene determinante igual a  $-ac^2$ , puesto que estamos en el grupo  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ , se debe normalizar tal matriz, es decir dividir cada entrada por la raíz cúbica de  $-ac^2$ , obteniendo así la matriz siguiente

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt[3]{-ac^2}} \\ -\frac{b(-ac^2)^{2/3}}{ac^2} & -\frac{(-ac^2)^{2/3}}{ac} & 0 \\ -\frac{(-ac^2)^{2/3}}{c} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$



cuya inversa es

$$s^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c}{(-ac^2)^{2/3}} \\ 0 & \frac{\sqrt[3]{-ac^2}}{c} & -\frac{b\sqrt[3]{-ac^2}}{ac^2} \\ \sqrt[3]{-ac^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se designa a

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A = t^{-1}Pt \text{ y } B = s^{-1}Ps,$$

es decir, son elementos de la clase de conjugación del elemento parabólico unipotente  $P$ . Por el lema 3.1.9 existe un morfismo de quandles entre la clase de conjugación del elemento  $P$  y el espacio cociente  $G/C_G(P)$ , a saber  $\xi^{-1} : GP \rightarrow G/C_G(P)$  definido de la manera siguiente

$$\xi^{-1}(g \cdot P) = g^{-1}C_G(P).$$

Aplicando este morfismo a  $A$  y  $B$  se tiene que

$$\xi^{-1}(A) = \xi^{-1}(t^{-1}Pt) = t^{-1}C_G(P) \text{ y } \xi^{-1}(B) = \xi^{-1}(s^{-1}Ps) = s^{-1}C_G(P).$$

Por el Corolario 3.1.12 se sabe que la función

$$\zeta^{-1} : G/C_G(P) \rightarrow \mathcal{P}ab$$

cuya regla de correspondencia es

$$\zeta^{-1}(gC_G(P)) = (k(g), a(g)_{11}, a(g)_{22}, z(g)_{23}), \quad (4.1)$$

donde  $k(g)$  es la matriz en  $\mathrm{SU}(3)$  que resulta de la descomposición de Iwasawa de  $g$ ,  $a(g)_{11}$ ,  $a(g)_{22}$  los coeficientes (cuya posición es la que indica el subíndice) de la matriz  $a(g)$  que es la matriz diagonal de la descomposición de Iwasawa de  $g$  y  $z(g)_{23} = \eta(g)_{23} - \eta(g)_{12}$  con  $\eta(g)_{12}, \eta(g)_{23}$  coeficientes de la matriz  $\eta(g)$ , que es la matriz triangular superior con unos en la diagonal principal de la descomposición de Iwasawa de  $g$ .

Aplicando el morfismo anterior a las imágenes de  $A$  y  $B$  bajo  $\xi^{-1}$ , se tiene entonces que

$$\zeta^{-1}(t^{-1}C_G(P)) = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 1, 1, -x \right),$$

$$\zeta^{-1}(s^{-1}C_G(P)) = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c}{(-ac^2)^{2/3} \sqrt{\frac{c \left( \frac{c}{(-ac^2)^{2/3}} \right)}{(-ac^2)^{2/3}}}} \\ 0 & \frac{\sqrt[3]{-ac^2}}{c \sqrt{\frac{3\sqrt[3]{-ac^2} \sqrt[3]{-ac^2}}{c^3}}} \\ \frac{\sqrt[3]{-ac^2}}{\sqrt{\sqrt[3]{-ac^2} \sqrt[3]{-ac^2}}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, |ac^2|^{1/3}, \left| \frac{a^{1/3}}{c^{1/3}} \right|, -\frac{b}{ac} \right)$$

Que es lo requerido. □

**Proposición 4.0.3.** *Vía la representación irreducible de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  en  $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$  inducida por el encaje de Veronese se tienen dos representaciones del grupo fundamental del complemento del nudo ocho en  $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ , generada por las matrices siguientes*

$$\iota(\rho_1) = \left\langle \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) & \frac{1}{4}(-1 + i\sqrt{3})^2 \\ 0 & 1 & -1 + i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \right\rangle, \quad (4.2)$$

$$\iota(\rho_2) = \left\langle \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) & \frac{1}{4}(-1 - i\sqrt{3})^2 \\ 0 & 1 & -1 - i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \right\rangle. \quad (4.3)$$

*Demostración.* Considérese las representaciones  $\rho_1$  y  $\rho_2$  del grupo fundamental del complemento del nudo ocho (Ver Proposición 1.3.28), según la Proposición 1.1.12 el morfismo de grupos,  $\iota$ , inducido por el encaje de Veronese envía grupos discretos en grupos discretos y preserva el tipo. Entonces al aplicar el morfismo de grupos  $\iota$  (Ver 1.1), se tiene que

$$\begin{aligned} \iota\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{array}\right]\right) &= \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right], \\ \iota\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 \end{array}\right]\right) &= \left[\begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) & \frac{1}{4}(-1 - i\sqrt{3})^2 \\ 0 & 1 & -1 - i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \\ \iota\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{array}\right]\right) &= \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right], \\ \iota\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 \end{array}\right]\right) &= \left[\begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) & \frac{1}{4}(-1 + i\sqrt{3})^2 \\ 0 & 1 & -1 + i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Por tanto los grupos

$$\left\langle \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) & \frac{1}{4}(-1 - i\sqrt{3})^2 \\ 0 & 1 & -1 - i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \right\rangle, \quad (4.4)$$

y

$$\left\langle \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) & \frac{1}{4}(-1 + i\sqrt{3})^2 \\ 0 & 1 & -1 + i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \right\rangle$$

son discretos. Más aún,  $\varrho_i = \iota \circ \rho_i$ , para cada  $i = 1, 2$ , es morfismo de grupos y por tanto se tiene dos representaciones del grupo fundamental del nudo ocho en el grupo  $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$  como se deseaba.  $\square$

**Proposición 4.0.4.** *Las matrices que generan las representaciones,  $\varrho_1$  y  $\varrho_2$ , del grupo fundamental del nudo ocho en  $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$  (Véase Proposición 4.0.3) son conjugadas simultáneamente a las matrices siguientes*

$$\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 + i\sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1 + i\sqrt{3} & 1 + i\sqrt{3} & 1 \end{array} \right], \quad \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

y

$$\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 - i\sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1 - i\sqrt{3} & 1 - i\sqrt{3} & 1 \end{array} \right], \quad \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

respectivamente. Y sus vectores asociados en el Quandle Parabólico Unipotente  $\mathcal{Pab}$  son

$$\begin{aligned} &\left( \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) \\ 0 & \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right), 2, 1, -\frac{1}{2} \right), \\ &\left( \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), 1, 1, -\frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

y

$$\left( \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) & 0 \\ \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}) & 0 & 0 \end{pmatrix}, 1/2, 1, \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}) \right), \right. \quad (4.6)$$

$$\left. \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, 1, -\frac{1}{2} \right) \right)$$

respectivamente.

*Demostración.* Se hará la demostración para la primera representación, el proceso para la segunda representación es análogo. Considérese a las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}) & \frac{1}{4}(-1-i\sqrt{3})^2 \\ 0 & 1 & -1-i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

que generan la representación  $\varrho_1$  del grupo fundamental del nudo ocho en  $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$ . Conjugando a la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}) & \frac{1}{4}(-1-i\sqrt{3})^2 \\ 0 & 1 & -1-i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por la matriz

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2(-1-i\sqrt{3})} \end{bmatrix},$$

se tiene que

$$X^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}) & \frac{1}{4}(-1-i\sqrt{3})^2 \\ 0 & 1 & -1-i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Puesto que se debe preservar la relación que satisfacen ambas matrices en el grupo fundamental se debe conjugar también a la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

por la matriz  $X$ . Obteniendo así

$$X^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+i\sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1+i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ya que hemos obtenido las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+i\sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1+i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pasando a estas matrices a la clase de conjugación de  $P$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+i\sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1+i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{8}(-1-i\sqrt{3}) \\ 0 & \frac{1}{4}(1-i\sqrt{3}) & \frac{1}{8}(-1+i\sqrt{3}) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1+i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} & 0 \\ -2+2i\sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

nótese que la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1+i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} & 0 \\ -2+2i\sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene determinante igual a 8, por lo tanto se debe normalizar. Obteniendo la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}i(\sqrt{3}+i) & \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) & 0 \\ -1+i\sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cuya inversa es la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4}(-1-i\sqrt{3}) \\ 0 & \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) & \frac{1}{4}(-1+i\sqrt{3}) \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+i\sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1+i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} &= q^{-1}Pq \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= s^{-1}Ps \end{aligned}$$

con

$$q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}i(\sqrt{3}+i) & \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) & 0 \\ -1+i\sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando el morfismo  $\psi$  del Corolario 3.1.15 se obtiene que,

$$\begin{aligned} \psi(q^{-1}Pq) &= \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}) \\ 0 & \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 2, 1, -\frac{1}{2} \right), \\ \psi(s^{-1}Ps) &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 1, 1, -\frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.0.5.** *Existen exactamente (salvo conjugación) seis representaciones irreducibles del grupo fundamental del nudo ocho en  $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$  que envían meridianos en elementos parabólicos unipotentes.*

*Demostración.* Considérese el diagrama  $D$  del nudo ocho, de acuerdo con la Proposición 1.3.17 el conjunto de generadores del quandle fundamental del nudo ocho es  $\{\alpha, \gamma\}$ . Una coloración  $\mathcal{C} : \{\alpha, \gamma\} \rightarrow \mathcal{Pab}$  del conjunto de generadores del quandle fundamental de nudo ocho al quandle  $\mathcal{Pab}$  debe respetar las relaciones dadas en la presentación, *i.e.*

$$\mathcal{C}(\gamma) \bullet \mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}(\alpha) \bullet (\mathcal{C}(\alpha) \bullet \mathcal{C}(\gamma)), \quad (4.8)$$

$$\mathcal{C}(\alpha) \bullet \mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}(\gamma) \bullet (\mathcal{C}(\gamma) \bullet \mathcal{C}(\alpha)). \quad (4.9)$$

Como queremos coloraciones que sean irreducibles en  $\mathcal{Pab}$  y este a su vez es isomorfo a  $GP$ , podemos asumir (que salvo conjugación) los generadores se pueden llevar a las transformaciones parabólicas unipotentes de la Proposición 3.2.1. Luego entonces, por la Proposición 4.0.2 se tiene que

$$\mathcal{C}(\alpha) = \left( \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, 1, -x \right) \right)$$

$$\mathcal{C}(\gamma) = \left( \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c}{t^2 \sqrt{i^2(\bar{t})^2}} \\ 0 & \frac{t}{c\sqrt{\frac{t\bar{t}}{c\bar{c}}}} & 0 \\ \frac{t}{\sqrt{t\bar{t}}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, |t|, \left| \frac{t}{c} \right|, -\frac{b}{ac} \right) \right)$$

Donde  $t = \sqrt[3]{-ac^2}$ . Las relaciones (1) y (2) con los valores asignados a  $\mathcal{C}(\alpha)$  y a  $\mathcal{C}(\gamma)$  dan origen (se aplica el algoritmo de la operación del Quandle  $\mathcal{Pab}$  el cuál se exhibió en el Apéndice D) a 24 polinomios homogéneos de los cuales 18 son mezclados, tales polinomios se encuentran en el Apéndice E.

Si agregamos el polinomio  $t - \sqrt[3]{-ac^2}$  se obtienen 25 polinomios en las variables  $a, b, c, x, t$ . Se considera a los polinomios que son no mezclados y se forma un sistema de ecuaciones polinomiales homogéneo siguiente

$$\begin{aligned} -xt + t + a + bx - b - 1 &= 0, \\ a^2 + abx - ab + t - b &= 0, \\ a^2c + abcx - abc - ab + t - b^2x + b^2 - bc &= 0, \\ bx^2t - bxt - acx^2t + axt + acxt + cxt - ct - 1 &= 0, \\ bxt + a(-c)xt - axt + ct + a &= 0, \\ -bxt + acxt - ct + t - ac + b &= 0, \\ t^3 - (-ac^2) &= 0. \end{aligned}$$

Para obtener las soluciones de este sistema se recurre a el programa computacional Singular (Véase [7]), el cuál nos rinde cuentas de las componentes conexas del conjunto solución, posteriormente se obtienen las soluciones siguientes, que no solo son solución de los polinomios

anteriores sino para el sistema completo de los 25 polinomios:

$$\begin{aligned}
 a &= -1; b = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}; c = -1; x = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}; t = 1 \\
 a &= -1; b = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}; c = -1; x = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}; t = 1 \\
 a &= 1 + i\sqrt{3}; b = -1 + i\sqrt{3}; c = 1 + i\sqrt{3}; x = \frac{1}{2}; t = -1 - i\sqrt{3} \\
 a &= 1 - i\sqrt{3}; b = -1 - i\sqrt{3}; c = 1 - i\sqrt{3}; x = \frac{1}{2}; t = -1 + i\sqrt{3} \\
 a &= \frac{5}{4} - \frac{i\sqrt{7}}{4}; b = 1; c = \frac{5}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4}; x = \frac{1}{2}; t = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \\
 a &= \frac{5}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4}; b = 1; c = \frac{5}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4}; x = \frac{1}{2}; t = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.0.6.** Sea  $\varrho_1, \dots, \varrho_6$  las representaciones dadas en el teorema anterior, entonces

1. Las representaciones  $\varrho_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) son discretas.
2. Se cumple que

$$\varrho_1 = \overline{\varrho_2}; \varrho_3 = \overline{\varrho_4}; \varrho_5 = \overline{\varrho_6}.$$

3. Las imágenes de  $\varrho_1, \varrho_3$  y  $\varrho_5$  en  $\text{PSL}(3, \mathbb{C})$  son

$$\begin{aligned}
 \varrho_1(\alpha) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \varrho_1(\gamma) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 + i\sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1 + i\sqrt{3} & 1 + i\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \\
 \varrho_3(\alpha) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \varrho_3(\gamma) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \varrho_5(\alpha) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \varrho_5(\gamma) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4} & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

**Corolario 4.0.7.** Sean  $\varrho_1, \varrho_3$  y  $\varrho_5$  como en el Teorema 4.0.6.

1. La representación  $\varrho_1$  es fiel y su imagen preserva la curva de Veronese en  $\mathbb{CP}^2$ .
2. Las representaciones  $\varrho_3$  y  $\varrho_5$  no son fieles y preservan la bola unitaria en  $\mathbb{CP}^2$ .

*Demostración.* Por la proposición 4.0.3 se tiene que  $\varrho_1 = \iota \circ \rho_1$ , puesto que  $\iota$  y  $\rho_1$  son inyectivas (Véase Proposiciones 1.1.12 y 1.3.28 respectivamente), se tiene entonces que  $\varrho_1$  es inyectiva. El hecho de que  $\varrho_1$  preserve la curva de Veronese, se sigue del cálculo siguiente

$$\begin{aligned}
 \iota \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ 2xy \\ y^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ 2x(y-1) \\ -2xy + x + y^2 \end{bmatrix} \\
 \iota \left( \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ 2xy \\ y^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} i(\sqrt{3} + i)xy + x - \frac{1}{4}(2 + 2i\sqrt{3})y^2 \\ y(2x + i(\sqrt{3} + i)y) \\ y^2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Teniendo así la primera parte del corolario.

Un cálculo de rutina muestra que  $\varrho_3$  y  $\varrho_5$  dejan invariante a la bola unitaria en  $\mathbb{CP}^2$ . □

**Corolario 4.0.8.** *Si  $\varrho_1$  es la representación del Teorema 4.0.6, entonces no existe un abierto no vacío en  $\mathbb{CP}^2$  donde la imagen de  $\varrho_1$  actúe de manera propia y discontinua. En particular el conjunto límite de Kulkarni es  $\mathbb{CP}^2$ .*

**Teorema 4.0.9.** *Existen exactamente 6 Representaciones del grupo fundamental del nudo ocho. Dos corresponden a las inducidas por el encaje de Veronese y 4 son hiperbólicas. Las de Veronese son discretas y fieles, mientras que las 4 hiperbólicas no.*

**Corolario 4.0.10.** *En el espacio de parámetros de John aparecen exactamente 2 puntos correspondientes a las representaciones del nudo ocho.*

*Demostración.* Esos puntos corresponden a la representación (ver Teorema 1.1.21)

$$\sigma_2(g_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_2(g_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Las restantes no están ya que si se considera el producto de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

que corresponde a la representación  $\sigma_1$  del Teorema 1.1.21 y la traza al cubo de este producto es mayor que 9 y por tanto no es unipotente.  $\square$

**Corolario 4.0.11.** *En el espacio de parámetros  $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}$  hay 6 puntos que corresponden a la representaciones del nudo ocho, 2 son de Veronese y 4 hiperbólicos.*





# Conclusiones

El trabajo aquí expuesto exhibe un método Teórico-Computacional para obtener representaciones del grupo fundamental del nudo ocho en  $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ , tal método nos permite concluir lo siguiente:

1. Los quandles son una estructura algebraica que permite simplificar y estudiar de manera concreta una parte de la variedad de representaciones de un enlace, aunque no deja de ser difícil la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales que nos generan las coloraciones para obtener las representaciones, pero son más amigables que usando los otros métodos.
2. El presente trabajo aporta ejemplos de grupos generados por dos elementos parabólicos que permiten acercarse a un mejor entendimiento de aquellos parámetros que hacen discretos sus respectivos grupos ( un pequeño paso a la generalización de la Rebanada de Riley).
3. La implementación de programas (mathematica, WXmaxima o programas creados en algún lenguaje de programación) para el estudio de este tipo de problemas es de mucha importancia, pero se debe ser cuidadoso y considerar con mucha estima las paqueterías de cálculo simbólico para una buena implementación teórica de los programas.
4. Se debe estudiar a los nudos universales desde este punto de vista para obtener más ejemplos de grupos generados por dos elementos parabólicos unipotentes, pero a su vez se debe estar consciente de las obstrucciones computacionales que se pueden tener en tal estudio. Esto quiere decir que es un tema en el que se puede seguir avanzando y al mismo tiempo se proporcionan más ejemplos para poder argumentar resultados que nos lleven a la generalización completa de la Rebanada de Riley.



# Apéndices



# Apéndice A

## Grupos Libres

Este apéndice se define el concepto de grupos libres y damos un criterio para discernir cuando un grupo es libre o no.

### A.1. Grupos Libres

Sea  $S$  un subconjunto no vacío de un grupo  $G$ . El subgrupo generado por  $S$ , denotado  $\langle S \rangle$ , se define como la intersección de todos los subgrupos de  $G$  que contienen a  $S$ , es decir,

$$\langle S \rangle = \bigcap \{H : H \leq G \text{ es un subgrupo de } G \text{ con } S \subset H\}.$$

Observe que siempre existe un subgrupo que contiene a  $S$ :  $G$  mismo. De hecho,  $\langle S \rangle$  es el subgrupo más pequeño que contiene a  $S$ , pues si  $S \subset H \leq G$ , entonces  $\langle S \rangle \leq H$ .  $S = \langle S \rangle$  cuando  $S$  es subgrupo. Otra forma de caracterizar a  $\langle S \rangle$  es

$$\langle S \rangle = \{s_1^{\varepsilon_1} \cdot s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N}, s_1, s_2, \dots, s_n \in S, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}\}.$$

Se dice que  $S$  genera a  $G$  si  $\langle S \rangle = G$ .

**Observación A.1.1.** *Si  $G$  es un grupo y  $S \subset G$ , entonces  $S$  genera a  $G$  si y solo si  $S$  no esta contenido en algún subgrupo propio de  $G$ .*

Si el conjunto  $S$  genera a un grupo  $G$ , cierto producto de elementos de  $S$  pueden dar el neutro de  $G$ , por ejemplo

1. Si  $s \in S$  entonces  $ss^{-1} = e$ .
2. Si  $G$  es cíclico de orden  $n$  generado por  $g$  entonces  $g^n = e$ .

A un producto de elementos de  $S$  que sea igual a la identidad en  $G$  se le llama una relación entre elementos del conjunto generador  $S$ . Hay dos tipos de relaciones.

- **Triviales**, si son consecuencia de los axiomas de grupo como en 1.
- **No triviales**, si son las que dependen de la estructura de grupo como en 2.

**Definición A.1.2.** *Si  $S$  es un conjunto generador de  $G$  decimos que  $G$  está **libremente generado por  $S$**  si todas las relaciones entre los elementos de  $S$  son **triviales**.*

**Observación A.1.3.** *Sea  $S$  un conjunto generador de  $G$  y  $f : G \rightarrow G'$  un epimorfismo, entonces el conjunto  $f(S)$  es un conjunto generador de  $G'$ , además cualquier relación de  $G$  entre los elementos de  $S$  es también una relación en  $G'$  entre los elementos de  $f(S)$ , así que  $G'$  satisface al menos tantas relaciones como  $G$ .*

**Observación A.1.4.** Sea  $S$  un conjunto generador de  $G$  y  $f : G \rightarrow G'$  un homomorfismo. Entonces  $f$  está completamente determinado por su restricción al conjunto  $S$ , sin embargo, es falso que toda aplicación  $f' : S \rightarrow G'$  pueda extenderse a un homomorfismo  $f : G \rightarrow G'$  ya que puede que  $f'$  no “mande” la identidad en la identidad (suponiendo que la identidad fuese un elemento de  $S$ ).

## Construcción de grupos libres

Sea  $S$  un conjunto, entonces sus elementos son llamados *letras o símbolos*. Sea  $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$  el conjunto de letras inversas (o símbolos inversos). En lo que sigue llamaremos a  $S \cup S^{-1}$ , **Alfabeto**. El conjunto  $S^*$ , se define como el conjunto de todas las palabras construidas adjuntando letras del alfabeto de manera finita, es decir, una palabra sobre  $S^*$  es una sucesión finita (posiblemente vacía) de elementos de  $S \cup S^{-1}$ , cuya expresión es de la forma

$$w = s_{i_1}^{\varepsilon_1} s_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_n}$$

con  $s_i \in S \cup S^{-1}$  y  $\varepsilon_i = \pm 1$ . Se usará la notación de  $1$  para la palabra vacía (la palabra que no tiene elementos) y se considera a  $1$  en  $S^*$ . Como un ejemplo de palabra se tiene

$$s_1 s_2 s_1^{-1} s_2 s_3 \in S^*.$$

En el conjunto  $S^*$  hay una operación binaria  $(\cdot)$  consistente en adjuntar palabras. La palabra vacía sería elemento neutro de la operación  $(\cdot)$ , que es obviamente asociativa. La longitud de la palabra  $w$  es el número de letras en esta palabra. La longitud de la palabra vacía es  $0$ . Pero  $S^*$  todavía no es grupo, por la ausencia de elementos simétricos. Para lograrlo, se dice que, una palabra  $w \in S^*$  es **reducida**, si esta no contiene un par de letras consecutivas de la forma  $ss^{-1}$  o  $s^{-1}s$ . La **reducción** de una palabra  $w \in S^*$  es hacer recurrente, mientras sea posible, la eliminación de todas las parejas de letras consecutivas de la forma  $ss^{-1}$  o  $s^{-1}s$ . Por ejemplo, las palabras

$$1, s_2 s_1, s_1 s_2 s_1^{-1}$$

son reducidas, mientras que

$$s_2 s_1 s_1^{-1} s_3$$

no es reducida.

Consideremos las siguientes operaciones entre palabras:

1. Intercalar  $ss^{-1}$  o  $s^{-1}s$  en una palabra, donde  $s \in S \cup S^{-1}$  (Intercalar  $ss^{-1}$  en una palabra  $w$  significa escribir a  $w$  como  $uv$  y, entonces, intercalar  $ss^{-1}$  de esta manera:  $uss^{-1}v$ , claramente  $u, v$  pueden ser vacías).
2. Eliminar  $ss^{-1}$  o  $s^{-1}s$  en una palabra, donde  $s \in S \cup S^{-1}$ .

Se define una relación de equivalencia en  $S^*$ , dada por  $w \sim w'$  si  $w$  se puede obtener de  $w'$  por una sucesión finita de operaciones de tipo 1, 2, es decir, la relación  $\sim$  en  $S^*$  esta dada por

$$us_i s_i^{-1} v \sim uv, \quad us_i^{-1} s_i v \sim uv \quad \text{donde } u, v \in S^*.$$

**Proposición A.1.5.** *Cualquier palabra en  $S^*$  es equivalente a una única palabra reducida.*

Para una demostración de este hecho véase [8].

**Definición A.1.6.** *El grupo libre sobre  $S$  es el conjunto  $F(S) = S^* / \sim$  provisto de la operación binaria  $*$  definida por:  $w * w'$  es la única palabra reducida equivalente a la palabra  $w \cdot w'$ . El elemento neutro es la palabra vacía. El inverso de una palabra reducida*

$$w = s_{i_1}^{\varepsilon_1} s_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_n}$$

esta dado por

$$w^{-1} = s_{i_n}^{-\varepsilon_n} s_{i_{n-1}}^{-\varepsilon_{n-1}} \cdots s_{i_1}^{-\varepsilon_1}.$$

De aquí es claro que  $w * w^{-1} = w^{-1} * w = 1$  en  $F(S)$ .

La cardinalidad de  $S$  es llamado el **rango** de el grupo libre  $F(S)$ .

Se puede demostrar que este grupo es único salvo isomorfismo.

**Proposición A.1.7 (Unicidad de grupos libres (Véase [8])).** *Sea  $S$  un conjunto. Entonces, hasta isomorfismo, hay a lo más un grupo libre generado por  $S$ .*

Hasta el momento se ha definido un grupo libre generado por un conjunto de manera abstracta, es por eso que damos una caracterización de los grupos libres, que se usará más adelante.

**Proposición A.1.8.** *Sea  $G$  un grupo generado por  $S$ .  $G$  es un grupo libre generado por  $S$  si y sólo si siempre que*

$$\prod_{i=1}^k s_i^{\varepsilon_i} = e; \quad s_i \in S, \varepsilon_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad s_i^{-1} \neq s_{i+1}, s_i \neq s_{i+1}, \quad (\text{A.1})$$

se tiene que  $s_i = e \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$ .

Hablando en general, el Lema del Ping-Pong es un criterio para encontrar productos libres de subgrupos de un grupo dado. La primera versión de este Lema es atribuida a Felix Klein quien lo uso para el estudio de grupos Kleinianos, es decir, para el estudio de grupos discretos que actúan en la esfera de Riemann. Puesto que nuestro interés son lo grupos Kleinianos, se presenta la versión siguiente de lema de Ping-Pong. Considérese:

- Cuatro discos no vacíos, disjuntos o posiblemente tangentes dos a dos en la esfera de Riemann,

$$D_i^\pm \subset \hat{\mathbb{C}} \quad i = 1, 2,$$

cuya unión  $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ .

- Se define

$$E_i^+ := \hat{\mathbb{C}} \setminus D_i^-, \quad E_i^- := \hat{\mathbb{C}} \setminus D_i^+, \quad i = 1, 2.$$

**Lema A.1.9 (Lema del Ping-Pong (Véase [33])).** *Sea  $\hat{\mathbb{C}}$ ,  $D_i^\pm, E_i^\pm$  como se describieron arriba, y supongase que  $g_1, g_2$  transformaciones de Möbius tales que*

$$g_i^{\pm 1}(E_i^\pm) \subset D_i^\pm \quad i = 1, 2.$$

Entonces las transformaciones  $g_1, g_2$  generan un subgrupo libre de rango dos.

**Ejemplo A.1.10.** *Sea  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $r \geq 2$  y consideremos las transformaciones*

$$g_1(z) = z + r \quad y \quad g_2(z) = \frac{z}{rz + 1}.$$

Entonces  $g_1, g_2$  generan un subgrupo libre de rango dos en el grupo  $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ .

**Demostración.** *Nótese que  $g_1$  es una traslación horizontal y que  $g_2 = j \circ g_1 \circ j$ ,  $g_2$  es conjugada a  $g_1$  vía la transformación  $j(z) = \frac{1}{z}$ . Consideremos el segmento de recta que une a  $z$  con  $z + r$  y tracemos las rectas perpendiculares que pasan por  $z$  y  $z + r$  estas rectas vistas en la esfera de Riemann son dos circunferencias tangentes en el punto al infinito, entonces los interiores de estas circunferencias son*

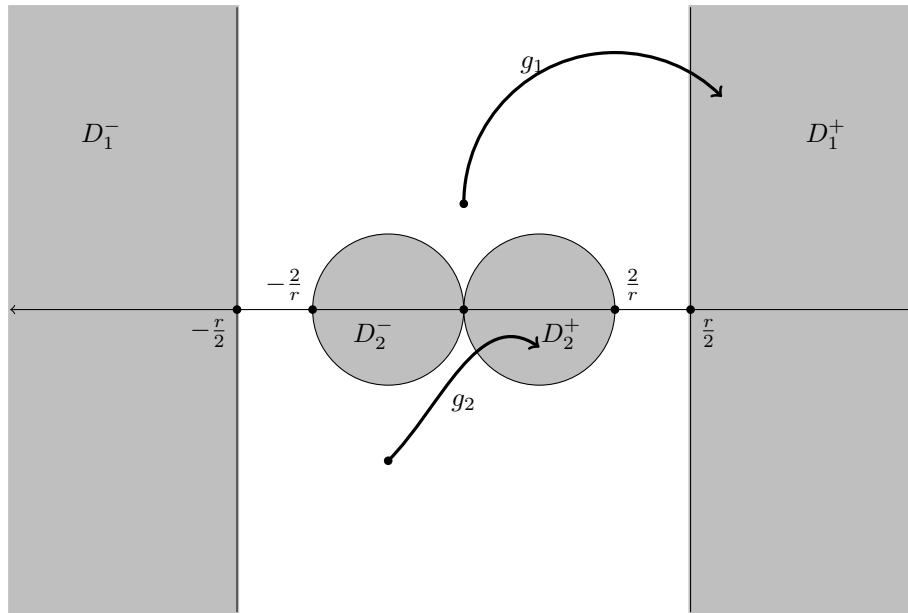
$$D_1^+ = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \text{Re}(z) > r/2\}, \quad y \quad D_1^- = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \text{Re}(z) < -r/2\}.$$

Además  $g_1$  manda a  $E_1^+ := \hat{\mathbb{C}} \setminus D_1^-$  en el interior de  $D_1^+$ , y  $E_1^- := \hat{\mathbb{C}} \setminus D_1^+$  es enviado en el interior de  $D_1^-$  mediante la inversa de  $g_1$ . Por otro lado la transformación  $j$  intercambia al 0 en el infinito y viceversa, se tiene que la recta  $\text{Re}(z) = \frac{r}{2}$  unida con el punto al infinito es enviada mediante la transformación  $j(z) = \frac{1}{z}$  en la circunferencia  $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z - (1/r)| = 1/r\}$  de igual forma la recta  $\text{Re}(z) = -\frac{r}{2}$  unida con el punto al infinito es transformada mediante  $j$  en la circunferencia  $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z + (1/r)| = 1/r\}$ , y estas son circunferencias tangentes en el 0, entonces se define a

$$D_2^+ = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z - (1/r)| < 1/r\}, \text{ y } D_2^- = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z + (1/r)| < 1/r\}.$$

Y  $g_2$  envía a  $E_2^+ := \hat{\mathbb{C}} \setminus D_2^-$  en el interior de  $D_2^+$  y la inversa envía  $E_2^- := \hat{\mathbb{C}} \setminus D_2^+$  en el interior de  $D_2^-$ . Luego tenemos las hipótesis del lema del Ping-Pong, y de aquí que  $g_1$  y  $g_2$  generan un subgrupo libre de rango 2 en el grupo de  $M\ddot{o}b(\hat{\mathbb{C}})$ .

Figura A.1: Ejemplo de Ping-Pong



De manera anloga se puede demostrar que el ejemplo siguiente también es valido

**Ejemplo A.1.11.** Si  $|z| \geq 2$  entonces las transformaciones

$$g_1(w) = w + z \text{ y } g_2(w) = \frac{w}{zw + 1},$$

generan un subgrupo discreto libre de rango 2 en  $M\ddot{o}b(\hat{\mathbb{C}})$ .



# Apéndice B

## La rebanada de Riley Clásica

En el presente apéndice se define lo que se conoce como Rebanada de Riley clásica así como la definición de conjunto de parámetros de Jonh Parker para dos parabólicos unipotentes en  $SU(2, 1)$  y algunos resultados básicos.

**Definición B.0.1.** *La rebanada de Riley consiste de todos los números complejos  $t$  no nulos para los cuales el grupo generado por*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}$$

*es discreto. Se denotara a la rebanada de Riley por  $\mathcal{R}$ , notese que  $\mathcal{R}$  se puede identificar con  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .*

**Teorema B.0.2** (R. Riley ver [40]). *Sea*

$$\Gamma_t = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

*entonces para el valor  $t = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  el grupo  $\Gamma_t$  es discreto y  $\mathbf{H}^3/\Gamma_t$  es igual al complemento del nudo ocho con respecto a  $\mathbb{S}^3$ .*

**Teorema B.0.3.** *Si  $|t| > 2$  entonces el grupo generado por las matrices*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 1 \end{bmatrix}$$

*Es libre de rango 2 y discreto.*

*Demostración.* Del Ejemplo A.1.11 se tiene que, si  $t \in \mathbb{C}$  y es tal que  $|t| > 2$  entonces el grupo generado por las transformaciones

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}$$

es libre de rango dos y discreto. Conjugando simultáneamente a las matrices  $A$  y  $B$  por la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

se tiene el resultado. □

**Definición B.0.4.** *Se define*

$$\mathcal{U} = \{(A, B) \in \text{SU}(2, 1) \times \text{SU}(2, 1) \mid A, B, AB \text{ todas son unipotentes y } AB \neq BA\} / \text{SU}(2, 1) \quad (\text{B.1})$$

El subconjunto  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{U}$  para el cual el grupo  $\langle A, B \rangle$  es discreto se llamará el conjunto de parámetros de Parker.

**Teorema B.0.5** (Véase [36]). *Existe una biyección entre  $\mathcal{U}$  y el cuadrado abierto  $(\alpha_1, \alpha_2) \in (-\pi/2, \pi/2)^2$ , que está dado por*

$$\Pi(A, B) = (\mathbb{A}(p_A, p_{AB}, p_B), \mathbb{A}(p_A, p_{AB}, p_{BA})),$$

donde  $p_A, p_B, p_{AB}$  y  $p_{BA}$  son los puntos fijos parabólicos correspondientes a las transformaciones  $A$  y  $B$ . La inversa de  $\Pi$  está dada por:

$$\Pi^{-1}((x_1, x_2)) = \left( \begin{bmatrix} 1 & -x_1 x_2^2 & -x_1^2 x_2^2 e^{-i\alpha_2} \\ 0 & 1 & x_1 x_2^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 x_2^2 e^{i\alpha_1} & 1 & 0 \\ -x_1^2 x_2^2 e^{i\alpha_2} & -x_1 x_2^2 e^{i\alpha_1} & 1 \end{bmatrix} \right), \quad (\text{B.2})$$

donde  $x_1 = \sqrt{2\cos(\alpha_1)}$ ,  $x_2 = \sqrt{2\cos(\alpha_2)}$ , con  $\alpha_j \in (-\pi/2, \pi/2)$   $j = 1, 2$ .

**Teorema B.0.6** (Véase [36]). *Suponga se que  $\Gamma = \langle A, B \rangle$  es el grupo asociado a los parámetros  $(\alpha_1, \alpha_2)$  los cuales satisfacen que*

$$D(4\cos^2(\alpha_1), 4\cos^2(\alpha_2)) > 0,$$

donde

$$D(x, y) = x^3 y^3 - 9x^2 y^2 - 27xy^2 + 81xy - 27x - 27.$$

Entonces  $\Gamma$  es discreto y es isomorfo a el grupo libre  $\mathbb{F}_2$ .

## Apéndice C

# Grupos de Lie y espacios homogéneos

### C.1. Espacios homogéneos

En esta sección se enunciarán conceptos básicos sobre la teoría de grupos de Lie y espacios homogéneos que se usarán en el resto de la tesis.

**Definición C.1.1.** *Un grupo  $G$  es un grupo de Lie si  $G$  como conjunto es un variedad diferenciable y las funciones*

$$\begin{aligned}\eta_1 : G \times G &\longrightarrow G; \eta_1(g, h) = g \cdot h \\ \eta_2 : G &\longrightarrow G; \eta_2(g) = g^{-1},\end{aligned}$$

son diferenciables.

**Ejemplo C.1.2.** *El grupo de matrices triangulares superior de la forma*

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se define como el grupo de **Heisenberg** complejo y es denotado por  $\text{Heis}(3, \mathbb{C})$ .

**Definición C.1.3.** *Sea  $H \subset G$ , se dice que  $H$  es un subgrupo de Lie de  $G$  si  $H$  es una subvariedad y es cerrado bajo la operación de grupo de  $G$ .*

**Definición C.1.4.**  *$G/H$  se dice un espacio homogéneo si  $G$  es un grupo de Lie y  $H \subset G$  es un subgrupo cerrado de  $G$ .*

**Lema C.1.5** (Véase [48]). *Sea  $G$  un grupo actuando por la izquierda en un espacio  $X$  cuya acción es*

$$\begin{aligned}\cdot : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x.\end{aligned}$$

Sea  $Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\}$  la órbita del punto  $x \in X$  y  $\text{Isot}(x, G) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$  el subgrupo de isotropía, entonces

$$Gx \cong G/\text{Isot}(x, G).$$

Más aún se sostiene la fórmula siguiente

$$\dim(G) = \dim(\text{Isot}(x, G)) + \dim(Gx). \tag{C.1}$$

## C.2. Versión Algebraica de Generadores

La proposición siguiente es una versión algebraica de la proposición 3.2.1.

**Proposición C.2.1.** Sean

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y  $T \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$  tal que  $T$  es conjugada a  $P$ . Entonces, existe  $g \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$  tal que  $[g, P] = \text{Id}$  y  $gTg^{-1}$  es triangular inferior si y solo si existen  $a, b, c, x, y, z$  tal que  $xac \neq 0$  y

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{axy-by^2+bzx-x^2}{x^2} & \frac{(zx-y^2)(-by-cx)}{x^3} - \frac{ay^2}{x^2} & -\frac{axy-bzy^2+bz^2x-cy^3+czxy}{x^3} \\ -\frac{by-ax}{x} & -\frac{axy+by^2+cxy-x^2}{x^2} & -\frac{-axx+bzy+cy^2}{x^2} \\ b & -\frac{-by-cx}{x} & -\frac{-bz-cy-x}{x} \end{pmatrix}$$

*Demostración.* Sean  $P$ ,

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad g = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$$

Por hipótesis se tiene que  $gP = Pg$ , en otras palabras se tiene

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,1} + \gamma_{1,2} & \gamma_{1,2} + \gamma_{1,3} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,1} + \gamma_{2,2} & \gamma_{2,2} + \gamma_{2,3} \\ \gamma_{3,1} & \gamma_{3,1} + \gamma_{3,2} & \gamma_{3,2} + \gamma_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} + \gamma_{2,1} & \gamma_{1,2} + \gamma_{2,2} & \gamma_{1,3} + \gamma_{2,3} \\ \gamma_{2,1} + \gamma_{3,1} & \gamma_{2,2} + \gamma_{3,2} & \gamma_{2,3} + \gamma_{3,3} \\ \gamma_{3,1} & \gamma_{3,2} & \gamma_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Al hacer algunas simplificaciones y homogeneizando se tiene las ecuaciones lineales siguientes

$$\begin{aligned} -\gamma_{21} &= 0, \\ \gamma_{11} - \gamma_{22} &= 0, \\ \gamma_{12} - \gamma_{23} &= 0, \\ -\gamma_{31} &= 0, \\ \gamma_{2,1} - \gamma_{3,2} &= 0, \\ \gamma_{2,2} - \gamma_{3,3} &= 0, \\ \gamma_{3,1} &= 0, \\ \gamma_{3,2} &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones lineales homogéneas anteriores se tiene que  $\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33}$ ,  $\gamma_{23} = \gamma_{1,2}$  y  $\gamma_{21} = \gamma_{31} = \gamma_{32} = 0$ . Esto quiere decir que en la matriz  $g$  solo depende de las entradas de su primera fila. Renombrando a  $\gamma_{11} = x$ ;  $\gamma_{12} = y$ ;  $\gamma_{13} = z$ , la matriz  $g$  es de la forma

$$g = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Además la matriz  $g$  también satisface que  $gT = Bg$ , donde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \quad \text{para } a, b, c \in \mathbb{C} \text{ no nulos.}$$

De lo anterior se tiene como resultado que

$$\begin{pmatrix} xt_{1,1} + yt_{2,1} + zt_{3,1} & xt_{1,2} + yt_{2,2} + zt_{3,2} & xt_{1,3} + yt_{2,3} + zt_{3,3} \\ xt_{2,1} + yt_{3,1} & xt_{2,2} + yt_{3,2} & xt_{2,3} + yt_{3,3} \\ xt_{3,1} & xt_{3,2} & xt_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ ax & ay + x & az + y \\ bx & by + cx & bz + cy + x \end{pmatrix}$$

De aquí, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales homogéneo siguiente

$$\begin{aligned}
 xt_{1,1} + yt_{2,1} + zt_{3,1} - x &= 0; \\
 xt_{1,2} + yt_{2,2} + zt_{3,2} - y &= 0; \\
 xt_{1,3} + yt_{2,3} + zt_{3,3} - z &= 0; \\
 xt_{2,1} + yt_{3,1} - ax &= 0; \\
 xt_{2,2} + yt_{3,2} - (ay + x) &= 0; \\
 xt_{2,3} + yt_{3,3} - (az + y) &= 0; \\
 xt_{3,1} - bx &= 0; \\
 xt_{3,2} - (by + cx) &= 0; \\
 xt_{3,3} - (bz + cy + x) &= 0.
 \end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones lineales homogéneas anteriores para los coeficientes de  $T$ , se tiene que los coeficientes de la matriz  $T$  son

$$\begin{aligned}
 t_{11} &= -\frac{axy - by^2 + bzx - x^2}{x^2}, \\
 t_{12} &= \frac{(zx - y^2)(-by - cx)}{x^3} - \frac{ay^2}{x^2}, \\
 t_{13} &= -\frac{azxy - bzy^2 + bz^2x - cy^3 + czxy}{x^3}, \\
 t_{21} &= -\frac{by - ax}{x}, \\
 t_{22} &= -\frac{-axy + by^2 + cxy - x^2}{x^2}, \\
 t_{23} &= -\frac{-azx + bzy + cy^2}{x^2}, \\
 t_{31} &= b, \\
 t_{32} &= -\frac{-by - cx}{x}, \\
 t_{33} &= -\frac{-bz - cy - x}{x}.
 \end{aligned}$$

Teniendo así la forma estipulada.

El recíproco se sigue del hecho de que todos los pasos anteriores son reversibles, ya que  $T$  tiene esa forma si y solo si se cumplen las ecuaciones matriciales arriba mencionadas, a las cuales se les dio solución si y solo si cumplen que  $[g, P] = \text{Id}$  y  $gTg^{-1}$  es triangular inferior para alguna  $g \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$ .  $\square$



## Apéndice D

# Algoritmo de la operación del Quandle Parabolico Unipotente en $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$

En la presente Apéndice se exhibe un algoritmo que captura la operación del Quandle Parabólico Unipotente en  $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$  (Véase Capítulo 3). Esta operación es la adecuada para poder calcular representaciones de grupos de enlaces y esta basada en la descomposición de Iwasawa.

---

**Algorithm 3:** Operación de Quandle

---

```

1 import sympy;
2 class Quandle;
3 def __init__(self, U, x1, x2, x3);
4 self.u = U;
5 self.x1 = x1;
6 self.x2 = x2;
7 self.x3 = x3;
8 function QuandleMult(x, y) ;
   Input : v11, v12, v13 = sympy.symbols('v11v12v13')
           v21, v22, v23 = sympy.symbols('v21v22v23')
           v31, v32, v33 = sympy.symbols('v31v32v33')-Coeficientes de matriz compacta
(1).
           u11, u12, u13 = sympy.symbols('u11u12u13')
           u21, u22, u23 = sympy.symbols('u21u22u23')
           u31, u32, u33 = sympy.symbols('u31u32u33')-Coeficientes de matriz compacta
(2).
           x1, x2, z = sympy.symbols('x1x2z')-Reales positivos y número compleja (1).
           y1, y2, w = sympy.symbols('y1y2w')-Reales positivos y número compleja (2).
   Output: (U, x1, x2, x3)– multiplicación de quandle de (x, y).
9 u11 = x.u[0], u12 = x.u[1], u13 = x.u[2], u21 = x.u[3], u22 = x.u[4], u23 = x.u[5],
  u31 = x.u[6], u32 = x.u[7], u33 = x.u[8], x1 = x.x1, x2 = x.x2, z = x.x3;
10 v11 = y.u[0], v12 = y.u[1], v13 = y.u[2], v21 = y.u[3], v22 = y.u[4], v23 = y.u[5],
  v31 = y.u[6], v32 = y.u[7], v33 = y.u[8], y1 = y.x1, y2 = y.x2, w = y.x3;
11 P = sympy.Matrix([[1, 1, 0], [0, 1, 1], [0, 0, 1]]);
12 U = sympy.Matrix([[u11, u12, u13], [u21, u22, u23], [u31, u32, u33]]);
13 A = sympy.Matrix([[x1, 0, 0], [0, x2, 0], [0, 0, (x1 * x2) ** (-1)]]);
14 Z = sympy.Matrix([[1, 0, 0], [0, 1, z], [0, 0, 1]]);
15 V = sympy.Matrix([[v11, v12, v13], [v21, v22, v23], [v31, v32, v33]]);
16 B = sympy.Matrix([[y1, 0, 0], [0, y2, 0], [0, 0, (y1 * y2) ** (-1)]]);
17 W = sympy.Matrix([[1, 0, 0], [0, 1, w], [0, 0, 1]]);
18 M = ((V * B * W) * (P.inv())) * ((W.inv()) * (B.inv()) * (V.adjoint()));
19 return M;
20 y ← Quandle(sympy.Matrix([[v11, v12, v13], [v21, v22, v23], [v31, v32, v33]]), y1, y2, w);
21 x ← Quandle(sympy.Matrix([[u11, u12, u13], [u21, u22, u23], [u31, u32, u33]]), x1, x2, z);
22 OP = QuandleMult(x, y);
23 kan = KAN(OP);
24 return kan.

```

---



## Apéndice E

# Polinomios subyacentes de los cruces del nudo ocho

En este apéndice se exhiben los polinomios que subyacen de las dos relaciones obtenidas en el quandle fundamental de nudo ocho.

Para calcular las relaciones 1 y 2 con los valores asignados a  $\mathcal{C}(\alpha)$  y a  $\mathcal{C}(\gamma)$  se hizo uso del programa en python que captura la operación de quandle en  $\mathcal{P}ab$  de la cual se obtienen dos igualdades de cuartetos en el quandle parabólico unipotente. Luego entonces se tiene que de cada igualdad subyacen 12 ecuaciones racionales mezcladas homogéneas. Como se muestra en los Lemas 3.1.16 y 3.1.17 tales ecuaciones racionales se pueden simplificar obteniendo así 3 ecuaciones polinomiales homogéneas y 9 ecuaciones polinomiales mezcladas homogéneas por cada igualdad. Se denota por  $\mathbf{z} = (a, b, c, x, t)$ , entonces tales polinomios quedan escritos de la manera siguiente:

### Polinomios de la primera relación (véase 1)

Polinomio correspondiente a la entrada 1,1 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$f_{11}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = -xt + t + a + bx - b - 1.$$

Polinomio correspondiente a la entrada 2,1 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$f_{21}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = a^2 + abx - ab + t - b.$$

Polinomio correspondiente a la entrada 3,1 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$f_{31}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = a^2c + abcx - abc - ab + t - b^2x + b^2 - bc.$$

Polinomio correspondiente a la entrada 1,2 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$\begin{aligned}
 f_{12}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = & (-ta^2 - txa^2 - c^2x^2a - btx^2a + bta + 3c^2xa + c^2x^2\bar{x}a - c^2x\bar{x}a - 3c^2 + bcx^2 + \\
 & 3c + bt + c^2x - 3bcx - cx + btx + c^2\bar{x} - bcx^2\bar{x} - c\bar{x} - c^2x\bar{x} + bcx\bar{x} + cx\bar{x} + \bar{c}(t(x^2 - 1)b^2 + \\
 & ((x - 3)xc^2 + (x + t(-ax^2 + x + a + 1) - 3)c + at(x + 1))b - c(t(x + 1)a^2 + c(x - 3)(cx + \\
 & 1)a - c^2(x - 3)) - c(x - 1)(cxb + b - c(cxa + a - c))\bar{x}))(\bar{a})^2 - (t(a + b(x - 1) - 1)(x + 1) + \\
 & \bar{b}(-ax^2c^3 + 3aaxc^3 + xc^3 - 3c^3 - ax^2c^2 + bx^2c^2 + 3ac^2 + 2aaxc^2 - 3bxc^2 + xc^2 - 3c^2 + bx^2c - \\
 & abtx^2c - (x - 1)(-bx + c(ax - 1) + 1)(\bar{x})^2c - 3bc - a^2tc + abtc + btc - 2bxc - a^2txc + btxc - \\
 & xc + 3c + b^2tx^2 - abtx^2 - a^2t - b^2t + 2abt + bt - a^2tx + abtx + btx + ((x - 1)(ax - 1)c^3 - \\
 & (-2ax^2 + bx^2 + 3ax - bx + 2x + a - 4)c^2 + (-2bx^2 + 3bx + 2x + b - 4)c + t(a^2 + b(x - 1)a - \\
 & b)(x + 1))\bar{x} - \bar{c}(\bar{x} - 1)(t(x^2 - 1)b^2 + ((x - 3)xc^2 + (x + t(-ax^2 + x + a + 1) - 3)c + at(x + \\
 & 1))b - c(t(x + 1)a^2 + c(x - 3)(cx + 1)a - c^2(x - 3)) - c(x - 1)(cxb + b - c(cxa + a - c))\bar{x}))\bar{a} + \\
 & t(a + b(x - 1) - 1)(x + 1) - (\bar{b})^2(\bar{x} - 1)(t(x^2 - 1)b^2 + ((x - 3)xc^2 + (x + t(-ax^2 + x + a + \\
 & 1) - 3)c + at(x + 1))b - c(t(x + 1)a^2 + c(x - 3)(cx + 1)a - c^2(x - 3)) - c(x - 1)(cxb + b - \\
 & c(cxa + a - c))\bar{x}) - \bar{b}(-ta^2 - txa^2 - c^2x^2a - btx^2a + bta - ta + 3c^2xa - txa - 3c^2 + bcx^2 - \\
 & btx^2 + 3c + 2bt + t + c^2x - 3bcx - cx + btx + tx + ((x - 1)(ax - 1)c^2 - (x - 1)(bx - 1)c + t(a + \\
 & b(x - 1) - 1)(x + 1))\bar{x} + \bar{c}(t(x^2 - 1)b^2 + ((x - 3)xc^2 + (x + t(-ax^2 + x + a + 1) - 3)c + at(x + \\
 & 1))b - c(t(x + 1)a^2 + c(x - 3)(cx + 1)a - c^2(x - 3)) - c(x - 1)(cxb + b - c(cxa + a - c))\bar{x})).
 \end{aligned}$$

Polinomio correspondiente a la entrada 2,2 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$\begin{aligned}
 f_{22}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = & ax^2c^2 - 3aaxc^2 - xc^2 - ax^2\bar{x}c^2 + ax\bar{x}c^2 + x\bar{x}c^2 - \bar{x}c^2 + 3c^2 - bx^2c + 3bxc + xc + \\
 & bx^2\bar{x}c - bx\bar{x}c - x\bar{x}c + \bar{x}c - 3c + btx^2 - at + bt + t + atx - 2btx - tx - btx^2\bar{x} - atx\bar{x} + btx\bar{x} + \\
 & tx\bar{x} + (\bar{b})^2(\bar{x} - 1)(-c(-xt + t + c(x - 3))a^2 + b(-(x - 3)xc^2 + (t(x - 1)^2 + x - 3)c + t - tx)a + \\
 & b((x - 3)c^2 + (-xt + t + b(x - 3)x)c - bt(x - 1)^2) + (c(c(x - 1) - tx)a^2 + b((x - 1)xc^2 - \\
 & (x - 1)(tx + 1)c + tx)a + b(-(x - 1)c^2 + x(-xb + b + t)c + bt(x - 1)x))\bar{x}) + (\bar{a})^2(t(a^2 + \\
 & b(x - 1)a - b)(\bar{x}x - x + 1) - \bar{c}(-c(-xt + t + c(x - 3))a^2 + b(-(x - 3)xc^2 + (t(x - 1)^2 + x - \\
 & 3)c + t - tx)a + b((x - 3)c^2 + (-xt + t + b(x - 3)x)c - bt(x - 1)^2) + (c(c(x - 1) - tx)a^2 + \\
 & b((x - 1)xc^2 - (x - 1)(tx + 1)c + tx)a + b(-(x - 1)c^2 + x(-xb + b + t)c + bt(x - 1)x))\bar{x})) + \\
 & \bar{b}(-ta^2 + txa^2 + c^2x^2a + btx^2a + bta - ta - 3c^2xa - 2btxa + txa + 3c^2 - bxc^2 + btx^2 + ((x - \\
 & 1)(ax - 1)c^2 - (x - 1)(bx - 1)c + t(a + b(x - 1) - 1)x)(\bar{x})^2 - 3c + 2bt + t - c^2x + 3bcx + \\
 & cx - 3btx - tx - (2(x - 2)(ax - 1)c^2 - 2(x - 2)(bx - 1)c + t(xa^2 + (bx^2 - bx + 2x - 1)a + \\
 & 2bx^2 + b - 4bx - 2x + 1))\bar{x} + \bar{c}(-c(-xt + t + c(x - 3))a^2 + b(-(x - 3)xc^2 + (t(x - 1)^2 + x - \\
 & 3)c + t - tx)a + b((x - 3)c^2 + (-xt + t + b(x - 3)x)c - bt(x - 1)^2) + (c(c(x - 1) - tx)a^2 + \\
 & b((x - 1)xc^2 - (x - 1)(tx + 1)c + tx)a + b(-(x - 1)c^2 + x(-xb + b + t)c + bt(x - 1)x))\bar{x})) - \\
 & \bar{a}(ax^2c^2 - 3aaxc^2 - xc^2 - ax^2\bar{x}c^2 + ax\bar{x}c^2 + x\bar{x}c^2 - \bar{x}c^2 + 3c^2 - bx^2c + 3bxc + xc + bx^2\bar{x}c - \\
 & bx\bar{x}c - x\bar{x}c + \bar{x}c - 3c + btx^2 - at + bt + t + atx - 2btx - tx - btx^2\bar{x} - atx\bar{x} + btx\bar{x} + tx\bar{x} + \\
 & \bar{b}(-3c^2a^2 + cta^2 + ta^2 + c^2xa^2 - cta^2 - txa^2 + bc^2x^2a - btx^2a - bctx^2a + 3bca - 2bta - \\
 & bcta - 3bc^2xa - bcxa + 3btxa + 2bctxa + 3bc^2 - b^2cx^2 + b^2tx^2 + tx(-a^2 + (b - bx)a + \\
 & b)(\bar{x})^2 + b^2t - bt - bct - bc^2x + 3b^2cx - 2b^2tx + btx + bctx + ((-x - 1)c^2 + txc + t(2x - \\
 & 1))a^2 + b(-(x - 1)xc^2 + (x - 1)(tx + 1)c + t(2x^2 - 4x + 1))a + b((x - 1)c^2 - x(-xb + b + t)c - \\
 & btx^2 + t + (b - 2tx))\bar{x} + \bar{c}(\bar{x} - 1)(-c(-xt + t + c(x - 3))a^2 + b(-(x - 3)xc^2 + (t(x - 1)^2 + \\
 & x - 3)c + t - tx)a + b((x - 3)c^2 + (-xt + t + b(x - 3)x)c - bt(x - 1)^2) + (c(c(x - 1) - tx)a^2 + \\
 & b((x - 1)xc^2 - (x - 1)(tx + 1)c + tx)a + b(-(x - 1)c^2 + x(-xb + b + t)c + bt(x - 1)x))\bar{x}));
 \end{aligned}$$

Polinomio correspondiente a la entrada 3,2 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$\begin{aligned}
 f_{32}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = & -ax^2c^3 + 3axc^3 + xc^3 + ax^2\bar{x}c^3 - ax\bar{x}c^3 - x\bar{x}c^3 + \bar{x}c^3 - 3c^3 + bx^2c^2 + 3ac^2 - \\
 & axc^2 - 3bxc^2 - bx^2\bar{x}c^2 - a\bar{x}c^2 + ax\bar{x}c^2 + bx\bar{x}c^2 - 3bc + bxc + b\bar{x}c - bx\bar{x}c - 2at + 2bt + \\
 & 2t - 2bt\bar{x} + at\bar{x} - bt\bar{x} - t\bar{x} + btx\bar{x} + (\bar{a})^2(-3c^2a^2 + 2ta^2 + c^2xa^2 + bc^2x^2a + 3bca - 2bta - \\
 & 3bc^2xa - bcxa + 2bt\bar{x}a + 3bc^2 - b^2cx^2 - 2bt - bc^2x + 3b^2cx - t(ca^2 + b(c(x-1) - 1)a - b(c + \\
 & b(x-1)))\bar{c}(\bar{x} - 2) + (-((x-1)c^2 + t)a^2 - b(x-1)(xc^2 - c + t)a + b((x-1)c^2 + b(x-1)xc + \\
 & t))\bar{x}) + t(ca^2 + b(c(x-1) - 1)a - b(c + b(x-1)))\bar{b})^2((\bar{x})^2 - 3\bar{x} + 2) + \bar{b}(-ax^2c^3 + 3axc^3 + \\
 & xc^3 - 3c^3 + 3a^2c^2 - abx^2c^2 + bx^2c^2 + 3ac^2 - 3bc^2 - a^2xc^2 - axc^2 + 3abxc^2 - 2bxc^2 + b^2x^2c - \\
 & 3abc - 3bc - 3b^2xc + abxc + bxc + (xc^3 - c^3 + t + b(x-1)(xc^2 + c - t) - a((x-1)xc^3 + (x- \\
 & 1)c^2 + t))(\bar{x})^2 - 2a^2t - 2at + 2abt + 4bt + 2t - 2abt\bar{x} - 2bt\bar{x} + t(ca^2 + b(c(x-1) - 1)a - b(c + \\
 & b(x-1)))\bar{c}(\bar{x} - 2) + (-2xc^3 + 4c^3 - b^2(x-1)xc - 3t + a^2((x-1)c^2 + t) + a(2(x-2)xc^3 + \\
 & 2(x-2)c^2 + 3t) + b(((a-2)x^2 - (a-3)x + 1)c^2 + (-xa + a - 2x + 4)c + t(a(x-1) + 3x - \\
 & 4)))\bar{x}) + \bar{a}(ax^2c^3 - 3axc^3 - xc^3 - ax^2\bar{x}c^3 + ax\bar{x}c^3 + x\bar{x}c^3 - \bar{x}c^3 + 3c^3 - bx^2c^2 - 3ac^2 + axc^2 + \\
 & 3bxc^2 + bx^2\bar{x}c^2 + a\bar{x}c^2 - ax\bar{x}c^2 - bx\bar{x}c^2 + 3bc - bxc - b\bar{x}c + bx\bar{x}c + 2at - 2bt - 2t + 2bt\bar{x} - \\
 & at\bar{x} + bt\bar{x} + t\bar{x} - btx\bar{x} + \bar{b}(3c^2a^2 - 2cta^2 - 2ta^2 - c^2xa^2 - bc^2x^2a - 3bca + 4bta + 2bcta + \\
 & 3bc^2xa + bcxa - 2bt\bar{x}a - 2bct\bar{x}a - 3bc^2 + b^2cx^2 + (-((x-1)c^2 + t)a^2 - b(x-1)(xc^2 - c + \\
 & t)a + b((x-1)c^2 + b(x-1)xc + t))(\bar{x})^2 - 2b^2t + 2bt + 2bct + bc^2x - 3b^2cx + 2b^2tx + ((2(x- \\
 & 2)c^2 + tc + 3t)a^2 + b(2(x-2)xc^2 + (t(x-1) - 2x + 4)c + t(3x - 4))a - b(2(x-2)c^2 + (t + \\
 & 2b(x-2)x)c + t(b(x-1) + 3)))\bar{x} - t(ca^2 + b(c(x-1) - 1)a - b(c + b(x-1)))\bar{c}((\bar{x})^2 - 3\bar{x} + 2))).
 \end{aligned}$$

Polinomio correspondiente a la entrada 1,3 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$\begin{aligned}
 f_{13}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = & \bar{x}(cxb^2 + c^2b + ac(1 - cx)b - a^2c^2 - 2t^2 - t^2x\bar{x}(\bar{b}^2 + (c(cxb + b - c(cxa + a - c) + \\
 & (-axc + c + bx - 1)\bar{x} + \bar{c}(cxb^2 + c^2b + acb - ac^2xb - a^2c^2 - 2t^2 + (c^3 - a(cx + 1)c^2 + b(cx + \\
 & 1)c - t^2x\bar{x} + \bar{a}(-cxb^2 - c^2b + ac(cx - 1)b + a^2c^2 + 2t^2 + t^2x\bar{x}(\bar{c}\bar{x} - 1\bar{b} + c(-bx + c(ax - \\
 & 1) + 1) - c(cxb + b - c(cxa + a - c)))\bar{c}^2(\bar{a}\bar{x} - 1 + \bar{c}((-cxb^2 - c^2b + ac(cx - 1)b + a^2c^2 + \\
 & 2t^2 + t^2x\bar{x}(\bar{a}^2 - c(cxb + b - c(cxa + a - c) + (-axc + c + bx - 1)\bar{x}\bar{a} + c(-axc + c + bx - 1)).
 \end{aligned}$$

Polinomio correspondiente a la entrada 2,3 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$\begin{aligned}
 f_{23}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = & c(-ca^2 + (b - bcx)a + b(c + bx)\bar{x}(\bar{b}^2 + (-axc^3 + c^3 - ac^2 + bxc^2 - ax\bar{x}c^2 + \bar{x}c^2 + \\
 & bc + bx\bar{x}c - \bar{x}c + (ca^2 + b(cx - 1)a - b(c + bx)\bar{a}(\bar{c}\bar{x} - 1c - 2t^2 - t^2x\bar{x} + \bar{c}(-t^2x(\bar{x}^2 + (c^3 - \\
 & a(cx + 1)c^2 + b(cx + 1)c - 2t^2\bar{x} + c(-ca^2 + (b - bcx)a + b(c + bx)\bar{b} + c(-bx + c(ax - 1) + 1) + \\
 & \bar{c}^2(axc^3 - c^3 + ac^2 - b(cx + 1)c + 2t^2 + t^2x\bar{x}(\bar{a}\bar{x} - 1 + \bar{c}(c(ca^2 + b(cx - 1)a - b(c + bx)(\bar{a}^2 + \\
 & (axc^3 - c^3 + ac^2 - b(cx + 1)c + 2t^2 + ((ax - 1)c^2 - bxc + c + t^2x\bar{x}\bar{a} + c(-axc + c + bx - 1)).
 \end{aligned}$$

Polinomio correspondiente a la entrada 3,3 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$\begin{aligned}
 f_{33}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = & 2t^2 + \bar{b}((1 - ax)c^2 + (bx - 1)c + (-ca^2 + (b - bcx)a + b(c + bx)\bar{b}c - t^2x(\bar{x}^2 + \\
 & ((ax - 1)c^2 - bxc + c + t^2x + (-axc^3 + c^3 - ac^2 + b(cx + 1)c + (-ca^2 + (b - bcx)a + \\
 & b(c + bx)\bar{a}c - 2t^2\bar{b}\bar{x} - c(cxb + b - c(cxa + a - c))(\bar{c}^2\bar{x}(\bar{a}\bar{x} - 1 + \bar{c}(-2t^2 + (c(cxb + b - \\
 & c(cxa + a - c))\bar{b} + \bar{a}((ax - 1)c^2 - bxc + (ca^2 + b(cx - 1)a - b(c + bx)\bar{b}c + c + t^2x(\bar{x}^2 + \\
 & (-axc^2 + c^2 + (ca^2 + b(cx - 1)a - b(c + bx)(\bar{a}^2c + bxc + (-ca^2 + (b - bcx)a + b(c + \\
 & bx)\bar{b}c - c - t^2x - (c^3 - a(cx + 1)c^2 + b(cx + 1)c - 2t^2\bar{a}\bar{x})).
 \end{aligned}$$

Polinomio correspondiente a la primera entrada real de la parte abeliana de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$\begin{aligned}
 f_{R1}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = & |(t(1 - x), -t, t)| - |(-a - bx + b + 1, a^2 + ab(x - 1) - b, a^2(-c) + ab(c(-x) + \\
 & c + 1) + b(b(x - 1) + c))|.
 \end{aligned}$$

Polinomio correspondiente a la segunda entrada real de la parte abeliana de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$\begin{aligned}
 f_{R2}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = & -((\bar{a})^2(2a^2 - a(2b - 2c^2 + 2c + 1) - 2b(c - 1) + 1) - \bar{a}((\bar{c})^2(2a^2 - a(3b - 3c^2 + 2c + 1) \\
 & + b(2 - 3c) + 1) + \bar{b}(-2a^2 + a(3b - 3c^2 + 2c + 1) + b(3c - 2) - 1) + \bar{c}(-2a^2 + a(2b - 2c^2 + 2c + 1) \\
 & + 2b(c - 1) - 1) - a^2 + ab - ac^2 + ac + a + bc - b - 1) + \bar{b}(\bar{c}(2a^2 - a(3b - 3c^2 + 2c + 1) - 3bc + \\
 & 2b + 1) - 2a^2 + a(2b - 2c^2 + 2c + 1) + 2bc - 2b - 1) - (\bar{a})^2((\bar{c})^2(b(a^2 + ac(c + 1) + c^2 + 1) - a^2c^2 + \\
 & b^2(-(a + c + 1))) - a^2 + \bar{b}(a^3 + a^2((c - 1)c - 2b) + a(b^2 - bc^2 + 1) + b(bc - c^2 + c - 2)) + \bar{c}(a^3 - \\
 & a^2(b + c) + abc + a + b(-b + c - 1) + ab + a - 1))^{1/2} + (\bar{a}(a^3 + (\bar{b})^2(-b(a^2 + ac(c + 1) + c^2 + 1) + \\
 & a^2c^2 + b^2(a + c + 1)) - a^2(b + c + 1) + \bar{b}((\bar{c})^2(b(a^2 + ac(c + 1) + c^2 + 1) - a^2c^2 + b^2(-(a + c + 1))) - \\
 & a^2 + \bar{c}(a^3 - a^2c(c + 1) - ab^2 + abc(c + 2) + a - b^2(c + 2) + bc(c + 1)) + ab + a - 1) + a(bc + b + 2) - \\
 & b^2 + bc - b - 1) - (\bar{b})^2(a^3 + \bar{c}(b(a^2 + ac(c + 1) + c^2 + 1) - a^2c^2 + b^2(-(a + c + 1))) - a^2c(c + 1) - \\
 & ab^2 + abc(c + 2) + a - b^2(c + 2) + bc(c + 1)) + \bar{b}(-a^3 + (\bar{c})^2(b(a^2 + ac(c + 1) + c^2 + 1) - a^2c^2 + \\
 & b^2(-(a + c + 1))) + a^2(2b - c^2 + c) + \bar{c}(a^3 - a^2(b + c) + abc + a + b(-b + c - 1)) - a(b^2 - bc^2 + \\
 & 1) + b(-(b + 1)c + c^2 + 2)) + (\bar{a})^3(a^3 - a^2(b + c) + abc + a + b(-b + c - 1)) - ac^2 + ac + bc - b)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Polinomio correspondiente a la entrada compleja de la parte nilpotente de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$\begin{aligned}
 f_C(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = & 2a^2(\bar{c})^3c^6 + 2a^2\bar{c}c^6 + 2a^4(\bar{c})^3c^5 - 2a^3(\bar{c})^3c^5 - 2a^2(\bar{c})^3c^5 - a(\bar{c})^3c^5 - 2a^2b(\bar{c})^3c^5 - \\
 & 2ab(\bar{c})^3c^5 + 2a^2c^5 + 2a^2(\bar{c})^2c^5 + 2a^4\bar{c}c^5 - 2a^3\bar{c}c^5 - 4a^2\bar{c}c^5 - a\bar{c}c^5 - 2a^2b\bar{c}c^5 - 2ab\bar{c}c^5 + \\
 & 2a^4c^4 - 2a^3c^4 + a^3(\bar{c})^3c^4 + 2a^2(\bar{c})^3c^4 + 2ab^2(\bar{c})^3c^4 + a(\bar{c})^3c^4 - 4a^3b(\bar{c})^3c^4 + 2a^2b(\bar{c})^3c^4 + \\
 & 3ab(\bar{c})^3c^4 + b(\bar{c})^3c^4 - 4a^2c^4 + 2a^4(\bar{c})^2c^4 - 2a^3(\bar{c})^2c^4 - 4a^2(\bar{c})^2c^4 - a(\bar{c})^2c^4 - 2a^2b(\bar{c})^2c^4 - \\
 & 2ab(\bar{c})^2c^4 - ac^4 - 2a^2bc^4 - 2abc^4 - 2a^4\bar{c}c^4 + 3a^3\bar{c}c^4 + 6a^2\bar{c}c^4 + 2ab^2\bar{c}c^4 + 2a\bar{c}c^4 - 4a^3b\bar{c}c^4 + \\
 & 4a^2b\bar{c}c^4 + 5ab\bar{c}c^4 + b\bar{c}c^4 - 2a^4c^3 + 3a^3c^3 + 2a^5(\bar{c})^3c^3 - 5a^4(\bar{c})^3c^3 + 3a^3(\bar{c})^3c^3 - 3a^2(\bar{c})^3c^3 + \\
 & 4a^2b^2(\bar{c})^3c^3 - 2ab^2(\bar{c})^3c^3 - b^2(\bar{c})^3c^3 - 2a^4b(\bar{c})^3c^3 + 5a^2b(\bar{c})^3c^3 - 3ab(\bar{c})^3c^3 - b(\bar{c})^3c^3 - \\
 & (\bar{c})^3c^3 + 4a^2c^3 + 2ab^2c^3 - 2a^4(\bar{c})^2c^3 + 3a^3(\bar{c})^2c^3 + 4a^2(\bar{c})^2c^3 + 2ab^2(\bar{c})^2c^3 + 2a(\bar{c})^2c^3 - \\
 & 4a^3b(\bar{c})^2c^3 + 4a^2b(\bar{c})^2c^3 + 5ab(\bar{c})^2c^3 + b(\bar{c})^2c^3 + 2ac^3 - 4a^3bc^3 + 4a^2bc^3 + 5abc^3 + bc^3 + \\
 & 2a^5\bar{c}c^3 - 3a^4\bar{c}c^3 - 7a^2\bar{c}c^3 + 4a^2b^2\bar{c}c^3 - 4ab^2\bar{c}c^3 - b^2\bar{c}c^3 - 2a\bar{c}c^3 - 2a^4b\bar{c}c^3 + 4a^3b\bar{c}c^3 + \\
 & a^2b\bar{c}c^3 - 8ab\bar{c}c^3 - 2b\bar{c}c^3 - \bar{c}c^3 + 2a^5c^2 - 3a^4c^2 + 2a^5(\bar{c})^3c^2 - 4a^4(\bar{c})^3c^2 + 6a^3(\bar{c})^3c^2 - \\
 & 4a^2(\bar{c})^3c^2 + 2a^3b^2(\bar{c})^3c^2 - 4ab^2(\bar{c})^3c^2 + b^2(\bar{c})^3c^2 + 2a(\bar{c})^3c^2 - 4a^4b(\bar{c})^3c^2 + 8a^3b(\bar{c})^3c^2 - \\
 & 6a^2b(\bar{c})^3c^2 + 2b(\bar{c})^3c^2 - 2a^2c^2 + 4a^2b^2c^2 - 4ab^2c^2 - b^2c^2 + 2a^5(\bar{c})^2c^2 - 3a^4(\bar{c})^2c^2 - a^3(\bar{c})^2c^2 + \\
 & 4a^2b^2(\bar{c})^2c^2 - 4ab^2(\bar{c})^2c^2 - b^2(\bar{c})^2c^2 - 4a(\bar{c})^2c^2 - 2a^4b(\bar{c})^2c^2 + 4a^3b(\bar{c})^2c^2 + 2a^2b(\bar{c})^2c^2 - \\
 & 8ab(\bar{c})^2c^2 - 2b(\bar{c})^2c^2 + (\bar{c})^2c^2 - 2ac^2 - 2a^4bc^2 + 4a^3bc^2 + a^2bc^2 - 7abc^2 - 2bc^2 - a^4\bar{c}c^2 + \\
 & 6a^3\bar{c}c^2 - 2a^2\bar{c}c^2 + 2a^3b^2\bar{c}c^2 - 4a^2b^2\bar{c}c^2 + 2b^2\bar{c}c^2 + 4a\bar{c}c^2 - 2a^4b\bar{c}c^2 + 4a^3b\bar{c}c^2 - 7a^2b\bar{c}c^2 + \\
 & 7ab\bar{c}c^2 + 4b\bar{c}c^2 - a^4c + 4a^3c - a^4(\bar{c})^3c + 2a^3(\bar{c})^3c - 3a^2(\bar{c})^3c + 2a^3b^2(\bar{c})^3c - 5a^2b^2(\bar{c})^3c + \\
 & 2ab^2(\bar{c})^3c + b^2(\bar{c})^3c + 2a(\bar{c})^3c - 2a^4b(\bar{c})^3c + 5a^3b(\bar{c})^3c - 5a^2b(\bar{c})^3c + 4ab(\bar{c})^3c - b(\bar{c})^3c - \\
 & (\bar{c})^3c - 3a^2c + 2a^3b^2c - 4a^2b^2c + ab^2c + 2b^2c - a^4(\bar{c})^2c + 4a^3(\bar{c})^2c - 3a^2(\bar{c})^2c + 2a^3b^2(\bar{c})^2c - \\
 & 5a^2b^2(\bar{c})^2c + ab^2(\bar{c})^2c + 2b^2(\bar{c})^2c + 2a(\bar{c})^2c - 2a^4b(\bar{c})^2c + 5a^3b(\bar{c})^2c - 7a^2b(\bar{c})^2c + 5ab(\bar{c})^2c + \\
 & 2b(\bar{c})^2c + 2ac - 2a^4bc + 4a^3bc - 6a^2bc + 4abc + 2bc - 2a^3\bar{c}c - a^2b^2\bar{c}c + ab^2\bar{c}c - b^2\bar{c}c + a^3b\bar{c}c + \\
 & a^2b\bar{c}c - 3b\bar{c}c - \bar{c}c - a^2b^2(\bar{c})^3 + 2ab^2(\bar{c})^3 - b^2(\bar{c})^3 + a^3b(\bar{c})^3 - 2a^2b(\bar{c})^3 + 2ab(\bar{c})^3 - b(\bar{c})^3 - \\
 & a^2b^2 + 2ab^2 - b^2 + ab^3(\bar{c})^2 - 3a^2b^2(\bar{c})^2 + 4ab^2(\bar{c})^2 - 2b^2(\bar{c})^2 + 2a^3b(\bar{c})^2 - 4a^2b(\bar{c})^2 + 4ab(\bar{c})^2 - \\
 & 3b(\bar{c})^2 + a^3b - 2a^2b + 2ab - 2b + b\bar{c} + (2(a+c-1)^2b^3 - (4(c+1)a^3 + (8c^2 - 2c - 5)a^2 + (4c^3 - \\
 & 4c^2 + c + 4)a + 2c^3 - 2c^2 + 3c - 3)b^2 + (2(c^2 + 3c + 1)a^4 + (6c^3 + 2c^2 - 6c - 1)a^3 + (2c^4 - 2c^3 + \\
 & 3c^2 + 5c + 3)a^2 + (4c^4 - 2c^3 + 4c^2 - 3c - 1)a + c^2 + 1)b - ac(2(c+1)a^4 + (2c^3 + 2c^2 - 3c - 1)a^3 + \\
 & (-2c^3 + 2c^2 + 2c + 3)a^2 + (2c^4 + c^2 - c - 1)a + c^2 + 1))(\bar{a})^5\bar{c}(\bar{c} + 1) + (-2b^2 + (c + 2a(c + 1) - \\
 & 1)b + (1 - 2a)c^2)(\bar{b})^4(a^3 - c(c + 1)a^2 - b^2a + bc(c + 2)a + a + bc(c + 1) - b^2(c + 2) + (-a + c + \\
 & 1)b^2 + (a^2 + c(c + 1)a + c^2 + 1)b - a^2c^2)\bar{c} + (\bar{b})^3(-(a + c - 2)b^4 + ((c + 3)a^2 + 2(c^2 - 3c + 1)a + \\
 & c + 4)b^3 - (3a^3 + (c^3 - 7c^2 - c + 3)a^2 + (-c^3 + 2c + 3)a - c^3 + 3c^2 + c + 1)b^2 - ((2c^2 + 3c - 1)a^4 + \\
 & (5c^3 - 4c + 1)a^3 + c^2(c^2 - c + 6)a^2 + (3c^4 - c^3 - 4c + 1)a - 2c^3 + 3c^2 + 1)b + (2c(c + 1)a^5 - \\
 & (-3c^4 - 3c^3 + 3c^2 + c + b(3c^2 + 7c + 2))a^4 + ((3c + 2)b^2 + (-6c^3 + 3c^2 + 6c + 1)b + c(-6c^3 + \\
 & 2c^2 + 2c + 3))a^3 + (3(c + 1)b^3 - (3c^3 + 8c + 4)b^2 + (9c^3 - 4c^2 - 7c - 2)b + c(3c^4 + 3c^2 - 2c - \\
 & 1))a^2 + (-3b^4 + (6c^2 + 6c + 7)b^3 + (-3c^3 - 13c^2 + 1)b^2 + (-3c^4 + c^3 - 3c^2 + 4c + 1)b + c^3 + c)a - \\
 & b(3(c + 1)b^3 - c(3c + 7)b^2 - (c - 3)b + c^3 + c))(\bar{c})^2 + ac(2(c + 1)a^4 + (2c^3 + 2c^2 - 6c - 1)a^3 + \\
 & (-3c^3 + 5c^2 + 4c + 3)a^2 + (2c^4 - c^2 - 4c - 1)a + (c + 1)^2) + (-4c(c + 1)a^5 + (b(5c^2 + 10c + \\
 & 1) + c(-5c^3 - 5c^2 + 9c + 2))a^4 - (-5c^4 + 7c^3 + 4c^2 + 7c + b^2(7c + 3) + b(-15c^3 - 5c^2 + 12c + \\
 & 1) - 1)a^3 + (-5c^5 - 2c^4 - 2c^3 + 5c^2 + c + 2b^3 - b^2(23c^2 + c - 8) + b(5c^4 + 12c^2 + 7c + 3))a^2 + \\
 & ((18c - 5)b^3 - (12c^3 + 5c^2 + c + 4)b^2 + (12c^4 + 6c^2 - 7c - 1)b - 2c^3 - 3c + 1)a + b(2c^4 - c^3 + \\
 & 4c^2 + c - 3b^3 + b^2(7c^2 + 1) - b(9c^3 + c^2 + 4c - 2) + 2)\bar{c} + (\bar{b})^2(-2c^2(c + 1)a^6 + c(-2c^4 + 5c^2 + \\
 & 4c + 2b(c^2 + 3c + 1) + 3)a^5 - (4c(c + 1)b^2 + (-6c^4 + 2c^3 + 11c^2 + 9c + 2)b + c(-2c^4 + c^3 - c^2 + \\
 & 11c + 6))a^4 + (-2c^6 + 2c^5 - 7c^4 + 3c^3 + 10c^2 + 2b^3c + 12c + b^2(-8c^3 + 4c^2 + 9c + 3) + b(2c^5 - \\
 & 4c^4 - 3c^3 + 6c^2 + 17c + 3) - 1)a^3 + (3c^5 + 3c^4 + 2c^3 - 11c^2 + b^3(4c - 3)c - 5c + b^2(-4c^4 + 5c^3 + \\
 & 6c^2 - 6c - 6) + b(4c^5 - 6c^4 + 10c^3 - 9c^2 - 14c - 7) - 2)a^2 - (b^4 + (-2c^3 + 2c^2 + 4c - 3)b^3 + \\
 & (2c^4 - 7c^3 + 8c^2 + c - 10)b^2 + (5c^4 - 4c^3 + 7c^2 - 8c - 4)b + c(2c^4 + 2c^3 - 3c^2 - 3c - 5))a -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -b^3 + 4b^2c^3 + bc^3 - c^3 + ((3a^2 + 3(c-2)a - 9c + 1)b^3 + (- (6c+5)a^3 + (-12c^2 + 2c+3)a^2 + \\
& (-3c^3 + 6c^2 - 3c+2)a + 2(3c^2 + c+2))b^2 + ((3c^2 + 7c+2)a^4 + (9c^3 + 6c^2 - c+1)a^3 + (3c^4 + \\
& 2c^2 + 2c-2)a^2 + (6c^4 - 3c^3 + c^2 + c+1)a - 2)b - c(2(c+1)a^5 + (3c^3 + 3c^2 - c+1)a^4 + c(5c- \\
& 1)a^3 + (3c^4 - 6c^3 + 3c^2 - c+3)a^2 + (3c^4 + 3c^2 - c-1)a + c^2 + 1))(\bar{c})^3 - 3b^2 - 3b^3c^2 - 5bc^2 - \\
& 2c^2 + (2c(c+1)a^5 - (-2c^4 - 2c^3 + c^2 + c + 2b(c^2 + 3c+1))a^4 + (-2c^4 + c^3 - 4c^2 + 5c + 2b^2(c+ \\
& 1) + b(-4c^3 + 8c+2) - 2)a^3 + (2c^5 + 7c^3 - 3c^2 + 5c + 2b^3(c+1) - b(3c^2 + 6c+1) - b^2(2c^3 + 5c+ \\
& 5) - 2)a^2 + (2c^5 - 3c^4 + 5c^3 - 6c^2 + c - 2b^4 + 2b^3(2c^2 + c+2) + b^2(3c^2 - 4c+3) + b(-6c^4 - 3c+ \\
& 5) - 1)a + c^3 - c^2 + 2c - 2b^4(c+1) - b^3(c+3) + b^2c(6c^2 + 3c+2) + b(-4c^4 + 2c^3 - 6c^2 + 4c- \\
& 1) - 1)(\bar{c})^2 - 5b - b^4c + 2b^3c + 9b^2c + bc + (2c^2(c+1)a^6 + c(2c^4 - 5c^2 - 4c - 2b(c^2 + 3c+1) - \\
& 3)a^5 + (4c(c+1)b^2 + (-6c^4 + 2c^3 + 12c^2 + 9c+1)b - 2c(c^4 + c^2 - 6c-4))a^4 - (-2c^6 + 2c^5 - \\
& 9c^4 + 7c^2 + 2b^3c + 16c + b^2(-8c^3 + 4c^2 + 10c+2) + b(2c^5 - 4c^4 - 6c^3 + 6c^2 + 24c+7) - 2)a^3 + \\
& (-4c^5 - c^4 - 10c^3 + 14c^2 + b^3(3-4c)c + 4c + b^2(4c^4 - 5c^3 - 11c^2 + 12c+15) + b(-4c^5 + 7c^4 - \\
& 15c^3 - 3c^2 + 22c+9) + 4)a^2 + (b^4 + (-2c^3 + 2c^2 + 5c-6)b^3 + 2(c^4 - 3c^3 + 7c^2 + 4c-8)b^2 + (3c^4 - \\
& 6c^3 + 13c^2 - 11c-12)b + c(3c^4 + 5c^3 - 5c^2 + 3c-6))a + c^3 + 2c^2 + b^4(c-1) - c + b^3(c^2 - 4c- \\
& 1) + b^2(2c^3 + 2c^2 - 10c+9) - b(4c^4 + c^3 - 2c^2 + 4c-6) + 2)\bar{c} - 1) + \bar{b}(-2c^2(c+1)a^6 + c(-2c^4 + \\
& 7c^2 + 6c + 2b(c^2 + 3c+1) + 1)a^5 - (4c(c+1)b^2 + (-6c^4 + 4c^3 + 15c^2 + 8c+1)b + c(-4c^4 + c^3 + \\
& 8c^2 + 12c+5))a^4 + (-2c^6 - 3c^4 + 8c^3 + 9c^2 + 2b^3c + 12c + b^2(-8c^3 + 6c^2 + 11c+2) + 2b(c^5 - \\
& 4c^4 - c^3 + 8c^2 + 9c+2) - 1)a^3 + (2c^6 + c^5 - 4c^4 + 5c^3 - 15c^2 - 5c + b^3(4c^2 - 4c-1) + b^2(-4c^4 + \\
& 10c^3 + 5c^2 - 15c-5) + b(2c^5 - 5c^4 + 15c^3 - 7c^2 - 18c-5) - 3)a^2 + (-c^5 - 2c^4 + 5c^3 + c^2 + 5c + \\
& b^3(2c^3 - 4c^2 + c+1) + b^2(3c^3 - 14c^2 + 2c+8) + b(-2c^5 + 5c^3 - 8c^2 + 8c+8) + 1)a + 2bc^4 + ((a + \\
& c+1)b^4 - ((c+2)a^2 + 2c(c+1)a - 2c)b^3 + ((c+1)a^3 + (c^3 + 4c^2 + 3c+2)a^2 + (c^3 + 4c^2 + 2c- \\
& 5)a - 4c(c+1))b^2 - (c^4 - c^3 + c^2 - c + a^3(c^3 + 5c^2 + 5c+2) + a^2(c^4 + 6c^3 - 5c-4) + a(2c^4 - \\
& c^3 - 4c^2 + 5c+2) - 2)b + c(2(c+1)a^4 + (4c^3 + 3c^2 - 3c-3)a^3 + (-5c^3 + c+4)a^2 + (3c^4 + 2c^2 - \\
& c-2)a + c^2 + 1))(\bar{c})^4 - b^3 - 2b^2c^3 - c^3 + ((-3c^2 + bc+b)a^4 - (2c^4 - 2c^3 - 5c^2 + c + b^2(c+2) + \\
& b(-2c^2 + c+1) - 1)a^3 + (3c^4 - 6c^3 + c^2 - 5c + b^3 + b^2(c^2 + 2c+2) + b(2c^3 - 6c^2 + 2c-1) + 2)a^2 + \\
& (-2c^5 + 3c^4 - 4c^3 + 5c^2 + c - b^3(3c+1) + b^2(c^3 - c^2 + 4c-2) + b(c^4 - 2c^3 + 6c-4))a + b^4 - c^3 + \\
& c^2 - 2c - b^3(c^2 + c-2) + b^2(2c^2 - c+1) + bc(c^3 - 2c^2 + 3c-5) + 1)(\bar{c})^3 - 5b^2 - b^2c^2 - bc^2 - 3c^2 + \\
& (-2c^2(c+1)a^6 + (-2c^5 + 3c^3 + 2b(c^2 + 3c+1)c + c)a^5 - (4c(c+1)b^2 + (-6c^4 + 5c^2 + 3c+2)b + \\
& c(3c^3 - 4c^2 - 2c+2))a^4 + (-2c^6 + 4c^5 + c^4 - 2c^3 - 9c^2 + 2b^3c + 5c + b^2(-8c^3 + 2c^2 + 7c+5) + \\
& b(2c^5 + c^3 - 9c^2 + 5c+3) - 2)a^3 + (-2c^6 + 3c^5 - 9c^4 + 12c^3 - 3c^2 + b(6c^4 - 8c^3 - 4c^2 + 12c- \\
& 5)c + 8c + b^3(4c^2 - 5c-4) + b^2(-4c^4 + 3c^3 + 4c^2 - 2c-6) - 4)a^2 + (b^4 + (2c^3 - 6c^2 + c+3)b^3 + \\
& (-4c^4 + 6c^3 + c^2 - 5c+6)b^2 + (2c^5 - 6c^4 + 9c^3 - 2c^2 - 8c+7)b + c(4c^4 - 6c^3 + 8c^2 - 9c-1))a + \\
& b^4c + b^3(4c-3) + b^2(-6c^2 + 2c-5) + 2(c^3 - c^2 + 2c-1) - b(c^4 - 3c^3 + 6c^2 - 8c+1))(\bar{c})^2 - 4b + \\
& 2b^3c + 6b^2c + 4bc + c + (-2c^2a^5 + c(-2c^3 + 2c^2 + c + 2b(c+1) + 3)a^4 - (2cb^2 + (-4c^3 + 2c^2 + \\
& 6c+2)b - 4c^2 + 9c-2)a^3 + (-2c^5 + 7c^4 - 12c^3 + 8c^2 - 3c + b^2(-4c^2 + 4c+2) + b(2c^4 - c^3 - \\
& 9c^2 + 9c+1) + 4)a^2 + (- (c-1)b^3 - (c^3 - 7c+5)b^2 + (3c^4 - 8c^3 + 7c^2 + 3c-8)b + c(-2c^4 + 6c^3 - \\
& 8c^2 + 7c-2))a - c^3 + b^2(1-2c)^2 + 2c^2 - b^3(c-1)c - 3c + b(c^4 - 5c^3 + 8c^2 - 9c+4) + 2)\bar{c} - 2) + \\
& (\bar{a})^4(\bar{b}(2b^4 + (-2c^2 + c + a(2-8c) + 1)b^3 + (2ca^3 + (10c^2 + c-4)a^2 + c^2(4c+1)a + 2c^3 - 2c^2 + \\
& c-2)b^2 - (2c(c+2)a^4 + c(6c^2 + 2c-5)a^3 + (2c^4 + 5c^2 + 2c+1)a^2 + c(4c^3 - c^2 + 2c-4)a - \\
& c^3 + 2c^2 + 1)b + (-3a^2 + (6c-5)a + 3c^2 - 5c+2)b^3 + ((6c+5)a^3 + (12c^2 - 2c-5)a^2 + (6c^3 - \\
& 5c^2 + c+5)a + 3c^3 - 2c^2 + 4c-3)b^2 - ((3c^2 + 7c+2)a^4 + (9c^3 + 3c^2 - 6c-1)a^3 + 3(c^4 - c^3 + \\
& c^2 + 2c+1)a^2 + (6c^4 - 2c^3 + 6c^2 - 3c-1)a + c^2 + 1)b + ac(2(c+1)a^4 + (3c^3 + 3c^2 - 3c-1)a^3 + \\
& (-3c^3 + 2c^2 + 2c+3)a^2 + (3c^4 + 2c^2 - c-1)a + c^2 + 1))(\bar{c})^2 + ac(2(c+1)a^4 + (2c^3 + 2c^2 - \\
& 5c-1)a^3 + (-2c^3 + 4c^2 + 3c+3)a^2 + (2c^4 - 3c-1)a + c^2 + c+1) + (2b^4 - (5a^2 + (18c-11)a + \\
& 7c^2 - 10c+3)b^3 + (3(4c+3)a^3 + (30c^2 - 3c-14)a^2 + (14c^3 - 8c^2 + 2c+9)a + 7c^3 - 6c^2 + 8c- \\
& 8)b^2 - ((7c^2 + 17c+4)a^4 + (21c^3 + 7c^2 - 17c-2)a^3 + (7c^4 - 5c^3 + 11c^2 + 13c+7)a^2 + (14c^4 - \\
& 5c^3 + 12c^2 - 10c-2)a - c^3 + 4c^2 + 3)b + ac(6(c+1)a^4 + (7c^3 + 7c^2 - 11c-3)a^3 + (-7c^3 + 8c^2 + \\
& 7c+9)a^2 + (7c^4 + 3c^2 - 5c-3)a + 3c^2 + c+3))\bar{c} - \bar{c}(-c(c+1)a^5 + (b(c^2 + 3c+1) - c(c^3 + c^2 - \\
& 4c-5))a^4 - (2(c+1)b^2 + (-3c^3 + c^2 + 10c+5)b + c(-3c^3 - 3c^2 + 5c+8))a^3 + (-c^5 - 2c^4 - \\
& 2c^3 + 5c^2 + 5c + b^3 + b^2(-4c^2 + 3c+7) + b(c^4 - 5c^3 - 5c^2 + 11c+8) + 2)a^2 + (2c^5 + 2c^4 - 2c^3 - \\
& 3c + 2b^3(c-1) + b^2(-2c^3 + 6c^2 + 4c-11) - b(3c^3 - 7c^2 + 6c+7) - 1)a - 2bc^4 + b^3 + b^2c^3 + c^3.
\end{aligned}$$

**Polinomios de la segunda relación** (véase 2)

Polinomio correspondiente a la entrada 1,1 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$g_{11}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = bx^2t - bxt - acx^2t + axt + acxt + cxt - ct - 1.$$

Polinomio correspondiente a la entrada 2,1 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$g_{21}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = bxt + a(-c)xt - axt + ct + a.$$

Polinomio correspondiente a la entrada 3,1 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$g_{31}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = -bxt + acxt - ct + t - ac + b.$$

Polinomio correspondiente a la entrada 1,2 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$\begin{aligned} g_{12}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = & \bar{x}(-txa^2 - c^2x^2a - btx^2a + cta + 2c^2xa + 2cxa + btxa - cxa - 2c^2 + bcx^2 + c^2x - \\ & 2bcx + \bar{c}(-(x-2)(ax-1)c^3 + (bx^2 - 2bx + x + a(-xt + t - (x-5)x) - 3)c^2 + (-txa^2 + 2xa - \\ & t(x-1)(bx+2)a + bt(x-1) + b(x-3)x + 1)c + (c(x-1)(ax-1) - (a+b(x-1))x)\bar{x}c - t((x+ \\ & 1)a^2 + b(x^2 - x - 1)a - b^2(x-1)x)) + (\bar{c})^2(-(x-3)(ax-1)c^3 + (b(x-3)x + 2a(-xt + t + \\ & x) + 1)c^2 + (c(x-1)(ax-1) - (a+b(x-1))x)\bar{x}c^2 - t((x+1)a^2 + b(x^2 - 1)a - 2b(x-1))c + \\ & bt(a+b(x-1))(x+1))(\bar{a})^2 - (ta^2 - bta - cta - c^2xa + btxa + cxa + c^2 + c(c(x-1)(ax- \\ & 1) - (a+b(x-1))x)\bar{b}(\bar{x})^2 - c + bcx + (t(c(x-1) + (a+b(x-1))x) + (-x-2)(ax-1)c^3 + \\ & (bx^2 - 2bx + x + a(-xt + t - (x-5)x) - 3)c^2 + (-txa^2 + 2xa - t(x-1)(bx+2)a + bt(x- \\ & 1) + b(x-3)x + 1)c - t((x+1)a^2 + b(x^2 - x - 1)a - b^2(x-1)x))\bar{b}\bar{x} + (\bar{c})^2(-(x-3)(ax- \\ & 1)c^3 + (b(x-3)x + 2a(-xt + t + x) + 1)c^2 + (c(x-1)(ax-1) - (a+b(x-1))x)\bar{x}c^2 - t((x+ \\ & 1)a^2 + b(x^2 - 1)a - 2b(x-1))c + bt(a+b(x-1))(x+1)) + \bar{c}((1-ax)c^3 + 2(c(x-1)(ax- \\ & 1) - (a+b(x-1))x)\bar{b}(\bar{x})^2c^2 + (at(x-1) + bx - a(x-3)x + x - 4)c^2 + (ta^2 + ((b-2)t(x- \\ & 1) + 2x)a + b(-xt + t + (x-3)x) + 1)c - t((x+1)a^2 + bx^2a + b^2(x-1)) + ((x-1)(ax- \\ & 1)c^2 + (2t(x-1) - (a+b(x-1))x)c + t(a+b(x-1))(x+1) - 2((x-3)(ax-1)c^3 - (b(x- \\ & 3)x + 2a(-xt + t + x) + 1)c^2 + t((x+1)a^2 + b(x^2 - 1)a - 2b(x-1))c - bt(a+b(x-1))(x+ \\ & 1))\bar{b}\bar{x})\bar{a} + t(-a - (b+c)(x-1) + (a(x+1) + (x-1)(xb+b+2c))\bar{c}) + (\bar{b})^2\bar{x}(-(x-3)(ax- \\ & 1)c^3 + (b(x-3)x + 2a(-xt + t + x) + 1)c^2 + (c(x-1)(ax-1) - (a+b(x-1))x)\bar{x}c^2 - t((x+ \\ & 1)a^2 + b(x^2 - 1)a - 2b(x-1))c + bt(a+b(x-1))(x+1)) + \bar{b}(-axc^3 + c^3 - atc^2 + bxc^2 + \\ & atxc^2 - c^2 + a^2tc - abtc + btc + abtxc - btxc - 2t\bar{x}c + 2tx\bar{x}c + b^2t - abt - b^2tx + btx^2\bar{x} + at\bar{x} - \\ & bt\bar{x} + atx\bar{x} + \bar{c}(-(x-3)(ax-1)c^3 + (b(x-3)x + 2a(-xt + t + x) + 1)c^2 + (c(x-1)(ax- \\ & 1) - (a+b(x-1))x)\bar{x}c^2 - t((x+1)a^2 + b(x^2 - 1)a - 2b(x-1))c + bt(a+b(x-1))(x+1))). \end{aligned}$$

Polinomio correspondiente a la entrada 2,2 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$\begin{aligned}
 g_{22}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = & axc^2 + ax^2\bar{c}c^2 - 3ax\bar{c}c^2 - x\bar{c}c^2 + 3\bar{c}c^2 - ax^2\bar{c}x^2c^2 + ax\bar{c}x^2c^2 + x\bar{c}x^2c^2 - \bar{c}x^2c^2 - c^2 - \\
 & bxc - bx^2\bar{c}c - t\bar{c}c - 2ax\bar{c}c + 3bx\bar{c}c + tx\bar{c}c - \bar{c}c + bx^2\bar{c}x^2c + t\bar{c}x^2c + ax\bar{c}x^2c - bx\bar{c}x^2c - tx\bar{c}x^2c + c + \\
 & at - bt - t + btx + btx^2\bar{c} - at\bar{c} + bt\bar{c} + t\bar{c} + atx\bar{c} - 2bt\bar{c}x - btx^2\bar{c}x - atx\bar{c}x + btx\bar{c}x + (\bar{b})^2\bar{x}((t(x-1)^2 - c(x-3)x)b^2 + ((x-3)(ax-1)c^2 - (t(a(x-1)-1)(x-1) + 2ax+1)c + t + at(x-1))b + act(-xa + a + c - cx - 1) + ((c-t)(x-1)xb^2 - (c-t)(c(x-1)(ax-1) - ax)b + act(c(x-1) + ax))\bar{x}) + \bar{b}(-cta^2 + bta + bcta + cta + bc^2xa - bctxa - bc^2 + (-(x-1)(ax-1)c^2 + (-xt+t+(a+b(x-1))x)c - t(a+b(x-1))x)(\bar{x})^2 + bc - b^2t - bt - b^2cx + b^2tx + ((x-3)(ax-1)c^2 + (-bx^2 - 2ax + 3bx + t(x-1) - 1)c + t(b(x-1)^2 + a(x-1) + 1))\bar{x} + \bar{c}((t(x-1)^2 - c(x-3)x)b^2 + ((x-3)(ax-1)c^2 - (t(a(x-1)-1)(x-1) + 2ax+1)c + t + at(x-1))b + act(-xa + a + c - cx - 1) + ((c-t)(x-1)xb^2 - (c-t)(c(x-1)(ax-1) - ax)b + act(c(x-1) + ax))\bar{x})) + (\bar{a})^2\bar{x}((t(x-1)^2 - c(x-3)x)b^2 + ((x-3)(ax-1)c^2 - (t(a(x-1)-1)(x-1) + 2ax+1)c + t + at(x-1))b + act(-xa + a + c - cx - 1) + ((c-t)(x-1)xb^2 - (c-t)(c(x-1)(ax-1) - ax)b + act(c(x-1) + ax))\bar{x})(\bar{c})^2 - (x(-xt+t+c(x-2))b^2 + (-(x-2)(ax-1)c^2 + 2axc + t(x-1)(ax-1)c + at(x^2 - 3x + 1))b + at((x-1)c^2 + (x-1)c + a(cx+x-1) + 1) - at(c(x-1) + (a+b(x-1))x)\bar{x})\bar{c} + at(-xc + c - (a+b(x-1))x) + \bar{a}((-t(x-1)^2 - c(x-3)x)b^2 + (-(x-3)(ax-1)c^2 + t(a(x-1)-1)(x-1)c + 2axc + c + t(-xa + a - 1))b + act(a(x-1) + c(x-1) + 1) - ((c-t)(x-1)xb^2 - (c-t)(c(x-1)(ax-1) - ax)b + act(c(x-1) + ax))\bar{x})(\bar{c})^2 + (cta^2 - ta^2 + txa^2 + btx^2a - bcta - 2cta + ta - bc^2xa - 2btxa + bctxa + ctxa + bc^2 + ((x-1)(ax-1)c^2 + (t(x-1) - (a+b(x-1))x)c + t(a+b(x-1))x - 2((c-t)(x-1)xb^2 - (c-t)(c(x-1)(ax-1) - ax)b + act(c(x-1) + ax))\bar{b})(\bar{x})^2 - bc + b^2t + bt + b^2cx - b^2tx + (-(x-3)(ax-1)c^2 + (bx^2 + 2ax - 3bx - (a+1)t(x-1) + 1)c - t(xa^2 + (x-1)(bx+1)a + b(x-1)^2 + 1) + 2(-t(x-1)^2 - c(x-3)x)b^2 + (-(x-3)(ax-1)c^2 + t(a(x-1)-1)(x-1)c + 2axc + c + t(-xa + a - 1))b + act(a(x-1) + c(x-1) + 1))\bar{b})\bar{x}\bar{c} - at(c(x-1) + (a+b(x-1))x)\bar{b}(\bar{x})^2 + at(a+b(x-1) - 1) + (-(x-2)(ax-1)c^2 + (-xt+t+2ax+b(x-2)x)c - t(a+b(x-1))x + (x(-xt+t+c(x-2))b^2 + (-(x-2)(ax-1)c^2 + 2axc + t(x-1)(ax-1)c + at(x^2 - 3x + 1))b + at((x-1)c^2 + (x-1)c + a(cx+x-1) + 1))\bar{b})\bar{x}).
 \end{aligned}$$

Polinomio correspondiente a la entrada 3,2 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$\begin{aligned}
 g_{32}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = & ax^2\bar{b}(\bar{x})^2c^3 - ax\bar{b}(\bar{x})^2c^3 - x\bar{b}(\bar{x})^2c^3 + \bar{b}(\bar{x})^2c^3 - axc^3 - ax^2\bar{b}\bar{x}c^3 + 3ax\bar{b}\bar{x}c^3 + \\
 & x\bar{b}\bar{x}c^3 - 3\bar{b}\bar{x}c^3 + c^3 + at(\bar{b})^2(\bar{x})^2c^2 - atx(\bar{b})^2(\bar{x})^2c^2 - bx^2\bar{b}(\bar{x})^2c^2 - ax\bar{b}(\bar{x})^2c^2 + bx\bar{b}(\bar{x})^2c^2 + \\
 & bxc^2 - at(\bar{b})^2\bar{x}c^2 + atx(\bar{b})^2\bar{x}c^2 + bx^2\bar{b}\bar{x}c^2 + 2ax\bar{b}\bar{x}c^2 - 3bx\bar{b}\bar{x}c^2 + \bar{b}\bar{x}c^2 - c^2 - a^2t(\bar{b})^2(\bar{x})^2c + \\
 & abt(\bar{b})^2(\bar{x})^2c - bt(\bar{b})^2(\bar{x})^2c - abt\bar{x}(\bar{b})^2(\bar{x})^2c + btx(\bar{b})^2(\bar{x})^2c - t\bar{b}(\bar{x})^2c + tx\bar{b}(\bar{x})^2c + \\
 & 2a^2t(\bar{b})^2\bar{x}c - at(\bar{b})^2\bar{x}c - 2abt(\bar{b})^2\bar{x}c + bt(\bar{b})^2\bar{x}c + 2abt\bar{x}(\bar{b})^2\bar{x}c - btx(\bar{b})^2\bar{x}c + t\bar{b}\bar{x}c - tx\bar{b}\bar{x}c - \\
 & b^2t(\bar{b})^2(\bar{x})^2 + abt(\bar{b})^2(\bar{x})^2 + b^2tx(\bar{b})^2(\bar{x})^2 + at\bar{b}(\bar{x})^2 - bt\bar{b}(\bar{x})^2 + btx\bar{b}(\bar{x})^2 + 2b^2t(\bar{b})^2\bar{x} - \\
 & 2abt(\bar{b})^2\bar{x} + bt(\bar{b})^2\bar{x} - 2b^2tx(\bar{b})^2\bar{x} - 2at\bar{b}\bar{x} + 2bt\bar{b}\bar{x} + t\bar{b}\bar{x} - 2bt\bar{x}\bar{b}\bar{x} + \bar{c}(-ax^2c^3 + 3axc^3 + \\
 & xc^3 - 3c^3 + bx^2c^2 + 2axc^2 - 3bxc^2 + c^2 + tc - txc - 2at + 2bt + t - 2btx + ((x-1)(ax-1)c^3 - \\
 & (a+b(x-1))xc^2 + t(x-1)c + t(a+b(x-1))\bar{x} + (b-ac)t\bar{b}(-2a+2b+c-2bx-cx+(a+(b+c)(x-1))\bar{x}+1)) + (\bar{a})^2\bar{x}(2ta^2 + bc^2x^2a - 2bta - cta - ta - 2bc^2xa - 2bcxa + 2btxa + \\
 & ctxa + 2bc^2 - b^2cx^2 - bc^2x + 2b^2cx + (b-ac)t(\bar{c})^2(-2a+2b+c-2bx-cx+(a+(b+c)(x-1))\bar{x}+1) + \bar{c}((-2t(x-1) - c(x-3)x)b^2 + ((x-3)(ax-1)c^2 + ((2a-1)t(x-1) - 2ax-1)c + t + 2at(x-2))b + a(c+1)t(2a+c(x-1)-1) + (c(x-1)xb^2 + (-(x-1)(ax-1)c^2 + \\
 & axc - at(x-1))b - at(a+c(x-1))\bar{x})) + \bar{a}(-(b-ac)t(-2a+2b+c-2bx-cx+(a+(b+c)(x-1))\bar{x}+1)(\bar{c})^2 + (-2ta^2 - bc^2x^2a + 2bta + cta + ta + 3bc^2xa + 2bcxa - 2btxa - ctxa - \\
 & 3bc^2 + b^2cx^2 + (-(x-1)(ax-1)c^3 + (a+b(x-1))xc^2 + (t-tx)c - t(a+b(x-1)) + 2(ac-b)t(a+(b+c)(x-1))\bar{b})(\bar{x})^2 + bc + bc^2x - 3b^2cx + ((x-3)(ax-1)c^3 + ((a-1)bx^2 - 2ax - \\
 & (a-2)bx + b-1)c^2 + ((a+1)t(x-1) - b(a+b(x-1))x)c + t(a^2 + (b(x-1)+2)a + 2b(x-1) - 1) + 2(b-ac)t(2a-c+2b(x-1)+cx-1)\bar{b})\bar{x}\bar{c} + (-c(x-1)xb^2 + ((x-1)(ax-1)c^2 - \\
 & axc + at(x-1))b + at(a+c(x-1))\bar{b}(\bar{x})^2 + bc(-axc + c + bx - 1) + ((x-2)(ax-1)c^3 - (2a+b(x-2))xc^2 + t(x-1)c + t(2a+2b(x-1)-1) + ((2t(x-1)+c(x-3)x)b^2 + (-(x-3)(ax-1)c^2 + 2axc + t(-2a(x-1)+x-1)c + c - t - 2at(x-2))b - a(c+1)t(2a+c(x-1)-1))\bar{b})\bar{x}).
 \end{aligned}$$

Polinomio correspondiente a la entrada 1,3 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :



$$g_{13}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \bar{c}c^2 - b\bar{a}c\bar{c} - 2t^2\bar{c}a\bar{c}c + 2t^2x\bar{c}a\bar{c}c + 2t^2\bar{c}a\bar{c}x\bar{c} - 2t^2x\bar{c}a\bar{c}x\bar{c} + c + at^2\bar{a}\bar{c} - bt^2\bar{a}\bar{c} - t^2\bar{a}\bar{c} + bt^2x\bar{a}\bar{c} + at^2\bar{c}a\bar{c} - bt^2\bar{c}a\bar{c} + bt^2x^2\bar{c}a\bar{c} + at^2x\bar{c}a\bar{c} - at^2\bar{c}a\bar{c}x + bt^2\bar{c}a\bar{c}x - bt^2x^2\bar{c}a\bar{c}x - at^2x\bar{c}a\bar{c}x - (\bar{a})^2\bar{c}((-2a+c-cx+1)t^2 - (c(x-1) + (a+b(x-1))x)\bar{x}t^2 + b(c-2t^2(x-1))) + (\bar{b})^2(\bar{x}-1)((2a+c(x-1)-1)t^2 + 2b(x-1)t^2 + (c(x-1) + (a+b(x-1))x)\bar{x}t^2 - bc) - \bar{a}(2a\bar{a}c\bar{t}^2 - 2b\bar{a}c\bar{t}^2 - \bar{c}a\bar{c}t^2 + 2bx\bar{a}c\bar{t}^2 + cx\bar{a}c\bar{t}^2 - \bar{a}c\bar{t}^2 - (a(x+1) + (x-1)(xb+b+2c))(\bar{c})^2(\bar{x}-1)t^2 + bx^2\bar{a}c\bar{x}t^2 - \bar{c}a\bar{c}x\bar{t}^2 + ax\bar{a}c\bar{x}t^2 - bx\bar{a}c\bar{x}t^2 + cx\bar{a}c\bar{x}t^2 + c + (c^2 - bc + (a-1)t^2 + bt^2(x-1))\bar{c} - bc\bar{a}\bar{c} + \bar{b}(\bar{c}(\bar{x}-1) + 1)((-2a+c-cx+1)t^2 - (c(x-1) + (a+b(x-1))x)\bar{x}t^2 + b(c-2t^2(x-1)))) + \bar{b}(-at^2 + bt^2 - bxt^2 + t^2 + bc + c - (c^2 - 2t^2(x-1)c - t^2(a+b(x-1))(x+1))\bar{c}(\bar{x}-1) - c\bar{x} + \bar{a}\bar{c}(\bar{x}-1)((-2a+c-cx+1)t^2 - (c(x-1) + (a+b(x-1))x)\bar{x}t^2 + b(c-2t^2(x-1)))).$$

Polinomio correspondiente a la entrada 2,3 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$g_{23}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = -bc\bar{c}(\bar{a})^2 - (bc(\bar{x}-1)(\bar{c})^2 + (c^2 - t^2(x-1)c + t^2(-2a+2b-2bx+1) - t^2(c(x-1) + (a+b(x-1))x)\bar{x})\bar{c} + c - bc\bar{a}\bar{c} + bc\bar{b}(\bar{c}(\bar{x}-1) + 1))\bar{a} - bc(\bar{b})^2(\bar{x}-1) + \bar{c}(-at^2 + bt^2 - bxt^2 + t^2 + c - bc\bar{a}\bar{c} - (c^2 - 2t^2(x-1)c - t^2(a+b(x-1))(x+1))\bar{c}(\bar{x}-1) - c\bar{x} + bc\bar{a}\bar{c}x) - \bar{b}(\bar{x}-1)(-b\bar{a}\bar{c}c + c + \bar{c}(c^2 + t^2c - t^2xc - 2at^2 + t^2 + b(c-2t^2(x-1)) - t^2(c(x-1) + (a+b(x-1))x)\bar{x})).$$

Polinomio correspondiente a la entrada 3,3 de la parte compacta de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$g_{33}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = -at^2 + bt^2 - bxt^2 - bx^2\bar{c}t^2 - a\bar{c}t^2 + b\bar{c}t^2 + 2c\bar{c}t^2 - ax\bar{c}t^2 - 2cx\bar{c}t^2 + bx^2\bar{c}x\bar{t}^2 + a\bar{c}x\bar{t}^2 - b\bar{c}x\bar{t}^2 - 2c\bar{c}x\bar{t}^2 + ax\bar{c}x\bar{t}^2 + 2cx\bar{c}x\bar{t}^2 + t^2 + c^2(\bar{c})^2 + c\bar{c} - bc\bar{c}a\bar{c} - c^2(\bar{c})^2\bar{x} - bc(\bar{a})^2\bar{c}\bar{x} - c\bar{c}\bar{x} + bc\bar{c}a\bar{c}x - bc(\bar{b})^2(\bar{x}-1)\bar{x} + \bar{a}((2a-c+2b(x-1)+cx-1)t^2 - bc(\bar{c})^2(\bar{x}-1) + (bx^2t^2 - ct^2 + ax^2t^2 - bxt^2 + cxt^2 - c - bc\bar{b} + bc\bar{a}\bar{c})\bar{x} - c\bar{c}(c + b\bar{b}(\bar{x}-1))\bar{x}) + \bar{b}(\bar{x}-1)((2a-c+2b(x-1)+cx-1)t^2 + ((a+b(x-1))x)t^2 + c(t^2(x-1) - 1) + bc\bar{a}\bar{c})\bar{x} - c\bar{c}(b + c\bar{x})).$$

Polinomio correspondiente a la primera entrada real de la parte abeliana de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$g_{R1}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = |1, -a, ac - b| - |(t(x(a+b(x-1)) - c(x-1)(ax-1)), t(c-x(ac+a-b)), t(c(ax-1) - bx+1))|.$$

Polinomio correspondiente a la segunda entrada real de la parte abeliana de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$g_{R2}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = ((\bar{a})^3((-a^2+a+1)c+b(a+c-1)-c^2-1) + (\bar{a})^2(\bar{b}(c^2(-a^2+a+b+1)+c((a-1)b-2)-c^3+1) + \bar{c}(\bar{c}(a^2(c+1)c-b(c+1)(a+c-1)-a(c+1)c+c^3+c)+a^2c-b(a+c-1)-ac+c^2-c+1)) + \bar{a}((\bar{b})^2(a^2(c+1)c-b(c+1)(a+c-1)-a(c+1)c+c^3+c) + \bar{b}\bar{c}(\bar{c}(b(c+1)(a+c-1)-c(a^2(c+1)-a(c+1)+c^2+1)) - a^2c^2-2a^2c+b(c+2)(a+c-1)+ac^2+2ac-c^3-c^2-1) + a^2(-c)+ab+ac+bc-b-c^2+c-1) + \bar{b}(\bar{c})^2(b(c+1)(a+c-1)-c(a^2(c+1)-a(c+1)+c^2+1)) + \bar{c}((-a^2+a+1)c+b(a+c-1)-c^2-1) + \bar{b}(\bar{c}(a^2(c+1)c-b(c+1)(a+c-1)-a(c+1)c+c^3+c) + a^2c^2+2a^2c-b(c+2)(a+c-1)-ac^2-2ac+c^3+c^2+1) - a^2c^2+abc+ac^2+bc^2-bc-c^3+c^2-2c+1) - \bar{a}(\bar{b}(-(a-1)b(c+1)+(a-2)c^2+b^2+c-1) + \bar{c}(-\bar{c}(-(a-1)b(c+1)+(a-2)c^2+b^2+c-1)+bc-c^2+c-1)) - \bar{b}(\bar{c}(-(a-1)b(c+1)+(a-2)c^2+b^2+c-1) - bc+c^2-c+1) + (\bar{a})^2(bc-c^2+c-1)^{1/2} + ((\bar{b})^2(\bar{c}+1)(-b(a^2(2c+1)+a(c-1)c+c^2+1) + ac(a^2(c+1)-ac+c^2+1)+b^2(a+c-1)) - \bar{b}(\bar{c})^2+1)(-b(a^2(2c+1)+a(c-1)c+c^2+1) + ac(a^2(c+1)-ac+c^2+1)+b^2(a+c-1)) + (\bar{a})^2((\bar{c})^2(-b(a^2(2c+1)+a(c-1)c+c^2+1) + ac(a^2(c+1)-ac+c^2+1)+b^2(a+c-1)) + \bar{b}(b(a^2(2c+1)+a(c-1)c+c^2+1) - ac(a^2(c+1)-ac+c^2+1)+b^2(-(a+c-1))) + a^2c-ab-ac-bc+b+c^2-c+1) + \bar{a}((\bar{b})^2(-b(a^2(2c+1)+a(c-1)c+c^2+1) + ac(a^2(c+1)-ac+c^2+1)+b^2(a+c-1)) - \bar{b}(\bar{c})^2(-b(a^2(2c+1)+a(c-1)c+c^2+1) + ac(a^2(c+1)-ac+c^2+1)+b^2(a+c-1)))x + \bar{c}(-b(a^2(2c+1)+a(c-1)c+c^2+1) + ac(a^2(c+1)-ac+c^2+1)+b^2(a+c-1)) + a^2c-b(a+c-1)-ac+c^2-c+1) + a^2(-c)+ab+ac+bc-b-c^2+c-1) + a^2c + \bar{b}(\bar{c}(-a(bc+b-c^2)+b^2-2bc+c^2-c+1) + bc-c^2+c-1) - \bar{a}((\bar{c})^2(-a(bc+b-c^2)+b^2-2bc+c^2-c+1) + \bar{b}(a(bc+b-c^2)-b^2+2bc-c^2+c-1))x + (bc-c^2+c-1)\bar{c} + bc-c^2+c-1) + (\bar{a})^2(bc-c^2+c-1) - ab-ac+b)^{1/2}.$$

Polinomio correspondiente a la entrada compleja de la parte nilpotente de la cuarteta en  $\mathcal{P}ab$ :

$$\begin{aligned}
 g_C(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = & 2ca^3 + 3a^3 + c^3a^2 + c^2a^2 - 6ba^2 - 2bca^2 - ca^2 + 3a^2 + c^3a + 3b^2a - 2bc^2a + c^2a - \\
 & ((2c+3)a^3 + (c^3 + c^2 - c - 2b(c+3) + 3)a^2 + (c^3 + c^2 + 3b^2 - 2b(c^2 + 2) + 2)a + 2c^2 - 4b - c + \\
 & 2)(\bar{a})^2a - 4ba + 2a + 2c^2 - ((c+1)a^4 - (b(4c+6) - (c-1)^2(c+1))a^3 + (-c^4 + c^3 + c^2 + 6b^2 - \\
 & 2b(c^3 - c^2 - 3c + 3) + 1)a^2 + (4(c+1)b^3 - 3c(c^2 + 3)b^2 + 2(c^4 - c^2 + 2c - 2)b - c(c^3 + c - 1))a - \\
 & 5b^4 + c(c^2 + c + 1) + 4b^3(c^2 + c + 3) - 3b^2c(2c^2 + 2c + 1) + 2b(c^4 + c^3 - c^2 + c - 2))(\bar{b})^2 - 4b - c - \\
 & ((c+1)a^4 + (c^3 - 4bc - 3c - 6b - 2)a^3 + (-c^3 + 3c^2 + 3c + 3b^2(c+3) - 2b(c^3 + c^2 - c + 1) - 2)a^2 + \\
 & (c^4 - 2c^2 + 2c - 4b^3 + 3b^2(c^2 + c + 3) - 2b(2c^3 + c^2 + 3c + 2) - 2)a + c^4 - 4b^3 + 2c^3 + 2c + 3b^2(c^2 + \\
 & c + 5) - 4b(c^3 + 2c^2 + 1) - 2)\bar{b} + \bar{a}((a-1)((2c+3)a^3 + (c^3 + c^2 - c - 2b(c+3) + 3)a^2 + (c^3 + c^2 + \\
 & 3b^2 - 2b(c^2 + 2) + 2)a + 2c^2 - 4b - c + 2) + ((3c+4)a^4 - (-2c^3 + c^2 + 4c + 2b(2c+5) - 4)a^3 + \\
 & (-c^4 + 3c^2 - 2c + 6b^2 - 2b(c^2 - 4c + 3) + 3)a^2 - (c^4 + c^3 + c + 3b^2(c+1) - 2b(c^3 + c^2 + c - 2) - \\
 & 2)a + c^3 + 6b^2 - 4bc^2 + c^2 - 4b + 2bc + c)\bar{b}) + 2 + (c+1)\bar{a}(\bar{a} - \bar{b} - 1)a^4 + ((c^3 + 4c^2 + 3c - 2b(3c + \\
 & 4) + 1)(\bar{a})^2 + (-c + 2)c^2 + b(4c + 6) - (c^3 + 6c^2 + 3c - 2b(4c + 5) + 1)\bar{b})\bar{a} - 2(-c^2 + bc + b)(\bar{b})^2 - \\
 & c - (-c^2 + c + 2b(c+1) + 1)\bar{b} - 1)a^3 + (-c^3 - 2c^2 + 4bc - c + (2c^4 + 2c^3 + c^2 + 2c + 3b^2(2c + 5) - \\
 & 2b(2c^3 + 3c^2 + 5c + 5) + 1)(\bar{a})^2 + (3(3c + 4)b^2 - 2(c^3 + 4c^2 + 3c + 1)b + c^2(2c^2 - 2c + 1))(\bar{b})^2 + \\
 & 6b + (c^4 - 2c^3 - 4c^2 - 3c + b^2(6c + 9) - 2b(c^3 + 2c^2 - 2c - 3) - 1)\bar{b} - \bar{a}(3(c+3)b^2 - 2(c^3 + 2c^2 - \\
 & c - 1)b + c(c^3 - 3c - 3) + (4c^4 + 2c^2 + 2c + 3b^2(5c + 9) - 2b(3c^3 + 7c^2 + 8c + 6) + 1)\bar{b}) - 1)a^2 + \\
 & ((2(\bar{a})^2 - 3\bar{b}\bar{a} + \bar{a} + (\bar{b})^2 - 2\bar{b} - 1)c^4 - (-\bar{b})^2 + \bar{b} + \bar{a}(\bar{b} - 3) + 1)c^3 + (2(\bar{a})^2 - \bar{b}\bar{a} - (\bar{b} + 1)^2)c^2 + \\
 & (-2(\bar{a})^2 + 4(\bar{b} + 1)\bar{a} - \bar{b}(2\bar{b} + 3))c + \bar{a} - \bar{b} - 4b^3(2(\bar{a})^2 - ((2c+7)\bar{b} + 1)\bar{a} + \bar{b}(c + (2c+5)\bar{b} + 3))) - \\
 & 3b^2(-2c^2 + 2c + 5)(\bar{a})^2 + (c^2 - c + (2c^3 + 5c^2 + 7c + 10)\bar{b} - 3)\bar{a} - (2c^3 + 3c^2 + 5c + 5)(\bar{b})^2 + c - \\
 & (c^3 + 2c^2 - 2)\bar{b} + 3) + 2b(c^3 + 2c^2 + 2c - (4c^3 + 3c^2 + c + 3)(\bar{a})^2 - (2c^4 + 2c^3 + c^2 + 2c + 1)(\bar{b})^2 + \\
 & (-c^4 + c^3 + 2c^2 + 5c + 4)\bar{b} + \bar{a}(-2c^2 - 5c + (2c^4 + 6c^3 + 4c^2 + 3c + 4)\bar{b} - 4) + 3) - 1)a + 5b^4\bar{b}(-2\bar{a} + \\
 & 2\bar{b} + 1) - 4b^3((2c^2 + 2c + 5)(\bar{b})^2 + c(c+1)\bar{b} - \bar{a}((2c^2 + 2c + 5)\bar{b} - 2) - 1) + 2b(2c^3 + c^2 - 2(c^3 + \\
 & c - 1)(\bar{b})^2c + (-c^4 + 5c^3 + 2c^2 + 3c + 3)\bar{b} + \bar{a}(-4c^3 - 3c^2 + 2(c^3 + c - 1)\bar{b}c - c - 3) + 1) - 3b^2(c^2 + \\
 & c - (4c^3 + 3c^2 + c + 3)(\bar{b})^2 + (-2c^3 + c^2 + 2c + 4)\bar{b} + \bar{a}(-2c^2 - 2c + (4c^3 + 3c^2 + c + 3)\bar{b} - 5) + 2) + \\
 & c((-\bar{b})^2 - 3\bar{b} + \bar{a}(\bar{b} + 2) - 1)c^3 + c^2 + (2\bar{a} - 2\bar{b} - 1)c - (\bar{a} - \bar{b} - 1)(\bar{b} + 2)) - (c+1)\bar{a}a^5 - ((c^3 + \\
 & c^2 - c - b(4c + 5) + 1)\bar{a} + (c+1)(2b\bar{b} + 1))a^4 - ((c^4 - c^3 + 2c^2 + b^2(5c + 9) + b(-3c^3 - 3c^2 + c - \\
 & 5) + 1)\bar{a} + (c^3 + c^2 - c - b(3c + 4) + 1)(2b\bar{b} + 1))a^3 + (((2c+7)b^3 - (2c^3 + 4c^2 + c + 8)b^2 + (c^4 + \\
 & 2c^3 + 4c^2 + 4)b - c^3 + 2c^2 + c)\bar{a} - (c^4 - c^3 + 2c^2 + 3b^2(c+2) - b(2c^3 + 3c^2 + 4) + 1)(2b\bar{b} + 1))a^2 + \\
 & (((c+4)b^3 - (c^3 + 3c^2 + 2c + 5)b^2 + (c^4 + 2c^3 + 2c^2 + 3)b - c^3 + 2c^2 + c)(2b\bar{b} + 1) - (2b^4 - (2c^2 + \\
 & c + 4)b^3 + (3c^3 + 2c^2 + 5)b^2 + (-c^4 + c^3 - 2c^2 + 3c - 2)b + c(-c^3 + c^2 + c + 2))\bar{a})a + c(c^3 - c^2 - c - \\
 & 2) - 2b^5\bar{b} + b^4(2(c^2 + c + 2)\bar{b} - 1) + b(c^4 - c^3 + 3c^2 + (c^2 + c + 1)\bar{a}c + 2(c^3 - c^2 - c - 2)\bar{b}c - 3c + 2) + \\
 & b^3(c^2 + c + 2\bar{a} - 2(2c^3 + c^2 + 3)\bar{b} + 2) + b^2(-2c^3 - c^2 + (-2c^2 + c - 2)\bar{a} + 2(c^4 - c^3 + 3c^2 - 3c + \\
 & 2)\bar{b} - 3) - (b+1)(c+1)a^4 + ((2c+3)b^2 + (-c^3 + 3c + 2)b - (c-1)^2(c+1))a^3 - (-c^4 + c^3 + c^2 + \\
 & b^3(c+3) - b(c^3 - 3c^2 - 3c + 2) - b^2(c^3 + c^2 - c + 1) + 1)a^2 + (b^4 - (c^2 + c + 3)b^3 + (2c^3 + c^2 + 3c + \\
 & 2)b^2 - (c^4 - 2c^2 + 2c - 2)b + c(c^3 + c - 1))a + b^4 - c(c^2 + c + 1) - b^3(c^2 + c + 5) + 2b^2(c^3 + 2c^2 + 1) - \\
 & b(c^4 + 2c^3 + 2c - 2) - ((c+1)a^5 - (b(3c+4) - (c-1)^2(c+1))a^4 + (-c^4 + c^3 + c^2 + b^2(2c+5) + \\
 & b(-2c^3 + c^2 + 4c - 4) + 1)a^3 + (-2b^3 + (c^2 - 4c + 3)b^2 + (c^4 - 3c^2 + 2c - 3)b - c(c^3 + c - 1))a^2 + \\
 & ((c+1)b^3 - (c^3 + c^2 + c - 2)b^2 + (c^4 + c^3 + c - 2)b + c(c^2 + c + 1))a - b(2b^2 + (-2c^2 + c - 2)b + \\
 & c(c^2 + c + 1))\bar{a} - 2b((c+1)a^4 - (b(2c+3) - (c-1)^2(c+1))a^3 + (-c^4 + c^3 + c^2 + 2b^2 + b(-c^3 + \\
 & c^2 + 3c - 3) + 1)a^2 + ((c+1)b^3 - c(c^2 + 3)b^2 + (c^4 - c^2 + 2c - 2)b - c(c^3 + c - 1))a - b^4 + c(c^2 + c + \\
 & 1) + b^3(c^2 + c + 3) - b^2c(2c^2 + 2c + 1) + b(c^4 + c^3 - c^2 + c - 2))\bar{b} + (-2\bar{a} + 4\bar{b} + 1)b^5 + (-c(c+1) + \\
 & (2c^2 + 2c + 5)\bar{a} - 2(2c^2 + 2c + 5)\bar{b})b^4 - (-2c^3 + c^2 + 2c + (4c^3 + 3c^2 + c + 3)\bar{a} - 2(4c^3 + 3c^2 + c + \\
 & 3)\bar{b} + 4)b^3 + (-c^4 + 5c^3 + 2c^2 + 2(c^3 + c - 1)\bar{a}c - 4(c^3 + c - 1)\bar{b}c + 3c + 3)b^2 + c((\bar{a} - 2\bar{b} - 3)c^3 - \\
 & 2c - \bar{a} + 2\bar{b} + 3)b - c^4 + c - a^4(-2c^2 + bc + b)\bar{a} + a((-c + (2c+7)\bar{a} - 2(2c+5)\bar{b} - 3)b^4 + (c^3 + 2c^2 - \\
 & (2c^3 + 5c^2 + 7c + 10)\bar{a} + 2(2c^3 + 3c^2 + 5c + 5)\bar{b} - 2)b^3 + (-c^4 + c^3 + 2c^2 + 5c + (2c^4 + 6c^3 + 4c^2 + \\
 & 3c + 4)\bar{a} - 2(2c^4 + 2c^3 + c^2 + 2c + 1)\bar{b} + 4)b^2 - (2c^4 + c^3 + 2c^2 + (3c^3 + c^2 + c - 4)\bar{a}c - 2(c^3 + c^2 - \\
 & c - 2)\bar{b}c + 3c + 1)b + c(-\bar{a}c^3 + c^3 + c^2 - c + \bar{a} - 2)) + a^3(((4c+5)\bar{a} - (c+1)(2\bar{b} + 1))b^2 - (\bar{a}c^3 + \\
 & (6\bar{a} - 4\bar{b} - 1)c^2 + 3\bar{a}c + c + \bar{a} + 1)b + c^2((2c^2 - 2c + 1)\bar{a} + 2)) - a^2((-2c + (5c + 9)\bar{a} - 2(3c + \\
 & 4)\bar{b} - 3)b^3 + (c^3 + 2c^2 - 2c - (3c^3 + 7c^2 + 8c + 6)\bar{a} + 2(c^3 + 4c^2 + 3c + 1)\bar{b} - 3)b^2 + ((4\bar{a} - 4\bar{b} - \\
 & 1)c^4 + (4\bar{b} + 2)c^3 + 2(\bar{a} - \bar{b} + 2)c^2 + (2\bar{a} + 3)c + \bar{a} + 1)b - c(c(2c^2 - 2c + 1) + (c^3 + c^2 - c - 2)\bar{a})).
 \end{aligned}$$





# Bibliografía

- [1] Akiyoshi H.; Ohshika K.; Parker J.; Sakuma M.; Yoshida H.: *Classification of non-free Kleinian groups generated by two parabolic transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 374, No. 3, pp. 1765-1814, 2021.
- [2] Cano A. and Estrada F.: *Complete hyperbolic structures in the complement of the Borromean rings*, Abstraction & Application (UADY) 28, pp. 16-26, 2020.
- [3] Cano A.; Liu B.; López M. M.: *The limit set for discrete complex hyperbolic groups*, Indiana Univ. Math. J. 66.3, pp. 927-948, 2017.
- [4] Cano A. and Loeza L.: *Two dimensional Veronese groups with an invariant ball*, International Journal of Mathematics Vol 28 No. 10, 2017, pp. 104-120.
- [5] Cano A.; Navarrete J. P.; Seade J.: *Complex Kleinian Groups*, Birkhäuser, Progress in Mathematics, Vol. 303, 2013.
- [6] Chen S. S.; Greenberg L.: *Hyperbolic spaces. Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers)*, Academic Press, New York, pp. 4987, 1974.
- [7] Decker, W.; Greuel, G.-M.; Pfister, G.; Schönemann, H.: SINGULAR 4-2-1 — A computer algebra system for polynomial computations. <http://www.singular.uni-kl.de> (2021).
- [8] De la Harpe P.: *Topics in Geometric Group*, Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, 2000.
- [9] Eisermann M.: *Quandle coverings and their Galois correspondence*, Fundamenta Mathematicae 225, pp. 103-167, 2014.
- [10] Falbel E.: *A spherical CR structure on the complement of the figure eight knot with discrete holonomy*, J. Differential Geom. 79, pp. 69-110, 2008.
- [11] Falbel E.; Guilloux A.; Koseleff P.-V.; Rouillier F.; Thistlethwaite M.: *Character varieties for  $SL(3, \mathbb{C})$ : the figure eight knot*, In: Exp. Math. 25, No. 2, pp. 219-235, 2016.
- [12] Falbel E.; Koseleff P.-V.; Rouillier F.: *Representations of fundamental groups of 3-manifolds into  $PGL(3, \mathbb{C})$ : exact computations in low complexity*, In: Geom. Dedicata 177, No. 1, pp. 229-255, 2015.
- [13] Falbel E. and Deraux M.: *Complex hyperbolic geometry of the figure eight knot*, In: Geom. Topol. 19, No. 1, pp. 237-293, 2015.
- [14] Falbel E. and Jieyan W.: *Branched spherical CR structures on the complement of the figure-eight knot*, In: Michigan Math. J. 63, No. 3, pp. 635-667, 2014.
- [15] Fan H.-Y.; Zhang L.; Chu E.K.-w.; Wei Y.: *Q-less QR decomposition in inner product spaces*, Linear Algebra and its Applications 491, pp. 292-316, 2015.

- [16] Friedberg S. H.; Insel A.; Spence L.: *Linear Algebra*, Pearson Education, Inc. 2003.
- [17] Goldfeld D.: *Automorphic Forms and L-Functions for the Group  $GL(n, R)$* , Cambridge University Press The Edinburgh Building, Cambridge, 2006.
- [18] Goldman W. M.: *Complex Hyperbolic Geometry*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999.
- [19] Helgason S.: *Differential Geometry and Simetric Spaces*, Academic Press, New York, 1962.
- [20] Hubbard J.: *Teichmüller Theory and Applications to Geometry, Topology, and Dynamics. Volume 3. Manifolds that Fiber over the Circle*, Matrix Editions Ithaca, New York, 2016.
- [21] Inoue A. and Kabaya Y.: *Quandle homology and complex volume*, Geometriae Dedicata, Volume 171, Issue 1, pp 265-292, August 2014.
- [22] Ipanaqué R. and Velesmoro R.: *Breve Manual de Mathematica*, Grupo de Investigación de la Universidad de Málaga (eumed.net), España, 2005.
- [23] Jørgensen T.: *On discrete groups of Möbius transformations*. American Journal of Mathematics, 98 (3), 739-749, 1976.
- [24] D. Joyce.: *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 23, Issue 1, pp. 37-65, January 1982.
- [25] Kapovich M.: *Kleinian groups in higher dimensions*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, Vol. 265, 485–562, 2007.
- [26] Keen L. and Series C.: *The Riley slice of Schottky space*, Proc. London Math. Soc. 69, pp. 72-90, 1994.
- [27] Knapp A. W.: *Lie Groups Beyond and Introduction*, Birkhäuser, Progress in Mathematics, Second Edition, 2002.
- [28] Komori Y. and Series C.: *The Riley slice revisited*, The Epstein birthday schrift, Geom. Topol. Monogr., 1, Geom. Topol. Publ., Coventry, pp. 303-316, 1998.
- [29] Kosniowski C.: *Topología Algebraica*, Editorial Reverté, 1989.
- [30] Kulkarni R. S.: *Groups with domains of discontinuity*, Math. Ann. 237, no. 3, pp. 253-272, 1978.
- [31] Manturov V.: *Knot Theory*, CRC Press, 2004.
- [32] Montesinos J.M.; Hilden M.; Lozano M. T.: *Knots that are universal*, Topology. An International Journal of Mathematics, 24 (4), pp. 49-504, ISSN 0040-9383, 1985.
- [33] Mumford D.; Series C.; Wright D.: *Indras Pearls. The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, First Edition, 2002.
- [34] Navarrete J. P.: *On the limit set of discrete subgroups of  $PU(2, 1)$* , Geom. Dedicata 122, pp. 1-13, 2006.
- [35] Nosaka T.: *Quandles and Topological Pairs: Symmetry, Knots, and Cohomology*, Springer-Briefs in Mathematics, 2017.
- [36] Parker J. and Will P.: *A complex hyperbolic Riley slice*, Geom. Topol. 21, No. 6, pp. 3391-3451, 2017.
- [37] Riley R.: *A personal account of the discovery of hyperbolic structures on some knot complements*, Expo. Math. 31, 104-115, 2013.

- 
- [38] Riley R.: *A quadratic parabolic group*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 77, pp. 281-288, 1975.
- [39] Riley R.: *Homomorphisms of knot groups on finite groups*, Math. Comp., Vol. 25, pp. 603-619, 1971.
- [40] Riley R.: *Parabolic representations of knot groups. I*, Proc. London Math. Soc. 24, pp. 217-242, 1972.
- [41] Rolfsen D.: *Knots and Links*, AMS Chelsea Publishing Volume: 346; 1976.
- [42] Penrose R.: *El Camino a la Realidad*, Debate, Primera Edición, 2006.
- [43] Sawyer P.: *Computing the Iwasawa decomposition of the classical Lie groups of noncompact type using the QR decomposition*, Linear Algebra and its Applications, Vol. 493, pp. 573-579, 2016.
- [44] Sturmfels B.: *Solving Systems of Polynomial Equations*, Department of Mathematics, University of California at Berkeley, Berkeley, 2002.
- [45] Sympy Development Team.: *SymPy Documentation. Release 0.7.2*, January 21 2013.
- [46] Thurston W. P. and Levy S.: *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press. Bulletin, New Jersey 1997.
- [47] Ucan-Puc A.: *Four classical Kleinian group problems in the complex setting*, Ph. D. Thesis UNAM (2018).
- [48] Yamanoshita T.: *On the dimension of homogeneous spaces*, Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 6, No. 2, September, pp. 151-159, 1954.