BUAP

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Secuencia didáctica: Geometría no euclidiana para físicos

Tesis Presentada al

Colegio de Física

como requisito para la obtención del grado de

Licenciatura

por

Fernando Beristain García

asesorado por

Dra. Mercedes P. Velázquez Quesada
Dr. Iván Martínez Ruiz

Puebla, Pue.

Diciembre 2024

Secuencia didáctica: Geometría no euclidiana para físicos.

Tesis

Fernando Beristain García

Dra. Mercedes P. Velázquez Quesada

Dr. Iván Martínez Ruiz

Título: Secuencia didáctica: Geometría no euclidiana para físicos.

Estudiante: Fernando Beristain García

COMITÉ

Dra. Patricia Mendoza Méndez
Presidente

M.C. Adrian Cruz Corona
Secretario

Dr. Josip Slisko Ignjatov
Vocal

Dra. Iraís Rubalcava García
Suplente

Dra. Mercedes P. Velázquez Quesada
Dr. Iván Martínez Ruiz
Asesores

Gracias / Para

A...

Mi esposa e hija, que son el motivo de lo que soy y seré a lo largo de mi vida, mi esposa que ha estado conmigo en todo momento y dedicado un gran esfuerzo para salir adelante juntos, quien me ha apoyado incansablemente desde el primer día que nos conocimos y me ha demostrado ser la mejor compañera de vida que pude elegir, indudablemente es y siempre será la mujer con la que deseo compartir esta vida. Mi hija quien desde que nació me enamoró, quien me hizo salir adelante y lograr cosas que jamás hubiera hecho sin ella, la reina de la casa y a quien siempre le daré todo lo que pueda, ella fue quien me motivó a dar este último paso de mi vida académica y por ella haré lo que sea por que tenga una mucho mejor vida que la mía.

A mis padres, quienes fueron el pilar principal de toda mi vida académica, quienes trabajaron duro para brindarme una buena educación y nunca descansaron para que yo pudiera obtener este gran logro, ellos que incluso a la fecha se preocupan y están disponibles para lo que necesito, me han dado incluso más de lo que deberían, ellos son una parte muy importante que indudablemente, sin ellos, jamás habría concluido mis estudios.

A mis hermanos, con quienes tuve la mejor infancia y han estado apoyándome siempre, quienes nunca han dejado de verme como el pequeño e indefenso hermano menor, con quienes siempre cuento cuando los necesito, así como ellos cuentan conmigo.

A mis asesores, que dedicaron un gran tiempo y esfuerzo para orientarme en la realización de mi trabajo final, que me dieron consejos y supieron guiarme para no rendirme en este último paso, que sin sus palabras y sabiduría jamás habría logrado llegar a este anhelado día.

A mi profesores que me proporcionaron su conocimiento a lo largo de mi vida académica, quienes dedicaron todo el tiempo y esfuerzo para transmitirnos su conocimientos, todos y cada uno de ellos me acercó a este día es por eso que hoy les agradezco infinitamente, pues fue por ellos que estoy en donde estoy ahora.

A mis compañeros fueron demasiados con quienes compartí clases y quienes muchos de ellos compartí grandes momentos, una amistad que al pasar el tiempo se ha mantenido, quienes pueden estar a kilómetros de distancia pero siempre los llevo en el corazón, gracias por formar parte de mi vida.

A mi casa de estudios que me exigió y me hizo esforzarme al máximo para lograr concluir mis estudios, me hizo darme cuenta de lo que soy capaz y que la tarea aunque no fue fácil pude lograrlo, a todo el personal de dirección y administrativo, que nos orientan y apoyan cuando tenemos dudas, que se toman el tiempo y tienen la paciencia para que los alumnos podamos llevar una vida académica mas sencilla.

Índice general

1. Marco Histórico **8**

2. La geometría en el plano Euclidiano **16**

2.1. Punto y Recta 16

2.2. Rectas Paralelas y Ángulo 17

2.3. Suma de Ángulos de un triangulo 18

2.4. Distancia 19

3. Geometría Esférica **21**

3.1. Punto 21

3.2. Puntos Antípodas 22

3.3. Círculo máximo y geodésica 22

3.4. Distancia entre dos puntos 24

3.5. Fórmula de Girard y Ángulos 24

3.6. Polígonos esféricos 27

4. Geometría Hiperbólica **29**

4.1. El espacio de Minkowsky 29

4.2. El plano hiperbólico 30

4.3. Geodésica 31

4.4. Distancia entre dos puntos 33

4.5. Ángulo 33

4.6. Área y suma de ángulos de un triángulo 34

4.7. Polígonos hiperbólicos 38

5. Plan de clase **40**

5.1. Título: Entendiendo la geometría plana, esférica e hiperbólica. 40

5.2. Secuencia didática. 40

5.3. Sesión 1: Introducción a las geometrías no Euclidianas. 41

5.4. Sesión 2: Geometría esférica. 42

5.5. Sesión 3: Geometría hiperbólica. 43

6. Conclusiones: **45**

A. Experimento para entender la geometría esférica. **46**

A.1. Triángulos esféricos. 46

B. Visualización de polígonos en $\mathbb{H}^2$ y $\mathbb{K}^2$ **48**

B.1. Actividad para realizar. 49

Resumen

En este trabajo se creó una guía para que un facilitador, con un nivel de licenciatura en ciencias, pueda impartir una secuencia didáctica sobre geometrías no euclidianas dirigido a estudiantes de los primeros semestres de la licenciatura en física. Solamente se trabajó con tres geometrías la geometría plana (euclidiana), esférica e hiperbólica.

Para dicha secuencia se crearon una serie de simulaciones y experimentos, con los que se hace visible la estructura de los objetos geométricos, y, por tanto, se hace más sencillo comprender conceptos básicos, así como algunos muy contra-intuitivos de estas geometrías.

Con este material se generó una secuencia didáctica de tres sesiones con una duración de dos horas cada una, en la que se ven las similitudes y diferencias que tienen entre sí las tres diferentes geometrías presentadas. Se espera que al concluir las sesiones con las actividades propuestas los estudiantes amplíen su conocimiento en geometría, entiendan que la geometría en el plano euclidiano es solamente un caso particular de las geometrías riemannianas y sepan identificar las variaciones y semejanzas en las tres geometrías vistas en esta secuencia didáctica. La finalidad es que los estudiantes puedan tener una visión más clara de las distintas geometrías y con ello puedan entender con mayor facilidad lo que se ve a lo largo de la licenciatura en Física.

Se implementan tres actividades de apertura, tres actividades de desarrollo y tres actividades de cierre.

Abstract

In this work, a guide was created for a facilitator with an undergraduate degree in science to teach a didactic sequence on non-Euclidean geometries, aimed at students in the early semesters of a physics degree. Only three geometries were covered: plane (Euclidean), spherical, and hyperbolic geometry.

For this sequence, a series of simulations and experiments were created to make the structure of geometric objects visible, thereby making it easier to understand basic concepts, as well as some highly counter-intuitive aspects of these geometries.

This material was used to generate a didactic sequence of three sessions, each lasting two hours, where the similarities and differences between the three geometries presented are explored. It is expected that by the end of the sessions, through the proposed activities, students will expand their knowledge of geometry, understand that Euclidean plane geometry is just a particular case of Riemannian geometries, and be able to identify the variations and similarities among the three geometries covered in this didactic sequence.

The goal is for students to gain a clearer understanding of different geometries, enabling them to more easily grasp the concepts encountered throughout their physics degree.

Three opening activities, three development activities, and three closing activities are implemented.

Introducción

La presente tesis aborda tres distintas geometrías: geometría plana o euclidiana (que es la que estudiamos desde preescolar hasta bachillerato), la geometría esférica y la geometría hiperbólica, que por su característica de describir un espacio curvado no es común conocerlas. Por ello, al iniciar una licenciatura en física, es común tener un desconocimiento parcial o total de las geometrías curvas; esta tesis desarrolla el material necesario para que un estudiante que esté finalizando su licenciatura en el área de ciencias (o ya sea egresado) pueda impartir una secuencia didáctica con una duración aproximada de seis horas, dirigido a colegas de nuevo ingreso. El material fue creado buscando que sea práctico y sencillo en su entendimiento, las matemáticas tienen un grado medio-alto pero con una base matemática correcta resulta bastante comprensible. Con este material se prepara al expositor para poder explicar sin ninguna dificultad las tres diferentes geometrías ya mencionadas; así mismo se le prepara para que pueda responder dudas que puedan surgir a los estudiantes en la presentación de esta secuencia didáctica. Además se cuenta con simulaciones y experimentación como material de apoyo, con el cual la visualización y comprensión de los temas serán más sencillas.

El objetivo para desarrollar este trabajo es que las nuevas generaciones de futuros físicos no tengan las mismas complicaciones que el autor de esta tesis, quien desconocía en su totalidad la existencia de las geometrías curvas y esto ocasionó mucha dificultad en la comprensión de los temas que abordan una geometría diferente a lo largo de la vida universitaria.

Planteamiento del problema.

Durante nuestra etapa universitaria, algunos de los profesores que imparten las materias del mapa curricular, asumen que ya hemos adquirido todo el conocimiento necesario para cursar sin problema alguno el temario establecido de cada materia. Sin embargo, no siempre es así. Este es el caso de la teoría abordada en este trabajo de tesis.

Las geometrías no euclidianas no se estudian hasta un nivel universitario y, al menos en los planes de estudio de Física y Física Aplicada de la FCFM de la BUAP, no está incluido explícitamente en alguna materia. Es entonces importante diseñar un acercamiento al tema para los estudiantes. Una conclusión en este mismo sentido, se encuentra en el **artículo 8** Cardinali, A., & Piergallini, R. (2020). Learning non-Euclidean geometries: Impact evaluation on Italian high-school students regarding the geometric thinking according to the Van Hiele theory, Universidad de Camerino, Italia. Donde se menciona que para tener una buena comprensión de las geometrías no euclidianas es importante que las bases de la geometría clásica (euclidiana) sean adecuadas para que, de este modo, los estudiantes puedan comprender sin una mayor dificultad los conceptos básicos de las geometrías Riemannianas.

El trabajo realizado en esta tesis va dirigido a estudiantes de ciencias que estén interesados en aprender geometrías Riemannianas con la finalidad de que su vida académica sea más comprensible en materias que se requieran tener una noción de estas, por ejemplo:

- **Electrodinámica:** En temas como el campo eléctrico ($\vec{E}$) y el campo magnético ($\vec{B}$).
- **Métodos matemáticos de la física III:** En el tema de sistema de coordenadas especiales, coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas.
- **Física contemporánea con laboratorio:** En el tema de teoría de la relatividad especial.

El factor más relevante que llevó a elaborar este trabajo es enseñarnos que hay más geometrías aparte de la geometría plana. Además de compartir cómo la determinación y busca del conocimiento, nos lleva al descubrimiento de nuevas matemáticas que, a pesar

de estar en nuestro entorno, no son fáciles de comprender. Veremos que no fue sencillo encontrar solución al tan famoso problema sobre el **quinto postulado de Euclides**. Con este trabajo se busca, poder enseñar y facilitar la comprensión de temas tan atractivos y complejos como son las geometrías en diferentes espacios.

Antecedentes.

Para el desarrollo de este trabajo se tomó como base el Diplomado de Formación Docente para favorecer el pensamiento crítico en clubes de ciencia, impartido por profesores y estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. En él se abordan distintos temas, entre ellos, el estudio de la geometría en un enfoque no clásico, en esa sección se presenta la geometría esférica y se desarrollan una serie de actividades para hacer que el tema sea lo más claro posible. Tomamos esto como base y se comenzó a trabajar para ampliar estos conceptos, mejorar las explicaciones y abarcar no solo una sino tres geometrías; se hizo un marco histórico para presentar el tema y explicar de dónde y cómo surgen las geometrías curvas, quienes fueron los precursores, así como quienes resolvieron la problemática del quinto postulado de Euclides. Partimos de la geometría euclidiana y se hace un recordatorio de todos los conceptos básicos, cuyo conocimiento está presente desde el nivel secundaria; posteriormente desarrollamos toda la teoría y se explican conceptos fundamentales para las geometrías esférica e hiperbólica; además, se realizó un plan de clase para sugerir y orientar al expositor cómo explicar estos temas a los estudiantes de la manera más adecuada, teniendo al alcance en este trabajo toda la teoría que necesita para presentar la secuencia didáctica. Las simulaciones presentadas a lo largo de este trabajo, así como las figuras para poder visualizar la geometría en un espacio curvado fueron diseñadas por el autor de esta tesis.

La geometría hiperbólica es el tema menos abordado en trabajos similares a este, es por ello que las simulaciones elaboradas sirven como un gran apoyo para el entendimiento de esta, ya que usualmente se visualiza la geometría mediante proyecciones o modelos en el plano, sin embargo en esta tesis se hace la visualización directamente el un hiperboloide de dos hojas, facilitando el entendimiento de la geometría en un plano de esta índole.

Se espera que tanto el ponente como los estudiantes aprovechen en su totalidad dichas simulaciones, pues en ellas pueden ver desde una geodésica, hasta la generación de

polígonos.

En la presente tesis se abordan conceptos elementales de la geometría euclidiana basados en el libro "los elementos" de Euclides; estos conceptos son mencionados en el capítulo 1 y podemos notar que son definiciones simples. Para tener una mejor percepción de estas definiciones se recomienda consultar el **artículo 5** Nugroho, K. U. Z., Sukestiyarno, Y. L., & Nurcahyo, A. (2021). The weaknesses of Euclidean geometry: A step of needs analysis of non-Euclidean geometry learning through an ethnomathematics approach., en el cual se mencionan las debilidades y complicaciones que tienen los estudiantes al estudiar geometría.

Perfil del ponente.

Quien presente esta secuencia didáctica deberá tener un conocimiento medio-alto en matemáticas, que haya cursado satisfactoriamente materias como: Geometría analítica, cálculo integral, cálculo diferencial, se sugiere alguien con nivel licenciatura, egresado o en su último semestre de una licenciatura en física o matemáticas.

Perfil de los estudiantes.

Los interesados son estudiantes de nivel superior con una base en geometría plana básica, quienes en su mapa curricular tengan materias donde se requiera un entendimiento de las geometrías en un espacio curvado.

Objetivos.

- Proveer el material y la teoría necesarios a un facilitador para poder orientar a los estudiantes de nuevo ingreso en la licenciatura de física, matemáticas o afines en el entendimiento de la geometría esférica e hiperbólica, con la finalidad de facilitar el entendimiento de sus futuras materias que requieran geometrías con espacio curvado.
- Ayudar a los estudiantes que tomen esta secuencia didáctica en su futuro académico, teniendo un concepto adecuado y un mejor perspectiva de las geometrías curvas que estarán presentes a lo largo de toda su vida académica a nivel licenciatura.

- Mostrar de manera visual las diferencias y similitudes que se presentan al cambiar de una geometría plana a una curva. Así como entender con mayor claridad que dependiendo del plano en el que nos encontremos el quinto postulado de Euclides resulta de manera diferente.

Contenido.

El contenido de la tesis está organizado de la siguiente manera:

En el **capitulo 1** se presenta cómo surgen las geometrías no euclidianas a partir del libro "Los Elementos" de Euclides, en el cual desarrolla toda su teoría geométrica a partir de 23 definiciones, 5 axiomas y 5 postulados. El quinto de esos postulados fue el que generó polémica en la comunidad matemática y, a partir de ese momento, los matemáticos se dieron la tarea de mostrar que este postulado debía considerarse como un teorema. En este capítulo, se hace mención de algunos de los matemáticos que incursionaron en la resolución del problema, sin embargo hacemos mayor énfasis en **János Bolyai**, **Nikolai Ivanovich Lobachebsky** y **Karl Friedrich Gauss** a quienes se les considera como los verdaderos descubridores de la **geometría hiperbólica** al ser los pioneros en convencerse de la independencia del quinto postulado. Finalmente mencionamos a **Georg Friedrich Bernhard Riemann** quien fue el encargado de resolver y darle fin al problema del quinto postulado, presentando lo que hoy conocemos como **geometría riemmaniana**, que generalizó la geometría en espacios curvados. Fue gracias a ellos que se pudo resolver este gran enigma de la matemática, que tardó alrededor de 2 mil años en ser resuelto.

En el **capitulo 2** se hace un recordatorio de los conocimientos previos que debemos tener, son temas que conocemos desde nivel secundaria sin embargo se consideró adecuado hacer un repaso. No abordamos a gran detalle la geometría plana, simplemente tocamos temas como punto, recta, rectas paralelas, ángulo; estos conceptos son la base de nuestro trabajo ya que veremos su análogo en otras geometrías. También mencionamos temas como distancia entre dos puntos y el teorema de la suma de los ángulos internos de un triangulo ya que, particularmente estos conceptos, son los que hacen notorio el cambio dependiendo del espacio en el que trabajemos.

En el **capitulo 3** comenzamos con una de las geometrías curvas, la **geometría esférica** damos definiciones de los conceptos básicos como punto, punto antípoda y comenzamos

con los conceptos que son diferentes en este espacio esférico, como lo son las rectas, el cálculo de distancia entre dos puntos en este plano, hacemos énfasis en la suma interna de los ángulos de un triangulo, pues en esta geometría resultan ser mayores que π (180°).

Por último en este capítulo abordamos cómo se generan polígonos en esta geometría pues no únicamente podemos trabajar con triángulos, podemos formar cuadriláteros, pentágonos, etc. Incluso podemos generar círculos.

En el **capitulo 4** exponemos la segunda geometría curva de este trabajo, la **geometría hiperbólica**; primero se presenta lo que se conoce como el **espacio de Minkowsky** y definimos su producto interno. Posteriormente definimos el plano hiperbólico en el cual se estará trabajando; damos el concepto de recta y lo que es una recta paralela en este espacio, definimos cómo calcular la distancia entre dos puntos y damos el concepto de ángulo. Además vemos cómo calcular el área de un triángulo así como la suma interna de sus ángulos; para ello definimos el llamado **modelo de Klein** con el que tendremos un mayor entendimiento y una perspectiva más amplia de como visualizar lo que ocurre en el plano hiperbólico. Posteriormente vemos las rectas paralelas y ultra-paralelas en el modelo de Klein.

Finalmente se muestra que es posible generar polígonos en este espacio, mostramos un cuadrilátero y un conjunto de puntos que pertenecen a una circunferencia en este espacio.

En el **capitulo 5** presenta una la secuencia didáctica generada a partir de la guía de Angel Díaz-Barriga (GUIA PARA LA ELABORACION DE UNA SECUENCIA DIDACTICA. Comunidad de Conocimiento UNAM. 2013. Se propone un orden a seguir, sin embargo el facilitador tiene la libertad de presentar el material de modo que lo considere más adecuado.

Se proporciona como material de apoyo una simulación de las dos geometrías vistas en esta tesis con el que se podrá hacer que los estudiantes visualicen los conceptos que les generen dificultades y un experimento para la geometría esférica con el cual se quiere que los estudiantes se convenzan y visualicen que efectivamente los ángulos internos de un triangulo son diferentes en una geometría curva. Todo este material viene incluido en los apéndices de esta tesis.

Capítulo 1

Marco Histórico

Las geometrías no euclidianas tuvieron sus inicios a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, cuando en las matemáticas se comenzó a resolver el problema del 5° postulado de Euclides. Euclides (325 AC - 265 AC) un filosofo griego fue quien sentó las bases de la geometría, recolectó y plasmó su conocimiento de esa época y escribió su libro llamado *Los Elementos*, en este nos define la geometría con 48 proposiciones, las cuales se deducen lógicamente de un conjunto de 23 definiciones, 5 axiomas y 5 postulados.
En esta geometría, que posteriormente sería nombrada **Geometría Euclidiana (o plana)** en honor a Euclides, se dan 23 definiciones de los conceptos más básicos como: punto, recta, plano, círculo, etc. Los 5 axiomas se consideran verdades que, por su obviedad, no necesitan ser demostrados en cualquier ciencia y los 5 postulados establecen las verdades evidentes que cumplen algunos de los conceptos básicos, restringidos a la geometría plana. Se en listaran los 5 axiomas y 5 postulados a continuación:

Axiomas:

1. Las cosas que sean iguales a la misma cosa son iguales entre si.
2. Si a cantidades iguales se le suman cantidades iguales, los totales serán iguales.
3. Si a cantidades iguales se le restan cantidades iguales, los resultados serán iguales.
4. Las cosas que coinciden entre si son iguales entre si.

5. El todo es mayor que una parte.

Postulados:

1. Una recta puede trazarse desde un punto cualquiera hasta otro.
2. Una recta finita puede prolongarse continuamente y hacerse una recta ilimitada o indefinida.
3. Una circunferencia puede describirse con un centro y una distancia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta que corte a otras dos, forma con éstas ángulos interiores del mismo lado de ella que sumados sean menores que dos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma sea menor que dos rectos.

Notamos que los primeros cuatro postulados son simples, cortos y claros, por ello se aceptaron sin ningún problema, pero, el quinto es el que nos pica la curiosidad, pues no es tan simple y claro como los anteriores, el mismo Euclides era consiente de esto y se cree que él esperaba poder deducirlo lógicamente de los cuatro anteriores.
Muchos matemáticos al notar este hecho comenzaron a tratar de simplificar este postulado o de probar que era consecuencia de los otros cuatro postulados. Algunos de ellos son: Saccheri (1667 - 1733); Lambert (1728 - 1777); D'Alembert (1717 - 1783); Lagrange (1736 - 1813); Legendre (1752 - 1833); Playfair (1748 - 1819); Laplace (1749 - 1827); Farkas Bolyai (1775 - 1856); Wachter(1792 - 1818); Schweikart (1780 - 1859); Taurinus (1794 - 1874).
La tarea resultó ser demasiado complicada, pues nadie podía probar este postulado, así que comenzaron a enunciar postulados equivalentes a este, la versión más utilizada es la de Playfair que dice así:

"Por un punto dado, exterior a una recta, sólo puede trazarse otra (única) paralela a ella".

Fueron Saccheri y Lambert los precursores de nuevas geometrías donde no se considera el quinto postulado, pues en el camino de querer demostrar la no independencia de este, descubrieron muchos de los teoremas de la geometría No-euclidiana.

A continuación presentaremos una breve reseña de algunos de los matemáticos que trabajaron estas geometrías.

János Bolyai

(15 de diciembre de 1802 - 27 de enero de 1860)

Matemático húngaro, hijo de Farkas Bolyai quien también fue matemático, fue pionero en el descubrimiento de la geometría hiperbólica (se verá mas adelante). Cuando su padre se dio cuenta de que, al igual que él, János estaba intentando demostrar el quinto postulado, le hace una advertencia para que no lo hiciera a través de una carta en el año 1820 en la cual le dice:

"Por amor de Dios te lo ruego, olvídalo. Témelo como a las pasiones sensuales, porque lo mismo que ellas, puede llegar a absorber todo tu tiempo y privarte de tu salud, de la paz del espíritu y de la felicidad en la vida. Este abismo oscuro puede, quizás devorar unos mil Newtons, uno sobre otro, nunca habrá luz sobre la tierra."

Sin embargo, János hace caso omiso y por esta misma época concluye que es imposible probar el quinto postulado a partir de los cuatro anteriores.

Nikolai Ivanovich Lobachebsky

(2 de noviembre de 1793 - 24 de febrero de 1856)

Huérfano de padre desde los 7 años, ingresó al instituto de Kazan a los 8 años, a los 14 sería aceptado en la universidad de Kazan, donde pasaría 40 años de su vida. Con tan solo 18 años obtuvo su título de maestría en física y a los 34 ya era rector de la universidad. Se cuenta que era un un trabajador incansable y que aún siendo rector, se daba tiempo para limpiar el polvo de la biblioteca, en una ocasión un visitante extranjero muy importante llegó a la universidad y confundió a Lobachebsky con el portero, le pidió que lo guiara hasta la biblioteca. Este visitante quedó maravillado por lo culto que eran los porteros en Rusia, así que le ofreció una propina, sin embargo, Lobachebsky se ofendió y se negó a recibirla. Posteriormente ambos personajes se encontrarían en una cena organizada por el gobernador.

Para el año 1815 comienza su camino para demostrar el quinto postulado y en 1826 presentó la conferencia "Una sucinta exposición de los principios de la geometría con una demostración rigurosa del teorema de las paralelas". (Este manuscrito se perdió, se cree que fue él mismo quien lo quitó al darse cuenta que era imposible tal demostración.)

En 1829 publica una memoria en el boletín informativo de la Universidad de Kazan sobre "Los Principios de la Geometría", adelantándose a Bolyai con su publicación. Parece que en esta memoria se recoge gran parte del manuscrito del 26, pero por ningún lado aparece lo de la prueba rigurosa del teorema de las paralelas. La Historia lo premia dándole su nombre a la geometría descubierta por él.

Carl Fríedrích Gauss

(30 de abril de 1777 - 23 de febrero de 1855)

A diferencia de J. Bolyai y N. I. Lobachebsky, Gauss no dejó ninguna publicación que nos permita apreciar sus aportaciones a esta nueva geometría, sin embargo se tienen registros de cartas que envió a colegas y amigos a lo largo de tres décadas. En éstas discute sus ideas acerca de la posibilidad de desarrollar una geometría distinta a la geometría euclidiana y presenta algunos avances.
Estos son algunos fragmentos de dichas cartas:
Carta a Farkas Bolyai de 1799:

"Casi todos, es cierto, quisieron dar a ésto el título de axioma; yo no; podría en efecto, ocurrir que por lejanos que entre sí estuvieran los vértices de un triángulo en el espacio, su área fuese, sin embargo, inferior a un límite asignado. Poseo muchas afirmaciones como ésta pero no encuentro ninguna de ellas satisfactoria."

Carta a H. W. Olbers de 1817:

"Estoy cada vez más convencido de que la necesidad de nuestra geometría no puede ser probada ..."

Carta a F. A. Taurinus de 1824:

"La hipótesis de que la suma de los tres ángulos es menor que 180° conduce a una curiosa geometría, muy diferente de la nuestra (la Euclidiana), pero completamente consistente, la cual he desarrollado a mi entera satisfacción, de manera que puedo resolver cualquier problema de ella, a excepción de la determinación de una constante, que no puede ser designada a priori; cuanto más grande se tome la constante, más se

aproxima esta geometría a la Euclidiana; y coincide con ella cuando la constante es infinitamente grande. Los teoremas de esta geometría parecen paradójicos y al no iniciado absurdos; pero una pausada y constante reflexión revela que no contienen nada imposible en absoluto. Por ejemplo, los tres ángulos de un triángulo pueden llegar a ser tan pequeños como se desee, con sólo alargar los lados suficientemente; sin embargo, el área del triángulo nunca puede pasar de un límite definido, no importa lo que se alarguen los lados, ni tampoco alcanzarlo.

Todos mis esfuerzos por descubrir una contradicción, una inconsistencia, en esta geometría no Euclidiana han sido vanos, y la única cosa en la que se opone a nuestras concepciones es que si fuese cierta, existiría en el espacio una magnitud lineal, determinada por ella misma (pero desconocida para nosotros). Pero me parece que, a pesar de la verborrea de los filósofos, la cual ignora todo, sabemos poco o casi nada, de la naturaleza real del espacio ... ”

Carta a Bessel de 1829:

“ Puede tomar mucho tiempo, antes de que publique mis investigaciones sobre este tema; en efecto, puede que no lo sea durante mi vida, pues temo el aullido de los Beocios”

La geometría de Bolyai - Lobachebsky - Gauss

Esta geometría hoy es conocida como Lobachebskiana o hiperbólica, en esta nueva geometría se suponen los axiomas, las definiciones y los primeros cuatro postulados de la geometría Euclidiana. Pero el quinto postulado cambia por el siguiente:

“Por un punto exterior a una recta pasan infinitas rectas que no cortan la primera.”

Este cambio hace que se encuentre una geometría completamente diferente a la Euclidiana, de donde se pueden deducir, entre otros, los teoremas siguientes:

- La suma de los ángulos internos de un triangulo es menor que 180°, pudiendo tomar cualquier valor mayor que 0° y menor que 180°. Este teorema ya había sido descubierto anteriormente por Saccheri y Lambert.

- El área de un triangulo es proporcional al número *pi* menos la suma de los ángulos interiores. Este teorema descubierto por Lambert era bien conocido por Gauss.

Fue el hecho de que Bolyai, Lobachebsky y Gauss estuvieran muy convencidos de la independencia del quinto postulado lo que hizo que la historia los reconociera como los verdaderos descubridores de la geometría hiperbólica. Sin embargo el problema de la consistencia, es decir, que esta geometría no tenía contradicciones, no lo pudieron resolver en vida.

Georg Friedrich Bernhard Riemann

(17 de septiembre de 1826 - 20 de julio de 1866)

Fue hijo de un pastor luterano, quien sería su primer instructor. A los 10 años recibió sus primeras clases formales de aritmética y geometría, a los 19 años conoció las obras "Teoría de números" de Legendre y el "Cálculo" de Euler, ingresó a la universidad de Gotinga como estudiante de filosofía y teología, para convertirse en pastor, complaciendo así a su padre. Sin embargo se vio atraído hacia las matemáticas por conferencias de Stern, Gauss y Goldschmidt y, finalmente se cambió de carrera con el consentimiento de su padre.
Estudió un año en Gotinga, dos en la universidad de Berlín y por último dos en Gotinga.
En la universidad de Berlín se originan sus ideas sobre las funciones analíticas de una variable compleja, allí introdujo las hoy llamadas Superficies de Riemann de n-hojas, concepto que comenzaría a abrir las puertas de la topología, una rama nueva de la Matemática.
En esa misma época se dedica a la Física experimental y sueña con una Física geometrizada, vislumbrándose el deseo de tener una teoría unificadora.
En 1850 escribió: "... puede ser establecida una teoría matemática completa que vaya des-

de las leyes elementales para los puntos individuales hasta los procesos que aparecen ante nosotros en el plenum (espacio continuamente lleno) de la realidad, sin distinción entre gravitación, electricidad, magnetismo o termodinámica ...".

Al graduarse, deseaba dar clases para así recibir un pago, para lograrlo era necesario presentar un examen de habilitación, para el cual propone tres temas, siendo el tercer tema sobre "fundamentos de la geometría". Gauss resultó ser uno de los jurados por lo que elije dicho tema para su examen. Para esta época su salud decae lo que ocasiona que demore dos años en presentar su examen, pero finalmente en junio de 1854 presenta su habilitación titulada: "Sobre las hipótesis que sirven de fundamentos de la Geometría". Después de esta se cuenta que Gauss salió entusiasmado y fue la única vez que demostró públicamente su admiración por el trabajo de alguien más.

En este trabajo Riemman revolucionó completamente la geometría. La geometría Euclidiana y la geometría hiperbólica eras casos particulares de la geometría Riemmaniana.

En 1859 es nombrado profesor titular, mejorando su situación económica y posteriormente casándose. Desafortunadamente un mes después enferma de pleuresía, la cual se convierte en tuberculosis falleciendo a causa de ésta a orillas del Lago Mayor en Italia.
Se dice que su muerte prematura, probablemente, impidió que fuese el creador de la Teoría de la Relatividad.

Capítulo 2

La geometría en el plano Euclidiano

Daremos inicio a este trabajo con un recordatorio de los conceptos más básicos en geometría, los consideramos tan triviales debido a que los conocemos desde una edad muy temprana, sin embargo cuando se nos pide que definamos o expliquemos que es un punto, una recta, un ángulo, etc., pocas veces podremos responder sin antes revisar un texto, es por ello que vamos a recordar todo esto.

A lo largo de nuestra vida académica se nos presentan conceptos geométricos de distintas maneras, en este capítulo recordaremos algunos de estos conceptos en su manera coloquial así como su definición formal.

2.1. Punto y Recta

El punto es la parte, el elemento, la cosa más simple y una de las más importantes de la Geometría. El Punto se define como un elemento geométrico que no tiene longitud, anchura, ni altura; se asemeja a la huella dejada por un alfiler.

La recta es un conjunto de puntos colocados unos detrás de otros en la misma dirección. La línea recta no tiene principio ni fin. Cuando dibujamos una línea recta, en realidad,

representamos una parte de ella. Una recta tiene una sola dimensión: la longitud.

Recordemos que los elementos de $\mathbb{R}^2$, es decir los pares ordenados (x, y) de números reales se denominan como puntos. La distancia más corta entre dos puntos se denomina recta.

2.2. Rectas Paralelas y Ángulo

Rectas Paralelas: En nuestra vida cotidiana se nos presentan distintas maneras de interpretar las rectas paralelas, algunas de ellas son:

- Rectas que se encuentran en un mismo plano y que al extenderse indefinidamente no se tocan ni se cruzan en ningún punto, como las vías del tren.
- Rectas equidistantes en todos sus puntos.

En el libro *Elementos*, las rectas paralelas se definen usando el concepto de ángulo:

Ángulo: Se define como ángulo a la porción del plano limitada por dos semirrectas con origen en un mismo punto.

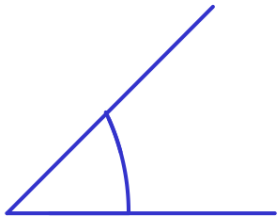

Figura 2.1: Ángulo

Euclides define las rectas paralelas de la siguiente manera:
Si una recta que corte a otras dos, forma con éstas ángulos interiores del mismo lado de ella que sumados sean menores que dos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma sea menor que dos rectos.

2.3. Suma de Ángulos de un triangulo

Lema 2.3.1. *Sea k una linea que intersecta un par de lineas paralelas l y l', obteniendo así los ángulos α y β como se muestra en la figura 2.2.*

Entonces $\alpha = \beta$

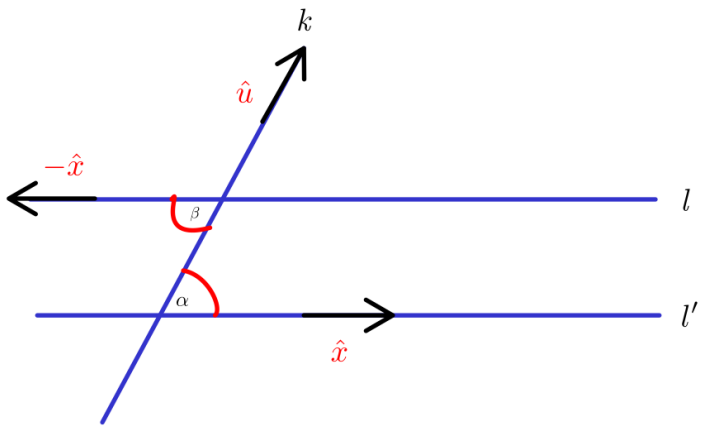

Figura 2.2: Ángulos semejantes

Demostración: Tome los vectores unitarios $\hat{x}$, $-\hat{x}$ y $\hat{u}$ en las lineas l, l' y k, respectivamente como se muestra en la figura 2.2.

Recordemos que: Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores y γ el ángulo entre estos, entonces

$$\cos\gamma = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|A\|\cdot\|B\|}.$$

Dado que $\hat{x}$, $-\hat{x}$ y $\hat{u}$ son unitarios tenemos:

$$\cos\alpha = \hat{x}\cdot\hat{u} \Rightarrow \alpha = \arccos(\hat{x}\cdot\hat{u}).$$

Análogamente:

$$\beta = \arccos((-\hat{x})\cdot(-\hat{u})).$$

Resulta evidente que

$$\alpha = \beta.$$

■

Teorema 2.3.1. *La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a* π

Demostración: Trazamos una nueva línea m que corte las lineas l y l' como se muestra en la figura 2.3.

De acuerdo con el Lema 2.3.1 $\alpha = \beta$ y $\theta = \theta'$, por lo tanto:

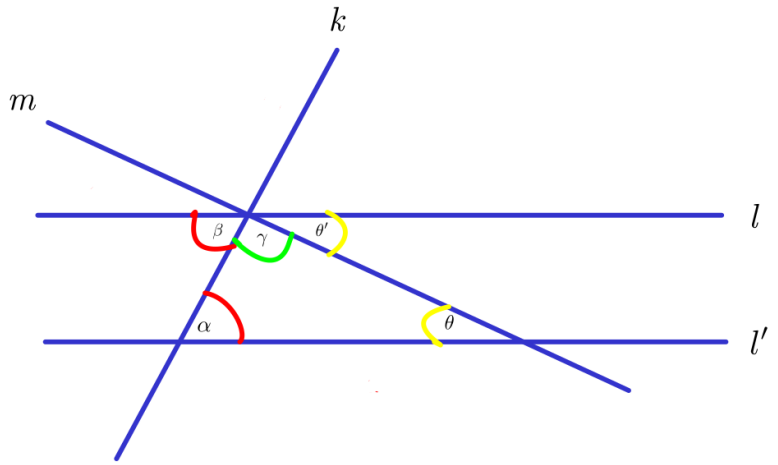

Figura 2.3: La suma de los ángulos internos de un triangulo suma 180°

$$\beta + \gamma + \theta' = \pi = \alpha + \theta + \gamma.$$

■

2.4. Distancia

Llamaremos **distancia** a la longitud del segmento de recta que une dos puntos cualesquiera en el plano Euclidiano.

Tomemos dos puntos cualesquiera en el plano A y B con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente, trazamos un segmento de recta que una estos puntos, como se muestra en la figura 2.4.

Para calcular la distancia que hay entre A y B notemos lo siguiente:

- Podemos calcular la distancia Δx como: $x_2 - x_1$

- Análogamente calculamos la distancia Δy como: $y_2 - y_1$
- Usando **Teorema de Pitágoras** obtenemos que:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

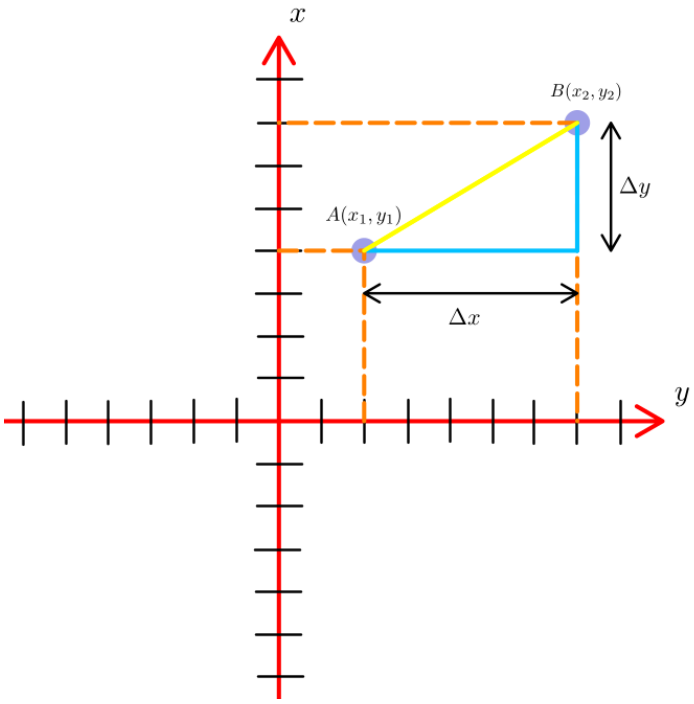

Figura 2.4: Cálculo de la distancia entre dos puntos.

Capítulo 3

Geometría Esférica

La geometría esférica es la mejor manera para iniciar con el entendimiento de las geometrías no euclidianas, está presente en nuestro entorno y es útil en la vida para la navegación y astronomía.

A lo largo de este capítulo veremos las similitudes y diferencias que encontramos entre la geometría euclidiana y la esférica.

Veremos la geometría en una esfera de radio R, donde R siempre será un número positivo. Durante este capítulo imaginaremos que nuestra esfera es vacía, solamente tenemos la superficie o "cascarón"de esta y será lo que llamaremos nuestro "plano".

La definición formal de nuestro plano es la siguiente:

$$S^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = R \right\}.$$

3.1. Punto

Punto: Al igual que en la geometría plana, se define como un elemento geométrico que no tiene longitud, anchura, ni altura y se encuentra en el "cascarón"de la esfera.

Formalmente cuando decimos **punto**, nos referimos a un vector desde el origen "O" de la esfera hasta un punto en la superficie de la misma.

3.2. Puntos Antípodas

Entenderemos los puntos antípodas como los puntos que son diametralmente opuestos. También podemos entenderlos como el par de puntos que al unirlos con una recta, esta pasa por el origen y la distancia entre ellos es igual al diámetro de la esfera en la que se encuentran, como se muestra en la figura 3.1

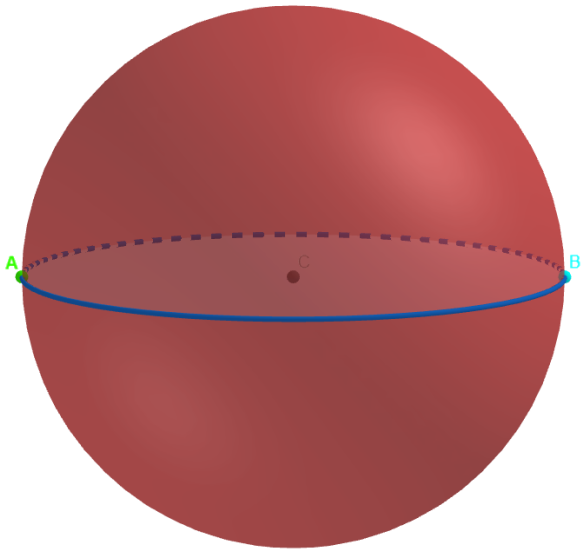

Figura 3.1: El punto B es antípoda de A

Formalmente: Para cualquier punto en P en S^2, existe otro punto $-P$ al cual llamaremos **antípoda**.

3.3. Círculo máximo y geodésica

En la geometría Euclidiana, la recta, como vimos en el capítulo 2, es la distancia más corta entre dos puntos. En geometría esférica, el camino más corto entre dos puntos es un arco de circunferencia, que obtenemos al cortar la esfera con un plano que pasa por

ambos puntos y el origen; a esta circunferencia se le llama **círculo máximo** y lo podemos visualizar en la figura 3.2. El círculo azul es un **círculo máximo**, pero el círculo verde no lo es.

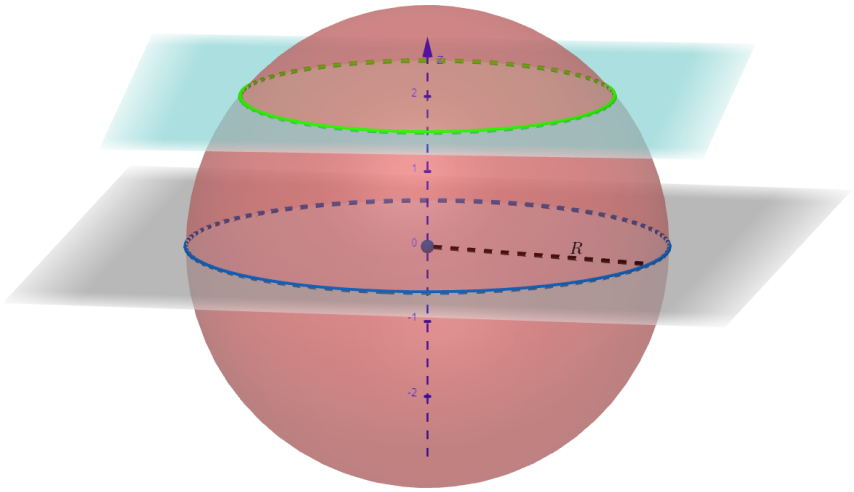

Figura 3.2: El círculo azul es un círculo máximo.

Geodésica: Dada una superficie curvada, una **geodésica** entre dos puntos P y Q es una curva cuya longitud es mínima entre todas las curvas que unen P y Q. En otras palabras, es la trayectoria más corta entre estos dos puntos de la superficie.

Para entender este concepto de manera "sencilla", podemos verlo de la siguiente manera: Una **geodésica** es una circunferencia que corta a nuestra esfera exactamente por la mitad, si no la corta en mitades iguales no es una **geodésica**.

Definición 3.3.1. *Dados dos puntos no antípodas F y G en la esfera, el* ***círculo máximo*** *que contiene a F y G es* ***único****. El* ***segmento de geodésica esferica****, definido por estos dos puntos, es el arco más pequeño del circulo máximo definido por éstos.*

Si tenemos dos puntos F y G antípodas en la superficie de la esfera, hay **infinitos** círculos máximos que unen F y G, por lo tanto, el segmento de geodésica que une estos puntos **no es único**, a pesar de que las longitudes de todos estos segmentos de geodésica sean iguales.

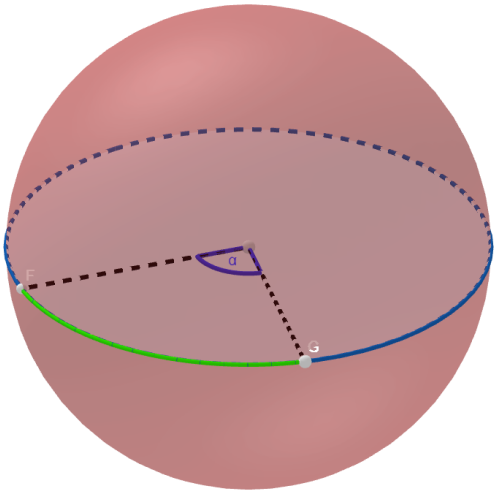

Figura 3.3: El segmento de geodésica esférica es el arco más pequeño del circulo máximo

3.4. Distancia entre dos puntos

Considere dos puntos F y G, en una esfera de radio R y centro O, como se muestra en la figura 3.3. Si los puntos F y G son antípodas, es claro que la distancia entre ellos es πR. Si los puntos no son antípodas, la distancia entre ambos puntos viene dada por:

$$d(F,G) = \alpha R, \quad \text{con } \alpha \text{ en radianes} \tag{3.1}$$

$$d(F,G) = \frac{\alpha\pi}{180} R \quad \text{con } \alpha \text{ en grados} \tag{3.2}$$

En términos de los puntos F y G la **distancia**, esta definida como:

$$d(F,G) = R \arccos\left(\frac{F}{\|F\|} \cdot \frac{G}{\|G\|}\right) = R \arccos\left(\frac{F \cdot G}{R^2}\right). \tag{3.3}$$

3.5. Fórmula de Girard y Ángulos

Un triangulo en geometría esférica esta formado por la intersección de 3 geodésicas, como se muestra en la figura 3.4. Podemos notar que se forman una especie de "gajos"(como de una naranja) entre las geodésicas que conforman al triangulo, uno formado por la

geodésica azul y amarilla, otro por la geodésica azul y rosa y un tercero por las geodésicas rosa y amarillo. El nombre de estos "gajos" es **luna esférica**.

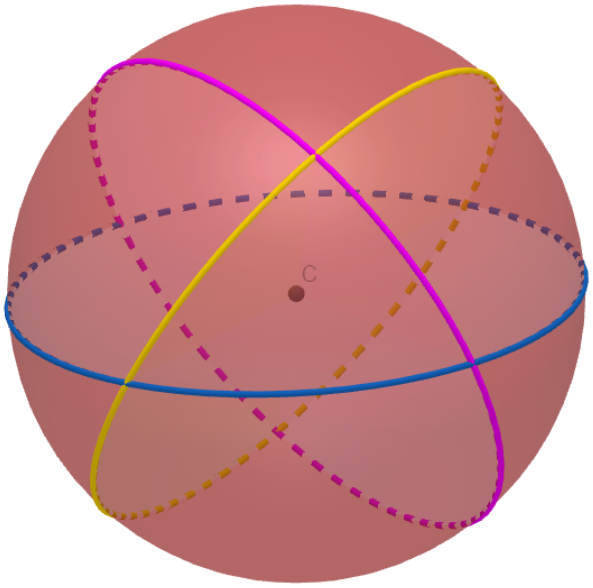

Figura 3.4: Triangulo en geometría esférica.

Lema 3.5.1. *El área de una luna esférica con ángulo θ es $4\theta R^2$*

Demostración: Si $\theta = \pi$ es claro que la luna esférica cubre toda la superficie de la esfera y por lo tanto el área es $4\pi R^2$.
Si $\theta < \pi$, entonces en la esfera hay dos ángulos α y θ tales que $\theta + \alpha = \pi$, sabemos que el área de una esfera viene dada por $A_s = 4\pi R^2$, entonces sustituyendo:

$$\begin{aligned} A_s &= 4(\theta + \alpha)R^2 \\ &= 4\theta R^2 + 4\alpha R^2. \end{aligned}$$

Por lo que $4\theta R^2 =$ área de θ- esfera.

Teorema 3.5.1. *(Fórmula de Girard) Los ángulos internos de un triangulo en geometría esférica suman π + Area del triangulo.*

Demostración: El área de la esfera S^2 es $4\pi r^2$, en la figura 3.5 notamos que hay tres **lunas esféricas**, una naranja con un ángulo α, que llamaremos **luna-α**, una verde con un

ángulo β, que llamaremos **luna-β** y una azul con un ángulo γ, que llamaremos **luna-γ**, juntas cubren toda el área de la esfera, pero al mismo tiempo, el área del triangulo se está cubriendo tres veces, llamaremos a este triangulo T, además hay un triangulo congruente, que llamaremos T' formado por los puntos antípodas del triangulo principal T que también esta siendo cubierto 3 veces.

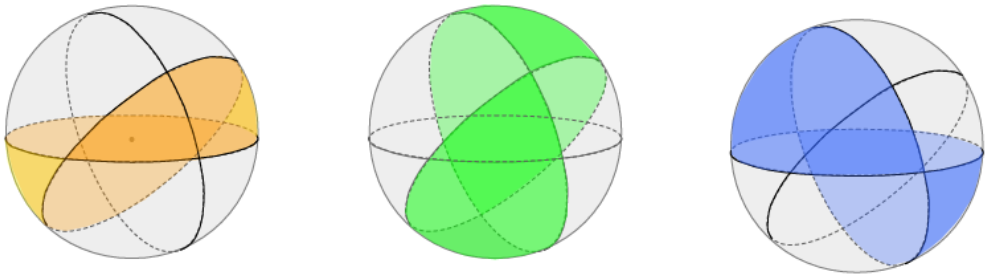

Figura 3.5: Área cubierta por cada "gajo"del triangulo.

Entonces:

$$Area(luna-\alpha)+Area(luna-\beta)+Area(luna-\gamma)=Area(S^2)+2Area(T)+2Area(T')$$

Usando el lemma 3.5.1 tenemos que:

$$4\alpha R^2+4\beta R^2+4\gamma R^2=4\pi R^2+4Area(T)$$

■

Corolario 3.5.1.1. *La suma de los ángulos internos de un triangulo esférico es estrictamente mayor que π.*

En la geometría euclidiana, la suma interna de los ángulos de un triangulo es exactamente π (180°), pero el Teorema de Girard, nos dice que en la geometría esférica, es siempre mayor que π.

3.6. Polígonos esféricos

Después de analizar la teoría de la geometría esférica surge una interrogante ¿podemos hacer cuadriláteros?, sin embargo porque detenernos ahí ¿podemos hacer polígonos?.

Para responder estas preguntas hay que entender y plantearnos ¿qué es un cuadrilátero? en geometría plana (Euclidiana) podemos definir a un cuadrilátero como

Definición 3.6.1. ***Cuadrilátero:*** *Figura que tiene cuatro vértices, cuatro ángulos y cuatro lados.*

De este modo podemos generalizar, un **polígono** como una figura de n vértices, n ángulos y n lados.

Con estas definiciones podemos ahora trasladarlas a la geometría esférica, tenemos que tomar en cuenta lo siguiente, en geometría euclidiana un lado de un polígono es un segmento de recta que une dos puntos, por lo que al cambiar de geometría debemos tener en cuenta que:

- Los lados de un polígono son segmentos de arcos de circunferencia de las geodésicas.
- Los vértices son puntos en la superficie de la esfera donde se intersectan las geodésicas.

Un cuadrilátero esférico se vería de la siguiente manera:

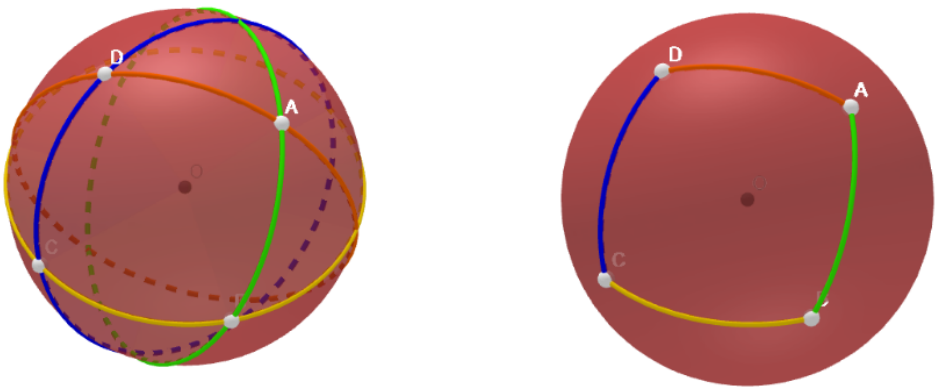

Figura 3.6: Cuadrilátero esférico.

De este modo podemos construir cualquier polígono esférico siguiendo este proceso.

Notemos que si queremos obtener un pentágono, necesitaríamos cinco vértices (puntos), cinco lados y cinco ángulos. Podemos continuar de este modo para un hexágono, pentágono, etc.

Particularmente si continuamos indefinidamente podemos obtener un círculo, pero para obtener realmente un círculo hay que cumplir con las siguientes características:

- Un **círculo esférico** de radio r y centro en p es el conjunto de puntos en $\mathbb{S}^2$ a una distancia r de p.

Notemos que podemos también entender a los círculos como intersecciones de $\mathbb{S}^2$ con planos. Llamaremos a estos como **círculos mínimos**.
En la figura 3.2 el círculo verde nos representa un **círculo mínimo**.

Capítulo 4

Geometría Hiperbólica

En este capítulo veremos la tercera y última geometría la llamada **Geometría hiperbólica**, al igual que la geometría esférica esta no es común incluso a lo largo de la licenciatura en física no siempre se estudia esta geometría de manera formal; sin embargo, gracias a ella figuras importantes como **Albert Einstein**, pudieron desarrollar la **teoría general de la relatividad**, donde se propone que el espacio-tiempo puede tener una curvatura hiperbólica. Gracias a esta geometría se tuvieron las herramientas matemáticas para desarrollar esta teoría.

4.1. El espacio de Minkowsky

Tomemos una constante **c**, la cual tendrá el nombre de *velocidad de la luz*.

Definición 4.1.1. *Para cualesquiera par de vectores* $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$*, en un 3-espacio, el* ***producto interno de Minkowsky*** *es:*

$$\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \Phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 - c^2x_3y_3.$$

El espacio $\mathbb{R}^3$ con producto interno de Minkowsky es también llamado **espacio de Minkowsky**, **espacio-tiempo de Minkowsky** o **espacio de relatividad especial**.

Llamaremos a $\vec{x}$ un vector en el espacio de Minkowsky

- *temporal*, *si* $\Phi(\vec{x},\vec{x}) < 0$
- *luz*, *si* $\Phi(\vec{x},\vec{x}) = 0$
- *espacial*, *si* $\Phi(\vec{x},\vec{x}) > 0$.

Note que los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ del tipo luz satisfacen:

$$(cx_3)^2 = x_1^2 + x_2^2$$

y estos forman un cono doble llamado **"cono de luz"**. Los vectores $\vec{OA}$ con A dentro del cono doble son del tipo *temporal*, y con A fuera del cono de luz son del tipo *espacial*, vea la figura 4.1

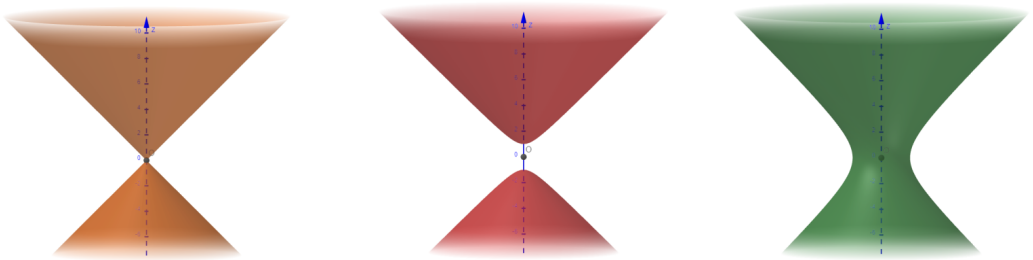

Figura 4.1: El plano naranja es un **hiperboloide reglado** esta formado por todos los vectores de tipo *luz*, el rojo es un **hiperboloide de dos hojas** formado por vectores de tipo *temporal* (en la figura $\Phi = -1$) y el verde es un **hiperboloide de una hoja** formado por vectores de tipo *espacial*(en la figura $\Phi = 1$)

.

4.2. El plano hiperbólico

Definiremos el plano hiperbólico como los puntos de la parte superior de un hiperboloide de dos hojas, los cuales satisfacen que $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$.

$$\mathbb{H}^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \Phi(\vec{x},\vec{x}) = -1, x_3 > 0\}.$$

Por conveniencia se considera $c = 1$ de modo que: $\Phi(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$.

4.3. Geodésica

Definición 4.3.1. *Una geodésica del plano hiperbólico es la intersección* ***no vacía*** *con un plano que pase por el origen. Es decir, si* $\boldsymbol{P}$ *es un plano que pasa por el origen tal que* $\boldsymbol{P}$ *tiene vectores temporales, entonces:*

$$l = \mathbb{H}^2 \cap P$$

es una ***geodésica hiperbólica****.*

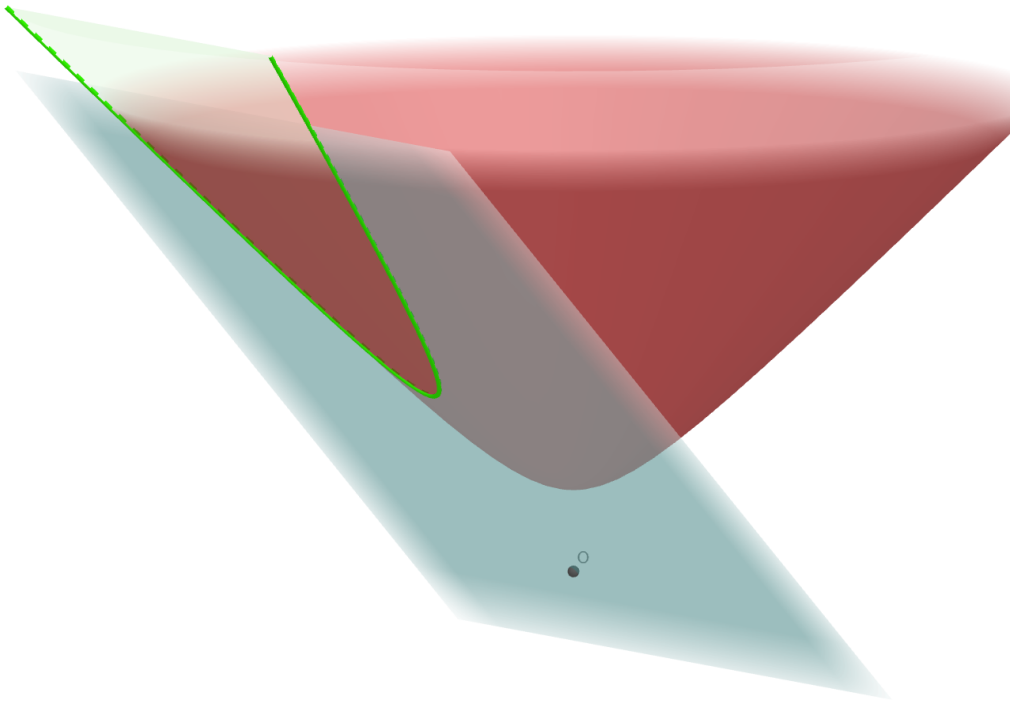

Figura 4.2: Geodésica hiperbólica

Tuvimos que especificar que la intersección fuera no vacía pues claramente hay planos espaciales, es decir, que constan de puros vectores espaciales, como por ejemplo el $z = 0$.

Proposición 4.3.1. *En* $\mathbb{H}^2$

1. *Para dos puntos cualesquiera existe una sola geodésica que los conecta.*

2. *La intersección de dos geodésicas cualesquiera, es vacía o tiene un solo punto.*

3. *Para una geodésica* l *y un punto* $A \notin l$*, hay una infinidad de lineas* m *que pasan por* A *y que son paralelas a* l *(es decir, que no cruzan a* l*).*

Para aclarar lo dicho en el punto (3.) ver la figura 4.3.

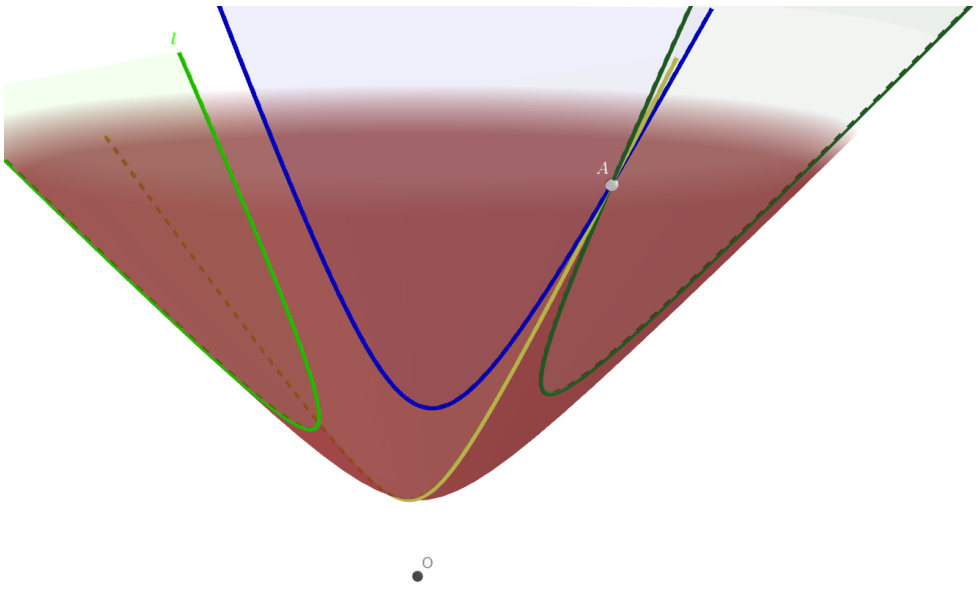

Figura 4.3: Geodésicas paralelas a l que pasan por el punto A.

Las primeras dos propiedades también aplican para la geometría Euclidiana. La tercera propiedad es la que cambia, recordemos que dice así:

"En el plano Euclidiano, por una linea l y un punto $P \notin l$ hay exactamente una linea m que pasa por P paralela a l".

4.4. Distancia entre dos puntos

Definición 4.4.1. *La distancia entre dos puntos $X, Y \in \mathbb{H}^2$ está definida por:*

$$d(X,Y) = \operatorname{arccosh}\{-\Phi(X,Y)\}.$$

4.5. Ángulo

Definición 4.5.1. *Para $X \in \mathbb{H}^2$ definimos $X^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \Phi(X,\vec{v}) = 0\}$.*

Observe que $X^\perp$ es un plano en $\mathbb{R}^3$ y además es un plano tangente a $\mathbb{H}^2$ en el punto $X \in \mathbb{R}^3$.

Buscamos definir la noción de **ángulo**. Sean $X \in \mathbb{H}^2$, $\vec{u}, \vec{v} \in X^\perp$ ($\vec{u}, \vec{v}$ distintos de cero) y considere que los vectores, comienzan en X y van hacía la dirección $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente. Resulta natural definir el ángulo entre estos dos vectores como el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $X^\perp$, vea la figura 4.4

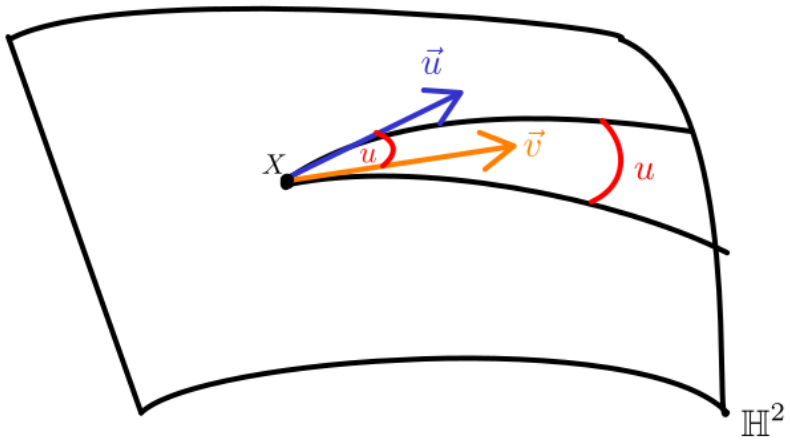

Figura 4.4: Ángulo en $\mathbb{H}^2$.

Definición 4.5.2. *Para $\vec{u}, \vec{v} \in X^\perp$, con $\vec{u}, \vec{v}$ diferentes de cero, definimos:*

$$\angle(\vec{u},\vec{v}) = \arccos\left(\frac{\Phi(\vec{u},\vec{v})}{\sqrt{\Phi(\vec{u},\vec{u})\Phi(\vec{v},\vec{v})}}\right).$$

4.6. Área y suma de ángulos de un triángulo

Modelo de Klein: Sea

$$\mathbb{K}^2 = \{(x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}.$$

Considere el siguiente mapeo f de $\mathbb{H}^2$ a $\mathbb{K}^2$:

Para $A \in \mathbb{H}^2$ tenemos $f(A) = OA \cap \mathbb{K}^2$.

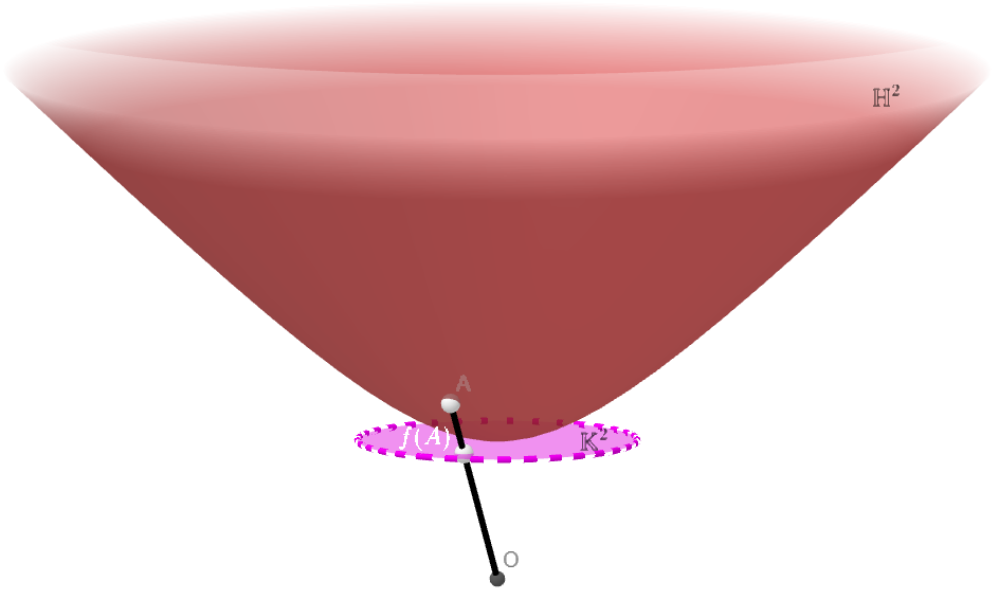

Figura 4.5: El disco rosa sin frontera nos representa al modelo de klein.

Llamaremos **rayos** en el modelo de Klein, a los segmentos de recta cerrado-abierto cuyo "extremo cerrado" se encuentra dentro del disco y el "extremo abierto" en la frontera del disco.

En la figura 4.6 se muestra un **rayo** en el modelo de Klein, esto es la proyección de un segmento recta de $\mathbb{H}^2$ en $\mathbb{K}^2$.

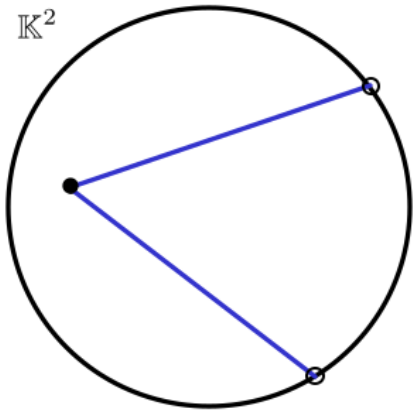

Figura 4.6: Rayos en el modelo de Klein.

Definición 4.6.1. *Dos rayos a y b en $\mathbb{H}^2$ son llamadas* ***ultra-paralelas*** *si en el modelo de Klein $\mathbb{K}^2$ sus extremos abiertos coinciden (necesariamente en la frontera del disco). Vea la figura 4.7.*

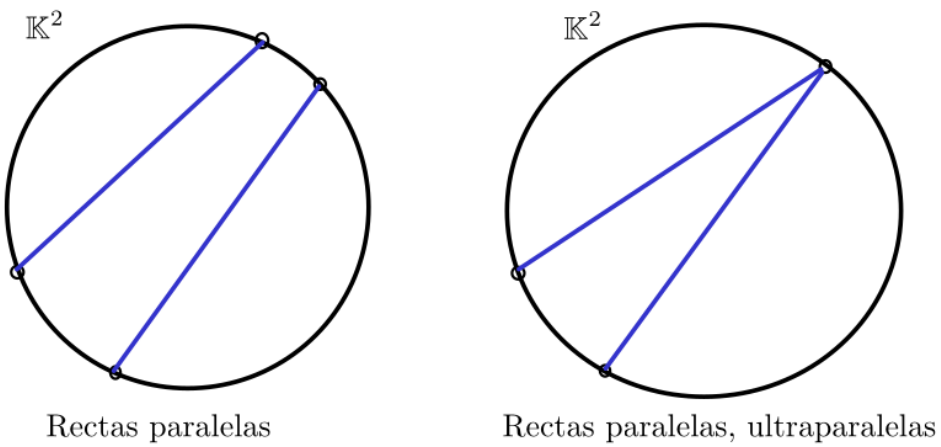

Figura 4.7: Rectas ultra paralelas en $\mathbb{K}^2$.

Consideremos ahora un triángulo y "desplacemos" uno de sus vértices al "infinito". Es decir, en el modelo de Klein consideramos una forma, que es un triángulo con dos vértices en el disco y el tercer vértice en la frontera del disco. Esta figura en $\mathbb{H}^2$ es llamada un **triángulo** $1x$ **ideal.** Desde el interior de $\mathbb{H}^2$ describimos un triángulo $1x$ ideal de la siguiente manera: Dos puntos A y B en el interior del disco unidos por un segmento de recta y un par de rectas ultra-paralelas que comienzan en A y B. Análogamente, si dos vértices del triangulo se mueven hacia la frontera de $\mathbb{K}^2$ llamaremos al objeto resultante un **triángulo** $2x$ **ideal**. Si los tres vértices se encuentran en la frontera del disco entonces

lo llamamos **triángulo** $3x$ **ideal** o simplemente **triángulo ideal**. (Vea las figuras 4.8 a 4.11.)

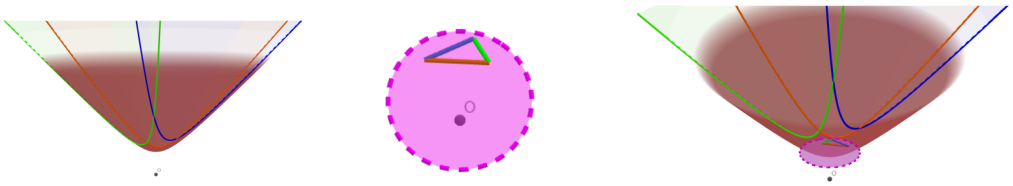

Figura 4.8: Triángulo: A la izquierda vemos el triángulo en $\mathbb{H}^2$, al centro en $\mathbb{K}^2$ y a la derecha en ambos.

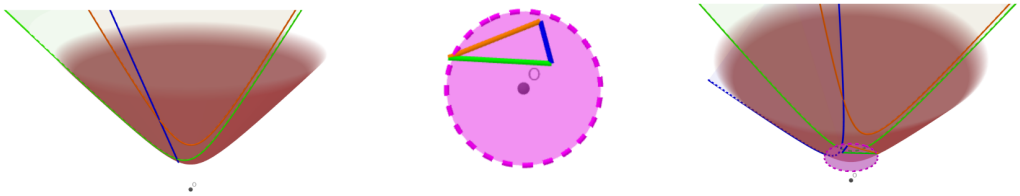

Figura 4.9: Triángulo $1x$ ideal: A la izquierda vemos el triángulo en $\mathbb{H}^2$, al centro en $\mathbb{K}^2$ y a la derecha en ambos.

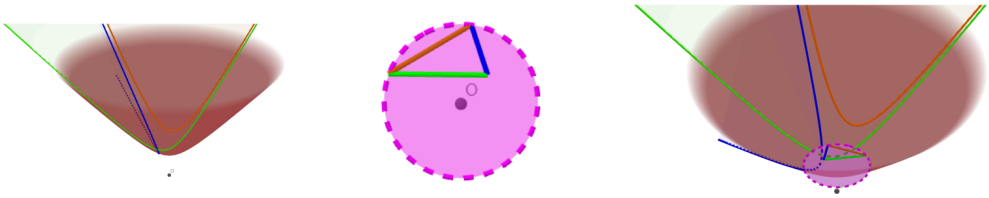

Figura 4.10: Triángulo $2x$ ideal: A la izquierda vemos el triángulo en $\mathbb{H}^2$, al centro en $\mathbb{K}^2$ y a la derecha en ambos.

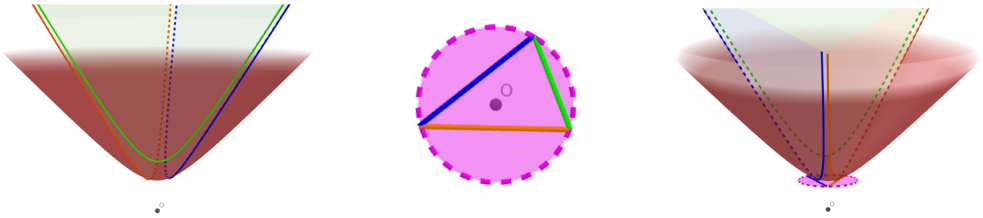

Figura 4.11: Triángulo $3x$ ideal: A la izquierda vemos el triángulo en $\mathbb{H}^2$, al centro en $\mathbb{K}^2$ y a la derecha en ambos.

A partir de esto podemos obtener dos teoremas importantes que no serán demostrados en este trabajo:

Teorema 4.6.1. *El área de cualquier triángulo ideal en* $\mathbb{H}^2$ *es igual a* π.

Teorema 4.6.2. *El área de un triángulo $2x$ ideal con ángulo θ es igual a $\pi - \theta$.*

Teorema 4.6.3. *Sea ABC un triángulo en $\mathbb{H}^2$. Tenemos que:*

$$\acute{A}rea(\triangle ABC) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Demostración: Sea $\triangle ABC$ un triángulo en $\mathbb{H}^2$ con ángulos α, β, γ, podemos generar tres triángulos $2x$ ideal con cada uno de los lados del triángulo $\triangle ABC$, como se muestra en la figura 4.12, cuyos ángulos serán $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$ respectivamente. Notemos que en conjunto estos tres triángulos forman un triángulo $3x$ ideal. Entonces:

$$\begin{aligned}
\text{Área}(\triangle ABC) &= \pi - \big(\text{Área(3 triángulos } 2x \text{ ideal)}\big) \\
&= \pi - \big((\pi - (\pi - \alpha)) + (\pi - (\pi - \beta)) + (\pi - (\pi - \gamma))\big) \\
&= \pi - (\alpha + \beta + \gamma),
\end{aligned}$$

Obteniendo así el resultado deseado.

■

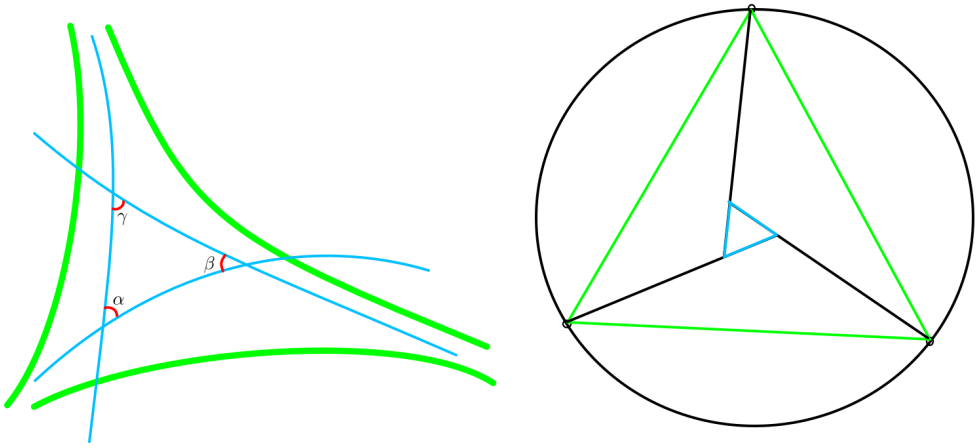

Figura 4.12: Imagen para demostración del Teorema 4.6.3.

Corolario 4.6.3.1. *Para un triángulo en el plano hiperbólico tenemos que:*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \acute{A}rea.$$

Corolario 4.6.3.2. *La suma de los ángulos internos de un triángulo en* $\mathbb{H}^2$ *es estrictamente menor que* π*. Para triángulos con un área pequeña la suma de ángulos se aproxima a* π *(el mismo valor que en geometría Euclidiana). Para triángulos con un área grande, la suma de los ángulos se aproxima a cero.*

4.7. Polígonos hiperbólicos

Así como el la geometría esférica, resulta natural hacerse la interrogante ¿podemos crear figuras en esta geometría? La respuesta es si. Haciendo un análisis análogo al que se hizo en la geometría esférica podemos usar la misma definición para realizar figuras en este espacio. Únicamente debemos hacer las variaciones correspondientes recordando que ahora nos encontramos en el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^2$, recordemos que definimos un polígono como una figura de n lados, n vértices y n ángulos, por lo que en un **polígono hiperbólico** hay que considerar que:

- Los lados son segmentos de **geodésicas hiperbólicas**
- Los vértices son puntos en $\mathbb{H}^2$ donde se intersectan los segmentos de geodésicass hiperbólicas.

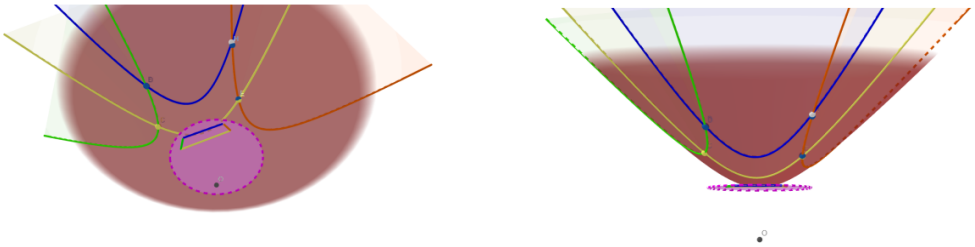

Figura 4.13: Cuadrilátero en geometría hiperbólica y en el modelo de Klein.

Al igual que en geometría esférica podemos crear pentágonos, hexágonos, etc.

Los círculos en esta geometría los podemos definir como:

Definición 4.7.1. ***Círculo hiperbólico:*** *Todos los puntos* p *a una distancia* r *de un punto* X *en* $\mathbb{H}^2$

Esto es:

$$C_X(r) = \{p \in \mathbb{H}^2 : d(X, p) = r\}.$$

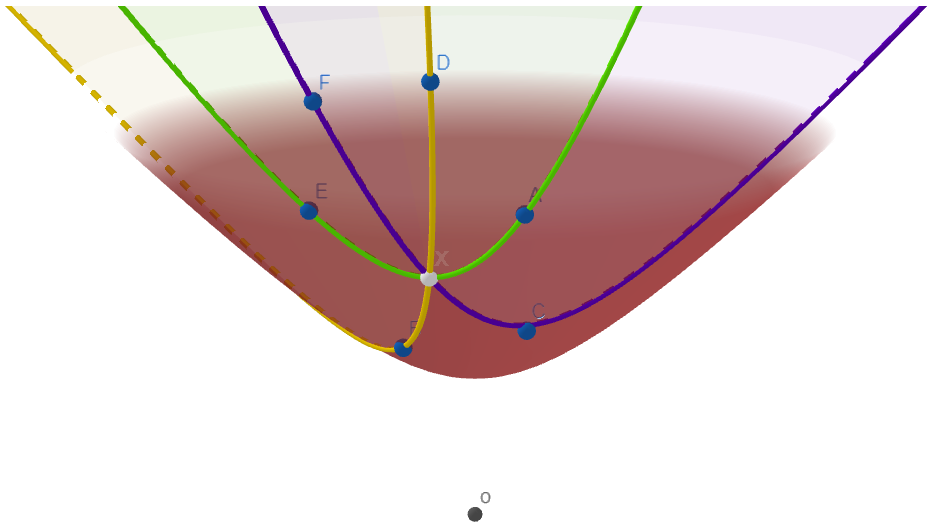

Figura 4.14: Los puntos A, B, C, D, E, F se encuentran a una misma distancia r de X.

Podemos calcular fácilmente la distancia de X a cualquiera de los puntos A, B, C, D, E, F usando la definición 4.4.1. Las componentes de cada punto son:

- $X = (0.86, 2.43, 3.42)$
- $A = (-0.61, 3.57, 4.25)$
- $B = (1.18, 0.6, 2.59)$
- $C = (-0.75, 1.48, 2.73)$
- $D = (1.01, 5.53, 6.05)$
- $E = (2.8, 2.64, 4.45)$
- $F = (2.84, 4.63, 5.87)$

Si calculamos la distancia desde "X" hasta cualquiera de los puntos A, B, C, D, E, F encontraremos que todos están a una distancia de 2.54 unidades.

Capítulo 5

Plan de clase

En este capítulo, veremos la manera de impartir la mayor cantidad de información a nuestros estudiantes de forma didáctica, para que el aprendizaje se dé de la mejor manera posible, que se diviertan mientras aprenden y el conocimiento no se borre rápidamente.

5.1. Título: Entendiendo la geometría plana, esférica e hiperbólica.

Público: Estudiantes de los primeros semestres de la licenciatura en Física y Física Aplicada.

Aprendizajes esperados: Saber que hay geometrías diferentes de la geometría plana. Entender de una manera visual y teórica diferentes geometrías y notar las diferencias entre cada una de ellas.

5.2. Secuencia didática.

Geometrías Riemannianas.

Contenido:

- Antecedentes históricos
- Geometría euclidiana
- Geometría esférica
- Geometría hiperbólica

Tres Sesiones con duración de dos horas cada una.

Propósito: Facilitar la comprensión de las geometrías no euclidianas de una manera visual.

5.3. Sesión 1: Introducción a las geometrías no Euclidianas.

Duración: 2 horas.

Actividades

- **Introducción histórica:** Damos inicio con el marco histórico, resaltar la problemática sobre el quinto postulado de Euclides y hacer énfasis en los más de 350 años que llevó resolver este problema.

  Euclides publica el libro "Los Elementos" alrededor del año 300 a.C. y Riemann daba una solución en el año 1854, tardaron cerca de 2,000 años en solucionar este gran problema.

  Explicar brevemente quienes fueron y porqué son importantes, Bolyai Lobachebsky y Gauss, decir que ellos fueron los primeros en dar un gran avance a las nuevas geometrías y finalizar mencionando a Riemann, ya que su trabajo generalizó los resultados obtenidos por otros matemáticos y dio fin al problema del quinto postulado.

- **Repaso a la geometría plana:** Recordamos lo que es la geometría en el plano Euclidiano, enunciamos las definiciones de punto, recta, rectas paralelas y ángulo.

  Mencionamos el Teorema 2.3.1 el cual menciona que la suma de los ángulos internos de un triangulo es π o $180°$.

Continuamos este tema, recordando la definición de distancia, aquí usamos Teorema de Pitágoras, si es necesario recordemos a los alumnos, que este nos dice que:

"La suma de cada cateto al cuadrado de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa"

- **Actividad de cierre:**

  - ¿Es posible formar un triangulo cuya suma de su ángulos internos sea mayor que π $(180°)$?
    Podemos dar unos minutos para que intenten realizarlo.

5.4. Sesión 2: Geometría esférica.

Duración: 2 horas.

Actividades

- **Definiciones en el plano esférico:** Iniciamos con las definiciones de punto y geodésica, mencionamos que una geodésica en la esfera es la circunferencia formada por un plano que corta a la esfera por la mitad o lo que es lo mismo, con un plano que pasa por el origen de esta.

  Explicamos de manera gráfica los puntos antípodas, podemos usar la figura 3.1, enunciamos la definición de distancia entre dos puntos, podemos dar la ecuación de la distancia como más nos agrade ya sea con la ecuación 3.1, la ecuación 3.2 o la ecuación 3.3, o las 3 si es que así lo prefiere.

- **Teorema de Girard:** Explicamos como está conformado un triángulo en geometría esférica, esto lo encontramos al inicio de la sección 3.4; explicamos lo que es una luna esférica y como calculamos su área. Enunciamos el Teorema 3.5.1 que es la fórmula de Girard y finalizamos con el corolario 3.5.1.1.

- **Actividad de cierre:** Presentamos la actividad del apéndice A.

5.5. Sesión 3: Geometría hiperbólica.

Duración: 2 horas.

Actividades

- **Definiciones en un plano hiperbólico:** Damos la definición de plano hiperbólico y explicamos que este será el plano en donde trabajaremos en esta sección. Mostramos la figura 4.1, específicamente el hiperboloide de dos hojas (el rojo), para mencionarles que ahora veremos lo que sucede en el espacio $\mathbb{H}^2$ y después hacemos unas preguntas:

  - ¿Qué esperan que pase en la **geometría hiperbólica** al hacer la suma interna de los ángulos de un triángulo?
  - En el **capítulo 1**, vimos que podemos enunciar el quinto postulado de Euclídes de la siguiente manera: "Por un punto exterior a una recta pasan infinitas rectas que no cortan la primera".

    En **geometría esférica** notamos que este postulado no se cumple, pues no existen las rectas paralelas, ¿que crees que ocurra con este postulado en la **geometría hiperbólica**?

- **Modelo de Klein y área de triángulos hiperbólicos:** Explicamos los conceptos de geodésica, distancia entre dos puntos y ángulo.

  Definimos el modelo de Klein y podemos mostrar la figura 4.5 para que visualicen este modelo. Explicamos lo que son los **rayos** en el modelo de Klein y con ayuda de las figuras 4.8 - 4.11 explicamos como se visualizan los triángulos en los diferentes modelos el el hiperbólico ($\mathbb{H}^2$) y en el de Klein ($\mathbb{K}^2$).

  Mencionamos los teoremas 4.6.1, 4.6.2 y 4.6.1 y explicamos que estos teoremas surgen de la teoría de los triángulos en el modelo de Klein pero que durante esta secuencia didáctica no serán demostrados los primeros dos.

  Presentamos los corolarios 4.6.3.1 y 4.6.3.2.

- Presentamos el espacio de Minkowsky y damos la definición 4.1.1 de producto interno en este espacio, explicamos los tres tipos de vectores en el espacio de Minkowsky, temporal, luz y espacial.

Explicamos la importancia de este espacio en la **Teoría de la relatividad especial** de Einstein, el hecho de que trabajar en este espacio proporciona una estructura matemática adecuada para describir el espacio-tiempo.

- **Actividad de cierre:** Por último presentamos el Apéndice B, les mostramos las figuras formadas en esta geometría y realizamos la actividad propuesta.

Capítulo 6

Conclusiones:

Se espera que los participantes en esta secuencia didáctica conozcan la existencia de más geometrías, que la geometría plana es solo un caso particular, de este modo generar curiosidad por aprender más de este tema, que este trabajo sirve para que los estudiantes busquen más información y puedan tener un conocimiento extenso de estos temas.
Si esto se logra tendrán una experiencia más satisfactoria y lograrán comprender mejor sus asignaturas futuras de su licenciatura que es el objetivo principal de este trabajo.

Esta tesis fue realizada para poder ayudar y tener una manera didáctica de comprender temas tan atractivos como lo son las geometrías riemannianas, se hizo de modo que sea fácil, comprensible y que no se nos olviden los conceptos base.

Desafortunadamente no fue posible aplicar este trabajo, dado que se tenía que presentar la tesis para poder concluir con el proceso de titulación del autor, sin embargo si se espera recavar esta información más adelante y de este modo presentar una actualización con estos datos más adelante.

Finalmente se espera que la experiencia de esta secuencia didáctica sea entretenida, comprensible y benefactora para todos los que la tomen, que las materias que cursarán durante su vida universitaria sean más sencillas, así como poder recurrir a todo el material que se les proporciona en el momento que lo deseen para poder visualizar mejor la geometría en espacios curvados, como las simulaciones en el espacio hiperbólico.

Apéndice A

Experimento para entender la geometría esférica.

Previo a iniciar con la experimentación es recomendable hacer una pequeña actividad. En una hoja blanca, dibujar un triangulo equilátero y preguntar: ¿Cuál es la suma de los ángulos internos del triangulo? ¿Por qué?

Se espera que los estudiantes respondan 180° o π *radianes*, pues al inicio de la teoría se les señaló esto.

También podemos hacerles la siguiente pregunta: ¿Será posible generar un triángulo con dos ángulos rectos?
Se esperan respuestas variadas por lo que podemos ir anotando y contabilizando las respuestas repetidas. Ahora podemos iniciar con nuestro experimento.

A.1. Triángulos esféricos.

Objetivo: Visualizar y conocer los triángulos esféricos, así mismo verificar la medida de sus ángulos internos.
Material: Una pelota de plástico lisa (un globo también puede ser utilizado), 60 cm de listón, regla, transportador y un marcador.

Instrucciones: En la pelota de plástico o globo, trazar una geodésica, indicar que inflen el globo o pelota, de modo que posteriormente se pueda volver a desinflar, pues es más fácil trazar la geodésica con el globo o pelota inflados, una vez trazada la geodésica, desinflamos nuestro globo o pelota, posteriormente con ayuda de nuestro transportador trazar dos rectas a 90° que intersecten a la primera.
Inflamos nuevamente la pelota o globo y con ayuda de nuestro listón completemos estas rectas de modo que sean geodésicas en nuestra pelota o globo.

- ¿Las rectas paralelas dibujadas previamente siguen siendo paralelas?
- ¿Porqué?
- ¿Qué figura se ha formado?
- ¿Es un triángulo?
- ¿Cuánto miden sus ángulos internos?

Apéndice B

Visualización de polígonos en $\mathbb{H}^2$ y $\mathbb{K}^2$

Para tener un concepto más adecuado y un mejor entendimiento de los polígonos hiperbólicos, se hizo mediante el software geogebra una simulación con la cual podemos visualizar las diferentes figuras en los dos modelos que se mostraron en el capítulo 4.

- En el siguiente enlace podemos visualizar un **triángulo hiperbólico**: `https://www.geogebra.org/m/ph6kuena`

- Este enlace nos lleva a visualizar un **cuadrilátero hiperbólico:** `https://www.geogebra.org/calculator/sd3nvbje`

- Por último este enlace nos lleva a visualizar puntos en $\mathbb{H}^2$ a una distancia r de un punto X `https://www.geogebra.org/calculator/h7mmbptw`

Notemos que la visualización del último punto nos da una idea de lo que es un círculo hiperbólico, si en lugar de seis puntos tuviéramos infinitos puntos a una distancia r de X.

B.1. Actividad para realizar.

Objetivo: Orientar a los estudiantes para definir las características que debe cumplir un cuadrilátero para ser considerado un cuadrado en geometría hiperbólica.

Material: Un dispositivo inteligente que nos permita visualizar el cuadrilátero diseñado en geogebra.

Instrucciones: Visualizar un cuadrilátero hiperbólico mediante el URL proporcionado, responder las siguientes preguntas:

- En geometría euclidiana ¿qué características tiene un cuadrado?
- ¿Qué características se mantendrían y cuales cambiarían en la geometría hiperbólica?
- ¿Qué características se mantendrían y cuales cambiarían en la geometría esférica?
- ¿Podrías dar una definición de cuadrado para cualquier tipo de geometría?
- Si tu respuesta es afirmativa, escribe aquí tú definición.

Bibliografía

[1] Rimanyi, R. (2022). Euclidean and Non-Euclidean Geometries. University of North Carolina.

[2] Tejada, D. M. (s.f.). GEOMETRÍAS NO-EUCLIDIANAS. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

[3] Bell, E. T. (1949). Historia de las Matemáticas. Fondo de Cultura Económica, México.

[4] do Carmo, M. P. (1992). Riemannian Geometry. Birkhäuser Boston.

[5] Nugroho, K. U. Z., Sukestiyarno, Y. L., & Nurcahyo, A. (2021). The weaknesses of Euclidean geometry: A step of needs analysis of non-Euclidean geometry learning through an ethnomathematics approach. EDUMATIKA: Jurnal Riset Pendidikan Matematika, 4(2), 126-149.

[6] Barraza Figueroa, O., & Reyes Labbé, R. (2012). Introducción al estudio de las geometrías no euclidianas a través de la geometría esférica: Desde una perspectiva docente (Tesis de licenciatura). Universidad de Santiago de Chile, Facultad de Ciencia, Departamento de Física. `https://fisica.usach.cl/sites/fisica/files/tesis_barraza_reyes_2012.pdf`

[7] Pérez, N., & Cognigni, R. (2004). Geometría no euclidiana en la enseñanza básica: Geometría de la esfera. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17, 763-769. `https://www.clame.org.mx/documentos/alme%2017.pdf`

[8] Cardinali, A., & Piergallini, R. (2020). Learning non-Euclidean geometries: Impact evaluation on Italian high-school students regarding the geometric thinking according to the Van Hiele theory., Universidad de Camerino, Italia.

[9] Campos, L. M. M. (2014, junio 8). CONCEPTO DE PUNTO, RECTA, SEGMENTO.GEOMETRIA.https://geometriaeltrigo.wordpress.com/unidades-didacticas/mediciones-comenzando-la-geometria/concepto-de-punto-recta-segmento/

[10] U.A.L. Universidad de Almeria. (n.d). Ángulos. de https://www2.ual.es/jardinmatema/angulos/

[11] (2012). GEOMETRIA ESFÉRICA, círculos máximos. https://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/caminho_mais_curto2.html

[12] (2012). GEOMETRIA ESFÉRICA, distancia entre dos puntos. https://www.atractor.pt/mat/GeomEsf/saber_1.html

[13] Academia Lab. (2024). Círculo esférico. Enciclopedia. Revisado el 23 de mayo del 2024. https://academia-lab.com/enciclopedia/circulo-esferico

[14] Sánchez, M. (s.f.). Espacios hiperbólicos. Recuperado de https://www.matem.unam.mx/~max/IGA/N7.pdf

[15] Rozas Bellido, E. (2019). Geometría hiperbólica.Desarrollo de herramientas en grasshopper.Recuperado de https://oa.upm.es/63932/1/TFG_Jun_20_Rozas_Bellido_Elena.pdf

[16] Gómez, R. (s.f.). Geometría hiperbólica. Recuperado de https://www.matem.unam.mx/~rgomez/geometria/Capitulo8.pdf