BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"S-CONEXIDAD "

TESIS

QUÉ PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA

Genaro Luna Carreto

DIRECTOR DE TESIS

Raúl Escobedo Conde

Puebla, Pue. Agosto 2003

Agradecimientos

Quiero aprovechar este espacio, para dar las gracias a todas las personas que, de una u otra manera me han ayudado. En especial a Nadia, mi eterna compañera; a Francisco (mi hijo), a mis papás, etc., y claro, no podía faltar mi asesor, el Doctor Raúl Escobedo Conde.

Introducción

Este trabajo encuadra en la Topología, específicamente, en la Teoría de continuos. Presenta un estudio sobre la propiedad topológica denominada s-conexidad.

El concepto de s-conexidad empezó a gestarse a mediados del siglo pasado, con el matemático R. E. Basye. En 1935, publicó [B], artículo que aborda el estudio de los espacios simplemente conexos, en base a los cuales, se definen los espacios s-conexos. M. M. Marsh dio a conocer dicho concepto en [M].

Para realizar el análisis sobre la s-conexidad, la tesis de divide en tres capítulos, en los cuales se agrupan los resultados básicos que se tienen sobre los espacios s-conexos y se desarrollan, dentro de nuestras posibilidades, algunas propiedades de los mismos.

En el Capítulo 1, se enlista una serie de resultados generales necesarios para el desarrollo del trabajo.

En el Capítulo 2, se presenta el concepto de s-conexidad (Definición 2.1.2) y se trabaja sobre los elementos de la definición, a saber, los términos cortar y cortar débilmente.

En este mismo capítulo, se demuestra que la s-conexidad es un invariante topológico, pero no se preserva bajo funciones continuas. También, se hace ver que a través de las funciones monótonas, cerradas y sobreyectivas la s-conexidad sí se preserva. Además, se demuestran algunos resultados sobre uniones, intersecciones y productos de espacios s-conexos.

En of Capítulo 3, se estudia la relación entre s-conexidad y unicoherencia. Se presenta un Teorema, en cuya demostración, se detalla que para los continuos localmente conexos, la s-conexidad la unicoherencia coinciden. Al final de este capítulo, se trata la relación entre la unicoherencia hereditaria y la s-conexidad, en continuos localmente conexos.

La tesis aporta principalmente:

(a) La equivalencia entre cortar y cortar débilmente en espacios conexos, localmente conexos y normales (Teorema 2.1.1). Esta equivalencia es mencionada en el articulo [M], sólo para el caso de espacios métricos conexos y localmente conexos.

(b) Un Teorema en el cual se afirma, que La unión finita de continuos s-conexos con un punto en común, es s-conexa (Teorema 2.2.1).

(c) Un ejemplo en donde se demuestra que el teorema del inciso (b), no es verdadero en el caso numerable (Ejemplo 2.2.1).

(d) Si agregamos que la unión numerable de continuos s-conexos con un punto es común es un continuo, la unión resulta s-conexa (Teorema 2.2.2).

(e) Una demostración de que la intersección anidada de continuos s-conexos es s-conexa (Corolario 2.2.2). Este resultado apareció originalmente en [M].

(f) Una demostración de que la s-conexidad se preserva bajo funciones monótonas, cerradas y sobreyectivas (Teorema 2.3.2). Este resultado es mencionado en [M]. Como una aplicación, se obtiene que si el producto de espacios compactos y Hausdorff es s-conexo, entonces cada espacio factor es s-conexo.

(g) Los detalles de la equivalencia entre unicoherencia y s-conexidad, en continuos localmente conexos (Teorema 3.2.3). Este teorema está probado originalmente en [M]. Como una consecuencia, se prueba que el producto numerable de continuos s-conexos y localmente conexos es un continuo s-conexo.

(h) Presentamos todos los detalles de un ejmplo que prueba que el producto de continuos unicohrentes, no es unicoherente, el cual apareció por primera vez en [GI]

(i) Una demostración de que si un espacio es s-conexo, normal y localmente conexo, entonces el espacio es unicoherente (Corolario 3.2.1). En [M], se establece que en espacios métricos, la s-conexidad implica unicoherencia.

Genaro Luna Carreto
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
B. Universidad Autónoma de Puebla
Verano de 2003

Contenido

Introducción III

1. Generalidades **3**
1.1. Espacios Topológicos 3
1.2. Componentes y cuasi-componentes 9
1.3. Espacios Localmente conexos 15

2. s-conexidad **21**
2.1. Concepto de s-conexidad 21
2.2. Algunas operaciones en espacios s-conexos 25
2.3. Funciones en espacios s-conexos 36

3. Unicoherencia y s-conexidad **41**
3.1. Concepto de unicoherencia 41
3.2. Relación entre unicoherencia y s-conexidad 48

Bibliografía **61**

S-CONEXIDAD

Genaro Luna Carreto

Parte 1

Generalidades

En este capítulo aparecen las notaciones, resultados y definiciones que nos van a ser útiles en el dearrollo de la tesis

1.1. Espacios Topológicos

Si X es un conjunto,

$$A \subseteq B \text{ y } A \subset B$$

denotan que A es un subconjunto de B y A es un subconjunto propio de B, respectivmente. $\mathcal{P}(X)$, por otra parte, denota a la familia de los subconjuntos de X.

Por sencillez, a la familia de todos los cerrados de un espacio topológico (X, τ), la vamos a denotar por 2^X.

Definición 1.1.1. Si $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ es una función entre espacios topológicos decimos que:

(a) f es abierta, si $f(U) \in \sigma$, para todo $U \in \tau$

(b) f es cerrada, si $f(C) \in 2^Y$, para todo $C \in 2^X$.

Teorema 1.1.1. Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ una función estre espacios topológicos. Son equivalentes:

(a) f es cerrada

(b) Para cada $U \in \tau$, se tiene que

$$\{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq U\} \in \sigma$$

Demostración. En primer lugar, demostraremos que si $C \in \mathcal{P}(X)$, entonces

$$f(C) = Y \setminus \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq X \setminus C\}$$

Primero tomemos $y \in f(C)$. Existe un elemento $c \in C$ tal que $y = f(c)$, por lo tanto $c \in f^{-1}(y)$. Esto indica que el conjunto $f^{-1}(y)$, no está contendido en $X \setminus C$. Así

$$y \in Y \setminus \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq X \setminus C\}$$

La otra contensiónse demuestra de manera similar.

Ahora la demostración del Teorema:

(a) $\Rightarrow$ (b): Si $U \in \tau$ entonces $f(X \setminus U) \in 2^Y$. Además, por lo anterior

$$f(X \setminus U) = Y \setminus \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq U\}$$

por lo que

$$\{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq U\} \in \sigma.$$

(b) $\Rightarrow$ (a): Sea $C \in 2^X$. Sabemos que

$$f(C) = Y \setminus \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq X \setminus C\}$$

Por hipótesis

$$\{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq X \setminus C\} \in \sigma,$$

luego, $f(C) \in 2^Y$.

□

También, por sencillez, en el caso de un espacio topológico (X, τ), adoptamos la notación siguiente:

(a) $\mathcal{U}_X(x) = \{U \in \tau : x \in U\}$

(b) $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo }\}$

Si no hay peligro de confusión, escribiremos $\mathcal{U}(x)$ en lugar de $\mathcal{U}_X(x)$.

Definición 1.1.2. Sea (X, τ) un espacio topológico conexo y $C \in \mathcal{P}(X)$. Se dice que C separa X, si $X \setminus C$ no es un conjunto conexo.

Definición 1.1.3. Sea (X, τ) un espacio topológico conexo y $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Se dice que C separa A y B en X, si existen conjuntos P y Q abiertos en $X \setminus C$, no vacíos y ajenos, tales que

$$X \setminus C = P \cup Q \text{ y } A \subseteq P,\ B \subseteq Q$$

Definición 1.1.4. En un espacio (X, τ), se dice que

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

es una cadena simple, en caso de que:

$$A_i \cap A_j \neq \emptyset \text{ si y sólo si } |i - j| \leq 1$$

La cadena simple conecta a y b si y sólo si $a \in A_1$ y $b \in A_n$.

Teorema 1.1.2. Si a y b son dos puntos en el espacio topológico conexo (X, τ) y $\mathcal{C}$ es una cubierta de X, entonces existe una cadena simple $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ que conecta a y b.

Demostración. Sea

$$D = \{x \in X : \text{existe cadena simple en } \mathcal{C} \text{ que conecta a y } b\}$$

Mostremos que:

(a) D es abierto.
Si $x \in D$, entonces existe una cadena simple

$$\{U_1, \ldots, U_n\} \subseteq \mathcal{C}$$

que conecta a y x. Digamos que $x \in U_n$. Si

$$y \in U_n \setminus U_{n-1}$$

entonces $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es una cadena simple que conecta a e y. Por lo tanto $y \in D$. Si

$$y \in U_{n-1} \cap U_n$$

entonces $\{U_1, \ldots, U_{n-1}\}$ es una cadena simple que conecta a e y, con lo cual $y \in D$. En cualquier caso $U_n \subseteq D$

(b) D es cerrado.

Equivalentemente, probemos que $X \setminus D$ es abierto. Sea $y \in X \setminus D$. Debido a que $\mathcal{C}$ es una cubierta de X, existe $U \in \mathcal{C}$ tal que $y \in U$. Supongamos que

$$U \cap D \neq \emptyset$$

y sea $x \in U \cap D$. Existe una cadena simple $\{U_1, \ldots, U_n\}$ que conecta a y x. Si r es el entero más pequeño en $\{1, \ldots, n\}$ tal que

$$U_r \cap U \neq \emptyset,$$

podemos formar la cadena simple

$$\{U_1, \ldots, U_r, U\} \subseteq \mathcal{C}$$

que une a con y, lo cual es absurdo. Así, $U \cap D = \emptyset$. De manera que

$$y \in U \subseteq X \setminus D,$$

por ende $X \setminus D$ es abierto.

Finalmente, como X es conexo y $D \neq \emptyset$, entonces $D = X$.

□

En la prueba del teorema siguiente se usa el Lema de Zorn. Por esto lo incluimos a continuación. Conviene recordar que una cadena en un conjunto parcialemtne ordenado, es un subconjunto, en el cual, cualesquiera dos elementos son comparables con el orden parcial dado. Por otra parte, un elemento minimal en un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$, es un elemento $m \in X$ tal que si $x \in X$ y $x \leq m$, entonces $x = m$.

Lema 1.1.1 (De Zorn)**.** Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y cada cadena en X tiene una cota inferior en X, entonces X contiene un elemento minimal.

Papara más detalles, revise [V, pág. 7].

Teorema 1.1.3. Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff, compacto y conexo. Si $A, B \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$, entonces existe un elemento minimal $M \in C(X)$, con respecto a la inclusión de conjuntos, tal que

$$M \cap A \neq \emptyset \neq M \cap B$$

Demostración. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{F} = \{C \in C(X) : C \cap A \neq \emptyset \neq C \cap B\}$$

$\mathcal{F}$ no es vacío ($X \in \mathcal{F}$) y es parcialemte ordenado por la inclusión de conjuntos. Ahora sea

$$\mathcal{C} = \{C_\alpha \in \mathcal{F} : \alpha \in \Delta\}$$

una cadena en $\mathcal{F}$. Denotemos

$$C = \bigcap \mathcal{C}$$

Demostremos que C es una cota inferior de $\mathcal{C}$. Directamente se tiene que $C \in 2^X$. Utilizando el hecho de que cualesquiera dos elementos en $\mathcal{C}$ son comparables, para $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Delta$ se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_{\alpha_i} = C_{\alpha_k}, \text{ donde } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Entonces

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} C_{\alpha_i}\right) \cap A = C_{\alpha_k} \cap A \neq \emptyset.$$

Así, la colección

$$\{C_\alpha \cap A : \alpha \in \Delta\}$$

tiene la propiedad de la intersección infinita. Por la compacidad de X, se tiene que

$$\emptyset \neq \bigcap_{\alpha \in \Delta} C_\alpha \cap A = C \cap A.$$

De igual forma $C \cap B \neq \emptyset$.

Ahora vamos a probar que C es conexo. Supongamos que existen conjuntos ajenos $F_1, F_2 \in 2^X$ tales que

$$C = F_1 \cup F_2.$$

Como X es compacto y Hausdorff, existen conjuntos ajenos $V, U \in \tau$ tales que $F_1 \subseteq V$ y $F_2 \subseteq U$. Si

$$C_\alpha \cap (X \setminus (V \cup U)) \neq \emptyset$$

para cada $\alpha \in \Delta$, entonces la colección

$$\{C_\alpha \cap (X \setminus (V \cup U)) : \alpha \in \Delta\}$$

tiene la propiedad de la intersección finita y, como X es compacto

$$\bigcap_{\alpha \in \Delta} C_\alpha \cap (X \setminus (V \cup U)) = C \cap (X \setminus (V \cup U)) \neq \emptyset,$$

lo cual es un contradicción. En consecuencia, existe $\alpha \in \Delta$ tal que $C_\alpha \subseteq V \cup U$, luego

$$C_\alpha \subseteq V \text{ o } C_\alpha \subseteq U,$$

de donde

$$C \subseteq V \text{ o } C \subseteq U.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $C \subseteq V$. Así,

$$C \subseteq F_1$$

y por lo tanto, $F_2 = \emptyset$. Esto último implica que $C \in C(X)$, de donde, $C \in \mathcal{F}$. Es obvio que

$$C \subseteq C_\alpha, \text{ para cada } \alpha \in \Delta.$$

De manera que cada cadena en $\mathcal{F}$ tiene una cota inferior en $\mathcal{F}$. Luego, por el Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ tiene un elemento minimal M. Esto demuestra el teorema. □

1.2. Componentes y cuasi-componentes

Definición 1.2.1. Suponga que (X, τ) es un espacio topológico y que $A \in \mathcal{P}(X)$. Se dice que A es una componente de X, si:

(i) A es un conjunto conexo y

(ii) si B es un conjunto conexo tal que $A \subseteq B$, entonces $B = A$.

Cada punto x en un espacio topológico, está contenido en sólo una componente, que es llamada la componente de x.

En el siguiente teorema, se usa la noción de conjuntos separados. Para esto, vamos a recordarla: los conjuntos A y B, en un espacio topológico, se dice que son seprados si

$$\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}.$$

Teorema 1.2.1. Sea (X, τ) un espacio topológico conexo. Si C es un conjunto conexo y

$$X \setminus C = M \cup N,$$

donde M y N son conjuntos separados, entonces $C \cup M$ y $C \cup N$ son conexos.

Demostración. Supongamos que

$$C \cup M = A \cup B,$$

donde A y B son separados. Vamos a probar que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. Por hipótesis, C es un conjunto conexo, en consecuencia

$$C \subseteq A \text{ o } C \subseteq B.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $C \subseteq B$. De manera que C no tiene puntos en común con A, es decir,

$$C \cap A = \emptyset,$$

o sea que $A \subseteq M$. Los conjuntos A y $B \cup N$ son separados. Efectivamente, nótese que

$$\overline{A} \cap N \subseteq \overline{M} \cap N = \emptyset.$$

Luego, se tiene que

$$\overline{A} \cap (B \cup N) = \overline{A} \cap B \ \cup \ \overline{A} \cap N = \emptyset.$$

Además,

$$A \cap \overline{N} \subseteq M \cap \overline{N} = \emptyset,$$

por lo tanto

$$A \cap \overline{B \cup N} = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{N}) = \emptyset.$$

Por otra parte, observe que

$$X = C \cup M \cup N = A \cup (B \cup N).$$

Entonces $A = \emptyset$ o $B \cup N = \emptyset$, pues X es un conjunto conexo. En cualquier caso, $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. □

Teorema 1.2.2. Sea (X, τ) un espacio topológico conexo. Si C es un conjunto conexo y L es una componente de $X \setminus C$, entonces $X \setminus L$ es conexo.

Demostración. Supongamos que existen conjuntos separados A y B, tales que

$$X \setminus L = A \cup B.$$

Como C es un conjunto conexo y $C \subseteq X \setminus L$, entonces

$$C \subseteq A \text{ o } C \subseteq B.$$

Digamos que $C \subseteq A$. Es obvio entonces que $B \subseteq X \setminus C$. Por el teorema 1.2.1, $L \cup B$ es conexo y

$$L \cup B \subseteq X \setminus C.$$

Como L es una componente, entonces $B \subseteq L$. Luego, $B = \emptyset$. Así, $X \setminus L$ es conexo. □

Existen otros subconjuntos de un espacio (X, τ), que tienen mucha relación con las componentes: las cuasi-componentes.

Definición 1.2.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. La cuasi-componente de $x \in X$, es el siguiente conjunto

$$\bigcap \{L \in \mathcal{P}(X) : x \in L \text{ y } L \in 2^X \cap \tau\}$$

Al igual que las componentes, las cuasi-componentes, son conjuntos cerrados; cada punto de X está en una sola cuasi-componente y cuasi-componentes de puntos diferentes coinciden o son ajenas.

Lema 1.2.1. Suponga que (X, τ) es un espacio topológico compacto. Si Q es la cuasi-componente de un punto x y

$$Q \subseteq U,$$

donde $U \in \tau$, entonces existe $F \in 2^X \cap \tau$ tal que

$$Q \subseteq F \subseteq U.$$

Demostración. Como $Q \subseteq U$, entonces

$$X \setminus U \subseteq X \setminus Q = \bigcup \{X \setminus L \in \mathcal{P}(X) : x \in L \text{ y } L \in 2^X \cap \tau\}.$$

Tenemos una cubierta abierta para $X \setminus U$. Puesto que este último conjunto es compacto, existen $L_1, L_2, \ldots, L_n$ elementos de $2^X \cap \tau$ tales que $x \in L_i$ y

$$X \setminus U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus L_i).$$

Así pues

$$Q \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} L_i \subseteq U.$$

Para finalizar, sea $F = \bigcap_{i=1}^{n} L_i$. Es claro que F satisface lo requerido. □

Teorema 1.2.3. Sea (X, τ) un espacio topológico. Si C es la componente de x y Q es la cuasi-componente de x, entonces:

(a) $C \subseteq Q$.

(b) $C = Q$, si X es compacto y de Hausdorff.

Demostración. (a) Tomemos $y \notin Q$ y mostremos que $y \notin C$. Existe

$$L \in 2^X \cap \tau \text{ tal que } x \in L, \text{ pero } y \notin L.$$

Si $y \in C$, como

$$C = (L \cap C) \cup (X \setminus L) \cap C$$

y C es un conjunto conexo, entonces $C \cap L = \emptyset$. Es decir

$$C \subseteq X \setminus L,$$

o sea que $x \notin L$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $y \notin C$.

(b) Bastará con probar que Q es un conjunto conexo. Para esto, supongamos que existen conjuntos ajenos $F_1, F_2 \in 2^Q$ que satisfacen

$$Q = F_1 \cup F_2$$

En razón de que X es compacto y Hausdorff, existen conjuntos ajenos $U, V \in \tau$ tales que

$$F_1 \subseteq U \text{ y } F_2 \subseteq V.$$

Por consiguiente

$$Q \subseteq U \cup V.$$

Del lema 1.2.1, existe $F \in 2^X \cap \tau$ tal que

$$Q \subseteq F \subseteq U \cup V.$$

Así, $U \cap F \in 2^X \cap \tau$ y $x \in U \cap F$. Por lo tanto

$$Q \subseteq U \cap F \subseteq U.$$

Esto demuestra que $F_2 = \emptyset$. □

Teorema 1.2.4. Sean (X, τ) un espacio topológico compacto, de Hausdorf y $A, B \in 2^X$. Si no existe un conjunto conexo C en X tal que

$$A \cap C \neq \emptyset \neq B \cap C,$$

entonces exsiten conjuntos ajenos $X_1, X_2 \in 2^X$ tales que

$$X = X_1 \cup X_2 \text{ y } A \subseteq X_1,\ B \subseteq X_2.$$

Demostración. Si $A \in A$ y Q_α es la cuasi-componente de a en X, entonces en virtud del Teorema 1.2.3, Q_α es conexo. Por hipótesis, Q_α no intersecta a A y B, por lo tanto

$$Q_\alpha \subseteq X \setminus B.$$

Entonces existe $L_\alpha \in 2^X \cap \tau$ tal que

$$Q_\alpha \subseteq L_\alpha \subseteq X \setminus B,$$

de manera que

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} L_\alpha \subseteq X \setminus B.$$

Tenemos una cubierta abierta de A. Por la compacidad de A, existe una subcubierta finita

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} L_{\alpha_i} \subseteq X \setminus B.$$

Sean $X_1 = \bigcup_{i=1}^{n} L_{\alpha_i}$ y $X_2 = X \setminus X_1$. Obviamente $X_1, X_2 \in 2^X$,

$$X = X_1 \cup X_2$$

y $A \subseteq X_1, B \subseteq X_2$. □

A continuación, se demuestran algunos resultados importantes referentes a la frontera de un conjunto, que nos van a ser muy útiles en situaciones posteriores. Para eso, recordemos el concepto de frontera.

Definición 1.2.3. Sea (X, τ) un espacio y $H \in \mathcal{P}(X)$. La frontera de H en X, denotada por $Fr\, H$, es definida por $Fr\, H = \overline{H} \cap \overline{X \setminus H}$.

Teorema 1.2.5. Sea (X, τ) un espacio un espacio de Hausdorff, compacto y conexo. Si

$$U \in \tau \setminus \{X, \emptyset\}$$

y K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap FrU \neq \emptyset$.

Demostración. Sea K una componente de $\overline{U}$. Mostremos que existe un conjunto conexo C en $\overline{U}$ tal que

$$K \cap C \neq \emptyset \neq C \cap FrU$$

Supongamos lo contrario, es decir, que no existe un conjunto conexo $\overline{U}$ que intersecta a K y FrU. Por el Teorema 1.2.4, existen conjuntos ajenos $M_1, M_2 \in 2^{\overline{U}}$ tales que

$$\overline{U} = M_1 \cup M_2,\ K \subseteq M_1, FrU \subseteq M_2.$$

Sea

$$M_3 = M_2 \cup (X \setminus U).$$

Tenemos que $M_1, M_3 \in 2^X$, $M_1 \neq \emptyset$ (pues $K \neq \emptyset$), $M_3 \neq \emptyset$ ($FrU \neq \emptyset$) y

$$X = M_1 \cup M_3.$$

Ahora bien,

$$M_1 \cap M_3 = M_1 \cap (X \setminus U) \subseteq \overline{U} \cap (X \setminus U) = FrU \subseteq M_2.$$

Como M_1 y M_2 son conjuntos ajenos, entonces M_1 y M_3 son ajenos. En consecuencia, estos dos últimos conjuntos, forman una separación de X, lo cual es falso. Esta contradicción conduce a que exsite un conjunto conexo C en $\overline{U}$ tal que

$$K \cap C \neq \emptyset \neq C \cap FrU.$$

Entonces $K = K \cup C$, por lo que $C \subseteq K$. Por ende $K \cap FrU \neq \emptyset$. □

En el resultado siguiente se usa que los espacios compactos y Hausdorff son normales, véase [E, págs. 40 y 125].

Teorema 1.2.6. Si (X, τ) es un espacio de Hausdorff, compacto y conexo con más de un punto, entonces:

(a) Si $A \in C(X) \setminus \{X\}$, $A \subseteq U$ y $U \in \tau$ entonces existe $B \in C(X)$ tal que

$$A \subset B \subseteq U.$$

(b) Existe $A \in C(X)$, con más de un punto, tal que $A \subset X$.

Demostración. (a) Como X es un espacio normal, existe $V \in \tau (V \neq X)$ tal que

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Sea B la componente de $\overline{V}$ que contiene a A. Por el teorema 1.2.5,

$$B \cap FrV \neq \emptyset,$$

o sea que $B \cap (X \setminus V) \neq \emptyset$, de donde $B \neq A$.

(b) Sea $x \in X$. Claro que $\{x\} \in C(X)$. Basta con tomar $U \in \mathcal{U}(x) \setminus \{X\}$ y aplicar (a). □

Teorema 1.2.7. Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff, compacto y conexo. Si $E \in \mathcal{P}(X) \setminus \{X, \emptyset\}$ y K es una componente de E, entonces:

(a) $\overline{K} \cap FrE \neq \emptyset$

(b) Si E es abierto entonces $\overline{K} \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$

(c) Si E es cerrado entonces $K \cap \overline{X \setminus E} \neq \emptyset$

Demostración. Supongamos que $\overline{K} \cap FrE = \emptyset$. Entonces

$$\overline{K} \subseteq X \setminus \overline{(X \setminus E)} \subseteq E.$$

Además, $\overline{K} \in C(X)$. Por el Teorema 1.2.6, existe $B \in C(X)$ tal que

$$\overline{K} \subset B \subseteq X \setminus \overline{(X \setminus E)},$$

o sea

$$K \subset B \subseteq E.$$

Esto no puede ocurrir, dado que K es un componente de E. Por lo tanto

$$\overline{K} \cap FrE \neq \emptyset.$$

Los incisos (b) y (c), se siguen inmediatamente de (a). □

1.3. Espacios Localmente conexos

Definición 1.3.1. Un espacio topológico (X, τ) es localemente conexo, si para cada $U \in \mathcal{U}(x)$, donde $x \in X$, existe conexo

$$V \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{P}(U).$$

Una caracterización de la conexidad local es la siguiente:

Teorema 1.3.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Son equivalentes:

(a) X es localmente conexo.

(b) Si K es una componente de $U \in \tau$, entonces $K \in \tau$.

Teorema 1.3.2. Sea (X, τ) un espacio conexo y localmente conexo. Si C es una componente de A entonces

$$FrC \subseteq FrA.$$

Demostración. Sea

$$p \in FrC \setminus FrA.$$

En primer lugar,

$$p \in FrC = \overline{C} \cap \overline{X \setminus C} \subseteq \overline{A}$$

y

$$p \in X \setminus FrA = (X \setminus \overline{A}) \cup X \setminus \overline{X \setminus A}.$$

Luego,

$$p \in X \setminus \overline{X \setminus A}.$$

La conexidad local, garantiza la existencia de un conjunto conexo $K \in \tau$ tal que

$$p \in K \subseteq X \setminus \overline{X \setminus A}.$$

Observe que

$$K \subseteq X \setminus \overline{X \setminus A} \subseteq K \subseteq X \setminus X \setminus A = A$$

o sea $K \subseteq A$. Tenemos entonces que

$$p \in K \cap FrC,$$

de donde

$$K \cap (X \setminus C) \neq \emptyset \neq K \cap C.$$

Luego, $K \cup C$ es conexo y

$$K \cup C \subseteq A.$$

En razón de que C es una componente de A. se tiene que $K \subseteq C$, lo cual es absurdo. Esta contradicción, conduce a que

$$FrC \subseteq FrA$$

□

Teorema 1.3.3. Sean (X, τ) un espacio conexo, localmente conexo y $A, B \in 2^X$. Si N es un conjunto conexo tal que

$$N \cap A \neq \emptyset \neq N \cap B,$$

entonces existe una componente C de $X \setminus (A \cup B)$ tal que

$$\overline{C} \cap A \neq \emptyset \neq \overline{C} \cap B$$

y $N \cap C \neq \emptyset$.

Demostración. Sea

$$\{C_\alpha : \alpha \in J\}$$

la familia de componentes de $X \setminus (A \cup B)$ que intersectan a N. Por el teorema 1.3.2,

$$FrC_\alpha \subseteq Fr[X \setminus (A \cup B)] = Fr(A \cup B) \subseteq A \cup B.$$

Así, $FrC_\alpha \subseteq A \cup B$. Definamos

$$J_1 = \{\alpha \in J : FrC_\alpha \subseteq A, \}$$
$$J_2 = \{\alpha \in J : FrC_\alpha \subseteq B\}$$

y $J_3 = J \setminus (J_1 \cup J_2)$. Si $J_3 \neq \emptyset$, entonces existe $\alpha \in J$ tal que

$$A \cap FrC_\alpha \neq \emptyset \neq B \cap FrC_\alpha$$

con lo cual terminaríamos, pues

$$\overline{C_\alpha} \cap A \neq \emptyset \neq \overline{C_\alpha} \cap B.$$

Supongamos que $J_3 = \emptyset$. Claramente

$$J = J_1 \cup J_2.$$

Sean

$$H = A \cup (\bigcup_{\alpha \in J_1} C_\alpha) \text{ y } K = B \cup (\bigcup_{\alpha \in J_1} C_\alpha)$$

En vista de que

$$Fr(\bigcup_{\alpha \in J_1} C_\alpha) \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha \in J_1} FrC_\alpha} \subseteq A$$

(vea [K, págs. 236, Teorema 1]), H es cerrado . Análogamente K es cerrado. Además, H, K son conjuntos ajenos y

$$N \subseteq H \cup K \text{ y } N \cap H \neq \emptyset \neq N \cap K,$$

lo cual contradice la conexidad de N. □

Teorema 1.3.4. Sea (X, τ) un espacio localmente conexo y normal. Si $U \in \tau$ es conexo, entonces para cada par de puntos $a, b \in U$ existe

$$C \in C(X) \cap \mathcal{P}(U)$$

que contiene a y b.

Demostración. Sea U un conjunto conexo, tal que $U \in \tau$. Para cada $x \in U$ existe

$$U_x \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{P}(U)$$

tal que $\overline{U_x} \subseteq U$ (revise [E, pág. 40]). Puesto que X es localmente conexo, existe un conjunto conexo

$$C_x \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{P}(U_x).$$

Formemos ahora la cubierta abierta $\{C_x : x \in U\}$ para cada U. Por el Teorema 1.1.2 existe una cadena simple

$$\{C_{x_1}, \ldots, C_{x_n}\}$$

que une a y b. Denotemos

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{C}_{x_i}.$$

Es claro que $C \in C(X)$, $C \subseteq U$ y $a, b \in C$. □

Recuerde que un espacio topológico (X, τ) es segundo numerable, si τ tiene una base numerable. Además, cada espacio métrico compacto es segundo numerable (vea [V, pág. 71]).

Teorema 1.3.5. Sea (X, τ) un espacio localmente conexo y segundo numerable. Si $V \in \tau$, entonces el número de componentes de V es un conjunto numerable.

Demostración. El conjunto de componentes de V es un conjunto de abiertos ajenos. □

Teorema 1.3.6. En un espacio métrico compacto (X, d), cualquier cerrado se puede escribir como la intersección de una sucesión decreciente de abiertos, y como la intersección de una sucesión decreciente de cerrados.

Demostración. Sea $F \in 2^X$. Entonces

$$X \setminus F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i,$$

donde cada U_i se ubica en una base numerable. Como los espacios métricos son en particular espacios normales, entonces existe conjunto abierto V, tal que

$$U_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus F,$$

entonces

$$X \setminus F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{V}_i,$$

Por lo tanto $F = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (X \setminus \overline{V}_i)$. Además, la sucesión

$$W_n = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus \overline{V}_i)$$

es decreciente y $F = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_i$. Por otra parte, puesto que

$$F \subseteq \overline{W}_n \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus V_i),$$

se tiene que $F = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{W}_i$. □

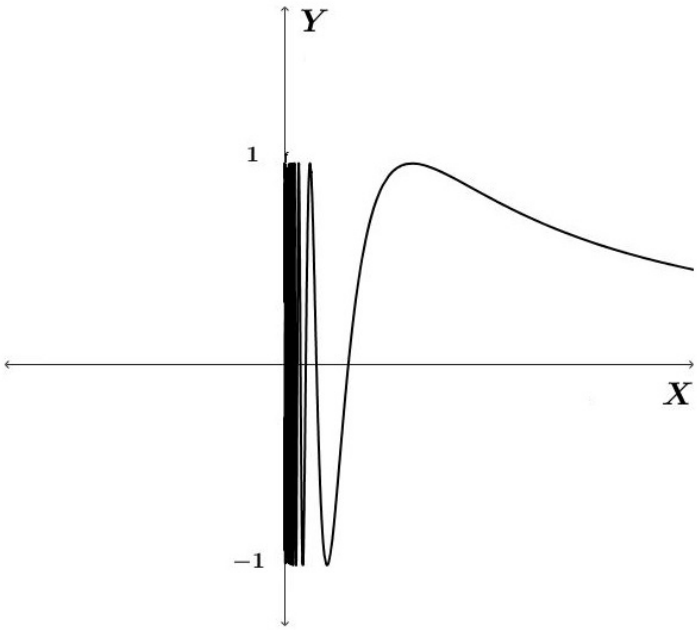
Definición 1.3.2. Un continuo es un espacio métrico no vacío compacto y conexo.

En un continuo X, $C(X) \setminus \{\emptyset\}$ es el conjunto de subcontinuos de X.

Ejemplo 1.3.1. Es bien sabido que la cerradura en $\mathbb{R}^2$, del conjunto conexo $Y = \{(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq \frac{1}{\pi}\}$ es

$$X = Y \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ y } -1 \leq y \leq 1\}.$$

Así pues, X es un conjunto conexo por ser la cerradura de un conexo. Además, X es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$, o sea compacto. Al continuo X se le conoce como el seno del topólogo (véase la figura siguiente).



Para finalizar este capítulo, mencionaremos un teorem que puede consultar en [K, pág. 173, Teorema 6]

Teorema 1.3.7 (Sierpiński)**.** Ningún continuo puede ser descompuesto en una familia numerable de cerrados, ajenos y no vacíos.

Parte 2

s-conexidad

2.1. Concepto de s-conexidad

La s-conexidad fue introducida por M.M March en el artículo [M]. Surgió como herramienta para tratar ciertos problemas referentes a la Teoría del punto fijo.

Definición 2.1.1. Sea (X, τ) un espacio topológico conexo y $A, B, H \in 2^X$. Si A, B son ajenos, se dice que:

(a) H corta entre A y B en X, si para cada componente K de $X \setminus H$ se tiene que

$$K \cap A = \emptyset \text{ ó } K \cap B = \emptyset.$$

(b) H corta débilmente entre A y B en X, si para cada $C \in C(X)$ tal que

$$C \cap A \neq \emptyset \neq C \cap B$$

se tiene que $C \cap H \neq \emptyset$.

(c) X es s-conexo entre A y B, si cada H que corta débilmente entre A y B contiene al menos una componente K que corta débilmente entre A y B.

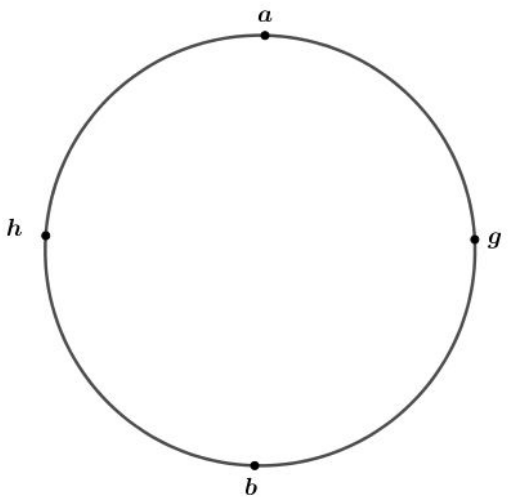
Ahora el concepto principal de este trabajo:

Definición 2.1.2. El espacio topológico conexo (X, τ) es s-conexo, si para cada par de conjuntos ajenos $A, B \in C(X)$, X es s-conexo entre A y B.

Por comodidad, cuando H corte débilmente entre A y B en X escribiremos $H|_X A, B$. Así pues, X es s-conexo si para cada par de conjuntos ajenos $A, B \in C(X)$ y H tales que $H|_X A, B$ existe al menos una componente de K de H que satidface $K|_X A, B$.
De manera análoga, cuando H corte entre A, B en X, escribiremos $H|^X A, B$.

En lo siguiente, se ponen dos ejemplos ilustrativos en relación al concepto que nos ocupa, los cuales son subespacios de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2.1.1. Sea X la circunferencia con la topología heredada de $\mathbb{R}^2$. Sobre X están marcados los puntos: a, b, h, g.



Sea $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ $H = \{a, b\}$. Es claro que cualquier conjunto conexo que contenga b y a necesariamente tiene que pasar por h, g o ambos, o sea $H|_X A, B$. Sin embargo, si quitamos uno de los puntos de H, por ejemplo h, existe al menos un conexo que contien a los puntos a y b, y no contiene al pnto g. Por estas razones, X no es s-conexo.

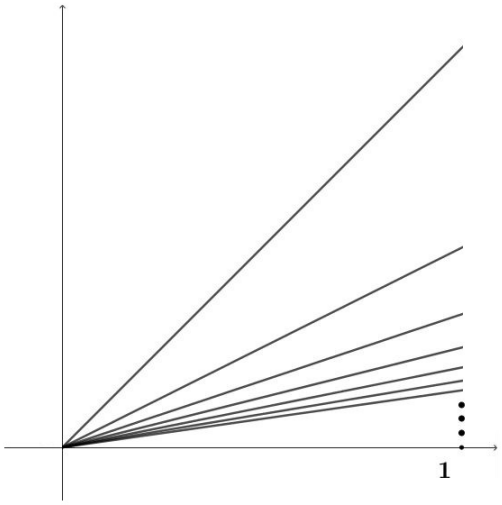
Ejemplo 2.1.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$A_n = \{(x, \frac{1}{n}x) : 0 \leq x \leq 1\}.$$

Si $A = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$, ya habrá elementos suficientes para convenserse de que el espacio

$$X = A \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n),$$

conocido como abanico armónico (véase figura) es s-conexo.



Los términos cortar y cortar débilmente, no son conceptos independientes, pues cortar implica cortar débilmente.

Lema 2.1.1. Sea (X, τ) un espacio topológico conexo. Si $H|^X A, B$ entonces $H|_X A, B$.

Demostración. Supongamos que no es cierto que $H|_X A, B$. Existe pues $K \in C(X)$ tal que

$$K \cap A \neq \emptyset \neq K \cap B \text{ y } K \cap H = \emptyset.$$

es decir, $K \subseteq X \setminus H$. La componente K' de $X \setminus H$ para la cual $K \subseteq K'$ satisface que

$$K' \cap A \neq \emptyset \neq K' \cap B.$$

De este modo, es falso que $H|^X A, B$. □

Sin embargo, cortar débilmente no implica cortar.

Ejemplo 2.1.3. Tomenos

$$A = \{(0,0)\}, B = \{(\frac{1}{\pi}, 0)\} \text{ y } H = \{(0,1)\},$$

en el seno del topólogo definido en el ejemplo 1.3.1. Sin lugar a dudas $H|_X A, B$, pues si $K \in C(X)$ y

$$K \cap A \neq \emptyset \neq K \cap B,$$

entonces $K = X$, de donde $H \cap K \neq \emptyset$. Por otra parte, $X \setminus H$ es conexo, de lo contrario, existen abiertos V, U en X, ajenos y no vacíos de tal suerte que

$$X \setminus H = V \cup U.$$

Si suponemos que $Y \subseteq V$, entonces

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, \text{ y } -1 \leq y < 1\}$$

es abierto en X (sería igual a U), lo cual obviamente es falso. Igualmente si $Y \subseteq U$. Para finalizar, nótese que

$$(X \setminus H) \cap A \neq \emptyset \neq (X \setminus H) \cap B,$$

lo que niega que $H|^X A, B$.

¿En qué espacios coinciden ambos conceptos? Hasta el momento, con las herramientas de que disponemos, en los espacios topológicos que son al mismo tiempo: conexos, localemente conexos y normales.

Teorema 2.1.1. Sea (X, τ) un espacio topológico conexo, localmente conexo y normal. Son equivalentes:

(a) $H|_X A, B$,

(b) $H|^X A, B$.

Demostración. Por el Lema 2.1.1, basta probar (a) $\Rightarrow$ (b).

Supongamos que no es cierto que

$$H|^X A, B.$$

Existe una componente K de $X \setminus H$ tal que

$$K \cap A \neq \emptyset \neq K \cap B.$$

Por los Teoremas 1.3.1 y 1.3.4, K es abierto y para $a \in K \cap A$ y $b \in K \cap B$ existe

$$C \in C(X) \cap \mathcal{P}(K)$$

tal que $a, b \in C$. Obviamente $C \cap H = \emptyset$, por lo tanto es falso que $H|_X A, B$. □

Corolario 2.1.1. En un espacio métrico conexo y localmente conexo $H|_X A, B \iff H|^X A, B$.

2.2. Algunas operaciones en espacios s-conexos

Sabemos que la unión numerable de espacios conexos con un punto en común, es un conjunto conexo. Después del lema que sigue, mostramos un resultado análogo, pero en el caso de espacios s-conexos.

Lema 2.2.1. Sean X un espacio topológico y $A, B \in 2^X$ tales que $A \cap B = \{z\}$. Si

$$T \in C(A \cup B) \text{ y } T \cap A \neq \emptyset \neq T \cap B,$$

entonces $T \cap A \in C(A)$, $T \cap B \in C(B)$, y ambos contienen a z.

Demostración. Observe que

$$T = (T \cap A) \cup (T \cap B)$$

y

$$T \cap A,\ T \cap B \in 2^T \setminus \{\emptyset\}.$$

No queda más que

$$T \cap A \cap T \cap B = T \cap \{z\} \neq \emptyset.$$

En otras palabras

$$z \in T \cap A,\ T \cap B.$$

Ahora, si $T \cap A$ no es un conjunto conexo, existen, conjuntos ajenos

$$C_1, C_2 \in 2^{T \cap A} \setminus \{\emptyset\}$$

tales que

$$T \cap A = C_1 \cup C_2.$$

Supongamos que $z \in C_1$. Entonces

$$C_2, (T \cap B \cup C_1) \in 2^T \setminus \{\emptyset\}$$

son conjuntos ajenos y

$$T = C_2 \cup ((T \cap B) \cup C_1),$$

lo cual es absurdo. □

Teorema 2.2.1. Sean X un espacio topológico y $A, B \in C(X)$ espacios s-conexos de X. Si $A \cap B = \{z\}$ entonces $A \cup B$ es s-conexo.

Demostración. Primero nótese que $A \cup B$ es conexo. Tomemos

$$H|_{A\cup B}C, D.$$

En inicio, supongamos que $z \notin H$.

Caso 1: $C \subseteq A, D \subseteq B$ y $z \notin C \cap D$.
Necesariamente

$$H \cap A|_A\{z\}, C \text{ ó } H \cap B|_B\{z\}, D.$$

De lo contrario existen $K_1 \in C(A)$ y $K_2 \in C(B)$ que satisfacen lo siguiente

$$K_1 \cap \{z\} \neq \emptyset \neq K_1 \cap C \text{ pero } K_1 \cap H \cap A = \emptyset$$

y

$$K_2 \cap \{z\} \neq \emptyset \neq K_2 \cap D \text{ pero } K_2 \cap H \cap B = \emptyset$$

Sea

$$K = K_1 \cup \{z\} \cup K_2 \in C(A \cup B).$$

Naturalmente que

$$K \cap C \neq \emptyset \neq K \cap D.$$

Por hipótesis $K \cap H \neq \emptyset$, en consecuencia $z \in H$, lo cual es falso. Así pues, sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$H \cap A|_A\{z\}, C.$$

Como A es s-conexo, existe una componente R' de $H \cap A$ tal que $R'|_A\{z\}, C$. Sea R la componente de H que contiene a R'. Mostremos que

$$R|_{A\cup B}C, D.$$

Si $T \in C(A \cup B)$ es tal que

$$T \cap C \neq \emptyset \neq T \cap D,$$

por el Lema 2.2.1 $z \in T \cap A$ y $T \cap A \in C(A)$. En consecuencia

$$T \cap A \cap \{z\} \neq \emptyset \neq T \cap A \cap C$$

y finalmente

$$\emptyset \neq T \cap A \cap R' \subseteq T \cap R.$$

Caso 2: $z \in C$.
Por el Lema 2.2.1

$$C \cap B \in C(B).$$

Si $K \in C(B)$ y

$$K \cap C \cap B \neq \emptyset \neq K \cap D,$$

entonces $K \cap H \neq \emptyset$. Luego,

$$H \cap B|_B C \cap B, D.$$

Por hipótesis, existe una componente R' de $H \cap B$ tal que

$$R'|_B C \cap B, D.$$

Sea R la componente de H tal que $R' \subseteq R$. De manera semejante al caso 1, $R|_{A \cup B} C, D$, pues si

$$T \in C(A \cup B) \text{ y } T \cap C \neq \emptyset \neq T \cap D,$$

entonces $T \cap B \in C(B)$.

Caso 3: $C \subseteq A$ y $D \subseteq A$.

Es el caso más directo. Claramente se tiene que $H \cap A|_A C, D$. Como A es s-conexo, existe una componente de R' de $H \cap A$, tal que $R'|_A C, D$. Es fácil probar que la componente de H que contiene a R' corta débilmente entre C y D.

Hasta aquí para $z \notin H$.
Son los mismos casos cuando $z \in H$.
Caso 1: Tomemos la componente de H que contiene a z. Cualquier conjunto conexo cerrado en $A \cup B$ que intersecta a C y D, por el Lema 2.2.1, contiene a z.

Los casos 2 y 3 se resuelven de la misma manera. □

Corolario 2.2.1. Si $\mathcal{C} = \{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq C(X)$ es una familia de espacios s-conexos tal que para cada $i \neq j$

$$A_i \cap A_j = \{z\},$$

entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es s-conexa.

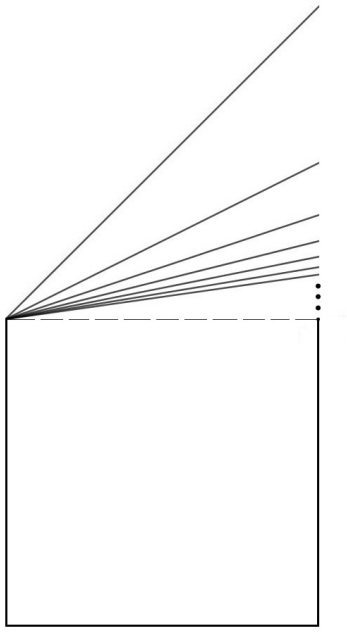
El Teorema 2.2.1 no se puede ampliar para uniones numerables en general.

Ejemplo 2.2.1. Sea

$$A_0 = \{(x, y) : x \in \{0, 1\}, y \in [-1, 0]\} \cup \{(x, -1) : x \in [0, 1]\}$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \left\{(x, \frac{1}{n}x) : x \in [0, 1]\right\}.$$



La familia $\{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ está formada por continuos s-conexos en $\mathbb{R}^2$ que tienen al $(0, 0)$ como único punto en común. Sin embargo, si denotamos por X a la unión de los elementos de esta familia, se tiene que X no es un espacio s-conexo. Para verificar esto, sean

$$A = \{(0, 0)\}, B = \{(\frac{1}{2}, -1)\} \text{ y } H = \{(0, -1), (1, -1)\}.$$

Los conjuntos

$$C_1 = \{(0, y) : y \in [-1, 0]\} \cup \{(x, -1) : x \in [0, \frac{1}{2}]\}$$

y

$$C_2 = (X \setminus C_1) \cup A \cup B,$$

son conexos y cerrados en X e intersectan A y B. Note que el conjunto conexo C_2 intersecta A y B, pero no contiene al punto $(0, -1)$. Lo mismo para el otro punto de H. De manera que ninguna componente de H corta débilmente entre A, B.

Bajo ciertas restricciones, la unión resulta ser un espacio s-conexo. Para esto, será de utilidad el resultado siguiente, que es consecuencia del Teorema del Sierpiński (véase el Teorema 1.3.7).

Lema 2.2.2. Sean X un espacio métrico y $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq 2^X$ tal que para cada $i \neq j$,

$$A_i \cap A_j = \{z\}$$

donde z es un elemento fijo de X. Si el continuo $T \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i$ entonces $T \cap A_i$ es un continuo para cada $i \in \mathbb{N}$ que satisface

$$T \cap A_i \neq \emptyset.$$

Demostración. Sea

$$\Lambda = \{j \in \mathbb{N} : T \cap (A_j \setminus \{z\}) \neq \emptyset\}.$$

En primer lugar, supongamos que $z \in T$.
La cardinalidad de Λ mo puede ser mayor que uno. De lo contrario, como

$$T = \bigcup_{j\in\Lambda} T \cap A_j,\ T \cap A_i \cap T \cap A_j = T \cap \{z\} = \emptyset$$

y

$$\{T \cap A_j : j \in \Lambda\} \subseteq 2^T \setminus \{\emptyset\},$$

T es la unión numerable de cerrados, ajenos no vacíos, contrario al Teorema 1.3.7. Por otro lado, si $\Lambda = \emptyset$ entonces $T = \{z\}$, en contraposición a lo que estamos suponiendo, por lo tanto

$$T = T \cap A_j$$

es un continuo, donde j es el único elemento de Λ. Ahora supongamos que $z \in T$ (si $T = \{z\}$ el asunto es trivial). Sea $j \in \mathbb{N}$ y supongamos que $T \cap A_j$ no es continuo. De manera que $T \cap A_j$ no es un conjunto conexo. Claramente $j \in \Lambda$. Tomemos

$$a \in T \cap (A_j \setminus \{z\})$$

que no esté en la misma componente de z. Si K es la componente en $T \cap A_j$ que contiene a a, K es un subcontinuo de T. Pues $T \cap A_j$ es cerrado en T (es la intersección de T con un cerrado en $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$). Ahora veamos que K es cerrado en T. Sabemos que K, por ser componente, es cerrado en $T \cap A_j$, o sea

$$K = T \cap A_j \cap K',$$

donde K' es cerrado en T, de manera que K es la intersección de dos cerrados en T. Tenemos a K que es cerrado dentro del compato T, así pues K es compacto.
En resumen, K es compacto, conexo y no vacío, en otras palabras, K es un subcontinuo propio de T. Los mismo se puede concluir para la componente L en $T \cap A_j$ que contiene a z. Existen abiertos ajenos U, V en T de tal que $K \subseteq U$ y $L \subseteq V$. Por esta razón existen subcontinuos K' y L' de T tales que

$$K \subset K' \subseteq U \text{ y } L \subset L' \subseteq V.$$

En consecuencia $K' \cap L' = \emptyset$. Por la maximalidad de K, K' no puede estar contenido en $T \cap A_j$, de donde existe $m \neq j$ tal que

$$K' \cap A_m \neq \emptyset,$$

pero entonces

$$z \in K',$$

lo cual no puede ser. Por lo tanto $T \cap A_j$ es conexo. □

Teorema 2.2.2. Sea (X, d) un espacio métrico y

$$\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq 2^X$$

una familia de s-conexos. Si $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ es un continuo y para cada $i \neq j$

$$A_i \cap A_j = \{z\},$$

entonces $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ es s-conexa.

Demostración. El espacio

$$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

es un conjunto conexo. Supongmaos que $H|_A C, D$.

Parte 1: $z \notin C$ y $z \notin D$.

Obsérvese que C y D son subcontinuos de A. Igual que en la demostración del Lema 2.2.2, existen $j, s \in \mathbb{N}$ tales que

$$C \subseteq A_j \text{ y } D \subseteq A_s.$$

Por el teorema 2.2.1, $A_{j,s} = A_j \cup A_s$ es s-conexo; no es difícil ver que

$$H \cap A_{j,s}|_{A_{j,s}} C, D.$$

Sea K' la componente de $H \cap A_{j,s}$ para la cual

$$K'|A_{j,s} C, D.$$

y K la componente de H tal que $K' \subseteq K$.
En lo siguiente, probaremos que $K|_A C, D$. Sea $T \in C(A)$ tal que

$$T \cap C \neq \emptyset \neq T \cap D.$$

Nótese que $z \in T$. Por el Lema 2.2.2,

$$T \cap A_j, T \cap A_s \in C(A_j \cup A_s).$$

Naturalmente que $T \cap A_j \cap A_s = \{z\}$, por ende

$$T \cap A_j \cup T \cap A_s \in C(A_j \cup A_s)$$

y

$$T \cap (A_j \cup A_s) \cap C \neq \emptyset \neq T \cap (A_j \cup A_s) \cap D.$$

Luego

$$\emptyset \neq T \cap (A_j \cup A_s) \cap K' \subseteq T \cap K.$$

Parte 2: $z \in C$

Claramente $z \notin D$. Exsite $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$D \subseteq A_j \text{ y } C \cap A_j \in C(A_j).$$

No es difícil probar que

$$H \cap A_j|_{A_j} C \cap A_j, D.$$

Sea K' la componente de $H \cap A_j$, para la cual

$$K'|_{A_j} C \cap A_j, D$$

y K la componente de H tal que $K' \subseteq K$.

Veamos que $K|_A C, D$. Si $T \in C(A)$ satisface que

$$T \cap C \neq \emptyset \neq T \cap D,$$

necesariamente $T \cap C \cap A_j \neq \emptyset$, pues el hecho de que $T \cap (A_j \setminus \{z\}) \neq \emptyset$ ($z \notin D$) conduce a que: $z \in T$, cuando exista un número $m \neq j$ tal que

$$T \cap (A_m \setminus \{z\}) \neq \emptyset$$

ó $T \subseteq A_j$, en caso de que no exista el número m anterior. En cualquier caso $T \cap A_j \cap C \neq \emptyset$, por lo tanto

$$\emptyset \neq T \cap A_j \cap K' \subseteq T \cap K.$$

□

Teorema 2.2.3. [M, Teorema 2] En un espacio métrico X, sean

$$\{S_i : i \in \mathbb{N}\}, \{A_i : i \in \mathbb{N}\}, \{B_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

familias decrecientes de continuos con

$$S = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} S_i, A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i, B = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i.$$

Si $A_i \cup B_i \subseteq S_i$ y S_i es s-conexo entre A_i y B_i para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces S es-conexo entre A y B.

Demostración. Supongamos que $F|_S A, B$. De acuerdo al Teorema 1.3.6, existe una familia decreciente $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$, formada por conjuntos abiertos en S_1 tal que

$$F = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overline{U_i}.$$

A continuación, vamos a probar que para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $j \in \mathbb{N}$ cumpliendo lo siguiente:

$$\overline{U_i} \cap S_j|_{S_j} A_j, B_j$$

Supongamos lo contrario. Entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $C_j \in C(S_j)$ con

$$C_j \cap A_j \neq \emptyset \neq C_j \cap B_j \text{ y } C_j \cap \overline{U_{i_0}} \cap S_j = C_j \cap \overline{U_{i_0}} = \emptyset.$$

Resulta una sucesión $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ de subcontinuos de S_1. Tomenos una subsucesión de $\{C_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente a $C \in C(S_1)$ (vea [N, pág 61, Corolario 4.18]). Ahora probemos que $C \in C(S)$. Basta con mostrar que $C \subseteq S$. Supongamos que

$$C \setminus S \neq \emptyset$$

y sea $x \in C \setminus S$. Existe q tal que

$$x \notin S_q.$$

Puesto que $S_1 \setminus S_q$ es abierto en S_1 y

$$x \in S_1 S_q,$$

existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $j_{k_0} > q, k_0 > q$ y

$$(S_1 \setminus S_q) \cap C_{j_k} \neq \emptyset \text{ para toda } k \geq k_0$$

(vea [N, pág. 56]). Pero

$$C_{j_{k_0}} \subseteq S_{j_{k_0}} \subseteq S_q,$$

lo cual es una contradicción. En conclusión, $C \in C(S)$.
Por otra parte, si $a_k \in C_{j_k} \cap A_{j_k}$, sea

$$\{a_{k_m}\}_{m=p'}^{\infty} \longrightarrow a.$$

una subsucesión convergente. De manera similar a lo hecho en renglones anteriores, $a \in S$. Si $a \notin A$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a \notin A_p$. Naturalmente que si $p' \in \mathbb{N}$ es tal que $j_{k_{p'}} \geq p$, entonces $\{a_{k_m}\}_{m=p'}^{\infty}$ es una suceción S_p y

$$\{a_{k_m}\}_{m=p'}^{\infty} \longrightarrow a.$$

Como

$$a \in S_p \setminus A_p,$$

existe $n \geq p'$ ta que para cada $m > n$,

$$a_{k_m} \in S_p \setminus A_p \subseteq S_p \setminus A_{j_{k_m}},$$

lo cual es falso. Por lo tanto $a \in A$. Además, para cada $U \in \mathcal{U}_{S_1}(a)$,

$$U \cap C_{j_k} \neq \emptyset,$$

para una infinidad de subíndices k, o sea $a \in C \cap A$. De manera análoga, $B \cap C \neq \emptyset$.
Usando la hipóteis inicial, es decir, $F|_S A, B$, se tiene que $\emptyset \neq C \cap F$. Sin embargo,

$$C \cap F \subseteq U_{i_0} \subseteq \overline{U_{i_0}} \subseteq S_1 \setminus C_j, \text{para cada } j,$$

donde i_0 es aquél índice fijo tal que $C_j \cap \overline{U_{i_0}} = \emptyset$. Esto es absurdo, pues U_{i_0} es abierto en S_1 y debe intersectar a C_{j_k} para una cantidad infinita de subíndices de k.
En conclusión, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe un número natural, que vamos a denotar por j_i, tal que:

$$\overline{U_i} \cap S_{j_i}|_{S_{j_i}} A_{j_i}, B_{j_i}.$$

Sabemos que existe una componente K_i de $\overline{U_i} \cap S_{j_i}$, tal que

$$K_i|_{S_{j_i}} A_{j_i}, B_{j_i}.$$

Ahora consideremos a una subsucesión convergente de $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ en S_1

$$K_{i_n} \longrightarrow K.$$

Mostremos que $K \subseteq F$. Para esto, bastará probar que $K \subseteq \overline{U_i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea $i \in \mathbb{N}$. Si $k \in K$ y $V \in \mathcal{U}_{s_1}(k)$, entonces

$$\{n \in \mathbb{N} : K_{i_n} \cap V \neq \emptyset\}$$

es infinito, por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $i_n \geq i$ y $K_{i_n} \cap V \neq \emptyset$, pero

$$K_{i_n} \subseteq \overline{U_{i_n}} \subseteq \overline{U_i}$$

por lo que $\overline{U_i} \cap V \neq \emptyset$, luego $k \in \overline{U_i}$.
Ya casi terminamos: si $L \in C(S)$ es tal que

$$L \cap A \neq \emptyset \neq L \cap B \text{ y } L \cap K = \emptyset,$$

entonces

$$K \subseteq X \setminus L.$$

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$K_{n_0} \subseteq X \setminus L$$

(vea [N, pág. 54 y 57]), o sea

$$L \cap K_{n_0} = \emptyset,$$

lo que contradice $K_m|_{S_{j_m}} A_{j_m}, B_{j_m}$, donde $m = n_0$. Esto demuestra, finalmente, que

$$K|_S A, B.$$

□

Corolario 2.2.2. [M, Corolario 2.1] En un espacio métrico, si

$$\mathcal{F} = \{S_i : i \in \mathbb{N}\}$$

es una familia decreciente de continuos s-conexos, entonces $\bigcap \mathcal{F}$ es conexo.

Demostración. Definamos

$$F = \bigcap \mathcal{F}.$$

En primer lugar, F es continuo. Sean $A, B \in C(F)$ ajenos. Entonces para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$A, B \in C(S_i)$$

(obviamente $A \cup B \subseteq S_i$). Por hipótesis, S_i es s-conexo entre A y B (revise la Definición 2.1.2), luego $\bigcap \mathcal{F}$ es s-conexo entre A y B. □

2.3. Funciones en espacios s-conexos

Afortunadamente, la s-conexidad es un invariante topológico.

Teorema 2.3.1. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo donde X es s-conexo, entonces Y es s-conexo.

Demostración. Como la conexidad es invariante topológico, Y es conexo. Ahora, digamos que $H|_Y A, B$. Tenemos que

$$f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in C(X) \text{ y } f^{-1}(H) \in 2^X.$$

Si $K \in C(X)$ y

$$K \cap f^{-1}(A) \neq \emptyset \neq K \cap f^{-1}(B),$$

entonces

$$f(K) \cap A \neq \emptyset \neq f(K) \cap B,$$

por lo que $f(K) \cap H \neq \emptyset$. Luego $K \cap f^{-1}(H) \neq \emptyset$.
Se ha mostrado que

$$f^{-1}(H)|_X f^{-1}(A), f^{-1}(B).$$

Como X es s-conexo, existe una componente C de $f^{-1}(H)$ para la cual

$$C|_X f^{-1}(A), f^{-1}(B).$$

Es fácil ver que $f(C)$ es una componente de H y $f(C)|_Y A, B$. □

La s-conexdad no se preserva bajo funciones continuas.

Ejemplo 2.3.1. La función continua

$$f(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta),$$

definida para $\theta \in \mathbb{R}$, produce para el espacio s-conexo $\mathbb{R}$, una imagen que no es s-conexa, a saber, una circunferencia.

Sin embargo, existen funciones que ayudan a heredar la s-conexidad del espacio de partida. Se trata de las funciones monótonas.

Definición 2.3.1. Se dice que una función continua $f : X \longrightarrow Y$ es monótona, si $f^{-1}(y)$ es conexo para toda $y \in Y$.

Ejemplos muy importantes de funciones monótonas, son las proyecciones del producto de espacios conexos.

Ejemplo 2.3.2. Consideremos a la familia $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de espacios topológicos conexos. Si $\beta \in \Lambda$ entonces

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$$

es monótona, pues si $x \in X_\beta$

$$\pi_\beta^{-1}(x) = \prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha = \begin{cases} Y_\alpha = X_\alpha, \text{ si } \alpha \neq \beta \\ \{x\}, \text{ si } \alpha = \beta \end{cases}$$

$\prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ es un conjunto conexo, por ser procutos de conexos.

Lema 2.3.1. Si $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ es monótona, cerrada y sobreyectiva, entonces para cada conexo C en Y, $f^{-1}(C)$ es no es conjunto conexo.

Demostración. Sea $C \subseteq Y$. Supongamos que $f^{-1}(C)$ no es un conjunto conexo y sea

$$U \cap f^{-1}(C), V \cap f^{-1}(C)$$

una separación de $f^{-1}(C)$ $(U, V \in \tau)$. Por el Teorema 1.1.1,

$$\{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq U\},\ \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq V\}\} \in \sigma.$$

La idea es demostrar que los conjuntos

$$\{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq U\} \cap C,\ \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq V\}\} \cap C$$

forman una separación de C.
Probemos primero que son no vacíos. Si $x \in U \cap f^{-1}(C)$, entonces $f^{-1}(f(x))$ es conexo y

$$f^{-1}(f(x)) \subseteq f^{-1}(C).$$

Así

$$f^{-1}(f(x)) \subseteq U \cap f^{-1}(C)$$

y

$$f(x) \in \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq U\} \cap C.$$

Análogamente se demuestra que

$$\{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq V\}\} \cap C \neq \emptyset.$$

Dichos conjuntos también son ajenos, pues si $y \in Y$ está en la intersección, entonces

$$f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(C) \text{ y } f^{-1}(y) \subseteq V, U,$$

lo cual es falso. En resumen, C no es conexo. □

Lema 2.3.2. Si $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ es una función monótona abierta y sobreyectiva, entonces para cada conexo $C \in Y$, $f^{-1}(C)$ es conexo.

Demostración. Sea $C \subseteq Y$. Supongamos que $f^{-1}(C)$, no es conexo y sea

$$U \cap f^{-1}(C), V \cap f^{-1}(C)$$

una separación de $f^{-1}(C)$ $(V, U \in \tau)$. En este caso,

$$C = f(f^{-1}(C)) = f(U \cap f^{-1}(C)) \cup f(V \cap f^{-1}(C)) \subseteq f(U) \cup f(V)$$

La idea es demostrar que los conjuntos $f(U) \cap C$ y $f(V) \cap C$ forman una separación de C. Evidentemente,

$$f(U) \cap C,\ f(V) \cap C$$

son conjuntos no vacíos. Si no fuesen ajenos, existe

$$y = f(u) = f(v) \in C$$

para alguna $u \in U$ y $v \in V$, entonces

$$u, v \in f^{-1}(y) \subseteq f{-}1(C).$$

Como $f^{-1}(y)$ es conexo, se tiene

$$f^{-1}(y) \subseteq U \cap f^{-1}(C) \text{ y } f^{-1}(y) \subseteq V \cap f^{-1}(C),$$

lo cual es absurdo. Finalmente, los conjuntos

$$f(U) \cap C \text{ y } f(V) \cap C$$

forman una separación de C. □

Teorema 2.3.2. [M, Teorema 4] Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función monótona, cerrada, sobreyectiva y X es s-conexo, entonces Y es s-conexo

Demostración. Y es conexo. Supongamos que $H|_Y A, B$. Sabiendo que

$$f^{-1}(H) \in 2^X, f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in C(X)$$

demostremos que

$$f^{-1}(H)|_X f^{-1}(A), f^{-1}(B).$$

Si

$$T \in C(X) \text{ y } T \cap f^{-1}(A) \neq \emptyset \neq T \cap f^{-1}(B),$$

entonces

$$f(T) \cap A \neq \emptyset \neq f(T) \cap B.$$

Puesto que $H|_Y A, B$, se tiene que

$$f(T) \cap H \neq \emptyset.$$

Si $y \in f(T) \cap H$, entonces

$$y = f(t) \in H.$$

Luego, $t \in T \cap f^{-1}(H)$, o sea $T \cap f^{-1}(H) \neq \emptyset$. Queda demostrado que

$$f^{-1}(H)|_X f^{-1}(A), f^{-1}(B).$$

como X es s-conexo, existe componente K de $f^{-1}(H)$ tal que

$$K|_X f^{-1}(A), f^{-1}(B).$$

Mostremos que $f(K)$ es componente de H. Si K' es conexo y $f(K) \subseteq K' \subseteq H$, entonces

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}(K') \subseteq f^{-1}(H).$$

Por la maximalidad de K, $K = f^{-1}(K')$. Se sigue que

$$f(K) = f(f^{-1}(K')) = K'.$$

Para finalizar, veamos que $f(K)|_Y A, B$. Si

$$T \in C(Y) \text{ y } T \cap A \neq \emptyset \neq T \cap B,$$

entonces

$$f^{-1}(T) \cap f^{-1}(A) \neq \emptyset \neq f^{-1}(T) \cap f^{-1}(B).$$

Sin embargo, $f^{-1}(T) \in C(X)$, por lo que

$$f^{-1}(T) \cap K \neq \emptyset.$$

Luego,

$$\emptyset \neq f(f^{-1}(T) \cap K) \subseteq f(f^{-1}(T)) \cap f(K) = T \cap f(K).$$

□

Corolario 2.3.1. Sean (X, τ) espacio s-conexo y (Y, σ) espacio de Hausdorff. Si X es compacto, $f : X \longrightarrow Y$ es monótona y sobreyectiva, entonces Y es s-conexo.

Corolario 2.3.2. Sea $\{X\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de esapcios topológicos de Hausdorff. Si $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es compacto y s-conexo, entonces X_α es s-conexo para cada $\alpha \in \Lambda$

Demostración. Cada proyección π_α es monótona, sobreyectiva y el espacio de llegada X_α, es de Hausdorff. □

Corolario 2.3.3. Sean $(X, d_1), (X, d_2)$ esapcios métricos. Si X es continuo conexo y $f : X \longrightarrow Y$ es monótona y sobreyectiva, entonces Y es s-conexa.

En el Corolario 3.2.2 , se demostrara que el producto de continuos s-conexos, que son también localmente conexos, es s-conexo.

Parte 3

Unicoherencia y s-conexidad

3.1. Concepto de unicoherencia

Definición 3.1.1. Se dice que un espacio topológico conexo (X, τ) es unicoherente, si para cada representación

$$X = A \cup B,$$

donde $A, B \in C(X)$, el conjunto $A \cap B \in C(X)$.

Ejemplo 3.1.1. Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, $[\theta]$ representa al entero más grande, menor o igual a θ.
Sea

$$\exp(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta).$$

Definamos

$$S = \{\exp\theta : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

El continuo

$$X = S \cup \{(1 + e^{-\theta}) \exp\theta : \theta \geq 0\}$$

es inicoherente, pues los continuos en X, son únicamente de tres tipos:

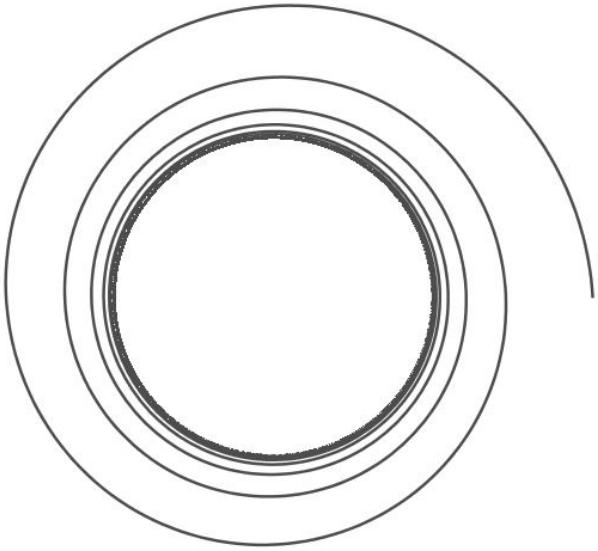
(a) Homeomorfos a X.

(b) Arcos contenidos en el espiral

$$\{(1 + e^{-\theta}) \exp\theta : \theta \geq 0\}$$

(c) S y arcos contenidos en S.

Además, cualquier intersección de dos o más de estos continuos produce un continuo.



A este espacio se le conoce como el círculo con espiral.

El producto de espacios unicoherentes no siempre es un espacio unicoherente.

Ejemplo 3.1.2. Sea X el círculo con espiral definido anteriormente. Vamos a demostrar que

$$Y = X \times X$$

no es unicoherente. Definamos $A, B, H, K \subseteq Y$ por

$$\begin{aligned} A &= \{(r_1 \exp\theta_1, r_2 \exp\theta_2) : [\theta] \text{ es par}\} \\ B &= \{(r_1 \exp\theta_1, r_2 \exp\theta_2) : [\theta] \text{ es impar}\} \\ H &= \{(r_1 \exp\theta_1, r_2 \exp\theta_2) : \theta \text{ es par}\} \\ K &= \{(r_1 \exp\theta_1, r_2 \exp\theta_2) : \theta \text{ es impar}\} \end{aligned}$$

donde θ, en cada caso, es igual a $\dfrac{\theta_1 - \theta_2}{\pi}$. Mostremos lo siguiente:

1. $H \subseteq A$ y $K \subseteq B$.

2. $H \cap (S \times S)$ es igual al conjunto conexo

$$D = \{(\exp\theta, \exp\theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$$

Es claro que D es subconjunto de $H \cap (S \times S)$. Ahora tomemos un elemento de $H \cap (S \times S)$. Este elemento tiene necesariamente la forma

$$(\exp\theta_1, \exp\theta_2)$$

pues está en $S \times S$. A su vez, por estar en H debe cumplir que

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} = 2n.$$

De aquí, $\theta_1 = 2n\pi + \theta_2$. Por lo tanto

$$\cos\theta_1 = \cos(2n\pi + \theta_2) = \cos\theta_2$$

y

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}(2n\pi + \theta_2) = \operatorname{sen}\theta_2$$

Finalmente,

$$(\exp\theta_1, \exp\theta_2) = (\exp\theta_1, \exp\theta_1) \in D.$$

D es conexo por ser imagen continua de $\mathbb{R}$.

3. $A \cap (S \times S)$ es conexo.
Sea

$$p \in (\exp\theta_1, \exp\theta_2) \in A \cap (S \times S)$$

De acuerdo a la definición del conjunto A, debe existir n tal que

$$\left[\frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi}\right] = 2n.$$

Por ende, $2n \leq \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} < 2n + 1$ y entonces

$$2n\pi + \theta_2 \leq \theta_1 < (2n + 1)\pi + \theta_2.$$

Ahora bien, si $t \in [0,1]$, también se tiene que $1-t \in [0,1]$ y

$$2n\pi + \theta_2 \leq t\theta_1 + (1-t)(2n\pi + \theta_2) < (2n+t)\pi + \theta_2.$$

Utilizando la desigualdad anterior, es fácil darse cuenta que el conjunto conexo

$$\{(\exp(t\theta_1 + (1-t)(2n\pi + \theta_2)), \exp\theta_2) : t \in I\},$$

donde $I = [0,1]$, está contenido en $A \cap (S \times S)$. Además, el conjunto conexo anterior contiene a p $(t = 1)$ e intersecta a $H \cap (S \times S)$, pues para $t = 0$, se tiene que

$$(\exp(2n\pi + \theta_2), \exp\theta_2) = (\exp\theta_2, \exp\theta_2)$$

en conclusión: para cada $p \in A \cap (S \times S)$, existe un conjunto conexo $L_p \subseteq A \cap (S \times S)$ tal que

$$L_p \cap H \cap (S \times S) \neq \emptyset \text{ y } p \in L_p.$$

Así, $A \cap (S \times S)$ es conexo pues

$$A \cap (S \times S) = H \cap (S \times S) \cup \{L_p : p \in A\}.$$

4. A es conexo.
Sea $q \in A$. Supongamos que q tiene la forma

$$q = ((1 + e^{-\theta_1})\exp\theta_1, (1 + e^{-\theta_2})\exp\theta_2).$$

el siguiente subconjunto de A

$$\{(r_1(t)\exp\alpha_1(t), r_2(t)\exp\alpha_2(t)) : t \geq 0\}$$

donde

$$\alpha_i(t) = \theta_i, i \in \{1,2\}$$
$$r_i(t) = 1 + e^{-\alpha_i(t)}, \imath \in \{1,2\},$$

es conexo y contiene a q $(t \neq 0)$. Llamemos a este conexo C_q. Si consideramos a la sucesión $t_n = 2n\pi$, entonces

$$(r_1(t_n)\exp\alpha_1(t_n), r_2(t_n)\exp\alpha_2(t_n))$$

es una sucesión de elementos de C_p que converge a $(\exp\theta_1, \exp\theta_2)$. De manera que

$$\overline{C_q} \cap A \cap (S \times S) \neq \emptyset.$$

Supongamos que

$$A = U \cup V,$$

donde U, V son abiertos ajenos en A. Como $A \cap (S \times S)$ es un conjunto conexo, sin pérdida de generalidad supongamos que $A \cap (S \times S) \subseteq U$. Si $q \in A$ entonces $C_q \subseteq U$, pues $\overline{C_q} \cap A \cap (S \times S) \neq \emptyset$. Así $V = \emptyset$. Esto demuestra que A es conexo.

5. H y K son cerrados.
Probemos que H es cerrado. Tomemos una sucesión de elementos en H convergente a un elemento de Y

$$(r_{\theta_n} \exp\theta_n, r_{\psi_n} \exp\psi_n,) \longrightarrow (r_1 \exp\theta, r_2 \exp\psi)$$

Por ser elementos de H

$$\theta_n = 2m_n\pi + \psi_n.$$

Se quiere hacer ver que

$$(r_1 \exp\theta, r_2 \exp\psi) \in H,$$

es decir, que

$$\frac{\theta - \psi}{\pi}$$

es par.

$$(1 + e^{-\theta_n}) \cos\theta_n \longrightarrow (1 + e^{-\theta}) \cos\theta$$
$$(1 + e^{-\theta_n}) \operatorname{sen}\theta_n \longrightarrow (1 + e^{-\theta}) \operatorname{sen}\theta$$

de donde

$$(1 + e^{-\theta_n})^2 \cos^2\theta_n \longrightarrow (1 + e^{-\theta})^2 \cos^2\theta$$
$$(1 + e^{-\theta_n})^2 \operatorname{sen}^2\theta_n \longrightarrow (1 + e^{-\theta})^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

Sumando ambas sucesiones se obtiene que

$$(1 + e^{-\theta_n})^2 \longrightarrow (1 + e^{-\theta})^2.$$

En consecuencia

$$(1 + e^{-\theta_n}) \longrightarrow (1 + e^{-\theta}) \text{ y } \cos\theta_n \longrightarrow \cos\theta.$$

De igual manera se puede probar que

$$\cos\psi_n \longrightarrow \cos\psi.$$

Anteriormente se mencionó que $\theta_n = 2m_n\pi + \psi_n$, de donde

$$\cos\theta_n = \cos(2m_n\pi + \psi_n) = \cos\psi_n.$$

Por lo cual $\cos\theta = \cos\psi$. Esto último indica que

$$\theta = 2m\pi + \psi.$$

o sea que $\dfrac{\theta - \psi}{\pi}$ es par. Análogamente se prueba que K es cerrado.

6. $\overline{A} = A \cup K$ y $\overline{B} = B \cup H$.
Demostremos primero que $\overline{A} = A \cup K$. Sean $p \in A \cup K$. Si $p \in A$ entonces $p \in \overline{A}$. Si $p \in K$ entonces

$$p = (r_1 \exp\theta_1, r_2 \exp\theta_2) \text{ y } \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} \text{ es impar.}$$

Existe n tal que $\dfrac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} = 2n + 1$. Sea r_m una sucesión convergente a θ_2 tal que

$$\theta_2 < r_m < \theta_2 + \pi.$$

A partir de esta desigualdad, es fácil llegar a que

$$2n < \frac{\theta_1 - r_m}{\pi} < 2n + 1.$$

Luego, $\left[\dfrac{\theta_1 - r_m}{\pi}\right] = 2n$. Así

$$((1 + e^{-\theta}) \exp\theta_1, (1 + e^{-r_m}) \exp r_m)$$

es una sucesión de elementos en A que converge a p, o sea que $p \in \overline{A}$. Esto muestra que $A \cup K \subseteq \overline{A}$. Ahora tomemos un elemento $p \in \overline{A}$. Si

$$p = (r_\theta \exp\theta, r_\psi \exp\psi),$$

existe una sucesión de elementos de A convergente a p. Sea

$$p = (r_{\theta_n} \exp\theta_n, r_{\psi_n} \exp\psi_n) \longrightarrow (r_\theta \exp\theta, r_\psi \exp\psi),$$

donde

$$\left[\frac{\theta_n - \psi_n}{\pi}\right] = 2m_n.$$

Se trata de hacer ver que $p \in A \cup K$. Supongamos que $p \notin A$. Existe m tal que

$$\left[\frac{\theta - \psi}{\pi}\right] = 2m + 1,$$

es decir

$$2m + 1 \leq \frac{\theta - \psi}{\pi} < 2m + 2.$$

Igual que en la parte (5) es posible demostrar que

$$(1 + e^{-\theta_n}) \longrightarrow (1 + e^{-\theta}).$$

$$(1 + e^{-\psi_n}) \longrightarrow (1 + e^{-\psi}).$$

y por lo tanto

$$\theta_n \longrightarrow \theta$$

$$\psi_n \longrightarrow \psi.$$

Tenemos pues que

$$\frac{\theta_n - \psi_n}{\pi} \longrightarrow \frac{\theta - \psi}{\pi}.$$

Si

$$2m + 1 < \frac{\theta - \psi}{\pi},$$

existe un intervalo j, tal que

$$\frac{\theta - \psi}{\pi} \in j \subseteq (2m + 1, 2m + 2).$$

En razón de la convergencia de $\frac{\theta_n - \psi_n}{\pi}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq n_0$

$$\frac{\theta_n - \psi_n}{\pi} \in j.$$

Así

$$2m+1 < \frac{\theta_n - \psi_n}{\pi} < 2m+2,$$

o sea $\left[\frac{\theta_n-\psi_n}{\pi}\right] = 2m+1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto

$$2m+1 = \frac{\theta - \psi}{\pi}.$$

Finalemente, $p \in K$.
$\overline{B} = B \cup H$ se prueba de manera semejante.
Después de todo, tenemos los conjuntos $\overline{A}$ y $\overline{B}$, subconjuntos conexos de Y, cumpliendo que

$$\overline{A} \cup \overline{B} = Y,$$

y cuya intersección no es conexa, pues

$$\overline{A} \cap \overline{B} = H \cup K.$$

En otras palabras, Y no es unicoherente.

Para que el producto de espacios unicoherentes sea un espacio unicoherente, es necesaria la conexidad local. Este es precisamente el contenido del teorema siguiente, el cual puede consultar en [GI, pág. 47].

Teorema 3.1.1. Si

$$\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$$

es una familia de espacios unicoherentes y localmente conexos, entonces $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es unicoherente.

3.2. Relación entre unicoherencia y s-conexidad

Hay una relación muy estrecha entre la unicoherencia y la s-conexidad. En esta parte, se demuestra que la unicoherencia y la s-conexidad, coinciden es continuos localmente conexos.

Teorema 3.2.1. Sea (X, τ) s-conexo, normal y localmente conexo. Si $F \in 2^X$ separa X, entonces existe componente K de F que también separa X

Demostración. Debido a que F separa X (véase la definición 1.1.2) existen abiertos P, Q ajenos y no vacíos en $X \setminus F$ tales que

$$X \setminus F = P \cup Q.$$

Sean $p \in P$ y $q \in Q$. Si

$$C \in C(X) \text{ y } p, q \in C,$$

entonces C debe intersectar a F. En caso contrario,

$$C \subseteq X \setminus F = P \cup Q.$$

Por lo tanto $C \subseteq P$ o $C \subseteq Q$, lo cual no puede ser. Así pues

$$F|_X\{p\}, \{q\}.$$

Por hipótesis, existe una componente K de F tal que

$$K|_X\{p\}, \{q\}.$$

Si $X \setminus K$ es conexo, por Teorema 1.3.4, existe $C \in C(X) \cap \mathcal{P}(X \setminus K)$ conteniendo a p y q, , lo cual no ocurre pues K corta débilmente entre p y q. Luego, $X \setminus K$ no es conexo. Por lo tanto K separa X. □

Es necesario recordar un resultado sobre unicoherencia que viene en [GI, págs. 24 y 25].

Teorema 3.2.2. Sea (X, τ) conexo y localmente conexo. Si para cada $L \in 2^X$ que separa X existe una componente de L que separa X entonces X es unicoherente.

Demostración. Supongamos que X no es unicoherente. Es decir, supongamos que existen $H, K \in C(X)$ tales que

$$X = H \cup K \text{ pero } H \cap K \notin C(X).$$

Por lo cual, existen conjuntos ajenos $A, B \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ que satisfacen lo siguiente:

$$H \cap K = A \cup B.$$

Por otro lado, como H es conexo y

$$H \cap A \neq \emptyset \neq H \cap B,$$

el Teorema 1.3.3, garantiza la existencia de una componente C de $X \setminus (A \cup B)$ tal que

$$\overline{C} \cap A \neq \emptyset \neq \overline{C} \cap B \text{ y } C \cap H \neq \emptyset.$$

Obsérvese también que

$$C \subseteq X \setminus (A \cup B) = (X \setminus H) \cup (X \setminus K),$$

y como C es un conjunto conexo e intersecta a H, se tiene que

$$C \subseteq X \setminus K,$$

de lo cual, se deduce que C es una componente de $X \setminus K$.
Ahora bien, tomando en cuenta que $\overline{C}$ intersecta a A y B

$$A \cap \overline{C} = A \cap (C \cup FrC) = A \cap FrC \neq \emptyset$$

$$B \cap \overline{C} = B \cap (C \cup FrC) = B \cap FrC \neq \emptyset$$

Definamos

$$P = A \cap FrC$$

y

$$Q = B \cap FrC.$$

Sea $\{V_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ el conjunto de componentes de $X \setminus \overline{C}$ y

$$\Theta_1 = \{\alpha \in \Delta : FrV_\alpha \subseteq P\}$$

$$\Theta_2 = \{\alpha \in \Delta : FrV_\alpha \subseteq Q\}$$

$$\Theta_3 = \{\alpha \in \Delta : P \cap FrV_\alpha \neq \emptyset \neq Q \cap FrV_\alpha\}.$$

Definamos

$$L_P = P \cup (\bigcup_{\alpha \in \Theta_1} V_\alpha)$$

$$L_Q = Q \cup (\bigcup_{\alpha \in \Theta_2} V_\alpha).$$

Mostremos que:

(a) FrC no es conexa.
Se sabe que C es una componente de $X \setminus (A \cup B)$. Por el Teorema 1.3.2,

$$FrC \subseteq Fr[X \setminus (A \cup B)] = Fr(A \cup B) \subseteq A \cup B.$$

En renglones anteriores, se vio que FrC intersecta a los conjuntos ajenos A y B, por lo que

$$FrC = P \cup Q.$$

(b) $FrC \subseteq K$.
anteriormente se explicó que C es una componente de $X \setminus K$, en consecuencia

$$FrC \subseteq Fr(X \setminus K) = FrK \subseteq K.$$

(c) Para cada $\alpha \in \Delta$, $FrV_\alpha \subseteq P \cup Q$.
Puesto que V_α es una componente de $X \setminus \overline{C}$, entonces

$$FrV_\alpha \subseteq Fr(X \setminus \overline{C}) = Fr(\overline{C}) \subseteq C.$$

Para terminar se aplica (a).

(d) $L_P, L_Q \in 2^X$
Tomemos primero L_p. Por comodidad, sea

$$S_P = \bigcup_{\alpha \in \Theta_1} V_\alpha.$$

Tenemos que

$$Fr(\bigcup_{\alpha \in \Theta_1} V_\alpha) \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha \in \Theta_1} FrV_\alpha}$$

(vea [K, pág. 236 Teorema 1]). De la definición del conjunto L_P, se obtiene que $FrV_\alpha \subseteq P$. Por lo cual

$$Fr(S_P) \subseteq P.$$

Así

$$\overline{L_P} = P \cup \overline{S_P} = P \cup (S_P \cup (FrS_P)) = P \cup S_P = L_P.$$

De manera similar se demuestra que L_Q es cerrado.

(e) $\Theta_3 \neq \emptyset$. Supongamos lo contrario. Para cada $\alpha \in \Delta$,

$$P \cap FrV_\alpha = \emptyset \text{ o } Q \cap FrV_\alpha = \emptyset.$$

Apoyándonos en (c), para cada α,

$$FrV_\alpha \subseteq P \text{ o } FrV_\alpha \subseteq Q,$$

de donde

$$X \setminus \overline{C} \subseteq L_P \cup L_Q.$$

Bajo estas condiciones

$$K \subseteq L_P \cup L_Q.$$

En efecto, según (a)

$$FrC = P \cup Q \subseteq L_P \cup L_Q,$$

entonces

$$K \cap (X \setminus \overline{C}) \subseteq (X \setminus \overline{C}).$$

En resumen: K es un conjunto conexo contenido en la unión de los conjuntos ajenos en 2^X, L_P y L_Q, que segúb (b), satisfacen

$$K \cap L_P \neq \emptyset \neq K \cap L_Q,$$

lo cual contradice la conexidad de K. Por lo tanto, $\Theta_3 \neq \emptyset$.

(f) Si $L_P \cup L_Q$ y

$$\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2,$$

entonces

$$L = FrC \cup (\bigcup_{\alpha \in \Theta} V_\alpha).$$

(g) Si

$$S = \bigcup_{\alpha \in \Theta} V_\alpha$$

entonces

$$X \setminus L = [X \setminus (\overline{C} \cup A)] \cup C.$$

(h) $\overline{C} \cup S \in 2^X$.
Note que

$$Fr(\overline{C} \cup S) \subseteq Fr\overline{C} \cup FrS$$

y

$$FrS = Fr(\bigcup_{\alpha\in\Theta} V_\alpha) \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in\Theta_1} FrV_\alpha}.$$

Por otro lado, utilizando el inciso (c) resulta que

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in\Theta_1} FrV_\alpha} \subseteq \overline{C}.$$

ahora, conjugando las tres contensiones anteriores de este inciso, obtenemos la siguiente expresión:

$$Fr(\overline{C} \cup S) \subseteq Fr\overline{C} \cup FrS \subseteq \overline{C}.$$

En consecuencia

$$\overline{\overline{C} \cup S} = Fr(\overline{C} \cup S) \cup \overline{C} \cup S = \overline{C} \cup S.$$

Por lo tanto $\overline{C} \cup S \in 2^X$.

(i) $X \setminus (\overline{C} \cup S) \neq \emptyset$.
Si

$$X \setminus (\overline{C} \cup S) = \emptyset,$$

entonces $\overline{C} \cup S = X$, razón suficiente para que

$$S = X \setminus \overline{C}.$$

Esto contradice (e), es decir, que hay una componente de $X \setminus \overline{C}$ que no está contenida en S.

(j) $X \setminus L_P$ y $X \setminus L_Q$ son conexos.
Probemos que $X \setminus L_P$ es conexo. $C \cup Q$ es un conjunto conexo, pues C es conexo y

$$C \subseteq C \cup Q = C \cup (B \cap FrC) \subseteq \overline{C}.$$

De manera que el conjunto

$$R = C \cup Q \cup (\bigcup\{V_\alpha : Q \cap FrV_\alpha \neq \emptyset\})$$

es conexo. Para probar que $X \setminus L_P$ es conexo, basta con probar la igualdad

$$X \setminus L_P = R.$$

Supongamos que $x \in X \setminus L_P$. Si $x \in X \setminus \overline{C}$, existe α tal que

$$x \in V_\alpha.$$

Como $x \notin L_P$, entonces $x \notin P \cup S_P$. Por ende

$$FrV_\alpha \subseteq Q \text{ o } P \cap FrV_\alpha \neq \emptyset \neq Q \cap FrV_\alpha.$$

En cualquier caso, $x \in R$. Supongamos ahora que $x \in \overline{C}$. En caso de que $x \in C$, entonces $x \in R$. Si $x \in FrC$, como $x \notin P$, se tiene que $x \in Q$. Por consiguiente, $X \in R$. Se ha probado que

$$X \setminus L_P \subseteq R.$$

Para la otra contensión, sabemos que, para cada α,

$$\overline{C} \cap V_\alpha.$$

Por lo tanto,

$$L_P \cap C = (C \cap P) \cup (C \cap S_P) = \emptyset$$
$$L_P \cap Q = Q \cap S_P = B \cap S_P \cap FrC = B \cap S_P \cap \overline{C} = \emptyset$$
$$L_P \cap (\bigcup \{V_\alpha : Q \cap FrV_\alpha \neq \emptyset\}) = \emptyset.$$

Para finalizar, nótese que según los incisos (g), (h) e (i), L separa X. Además, si T es una componente de L, entonces T es una componente de L_P o L_Q. Sin pérdida de generalidad, supongamos que T es una componente de L_P. En otras palabras, T es una componente de

$$X \setminus (X \setminus L_P),$$

donde $X \setminus L_P$ es conexo. Por el Teorema 1.2.2,

$$X \setminus T$$

es conexo. En conclusión, ninguna componente de L separa X. □

.

Corolario 3.2.1. Si (X, τ) es s-conexo, normal y localmente conexo entonces X es unicoherente.

Demostración. Consecuencia inmediata de los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2. □

Ejemplo 3.2.1. Sea X el círculo con esprial. Ya dijimos que este espacio es unicoherente. Si realizamos sobre S un análisis parecido al del Ejemplo 2.1.1, resulta que X no es s-conexo.

Teorema 3.2.3. [M, Teorema 1] Sea (X, d) un espacio métrico. Si X es un espacio localmente conexo, entonces son equivalentes:

(a) X es s-conexo.

(b) X es unicoherente.

Demostración. (a) $\Longrightarrow$ (b): Revise el Corolario 3.2.1.
(b) $\Longrightarrow$ (a): Sea $H|_X A, B$. Por el Teorema 1.3.5, sabemos que la colección de componentes de $X \setminus H$ es numerable. Denotemos a dicha colección por $\{W_i : i \in \mathbb{N}\}$. Por otro lado, $H|^X A, B$. (véase Teorema 2.1.1). Así que, para cada i

$$W_i \cap A = \emptyset \text{ o } W_i \cap B = \emptyset.$$

Supongamos que ninguna componente de H corta débilmente entre A y B. Esto último implica que A no está contenido en H, lo mismo B.
En lo siguiente sea a construir una sucesión decreciente

$$\{C_i : i \in \mathbb{N} \subseteq C(X)\}.$$

Sea $C_0 = X$ y $U_1 = W_1$. Tenemos que

$$A \subseteq C_0 \setminus U_1 \text{ o } B \subseteq C_0 \setminus U_1,$$

de manera que existe una componente C_1 de $C_0 \setminus U_1$ que contiene A y B. Nótese que:

(i) $U_1 = W_1$,

(ii) $U_1 \subseteq C_0$,

(iii) C_1 es una componente de $C_0 \setminus U_1$, y

(iv) $C_1|^X A, B$ (esto debido a que $C_1|_X A, B$).

Procediento por inducción, supongamos que hemos logrado construir $\{C_i\}_{i=0}^k$ y $\{U_i\}_{i=0}^k$ tales que:

(i) $U_i = W_j$, para alguna $j \geq 1$.

(ii) $U_i \subseteq C_{i-1}$,

(iii) C_i es una componente de $C_{i-1} \setminus U_i$, y

(iv) $C_i|^X A, B$

Construyamos C_{k+1}. En primer lugar, C_k es una componente de $\bigcap_{r=1}^{k}(X \setminus U_r)$, razón: Si C' es un conjunto conexo tal que

$$C_k \subseteq C' \subseteq \bigcap_{r=1}^{k}(X \setminus U_r),$$

entonces

$$C' \subseteq C_0 \setminus U_1 \text{ y } C' \cap C_1 \neq \emptyset.$$

O sea $C' \subseteq C_1$; más aún, como C' no tiene puntos en común con U_2, podemos escribir $C' \subseteq C_1 \setminus U_2$, pero C_2 es componente de $C_1 \setminus U_2$, por lo que $C' \subseteq C_2$. De manera sucesiva

$$C' \subseteq C_{k-1} \setminus U_k.$$

de donde $C' \subseteq C_k$, por lo cual $C' = C_k$.
Ahora bien, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $C_k \cap W_j \neq \emptyset$, de lo contrario

$$X \setminus H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i \subseteq X \setminus C_k,$$

en otras palabras, $C_k \subseteq H$. Esto es una contradicción, pues se está suponiendo que ninguna componente de H corta débilmente entre A y B. Si

$$j_k = \text{mín}\{j \in \mathbb{N} : W_j \cap C_k \neq \emptyset\},$$

sea $U_{k+1} = W_{j_k}$. Como $C_k \cup U_{k+1}$ es un conjunto conexo y

$$U_{k+1} \subseteq \bigcap_{r=1}^{k}(X \setminus U_r),$$

entonces

$$C_k \cup U_{k+1} \subseteq \bigcap_{r=1}^{k}(X \setminus U_r).$$

Así, $U_{k+1} \subseteq C_k$.
Utilizando U_{k+1} definamos C_{k+1}. Sabemos que

$$U_{k+1} \cap A = \emptyset \text{ o } U_{k+1} \cap B = \emptyset.$$

Supongamos que $U_{k+1} \cap A = \emptyset$. Si

$$A \cap (C_k \setminus U_{k+1}) \neq \emptyset.$$

Sea C_{k+1} cualquier componente de $C_k \setminus U_{k+1}$ tal que $C_{k+1} \cap A \neq \emptyset$ Si

$$A \cap C_k = \emptyset,$$

sea C_{k+1} cualquier componente de $C_k \setminus U_{k+1}$ tal que

$$C_{k+1} \cap I_A \neq \emptyset,$$

donde $I_A \in C(X)$, es algún minimal de A a C_k. Para completar el paso inductivo, probemos (iv), es decir $C_{k+1}|^X A, B$. Digamos que es falso que $C_{k+1}|^X A, B$, entonces también es falso $C_{k+1}|_X A, B$ Así, existe $Q \in C(X)$ tal que

$$Q \cap A \neq \emptyset, Q \cap B \neq \emptyset \text{ y } Q \cap C_{k+1} = \emptyset$$

(véase Teorema 2.1.1). Como $C_k|^X A, B$, entonces $Q \cap C_k \neq \emptyset$. Sea $I_Q \in C(Q)$ algún elemento minimal, tal que

$$I_Q \cap A \neq \emptyset \neq I_Q \cap C_k.$$

Probemos lo siguiente:

1. $U_{k+1} \cap I_Q = \emptyset$.
   Supongamos que $U_{k+1} \cap I_Q \neq \emptyset$. Sea

   $$E = I_Q \setminus U_{k+1}.$$

   E no es vacío, pues si $q \in I_Q \cap A$ entonces $q \in E$. E es subconjunto propio de I_q (si $x \in U_{k+1} \cap I_Q$, $x \notin E$) y $E \in 2^{I_Q}$. Sea K una componente de E que intersecte a A, por el Teorema 1.2.7,

   $$\emptyset \neq K \cap \overline{I_Q \setminus E} = K \cap \overline{U_{k+1}} \subseteq K \cap C_k.$$

Entonces K es un conjunto compacto y conexo tal que

$$K \cap A \neq \emptyset \neq K \cap C_k, \text{ y } K \subset I_Q,$$

lo cual no puede ser, pues I_q es minimal.

2. Existe componente C de $C_k \setminus U_{k+1}$ tal que

$$C \cap C_{k+1} = \emptyset \text{ y } C \cap I_Q \neq \emptyset.$$

Supongamos lo contrario. Como I_Q no intersecta a C_{k+1} ($Q \cap C_{k+1} = \emptyset$), entonces no intersecta a ninguna componente de $C_k \setminus U_{k+1}$, pero $I_Q \cap C_k \neq \emptyset$, de donde

$$I_Q \cap C_k = I_Q \cap (C_k \setminus U_{k+1}) \cup I_Q \cap U_{k+1} \neq \emptyset.$$

Así, $I_Q \cap U_{k+1} \neq \emptyset$, lo que contradice (1).

3. $U_{k+1} \cap I_A = \emptyset$.
Se realiza de la misma manera que (1).
Sea R la componente de $X \setminus U_{k+1}$ que contiene a A. Si $A \cap C_k = \emptyset$, entonces

$$\emptyset \neq I_A \cap C_{k+1} \subseteq R \cap C_{k+1}.$$

En consecuencia, R intersecta a dos componentes diferentes de $C_k \setminus U_{k+1}$,a saber, C y C_{k+1} (nótese que $I_Q \subseteq R$); si

$$A \cap C_k \neq \emptyset,$$

entonces R intersecta a C y C_{k+1}. En cualquier caso, R intersecta a $C_k \setminus U_{k+1}$ en dos componentes diferentes: C y C_{k+1}.
De pasada sea dicho que, R es un conjunto compacto y conexo, que no está contenido en C_k. Si

$$R \subseteq C_k \setminus U_{k+1},$$

entonces

$$C \cup C_{k+1} \cup R = C$$

y en consecuencia $C_{k+1} \subseteq C$, lo cual no puede ser (véase (2)).
Por otro lado, sea

$$S = C_k(\bigcup\{T : T \text{ es componente de } X \setminus U_{k+1} \text{ y } T \cap R = \emptyset\}).$$

T es una componente del conjunto cerrado $X \setminus U_{k+1}$, por el Teorema 1.2.7, entonces

$$\emptyset \neq T \cap \overline{X \setminus (X \setminus U_{k+1})} = T \cap \overline{U_{k+1}} \subseteq T \cap C_k,$$

por ésta razón, S es conexo.
Ahora desmostraremos que $S \in 2^X$. Si

$$x \in \overline{S} \setminus S$$

entonces $x \in R$; sea V la componente de $X \setminus C_k$ (recuerde que $U_{k+1} \subseteq C_k$) que contiene a x. Naturalmente que $V \cap S \neq \emptyset$. Por lo tanto, V intersecta a alguna componente T de $X \setminus U_{k+1}$ diferente de R. Si $t \in V \cap T$, como X es localmente conexo (véase Teorema 1.3.4), existe $L \in C(X) \cap \mathcal{P}(V)$ tal que

$$L \cap R \neq \emptyset \neq L \cap T.$$

Luego, $R \cup L \cup T$ es un conjunto conexo en $X \setminus U_{k+1}$ que intersecta a R, pues R, $T \subseteq X \setminus U_{k+1}$ y

$$L \subseteq V \subseteq X \setminus U_{k+1}.$$

En consecuencia $R \cup L \cup T \subseteq R$, o sea $T \subseteq R$, lo cual es falso. Por lo tanto $\overline{S} \setminus S = \emptyset$. De manera que $S \in C(X)$.
Es evidente que

$$X = R \cup S.$$

Por la unicoherencia, $R \cap S$ debería ser conexo. Sin embargo,

$$R \cap S \subseteq C_k \setminus U_{k+1}$$

$$\emptyset \neq R \cap C_{k+1} \subseteq R \cap S$$

y

$$\emptyset \neq R \cap C \subseteq R \cap S.$$

En otras palabras, tenemos un subconjunto conexo de $C_k \setminus U_{k+1}$ que intersecta a dos de sus componentes, lo cual es absurdo. Todo por suponer que $C_{k+1}|_X A, B$ es falso. Entonces C_{k+1} corta débilmente entre A y B en X.

Es claro que $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \in C(X)$.
Ahora, probemos que

$$F|_X A, B.$$

Si $K \in C(X)$ y

$$K \cap A \neq \emptyset \neq K \cap B,$$

entonces

$$K \cap C_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \mathbb{N},$$

pues $C_i|_X A, B$. Si $K \cap F = \emptyset$ entonces

$$F \subseteq X \setminus K.$$

Como $C_{i+1} \subseteq C_i$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$C_{i_0} \subseteq X \setminus K,$$

lo cual es una contradicción. Así $K \cap F \neq \emptyset$, luego $F|_X A, B$.
En lo siguiente se muestra que

$$F \subseteq H.$$

Si $f \in F \setminus H$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f \in W_{n_0}$; bajo éste supuesto $f \in W_{n_0} \cap C_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Como $W_{n_0} \subseteq C_i$ para cada i (revise cómo se demostró que $U_{k+1} \subseteq C_k$), entonces $W_{n_0} \subseteq F$. Anteriormente definimos

$$j_k = \text{mín}\{j \in \mathbb{N} : W_j \cap C_k \neq \emptyset\}.$$

Podemos formar el conjunto

$$I = \{j_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

I es infinito, de lo contrario, existen $k, h \in \mathbb{N}$ (sin pérdida de generalidad, $k < h$, es decir $k + 1 \leq h$) tales que $j_k = j_h$. De acuerdo a esto, $U_{k+1} = U_{h+1}$. Sin embargo,

$$U_{h+1} \subseteq C_h \subseteq C_{k+1} \subseteq C_k \setminus U_{k+1}$$

lo cual es absurdo. De manera que I es infinito. Si k es tal que $j_k > n_0$, llegamos a una contradicción, pues j_k es el mínimo natural tal que

$$W_{j_k} \cap C_k \neq \emptyset.$$

Así pues, $F \subseteq H$.
Si F' es la componente de H que contiene a F,entonces

$$F'|_X A, B.$$

De cualquier manera llegamos a una contradicción, pues en el inicio de la demostración dimos por hecho que ninguna componente de H cortaba débilmente entre A y B.

□

Corolario 3.2.2. Si

$$\{(X_i, d_i) : i \in \mathbb{N}\}$$

es una familia de continuos s-conexos y localmente conexos, entonces $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ es s-conexo.

Demostración. Es consecuencia del Teorema 3.2.3 y de que el producto de espacios unicoherentes y localmente conexos es unicoherente. □

La unicoherencia hereditaria, definida en el párrafo siguiente, es otro concepto muy importante. A partir de la relación tan estrecha entre la s-conexidad y la unicoherencia, surge una pregunta bastante natural: ¿existe alguna relación entre la unicoherencia hereditaria y la s-conexidad?

Definición 3.2.1. Se dice que un espacio topológico conexo (X, τ) es hereditariamente uicoherente, si cada elemento de $C(X)$ es unicoherente.

Es claro que cada espacio hereditariamente unicoherente es unicoherente. Por el Teorema 3.2.3, un continuo localmente conexo y hereditariamente unicoherente, es s-conexo. Sin embargo, no todo continuo localmente conexo y s-conexo es hereditariamente unicoherente.

Ejemplo 3.2.2. Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$. X es un continuo, unicoherente y localmente conexo. Por el Corolario 3.2.2, X no es s-conexo. Es fácil encontrar elementos de $C(X)$, que no son unicoherentes. Por lo tanto, X no es hereditariamente unicoherente.

Bibliografía

[B] R. E. Basye, *Simply connected sets*, AMS Transactions. 38 (1935), 341-344.

[E] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlang Berlín, 1998.

[F] F. Hernández, *Teoría de Conjuntos*, Aportaciones Matemáticas, serie textos, 13, Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[GI] A. García-Máynez y A. Illanes, *A survey on unicoherence and related properties*, An. Ins. Mat., UNAM. 29 (1989), 17-26.

[IN] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[K] K. Kuratowski, *Topology*, Vol II, Academy Press, New York, 1968.

[M] M. M Marsh, *s-connected spaces and the fixed point property*, Topology Proc. 8 (1983), 85-91.

[N] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[V] W. L. Voxman y C. 0. Christenson, *Aspects of topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.