



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Renormalización de Electrodinámica Cuántica con Dimensiones  
Extra

Tesis presentada al

**Posgrado en Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Maestro en Ciencias**

por

Angel Sierra Martínez

asesorado por

Dr. J.Jesús Toscano Chávez

Puebla Pue.  
1 de agosto de 2017





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Renormalización de Electrodinámica Cuántica con Dimensiones  
Extra

Tesis presentada al

**Posgrado en Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Maestro en Ciencias**

por

Angel Sierra Martínez

asesorado por

Dr. J.Jesús Toscano Chávez

Puebla Pue.  
1 de agosto de 2017



**Título:** Renormalización de Electrodinámica Cuántica con Dimensiones Extra

**Estudiante:** ANGEL SIERRA MARTÍNEZ

COMITÉ

---

Dr. Héctor Novales Sánchez  
Presidente

---

Dr. Gilberto Tavares  
Velasco  
Secretario

---

Dr. Roberto Cartas  
Fuentevilla  
Vocal

---

Dr. J.Jesús Toscano Chávez  
Asesor



# Índice general

Índice de figuras	v
Resumen	vii
Introducción	ix
<b>1. Electrodinámica cuántica</b>	<b>1</b>
1.1. El grupo de Poincaré $ISO(1, 3)$	1
1.1.1. El grupo de Lorentz $SO(1, 3)$	1
1.1.2. El grupo de Poincaré $ISO(1, 3)$	5
1.2. Electrodinámica espinorial	6
1.2.1. Campo espinorial de Dirac	6
1.2.2. Invariancia de norma	8
1.2.3. La teoría de Maxwell	8
1.2.4. Electrodinámica espinorial	11
1.3. Renormalización de QED a un lazo	11
1.3.1. Regularización dimensional	11
1.3.2. Divergencias de QED	13
1.3.3. Esquema de renormalización	14
1.3.4. Cálculo de la autoenergía del electrón	18
1.3.5. Cálculo de la autoenergía del fotón	20
1.3.6. Cálculo de la función vértice	25
1.4. Renormalización de la carga	34
1.5. Límite electrostático	35
1.6. Momento magnético anómalo del electrón	37
1.7. La función $\beta$	37
<b>2. Electrodinámica cuántica en dimensiones extra</b>	<b>41</b>
2.1. El grupo $ISO(1, 3 + n)$	41
2.2. Teoría de Maxwell en dimensiones extra	42
2.3. Teoría de Dirac en dimensiones extra	46
2.4. Corrientes electromagnéticas	49
2.4.1. Reglas de Feynman	50
<b>3. Renormalización de QED a un lazo con dimensiones extra</b>	<b>53</b>
3.1. Divergencias, regularización y renormalización	53
3.1.1. Función de Epstein	54
3.1.2. Regularización	55
3.1.3. Esquema de renormalización	59
3.2. Cálculo de la autoenergía del electrón	61
3.3. Cálculo de la autoenergía del fotón	69
3.4. Cálculo de la función vértice	73
3.5. Renormalización de la carga	84

3.6. Límite electrostático . . . . .	84
3.7. Momento magnético anómalo del electrón . . . . .	86
3.8. La función $\beta$ . . . . .	87
<b>4. Conclusiones</b>	<b>89</b>
<b>A. Parametrización de Feynman e identidades en <math>D</math> dimensiones</b>	<b>91</b>
A.1. Parametrización de Feynman . . . . .	91
A.2. Contracciones en $D$ dimensiones . . . . .	91
A.3. Tazas . . . . .	91
A.4. Integrales en $D$ dimensiones . . . . .	92
A.5. Límite $D \rightarrow 4$ . . . . .	92
<b>B. Definiciones relacionadas con el proceso de compactificación</b>	<b>93</b>
B.1. Integrales . . . . .	93
B.2. Objetos covariantes . . . . .	94



# Índice de figuras

1.1. Vértice de tres fotones. . . . .	14
1.2. Dispersión de luz por luz. . . . .	14
1.3. Reglas de Feynman para QED renormalizada. . . . .	17
2.1. Reglas de Feynman para QED en dimensiones extra. . . . .	52
3.1. Contratérminos para QED con dimensiones extra. . . . .	61



# Resumen

Se estudia la estructura y renormalización de la electrodinámica cuántica con dimensiones extra compactadas. A partir de la formulación de una teoría efectiva para la electrodinámica cuántica se clasifican las divergencias que pueden surgir y se analiza la estructura de las mismas a nivel de un lazo, con esto se plantea un esquema y se lleva a cabo la regularización y renormalización de la teoría en un sentido moderno. Una vez logrado esto, se analiza el impacto de la renormalización en algunos fenómenos electromagnéticos, siendo estos: el apantallamiento de la carga eléctrica a través del cálculo del potencial eléctrico en el límite no relativista, el momento magnético anómalo del electrón y el límite de altas energías a través de la función  $\beta$ .



# Introducción

La teoría de la renormalización es un sistema conceptual complicado, el cual puede entenderse desde varias perspectivas. Primero, el procedimiento de renormalización puede ser visto como un aparato técnico para esquivar, i.e. aislar y deshacerse de los resultados infinitos que ocurren en los cálculos perturbativos de la Teoría Cuántica de Campos (QFT por sus siglas en inglés). Segundo, el concepto de renormalización ayuda a aclarar la base conceptual de la QFT y le da estabilidad. Tercero, la renormalizabilidad puede incluso elevarse al estatus de un principio regulativo, guiando la construcción de las teorías y la selección de las mismas en el marco general de las QFT.

Históricamente [1], el surgimiento de la teoría de renormalización a finales de 1940 fue una respuesta a las dificultades originadas por las divergencias existentes en las teorías. En su forma original, la teoría de renormalización era de carácter técnico y conservativo, y es importante tener en mente estas características iniciales cuando se trata de entender sus desarrollos posteriores. Es de carácter técnico porque involucra una serie de algoritmos para obtener resultados numéricos de la teoría; números que pueden ser comparados con resultados experimentales, por ejemplo, el momento magnético anómalo del electrón y el corrimiento de Lamb. Es de carácter conservativo porque se basa en el marco de la QFT sin hacer intentos por alterar sus fundamentos. De hecho, Dyson tomó su carácter conservativo como una de sus características fundamentales.

El acoplamiento local entre cuántos y el hecho de que la aplicación de operadores de campo en el vacío resulte en excitaciones locales, implican que en los cálculos uno tiene que considerar procesos que involucran energías arbitrariamente grandes. Matemáticamente la inclusión de dichos procesos virtuales a energías arbitrariamente grandes se manifiesta en cantidades infinitas que son indefinibles. Por tanto, las dificultades por las divergencias no son externas; son constitutivas de la formulación canónica de la QFT. En este sentido, las divergencias muestran la inestabilidad en la estructura conceptual de la QFT.

En respuesta a esto, surgieron dos propuestas para lidiar con esta inestabilidad. La primera fue propuesta de forma independiente por Pais y Sakata y está basada en la solución de Poincaré al problema de la estabilidad del electrón de Lorentz. Se propuso la idea de compensación: se introducen campos de partículas desconocidas de tal forma que cancelan las divergencias producidas por las interacciones conocidas. La otra respuesta que se propuso fue el programa de renormalización.

En la década de 1930, Dirac (1934), Heisenberg (1934), Weisskopf (1936), Kramers (1938), y otros extendieron la idea de renormalización a través de substracciones. Pero para un mejor desarrollo de estas ideas eran necesarios los hallazgos experimentales relacionados con el espectro del hidrógeno y el deuterio obtenidos con técnicas e instrumentos que fueron descubiertos durante la segunda guerra mundial. Cuando esto se consiguió, la explicación de los datos confiables y exactos obtenidos por Lamb y Rutherford en sus mediciones de la estructura fina del hidrógeno y de los resultados de Rabi sobre la estructura hiperfina del hidrógeno y el deuterio se convirtió en un reto extraordinario para los físicos teóricos y en el proceso descubrieron algoritmos para obtener números finitos para los cálculos dando además ideas para justificar dichos algoritmos. Las ideas de los algoritmos descubiertos por Kramers, Bethe, Lewis, Schwinger, y Tomonaga pueden resumirse de la siguiente manera: (i) los términos divergentes que surgen de los cálculos de QED son invariantes de Lorentz y de norma, y pueden ser interpretados como modificaciones a los parámetros de masa y carga que son introducidos en la lagrangiana original. (ii) Identificando los parámetros de masa y carga modificados, o renormalizados, con la masa y carga físicamente observables, todas las divergencias son absorbidas en los factores de renormalización de la masa y la carga, y los resultados finitos coinciden con las mediciones experimentales. De esta forma, el programa de renormalización sugería que la electrodinámica tenía fallos a altas energías no obstante que los cálculos a energías relativísticamente moderadas es bastante precisa en sus predicciones.

La forma de proceder de Schwinger y Tomonaga fue hacer la identificación directa de las partes divergentes y removerlas de las expresiones a través de la redefinición de la masa y la carga. Por otro lado, Feynman utilizaba en su algoritmo un cutoff, de tal forma que al final del cálculo obtenía expresiones que eran infinitas al tomar el límite correspondiente para remover el cutoff. Si después de la redefinición de masa y carga otros procesos eran insensibles al valor del cutoff, la teoría renormalizada se definía tomando el límite cuando el cutoff tiene a infinito. Fue Dyson quien mostró que los resultados e ideas de Feynman eran derivables de la formulación de QED de Schwinger y Tomonaga. Más aún, Dyson fue capaz de dar una demostración de la renormalizabilidad de QED. Renormalizabilidad significa que la renormalización de la masa y la carga remueve todas las divergencias de la matriz  $S$  de QED a todo orden en la teoría perturbativa.

Durante la década de 1970 la naturaleza fundamental y el caracter esencial del principio de renormalizabilidad comenzó a cambiar. Como un resultado de dos décadas de fructíferas interacciones entre QFT y la mecánica estadística, el entendimiento de algunos físicos teóricos sobre ciertos aspectos fundamentales de la teoría de renormalización fueron sometidos a transformaciones radicales. En el núcleo de esta transformación surgió en principio de *rotura de invariancia de escala* y la aproximación por el *grupo de renormalización*. El primero en asimilar la visión física en el contexto de los fenómenos críticos, como por ejemplo, la existencia de soluciones puntuales en las ecuaciones del grupo de renormalización y las condiciones para las trayectorias pasando a través de puntos fijos en el espacio de las constantes de acoplamiento, descubiertas principalmente por K.G Willson y aplicarlas en el contexto de las QFT fue Weinberg (1978). Su intento fue explicar, o incluso reemplazar el principio de renormalizabilidad con un principio más fundamental al cual llamó “asintóticamente seguro”. Sin embargo este programa fue eclipsado por otro, el de las *Teorías de campo efectivas* (EFT), propuesto por el mismo Weinberg. En un principio las EFT fueron menos ambiciosas que las teorías asintóticamente seguras ya que tomaban la renormalizabilidad como un concepto base. No obstante, las EFT dieron un cambio radical del panorama, junto con una examinación exhaustiva del concepto de renormalizabilidad y la clarificación de la base ontológica de la teoría cuántica de campos.

Por otro lado, desde las décadas de 1920 y 1930 surgió la búsqueda de las teorías de campo unificado, Einstein buscaba una teoría que integrara el electromagnetismo, la gravedad y la mecánica cuántica. Sus primeros intentos fueron ampliar las ecuaciones de la relatividad general para que describieran también al campo electromagnético, sin embargo, tanto Einstein como los demás físicos y matemáticos involucrados no tardaron mucho en darse cuenta de la complejidad que ello requería. Weyl (1918) propuso una forma de ampliar la geometría de la relatividad general, en esta teoría las varas de medir y los relojes varían en función de la trayectoria que siguieran a través del espacio, pero poco más tarde se mostró que esto era contradictorio conceptualmente y con los resultados experimentales. A pesar de este fallo, años más tarde se retomó esta idea que constituye lo que actualmente conocemos como simetría de norma. Luego surgió una propuesta realizada por Kaluza (1919), el sugirió que se debía añadir una quinta dimensión de tipo espacial, además que ésta debía ser circular. En principio Kaluza no trataba de describir la realidad física o la localización de la nueva dimensión, lo concibió como un mecanismo matemático solamente. Lo que obtvo fue una teoría de la relatividad de la cual se podían derivar también las ecuaciones de Maxwell. El siguiente aporte a esta teoría provino de Klein con respecto a la cuestión de cuál podría ser la naturaleza de dicha dimensión agregada, la idea de Klein fue que la quinta dimensión podía estar enrollada en un círculo demasiado pequeño como para ser observado experimentalmente.

Actualmente, las propuestas de teorías fundamentales a la escala de Planck son comunmente formuladas en más de cuatro dimensiones principalmente para que sean autoconsistentes. El interés en este tipo de teorías ha resurgido actualmente a partir de los trabajos de Arkani-Hamed, Antoniadis, Dimopoulos y Dvali [2, 3], además, el impacto de las teorías con dimensiones extra se ha manifestado en diversos temas de estudio, por ejemplo, materia oscura [4], física de neutrinos, física del Higgs [5], colisionadores, acoplamientos de norma electrodébiles y aspectos teóricos de las teorías de campo.

En el presente trabajo se construye la electrodinámica cuántica con dimensiones extra. Esta teoría será definida en un espaciotiempo plano dado por la variedad  $\mathcal{M}^{4+n} = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n$ , que es el resultado del producto cartesiano del espacio de Minkowski con una variedad no compacta de  $n$  dimensiones de tipo espacial. Esta teoría es invariante en principio bajo el grupo de Poincaré extendido  $ISO(1, 3+n)$  y el grupo de norma extendido  $U(1, \mathcal{M}^{4+n})$ , a partir de esta extensión se busca obtener una teoría efectiva regida por los grupos estándar. Lo que sigue es suponer que  $\mathcal{N}^n$  es una subvariedad compacta y que existe un conjunto completo de funciones definidas en la variedad compacta de la forma  $\{f^{(0)}, f^{(m)}(\bar{x})\}$  de tal

forma que los campos pertenecientes a los grupos extendidos pueden ser expandidos en series infinitas en términos de los campos propios de los grupos estándar. Una vez hecho este mapeo se aplican las condiciones de ortonormalidad del conjunto de funciones propuesto y con ello se identifican los campos que pueden o no adquirir masa en base a sus leyes de transformación, hasta este punto se puede entonces identificar desde la perspectiva del grupo de norma estándar a los campos de materia, lo cual contribuye a efectos de la física a una escala  $R^{-1}$ . Al considerar  $\mathcal{N}^n$  como  $n$  copias del orbifold  $S^1/Z^2$  se obtienen condiciones para la variedad soporte, y con ellas, el ocultamiento de la simetría de  $\{ISO(1, 3+n), U(1, \mathcal{M}^{4+n})\}$  en  $\{ISO(1, 3), U(1, \mathcal{M}^4)\}$ . Cabe destacar que la caracterización de la variedad soporte impone condiciones para las partículas de la teoría, esto surge de la necesidad de que los efectos de las dimensiones extra se desacoplen de la teoría estándar para  $R^{-1} \gg \nu$ , para ello es necesario que todas las partículas nuevas reciban masa a la escala  $R^{-1}$ , con excepción de las partículas de la teoría estándar. De esto se desprende un nuevo requerimiento para la base de funciones antes descrita, se impone la siguiente descomposición:  $\{f^{(0)}, f^{(m)}(\bar{x})\} \mapsto \{f^{(0)}, f_E^{(m)}(\bar{x}), f_O^{(m)}(\bar{x})\}$ , donde los subíndices  $E, O$  significan par e impar respectivamente. Con esta distinción son posibles los mapeos en forma de series de Fourier con condiciones de paridad y periodicidad, además la descomposición de los campos en forma de series queda condicionado de la siguiente manera: (i) Todo campo con contraparte estándar se descompone bajo el conjunto de funciones pares, y (ii) Todo campo sin contraparte estándar se descompone en bajo el conjunto de funciones impares. Luego de esto, al hacer una integración sobre las variables de  $\mathcal{N}^n$ , se obtiene la teoría invariante bajo el grupo estándar  $ISO(1, 3)$ , y el grupo de norma se descompone en transformaciones de norma estándar (SGT) y en transformaciones de norma no estándar (NSGT). Con esto, es posible cuantizar la teoría resultante con cualquiera de los métodos existentes.

Los pasos del método de compactificación permiten llegar a la descripción de las partículas en las dimensiones extra compactadas, dicha descripción es complicada ya que se da a través de un número infinito de campos producidos por la descomposición de Fourier, y son conocidos como las *torres de Kaluza-Klein*. En cada una de estas torres, el modo cero se identifica con los campos estándar sobre  $\mathcal{M}^4$ , y todos los demás modos excitados pueden ser interpretados como la información efectiva sobre la correspondiente partícula propagándose en el espaciotiempo de mayor dimensión. Esto trae como consecuencia nuevos acoplamientos que modifican la forma usual de los cálculos a nivel de correcciones radiativas, la estructura divergente de las amplitudes, y con esto, sus implicaciones fenomenológicas. El objeto central de estudio será el comportamiento divergente de la teoría a nivel de un lazo. Como veremos, además de las divergencias ya existentes en QED, se generarán nuevas divergencias debidas a las excitaciones de Kaluza-Klein de los campos estándar, que en principio son una infinidad de ellas.

La organización y el contenido de la tesis es el siguiente: en el primer capítulo, se estudian las propiedades del grupo de Poincaré  $ISO(1, 3)$ , con esto se contruye la electrodinámica cuántica en dos partes, la primera analizando la teoría de Dirac y la segunda, con el estudio de la teoría de Maxwell. En la tercera sección se expone la teoría conocida sobre la renormalización de QED a orden de un lazo, comenzando con un esquema de regularización y una clasificación para las divergencias de la teoría con lo cual se plantea el esquema de renormalización a seguir. A continuación, se presenta el cálculo explícito de los tres diagramas que son de interés para esta teoría con su correspondiente renormalización, la cual se considera concluida con la obtención de las expresiones para los contratérminos. Las últimas secciones contienen resultados de interés en los cuales se aprecian los efectos de la renormalización, dichos fenómenos son: la renormalización de la carga, el límite electrostático junto con el corrimiento de Lamb, el momento magnético anómalo del electrón y la función beta.

En el segundo capítulo se desarrolla la electrodinámica con dimensiones extra. Se discute el grupo de norma y el grupo de Poincaré extendidos así como la teoría de Maxwell y Dirac en dimensiones extra. En este proceso se explica el proceso de compactificación, el cual reproduce geoméricamente las condiciones de frontera del efecto Casimir. Además se obtienen las expresiones para las corrientes electromagnéticas de donde se derivan las reglas de Feynman necesarias para los cálculos de los diagramas que serán analizados en el tercer capítulo.

El tercer capítulo, el cual constituye la parte central de la tesis, comienza con el análisis de la estructura divergente a nivel de un lazo de la teoría efectiva obtenida para la electrodinámica con dimensiones extra, se da un esquema de regularización en el cual surge de manera natural la función zeta de Epstein [6, 7], que es una generalización de la función zeta de Riemann para dimensiones mayores. El uso de la función zeta para regularización data de los años setentas, con los trabajos de J.S. Dowker y R. Critchely [8] en el

campo de las teorías efectivas, o en los trabajos de S.W. Hawking [9] sobre integrales en espacios curvados. Otras aplicaciones de la función zeta se pueden encontrar en modelos de gravedad cuántica y modelos cosmológicos, en teoría de cuerdas y cristalografía. En particular haremos uso de la versión regularizada de la función inhomogénea de Epstein derivada por Elizalde-Romeo junto con el esquema de Weldon. Con esto se plantea un esquema de renormalización en un sentido amplio o moderno, formado por las condiciones de renormalización de la teoría usual y un esquema para remover los efectos no desacoplantes que provienen de los cálculos, ya que como veremos, el método de regularización de Weldon no se ocupa de este tipo de términos. Después, se presentan los cálculos para los diagramas con dimensiones extra donde se derivan los contratérminos correspondientes y se realiza además la comprobación del proceso de renormalización, el cual consiste en la suma de la amplitud del diagrama calculado con el correspondiente contratérmino, a modo de verificar que se obtiene un resultado libre de las divergencias ultravioletas, las divergencias provenientes de las excitaciones de Kaluza-Klein y los efectos no desacoplantes. Luego de esto, se presentan nuevamente los resultados de interés del primer capítulo con su correspondiente contribución dada por las dimensiones extra.

El cuarto capítulo enlista los principales resultados y conclusiones de la tesis. Finalmente, en el apéndice A se enlistan las propiedades e identidades relacionadas con los cálculos de la regularización dimensional y en el apéndice B, las convenciones e integrales utilizadas para los cálculos de la teoría en dimensiones extra y los términos covariantes que aparecen en la derivación de los resultados en la teoría de Dirac.



# Capítulo 1

## Electrodinámica cuántica

En este capítulo se dan las bases para los desarrollos posteriores. La primera sección está centrada en el estudio del grupo de Poincaré ya que este contiene la estructura y las simetrías del espaciotiempo plano. La segunda sección desarrolla la construcción de una teoría que describe la interacción de partículas elementales con el campo electromagnético, en la tercera sección analiza el proceso de renormalización de forma sistemática. En las últimas secciones se discuten tres resultados importantes: la contribución al potencial eléctrico por la polarización del vacío y el corrimiento de Lamb, el momento magnético anómalo del electrón y la función  $\beta$ .

### 1.1. El grupo de Poincaré $ISO(1, 3)$

En esta sección se expone brevemente la estructura del grupo de Poincaré el cual es de importancia central por ser el grupo más amplio bajo el cual debe estar garantizada la covarianza de las ecuaciones de la relatividad especial. Además, una teoría cuántica de campos ordinaria se formula en el espaciotiempo plano y es precisamente el grupo de Poincaré el que gobierna el espaciotiempo de Minkowski.

#### 1.1.1. El grupo de Lorentz $SO(1, 3)$

Recordemos los postulados de la relatividad especial.

1. Las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.
2. Existe una velocidad límite  $c$  en la naturaleza cuyo valor es  $c = 3 \times 10^8 m/s$ .

El primer postulado pone de manifiesto la imposibilidad de distinguir estados de reposo o movimiento absolutos para un observador inercial, por lo cual debemos tener una formulación en la cual las ecuaciones de la física se escriban de forma *covariante*, es decir, que su forma no dependa del sistema de referencia elegido. Bajo esta formulación, el tiempo deja de tener un rol de parámetro universal y absoluto.

Considere un espacio de cuatro dimensiones que llamaremos *espaciotiempo* o *espacio de Minkowski* con las siguientes coordenadas para un sistema de referencia:

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z,$$

los puntos del espaciotiempo distinguidos por estas coordenadas se llaman *sucesos*, de esta forma, para cada suceso del espaciotiempo se asocia un cuadrivector denotado por:

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x})$$

en este espacio encontramos transformaciones que tienen sentido físico y que por tanto nos ayudarán a estudiar las simetrías de los sistemas físicos, dichas transformaciones son:

**CAPÍTULO 1. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA**  
1.1. EL GRUPO DE POINCARÉ  $ISO(1,3)$

---

1. **Rotaciones en el 3-espacio.** Son las transformaciones ortogonales en los planos

$$x^1 - x^2, x^1 - x^3, x^2 - x^3.$$

2. **Transformaciones de Lorentz puras (*Boost's*).** Conectan sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo a lo largo de los ejes  $x^1, x^2$  y  $x^3$ , se pueden ver como transformaciones en planos espacio temporales

$$x^0 - x^1, x^0 - x^2, x^0 - x^3.$$

3. **Traslaciones a lo largo de los ejes.** Son traslaciones para cada eje, es decir, traslaciones espaciales y temporales, forman un grupo abeliano llamado *Grupo de las traslaciones*.

El conjunto de las rotaciones y transformaciones de Lorentz puras forman el *grupo de Lorentz*  $SO(1,3)$ . En este grupo está definida el *intervalo* o separación entre dos eventos de coordenadas  $x_1^\mu$  y  $x_2^\mu$  definido por:

$$(s_{12})^2 = (x_1^0 - x_2^0)^2 - \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 \quad (1.1)$$

note que esta cantidad puede ser positiva, negativa o cero. Si  $(s_{12})^2 > 0$  se dice que el intervalo es *temporaloide*, si  $(s_{12})^2 < 0$  se dice que el intervalo es *espacialoide* y si  $(s_{12})^2 = 0$  se dice que el intervalo es *luxoide*, note que  $(s_{12})^2 = 0$  define el llamado *cono de luz* en el espacio de Minkowski.

El intervalo para dos eventos separados infinitesimalmente es

$$ds^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \quad (1.2)$$

donde

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

es el *tensor métrico*. Con el tensor métrico podemos subir y bajar índices<sup>1</sup>, por ejemplo para  $x_\mu$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu.$$

Bajo la acción del grupo de Lorentz las componentes de un cuadrivector se transforman como

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta, \quad (1.4)$$

con  $\Lambda$  la matriz de transformación. Note que de la invariancia de un intervalo se obtiene una condición para estas matrices:

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta = (\Lambda_\mu^{T\alpha} g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu) x^\mu x^\nu$$

concluyendo que

$$(\Lambda_\mu^{T\alpha} g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu) = g_{\mu\nu} \quad (1.5)$$

esto es

$$\Lambda^T g \Lambda = g. \quad (1.6)$$

Bajo una transformación de similaridad, las transformaciones de Lorentz dejan invariante el tensor métrico, note que

---

<sup>1</sup>Considerando el convenio de suma de Einstein en el cual dos índices repetidos tales que uno esté como subíndice y el otro como superíndice en cualquier orden implican una suma que corre sobre cada uno de los valores que puede tomar el índice.

**CAPÍTULO 1. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA**  
1.1. EL GRUPO DE POINCARÉ  $ISO(1,3)$

---

$$\det(\Lambda) = \pm 1,$$

así podemos distinguir entre dos tipos de transformaciones, las transformaciones con determinante +1 son llamadas *transformaciones propias de Lorentz*, mientras que las de determinante -1 son las *transformaciones impropias de Lorentz*. Las transformaciones impropias representan una reflexión espacial y una reversión temporal.

Las propiedades de un grupo están dictadas por el álgebra que obedecen sus generadores, para obtenerlos necesitamos conocer la forma explícita de las matrices de transformación. Consideremos un boost en la dirección del eje  $x^1$ , la transformación en las coordenadas es:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma \left( x^0 - \frac{v}{c} x^1 \right) \\ x'^1 &= \gamma \left( x^1 - \frac{v}{c} x^0 \right) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

siendo  $v$  es la velocidad relativa a lo largo de los ejes  $x^1$  y  $x'^1$ . Es fácil ver que si se considera el cambio de variable  $\gamma = \cosh\xi_1$  y  $\frac{v}{c}\gamma = \sinh\xi_1$  la transformación se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\xi_1 & -\sinh\xi_1 & 0 & 0 \\ -\sinh\xi_1 & \cosh\xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

de esta manera, los generadores del grupo de Lorentz son:

$$K_i = \frac{1}{i} \left. \frac{d\Lambda(\chi_i)}{d\chi_i} \right|_{\chi_i=0} \quad \text{para los boost.} \tag{1.9}$$

$$J_i = \frac{1}{i} \left. \frac{d\Lambda(\theta_i)}{d\theta_i} \right|_{\theta_i=0} \quad \text{para las rotaciones.} \tag{1.10}$$

Por ejemplo, escribamos un boost y rotación a lo largo del eje  $x^3$  con sus respectivos generadores.

$$\begin{aligned} \Lambda(\chi_3) &= \begin{pmatrix} \cosh\xi_3 & 0 & 0 & -\sinh\xi_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\xi_3 & 0 & 0 & \cosh\xi_3 \end{pmatrix}, & K_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Lambda(\theta_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & J_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

note que los  $K_i$  son antihermitianos,  $K_i^\dagger = -K_i$ , mientras que  $J_i^\dagger = J_i$ . Las reglas de conmutación de los generadores son:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \tag{1.11}$$

y

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \tag{1.12}$$

**CAPÍTULO 1. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA**  
**1.1. EL GRUPO DE POINCARÉ  $ISO(1,3)$**

---

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k \quad (1.13)$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \quad (1.14)$$

esto quiere decir que los boost y rotaciones no conmutan entre sí, lo cual tiene sentido ya que los boost son rotaciones espacio temporales. Note tambien que dado que los generadores de los boost son anti-hermitianos no están asociados a observables físicas aunque sí generen transformaciones del grupo. Una transformación de Lorentz entonces está dada por

$$\Lambda = e^{i\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\theta} + i\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\chi}} . \quad (1.15)$$

Considere las combinaciones lineales

$$N_i^\pm = \frac{1}{2} (J_i \pm iK_i) , \quad (1.16)$$

usando las reglas de conmutación para los generadores, podemos ver que se cumplen las siguientes relaciones:

$$[N_i^+, N_j^+] = i\epsilon_{ijk}N_k^+ \quad (1.17)$$

$$[N_i^-, N_j^-] = i\epsilon_{ijk}N_k^- \quad (1.18)$$

$$[N_i^+, N_j^-] = 0 . \quad (1.19)$$

Las dos primeras reglas son en álgebra de Lie para el grupo  $SU(2)$ , así que el grupo de Lorentz puede ser visto como dos copias de  $SU(2)$ , y con este hecho las representaciones del grupo de Lorentz se pueden construir usando las reglas de la suma del momento angular de la teoría cuántica.

### Representación espinorial de $SO(1,3)$

La representación espinorial del grupo de Lorentz se conoce también como *representación espinorial de Dirac*. Representemos ahora como  $L(\Lambda)$  al conjunto de matrices que forman una representación del grupo de Lorentz, estas satisfacen

$$L(\bar{\Lambda})L(\Lambda) = L(\bar{\Lambda}\Lambda) .$$

Sea la transformación infinitesimal

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu ,$$

entonces, a primer orden

$$L(\Lambda) = \mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \quad , \quad S^{\mu\nu} = -S^{\nu\mu} \quad (1.20)$$

con  $S^{\mu\nu}$  los generadores del grupo, los cuales deben satisfacer el álgebra de Lie de  $SO(1,3)$

$$i[S^{\mu\nu}, S^{\alpha\beta}] = g^{\beta\mu}S^{\nu\alpha} - g^{\beta\nu}S^{\mu\alpha} + g^{\alpha\nu}S^{\mu\beta} - g^{\alpha\mu}S^{\nu\beta} .$$

Para construir los generadores  $S^{\mu\nu}$  en la representación espinorial supongamos que existen cuatro matrices  $\gamma^\mu$  que satisfacen el álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

así que los generadores de la representación son

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] . \quad (1.21)$$

Una representación de las matrices de Dirac es

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

llamada *representación de Dirac*, con  $\sigma^i$  las matrices de Pauli. Note que

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad , \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (1.23)$$

también

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{I} \quad , \quad (\gamma^i)^2 = -\mathbb{I} \quad , \quad (1.24)$$

en esta representación los generadores  $S^{\mu\nu}$  toman la forma

$$S^{ij} = \frac{i}{2} \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

y

$$S^{0i} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (1.26)$$

cuando se considera la matriz  $\gamma^5$  se tiene que, en la representación de Dirac:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (1.27)$$

es claro que  $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$  y  $(\gamma^5)^2 = \mathbb{I}$  además

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad , \quad [\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0 \quad . \quad (1.28)$$

### 1.1.2. El grupo de Poincaré $ISO(1,3)$

La unión del grupo de Lorentz con el grupo de las traslaciones en los cuatro ejes mencionado en la sección anterior se conoce como el *grupo de Poincaré  $ISO(1,3)$* . La transformación más general en el espaciotiempo es una transformación de *Poincaré* la cual consta de una transformación de Lorentz y una traslación

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad , \quad (1.29)$$

con  $a^\mu$  un cuadrivector constante. Aplicando dos veces una transformación tendremos

$$x''^\mu = (\bar{\Lambda}\Lambda)^\mu_\nu x^\nu + \bar{\Lambda}^\mu_\rho a^\rho + a^\mu \quad , \quad (1.30)$$

dado que  $\bar{\Lambda}^\mu_\rho a^\rho + a^\mu$  es una traslación total, para que la composición cumpla la cerradura y por tanto  $ISO(1,3)$  sea un grupo, sólo es necesario probar que  $\bar{\Lambda}\Lambda$  es una transformación de Lorentz, lo cual se verifica de inmediato ya que cada una de estas matrices pertenece a  $SO(1,3)$ .

Si  $D(\Lambda, a)$  es una representación del grupo de Poincaré, por la condición (1.30) se debe cumplir que la regla de composición

$$D(\bar{\Lambda}, \bar{a}) D(\Lambda, a) = D(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}) \quad , \quad (1.31)$$

considere la transformación infinitesimal

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \quad , \quad a^\mu = \epsilon^\mu \quad (1.32)$$

de la condición (1.6) se encuentra que  $\omega$  es antisimétrico, tiene 6 componentes independientes, además dado que  $\epsilon$  es una traslación tiene cuatro componentes, por lo tanto, el grupo  $ISO(1,3)$  tiene 10 generadores y 10 parámetros asociados.

De manera general, una transformación de Poincaré infinitesimal es de la forma:

$$D(\mathbb{I} + \omega, \epsilon) = \mathbb{I} + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i \epsilon_\mu P^\mu \quad (1.33)$$

donde los  $J^{\mu\nu}$  son los generadores del grupo de Lorentz y  $P^\mu$  los generadores del grupo de las traslaciones. Se tiene también que

$$D^{-1}(\Lambda, a) = D(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \quad (1.34)$$

ahora, considere el producto

$$D(\Lambda, a) D(\mathbb{1} + \omega, \epsilon) D^{-1}(\Lambda, a) = D(\mathbb{1} + \Lambda\omega\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a) , \quad (1.35)$$

desarrollando a primer orden esta expresión se llega a las reglas de transformación de los generadores:

$$D(\Lambda, a) J^{\alpha\beta} D^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta (J^{\mu\nu} + a^\nu P^\mu - a^\mu P^\nu) \quad (1.36)$$

$$D(\Lambda, a) P^\alpha D^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu^\alpha P^\mu . \quad (1.37)$$

Si consideramos a  $D(\Lambda, a)$  y  $D^{-1}(\Lambda, a)$  infinitesimales y desarrollando a primer orden de igual forma obtenemos las siguientes reglas de conmutación:

$$i [J^{\mu\nu}, J^{\alpha\beta}] = g^{\beta\mu} J^{\nu\alpha} - g^{\beta\nu} J^{\mu\alpha} + g^{\alpha\nu} J^{\mu\beta} - g^{\alpha\mu} J^{\nu\beta} \quad (1.38)$$

$$i [P^\mu, J^{\alpha\beta}] = g^{\mu\alpha} P^\beta - g^{\mu\beta} P^\alpha , \quad (1.39)$$

de la misma manera, para obtener la relación de conmutación de los generadores de las traslaciones se desarrolla (1.37) a primer orden obteniendo:

$$[P^\mu, P^\alpha] = 0 . \quad (1.40)$$

Las ecuaciones (1.38), (1.39) y (1.40) forman el *álgebra de Poincaré*.

## 1.2. Electrodinámica espinorial

Construiremos los objetos necesarios para la descripción de la interacción electromagnética de partículas elementales, note que de acuerdo a la teoría cuántica ordinaria y a las conclusiones de la sección anterior, 1.1.1, la representación espinorial del grupo de Lorentz puede verse como dos copias de  $SU(2)$ , de esta manera podemos describir partículas elementales de espín semientero y así se construirá la electrodinámica cuántica.

### 1.2.1. Campo espinorial de Dirac

Sea  $\Psi(x)$  el campo de cuatro componentes

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \\ \Psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

definido en el espaciotiempo. Este espinor se transforma en la representación espinorial de  $SO(1,3)$  de la siguiente manera:

$$\Psi'(x) = L(\Lambda) \Psi(x) \quad , \quad L(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} . \quad (1.42)$$

Un requerimiento para tener una teoría a nivel lagrangiano es que los términos que conforman la densidad lagrangiana sean escalares de Lorentz, nos interesa entonces formar escalares utilizando  $\Psi(x)$ . Observe por ejemplo que el término  $\Psi^\dagger(x) \Psi(x)$ , el cual se transforma como

$$\Psi'^\dagger \Psi' = \Psi^\dagger L^\dagger(\Lambda) L(\Lambda) \Psi ,$$

no es un escalar, para que lo fuese sería necesario que  $L^\dagger(\Lambda) = L^{-1}(\Lambda)$ , pero esto no ocurre ya que el generador  $S^{0i}$  es antihermitiano, y por tanto  $L(\Lambda)$  no es uniraria. Para solucionar esto, se introduce el adjunto de  $\Psi$  definido por:

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 \quad (1.43)$$

para validar esta propuesta note que bajo una transformación infinitesimal

$$\bar{\Psi}' = \left[ \left( \mathbb{I} + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right) \Psi \right]^\dagger (\gamma^0)^\dagger \quad (1.44)$$

$$= \Psi^\dagger \left[ \mathbb{I} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (S^{\mu\nu})^\dagger \right] \gamma^0, \quad (1.45)$$

note que cuando  $\mu$  y  $\nu$  son espaciales

$$(S^{\mu\nu})^\dagger \gamma^0 = S^{\mu\nu} \gamma^0 = \gamma^0 S^{\mu\nu},$$

y cuando uno de los índices es 0

$$(S^{\mu\nu})^\dagger \gamma^0 = -S^{\mu\nu} \gamma^0 = \gamma^0 S^{\mu\nu},$$

de esta forma

$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi} \left[ \mathbb{I} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right] \quad (1.46)$$

$$= \bar{\Psi} L^{-1}(\Lambda), \quad (1.47)$$

así, claramente el término  $\bar{\Psi}\Psi$  es un escalar de Lorentz.

Otros objetos covariantes que podemos construir en esta representación son:

- $\bar{\Psi}\gamma^5\Psi$ , pseudoescalar
- $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ , vector
- $\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi$ , pseudovector
- $\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi$ , tensor antisimétrico
- $\bar{\Psi}\gamma^5\sigma^{\mu\nu}\Psi$ , pseudotensor antisimétrico

donde

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2 S^{\mu\nu}. \quad (1.48)$$

Los términos que involucran  $\gamma^5$  no son invariantes bajo paridad, son objetos que no consideraremos en nuestra construcción ya que la electrodinámica respeta paridad.

Propongamos la siguiente lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \quad (1.49)$$

la cual es invariante de Lorentz, a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \bar{\Psi})} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}}, \quad \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \Psi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} \quad (1.50)$$

obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0, \quad \bar{\Psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu + m) = 0 \quad (1.51)$$

utilizando la notación  $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$  tenemos

$$(i \not{\partial} - m) \Psi = 0, \quad (1.52)$$

esta es la ecuación de Dirac.

### 1.2.2. Invariancia de norma

En esta sección continuamos el estudio respecto a la invariancia de los sistemas físicos. No basta con pedir que la lagrangiana (1.49) sea invariante de Lorentz, existe otro requerimiento conocido como invariancia de norma<sup>2</sup>.

La idea es que nuestra teoría puede admitir diferentes configuraciones de los campos tal que obtenamos las mismas observables. Así, nuestra descripción física contiene cierta incertidumbre y podemos hacer la elección acerca de una formulación en particular, de las varias que tenemos disponibles, para una situación dada, esto se conoce como *elegir una norma*. Una transformación que nos lleva de una descripción a otra se conoce como *transformación de norma*, y la invariancia subyacente se le dice *invariancia de norma*. La invariancia de norma es una manifestación de la imposibilidad de encontrar una descripción única de un sistema.

Considere un elemento de  $U(1)$ ,  $U(\alpha) = e^{i\alpha}$ , con  $\alpha$  un parámetro constante. Es directo verificar que la lagrangiana de Dirac (1.49) es invariante bajo una transformación de la forma

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U\Psi = e^{i\alpha}\Psi, \quad (1.53)$$

este tipo de transformación se conoce como *transformación global* de  $U(1)$ . Ahora considere la transformación

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha(x)}\Psi, \quad (1.54)$$

con  $\alpha(x)$  una función del espaciotiempo, se dice que esta transformación es *local*. Claramente, al contener una derivada, la lagrangiana de Dirac ya no es invariante bajo una transformación de este tipo. Para seguir conservando esta invariancia se introducen la siguiente modificación a la derivada:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (1.55)$$

la cual se conoce como *derivada covariante*. Además se requiere que bajo una transformación de la forma (1.54)  $A_\mu$  se transforme de la siguiente manera

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (1.56)$$

Una teoría que tiene un campo  $A_\mu$  introducido para producir invariancia respecto a transformaciones locales se conoce como *teoría de norma*, y al campo  $A_\mu$  se le llama *campo de norma*.

Con esto, note que la lagrangiana (1.49) puede reescribirse como:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\not{D} - m) \Psi, \quad (1.57)$$

note que esta lagrangiana es ahora invariante de Lorentz y de norma.

### 1.2.3. La teoría de Maxwell

En esta sección se lleva a las ecuaciones de Maxwell a una forma covariante.

Las ecuaciones de Maxwell son:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.58)$$

---

<sup>2</sup>'Norma' es un término poco acertado que se ha mantenido hasta nuestros días. La teoría general de la relatividad de Einstein mostró que la geometría del espaciotiempo tiene un rol dinámico, este hecho llamó la atención de Herman Weyl quien en 1919 se cuestionó si la escala de longitud podía ser es sí misma dinámica, variando a través del espaciotiempo, es decir, de forma local. Bajo esta perspectiva se puede hacer la elección de una norma o calibre lo cual sería una elección de la escala de longitud. Weyl propuso que la magnitud o norma de un vector físico podría depender de la localización en el espaciotiempo, así, una nueva *conexión* sería necesaria para relacionar las longitudes de los vectores en diferentes posiciones. Esta idea llegó a ser conocida como invariancia de escala o norma. Más tarde se mostró que esta propuesta no era del todo compatible con algunos fenómenos observables, aunque la idea de simetría local trascendió.

<sup>3</sup>En el sistema de unidades CGS Gaussiano.



los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  derivan de potenciales, en terminos de estos potenciales podemos escribir:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla A^0 - \partial_0 \mathbf{A} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}\tag{1.59}$$

con  $A^0$  y  $\mathbf{A}$  los llamados potenciales electromagnéticos. Luego, tomando  $J^0 = c\rho$ , definimos los siguientes cuadvectores:

$$J^\mu = (J^0, \mathbf{J}) \quad \text{cuadricorriente.}\tag{1.60}$$

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A}) \quad \text{cuadripotencial.}\tag{1.61}$$

Ahora, por simplicidad absorbemos el factor  $\frac{4\pi}{c}$  de las ecuaciones (1.58) en la definición de  $J^\mu$ , así, las ecuaciones de Maxwell toman la forma:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= J^0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^0} + \mathbf{J} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x^0}\end{aligned}\tag{1.62}$$

Bajo  $SO(1, 3)$ ,  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son las seis componentes de un tensor totalmente antisimétrico, su definición se da en términos de los potenciales  $A^0$  y  $\mathbf{A}$  de la siguiente manera:

$$E^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i\tag{1.63}$$

$$B^i = (\nabla \times \mathbf{A})^i = -\epsilon^{ijk} \partial^j A^k ,\tag{1.64}$$

así, el 2-tensor se define como:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\tag{1.65}$$

y se conoce como *tensor de campo electromagnético* o *curvatura de Maxwell*. De esta forma tenemos que

$$E^i = F^{i0} \quad , \quad B^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F^{jk}\tag{1.66}$$

con esto

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} .\tag{1.67}$$

El tensor covariante está dado por

$$F^{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}\tag{1.68}$$

y el dual por

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\tag{1.69}$$

para este último tensor se encuentra que

$$\tilde{F}_{ij} = -\epsilon_{0ijk} E^k = -\epsilon_{ijk} E^k \quad , \quad \tilde{F}_{0i} = B^i .\tag{1.70}$$

### Forma covariante

Las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= J^0 \\ \nabla \times \mathbf{B} - \partial_0 \mathbf{E} &= \mathbf{J}\end{aligned}$$

se pueden escribir en una sola ecuación, esto es

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (1.71)$$

de manera similar, las ecuaciones homogéneas

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \partial_0 \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

se pueden reunir en la ecuación

$$\partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0, \quad (1.72)$$

o también en la ecuación

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.73)$$

Las ecuaciones (1.71) y (1.73) representan la forma covariante de las ecuaciones de Maxwell.

### Lagrangiana electromagnética

Considere una transformación de la forma (1.56), claramente  $F^{\mu\nu}$  es invariante bajo dicha transformación, por lo tanto podemos hacer la identificación del campo electromagnético  $A^\mu$  con el campo de norma introducido en la sección 1.2.2 así, el campo electromagnético resulta ser un campo de norma. Podemos entonces proceder a construir una lagrangiana para el electromagnetismo.

Veamos cuáles son los términos que podemos construir.

- $A_\mu A^\mu$ , es invariante de Lorentz pero no de norma
- $J_\mu A^\mu$ , es invariante de Lorentz pero la invariancia de norma se da si  $J_\mu$  se construye a través de un acoplamiento mínimo
- $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ , es invariante de Lorentz y de norma pero puede ser reescrito como un término de superficie, por lo que las ecuaciones de movimiento no se verán afectadas
- $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , es invariante de Lorentz y de norma

con esto, podemos proponer la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu, \quad (1.74)$$

utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos

$$\partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} \quad (1.75)$$

se obtiene

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta$$

que son las ecuaciones inhomogéneas, en ausencia de fuentes ( $J^\beta = 0$ ) tenemos que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.76)$$

y

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0,$$

que son las ecuaciones de Maxwell homogéneas.

### 1.2.4. Electrodinámica espinorial

Utilizando las ecuaciones (1.57) y (1.76) podemos construir la siguiente lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi, \quad (1.77)$$

esta lagrangiana contienen la dinámica de los campos espinoriales y el campo de norma. Esto nos da cuenta de la interacción del fotón que es la partícula de norma asociada al campo de norma y, por ejemplo, del electrón.

## 1.3. Renormalización de QED a un lazo

Conceptualmente entramos en el terreno de la *teoría cuántica de campos*, en esta teoría *cada partícula y cada onda en el universo es simplemente la excitación de un campo cuántico el cual está definido sobre todo el espaciotiempo*. La *electrodinámica cuántica* (QED por sus siglas en inglés) es una teoría cuántica de campos, a saber, del campo electromagnético.

Como sabemos, el comportamiento de las partículas se ve afectado por las interacciones entre ellas, una teoría con interacción involucra no solo la susceptibilidad de las partículas a ser dispersadas entre ellas, sino que de forma más dramática cambia las propiedades de las partículas mismas tales como su masa y su carga, decimos entonces que los valores de estas propiedades son *renormalizados*. Más aún, encontramos que las interacciones modifican incluso lo que entendemos como partícula en el sentido de que el proceso de renormalización puede ser concebido como una partícula *vistiéndose* a sí misma en las interacciones. Es decir, la *renormalización* puede ser vista como el proceso en el cual una partícula libre o *desnuda* se viste.

Como sabemos, integración sobre un lazo contenido en un diagrama de Feynman provoca resultados que son divergentes, no obstante como nuestros cálculos son de naturaleza perturbativa la tarea es obtener resultados finitos o darle sentido a las series perturbativas, en este sentido la renormalización es el ejercicio de darle sentido a los infinitos.

En esta sección calcularemos los tres diagramas de QED a orden de un lazo, mostraremos explícitamente que dichas divergencias pueden ser regularizadas y canceladas obteniendo resultados finitos para las cantidades medibles.

### 1.3.1. Regularización dimensional

El procedimiento de evaluar diagramas de Feynman que contienen loops puede ser esbozado de la siguiente manera:

1. Dibujar el digrama del proceso en cuestión y escribir la amplitud, de aquí resulta una integral en el espacio de los momentos
2. Combinar los denominadores de los propagadores involucrados a través de la parametrización de Feynman
3. Identificar en el nuevo denominador el cuadrado de un binomio, esto involucra un corrimiento de la variable de integración, dicho corrimiento se toma como nueva variable de integración
4. Escribir el numerador del integrando en términos de la nueva variable de integración y conservar sólo las potencias pares de la misma (por ser las únicas que contribuyen)

5. Evaluar la integral en el espacio de los momentos

En el último paso, la integral en el espacio de los momentos resulta ser divergente, lo que nos interesa es obtener predicciones finitas, lo que hacemos entonces es recurrir a algún método artificioso para expresar la integral en partes finitas o extraer partes finitas de ella, lo cual se conoce como *regularizar* la integral. Existen varios métodos para conseguir esto, por ejemplo introducir partículas ficticias pesadas conocido como *regularización de Pauli-Villars*, otro es reemplazar el límite superior de la integral por algún parámetro introduciendo así un corte, luego de evaluar la integral se toma un proceso de límite para retirar dicho parámetro. El problema con este tipo de métodos es que pueden no preservar identidad de Ward o volverse complicados en su manipulación; existe sin embargo otra forma de regularizar atribuida a 't Hooft y Veltman conocida como *regularización dimensional*, bajo este esquema la idea es evaluar el diagrama según los pasos anteriores como una función analítica de la dimensionalidad  $D$  del espaciotiempo y de esta forma una vez que se tiene el resultado final las cantidades observables deben tener un límite bien definido cuando  $D \rightarrow 4$ .

Partiendo del hecho de que la acción  $S$  debe ser una cantidad adimensional, en  $D$  dimensiones debe ocurrir lo mismo, como

$$S = \int d^D x \mathcal{L},$$

se implica que

$$[\mathcal{L}] = L^{-D} \quad (\text{L es longitud})$$

o bien

$$[\mathcal{L}] = \Lambda^D \quad (\Lambda \text{ es momento})$$

ahora, veamos qué le ocurre a la lagrangiana (1.77). El término cinético tiene unidades

$$[\partial_\mu] = \Lambda^1,$$

de forma consistente

$$[\Psi] = \frac{D-1}{2}, \quad [A_\mu] = \frac{D-2}{2}$$

el único término que debemos ajustar es  $-e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu$ , para ello introducimos el factor

$$\mu^{\frac{4-D}{2}}, \tag{1.78}$$

de esta forma tenemos que la lagrangiana (1.77) en  $D$  dimensiones es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi - e\mu^{\frac{4-D}{2}}\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu. \tag{1.79}$$

Cabe resaltar que dado que la extensión en  $D$  dimensiones se realiza con el fin de tratar los loops internos las funciones de onda externas deben dejarse en su forma cuadridimensional. Otro aspecto a considerar es que el álgebra de las matrices  $\gamma^\mu$  se modifica, pero el álgebra de Clifford conserva la forma

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu},$$

salvo que ahora  $g^{\mu\nu}$  es el tensor métrico en el espacio  $D$  dimensional de Minkowski. Algunas relaciones que se modifican es este esquema se muestran en el A.2.

### 1.3.2. Divergencias de QED

¿Qué diagramas divergentes podemos encontrar en QED? Para responder esta pregunta necesitamos una forma de caracterizar un diagrama y poder decir si es o no divergente. Una forma directa es mediante el conteo de potencias. Las expresiones de las integrales tienen un numerador y un denominador, en ellos tenemos potencias de la variable de integración (que es un momento), la prescripción indica que si el número de potencias en el numerador es mayor o igual que el de las potencias en el denominador la integral será divergente. Cuando el número de potencias resultante vale 0 se dice que la integral diverge logarímicamente, cuando vale 1 se dice que diverge linealmente, cuando vale 2 se dice que diverge cuadráticamente y así sucesivamente. La forma en la que podemos hacer este análisis a partir de un diagrama está en función de los elementos del mismo, hablamos entonces del *grado de divergencia superficial*  $\mathcal{D}_s$ <sup>4</sup>.

Considere la siguiente notación:

- $n$  = número de vértices
- $L$  = número de loops
- $F_i$  = número de líneas internas del fotón
- $F_e$  = número de líneas externas del fotón
- $E_i$  = número de líneas internas del electrón
- $E_e$  = número de líneas externas del electrón

Entonces la fórmula para la divergencia superficial  $\mathcal{D}_s$  en el espacio  $D$  dimensional es:

$$\mathcal{D}_s = DL - 2F_i - E_i, \quad (1.80)$$

el número de loops se calcula sumando las líneas internas del fotón y del electrón y a esto se le resta el número de vértices, aunque se deja uno de ellos por la delta de Dirac que representa la conservación total del momento, es decir:

$$L = E_i + F_i - (n - 1) \quad (1.81)$$

luego, podemos relacionar el número de vértices con el número de líneas del electrón y el fotón, cada vértice tiene dos líneas del electrón, si las líneas son externas sólo cuentan una vez, si son internas cuentan dos veces ya que van unidas a dos vértices en ese caso, con esto:

$$2n = E_e + 2E_i, \quad (1.82)$$

y para el caso de la línea del fotón en el vértice tenemos

$$n = F_e + 2F_i \quad (1.83)$$

ya que solamente es una línea.

Combinando las ecuaciones (1.80) y (1.81) tenemos:

$$\mathcal{D}_s = (D - 1) E_i + (D - 2) F_i + D(1 - n),$$

y sustituyendo en esta expresión (1.82) y (1.83) obtenemos finalmente:

$$\mathcal{D}_s = D + n \left( \frac{D - 4}{2} \right) - \left( \frac{D - 1}{2} \right) E_e - \left( \frac{D - 2}{2} \right) F_e. \quad (1.84)$$

Note que cuando  $D = 4$

$$\mathcal{D}_s = 4 - \frac{3}{2} E_e - F_e, \quad (1.85)$$

---

<sup>4</sup>Se llama así porque un diagrama en particular puede contener funciones de 2 o 4 puntos escondidas con un loop o más de tal manera que el diagrama resulte ser divergente a pesar de que dicha fórmula indique lo contrario.

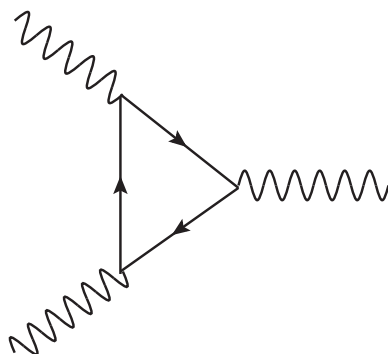


Figura 1.1: Vértice de tres fotones.

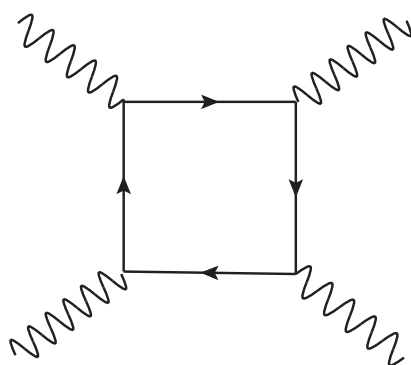


Figura 1.2: Dispersión de luz por luz.

mostrando que  $\mathcal{D}_s$  es independiente de  $n$ , condición indispensable para renormalizabilidad.

Ahora podemos decir ya cuáles son los diagramas divergentes que podemos encontrar en QED y sus características. Los diagramas divergentes que podemos encontrar a orden de un lazo son: autoenergía del electrón, autoenergía del fotón, el vértice de interacción, el acoplamiento de tres fotones y la dispersión de luz por luz. Resulta ser, sin embargo, que sólo los tres primeros diagramas deberán de ser tratados bajo el esquema de renormalización y serán tratados en las secciones subsecuentes; como veremos a continuación los otros dos diagramas no ofrecen problemas realmente.

Veamos primero el caso del vértice de tres fotones. El diagrama se muestra en la figura 1.1, en este caso tenemos que  $E_e = 0$  y  $F_e = 3$ , y usando la ecuación (1.85) tenemos que  $\mathcal{D}_s = 1$ ; pero este diagrama puede ser cancelado por uno que tenga el flujo de la carga en dirección opuesta, lo cual es consecuencia de la invariancia de la lagrangiana (1.79) bajo conjugación de carga, de hecho, de forma más general, resulta que las funciones de Green con un número impar de líneas fotónicas externas valen cero.

Ahora veamos el caso de la dispersión de luz por luz. El diagrama se muestra en la figura 1.2, para este caso se tiene  $E_e = 0$  y  $F_e = 4$ , por lo que  $\mathcal{D}_s = 0$ . Este proceso no tiene análogo clásico, tiene una sección eficaz distinta de cero pero resulta que por invariancia de norma el diagrama es convergente.

### 1.3.3. Esquema de renormalización

Las características generales del proceso de renormalización se pueden resumir de la siguiente manera [10]:

1. Absorber la renormalización de los campos en la lagrangiana mediante el reescalamiento de los mismos.
2. Descomponer cada término de la lagrangiana en dos partes, esto es, si la lagrangiana original tiene parámetros (masas y constantes de acoplamiento) divergentes o no físicos y campos divergentes o no físicos, se escribe ya renormalizada en una parte que contiene elementos finitos tal que sea una copia de la teoría original y otra parte que conenga los elementos divergentes, luego, mediante el proceso de cálculo la parte que tiene los elementos divergentes va a cancelar las divergencias que produzca la otra teoría absorbiendo así el infinito y el corrimiento no observable en los contartérminos (dicho corrimiento está contenido en las condiciones de renormalización y al ser no observable debe ser cancelado por el contratérmino).
3. Especificar las condiciones de renormalización las cuales definen las masas y constantes de acoplamiento físicas y mantener la renormalización de los campos igual a 1. Esta última condición resulta de la estructura del propagador, el cual define la masa como la localización del polo y mantiene su residuo igual a 1. Cabe mencionar que se habla de constantes de acoplamiento físicas, por lo cual debe establecerse el proceso de medición tal que no participen los propagadores sino el vértice ya que es el que representa la interacción, por lo cual también se define una condición de renormalización para el vértice, regularmente se define a grandes distancias, esto es, momento transferido  $q$  tendiendo a cero, o equivalentemente, en un rango de bajas energías.
4. Calcular amplitudes con las nuevas reglas de Feynman ajustando los contratérminos como sea necesario para mantener las condiciones de renormalización.

Se seguirá este esquema para construir QED renormalizada a un lazo.

Podemos reescribir la lagrangiana (1.77) de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{0\mu\nu}F_0^{\mu\nu} + \bar{\Psi}_0 (i\not{D}_0 - m_0) \Psi_0, \quad (1.86)$$

donde el subíndice 0 indica que la cantidad a la que etiqueta es desnuda o divergente. Reescribiendo la ecuación usando la definición del tensor electromagnético (1.65) y la derivada covariante (1.55) tenemos:

$$F_{0\mu\nu} = \partial_\mu A_{0\nu} - \partial_\nu A_{0\mu} \quad (1.87a)$$

$$D_{0\mu} = \partial_\mu + ie_0 A_{0\mu} \quad (1.87b)$$

con lo cual:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{0\mu\nu}F_0^{\mu\nu} + \bar{\Psi}_0 (i\not{\partial} - m_0) \Psi_0 - e_0 \bar{\Psi}_0 \gamma^\mu \Psi_0 A_{0\mu}. \quad (1.88)$$

El cálculo de los propagadores del electrón y del fotón con esta lagrangiana hasta orden de un lazo conduce a:

$$\begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad = \frac{iZ_2}{\not{p} - m} + \dots$$

y

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad = -\frac{iZ_3 g_{\mu\nu}}{q^2}$$

**CAPÍTULO 1. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA**  
**1.3. RENORMALIZACIÓN DE QED A UN LAZO**

---

donde  $\mathcal{Z}_2$  y  $\mathcal{Z}_3$  son los encargados de reescalar el campo del espinor y el campo de norma respectivamente y serán calculados más adelante.

Para absorber  $\mathcal{Z}_2$  y  $\mathcal{Z}_3$  en la lagrangiana (1.88) sustituimos los campos divergentes bajo las siguientes definiciones:

$$\Psi_0 = \mathcal{Z}_2^{\frac{1}{2}} \Psi \quad (1.89a)$$

$$A_{0\mu} = \mathcal{Z}_3^{\frac{1}{2}} A_\mu, \quad (1.89b)$$

donde  $\Psi$  y  $A_\mu$  son los campos renormalizables, con esto tenemos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathcal{Z}_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{Z}_2 \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m_0) \Psi - e_0 \mathcal{Z}_2 \mathcal{Z}_3^{\frac{1}{2}} \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu. \quad (1.90)$$

Lo que sigue es darle la forma que tiene la teoría original a esta última ecuación en términos de cantidades finitas (renormalizadas). Para esto, introducimos la carga eléctrica física  $e$  por medio de la definición de un factor de escala  $\mathcal{Z}_1$  de la siguiente manera:

$$e \mathcal{Z}_1 = e_0 \mathcal{Z}_2 \mathcal{Z}_3^{\frac{1}{2}}. \quad (1.91)$$

Si  $m$  es la masa física, podemos descomponer la lagrangiana en dos partes como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi} (i\not{\partial} - m) \Psi - e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu \\ & -\frac{1}{4} \delta_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi} (i\delta_2 \not{\partial} - \delta m) \Psi - e \delta_1 \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu, \end{aligned} \quad (1.92)$$

donde

$$\delta_1 = \mathcal{Z}_1 - 1 = \frac{e_0}{e} \mathcal{Z}_2 \mathcal{Z}_3^{\frac{1}{2}} - 1 \quad (1.93a)$$

$$\delta_2 = \mathcal{Z}_2 - 1 \quad (1.93b)$$

$$\delta_3 = \mathcal{Z}_3 - 1 \quad (1.93c)$$

$$\delta m = \mathcal{Z}_2 m_0 - m \quad (1.93d)$$

estos son los contratérminos a los que hace referencia el punto 4, sabemos que a un lazo la teoría generará divergencias, por tanto se definen reglas de Feynman para cada una de estas partes, las cuales se muestran en la Fig.1.3, luego la segunda parte de la ecuación (1.92) cancelará estas divergencias a través de las condiciones de renormalización.

Las cuatro condiciones de renormalización son:

$$\Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=m} = 0 \quad (1.94a)$$

$$\frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} = 0 \quad (1.94b)$$

$$\Pi(q^2) \Big|_{q^2=0} = 0 \quad (1.94c)$$

$$-ie\Gamma^\mu(q) \Big|_{q=0} = -ie\gamma^\mu \quad (1.94d)$$

la primera condición (1.94a) define la masa del electrón, la segunda condición (1.94b) define el campo  $\Psi$  a través del residuo del propagador del electrón, la tercera condición (1.94c) define el campo de



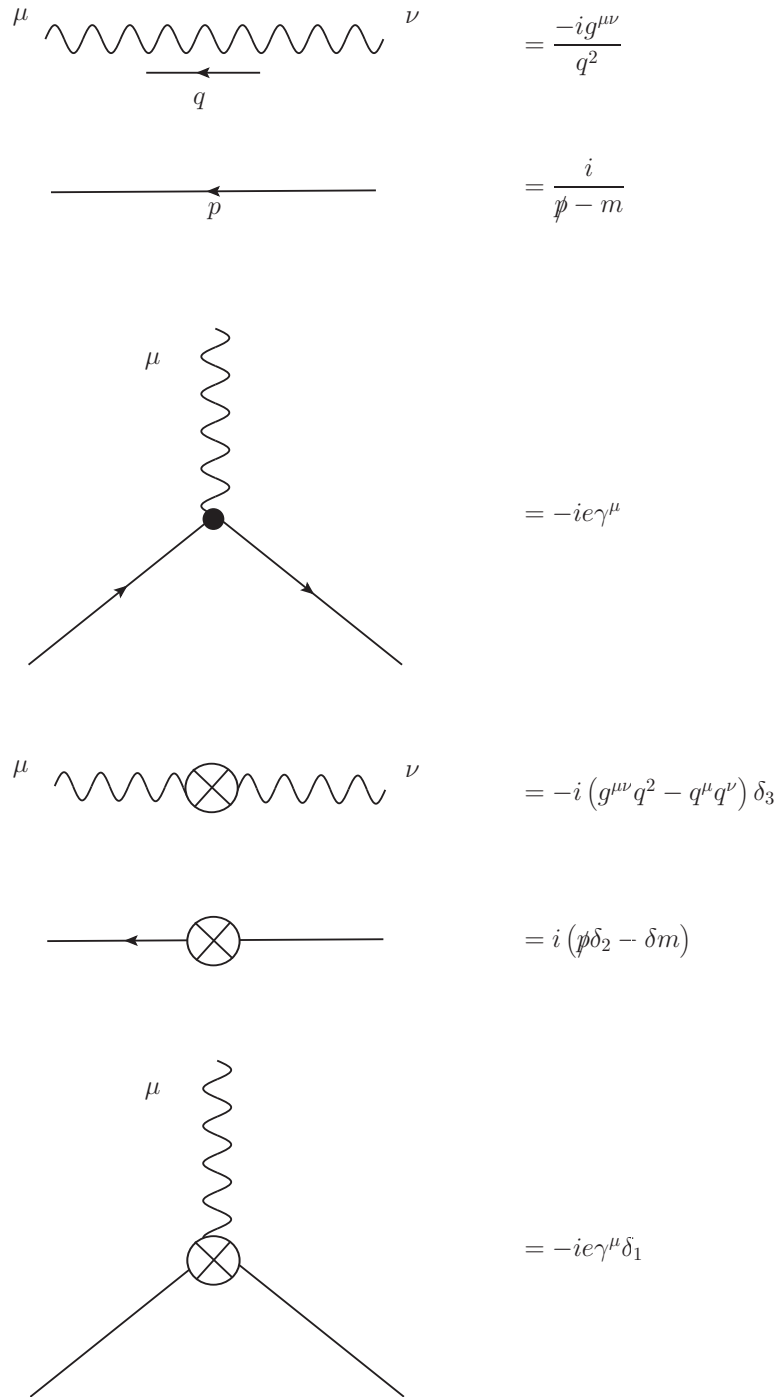


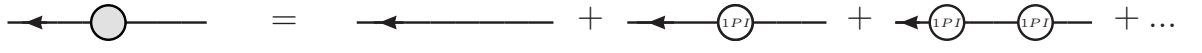
Figura 1.3: Reglas de Feynman para QED renormalizada.

**CAPÍTULO 1. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA**  
**1.3. RENORMALIZACIÓN DE QED A UN LAZO**

norma  $A_\mu$  a través del residuo del propagador del fotón y por último, la cuarta condición (1.94d) define la carga eléctrica. Las cuatro condiciones permiten determinar los cuatro contratérminos necesarios en términos de los valores de los diagramas a un lazo, calcularemos estas cantidades usando la regularización dimensional para controlar los efectos divergentes de cortas distancias (divergencias ultravioleta, UV) y una masa ficticia  $m_\gamma$  para el fotón con el fin de controlar los efectos divergentes de grandes distancias (divergencias infrarrojas, IR).

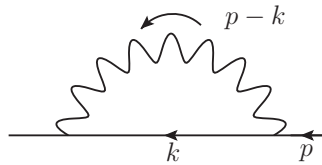
**1.3.4. Cálculo de la autoenergía del electrón**

El propagador completo es:



$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} + \dots \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} \left( \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m} \right) + \frac{i}{\not{p} - m} \left( \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m} \right)^2 + \dots \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m} \left[ 1 + \left( \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m} \right) + \left( \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m} \right)^2 + \dots \right] \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m} \right)^n \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m} \left( \frac{1}{1 - \left( \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p} - m} \right)} \right) \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(\not{p})} \tag{1.95}
 \end{aligned}$$

A orden de un lazo la contribución a  $\Sigma(p)$  se muestra en el siguiente diagrama:



$$= \frac{i}{\not{p} - m} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m}$$

donde

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p) &= (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-ie\gamma_\mu) \left( \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \right) \left( \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p-k)^2 - m_\gamma^2} \right) (-ie\gamma_\nu) \\
 &= -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\mu (\not{k} + m) \gamma^\mu}{(k^2 - m^2) [(p-k)^2 - m_\gamma^2]} \tag{1.96}
 \end{aligned}$$

ahora, utilicemos una parametrización de Feynman (ver (A.1)) de la forma:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[Ax + B(1-x)]^2}, \quad (1.97)$$

haciendo  $A = (p-k)^2 - m_\gamma^2$  y  $B = k^2 - m^2$ , el denominador del integrando en la ecuación (1.96) queda:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \frac{1}{\left\{ \left[ (p-k)^2 - m_\gamma^2 \right] x + (k^2 - m^2) (1-x) \right\}^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{\left\{ (k-px)^2 - [m_\gamma^2 x + m^2(1-x) - p^2 x(1-x)] \right\}^2}, \end{aligned}$$

definiendo  $\mathcal{R}_\Sigma^2 = m_\gamma^2 x + m^2(1-x) - p^2 x(1-x)$  la ecuación (1.96) ahora se escribe como:

$$-i\Sigma(p) = -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\mu (\not{k} + m) \gamma^\mu}{\left[ (k-px)^2 - \mathcal{R}_\Sigma^2 \right]^2}, \quad (1.98)$$

haciendo el cambio de variable  $k' = k - px$  tenemos:

$$-i\Sigma(\not{p}) = -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\mu (\not{k}' + \not{p}x + m) \gamma^\mu}{(k'^2 - \mathcal{R}_\Sigma^2)^2}, \quad (1.99)$$

note que la integral que tiene que ver con el término  $\not{k}'$  en el numerador vale cero ya que es una integral impar sobre todo el dominio de  $k'$  el cual va de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Ahora, utilicemos el álgebra de las matrices de Dirac en  $D$  dimensiones (ver (A.2)) para simplificar el numerador del integrando, con esto tenemos que  $\gamma_\mu (\not{p}x + m) \gamma^\mu = (2-D)\not{p}x + Dm$  así,

$$-i\Sigma(\not{p}) = -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)\not{p}x + Dm}{(k'^2 - \mathcal{R}_\Sigma^2)^2}, \quad (1.100)$$

podemos integrar ya respecto a  $k'$  usando la integral (A.4a)

$$\int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k'^2 - \mathcal{R}_\Sigma^2)^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\mathcal{R}_\Sigma^2}{4\pi}\right)^{\frac{D}{2}-2},$$

con lo cual la ecuación (1.100) queda

$$-i\Sigma(\not{p}) = -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx [(2-D)\not{p}x + Dm] \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\mathcal{R}_\Sigma^2}{4\pi}\right)^{\frac{D}{2}-2}, \quad (1.101)$$

sea  $\epsilon = 4 - D$ , reescribiendo la ecuación (1.101) en términos de  $\epsilon$ :

$$\Sigma(\not{p}) = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx [(\epsilon-2)\not{p}x + (4-\epsilon)m] \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\mathcal{R}_\Sigma^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}. \quad (1.102)$$

De acuerdo con (1.94a),

$$[-\Sigma(\not{p}) + \not{p}\delta_2 - \delta m] \Big|_{\not{p}=m} = 0,$$

evaluamos en  $\not{p} = m$  y denotemos por  $\bar{\mathcal{R}}_\Sigma^2 = \mathcal{R}_\Sigma^2 \Big|_{\not{p}=m} = m_\gamma^2 x + m^2(1-x)^2$ , tenemos finalmente:

$$m\delta_2 - \delta m = \Sigma(\not{p}=m) = \frac{m e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx [4 - 2x - \epsilon(1-x)] \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\bar{\mathcal{R}}_\Sigma^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}. \quad (1.103)$$

De la condición (1.94b) se determina  $\delta_2$ :

$$\frac{d}{d\phi} [-\Sigma(\phi) + \phi\delta_2 - \delta m] \Big|_{\phi=m} = 0,$$

entonces:

$$\begin{aligned} \delta_2 = \frac{d\Sigma(\phi)}{d\phi} \Big|_{\phi=m} &= \frac{d}{d\phi} \left\{ -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx [(\epsilon - 2)\phi x + (4 - \epsilon)m] \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\mathcal{R}_\Sigma^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right\} \Big|_{\phi=m} \\ &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\bar{\mathcal{R}}_\Sigma^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \left\{ (2 - \epsilon)x - \frac{\epsilon}{2} [4 - 2x - \epsilon(1 - x)] \frac{2m^2 x(1 - x)}{\bar{\mathcal{R}}_\Sigma^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Note que el segundo término entre paréntesis cuadrados da un resultado finito cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

### 1.3.5. Cálculo de la autoenergía del fotón

Siguiendo el orden de las condiciones de renormalización, la tercera condición se aplica a la autoenergía del fotón. De forma general,  $i\Pi^{\mu\nu}(q)$  se define como la suma de las inserciones de los diagramas irreducibles de una parte (1PI) en el propagador del fotón.

Los únicos tensores que tenemos disponibles para construir  $\Pi^{\mu\nu}$  son  $g^{\mu\nu}$  y  $q^\mu q^\nu$ , y debido a que la interacción de dos fotones a nivel de lagrangiana es de la forma  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  podemos inferir la forma de  $\Pi^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= 2(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu) \\ &= 2(\partial_\mu (A_\nu \partial^\mu A^\nu) - A_\nu \partial^2 A^\nu - \partial_\nu (A_\mu \partial^\mu A^\nu) + A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu), \end{aligned}$$

despreciando los términos de superficie,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= 2(-A_\nu \partial^2 A^\nu + A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu) \\ &= 2(-A_\mu \partial^2 g^{\mu\nu} A_\nu + A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu) \\ &= 2A_\mu (-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu, \end{aligned}$$

y el término entre paréntesis se transforma en el espacio de momentos como

$$-\partial^2 g^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu \mapsto q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu,$$

note que esto es consistente con la identidad de Ward ya que  $q_\mu (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) = q_\nu (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) = 0$ . Por lo tanto,  $\Pi^{\mu\nu}$  debe ser de la forma:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2) \quad (1.105)$$

con  $\Pi(q^2)$  regular en  $q^2 = 0$ , ya que se espera que  $\Pi^{\mu\nu}(q)$  no tenga polo en  $q^2 = 0^5$ .

---

<sup>5</sup>La única fuente posible de este polo sería un estado intermedio de partícula no masiva, lo cual no puede ocurrir en ningún diagrama 1PI.

El propagador completo es:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \mu \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \nu \end{array} &= \text{---} \text{---} \text{---} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots \\
 &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} [i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \Pi(q^2)] \\
 &\quad + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} [i(q^2 g^{\rho\beta} - q^\rho q^\beta) \Pi(q^2)] \frac{-ig_{\beta\sigma}}{q^2} [i(q^2 g^{\sigma\lambda} - q^\sigma q^\lambda) \Pi(q^2)] \frac{-ig_{\lambda\nu}}{q^2} + \dots \\
 &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \Delta_\nu^\rho \Pi(q^2) + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma \Pi^2(q^2) + \dots \tag{1.106}
 \end{aligned}$$

donde  $\Delta_\nu^\rho = \delta_\nu^\rho - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2}$ , observe que

$$\begin{aligned}
 \Delta_\sigma^\rho \Delta_\nu^\sigma &= \left( \delta_\sigma^\rho - \frac{q^\rho q_\sigma}{q^2} \right) \left( \delta_\nu^\sigma - \frac{q^\sigma q_\nu}{q^2} \right) \\
 &= \delta_\sigma^\rho \delta_\nu^\sigma - \frac{q^\sigma q_\nu}{q^2} \delta_\sigma^\rho - \frac{q^\rho q_\sigma}{q^2} \delta_\nu^\sigma + \frac{q^\rho q_\sigma q^\sigma q_\nu}{q^2 q^2} \\
 &= \Delta_\nu^\rho
 \end{aligned}$$

con esto, la ecuación (1.106) queda:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \left( \delta_\nu^\rho - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \right) (\Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots) \\
 &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \left( \delta_\nu^\rho - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \right) (1 + \Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots - 1) \\
 &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \left( \delta_\nu^\rho - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \Pi^n(q^2) \right) - \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \left( \delta_\nu^\rho - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \right) \\
 &= \frac{-i}{q^2 [1 - \Pi(q^2)]} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{-i}{q^2} \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right). \tag{1.107}
 \end{aligned}$$

A nivel de la matriz  $S$  alguna de las líneas externas del propagador completo se conectará con una línea fermiónica, y como consecuencia de la identidad de Ward la suma sobre todas las posibles conexiones no va a contribuir, es decir, los términos proporcionales a  $q_\mu$  o  $q_\nu$  desaparecerán. Así, para propósitos de cálculo podemos tomar al propagador como:

$$\begin{array}{c} \mu \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \nu \end{array} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 [1 - \Pi(q^2)]}$$

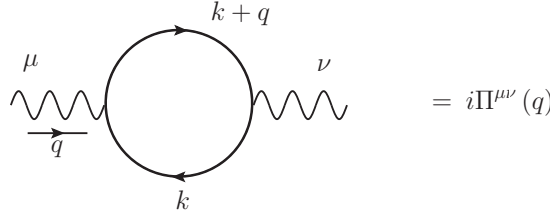
**CAPÍTULO 1. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA**  
**1.3. RENORMALIZACIÓN DE QED A UN LAZO**

---

Note que mientras  $\Pi(q^2)$  es regular en  $q^2 = 0$ , el propagador exacto tiene el polo en  $q^2 = 0$ , esto se traduce en que el fotón permanece sin masa a todo orden en la serie perturbativa. El residuo del polo en  $q^2 = 0$  es:

$$\mathcal{Z}_3 = \frac{1}{1 - \Pi(0)}. \quad (1.108)$$

A orden de un lazo, la contribución está dada por:



donde

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(q) &= (-ie)^2 (-1) (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right] \\ &= -(-ie)^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{i(\not{k} + \not{q} + m)}{(k+q)^2 - m^2} \right] \\ &= -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{Tr} [\gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu (\not{k} + \not{q} + m)]}{(k^2 - m^2) [(k+q)^2 - m^2]} \\ &= -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{T^{\mu\nu}}{(k^2 - m^2) [(k+q)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (1.109)$$

En el último paso hemos definido  $T^{\mu\nu} = \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu (\not{k} + \not{q} + m)]$ , desarrollando esta expresión tenemos:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu (\not{k} + \not{q} + m)] \\ &= \text{Tr} [\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{k} + m \gamma^\mu \gamma^\nu \not{k} + \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{q} + m \gamma^\mu \gamma^\nu \not{q} + m \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu + m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu] \end{aligned}$$

el segundo, cuarto y quinto término desaparecen por ser la traza de un número impar de matrices de Dirac, entonces,

$$T^{\mu\nu} = \text{Tr} [\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu (\not{k} + \not{q}) + m^2 \gamma^\mu \gamma^\nu]$$

luego, usando las propiedades (A.3) tenemos:

$$T^{\mu\nu} = 4 [k^\mu (k+q)^\nu + k^\nu (k+q)^\mu - g^{\mu\nu} (k \cdot (k+q) - m^2)],$$

con esto la ecuación (1.109) queda:

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{4 [k^\mu (k+q)^\nu + k^\nu (k+q)^\mu - g^{\mu\nu} (k \cdot (k+q) - m^2)]}{(k^2 - m^2) [(k+q)^2 - m^2]}. \quad (1.110)$$

Ahora, introduciendo nuevamente una parametrización de Feynman de la forma (1.97) el denominador del integrando, con  $A = (k+q)^2 - m^2$  y  $B = k^2 - m^2$ , toma la forma:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \frac{1}{\left\{ [(k+q)^2 - m^2] x + (k^2 - m^2) (1-x) \right\}^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{\left\{ (k+qx)^2 - [m^2 - q^2 x(1-x)] \right\}^2}, \end{aligned}$$

sea  $\mathcal{R}_{\text{II}}^2 = m^2 - q^2 x(1-x)$ , así la ecuación (1.110) queda:

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{4 [k^\mu (k+q)^\nu + k^\nu (k+q)^\mu - g^{\mu\nu} (k \cdot (k+q) - m^2)]}{[(k+qx)^2 - \mathcal{R}_{\text{II}}^2]^2}. \quad (1.111)$$

Haciendo el cambio de variable  $k' = k + qx$  el numerador del integrando se modifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & k^\mu (k+q)^\nu + k^\nu (k+q)^\mu - g^{\mu\nu} (k \cdot (k+q) - m^2) \\ &= 2k^\mu k^\nu + k^\mu q^\nu + k^\nu q^\mu - g_{\mu\nu} (k^2 + k \cdot q - m^2) \\ &= 2(k'^\mu - q^\mu x)(k'^\nu - q^\nu x) + (k'^\mu - q^\mu x)q^\nu + (k'^\nu - q^\nu x)q^\mu \\ &\quad - g^{\mu\nu} (k'^2 - 2k' \cdot qx + q^2 x^2 + k' \cdot q - q^2 x - m^2) \\ &= 2k'^\mu k'^\nu - g^{\mu\nu} k'^2 - 2q^\mu q^\nu x(1-x) + g^{\mu\nu} (m^2 + q^2 x(1-x)) + k'^\nu q^\mu (1-2x) \end{aligned}$$

el último término no contribuye a la integral, por lo cual la ecuación (1.111) toma la forma:

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -4e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{2k'^\mu k'^\nu - g^{\mu\nu} k'^2 - 2q^\mu q^\nu x(1-x) + g^{\mu\nu} (m^2 + q^2 x(1-x))}{(k'^2 - \mathcal{R}_{\text{II}}^2)^2}, \quad (1.112)$$

simplicando un poco más podemos usar las relaciones en  $D$  dimensiones,  $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = D$ , con esto,

$$k^\mu k^\nu = \frac{D}{D} k^\mu k^\nu = \frac{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}{D} k^\mu k^\nu = \frac{k^2}{D} g^{\mu\nu}$$

usando este resultado,

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -4e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{\left[ \left( \frac{2}{D} - 1 \right) k'^2 + m^2 + q^2 x(1-x) \right] g^{\mu\nu} - 2q^\mu q^\nu x(1-x)}{(k'^2 - \mathcal{R}_{\text{II}}^2)^2} \quad (1.113)$$

**CAPÍTULO 1. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA**  
**1.3. RENORMALIZACIÓN DE QED A UN LAZO**

---

y usando las integrales (A.4) podemos realizar la integración respecto a  $k'$ ,

$$\int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k'^2 - \mathcal{R}_{\Pi}^2)^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\mathcal{R}_{\Pi}^2}{4\pi}\right)^{\frac{D}{2}-2},$$

$$\int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{\left(\frac{2}{D} - 1\right) k'^2}{(k'^2 - \mathcal{R}_{\Pi}^2)^2} = -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{D}{2} \left(\frac{2}{D} - 1\right) \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\mathcal{R}_{\Pi}^2}{4\pi}\right)^{\frac{D}{2}-2} \mathcal{R}_{\Pi}^2,$$

así,

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) =$$

$$\frac{-4ie^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\mathcal{R}_{\Pi}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} \left\{ [-\mathcal{R}_{\Pi}^2 + m^2 + q^2 x(1-x)] g^{\mu\nu} - 2q^\mu q^\nu x(1-x) \right\},$$
(1.114)

pero note que

$$\begin{aligned} & [-\mathcal{R}_{\Pi}^2 + m^2 + q^2 x(1-x)] g^{\mu\nu} - 2q^\mu q^\nu x(1-x) \\ &= [-(m^2 - q^2 x(1-x)) + m^2 + q^2 x(1-x)] g^{\mu\nu} - 2q^\mu q^\nu x(1-x) \\ &= 2(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) x(1-x), \end{aligned}$$

con lo que finalmente tenemos:

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(q) &= \frac{-4ie^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\mathcal{R}_{\Pi}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} 2(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) x(1-x) \\ &= (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \frac{-ie^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\mathcal{R}_{\Pi}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} 8x(1-x) \\ &= (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) i\Pi(q^2), \end{aligned}$$
(1.115)

donde

$$\Pi(q^2) = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\mathcal{R}_{\Pi}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} 8x(1-x).$$
(1.116)

La tercer condición de renormalización (1.94c) establece:

$$[\Pi(q^2) - \delta_3]_{q^2=0} = 0,$$

entonces para que se mantenga el residuo del propagador igual a la unidad tenemos que:

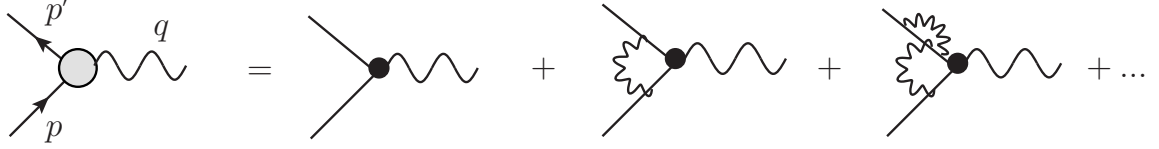
$$\delta_3 = \Pi(q^2)|_{q^2=0} = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} 8x(1-x).$$
(1.117)



### 1.3.6. Cálculo de la función vértice

Proseguimos con el cálculo de la función vértice, veamos primero cuál es su estructura. La forma de la función vértice está determinada por invariancia de Lorentz, simetrías discretas de QED y la identidad de Ward.

Sea



$$= -ie\Gamma^\mu(p', p) .$$

A nivel de la matriz  $S$ , no se incluye la contribución de los diagramas de polarización del vacío ya que dichos diagramas son correcciones al campo electromagnético en sí, mientras que los diagramas incluidos en  $\Gamma^\mu$  representan correcciones a la respuesta del electrón ante un campo aplicado.

A nivel árbol  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$ , pero una expresión general de  $\Gamma^\mu$  puede involucrar en principio objetos como  $p, p', \gamma^\mu$  y constantes como  $e$  y  $m$  ya que en las reglas de Feynman son precisamente esos objetos los que pueden contribuir a  $\Gamma^\mu$  en la evaluación de los diagramas. Podemos entonces proponer la forma de  $\Gamma^\mu$  como

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu G + (p'^\mu + p^\mu) H + (p'^\mu - p^\mu) M ,$$

con  $G, H$  y  $M$  funciones arbitrarias de  $q^2$ . Haciendo uso de la identidad de Ward esta forma se reduce ya que  $q_\mu \Gamma^\mu = 0$ , (recuerde que  $q = p' - p$ )

$$q_\mu \Gamma^\mu = (p'_\mu - p_\nu) \gamma^\mu G + (p'_\mu - p_\nu) (p'^\mu + p^\mu) H + (p'_\mu - p_\nu) (p'^\mu - p^\mu) M = 0 .$$

Note que el primer término se cancela si consideramos el producto con los espinores  $\bar{u}(p')$  y  $u(p)$ , esto es,  $\bar{u}(p') (\not{p}' - \not{p}) u(p) = 0$ , el segundo término por estar en capa de masa es equivalente a  $m^2 - m^2 = 0$ , y el tercer término es proporcional a  $2m^2 - 2p' \cdot p$ , por lo tanto, para que se cumpla  $q_\mu \Gamma^\mu = 0$ ,  $M$  debe ser cero. Así podemos escribir:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + (p'^\mu + p^\mu) F_2(q^2)$$

ahora, usando la identidad de Gordon:

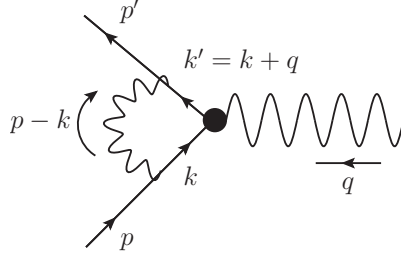
$$\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} = \gamma^\mu - \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} , \quad (1.118)$$

podemos reemplazar el término  $p'^\mu + p^\mu$  convenientemente en la expresión de  $\Gamma^\mu$ , obteniendo

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) , \quad (1.119)$$

donde las funciones  $F_1(q^2)$  y  $F_2(q^2)$  se conocen como *factores de forma*. Note que a nivel árbol se tiene  $F_1(q^2) = 1$  y  $F_2(q^2) = 0$ .

A orden de un lazo, la contribución se muestra en el siguiente diagrama:



consideraremos que a este orden  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu$ , con la corrección a la corriente dada por

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \delta\Gamma^\mu u(p) &= \\ &= (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-ig_{\mu\rho}}{[(k-p)^2 - m_\gamma^2]} \bar{u}(p') (-ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} (-ie\gamma^\rho) u(p) \\ &= -ie^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') \gamma_\rho (\not{k}' + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\rho u(p)}{[(k-p)^2 - m_\gamma^2] (k^2 - m^2) (k'^2 - m^2)}. \end{aligned} \quad (1.120)$$

Podemos expresar el numerador de la integral como  $\bar{u}(p') N^\mu u(p)$ , donde  $N^\mu$  es:

$$\begin{aligned} N^\mu &= \gamma_\rho (\not{k}' + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\rho \\ &= \gamma_\rho \not{k}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\rho + m\gamma_\rho \not{k}' \gamma^\mu \gamma^\rho + m\gamma_\rho \gamma^\mu \not{k} \gamma^\rho + m^2 \gamma_\rho \gamma^\mu \gamma^\rho, \end{aligned} \quad (1.121)$$

usando ahora las identidades en  $D$  dimensiones (A.2) tenemos que:

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \not{k}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\rho &= -2\not{k} \gamma^\mu \not{k}' + \epsilon \not{k}' \gamma^\mu \not{k} \\ m\gamma_\rho \not{k}' \gamma^\mu \gamma^\rho &= 4mk'^\mu - m\epsilon \not{k}' \gamma^\mu \\ m\gamma_\rho \gamma^\mu \not{k} \gamma^\rho &= 4mk^\mu - m\epsilon \gamma^\mu \not{k} \\ m^2 \gamma_\rho \gamma^\mu \gamma^\rho &= -2m^2 \gamma^\mu + m^2 \epsilon \gamma^\mu \end{aligned}$$

con esto, la ecuación (1.121) se escribe

$$N^\mu = -2 \left\{ \left[ \not{k} \gamma^\mu \not{k}' - 2m(k'^\mu + k^\mu) + m^2 \gamma^\mu \right] - \frac{\epsilon}{2} \left[ \not{k}' \gamma^\mu \not{k} - m(\not{k}' \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k}) + m^2 \gamma^\mu \right] \right\} \quad (1.122)$$

y así, la ecuación (1.120) se reescribe de la siguiente manera:

$$\bar{u}(p') \delta\Gamma^\mu u(p) = 2ie^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') N^\mu u(p)}{[(k-p)^2 - m_\gamma^2] (k^2 - m^2) (k'^2 - m^2)}, \quad (1.123)$$

Utilicemos una parametrización de Feynman (A.1) para el denominador de la integral:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left[(k-p)^2 - m_\gamma^2\right] (k^2 - m^2) (k'^2 - m^2)} &= 2 \int_0^1 \frac{dx dy dz \delta(x+y+z-1)}{\left\{ (k^2 - m^2)x + (k'^2 - m^2)y + \left[(k-p)^2 - m_\gamma^2\right]z \right\}^3} \\ &= 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{D^3} \end{aligned} \quad (1.124)$$

trabajemos ahora el denominador  $D$ ,

$$D = (k^2 - m^2)x + (k'^2 - m^2)y + (k-p)^2 z - m_\gamma^2 z,$$

sustituyendo el valor de  $k'$ ,  $k' = k + q$  y desarrollando los cuadrados, (recuerde que  $x + y + z = 1$ )

$$\begin{aligned} D &= (k^2 - m^2)x + (k^2 + 2k \cdot q + q^2 - m^2)y + (k^2 - 2k \cdot p + p^2)z - m_\gamma^2 z \\ &= 2k \cdot (qy - pz) - m^2(x+y) + k^2 + q^2 y + p^2 z - m_\gamma^2 z + (qy - pz)^2 - (qy - pz)^2 \end{aligned}$$

sea  $l = qy - pz$ ,

$$D = (k+l)^2 - [l^2 - q^2 y - p^2 z + m^2(x+y) + m_\gamma^2 z],$$

sea  $\mathcal{R}_\Gamma^2 = l^2 - q^2 y - p^2 z + m^2(x+y) + m_\gamma^2 z$ , entonces

$$D = (k+l)^2 - \mathcal{R}_\Gamma^2,$$

de modo que la ecuación (1.124) toma la forma

$$\frac{1}{\left[(k-p)^2 - m_\gamma^2\right] (k^2 - m^2) (k'^2 - m^2)} = 2 \int_0^1 dx dy dz \frac{\delta(x+y+z-1)}{\left[(k+l)^2 - \mathcal{R}_\Gamma^2\right]^3}. \quad (1.125)$$

Ahora, trabajemos un poco más con la expresión para  $\mathcal{R}_\Gamma^2$ , para esto tengamos en mente las siguientes relaciones:

$$q = p' - p \quad \Rightarrow \quad p'^2 = (q+p)^2 = q^2 + 2q \cdot p + p^2$$

pero  $p'^2 = p^2 = m^2$ ,

$$\Rightarrow q^2 = -2q \cdot p$$

usando estos resultados tenemos que

$$\begin{aligned} l^2 &= (qy - pz)^2 \\ &= q^2 y^2 - 2q \cdot p yz + m^2 z^2 \\ &= q^2 y^2 + q^2 yz + m^2 z^2, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Gamma^2 &= q^2 y^2 + q^2 yz + m^2 z^2 - q^2 y - m^2 z + m^2(x+y) + m_\gamma^2 z \\ &= q^2 y(y-1+z) + m^2(z^2 - 2z + 1) + m_\gamma^2 z \\ &= -q^2 xy + m^2(1-z)^2 + m_\gamma^2 z \end{aligned} \quad (1.126)$$

luego, utilizando la ecuación (1.125), la ecuación (1.123) toma la forma:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \delta\Gamma^\mu u(p) &= \\ 4ie^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') N^\mu u(p)}{[(k+l)^2 - \mathcal{R}_F^2]^3}. \end{aligned} \quad (1.127)$$

Lo que sigue es hacer el corrimiento dado por el cambio de variable  $\tilde{k} = k+l$  para facilitar la integración en el espacio de momentos. Veamos cómo se modifica el numerador  $N^\mu$  bajo este cambio de variable,

$$\begin{aligned} N^\mu &= \not{k}\gamma^\mu \not{k}' - 2m(k'^\mu + k^\mu) + m^2\gamma^\mu - \frac{\epsilon}{2} [\not{k}'\gamma^\mu \not{k} - m(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k}) + m^2\gamma^\mu] \\ &= \not{k}\gamma^\mu (\not{k} + \not{q}) - 2m(k^\mu + q^\mu + k^\mu) + m^2\gamma^\mu \\ &\quad - \frac{\epsilon}{2} [(\not{k} + \not{q})\gamma^\mu \not{k} - m(\not{k} + \not{q})\gamma^\mu - m\gamma^\mu \not{k} + m^2\gamma^\mu] \\ &= (\tilde{k} - l)\gamma^\mu (\tilde{k} - l) + (\tilde{k} - l)\gamma^\mu \not{q} - 2m[2(\tilde{k}^\mu - l^\mu) + q^\mu] + m^2\gamma^\mu \\ &\quad - \frac{\epsilon}{2} [(\tilde{k} - l + \not{q})\gamma^\mu (\tilde{k} - l) - m(\tilde{k} - l + \not{q})\gamma^\mu - m\gamma^\mu (\tilde{k} - l) + m^2\gamma^\mu] \end{aligned}$$

por simplicidad denotaremos por  $\tilde{k}I$  a las potencias impares en la nueva variable de integración  $\tilde{k}$ , está de más mostrarlos explícitamente ya que no van a contribuir a la integral, también denotaremos por  $q^\mu J$  a los términos proporcionales a  $q^\mu$  (esto último sólo se hará para los términos que van multiplicados por  $\frac{\epsilon}{2}$  ya que, como veremos más adelante, en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  no van a contribuir ningún resultado), luego,

$$\begin{aligned} N^\mu &= \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \tilde{k}\gamma^\mu \tilde{k} + l\gamma^\mu (l - \not{q}) + 2m(2l^\mu - q^\mu) + m^2\gamma^\mu \\ &\quad - \frac{\epsilon}{2} [l\gamma^\mu l - \not{q}\gamma^\mu l - m\not{q}\gamma^\mu + m^2\gamma^\mu + m l\gamma^\mu + m\gamma^\mu l + q^\mu J] + \tilde{k}I \\ &= \left(\frac{D}{2} - 1\right) \tilde{k}\gamma^\mu \tilde{k} + l\gamma^\mu (l - \not{q}) + 2m(2l^\mu - q^\mu) + m^2\gamma^\mu \\ &\quad - \frac{\epsilon}{2} [l\gamma^\mu l - \not{q}\gamma^\mu l - m\not{q}\gamma^\mu + m^2\gamma^\mu + m l\gamma^\mu + m\gamma^\mu l + q^\mu J] + \tilde{k}I, \end{aligned} \quad (1.128)$$

note que, el primer término de  $N^\mu$  puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tilde{k}\gamma^\mu \tilde{k} &= \tilde{k}\tilde{k}_\nu (\gamma^\mu \gamma^\nu) = \tilde{k}\tilde{k}_\nu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \\ &= 2\tilde{k}^\mu \tilde{k} - \tilde{k}\tilde{k}\gamma^\mu = 2\tilde{k}^\mu \tilde{k} - \tilde{k}^2\gamma^\mu \\ &= 2\tilde{k}^\mu \tilde{k}_\nu \gamma_\nu - \tilde{k}^2\gamma^\mu = 2\left(\frac{\tilde{k}^2 g^{\mu\nu}}{D}\right) \gamma_\nu - \tilde{k}^2\gamma^\mu \\ &= \left(\frac{2}{D} - 1\right) \tilde{k}^2\gamma^\mu, \end{aligned}$$

así, la ecuación (1.128) toma la forma:

$$\begin{aligned}
 N^\mu &= \left(\frac{D}{2} - 1\right) \left(\frac{2}{D} - 1\right) \tilde{k}^2 \gamma^\mu + \not{l} \gamma^\mu (\not{l} - \not{q}) + 2m(2l^\mu - q^\mu) + m^2 \gamma^\mu \\
 &\quad - \frac{\epsilon}{2} [\not{l} \gamma^\mu \not{l} - \not{q} \gamma^\mu \not{l} - m \not{q} \gamma^\mu + m^2 \gamma^\mu + m \not{l} \gamma^\mu + m \gamma^\mu \not{l} + q^\mu J] + \tilde{k} I.
 \end{aligned} \tag{1.129}$$

El siguiente paso es sustituir  $l = qy - pz$  para dejar a  $N^\mu$  en términos de los parámetros de Feynman, al hacer esto obtendremos una expresión en términos de  $p$ ,  $p'$  y  $q$  que se podrá reducir aún más considerando la acción de los espinores  $\bar{u}$  y  $u$  según la ecuación de Dirac,  $\bar{u}(p') \not{p}' = m \bar{u}(p')$  y  $\not{p} u(p) = m u(p)$ , el álgebra de Clifford y la relación  $x + y + z = 1$  dada por la parametrización de Feynman. Bajo estas consideraciones podemos llevar a esta expresión a la forma  $\delta\Gamma^\mu = \gamma^\mu G + (p'^\mu + p^\mu) H + q^\mu M$  como se dijo antes, esto es,

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(p') N^\mu u(p) &= \bar{u}(p') \left\{ \left(\frac{D}{2} - 1\right) \left(\frac{2}{D} - 1\right) \tilde{k}^2 \gamma^\mu + \not{l} \gamma^\mu (\not{l} - \not{q}) + 2m(2l^\mu - q^\mu) + m^2 \gamma^\mu \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\epsilon}{2} [\not{l} \gamma^\mu \not{l} - \not{q} \gamma^\mu \not{l} - m \not{q} \gamma^\mu + m^2 \gamma^\mu + m \not{l} \gamma^\mu + m \gamma^\mu \not{l} + q^\mu J] + \tilde{k} I \right\} u(p) \\
 &= \bar{u}(p') \left\{ \left(\frac{D}{2} - 1\right) \left(\frac{2}{D} - 1\right) \tilde{k}^2 \gamma^\mu + m^2 \gamma^\mu - 2m[(1 - 2y)q^\mu + 2p^\mu z] \right. \\
 &\quad \left. + (\not{q} y \gamma^\mu - \not{p} z \gamma^\mu) (\not{q} y - \not{p} z) - (\not{q} y - \not{p} z) \gamma^\mu \not{q} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\epsilon}{2} [-\gamma^\mu q^2 y (y + z) + m^2 \gamma^\mu z^2 + \gamma^\mu q^2 y - 2m^2 \gamma^\mu z + m^2 \gamma^\mu + q^\mu J] + \tilde{k} I \right\} u(p) \\
 &= \bar{u}(p') \left\{ \left(\frac{D}{2} - 1\right) \left(\frac{2}{D} - 1\right) \tilde{k}^2 \gamma^\mu + m^2 \gamma^\mu - 2m[(1 - 2y)q^\mu + 2p^\mu z] \right. \\
 &\quad \left. + \not{q} \gamma^\mu \not{q} y (y - 1) - m \not{q} \gamma^\mu y z - 2p^\mu \not{q} \gamma^\mu y z + \gamma^\mu \not{p} \not{q} y z \right. \\
 &\quad \left. + (2mp^\mu - m^2 \gamma^\mu) z^2 + 2p^\mu \not{q} z - \gamma^\mu \not{p} \not{q} z \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\epsilon}{2} [\gamma^\mu q^2 [y - y(1 - x)] + (1 - z)^2 m^2 + q^\mu J] + \tilde{k} I \right\} u(p) \\
 &= \bar{u}(p') \left\{ \gamma^\mu \left\{ \left(\frac{D}{2} - 1\right) \left(\frac{2}{D} - 1\right) \tilde{k}^2 + [(1 - x)(1 - y) - \frac{\epsilon}{2} xy] q^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + [(1 - 2z - z^2) - \frac{\epsilon}{2} (1 - z)^2] m^2 \right\} + \tilde{k} I \right. \\
 &\quad \left. + mz(z - 1)(p'^\mu + p^\mu) + m(z - 2)(x - y)q^\mu - \frac{\epsilon}{2} q^\mu J \right\} u(p)
 \end{aligned} \tag{1.130}$$

con esto la ecuación (1.127) toma la forma:

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(p') \delta\Gamma^\mu u(p) = \\
& 4ie^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{[\tilde{k}^2 - \mathcal{R}_\Gamma^2]^3} \\
& \times \bar{u}(p') \left\{ \gamma^\mu \left\{ \left( \frac{D}{2} - 1 \right) \left( \frac{2}{D} - 1 \right) \tilde{k}^2 + \left[ (1-x)(1-y) - \frac{\epsilon}{2} xy \right] q^2 \right. \right. \\
& + \left. \left[ (1-2z-z^2) - \frac{\epsilon}{2} (1-z)^2 \right] m^2 \right\} + \tilde{k}I \\
& \left. + mz(z-1)(p'^\mu + p^\mu) + m(z-2)(x-y)q^\mu - \frac{\epsilon}{2} q^\mu J \right\} u(p) .
\end{aligned} \tag{1.131}$$

A orden de un lazo, la corrección a los factores de forma es:

$$\delta\Gamma^\mu = \gamma^\mu \delta F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \delta F_2(q^2) \tag{1.132}$$

utilizando la identidad de Gordon (1.118) llevamos la expresión de  $\bar{u}(p') \delta\Gamma^\mu u(p)$  a dicha forma,

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(p') \delta\Gamma^\mu u(p) = \\
& 4ie^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{[\tilde{k}^2 - \mathcal{R}_\Gamma^2]^3} \\
& \times \bar{u}(p') \left\{ \gamma^\mu \left\{ \left( \frac{D}{2} - 1 \right) \left( \frac{2}{D} - 1 \right) \tilde{k}^2 + \left[ (1-x)(1-y) - \frac{\epsilon}{2} xy \right] q^2 \right. \right. \\
& + \left. \left[ (1-4z+z^2) - \frac{\epsilon}{2} (1-z)^2 \right] m^2 \right\} + \tilde{k}I \\
& \left. + mz(z-1)(p'^\mu + p^\mu) + m(z-2)(x-y)q^\mu - \frac{\epsilon}{2} q^\mu J \right\} u(p) ,
\end{aligned} \tag{1.133}$$

a este nivel ya podemos realizar la integración sobre el momento  $\tilde{k}$ , para ello usamos las integrales (A.4),

$$\int \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\tilde{k}^2 - \mathcal{R}_\Gamma^2)^3} = -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(3 - \frac{D}{2})}{\Gamma(3)} \left( \frac{\mathcal{R}_\Gamma^2}{4\pi} \right)^{\frac{D}{2}-2} \frac{1}{\mathcal{R}_\Gamma^2}$$

y

$$\int \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^D} \frac{\tilde{k}^2}{(\tilde{k}^2 - \mathcal{R}_\Gamma^2)^3} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{D}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(3)} \left( \frac{\mathcal{R}_\Gamma^2}{4\pi} \right)^{\frac{D}{2}-2}$$

con esto y en términos de  $\epsilon$  la ecuación (1.133) se convierte en:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') \delta \Gamma^\mu u(p) &= \frac{2e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\mathcal{R}_\Gamma^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \\
&\times \bar{u}(p') \left\{ \gamma^\mu \left\{ \left( \frac{\epsilon-2}{2} \right)^2 \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \left[ (1-x)(1-y) - \frac{\epsilon}{2}xy \right] q^2 \right. \right. \\
&+ \left. \left[ (1-4z+z^2) - \frac{\epsilon}{2}(1-z)^2 \right] m^2 \right\} \frac{\Gamma\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)}{\mathcal{R}_\Gamma^2} \left. - \frac{\epsilon}{2} q^\mu J \frac{\Gamma\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)}{\mathcal{R}_\Gamma^2} \right. \\
&+ \left. 2m^2 z(1-z) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \frac{\Gamma\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)}{\mathcal{R}_\Gamma^2} + m(z-2)(x-y) q^\mu \frac{\Gamma\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)}{\mathcal{R}_\Gamma^2} \right\} u(p) .
\end{aligned} \tag{1.134}$$

Observe que sólo tenemos un término que diverge en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , además podemos hacer claramente la identificación con el resultado esperado (1.132). Hasta este momento hemos conservado el término extra proporcional a  $q^\mu$  con el único objetivo de mostrar explícitamente que se cancela, observe que en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  dicho término es de la forma:

$$\begin{aligned}
q^\mu M(q^2) &= \frac{2e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{m(z-2)(x-y)q^\mu}{\mathcal{R}_\Gamma^2} \\
&= \frac{2e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{m(z-2)(x-y)q^\mu}{-q^2xy + m^2(z-1)^2 + m_\gamma^2 z} \\
&= -\frac{2e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{m(1+x+y)(x-y)q^\mu}{-q^2xy + m^2(x+y)^2 + m_\gamma^2(1-x-y)} \\
&= 0 .
\end{aligned} \tag{1.135}$$

Con argumentos de simetría: observe que el numerador del integrando es impar bajo el intercambio  $x \leftrightarrow y$  mientras que el denominador es par bajo el mismo cambio, por lo tanto al integral total vale cero, lo cual es consecuencia de invariancia de norma a través de la identidad de Ward.

Continuando con el análisis, la ecuación (1.134) se escribe ahora de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') \delta \Gamma^\mu u(p) &= \frac{2e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\mathcal{R}_\Gamma^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \\
&\times \bar{u}(p') \left\{ \gamma^\mu \left\{ \left( \frac{\epsilon-2}{2} \right)^2 \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \left[ (1-x)(1-y) - \frac{\epsilon}{2}xy \right] q^2 \right. \right. \\
&+ \left. \left[ (1-4z+z^2) - \frac{\epsilon}{2}(1-z)^2 \right] m^2 \right\} \frac{\Gamma\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)}{\mathcal{R}_\Gamma^2} \left. + 2m^2 z(1-z) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \frac{\Gamma\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)}{\mathcal{R}_\Gamma^2} \right\} u(p) ,
\end{aligned} \tag{1.136}$$

y comparando con la ecuación (1.132) concluimos que:

$$\begin{aligned}
\delta F_1(q^2) &= \frac{2e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\mathcal{R}_\Gamma^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \\
&\times \left\{ \left( \frac{\epsilon-2}{2} \right)^2 \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \left\{ \left[ (1-x)(1-y) - \frac{\epsilon}{2}xy \right] q^2 \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left[ (1-4z+z^2) - \frac{\epsilon}{2}(1-z)^2 \right] m^2 \right\} \frac{\Gamma\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)}{\mathcal{R}_\Gamma^2} \right\}
\end{aligned} \tag{1.137}$$

y

$$\delta F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\mathcal{R}_\Gamma^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} 2m^2 z(1-z) \frac{\Gamma\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)}{\mathcal{R}_\Gamma^2}, \tag{1.138}$$

donde hemos escrito convenientemente  $\delta F_2$  en términos de  $\alpha$ .

La cuarta condición de renormalización (1.94d), establece:

$$[1 + \delta F_1(q^2) + \delta_1] \Big|_{q^2=0} = 1,$$

lo cual implica que:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= -\delta F_1(q^2) \Big|_{q^2=0} \\
&= -\frac{2e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\bar{\mathcal{R}}_\Gamma^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \\
&\times \left\{ \left( \frac{\epsilon-2}{2} \right)^2 \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{\Gamma\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)}{\bar{\mathcal{R}}_\Gamma^2} \left[ (1-4z+z^2) - \frac{\epsilon}{2}(1-z)^2 \right] m^2 \right\},
\end{aligned} \tag{1.139}$$

donde  $\bar{\mathcal{R}}_\Gamma^2 = \mathcal{R}_\Gamma^2 \Big|_{q^2=0} = m^2(1-z)^2 + m_\gamma^2 z$ . Dado que la integral sólo depende del parámetro  $z$  podemos reemplazar la integración con la delta de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= -\delta F_1(q^2) \Big|_{q^2=0} \\
&= -\frac{2e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz (1-z) \left( \frac{\bar{\mathcal{R}}_\Gamma^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \\
&\times \left\{ \left( \frac{\epsilon-2}{2} \right)^2 \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{\Gamma\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)}{\bar{\mathcal{R}}_\Gamma^2} \left[ (1-4z+z^2) - \frac{\epsilon}{2}(1-z)^2 \right] m^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{1.140}$$

Resulta ser que los contratérminos (1.93) no son independientes entre sí, lo cual es una manifestación más de invariancia de norma. Veamos cómo están relacionados específicamente  $\delta_1$  y  $\delta_2$ , para ello considere las ecuaciones (1.104) y (1.140), reescribamos ambas ecuaciones de tal forma que nos sea posible compararlas. En la ecuación (1.104) realizamos el cambio  $x \rightarrow z$ , además note que en ambas ecuaciones aparece el término  $m^2(1-z)^2 + m_\gamma^2 z$  el cuál denotaremos por  $\mathcal{R}^2$ , entonces según los cálculos anteriores:

$$\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}_\Sigma^2 \Big|_{\not{p}=m} = \mathcal{R}_\Gamma^2 \Big|_{q^2=0} = m^2(1-z)^2 + m_\gamma^2 z, \tag{1.141}$$



así, la ecuación (1.104) se escribe:

$$\delta_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\mathcal{R}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \left\{ (2-\epsilon)z - \frac{\epsilon}{2} [4-2z-\epsilon(1-z)] \frac{2m^2z(1-z)}{\mathcal{R}^2} \right\}, \quad (1.142)$$

de igual manera, la ecuación (1.140) toma la forma:

$$\begin{aligned} \delta_1 = & -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz (1-z) \left(\frac{\mathcal{R}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \\ & \times \left\{ \frac{(\epsilon-2)^2}{2} + \frac{\epsilon m^2}{2\mathcal{R}^2} [2(1-4z+z^2) - \epsilon(1-z)^2] \right\}, \end{aligned} \quad (1.143)$$

ahora, calculemos la diferencia:

$$\begin{aligned} \delta_1 - \delta_2 = & -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz \left(\frac{\mathcal{R}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \\ & \times \left\{ \frac{(\epsilon-2)^2}{2} (1-z) + (1-z) \frac{\epsilon m^2}{2\mathcal{R}^2} [2(1-4z+z^2) - \epsilon(1-z)^2] \right. \\ & \left. - (2-\epsilon)z + \frac{\epsilon}{2} [4-2z-\epsilon(1-z)] \frac{2m^2z(1-z)}{\mathcal{R}^2} \right\} \\ = & -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz \left(\frac{\mathcal{R}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \\ & \times \left\{ \frac{(\epsilon-2)^2}{2} (1-z) - (2-\epsilon)z + \frac{\epsilon m^2}{2\mathcal{R}^2} (1-z)(1-z^2)(2-\epsilon) \right\}. \end{aligned} \quad (1.144)$$

Consideremos la siguiente integral:

$$\int_0^1 dz \left(\frac{\mathcal{R}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) (1-2z)(2-\epsilon), \quad (1.145)$$

haciendo una integración por partes designando

$$g = \left(\frac{\mathcal{R}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}$$

y

$$f = z(1-z),$$

(note que  $fg|_0^1 = 0$ ) llegamos a:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dz \left( \frac{\mathcal{R}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) (1-2z)(2-\epsilon) \\
&= - \int_0^1 dz \left( \frac{\mathcal{R}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) z(1-z) \frac{\epsilon}{2} \frac{[2m^2(1-z) - m_\gamma^2]}{\mathcal{R}^2} (2-\epsilon) \\
&= \int_0^1 dz \left( \frac{\mathcal{R}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) (2-\epsilon) \frac{\epsilon}{2} \left[ (1-z) - \frac{m^2(1-z)(1-z^2)}{\mathcal{R}^2} \right],
\end{aligned} \tag{1.146}$$

lo cual implica que:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dz \left( \frac{\mathcal{R}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\epsilon m^2}{2 \mathcal{R}^2} (1-z)(1-z^2)(2-\epsilon) \\
&= \int_0^1 dz \left( \frac{\mathcal{R}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[ (1-z) \frac{\epsilon}{2} (2-\epsilon) - (1-2z)(2-\epsilon) \right].
\end{aligned} \tag{1.147}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (1.144) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\delta_1 - \delta_2 &= - \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz \left( \frac{\mathcal{R}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \\
&\quad \times \left\{ \frac{(\epsilon-2)^2}{2} (1-z) - (2-\epsilon)z + (1-z) \frac{\epsilon}{2} (2-\epsilon) - (1-2z)(2-\epsilon) \right\} \\
&= - \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz \left( \frac{\mathcal{R}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) [(2-\epsilon)(1-z) - (2-\epsilon)(1-z)] \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{1.148}$$

lo cual implica que  $\delta_1 = \delta_2$ , además, según las ecuaciones (1.93a) y (1.93b) se tiene también que  $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2$ ; esta condición debe cumplirse a todo orden en la serie perturbativa. De (1.93b) se tiene que:

$$e = \frac{\mathcal{Z}_2}{\mathcal{Z}_1} \mathcal{Z}_3^{\frac{1}{2}} e_0, \tag{1.149}$$

y dado que  $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2$ ,

$$e = \mathcal{Z}_3^{\frac{1}{2}} e_0 \tag{1.150}$$

lo cual significa que la carga eléctrica depende solamente de la renormalización del campo del fotón y no de la especie que la porta.

## 1.4. Renormalización de la carga

La renormalización muestra que el valor de la carga eléctrica no es una constante, además predice que el vacío interactuante se comporta como dieléctrico, las propiedades dieléctricas del vacío resultan del hecho de que las interacciones visten al electrón desnudo en una nube de pares electrón-positrón. Este proceso tiene el efecto de modificar la amplitud de propagación del fotón entre dos puntos, más aún,

sabemos que los fotones virtuales se acoplan en sus extremos a una línea fermiónica, si escribimos la regla de Feynman para el vértice  $-ie\gamma^\mu$ , podríamos escribir el propagador del fotón como

$$D_{\mu\nu}(q^2) = -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \left( \frac{e^2}{1 - [\Pi(q^2) - \Pi(0)]} \right) \quad (1.151)$$

donde  $\Pi(q^2)$  está dada por la ecuación (1.116). Escrito así, el término entre paréntesis puede ser visto como una carga eléctrica dependiente del momento. Podemos decir que la carga real, renormalizada por las interacciones con el vacío es dada por:

$$e_R = \frac{e_0}{1 - [\Pi(q^2) - \Pi(0)]}, \quad (1.152)$$

note que  $\Pi(q^2) - \Pi(0)$  es equivalente a escribir  $\Pi(q^2) - \delta_3$ , como veremos en la siguiente sección el valor de esta diferencia es

$$\Pi(q^2) - \Pi(0) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left( \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right), \quad (1.153)$$

por tanto, la carga eléctrica depende del momento transferido por el fotón virtual que media la interacción electromagnética. De esta manera, las propiedades dieléctricas del vacío se interpretan usando la idea del *apantallamiento* de la carga eléctrica producido por los pares electrón-positrón creados del vacío. Este apantallamiento es conocido como *polarización del vacío*.

## 1.5. Límite electrostático

Para ver la consecuencia de la renormalización en electrostática necesitamos considerar la versión estática del propagador (1.151) la cual se obtiene tomando  $q^2 = -\mathbf{q}^2$ , esto se debe a que en el límite no relativista se puede considerar  $p = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) \approx (m, \mathbf{p})$  y también  $p' = (E_{\mathbf{p}'}, \mathbf{p}') \approx (m, \mathbf{p}')$  con lo cual el tri-momento transferido es  $q^2 = (p' - p)^2 \approx -|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 = -\mathbf{q}^2$ ; además necesitamos la ecuación (1.116) en el límite  $D \rightarrow 4$ .

Consideremos la diferencia:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(q^2) &= \Pi(q^2) - \Pi(0) \\ &= -\frac{8e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[ \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\mathcal{R}_{\Pi}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} - \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} \right] \end{aligned} \quad (1.154)$$

utilizando la fórmula (A.8):

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(q^2) \Big|_{D \rightarrow 4} &= -\frac{8e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left\{ \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln \left( \frac{\mathcal{R}_{\Pi}^2}{\mu^2} \right) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right\} \\ &= -\frac{8e^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left( \frac{m^2}{\mathcal{R}_{\Pi}^2} \right) \\ &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left( \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right), \end{aligned} \quad (1.155)$$

luego, tenemos que

$$D_{\mu\nu}(q^2) = -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \frac{e^2}{[1 - \hat{\Pi}(q^2)]} \approx -\frac{ig_{\mu\nu}e^2}{q^2} [1 + \hat{\Pi}(q^2)] , \quad (1.156)$$

haciendo ahora el cambio  $q^2 = -\mathbf{q}^2$  y una expansión a primer orden en el límite  $\mathbf{q}^2 \ll m^2$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(-\mathbf{q}^2) &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln\left(\frac{m^2}{m^2 + x(1-x)\mathbf{q}^2}\right) \\ &\approx \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x^2(1-x)^2 \frac{\mathbf{q}^2}{m^2} \\ &= \frac{\alpha\mathbf{q}^2}{15\pi m^2} , \end{aligned} \quad (1.157)$$

entonces tenemos que:

$$D_{\mu\nu}(-\mathbf{q}^2) \approx \frac{ig_{\mu\nu}e^2}{\mathbf{q}^2} \left(1 + \frac{\alpha\mathbf{q}^2}{15\pi m^2}\right) . \quad (1.158)$$

Consideremos ahora la aproximación de Born, en la cual se interpreta al propagador como proporcional al elemento de matriz del potencial  $V(r)$  por medio de

$$D_{00}(q^2) = -i \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(r) , \quad (1.159)$$

tomando la transformada inversa para nuestro caso

$$\begin{aligned} V(r) &= i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}} D_{00}(-\mathbf{q}^2) \\ &= -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}}}{\mathbf{q}^2} - \frac{\alpha e^2}{15\pi m^2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}} , \end{aligned} \quad (1.160)$$

note que

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}}}{\mathbf{q}^2} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{dq d\theta d\phi}{(2\pi)^3} q^2 \text{sen}\theta \frac{e^{irq\cos\theta}}{q^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{dq}{(2\pi)^2} \frac{e^{irq} - e^{-irq}}{irq} \\ &= \frac{2i}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \frac{\text{sen}(irq)}{irq} \\ &= \frac{1}{4\pi r} \end{aligned} \quad (1.161)$$

y

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}} = \delta^3(r) \quad (1.162)$$

así, la (1.160) queda:

$$V(r) = -\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^3(r)\right) . \quad (1.163)$$

El primer término de la (1.163) es el potencial de Coulomb para una carga puntual mientras que el segundo término es la corrección debida al apantallamiento de la carga electrónica creada por los pares

electrón-positrón virtuales. El segundo término indica que la fuerza electromagnética es más fuerte a distancias pequeñas como ya hemos señalado anteriormente. Esta corrección causa un corrimiento en el átomo de hidrógeno, donde los niveles de energía están recorridos por:

$$\Delta E = \int d^3r |\psi(r)|^2 \left( -\frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^3(r) \right) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} |\psi(0)|^2. \quad (1.164)$$

La función de onda es distinta de cero en el origen únicamente para los niveles  $l = 0$ , para el estado  $2S$  el corrimiento es:

$$\Delta E = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} \frac{\alpha^3 m^3}{8\pi} = -\frac{\alpha^5 m}{30\pi} = -1,123 \times 10^7 eV. \quad (1.165)$$

Esto da una pequeña contribución al corrimiento de Lamb<sup>6</sup>.

## 1.6. Momento magnético anómalo del electrón

Note que en la ecuación (1.138)  $\delta F_2$  no tiene divergencia ultravioleta ni divergencia infrarroja, así que podemos eliminar la masa ficticia  $m_\gamma$  para el fotón en el factor  $\mathcal{R}_T^2$ . Además, a orden de un lazo la evaluación de  $\delta F_2(q^2)$  en  $q^2 = 0$  y en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  corresponde al *momento magnético anómalo del electrón*:

$$\begin{aligned} \delta F_2(q^2)|_{q^2=0} &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2} \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{z}{(1-z)} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \end{aligned} \quad (1.166)$$

así, el corrimiento al factor  $g$  del electrón es  $g = 2\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)$ , este corrimiento fue calculado por primera vez por Schwinger en 1948. Actualmente, la corrección al factor  $g$  del electrón dada por  $a_e = \frac{g-2}{2}$  ha sido calculada numéricamente [11] a orden de cuatro lazos con un valor de  $a_e = 0,00115965218279(771)$ , a su vez, el resultado experimental más reciente [12] da un valor de  $a_e = 0,00115965218073(28)$ . De esta forma la teoría y el experimento coinciden en los primeros 11 dígitos a la derecha del cero, esto hace que este cálculo sea la predicción teórica más precisa que ha logrado una teoría física.

## 1.7. La función $\beta$

Bajo el esquema del grupo de renormalización los parámetros de una teoría de campos renormalizada son determinados por un conjunto de condiciones de renormalización, dichas condiciones son aplicadas a cierta escala de momento llamada *escala de renormalización*. La ecuación de Callan-Symanzik asegura que existen dos funciones universales de la constante de acoplamiento adimensional  $g$ , las cuales se denotan por  $\beta(g)$  y  $\gamma(g)$ , relacionadas con el corrimiento de las constantes de acoplamiento y la intensidad del campo, que compensan el corrimiento dado por la escala de renormalización  $M$ . Si una teoría tiene varios campos y constantes de acoplamiento existe un coeficiente  $\gamma$  para cada campo y un coeficiente  $\beta$  para cada constante de acoplamiento.

Podemos construir la electrodinámica con la masa del electrón igual a cero a través de las condiciones de renormalización. Las condiciones de renormalización para los propagadores son aplicadas a  $p^2 = -M^2$  y en el caso del vértice a un punto en el cual los invariantes sean de orden  $-M^2$ , así, las funciones de Green renormalizadas para esta teoría satisfacen la siguiente ecuación de Callan-Symanzik

<sup>6</sup>Willis E. Lamb (1913-2008) midió el corrimiento en el nivel energético del hidrógeno en 1947.

<sup>7</sup>Esto se debe a que nos interesa la parte espacial del cuadrivector  $p$ , si desearamos considerar las componentes temporales del momento deberíamos considerar las posibilidades de nuevas singularidades que harían el análisis más complicado.

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(e) \frac{\partial}{\partial e} + n\gamma_2(e) + m\gamma_3(e) \right] G^{(n,m)}(\{x_i\}, M, e) = 0, \quad (1.167)$$

donde  $n$  es el número de campos para el electrón,  $m$  el número de campos para el fotón y  $\gamma_2, \gamma_3$  son las funciones que reescalan dichos campos respectivamente. Las funciones  $\beta$  y  $\gamma$  no pueden depender de las  $x_i$  y dado que las funciones de Green están renormalizadas tampoco pueden depender de del cutoff ni de la escala  $M$ .

En general, la función  $\beta$  para una constante adimensional  $g$  asociada a un vértice de  $n$  puntos está dada por

$$\beta(g) = M \frac{\partial}{\partial M} \left( -\delta_g + \frac{1}{2} g \sum_i \delta Z_i \right), \quad (1.168)$$

en el caso de la electrodinámica esto es

$$\beta(e) = M \frac{\partial}{\partial M} \left( -e\delta_1 + e\delta_2 + \frac{1}{2} e\delta_3 \right), \quad (1.169)$$

donde  $\delta_1$  está dado por la ecuación (1.140),  $\delta_2$  por la ecuación (1.104) y  $\delta_3$  por la ecuación (1.117). Ahora, recordemos que evaluamos los contratérminos usando las condiciones de renormalización *on-shell* con fermiones masivos, por lo que debemos reevaluar éstos términos para fermiones no masivos y en la escala  $-M^2$ . Note que basta evaluar las partes divergentes de los contratérminos. Evaluando la integral paramétrica de los resultados para los contratérminos hallamos que son de la forma

$$\begin{aligned} \delta_1 = \delta_2 &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(M^2)^{2 - \frac{D}{2}}} + T.F., \\ \delta_3 &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(M^2)^{2 - \frac{D}{2}}}, \end{aligned} \quad (1.170)$$

con lo cual la ecuación (1.169) queda

$$\beta(e) = M \frac{e}{2} \frac{\partial \delta_3}{\partial M} = \frac{e^3}{12\pi^2}. \quad (1.171)$$

La función  $\beta$  se interpreta como la razón de cambio del acoplamiento renormalizado a la escala  $M$ . Si  $\beta$  tiene signo positivo indica que la constante de acoplamiento renormalizada aumenta si el momento también aumenta y disminuye su valor a bajo momento.

Otro aspecto importante a estudiar es el comportamiento de la constante de acoplamiento. A distancias muy cortas se ignora la masa del electrón para obtener correcciones al potencial  $V(x)$ , trabajando a la escala  $M$  denotamos la carga normalizada por  $e_r$ . La ecuación de Callan-Symanzik para el potencial es

$$\left[ q \frac{\partial}{\partial q} - \beta(e_r) \frac{\partial}{\partial e_r} + 2 \right] V(q; M, e_r) = 0, \quad (1.172)$$

cuya solución es de la forma

$$V(q, e_r) = \frac{1}{q^2} \mathcal{V}(\bar{e}(q; e_r)), \quad (1.173)$$

siendo  $\bar{e}$  la solución a las ecuaciones del grupo de renormalización

$$\frac{d\bar{e}}{d \log(q/M)} = \beta(\bar{e}), \quad \bar{e}(M, e_r) = e_r. \quad (1.174)$$

Luego, la forma de  $\mathcal{V}$  se obtiene por analogía a la forma del término  $V(q) \approx e^2/q^2$ , de donde se tiene

$$V(q, e_r) = \frac{\bar{e}^2}{q^2}. \quad (1.175)$$

Ahora, usando la expresión (1.171) resolvemos la ecuación del grupo de renormalización

$$\frac{d\bar{e}}{d \log(q/M)} = \frac{\bar{e}^3}{12\pi^2}, \quad (1.176)$$

de donde obtenemos

$$\bar{e}^2(q) = \frac{e_r^2}{1 - (e^2/12\pi^2) \log(q^2/M^2)}. \quad (1.177)$$

Note que si  $M$  es del orden de la masa del electrón  $e_r$  se aproxima a la carga física  $e$ . Este resultado muestra que la carga efectiva se vuelve más grande a pequeñas distancias en tanto se penetra la nube de pares virtuales de electrón-positrón que crean el apantallamiento.





## Capítulo 2

# Electrodinámica cuántica en dimensiones extra

En este capítulo se discutirá la extensión a dimensiones extra de la electrodinámica dada por una teoría en  $4 + n$  dimensiones gobernada por los grupos  $\{ISO(1, 3 + n), U(1, \mathcal{M}^{4+n})\}$ . La extensión de la electrodinámica se dará estudiando la teoría en dos partes, la teoría de Maxwell descrita por una lagrangiana  $\mathcal{L}_{4+n}^M$  y la teoría de Dirac, descrita por  $\mathcal{L}_{4+n}^D$ . En cada una de estas partes se llevará a cabo el proceso de compactificación, el cual permite obtener una teoría efectiva con  $n$  dimensiones extra compactas gobernada por los grupos estándar  $\{ISO(1, 3), U(1, \mathcal{M}^4)\}$ . Por último, a partir de los resultados obtenidos se derivan las reglas de Feynman necesarias para los cálculos del capítulo siguiente.

### 2.1. El grupo $ISO(1, 3 + n)$

Consideraremos una variedad de la forma  $\mathcal{M}^{4+n} = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n$ , esto es, un espaciotiempo plano de dimensión  $4 + n$  donde las  $n$  dimensiones extras son de tipo espacial. En este espacio tenemos una métrica  $g_{MN} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ . Un punto en este espacio es de la forma  $X = (x, \bar{x})$ , o escrito explícitamente,  $(X^M) = (x^\mu, x^{\bar{\mu}})$ , siendo  $\mu = 0, 1, 2, 3$  la parte usual y  $\bar{\mu} = 5, \dots, 4 + n$  las dimensiones agregadas.

El grupo de Poincaré en  $4 + n$  dimensiones tiene  $\frac{1}{2}m(m + 1)$  generadores, con  $m = 4 + n$ ,  $m$  de estos generadores denotados por  $P_M$  pertenecen al grupo extendido de las traslaciones mientras que los restantes  $\frac{1}{2}m(m - 1)$  generadores denotados por  $J_{MN}$  están asociados con el grupo de Lorentz extendido  $SO(1, 3 + n)$ . Así, el álgebra de Poincaré correspondiente es

$$[P_M, P_N] = 0$$

$$[J_{MN}, P_R] = i(g_{MN}P_N - g_{NR}P_M)$$

$$[J_{MN}, J_{RS}] = i(g_{MR}J_{NS} - g_{MS}J_{NR} + g_{NS}J_{MR} - g_{NR}J_{MS}) ,$$

ésta álgebra contiene a su vez un álgebra para el grupo de Poincaré estándar  $ISO(1, 3)$ , el cuál fue discutido en el capítulo anterior y un álgebra para el grupo ortogonal especial inhomogéneo  $ISO(n)$  dada por

$$[P_{\bar{\mu}}, P_{\bar{\nu}}] = 0$$

$$[J_{\bar{\mu}\bar{\nu}}, P_{\bar{\rho}}] = i(\delta_{\bar{\mu}\bar{\rho}}P_{\bar{\nu}} - \delta_{\bar{\nu}\bar{\rho}}P_{\bar{\mu}})$$

$$[J_{\bar{\mu}\bar{\nu}}, J_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}] = i(\delta_{\bar{\mu}\bar{\rho}}J_{\bar{\nu}\bar{\sigma}} - \delta_{\bar{\mu}\bar{\sigma}}J_{\bar{\nu}\bar{\rho}} + \delta_{\bar{\nu}\bar{\sigma}}J_{\bar{\mu}\bar{\rho}} - \delta_{\bar{\nu}\bar{\rho}}J_{\bar{\mu}\bar{\sigma}}) .$$

## 2.2. Teoría de Maxwell en dimensiones extra

La extensión a  $4 + n$  dimensiones de la teoría pura de Maxwell está dada por la acción

$$S[\mathcal{A}_M] = \int d^4x d^n\bar{x} \mathcal{L}_{4+n}^M, \quad (2.1)$$

con

$$\mathcal{L}_{4+n}^M = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{MN}(x, \bar{x}) \mathcal{F}^{MN}(x, \bar{x}). \quad (2.2)$$

La curvatura, a su vez, está dada por

$$\mathcal{F}_{MN}(x, \bar{x}) = \partial_M \mathcal{A}_N(x, \bar{x}) - \partial_N \mathcal{A}_M(x, \bar{x}). \quad (2.3)$$

Esta lagrangiana es invariante bajo los grupos  $\{ISO(1, 3+n), U(1, \mathcal{M}^{4+n})\}$ , donde  $U(1, \mathcal{M}^{4+n})$  es el grupo de norma extendido, el cuál difiere del grupo estándar  $U(1, \mathcal{M}^4)$  únicamente en el número de campos de norma, ya que ahora  $\mathcal{A}_M(x, \bar{x})$  representa  $4 + n$  de ellos en lugar de 4 como en el caso estándar. Bajo el grupo de norma extendido la transformación de norma correspondiente es

$$\mathcal{A}_M(x, \bar{x}) \rightarrow \mathcal{A}'_M(x, \bar{x}) = \mathcal{A}_M(x, \bar{x}) + \partial_M \alpha(x, \bar{x}), \quad (2.4)$$

donde  $\alpha(x, \bar{x})$  es el parámetro de norma. Las transformaciones correspondientes para las componentes de la conexión y la curvatura son

$$\delta \mathcal{A}_M(x, \bar{x}) = \partial_M \alpha(x, \bar{x}) \quad (2.5a)$$

$$\delta \mathcal{F}_{MN} = 0. \quad (2.5b)$$

Nuestra meta es obtener una teoría que esté regida por los grupos  $\{ISO(1, 3), U(1, \mathcal{M}^4)\}$  lo cual se consigue a través de la compactificación de la subvariedad  $\mathcal{N}^n$ . Un primer paso para lograr esto se traduce en despojar al grupo  $ISO(n)$  de contenido físico, lo cual es en principio posible ya que tanto el grupo  $ISO(1, 3)$  como  $ISO(n)$  son subgrupos de  $ISO(1, 3+n)$  y por tanto es posible establecer transformaciones entre los objetos de estos grupos para poder obtener la descripción deseada.

La primer transformación consiste en mapear los objetos covariantes del grupo de Lorentz extendido  $SO(1, 3+n)$  a objetos covariantes de los subgrupos  $SO(1, 3)$  y  $SO(n)$  de la siguiente manera

$$SO(1, 3+n) \mapsto \{SO(1, 3), SO(n)\} \quad (2.6a)$$

$$\mathcal{A}_M(x, \bar{x}) \mapsto \{\mathcal{A}_\mu(x, \bar{x}), \mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x})\} \quad (2.6b)$$

$$\mathcal{F}_{MN}(x, \bar{x}) \mapsto \{\mathcal{F}_{\mu\nu}(x, \bar{x}), \mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}), \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x})\}. \quad (2.6c)$$

Utilizando la lagrangiana (2.2) y el mapeo (2.6b) obtenemos

$$\mathcal{L}_{4+n}^M = -\frac{1}{4} [\mathcal{F}_{\mu\nu}(x, \bar{x}) \mathcal{F}^{\mu\nu}(x, \bar{x}) + 2\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}) \mathcal{F}^{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}) + \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x}) \mathcal{F}^{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x})]. \quad (2.7)$$

Note que esta lagrangiana es invariante bajo  $SO(1, 3)$ , el mapeo (2.6b) nos ha permitido ocultar la simetría del grupo  $SO(1, 3+n)$ , obsérvese también que esta transformación implica un análogo de la ecuación (2.5a) para las conexiones  $\{\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_{\bar{\mu}}\}$  y ecuaciones de la forma (2.5b) para las curvaturas  $\{\mathcal{F}_{\mu\nu}, \mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}, \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\}$ , lo cual significa que la lagrangiana (2.7) sigue gobernada por el grupo de norma extendido  $U(1, \mathcal{M}^{4+n})$ .

El segundo mapeo está relacionado con el grupo de las traslaciones, la transformación consiste en mapear los grados de libertad de la teoría, dados por las componentes de las conexiones  $\{\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_{\bar{\mu}}\}$ , en un conjunto infinito de campos gobernados únicamente por los grupos estándar  $\{ISO(1, 3), U(1, \mathcal{M}^4)\}$ . El mapeo debe ser tal que nos permita identificar las cuatro componentes de la conexión del grupo  $U(1, \mathcal{M}^4)$

**CAPÍTULO 2. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA EN DIMENSIONES EXTRA**  
**2.2. TEORÍA DE MAXWELL EN DIMENSIONES EXTRA**

---

y debe permitirnos remover completamente al grupo  $ISO(n)$  de la teoría, lo cual se obtiene a través de la integración de la variable  $\bar{x}$  en la lagrangiana (2.7). Así, la transformación es de la forma

$$T(1, 3+n) \mapsto T(1, 3) \quad (2.8a)$$

$$\{\mathcal{A}_\mu(x, \bar{x}), \mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x})\} \mapsto \{f^{(\underline{m})}(\bar{x}) A_\mu^{(\underline{m})}(x), f^{(\underline{m})}(\bar{x}) A_{\bar{\mu}}^{(\underline{m})}(x)\}, \quad (2.8b)$$

donde  $\{A_\mu^{(\underline{m})}(x), A_{\bar{\mu}}^{(\underline{m})}(x)\}$  es un conjunto infinito de campos que representan los grados de libertad de la teoría mientras que  $\{f^{(\underline{m})}(\bar{x})\}$  es un conjunto infinito de funciones que dependen de la geometría de  $\mathcal{N}^n$  y no representan grados de libertad. Respecto a la notación, el índice  $(\underline{m})$  representa las llamadas *excitaciones de Kaluza - Klein* (KK) dadas por cualquier combinación posible de números enteros positivos  $(m_1, \dots, m_n)$  y la opción  $(0, \dots, 0) = (\underline{0})$  representa el modo cero y se considera independiente de los demás modos. Para obtener el segundo mapeo es necesario suponer que los grados de libertad originales son funciones periódicas con paridad definida en la coordenada  $\bar{x}$ , esto se logra bajo la idea de que la variedad  $\mathcal{N}^n$  es el producto directo de  $n$  copias del *orbifold*  $S^1/Z_2$ , de esta manera el mapeo deseado toma la forma de series de Fourier. Las condiciones de periodicidad y de paridad de las componentes de los campos y el parámetro de norma son

$$\mathcal{A}_\mu(x, \bar{x} + 2\pi R) = \mathcal{A}_\mu(x, \bar{x}) \quad \mathcal{A}_\mu(x, -\bar{x}) = +\mathcal{A}_\mu(x, \bar{x}) \quad (2.9a)$$

$$\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x} + 2\pi R) = \mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}) \quad \mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, -\bar{x}) = -\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}) \quad (2.9b)$$

$$\alpha(x, \bar{x} + 2\pi R) = \alpha(x, \bar{x}) \quad \alpha(x, -\bar{x}) = +\alpha(x, \bar{x}) \quad (2.9c)$$

donde  $R = (R_1, \dots, R_n)$  y  $\bar{x} + 2\pi R$  representa el desplazamiento para cada radio  $R_i$  en cada dimensión extra. y naturalmente para las curvaturas

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x, -\bar{x}) = +\mathcal{F}_{\mu\nu}(x, \bar{x}) \quad (2.10a)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x, -\bar{x}) = -\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}) \quad (2.10b)$$

$$\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, -\bar{x}) = +\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x}) \quad (2.10c)$$

Con esto es posible desarrollar en serie de Fourier los campos, el parámetro de norma y las curvaturas como sigue

$$\mathcal{A}_\mu(x, \bar{x}) = f_E^{(\underline{0})} A_\mu^{(\underline{0})}(x) + \sum_{(\underline{m})} f_E^{(\underline{m})}(\bar{x}) A_\mu^{(\underline{m})}(x) \quad (2.11a)$$

$$\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}) = \sum_{(\underline{m})} f_O^{(\underline{m})}(\bar{x}) A_{\bar{\mu}}^{(\underline{m})}(x) \quad (2.11b)$$

$$\alpha(x, \bar{x}) = f_E^{(\underline{0})} \alpha^{(\underline{0})}(x) + \sum_{(\underline{m})} f_E^{(\underline{m})}(\bar{x}) \alpha^{(\underline{m})}(x) \quad (2.11c)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x, \bar{x}) = f_E^{(\underline{0})} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(\underline{0})}(x) + \sum_{(\underline{m})} f_E^{(\underline{m})}(\bar{x}) \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(\underline{m})}(x) \quad (2.12a)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}) = \sum_{(\underline{m})} f_O^{(\underline{m})}(\bar{x}) \mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(\underline{m})}(x) \quad (2.12b)$$

$$\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x}) = f_E^{(\underline{0})} \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(\underline{0})}(x) + \sum_{(\underline{m})} f_E^{(\underline{m})}(\bar{x}) \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(\underline{m})}(x) \quad (2.12c)$$

donde el conjunto de funciones  $\{f_E^{(\underline{0})}, f_E^{(\underline{m})}(\bar{x}), f_O^{(\underline{m})}(\bar{x})\}$  y sus propiedades se definen en el apéndice B.1.

Como último paso del esquema de compactificación, para obtener la teoría efectiva descrita por los grupos  $\{ISO(1, 3), U(1, \mathcal{M}^4)\}$  utilizamos las expresiones de las curvaturas dadas por las ecuaciones (2.12) e integramos sobre las dimensiones extra, esto es

**CAPÍTULO 2. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA EN DIMENSIONES EXTRA**  
**2.2. TEORÍA DE MAXWELL EN DIMENSIONES EXTRA**

---

$$\mathcal{L}_4^M = \int_0^{2\pi R_1} \dots \int_0^{2\pi R_n} d^n \bar{x} \mathcal{L}_M^{4+n} \quad (2.13)$$

con lo que obtenemos la lagrangiana

$$\mathcal{L}_4^M = -\frac{1}{4} \left[ \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(0)} \mathcal{F}^{(0)\mu\nu} + \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0)} \mathcal{F}^{(0)\bar{\mu}\bar{\nu}} + \sum_{(m)} \left( \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(m)} \mathcal{F}^{(m)\mu\nu} + 2\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} \mathcal{F}^{(m)\bar{\mu}\bar{\nu}} + \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} \mathcal{F}^{(m)\bar{\mu}\bar{\nu}} \right) \right]. \quad (2.14)$$

La definición de las curvaturas que aparecen en esta última lagrangiana en términos de los campos  $\{A_\mu^{(0)}, A_\mu^{(m)}, A_{\bar{\mu}}^{(m)}\}$  se muestra en la tabla 2.1 y se obtiene sustituyendo en las ecuaciones (2.12) las ecuaciones (2.11) y utilizando las propiedades de ortogonalidad de las funciones  $\{f_E^{(0)}, f_E^{(m)}(\bar{x}), f_O^{(m)}(\bar{x})\}$  según sea el caso. Al hacer esto note que se obtienen expresiones de las curvaturas que sólo dependen explícitamente de la variable  $x$ , además dicha descomposición nos permite identificar tres sectores con significado físico relevante.

Sector escalar - escalar	$\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \partial_{\bar{\mu}} \mathcal{A}_{\bar{\nu}} - \partial_{\bar{\nu}} \mathcal{A}_{\bar{\mu}} \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0)} = 0 \\ \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} = p_{\bar{\mu}}^{(m)} A_{\bar{\nu}}^{(m)} - p_{\bar{\nu}}^{(m)} A_{\bar{\mu}}^{(m)} \end{cases}$
Sector vectorial - escalar	$\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu \mathcal{A}_{\bar{\nu}} - \partial_{\bar{\nu}} \mathcal{A}_\mu \mapsto \mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}} = \partial_\mu A_{\bar{\nu}}^{(m)} + p_{\bar{\nu}}^{(m)} A_\mu^{(m)}$
Sector vectorial - vectorial	$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(0)} = \partial_\mu A_\nu^{(0)} - \partial_\nu A_\mu^{(0)} \\ \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(m)} = \partial_\mu A_\nu^{(m)} - \partial_\nu A_\mu^{(m)} \end{cases}$

Tabla 2.1: Curvaturas

En estas expresiones  $p_{\bar{\mu}}^{(m)}$  son las componentes del momento en las dimensiones compactas que resultan de la acción de la derivada  $\partial_\mu$  sobre las funciones pares e impares en el desarrollo de Fourier y se puede expresar como

$$p_{\bar{\mu}}^{(m)} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{R_i} \delta_{\bar{\mu} 4+i}, \quad (2.15)$$

en general, una partícula asociada a un campo  $\phi$  que se propaga en dimensiones extra tiene un momento  $P^M = (p^\mu, p^{(m)\bar{\mu}})$  y una masa dada por  $P_M P^M = m_{\phi(0)}^2$ , siendo  $m_{\phi(0)}$  la masa física. De esta manera las correspondientes excitaciones de Kaluza - Klein entran en la teoría como partículas de masa  $m_{\phi(m)}^2$ , dada por

$$m_{\phi(m)}^2 = m_{(m)}^2 + m_{\phi(0)}^2, \quad (2.16)$$

siendo

$$m_{(m)}^2 = \left( \frac{m_1}{R_1} \right)^2 + \dots + \left( \frac{m_n}{R_n} \right)^2. \quad (2.17)$$

Otro aspecto sumamente relevante es que en el proceso de compactificación se induce un mecanismo de generación de masas análogo al mecanismo de Higgs. Como ya se mencionó antes, las funciones

$\{f_E^{(m)}, f_O^{(m)}\}$  no representan grados de libertad en nuestra teoría efectiva, no obstante resultan ser el homólogo al valor de expectación del vacío  $\Phi_0$  asociado al campo escalar  $\Phi(x)$  en el conocido mecanismo de Higgs. Básicamente la analogía se da a través de los generadores de los grupos de traslaciones, ya que resulta que las funciones  $f_{E,O}^{(m)}$  resultan ser invariantes bajo el grupo  $T(1, 3)$ , pero no son aniquiladas por los generadores del grupo  $T(n)$ ; lo mismo ocurre en el Modelo Estándar donde  $\Phi_0$  queda invariante bajo el subgrupo  $H$  al cual el grupo de norma  $G$  es espontáneamente roto en el mecanismo de Higgs.

Extendiendo la analogía, en el Modelo Estándar el espectro de masas está dado por  $\sigma\nu$  donde  $\nu$  es la escala de Fermi y  $\sigma$  es un parámetro adimensional, por lo cual necesitamos solamente un parámetro con dimensiones de longitud para el modelo con dimensiones extra. Por esta razón supondremos que en la ecuación (2.17),  $R_1 = \dots = R_n = R$  y así

$$m_{(m)} = R^{-1} \sqrt{m_1^2 + \dots + m_n^2}, \quad (2.18)$$

con lo cual el espectro de masas es determinado por el parámetro  $R^{-1}$ . A continuación veremos cuáles son las propiedades de cada uno de los sectores que aparecen en la lagrangiana (2.14).

### Sector escalar - escalar

Siguiendo la tabla 2.1 y la lagrangiana (2.14), la contribución escalar - escalar  $\mathcal{L}_{s-s}$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{s-s} &= -\frac{1}{4} \sum_{(m)} \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} \mathcal{F}^{(m)\bar{\mu}\bar{\nu}} \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{(m)} \left( p_{\bar{\mu}}^{(m)} A_{\bar{\nu}}^{(m)} - p_{\bar{\nu}}^{(m)} A_{\bar{\mu}}^{(m)} \right) \left( p_{\bar{\mu}}^{(m)} A^{(m)\bar{\nu}} - p_{\bar{\nu}}^{(m)} A^{(m)\bar{\mu}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{(m)} A_{\bar{\nu}}^{(m)} \mathfrak{M}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} A_{\bar{\mu}}^{(m)}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde  $\mathfrak{M}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} = m_{(m)}^2 \delta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} - p_{\bar{\mu}}^{(m)} p_{\bar{\nu}}^{(m)}$  es una matriz simétrica y está definida para cada valor que toma el índice  $(m)$ . Bajo esta definición  $\mathfrak{M}^{(m)}$  puede ser vista como el tensor de inercia por unidad de masa de una partícula respecto a un espacio Euclidiano de referencia  $n$ -dimensional y por tanto puede ser expresada como

$$\mathfrak{M}_{\bar{\mu}\bar{\mu}}^{(m)} = \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(m)} \mathfrak{M}_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}^{(m)} \mathcal{R}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}^{(m)} \quad (2.20)$$

siendo ahora  $\mathfrak{M}_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}^{(m)} = \text{diag} \left( m_{(m)}^2, m_{(m)}^2, \dots, m_{(m)}^2, 0 \right)$  y con  $\mathcal{R}^{(m)} = \left( \mathfrak{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(m)} \right)$  una matriz ortogonal tal que

$$\mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(m)} \mathcal{R}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}^{(m)} = \delta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \quad , \quad \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(m)} \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\nu}'}^{(m)} = \delta_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'} \quad (2.21)$$

y que además transforma las componentes de los eigenvectores de masa  $A_{\bar{\mu}'}^{(m)} = \left( A_{\bar{n}}^{(m)}, A_G^{(m)} \right)$  en  $A_{\bar{\mu}}^{(m)}$  de la siguiente forma

$$A_{\bar{\mu}}^{(m)} = \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(m)} A_{\bar{\mu}'}^{(m)} = \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{n}}^{(m)} A_{\bar{n}}^{(m)} + \mathcal{R}_{\bar{\mu}G}^{(m)} A_G^{(m)} \quad \bar{n} = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.22)$$

Esto significa que existen  $n-1$  campos escalares  $A_{\bar{n}}^{(m)}$  con masas  $m_{(m)}$  y un campo escalar  $A_G^{(m)}$  sin masa. Usando las ecuaciones (2.20) y (2.22) en la expresión de la lagrangiana (2.19) obtenemos

$$\mathcal{L}_{s-s} = -\frac{1}{2} \sum_{(m)} \left( A_{\bar{n}}^{(m)} \mathfrak{M}_{\bar{n}\bar{n}}^{(m)} A_{\bar{n}}^{(m)} + A_{\bar{n}}^{(m)} \mathfrak{M}_{\bar{n}G}^{(m)} A_G^{(m)} + A_G^{(m)} \mathfrak{M}_{G\bar{n}}^{(m)} A_{\bar{n}}^{(m)} + A_G^{(m)} \mathfrak{M}_{GG}^{(m)} A_G^{(m)} \right). \quad (2.23)$$

Note que es posible hacer cero a los pseudobosones de Goldstone bajo la elección apropiada de una norma, por ejemplo, bajo la norma unitaria esto sería

$$\mathcal{L}_{s-s} = -\frac{1}{2} \sum_{(m)} \sum_{\bar{n}=1}^{n-1} m_{(m)}^2 A_{\bar{n}}^{(m)} A_{\bar{n}}^{(m)}. \quad (2.24)$$

### Sector vectorial - escalar

La contribución vectorial - escalar,  $\mathcal{L}_{v-s}$ , proviene del término siguiente

$$\mathcal{L}_{v-s} = -\frac{1}{2} \sum_{(\underline{m})} \mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(\underline{m})} \mathcal{F}^{(\underline{m})\mu\bar{\nu}} = \frac{1}{2} \sum_{(\underline{m})} \mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(\underline{m})} \mathcal{F}_{\bar{\nu}}^{(\underline{m})\mu}. \quad (2.25)$$

Ahora, utilizando la ecuación (2.22) la curvatura se puede escribir

$$\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}^{(\underline{m})} = \mathcal{R}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'} \partial_{\mu} A_{\bar{\nu}'}^{(\underline{m})} + p_{\bar{\nu}}^{(\underline{m})} A_{\mu}^{(\underline{m})}, \quad (2.26)$$

con lo cual tenemos

$$\mathcal{L}_{v-s} = \frac{1}{2} \sum_{(\underline{m})} \left( \partial_{\mu} A_{\bar{\nu}'}^{(\underline{m})} \partial^{\mu} A_{\bar{\nu}'}^{(\underline{m})} + 2\mathcal{R}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'} p_{\bar{\nu}}^{(\underline{m})} A_{\mu}^{(\underline{m})} \partial^{\mu} A_{\bar{\nu}'}^{(\underline{m})} + m_{(\underline{m})}^2 A_{\mu}^{(\underline{m})} A^{(\underline{m})\mu} \right), \quad (2.27)$$

considerando la siguiente identidad

$$p_{\bar{\nu}}^{(\underline{m})} \mathcal{R}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}^{(\underline{m})} = m_{(\underline{m})} \delta_{\bar{\nu}'}^G \quad (2.28)$$

se obtiene finalmente

$$\mathcal{L}_{v-s} = \frac{1}{2} \sum_{(\underline{m})} \left( \partial_{\mu} A_{\bar{\nu}'}^{(\underline{m})} \partial^{\mu} A_{\bar{\nu}'}^{(\underline{m})} + 2m_{(\underline{m})} A^{(\underline{m})\mu} \partial_{\mu} A_{\bar{\nu}'}^{(\underline{m})} + m_{(\underline{m})}^2 A_{\mu}^{(\underline{m})} A^{(\underline{m})\mu} \right). \quad (2.29)$$

Observe que el primer término es de naturaleza cinética para el campo  $A_{\mu}^{(\underline{m})}$ , el segundo es similar a un término cinético del sector de Higgs y el tercero es un término de masa para las excitaciones del campo electromagnético.

### Sector vectorial vectorial

Por último, los términos restantes de la lagrangiana (2.14) dan origen al sector vectorial - vectorial  $\mathcal{L}_{v-v}$  dado por

$$\mathcal{L}_{v-v} = -\frac{1}{4} \left[ \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(0)} \mathcal{F}^{(0)\mu\nu} + \sum_{(\underline{m})} \left( \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(\underline{m})} \mathcal{F}^{(\underline{m})\mu\nu} \right) \right], \quad (2.30)$$

donde  $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(0)}$  describe el campo de norma estándar y sus propiedades ya fueron discutidas en el capítulo anterior. Los términos que corresponden a las excitaciones de KK tienen propiedades análogas.

## 2.3. Teoría de Dirac en dimensiones extra

Ahora se mostrarán los resultados de la compactificación en la teoría de Dirac. En la sección 2.1 se expusieron algunas de las propiedades del grupo  $SO(1, 3+n)$ , pero ahora es necesario agregar una representación particular de las matrices gamma que nos permita transformar los espinores  $\Psi(x, \bar{x})$  de  $SO(1, 3+n)$  en espinores  $\Psi(x, \bar{x})$  del grupo  $SO(1, 3)$  lo cual es necesaria para hacer el correcto mapeo de los campos entre dichos grupos. Esto se logra con una representación de las matrices gamma en la cual los generadores de  $SO(1, 3+n)$  se acomodan en  $2^{\frac{n}{2}}$  bloques de dimensión  $4 \times 4$  con lo cual dichos bloques coincidirán con los generadores de  $SO(1, 3)$ . Esto es,

$$\Gamma_{ab}^{\mu} = \delta_{ab} \gamma^{\mu} \quad a, b = 1, \dots, 2^{\frac{n}{2}} \quad (2.31)$$

de esta forma las matrices  $\Gamma^M$  contienen a las matrices de Dirac en la diagonal. Es necesario ahora completar el álgebra de Clifford a través de la definición de  $n$  matrices  $\Gamma^{\bar{\mu}}$  de la siguiente manera

$$\Gamma_{ab}^{\bar{\mu}} = \Lambda_{ab}^{\bar{\mu}} \gamma^5, \quad (2.32)$$

**CAPÍTULO 2. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA EN DIMENSIONES EXTRA**  
**2.3. TEORÍA DE DIRAC EN DIMENSIONES EXTRA**

---

donde  $\Lambda^{\bar{\mu}}$  son matrices de dimensión  $2^{\frac{n}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}}$  de las cuales una mitad tienen como entradas ceros o  $\pm 1$  mientras que la otra mitad tiene ceros o  $\pm i$ , de tal forma que cuando  $\bar{\mu}$  es impar,  $\Gamma^{\bar{\mu}}$  es impar y antisimétrica y cuando  $\bar{\mu}$  es par,  $\Gamma^{\bar{\mu}}$  es imaginaria y simétrica. Note que estas matrices satisfacen además el álgebra del grupo  $SO(n)$ . Bajo esta representación los proyectores son de la forma

$$\begin{aligned} P_+ &= \text{diag}(P_R, P_L, \dots, P_L, P_R), \\ P_- &= \text{diag}(P_L, P_R, \dots, P_R, P_L). \end{aligned} \quad (2.33)$$

La extensión a  $4+n$  dimensiones de la teoría de Dirac está dada por la acción

$$S[\mathcal{A}_M, \Psi] = \int d^4x d^n\bar{x} \mathcal{L}_{4+n}^D, \quad (2.34)$$

donde

$$\mathcal{L}_{4+n}^D = \bar{\Psi}(x, \bar{x}) (i\Gamma^M D_M - m) \Psi(x, \bar{x}), \quad (2.35)$$

note que  $\Gamma^M = (\Gamma^\mu, \Gamma^{\bar{\mu}})$ . La derivada covariante se define por

$$D_M = \partial_M - ie_{4+n} \mathcal{A}_M(x, \bar{x}), \quad (2.36)$$

siendo  $D_M = (D_\mu, D_{\bar{\mu}})$ , con

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - ie_{4+n} \mathcal{A}_\mu(x, \bar{x}) \\ D_{\bar{\mu}} &= \partial_{\bar{\mu}} - ie_{4+n} \mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}). \end{aligned} \quad (2.37)$$

De la misma manera que en el caso de Maxwell, se aplica el esquema de compactificación a la teoría de Dirac, para poder establecer los mapeos correspondientes y el desarrollo en serie de Fourier se le asigna paridad a los espinores

$$\begin{aligned} \Psi_{(a)}(x, -\bar{x}) &= \Psi_{(a)}(x, \bar{x}), \quad a = 1, \dots, 2^{\frac{n}{2}} \\ \Psi_{(\hat{a})}(x, -\bar{x}) &= \Psi_{(\hat{a})}(x, \bar{x}), \quad \hat{a} = 2, 4, \dots, 2^{\frac{n}{2}} \\ \Psi_{(\bar{a})}(x, -\bar{x}) &= \Psi_{(\bar{a})}(x, \bar{x}), \quad \bar{a} = 1, 3, \dots, 2^{\frac{n}{2}} - 1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

note que como el mapeo de los campos  $\{\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_{\bar{\mu}}\}$  ya fue discutido en la sección anterior, básicamente lo nuevo que ocurre aquí es el siguiente mapeo

$$\Psi(x, \bar{x}) \mapsto \{\Psi_{(a)}(x, \bar{x})\}, \quad (2.39)$$

razón por la cual debemos contar con la descomposición en serie de Fourier correspondiente

$$\Psi_{(a)} = f_E^{(0)} \Psi_{(a)}^{(0)} + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) \Psi_{(a)}^{(m)} \quad (2.40)$$

$$\Psi_{(\hat{a})} = \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) \Psi_{(\hat{a})}^{(m)} \quad (2.40)$$

$$\Psi_{(\bar{a})} = \sum_{(m)} f_O^{(m)}(\bar{x}) \Psi_{(\bar{a})}^{(m)}, \quad a \geq 3. \quad (2.41)$$

Observe que el mapeo con subíndice  $(a)$  contiene al modo cero, el cuál está asociado a la lagrangiana de Dirac en la teoría ordinaria, los otros dos mapeos generarán términos de masa como veremos más adelante.

Una vez que hemos introducido todos estos elementos el proceso de compactificación ocurre de la siguiente manera: en la lagrangiana (2.35) se sustituyen las ecuaciones (2.31) y (2.32) con lo cual se

**CAPÍTULO 2. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA EN DIMENSIONES EXTRA**  
**2.3. TEORÍA DE DIRAC EN DIMENSIONES EXTRA**

---

obtiene una lagrangiana invariante bajo el grupo de Lorentz estándar  $SO(1,3)$  y que es función de los modos ceros y los modos excitados, luego se integra sobre las dimensiones extra, en este paso surge la identificación de la carga eléctrica  $e = f_E^{(0)} e_{4+n}$ , y escribiendo el resultado utilizando los términos covariantes definidos en el apéndice B.2 se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4^D &= \bar{\Psi}_{(a)}^{(0)} i\gamma^\mu (D_\mu \Psi_{(a)})^{(0)} - \bar{\Psi}_{(a)}^{(0)} m \Psi_{(a)}^{(0)} \\
&+ i\gamma^\mu \sum_{(m)} \left[ \bar{\Psi}_{(a)}^{(m)} (D_\mu \Psi_{(a)})^{(m)} + \bar{\Psi}_{(\hat{a})}^{(m)} (D_\mu \Psi_{(\hat{a})})^{(m)} + \bar{\Psi}_{(\bar{a})}^{(m)} (D_\mu \Psi_{(\bar{a})})^{(m)} \right] \\
&+ i\gamma^5 \sum_{(m)} \left[ \Lambda_{\bar{a}\hat{b}}^{\bar{\mu}} \bar{\Psi}_{(a)}^{(m)} (D_\mu \Psi_{(\bar{b})})^{(m)} + \Lambda_{\hat{a}\bar{b}}^{\bar{\mu}} \bar{\Psi}_{(\hat{a})}^{(m)} (D_\mu \Psi_{(\bar{b})})^{(m)} + \Lambda_{\bar{a}\hat{b}}^{\bar{\mu}} \bar{\Psi}_{(\bar{a})}^{(m)} (D_\mu \Psi_{(\hat{b})})^{(m)} \right] \\
&- \sum_{(m)} \left[ \bar{\Psi}_{(a)}^{(m)} m \Psi_{(a)}^{(m)} + \bar{\Psi}_{(\hat{a})}^{(m)} m \Psi_{(\hat{a})}^{(m)} + \bar{\Psi}_{(\bar{a})}^{(m)} m \Psi_{(\bar{a})}^{(m)} \right]. \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Observe que en esta última expresión aparecen términos de masa para las excitaciones de KK, resultado del rompimiento de la simetría global  $ISO(1,3+n)$ . Estos términos se pueden reunir en una lagrangiana

$$\mathcal{L}_{mass}^D = \sum_{(m)} \left[ -\bar{\Psi}_{(\hat{a})}^{(m)} m \Psi_{(\hat{a})}^{(m)} - \bar{\Psi}_{(\bar{a})}^{(m)} m \Psi_{(\bar{a})}^{(m)} - \Lambda \bar{\Psi}_{(\hat{a})}^{(m)} i\gamma^5 \Psi_{(\bar{a})}^{(m)} - \Lambda^\dagger \bar{\Psi}_{(\bar{a})}^{(m)} i\gamma^5 \Psi_{(\hat{a})}^{(m)} \right], \tag{2.43}$$

donde

$$\Lambda = p_{\bar{\mu}} \Lambda_{\hat{a}\bar{a}}^{\bar{\mu}}, \quad \Lambda^\dagger = -p_{\bar{\mu}} \Lambda_{\bar{a}\hat{a}}^{\bar{\mu}} \tag{2.44}$$

es una matriz de dimensión  $(2^{\frac{n}{2}}/2) \times (2^{\frac{n}{2}}/2)$ . Escrito en forma matricial esto es

$$\mathcal{L}_{mass}^D = - \sum_{(m)} \left( \bar{\Psi}_{(\hat{a})}^{(m)} \bar{\Psi}_{(\bar{a})}^{(m)} \right) \begin{pmatrix} m_{\Psi^{(0)}} & -i\Lambda\gamma^5 \\ -i\Lambda^\dagger\gamma^5 & m_{\Psi^{(0)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_{(\hat{a})}^{(m)} \\ \bar{\Psi}_{(\bar{a})}^{(m)} \end{pmatrix} = - \sum_{(m)} \bar{\Psi}^{(m)} M_F \Psi^{(m)}, \tag{2.45}$$

con  $m_{\Psi^{(0)}}$  la masa estándar del electrón. La matriz  $M_F$  cumple que

$$M_F M_F^\dagger = \begin{pmatrix} m_{\Psi^{(0)}}^2 & 0 \\ 0 & m_{\Psi^{(m)}}^2 \end{pmatrix}, \quad m_{\Psi^{(m)}}^2 = m_{\Psi^{(0)}}^2 + m_{(m)}^2. \tag{2.46}$$

Note que esto implica que  $\Lambda\Lambda^\dagger = \Lambda^\dagger\Lambda = m_{(m)}^2$ . Con esto la matriz  $M_F$  puede diagonalizarse de la siguiente manera

$$V_F = \frac{1}{m_{\Psi^{(m)}}} M_F^\dagger, \tag{2.47}$$

observe que  $V_F$  es de dimensión  $(2^{\frac{n}{2}}) \times (2^{\frac{n}{2}})$ .

Considere la siguiente notación para los espinores

$$F_V^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Psi^{(0)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_V^{(m)} = \begin{pmatrix} \Psi_{(1)}^{(m)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Psi_{(2^{\frac{n}{2}})}^{(m)} \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

note que  $\Psi^{(0)}$  está en la entrada  $(2^{\frac{n}{2}}/2 + 1)$  del espinor estándar  $F_V^{(0)}$ , es decir,  $\Psi^{(0)}$  puede ser escrito como  $\Psi_{(a)}^{(0)}$  teniendo en cuenta que solo existe para  $a = 2^{\frac{n}{2}}/2 + 1$ . Todas las torres de KK de espinores  $F_V^{(m)}$  tienen la misma masa  $m_{\Psi^{(m)}}$ .



## 2.4. Corrientes electromagnéticas

En esta sección se presentan las corrientes electromagnéticas que surgen en la teoría con dimensiones extra [13] que relacionan a los campos  $\{A_\mu^{(0)}, A_\mu^{(m)}, A_{\bar{n}}^{(m)}, A_G^{(m)}\}$  asociados con el fotón. A partir de estos resultados se establecen las reglas de Feynman que serán usadas para los cálculos posteriores.

Las corrientes vectoriales son

$$\mathcal{L}_{vc} = A_\mu^{(0)} \left[ J^{(0)\mu} + \sum_{(m)} J^{(m)(m)\mu} \right] + \sum_{(m)} A_\mu^{(m)} \left[ J^{(0)(m)\mu} + \sum_{(rs)} J^{(r)(s)(m)\mu} \right], \quad (2.49)$$

donde  $J^{(0)\mu}$  es la corriente electromagnética estándar dada por

$$J^{(0)\mu} = e\bar{F}_V^{(0)}\gamma^\mu F_V^{(0)}. \quad (2.50)$$

Las corrientes que contienen excitaciones de KK están dadas por

$$J^{(m)(m)\mu} = e\bar{F}_V^{(m)}\gamma^\mu F_V^{(m)} \quad (2.51a)$$

$$J^{(0)(m)\mu} = e\bar{F}_V^{(0)}\gamma^\mu \left[ V_F^{(m)} P_R + P_L \right] F_V^{(m)} + h.c. \quad (2.51b)$$

$$\begin{aligned} J^{(r)(s)(m)\mu} &= e\bar{F}_V^{(r)}\gamma^\mu \left\{ \left( \Delta'_{(rsm)} \hat{V}_F^{(r)\dagger} \hat{V}_F^{(s)} + \Delta_{(rsm)} \hat{V}_F^{(r)} \hat{V}_F^{(s)\dagger} \right) P_R \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \Delta'_{(rsm)} + \Delta_{(rsm)} \right) P_L \right\} F_V^{(s)}. \end{aligned} \quad (2.51c)$$

Por otro lado, las corrientes mediadas por el pseudobosón de Goldstone  $A_G^{(m)}$  y los  $n-1$  escalares físicos  $A_{\bar{n}}^{(m)}$  están contenidas en la lagrangiana

$$\mathcal{L}_{sc} = \sum_{(m)} \left\{ A_G^{(m)} \left[ J_{A_G}^{(0)(m)} + \sum_{(rs)} J_{A_G}^{(r)(s)(m)} \right] + \sum_{\bar{n}=1}^{n-1} A_{\bar{n}}^{(m)} \left[ J_{A_{\bar{n}}}^{(0)(m)} + \sum_{(rs)} J_{A_{\bar{n}}}^{(r)(s)(m)} \right] \right\}, \quad (2.52)$$

donde

$$J_{A_G}^{(0)(m)} = -e\bar{F}_V^{(0)} m_{(m)}^{-1} \Pi^{(m)} \left( V_F^{(m)} P_R - P_L \right) F_V^{(m)} + h.c. \quad (2.53a)$$

$$J_{A_{\bar{n}}}^{(0)(m)} = -eR_{\bar{n}}^{(m)} \bar{F}_V^{(0)} \Pi^{\bar{\mu}} \left( V_F^{(m)} P_R - P_L \right) F_V^{(m)} + h.c. \quad (2.53b)$$

$$\begin{aligned} J_{A_G}^{(r)(s)(m)} &= -e m_{(m)}^{-1} \bar{F}_V^{(r)} \left\{ \left( \Delta'_{(msr)} \Pi^{(m)} - \Delta'_{(mrs)} \Pi^{(m)\dagger} \right) V_F^{(s)} P_R \right. \\ &\quad \left. + V_F^{(r)\dagger} \left( \Delta'_{(msr)} \Pi^{(m)\dagger} - \Delta'_{(mrs)} \Pi^{(m)} \right) P_L \right\} F_V^{(s)} \end{aligned} \quad (2.53c)$$

$$\begin{aligned} J_{A_{\bar{n}}}^{(r)(s)(m)} &= -e \bar{F}_V^{(r)} \mathcal{R}_{\bar{n}}^{(m)} \left\{ \left( \Delta'_{(msr)} \Pi^{\bar{\mu}} - \Delta'_{(mrs)} \Pi^{\bar{\mu}\dagger} \right) V_F^{(s)} P_R \right. \\ &\quad \left. + V_F^{(r)\dagger} \left( \Delta'_{(msr)} \Pi^{\bar{\mu}\dagger} - \Delta'_{(mrs)} \Pi^{\bar{\mu}} \right) P_L \right\} F_V^{(s)} \end{aligned} \quad (2.53d)$$

en estas expresiones se ocupan las matrices  $\Pi^{(m)}$  y  $\Pi^{\bar{\mu}}$  cuya definición es

$$\Pi^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Lambda^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi^{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Theta^{\bar{\mu}\dagger} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

siendo  $\Theta^{\bar{\mu}}$  una matriz de  $(2^{\frac{n}{2}}/2) \times (2^{\frac{n}{2}}/2)$  que satisface

$$\Theta^{\bar{\mu}} \Theta^{\bar{\nu}\dagger} + \Theta^{\bar{\nu}} \Theta^{\bar{\mu}\dagger} = 2\delta^{\bar{\mu}\bar{\nu}}, \quad (2.55)$$

de donde se implica que

$$\Pi^{\bar{\mu}} \Pi^{\bar{\mu}\dagger} = \mathbb{I}. \quad (2.56)$$

### 2.4.1. Reglas de Feynman

Para obtener las reglas de Feynman necesarias para la renormalización de los diagramas de la electrodinámica cuántica en dimensiones extra debemos tener en cuenta los siguientes puntos:

- Tendremos la contribución estándar dada por el vértice  $\bar{\Psi}^{(0)}\gamma_\mu\Psi^{(0)}A^{\mu(0)}$
- La contribución dada por el vértice  $\bar{\Psi}^{(0)}\gamma_\mu\Psi^{(m)}A^{\mu(m)}$ , donde  $\Psi^{(m)}$  y  $A^{\mu(m)}$  son las excitaciones de KK de  $\Psi^{(0)}$  y  $A^{\mu(0)}$  respectivamente. Cabe resaltar que asociado a  $\Psi^{(0)}$  hay  $2^{\frac{n}{2}}$  ( $n$  par) excitaciones, esto es,  $\Psi_{(a)}^{(m)}$  para  $a = 1, 2, \dots, 2^{\frac{n}{2}}$ . En este caso, como veremos más adelante el vértice  $\bar{\Psi}^{(0)}\gamma_\mu\Psi^{(m)}A^{\mu(m)}$  aparece solamente para el campo  $\Psi^{(m)}$  asociado con el desarrollo de Fourier que involucra al modo cero  $\Psi^{(0)}$ , el cual ocurre en  $a = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2} + 1$
- Cada excitación vectorial  $A_\mu^{(m)}$  tiene asociados  $n - 1$  campos escalares  $A_{\bar{n}}^{(m)}$ , así que también deben ser tomadas en cuenta las contribuciones dadas por el vértice  $\bar{\Psi}^{(0)}\Psi^{(m)}A_{\bar{n}}^{(m)}$ ,  $\bar{n} = 1, 2, \dots, n - 1$
- El campo  $A_\mu^{(m)}$  es un campo de norma, por tanto debemos elegir un proceso para fijar la norma, dado que  $A_\mu^{(m)}$  es un campo con masa, existe un pseudo bosón de Goldstone  $A_G^{(m)}$ , asociado a cada  $A_\mu^{(m)}$ . En las teorías  $R_\xi$  - gauge, los pseudo bosones de Goldstone desempeñan papel activo, en este tipo de normas los propagadores están dados por:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} A_\alpha^{(m)} \\ \mu \quad \nu \\ \text{---} \leftarrow k \end{array} = -\frac{i}{k^2 - m_{(m)}^2} \left[ g^{\mu\nu} - \frac{(1 - \xi) k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m_{(m)}^2} \right] \\
 & \begin{array}{c} A_G^{(m)} \\ \text{---} \leftarrow k \end{array} = \frac{i}{k^2 - \xi m_{(m)}^2}
 \end{aligned}$$

Trabajaremos en la norma de Feynman - 't Hooft, en cuyo caso se toma  $\xi = 1$ . Note que en esta norma el propagador de  $A_G^{(m)}$  coincide con los propagadores de los escalares físicos  $A_{\bar{n}}^{(m)}$ , por esta razón en esta norma debemos tomar la contribución del pseudo bosón de Goldstone dada por el vértice  $\bar{\Psi}^{(0)}\Psi^{(m)}A_G^{(m)}$

Con estas consideraciones tomaremos los términos necesarios de las corrientes vectoriales y escalares dadas por las lagrangianas (2.49), (2.52). Así, podemos escribir las lagrangianas necesarias de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_{\bar{\Psi}^{(0)}\Psi^{(m)}A_\mu^{(m)}} = e \sum_{(m)} \bar{F}_V^{(0)}\gamma^\mu \left( V_F^{(m)} P_R + P_L \right) F_V^{(m)} A_\mu^{(m)} + h.c. \quad (2.57)$$

$$\mathcal{L}_{\bar{\Psi}^{(0)}\Psi^{(m)}A_G^{(m)}} = -e \sum_{(m)} \frac{A_G^{(m)}}{m_{(m)}} \bar{F}_V^{(0)} \Pi^{(m)} \left( V_F^{(m)} P_R - P_L \right) F_V^{(m)} + h.c. \quad (2.58)$$

$$\mathcal{L}_{\bar{\Psi}^{(0)}\Psi^{(m)}A_{\bar{n}}^{(m)}} = -e \sum_{(m)} A_{\bar{n}}^{(m)} R_{\bar{\mu}\bar{n}}^{(m)} \bar{F}_V^{(0)} \Pi^{\bar{\mu}} \left( V_F^{(m)} P_R - P_L \right) F_V^{(m)} + h.c. \quad (2.59)$$

Note ahora que usando la identidad

$$\frac{1}{m_{(m)}} \Pi^{(m)} = \frac{p_{\bar{\mu}}^{(m)}}{m_{(m)}} \Pi^{\bar{\mu}} = R_{\bar{\mu}G}^{(m)} \Pi^{\bar{\mu}}, \quad (2.60)$$

podemos relacionar las lagrangianas de las ecuaciones (2.58) y (2.59) en una sola expresión

$$\mathcal{L}_{\bar{\Psi}^{(0)}\Psi^{(m)}A_{\bar{\nu}}^{(m)}} = -e \sum_{(m)} A_{\bar{\nu}}^{(m)} R_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} \bar{F}_V^{(0)} \Pi^{\bar{\mu}} \left( V_F^{(m)} P_R - P_L \right) F_V^{(m)} + h.c. \quad \bar{\nu} = \bar{n}, G. \quad (2.61)$$

Así, las reglas de Feynman a utilizar son

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} A_{\mu}^{(0)} \\ \text{wavy line} \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bar{\Psi}^{(0)} \quad \Psi^{(0)} \end{array} & = & \begin{array}{c} A_{\mu}^{(0)} \\ \text{wavy line} \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bar{\Psi}^{(m)} \quad \Psi^{(m)} \end{array} & = & -ie\gamma^{\mu}
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \bar{\Psi}^{(0)} \quad \Psi^{(0)} \\ \longleftarrow p \end{array} & = & \frac{i}{\not{p} - m_{\Psi^{(0)}}} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \bar{\Psi}_a^{(m)} \quad \Psi_b^{(m)} \\ \longleftarrow p \end{array} & = & \frac{i \delta_{ab}}{\not{p} - m_{\Psi^{(m)}}}
 \end{array}
 \end{array}$$

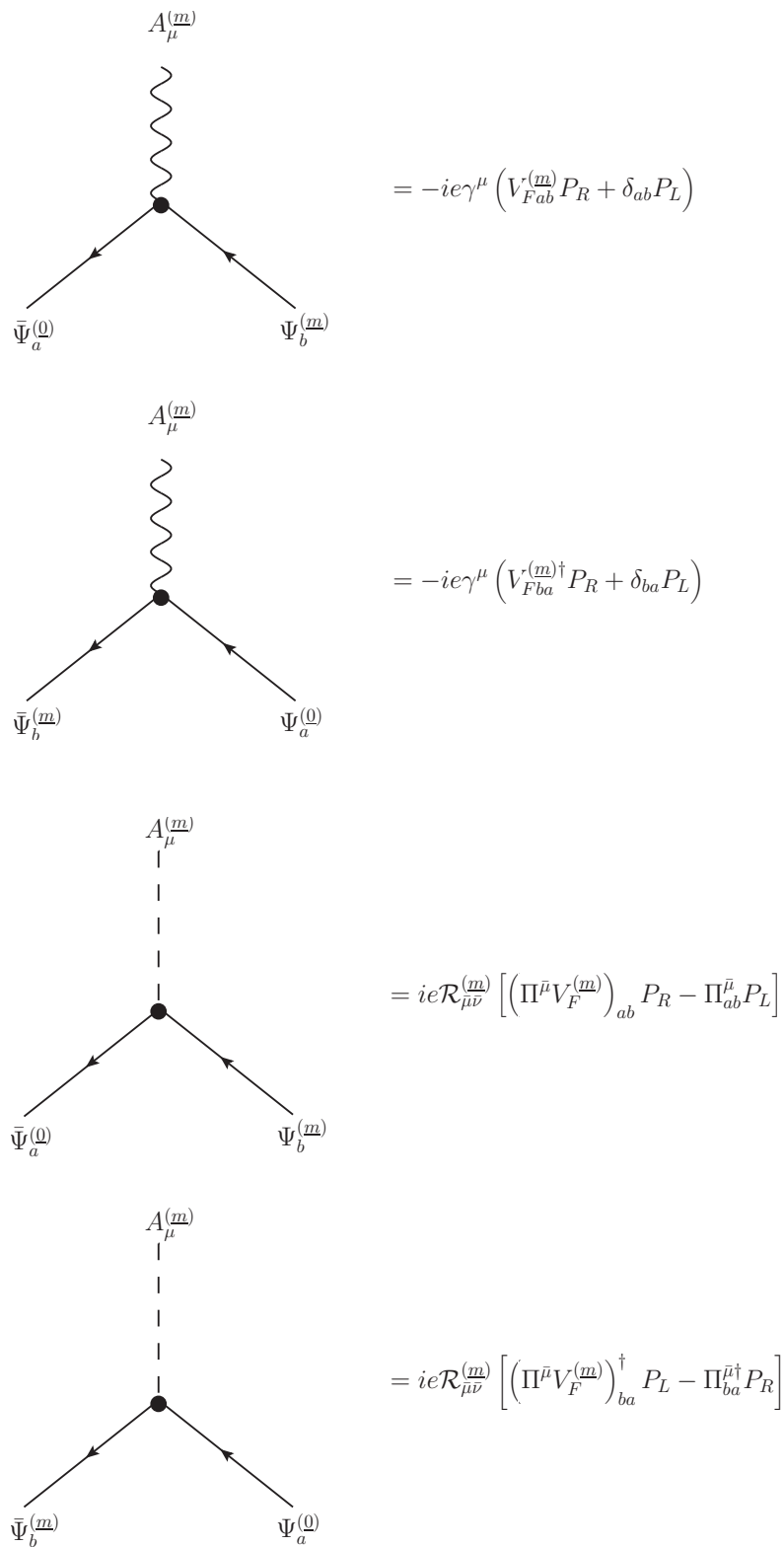


Figura 2.1: Reglas de Feynman para QED en dimensiones extra.

## Capítulo 3

# Renormalización de QED a un lazo con dimensiones extra

En este capítulo discutiremos la estructura a orden de un lazo y las divergencias de la teoría en dimensiones extra obtenida en el capítulo anterior. El número infinito de partículas de Kaluza-Klein puede introducir divergencias adicionales a las ya contempladas provenientes de efectos de cortas distancias. Se introducirá un esquema de regularización que abarcará ambas clases de divergencias y que serán descritas en las amplitudes por la función Gamma y las funciones de Epstein; dicho esquema está directamente relacionado con las características geométricas del proceso de compactificación antes introducido el cual, a su vez, tiene similitud con las condiciones del efecto Casimir. Con esto se obtendrá una teoría predictiva y se dará un esquema de renormalización, con lo cual la teoría resulta ser renormalizable en un sentido *amplio o moderno*. Se presentarán los cálculos para los tres diagramas de QED trabajados en el primer capítulo y finalmente, se mostrará el impacto de las dimensiones extra en los fenómenos: límite electrostático, momento magnético anómalo del electrón y la función  $\beta$ .

### 3.1. Divergencias, regularización y renormalización

Como se mostró en el capítulo anterior la teoría efectiva obtenida incluye, además de las interacciones estándar, interacciones entre los campos estándar y las excitaciones de KK, por lo cual, a nivel de un lazo la estructura de las amplitudes se ve modificada y puede además dar origen a nuevas divergencias. La estructura de estas divergencias depende de la forma en la que se lleva a cabo la compactificación de las dimensiones extra. En nuestro caso, dicho esquema de compactificación reproduce las condiciones de frontera del efecto Casimir ya que se hizo la suposición de que la variedad  $\mathcal{N}^n$  estaba formada por  $n$  copias del orbifold  $S^1/Z_2$  con un radio  $R_i$  en principio diferente para cada copia. Así, los campos expandidos en series de Fourier están sujetos a condiciones de frontera de tipo Neumann y Dirichlet en los puntos fijos  $x_i = 0$  y  $x_i = \pi R_i$  de cada orbifold.

De forma general, la lagrangiana efectiva  $\mathcal{L}_{eff}$  se puede escribir como la suma de las siguientes tres lagrangianas

$$\mathcal{L}_{eff}^{(0)} = \mathcal{L}_{QED}^{(0)} + \mathcal{L}_{\mathbf{d}>4}^{(0)} \quad (3.1a)$$

$$\mathcal{L}_{eff}^{(0)(\underline{m})} = \mathcal{L}_{\mathbf{d}=4}^{(0)(\underline{m})} + \mathcal{L}_{\mathbf{d}>4}^{(0)(\underline{m})} \quad (3.1b)$$

$$\mathcal{L}_{eff}^{(\underline{m})} = \mathcal{L}_{\mathbf{d}=4}^{(\underline{m})} + \mathcal{L}_{\mathbf{d}>4}^{(\underline{m})}, \quad (3.1c)$$

donde los primeros términos de estas lagrangianas surgen de la compactificación de la versión  $(4+n)$  dimensional de la teoría. Las interacciones de esas lagrangianas son renormalizables en el sentido de Dyson, lo cual se indica por el subíndice  $\mathbf{d} = 4$ . Las lagrangianas  $\mathcal{L}_{\mathbf{d}=4}^{(0)(\underline{m})}$  y  $\mathcal{L}_{\mathbf{d}=4}^{(\underline{m})}$  están dadas en series infinitas de Fourier sobre el índice  $(\underline{m})$ , un resultado importante es que la contribución de estos sectores a las amplitudes físicas dependen de las escalas  $\nu$  y  $R^{-1}$ .

## CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE QED A UN LAZO CON DIMENSIONES EXTRA

### 3.1. DIVERGENCIAS, REGULARIZACIÓN Y RENORMALIZACIÓN

Los segundos términos de estas lagrangianas representan interacciones de dimensión canónica mayor a cuatro, de forma general estos términos se incluyen ya que respetan la simetría de los grupos  $\{ISO(1, 3), G(\mathcal{M}^4)\}$ . La contribución de los sectores con  $\mathbf{d} > 4$  es suprimido por potencias inversas de la escala  $\Lambda$ . [13]

Las funciones de Green que podemos encontrar en general en esta formulación son: funciones de Green estándar (SGF) definidas como aquellas que tienen en sus patas externas campos estándar, funciones de Green híbridas (HGF) definidas como aquellas cuyas patas externas contienen tanto campos estándar como excitaciones de KK y las funciones de Green no estándar las cuales tienen solamente campos excitados en sus patas externas.

#### 3.1.1. Función de Epstein

Como veremos en los cálculos posteriores, la contribución a las SGF involucra sumas de la forma

$$\sum_{(m)} \frac{1}{(\underline{m}^2 + c^2)^s} \quad , \quad \underline{m}^2 = \underline{m}_1^2 + \underline{m}_2^2 + \dots + \underline{m}_n^2, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

con  $c$  una constante. En esta expresión el símbolo  $\sum_{(m)}$  involucra series individuales para cada índice anidadas. Como un caso especial de este tipo de sumas se tienen las series de Dirichlet dadas por

$$\zeta(s) = \sum_{(m)} \frac{1}{m^s} \quad , \quad \Re(s) > 1. \quad (3.3)$$

Dado que la ecuación (3.2) permite valores de enteros negativos, tendremos series divergentes  $\zeta(s)$  para  $\Re(s) < 1$ , sin embargo es posible definir valores para  $\Re(s) < 0$  utilizando la fórmula de reflexión

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s). \quad (3.4)$$

Los ceros triviales para la función  $\zeta$  ocurren para valores de enteros pares negativos,  $s = -2, -4, \dots, -2n$ , dichos ceros provienen de la singularidad en esos valores para  $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ . A pesar de que  $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$  es singular para  $s = 0$ , esta singularidad se compensa por la singularidad de  $\zeta(1)$  dando entonces un valor finito para la ecuación anterior siendo este  $\zeta(0) = -1/2$ . Los valores de la función  $\zeta$  en la banda crítica  $0 \leq \Re(s) \leq 1$  se obtienen de la continuación analítica hacia el cero a través de la siguiente identidad

$$\sum_{(m)} \frac{(-1)^{m-1}}{m^s} = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s) \quad \Re(s) > 1, \quad (3.5)$$

la serie del lado derecho de la ecuación converge para todo  $\Re(s) > 0$ . Con esto, los valores en la banda crítica son cubiertos por

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{(m)} \frac{(-1)^{m-1}}{m^s} \quad 0 \leq \Re(s) \leq 1. \quad (3.6)$$

En resumen, los valores de la serie  $\sum_{(m)} \frac{1}{m^s}$  pueden ser definidos en la banda crítica por la ecuación (3.6), a la derecha de este dominio por (3.2) y a la izquierda por (3.5). Note que se tiene un polo en  $s = 1$ . Por otro lado, la hipótesis de Riemann establece que todos los ceros no triviales de la función  $\zeta$  caen en la banda crítica que consiste en números complejos de la forma  $1/2 + it$ , los cuales no son de nuestro interés ya que para nuestras aplicaciones  $s \in \mathbb{R}$ .

Una generalización de la función  $\zeta$  de Riemann es la función zeta de Hurwitz  $\zeta_H$ , definida por

$$\zeta_H(s, a) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+a)^s} \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1, a \neq 0, -1, -2, \dots \quad (3.7)$$

Note que en el caso  $a = 1$ ,  $\zeta_H(s, a)$  se reduce a la función zeta de Riemann. Nuestro objetivo es trabajar con las series andadas para diferentes valores de  $\underline{m}$ , todas estas sumas corresponden a valores particulares

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE QED A UN LAZO CON DIMENSIONES EXTRA**  
**3.1. DIVERGENCIAS, REGULARIZACIÓN Y RENORMALIZACIÓN**

---

de la función zeta de Epstein, la función de Epstein es una generalización a más altas dimensiones de la función zeta de Riemann. Considere la siguiente expresión

$$Z(s; Q) = \sum_{0 \neq x \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{(x^T Q x)^s} \quad \text{Re}(s) > \frac{n}{2}, \quad (3.8)$$

donde  $s \in \mathbb{C}$ ,  $Q$  es una matriz simétrica de  $n \times n$  definida positiva y  $x$  un vector columna. Esta función tiene un polo en  $s = n/2$ , además, satisface una formula de reflexión como en el caso de la función de Riemann

$$Z(s; Q) = (\det Q)^{-\frac{1}{2}} \frac{\pi^{2s - \frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2} - s)}{\Gamma(s)} Z(n/2 - s; Q^{-1}). \quad (3.9)$$

Note que los ceros triviales en este caso ocurren en  $s = -m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . El caso particular en el que se toma la matriz identidad  $Q = \mathbb{I}_n$  corresponde a la función homogénea de Epstein, denotada por

$$Z_l(s) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_l = 1, -\infty \\ m_1, \dots, m_l \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{(m_1^2 + \dots + m_l^2)^s}, \quad (3.10)$$

mientras que la función inhomogénea de Epstein se define por

$$\mathbf{E}_l^{c^2}(s) = \sum_{m_1, \dots, m_l = 1}^{+\infty} \frac{1}{(m_1^2 + \dots + m_l^2 + c^2)^s}, \quad (3.11)$$

siendo  $c$  una constante. Esta función tiene polos simples en  $s = \frac{l}{2}, \frac{l-1}{2}, \dots$ , excepto para  $s = 0$  o enteros negativos. En los cálculos a orden de un lazo aparecerán sumas relacionadas con las excitaciones de KK que se podrán representar con la función inhomogénea de Epstein, dichas sumas son de la forma

$$\sum_{\underline{m}} \frac{1}{(\underline{m}^2 + c^2)^s} = \sum_{l=1}^n \frac{n!}{l! (n-l)!} \mathbf{E}_l^{c^2}(s). \quad (3.12)$$

### 3.1.2. Regularización

Como se mencionó un par de líneas arriba, la Lagrangiana efectiva contiene un sector que involucra interacciones entre los campos estándar y excitaciones de KK que son bien comportados a nivel de un lazo por ser renormalizables en el sentido de Dyson. La presencia de un número infinito de campos pueden darnos dos tipos de divergencias a nivel de correcciones radiativas para las observables electrodébiles, estas divergencias son: las asociadas con efectos de cortas distancias y las contribuciones virtuales de un número infinito de partículas. Estas últimas son la contribución de la teoría con dimensiones extra y son las llamadas divergencias no estándar (NSD).

Denotemos por  $\Gamma_N^{(0)}$  a la contribución a las funciones de Green estándar, esta contribución estará dada por sumas sobre los modos de Fourier, dichas sumas representan a las partículas circulando en el loop. Entonces tenemos la forma

$$\Gamma_N^{(0)} \sim \sum_{\underline{m}} \int \frac{dk}{(2\pi)^4}, \quad (3.13)$$

note que tanto la suma continua (integral) como la suma discreta pueden generar divergencias, en el caso de la integral dichas divergencias pueden ser tratadas con la regularización dimensional como ya hemos visto. El objetivo ahora es implementar un esquema de regularización que nos permita tratar con las divergencias inducidas por las sumas discretas. Nos ocuparemos en el estudio de las SGF ya que a nivel fenomenológico son las funciones que determinan el impacto de las dimensiones extra en las observables. A nivel de un lazo, las SGF reciben únicamente contribuciones de las lagrangianas efectivas  $\mathcal{L}_{eff}^{(0)}$  y  $\mathcal{L}_{eff}^{(0)(\underline{m})}$ , la contribución de  $\mathcal{L}_{eff}^{(\underline{m})}$  a estas funciones aparece a nivel de dos lazos.

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE QED A UN LAZO CON DIMENSIONES  
EXTRA**

**3.1. DIVERGENCIAS, REGULARIZACIÓN Y RENORMALIZACIÓN**

Sea  $\Gamma_{N\rho\sigma\dots}^{(0)\mu\nu\dots} = \Gamma_N^{(0)} T_{\rho\sigma\dots}^{\mu\nu\dots}$  un vértice tensorial SGF, con  $T_{\rho\sigma\dots}^{\mu\nu\dots}$  un tensor de Lorentz de rango dado. El número de diagramas que contribuyen a  $\Gamma_N^{(0)}$  depende en general del tipo de partículas circulando en el loop así como del procedimiento de fijación de la norma. Así, a nivel árbol y nivel de un lazo tenemos la contribución de la lagrangiana convencional mientras que por parte de la lagrangiana no convencional la contribución sólo ocurre a un lazo, es decir, a nivel árbol no hay contribución de las excitaciones de KK. Esto es,

$$\Gamma_N^{(0)} = \Gamma_N^{tree} \left( \mathcal{L}_{eff}^{(0)} \right) + \Gamma_N^{loop} \left( \mathcal{L}_{eff}^{(0)} \right) + \Gamma_N^{loop} \left( \mathcal{L}_{eff}^{(0)(m)} \right), \quad (3.14)$$

donde, utilizando las ecuaciones (3.1)

$$\Gamma_N^{tree} \left( \mathcal{L}_{eff}^{(0)} \right) = \Gamma_N^{tree} \left( \mathcal{L}_{QED}^{(0)} \right) + \Gamma_N^{tree} \left( \mathcal{L}_{d>4}^{(0)} \right) \quad (3.15a)$$

$$\Gamma_N^{loop} \left( \mathcal{L}_{eff}^{(0)} \right) = \Gamma_N^{loop} \left( \mathcal{L}_{QED}^{(0)} \right) + \Gamma_N^{loop} \left( \mathcal{L}_{d>4}^{(0)} \right) \quad (3.15b)$$

$$\Gamma_N^{loop} \left( \mathcal{L}_{eff}^{(0)(m)} \right) = \Gamma_N^{loop} \left( \mathcal{L}_{d=4}^{(0)(m)} \right) + \Gamma_N^{loop} \left( \mathcal{L}_{d>4}^{(0)(m)} \right). \quad (3.15c)$$

Las contribuciones efectivas a nivel árbol dadas por  $\Gamma_N^{tree} \left( \mathcal{L}_{d>4}^{(0)} \right)$  pueden surgir para  $N \leq 4$  debido al corrimiento generado en el mecanismo de Higgs. La presencia de las contribuciones a nivel de árbol para  $N > 4$  implican que el contratérmino necesario para renormalizar la teoría en un sentido moderno está aún presente en la lagrangiana efectiva convencional. La contribución  $\Gamma_N^{loop} \left( \mathcal{L}_{eff}^{(0)} \right)$  puede ser afectada solamente por divergencias estándar. El primer término de esta contribución (3.15c) corresponde a la contribución estándar de la teoría, así que las divergencias pueden ocurrir únicamente para  $N \leq 4$ . Por otro lado, el segundo término de esta contribución puede generar interacciones renormalizables y no renormalizables, así que la presencia de SD dependerá del tipo de vértices que sean considerados. Por tanto, nos resta ocuparnos de la contribución  $\Gamma_N^{loop} \left( \mathcal{L}_{eff}^{(0)(m)} \right)$ .

El primer término de la ecuación (3.15c), el cual es inducido por acoplamientos renormalizables entre los campos estándar y sus excitaciones de KK, pueden tener tanto SD como NSD si  $N \leq 4$ , pero sólo las NSD pueden ocurrir para  $N > 4$ . La ausencia de SD para  $N > 4$  se desprende del hecho de que sólo están presentes interacciones renormalizables en el sentido de Dyson. Respecto al segundo término de la ecuación (3.15c), la contribución surge de vértices no renormalizables que involucran a los campos estándar y sus excitaciones de KK, en este caso las contribuciones son proporcionales a la escala  $\Lambda$  y ámbos tipos de divergencia pueden ocurrir, no obstante, mostraremos que en el marco en el que trabajaremos ámbos tipos de divergencia se amalgaman produciendo un resultado finito.

Procederemos ahora al estudio de la estructura divergente de la contribución  $\Gamma_N^{loop} \left( \mathcal{L}_{eff}^{(0)(m)} \right)$ . Considere una función escalar de  $N$  puntos  $F_N$  inducida por las lagrangianas  $\mathcal{L}_{d=4}^{(0)(m)}$  y  $\mathcal{L}_{d>4}^{(0)(m)}$  con la forma

$$F_N = \sum_{(m)} \frac{1}{i\pi^2} \int d^4k \frac{1}{\left[ k^2 - m_{\phi_0}^2(m) \right] \left[ (k^2 + p_1)^2 - m_{\phi_1}^2(m) \right] \dots \left[ (k^2 + p_{N-1})^2 - m_{\phi_{N-1}}^2(m) \right]}, \quad (3.16)$$

después de una parametrización de Feynman, esta expresión toma la forma

$$F_N = \frac{1}{i\pi^2} \Gamma(N) \int_0^1 dx_1 \dots dx_N \delta \left( \sum_{i=1}^N -1 \right) \sum_{(m)} \int d^4k \frac{1}{\left( k^2 - \Delta_{(m)}^2 \right)^N}, \quad (3.17)$$

donde  $\Delta_{(m)}^2$  es una forma cuadrática de las variables  $x_i$ , momentos externos y las masas de KK, que con ayuda de la ecuación (2.16) se puede escribir como

$$\Delta_{(m)}^2 = m_{(m)}^2 + \Delta_{(0)}^2, \quad (3.18)$$

donde  $\Delta_{(0)}^2$  es en general de la forma



**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE QED A UN LAZO CON DIMENSIONES EXTRA**  
**3.1. DIVERGENCIAS, REGULARIZACIÓN Y RENORMALIZACIÓN**

---

$$\Delta_{(0)}^2 = m_{\phi_0}^2 + \sum_{i,j=1}^{N-1} p_i \cdot p_j x_i \cdot x_j - \sum_{i=1}^{N-1} \left( p_i^2 + m_{\phi_0}^2 - m_{\phi_i}^2 \right) x_i. \quad (3.19)$$

Note que en la ecuación (3.17) las divergencias estándar provienen de la integral en la variable  $k$ , esta integral diverge para  $N \leq 4$ , mientras que las divergencias no estándar provienen de la sumatoria sobre el índice  $\underline{m}$ . Al realizar la integral bajo el esquema de la regularización dimensional obtenemos

$$\begin{aligned} F_N &= \frac{1}{i\pi^2} \Gamma(N) \int_0^1 dx_1 \dots dx_N \delta \left( \sum_{i=1}^N -1 \right) \sum_{(\underline{m})} \int d^4k \frac{1}{\left( k^2 - \Delta_{(\underline{m})}^2 \right)^N} \\ &= (-1)^N \left( \frac{1}{4\pi\mu^2} \right)^{(N-2)} I_N \sum_{(\underline{m})} \Gamma \left( N - \frac{D}{2} \right) \left( \frac{\Delta_{(\underline{m})}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(N-\frac{D}{2})} \\ &= (-1)^N (4\pi\mu^2)^{(2-\frac{D}{2})} (R^{-2})^{\frac{D}{2}-N} I_N \sum_{(\underline{m})} \Gamma \left( N - \frac{D}{2} \right) (\underline{m}^2 + c_N^2)^{-(N-\frac{D}{2})}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

en estas expresiones se denota  $I_N$  como la integral paramétrica de Feynman

$$I_N = \int_0^1 dx_1 \dots dx_N \delta \left( \sum_{i=1}^N x_i - 1 \right). \quad (3.21)$$

Note que se ha considerado el mismo radio para todos los orbifold de tal forma que  $m_{(\underline{m})} = R^{-2}\underline{m}$ , además se ha definido  $c_N^2 = \Delta_{(0)}^2/R^{-2}$ . Ahora, utilizando la ecuación (3.12) la ecuación (3.20) toma la forma

$$F_N = (-1)^N (4\pi\mu^2)^{(2-\frac{D}{2})} (R^{-2})^{\frac{D}{2}-N} I_N \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \mathbf{E}_l^{c_N^2} \left( N - \frac{D}{2} \right) \Gamma \left( N - \frac{D}{2} \right). \quad (3.22)$$

Observe que de esta forma el límite  $D \rightarrow 4$  está bien definido, las funciones Gamma y Epstein están definidas en el plano complejo. Las singularidades de la función Gamma ocurren para  $N - \frac{D}{2} = 0, -1, -2, \dots$  mientras que la función inhomogénea de Epstein es singular en  $N - \frac{D}{2} = \frac{l}{2}, \frac{l-1}{2}, \dots, \frac{1}{2}$ . Por lo tanto, las SD y las NSD surgen como los polos de las funciones Gamma y Epstein respectivamente. El proceso para obtener la versión regularizada de la función de Epstein y el método de Weldon se describe en la referencia [14].

Como se mencionó anteriormente, el resultado remarcable es que al considerar el producto de la función de Epstein regularizada con la función Gamma que emerge de los cálculos de las amplitudes a un lazo da un resultado finito en el límite  $D \rightarrow 4$ . Esto es

$$\lim_{N-\frac{D}{2} \rightarrow 0, -1, -2, \dots} \mathbf{E}_l^{c_N^2} \left( N - \frac{D}{2} \right) \Gamma \left( N - \frac{D}{2} \right) = \text{finito}. \quad (3.23)$$

Es importante destacar también que los resultados de la regularización dependen de la escala de energía que sea considerada, por ejemplo, a muy altas energías las masas de las partículas pueden ser ignoradas y la ecuación (3.20) toma la forma

$$F_N = (-1)^N \left( \frac{1}{4\pi\mu^2} \right)^{N-2} I_N \Gamma \left( N - \frac{D}{2} \right) \left( \frac{\hat{\Delta}^2}{4\pi\mu^2} \right) \sum_{(\underline{m})}, \quad (3.24)$$

con  $\hat{\Delta}^2$  siendo función de los momentos externos y las variables de la integral paramétrica, este límite, que corresponde al comportamiento de los campos excitados a muy cortas distancias, nos da el siguiente resultado contraintuitivo

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE QED A UN LAZO CON DIMENSIONES  
EXTRA**  
3.1. DIVERGENCIAS, REGULARIZACIÓN Y RENORMALIZACIÓN

---

$$\begin{aligned}
\sum_{(\underline{m})} &= n \sum_{m_1=1}^{\infty} + \frac{n(n-1)}{2!} \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} + \dots + \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_n=1}^{\infty} \\
&= \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} [\zeta(0)]^l \\
&= \frac{1-2^n}{2^n}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Analizamos ahora los primeros valores para la ecuación (3.22). Considere que el límite  $D \rightarrow 4$  se debe tomar.

$$\begin{aligned}
F_1 &= \sum_{(\underline{m})} A_0 \left[ m_{\phi^{(\underline{m})}}^2 \right] \\
&= -(R^{-2}) \left( \frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2} \right)^{\left(\frac{D}{2}-2\right)} \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \mathbf{E}_l^{c_1^2} \left( 1 - \frac{D}{2} \right) \Gamma \left( 1 - \frac{D}{2} \right), \\
F_2 &= \sum_{(\underline{m})} B_0 \left[ p^2, m_{\phi_0^{(\underline{m})}}^2, m_{\phi_1^{(\underline{m})}}^2 \right] \\
&= \left( \frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2} \right)^{\left(\frac{D}{2}-2\right)} I_2 \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \mathbf{E}_l^{c_2^2} \left( 2 - \frac{D}{2} \right) \Gamma \left( 2 - \frac{D}{2} \right), \\
F_3 &= \sum_{(\underline{m})} C_0 \left[ p_1^2, p_2^2, (p_1 - p_2)^2, m_{\phi_0^{(\underline{m})}}^2, m_{\phi_1^{(\underline{m})}}^2, m_{\phi_2^{(\underline{m})}}^2 \right] \\
&= -(R^{-2})^{\left(\frac{D}{2}-3\right)} I_3 \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \mathbf{E}_l^{c_3^2} \left( 3 - \frac{D}{2} \right) \Gamma \left( 3 - \frac{D}{2} \right), \\
F_4 &= \sum_{(\underline{m})} D_0 \left[ p_1^2, p_2^2, p_3^2, (p_1 - p_2)^2, (p_1 - p_3)^2, (p_2 - p_3)^2, m_{\phi_0^{(\underline{m})}}^2, m_{\phi_1^{(\underline{m})}}^2, m_{\phi_2^{(\underline{m})}}^2, m_{\phi_3^{(\underline{m})}}^2 \right] \\
&= -(R^{-2})^{\left(\frac{D}{2}-4\right)} I_4 \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \mathbf{E}_l^{c_4^2} \left( 3 - \frac{D}{2} \right) \Gamma \left( 3 - \frac{D}{2} \right).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Note que en el límite  $R^{-1} \rightarrow \infty$   $F_3$  y  $F_4$  desaparecen mientras que  $F_1$  y  $F_2$  no. La presencia de efectos no desacoplantes para este caso asociados con divergencias ultravioletas concuerdan con el teorema de desacoplamiento.

Estas funciones escalares  $F_N$  están dadas por series infinitas de potencias de  $c_N^2$  cuya convergencia es segura ya que supone que  $c_N^2 \ll 1$ . En nuestro caso las funciones  $c_N^2$  son suprimidas por un factor  $(\nu/R^{-1})^2$  siendo  $\nu$  la escala de Fermi, así que prácticamente los primeros términos son de significado reelevante. Dicha serie es de la forma

$$F_N = (-1)^N (R^{-2})^{2-N} I_N \left[ \alpha_N^n + \beta_N^n \log(c_N^2) + \gamma_N^n c_N^2 + \delta_N^n c_N^2 \log(c_N^2) + \dots \right], \tag{3.27}$$

donde  $n$  es el número de dimensiones extra. Los valores de los coeficientes de la serie para algunos valores de  $n$  se muestran en las tablas 3.1 y 3.2.

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE QED A UN LAZO CON DIMENSIONES EXTRA**  
**3.1. DIVERGENCIAS, REGULARIZACIÓN Y RENORMALIZACIÓN**

$n$	$\alpha_2^n$	$\beta_2^n$	$\delta_2^n$	$\gamma_2^n$
1	$-\frac{1}{2}\log(4\pi^2)$	$-\frac{1}{2}$	$-\zeta(2)$	0
2	$-\frac{1}{2}\log(4\pi^2) - \frac{3\Gamma(\frac{-3}{2})\zeta(2)}{8\pi^2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\gamma\Gamma(\frac{1}{2}) - \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{2})\log(4) - \frac{3}{2}\zeta(2)$	$\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{2})$
3	$-\frac{7}{4}\log(4\pi^2) - \frac{3\Gamma(\frac{-3}{2})\zeta(2)}{4\pi^2} + \frac{\zeta(3)}{8\pi^2}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\log(4) + \frac{1}{8}\log(4\pi^2) - \frac{7}{4}\zeta(2)$	$\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) + \frac{1}{8}$
4	$-\frac{15}{16}\log(4\pi^2) + \frac{5\zeta(3)}{16\pi^2} - \frac{33\Gamma(\frac{-3}{2})\zeta(2)}{32\pi^2} + \frac{15\Gamma(\frac{-5}{2})\zeta(4)}{64\pi^2}$	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{5}{16} - \frac{11}{16}\Gamma(\frac{1}{2}) + \frac{11}{8}\gamma\Gamma(\frac{1}{2}) - \frac{11}{16}\Gamma(\frac{1}{2})\log(4) + \frac{5}{16}\log(4\pi^2) - \frac{15}{8}\zeta(2) - \frac{3\Gamma(\frac{-3}{2})\zeta(2)}{32\pi^2}$	$\frac{11}{16}\Gamma(\frac{1}{2}) + \frac{5}{16}$

Tabla 3.1: Primeros valores para los coeficientes de la función escalar  $F_2$  dada por la ecuación (3.27).

$n$	$\alpha_3^n$	$\beta_3^n$
1	$-2\pi^2\zeta(-1)$	0
2	$\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{2})\log(4\pi) - \frac{1}{2}\gamma\Gamma(\frac{1}{2}) - 3\pi^2\zeta(-1)$	$-\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{2})$
3	$\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\log(4\pi) - \gamma\Gamma(\frac{1}{2}) - \frac{7}{2}\pi^2\zeta(-1) - \frac{1}{8}\log(4\pi^2)$	$-\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{2}) - \frac{1}{8}$
4	$\frac{11}{16}\Gamma(\frac{1}{2})\log(4\pi) - \frac{11}{8}\gamma\Gamma(\frac{1}{2}) - \frac{15}{4}\pi^2\zeta(-1) - \frac{5}{16}\log(4\pi^2) - \frac{3\Gamma(\frac{-3}{2})\zeta(-2)}{32\pi^2}$	$-\frac{11}{16}\Gamma(\frac{1}{2}) - \frac{5}{16}$

Tabla 3.2: Primeros valores para los coeficientes de la función escalar  $F_3$  dada por la ecuación (3.27).

La forma de estas funciones no es la más general, a orden de un lazo las funciones de Passarino-Veltman pueden aparecer multiplicadas por potencias de las masas de KK. En ese caso la expresión es de la forma

$$\mathcal{F}_N^M = \sum_{\underline{m}} \left(m_{\phi(\underline{m})}^2\right)^M \frac{1}{i\pi^2} \int d^4k \frac{1}{\left[k^2 - m_{\phi_0(\underline{m})}^2\right] \left[(k^2 + p_1)^2 - m_{\phi_1(\underline{m})}^2\right] \dots \left[(k^2 + p_{N-1})^2 - m_{\phi_{N-1}(\underline{m})}^2\right]}, \quad (3.28)$$

donde  $m_{\phi(\underline{m})}^2$  es una masa de KK y M algún entero positivo o negativo. Note que para el caso  $M = 0$ , se obtiene el caso ya analizado  $\mathcal{F}_N^0 = F_N$ . Debido a la naturaleza desacoplante de la teoría se espera que no surjan términos de para  $M > 1$ , la forma de la función en el caso  $M = 1$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N^1 = & (-1)^N (R^{-2})^{(3-N)} \left(\frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2}\right)^{\left(\frac{D}{2}-2\right)} I_N \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \left\{ \left(N-1 - \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(N-1 - \frac{D}{2}\right) \mathbf{E}_l^{c_N^2} \left(N-1 - \frac{D}{2}\right) \right. \\ & \left. + (c_0^2 - c_N^2) \sum_{l=1}^n \Gamma\left(N - \frac{D}{2}\right) \mathbf{E}_l^{c_N^2} \left(N - \frac{D}{2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

recuerde que para todo valor de  $N$ , el producto  $\Gamma(s) \mathbf{E}_l^{c_N^2}(s)$  es finito. En el caso de la función vértice aparecerá esta función con  $N = 3$ .

### 3.1.3. Esquema de renormalización

La teoría que hemos obtenido para la electrodinámica cuántica con dimensiones extra resulta ser renormalizable en un sentido moderno, no obstante, a pesar de que el método de regularización discutido arriba remueve las SD y las NSD, no remueve los efectos no desacoplantes inducidos por las partículas de KK. Podemos encontrar estos efectos no desacoplantes en las funciones  $F_1$  y  $F_2$ , ya que no se hacen cero

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE QED A UN LAZO CON DIMENSIONES  
EXTRA**  
3.1. DIVERGENCIAS, REGULARIZACIÓN Y RENORMALIZACIÓN

---

en el límite  $R^{-1} \rightarrow \infty$ . Dado a la naturaleza no física de este tipo de términos, llegamos a la conclusión de que deben ser removidos via renormalización. La forma en la que haremos esto será agragar una constante  $B_N$  a las funciones que contienen efectos no desacoplantes, de esta forma la sustitución es

$$F_N \longrightarrow F_N + B_N, \quad (3.30)$$

dicha constante será ajustada de tal manera que no queden efectos no desacoplantes, así, la condición que debe satisfacerse es

$$\lim_{R^{-1} \rightarrow \infty} [F_N + B_N] = 0, \quad (3.31)$$

veamos ahora cuál es la estructura de las funciones para los casos  $N = 1$  y  $N = 2$ . Para  $N = 1$  tenemos que

$$\begin{aligned} F_1 &= -R^{-2} I_1 [\alpha_1^n + \beta_1^n \log(c_1^2) + \gamma_1^n c_1^2 + \delta_1^n c_1^2 \log(c_1^2)] + B_1 \\ &\approx -I_1 R^{-2} \left[ \alpha_1^n + \beta_1^n \log\left(\frac{1}{R^{-2}}\right) + \gamma_1^n \frac{1}{R^{-2}} + \delta_1^n \frac{1}{R^{-2}} \log\left(\frac{1}{R^{-2}}\right) \right] + B_1, \end{aligned} \quad (3.32)$$

de esta expresión se nota que al tomar el límite  $R^{-1} \rightarrow \infty$  los términos que acompañan a los coeficientes  $\alpha_1^n$ ,  $\beta_1^n$  y  $\delta_1^n$  divergen mientras que el coeficiente  $\gamma_1^n$  queda como constante. Así que al aplicar la condición (3.31) de obtiene la condición trivial  $B_1 = -F_1$ . Para el caso  $N = 2$  tenemos que

$$\begin{aligned} F_2 &= I_2 [\alpha_2^n + \beta_2^n \log(c_2^2) + \gamma_2^n c_2^2 + \delta_2^n c_2^2 \log(c_2^2)] + B_2 \\ &\approx I_2 \left[ \alpha_2^n + \beta_2^n \log\left(\frac{1}{R^{-2}}\right) + \gamma_2^n \frac{1}{R^{-2}} + \delta_2^n \frac{1}{R^{-2}} \log\left(\frac{1}{R^{-2}}\right) \right] + B_2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

al tomar el límite  $R^{-1} \rightarrow \infty$  el coeficiente  $\alpha_2^n$  queda constante, el término acompañado por  $\beta_2^n$  diverge y los términos que van con  $\gamma_2^n$  y  $\delta_2^n$  se hacen cero. Así, al aplicar la condición (3.31) tenemos que

$$B_2 = -I_2 [\alpha_2^n + \beta_2^n \log(c_2^2)]. \quad (3.34)$$

Note que para  $N > 2$ ,  $B_N$  vale cero trivialmente.

Luego de remover los efectos no desacoplantes en los diagramas proseguimos con la aplicación de las condiciones de renormalización para definir los contratérminos; como ya hemos visto, la estructura de las amplitudes calculadas no cambia, y además, la contribución de las dimensiones extra queda en términos de las cantidades físicas, por lo que debemos aplicar la misma condición de renormalización tanto para la parte estándar como la parte de las dimensiones extra. Así, dichas condiciones de renormalización son

$$\Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=m_{\psi}^2} = 0 \quad (3.35a)$$

$$\frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m_{\psi}^2} = 0 \quad (3.35b)$$

$$\Pi(q^2) \Big|_{q^2=0} = 0 \quad (3.35c)$$

$$-ie\Gamma^\mu(q) \Big|_{q=0} = -ie\gamma^\mu. \quad (3.35d)$$

En este caso las funciones  $\Sigma(\not{p})$ ,  $\Pi(q^2)$  y  $\Gamma^\mu(q)$  están constituidas por la contribución estándar calculada en el primer capítulo más la contribución de los diagramas con dimensiones extra. Estas funciones serán calculadas paso a paso en las siguientes secciones.

Los contratérminos correspondientes se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagrama 1: } \mu \text{ wavy line} \text{---} \text{circle with cross} \text{---} \nu \text{ wavy line} & = -i (q^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \delta_A \\
 & \text{Diagrama 2: } \text{---} \text{circle with cross} \text{---} & = i (\not{p} \delta_{\Psi^{(0)}} - \delta m_{\Psi^{(0)}}) \\
 & \text{Diagrama 3: } \mu \text{ wavy line} \text{---} \text{circle with cross} \text{---} \text{fermion lines} & = -ie\gamma^\mu \delta_e
 \end{aligned}$$

Figura 3.1: Contraterminos para QED con dimensiones extra.

donde  $\delta_A$ ,  $\delta_{\Psi^{(0)}}$ ,  $\delta m_{\Psi^{(0)}}$  y  $\delta_e$  serán definidos más adelante.

### 3.2. Cálculo de la autoenergía del electrón

La contribución a orden de un lazo a la autoenergía del electrón está formada por una contribución estándar,  $-i\Sigma^{(0)}(\not{p})$ , y otra parte que corresponde a las excitaciones de KK las cuales están conformadas a su vez por una parte escalar,  $-i\Sigma_S^{(m)}(\not{p})$ , y una parte vectorial,  $-i\Sigma_V^{(m)}(\not{p})$ . Los diagramas correspondientes son

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagrama 1: } \Psi^{(0)} \text{---} \text{wavy line } A_\mu^{(0)} \text{---} \Psi^{(0)} \\
 & + \sum_{(m)} \left\{ \text{Diagrama 2: } \Psi^{(0)} \text{---} \text{wavy line } A_\mu^{(m)} \text{---} \Psi^{(m)} \text{---} \Psi^{(0)} \right. \\
 & \left. + \text{Diagrama 3: } \Psi^{(0)} \text{---} \text{dashed line } A_n^{(m)} \text{---} \text{dashed line } A_G^{(m)} \text{---} \Psi^{(m)} \text{---} \Psi^{(0)} \right\}
 \end{aligned}$$

esto es

$$-i\Sigma(\not{p}) = -i\Sigma^{(0)}(\not{p}) + \sum_{(m)} \left( -i\Sigma_S^{(m)}(\not{p}) - i\Sigma_V^{(m)}(\not{p}) \right). \quad (3.36)$$

Comencemos por la contribución estándar. La aplicación de las reglas de Feynman conduce a

$$\begin{aligned}
-i\Sigma^{(0)}(p) &= (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-ie\gamma_\mu) \left( \frac{i(\not{k} + m_{\Psi^{(0)}})}{k^2 - m_{\Psi^{(0)}}^2} \right) \left( \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p-k)^2 - m_\gamma^2} \right) (-ie\gamma_\nu) \\
&= -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\mu (\not{k} + m_{\Psi^{(0)}}) \gamma^\mu}{(k^2 - m_{\Psi^{(0)}}^2) [(p-k)^2 - m_\gamma^2]},
\end{aligned} \tag{3.37}$$

dado que conserva la misma forma que el cálculo realizado en la sección 1.3.4 no será necesario poner los pasos intermedios del mismo, mostraremos solamente la expresión resultante

$$-i\Sigma^{(0)}(\not{p}) = -\frac{i\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx [(2-D)\not{p}x + Dm_{\Psi^{(0)}}] \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\Delta_{\Psi^{(0)}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})}, \tag{3.38}$$

donde

$$\Delta_{\Psi^{(0)}}^2 = m_\gamma^2 x + m_{\Psi^{(0)}}^2 (1-x) - p^2 x (1-x). \tag{3.39}$$

En este caso no conservaremos la masa ficticia del fotón, por lo cual tomando  $m_\gamma = 0$  la ecuación anterior queda

$$\Delta_{\Psi^{(0)}}^2 = m_{\Psi^{(0)}}^2 (1-x) - p^2 x (1-x). \tag{3.40}$$

Prosigamos con el cálculo de la contribución de los modos excitados, comenzando por la parte vectorial tenemos

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_V^{(m)}(p) &= (-ie)^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \gamma^\mu \left( V_{Fac}^{(m)} P_R + \delta_{ac} P_L \right) \frac{i(\not{k} + m_{\Psi^{(m)}})}{k^2 - m_{\Psi^{(m)}}^2} \gamma^\nu \\
&\quad \left( V_{Fcb}^{(m)\dagger} P_R + \delta_{cb} P_L \right) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(k-p)^2 - m_{\Psi^{(m)}}^2}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Para resolver la expresión del numerador debemos tener en cuenta que las matrices de Dirac cumplen la relación  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$  por lo cual se cumple que  $\not{p}P_R = P_L\not{p}$  y equivalentemente  $\not{p}P_L = P_R\not{p}$ , tomando en cuenta esto

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_V^{(m)}(p) &= -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \gamma^\mu \left\{ \left( V_{Fac}^{(m)} V_{Fcb}^{(m)\dagger} P_R + \delta_{ac} \delta_{cb} P_L \right) \not{k} \right. \\
&\quad \left. \left( V_{Fac}^{(m)} \delta_{cb} P_R + V_{Fcb}^{(m)\dagger} \delta_{ac} P_L \right) m_{\Psi^{(m)}} \right\} \gamma^\mu \frac{1}{(k^2 - m_{\Psi^{(m)}}^2) [(k-p)^2 - m_{\Psi^{(m)}}^2]},
\end{aligned} \tag{3.42}$$

existen simplificaciones para los términos entre paréntesis, para el término que acompaña a  $\not{k}$  ocurre que

$$\begin{aligned}
V_{Fac}^{(m)} V_{Fcb}^{(m)\dagger} P_R + \delta_{ac} \delta_{cb} P_L &= \left( V_F^{(m)} V_F^{(m)\dagger} \right)_{ab} P_R + \delta_{ab} P_L \\
&= \delta_{ab} (P_R + P_L) \\
&= \delta_{ab},
\end{aligned} \tag{3.43}$$

y recuerde que este término es diferente de cero para  $a = b = \frac{2}{2} + 1$ . Para la parte que multiplica a  $m_{\Psi^{(m)}}$  tenemos

$$V_{Fac}^{(\underline{m})} \delta_{cb} P_R + V_{Fcb}^{(\underline{m})\dagger} \delta_{ac} P_L = V_{Fab}^{(\underline{m})} P_R + V_{Fab}^{(\underline{m})\dagger} P_L, \quad (3.44)$$

pero note que evaluado en  $a = b = \frac{2}{2} + 1$ ,

$$V_{Fab}^{(\underline{m})} = V_{Fab}^{(\underline{m})\dagger} = \frac{m_{\Psi(\underline{0})}}{m_{\Psi(\underline{m})}}, \quad (3.45)$$

así que

$$V_{Fab}^{(\underline{m})} P_R + V_{Fab}^{(\underline{m})\dagger} P_L = \frac{m_{\Psi(\underline{0})}}{m_{\Psi(\underline{m})}} (P_R + P_L) = \frac{m_{\Psi(\underline{0})}}{m_{\Psi(\underline{m})}}. \quad (3.46)$$

Con esto la ecuación (3.42) se escribe

$$\begin{aligned} -i\Sigma_V^{(\underline{m})}(p) &= -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\mu \left( \not{k} + \frac{m_{\Psi(\underline{0})}}{m_{\Psi(\underline{m})}} m_{\Psi(\underline{m})} \right) \gamma_\mu}{(k^2 - m_{\Psi(\underline{m})}^2) \left[ (k-p)^2 - m_{(\underline{m})}^2 \right]} \\ &= -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\mu (\not{k} + m_{\Psi(\underline{0})}) \gamma_\mu}{(k^2 - m_{\Psi(\underline{m})}^2) \left[ (k-p)^2 - m_{(\underline{m})}^2 \right]}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

usemos una parametrización de Feynman (A.1) para combinar el denominador

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(k^2 - m_{\Psi(\underline{m})}^2) \left[ (k-p)^2 - m_{(\underline{m})}^2 \right]} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{\left\{ (k-px)^2 - \left[ m_{(\underline{m})}^2 x + m_{\Psi(\underline{m})}^2 (1-x) - p^2 x (1-x) \right] \right\}^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{\left\{ (k-px)^2 - \left[ m_{(\underline{m})}^2 + m_{\Psi(\underline{0})}^2 (1-x) - p^2 x (1-x) \right] \right\}^2}, \end{aligned}$$

definiendo

$$\Delta_{\Psi(\underline{m})}^2 = \frac{m_{(\underline{m})}^2 + m_{\Psi(\underline{0})}^2 (1-x) - p^2 x (1-x)}{m_{(\underline{m})}^2 + \Delta_{\Psi(\underline{0})}^2} \quad (3.48)$$

podemos escribir esta última expresión en términos de la ecuación (3.40). Insertando este resultado en la ecuación (3.47) tenemos

$$-i\Sigma_V^{(\underline{m})}(p) = -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\mu (\not{k} + m_{\Psi(\underline{0})}) \gamma^\mu}{\left[ (k-px)^2 - \Delta_{\Psi(\underline{m})}^2 \right]^2}, \quad (3.49)$$

haciendo el cambio de variable  $k' = k - px$  esto se reescribe

$$-i\Sigma_V^{(\underline{m})}(p) = -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\mu (\not{k}' + \not{p}x + m_{\Psi(\underline{0})}) \gamma^\mu}{(k'^2 - \Delta_{\Psi(\underline{m})}^2)^2}, \quad (3.50)$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE QED A UN LAZO CON DIMENSIONES EXTRA**  
**3.2. CÁLCULO DE LA AUTOENERGÍA DEL ELECTRÓN**

---

simplicaremos el álgebra del numerador con las identidades en  $D$  dimensiones (A.2)

$$-i\Sigma_V^{(m)}(\not{p}) = -e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)(\not{k}' + \not{p}x) + Dm_{\Psi(0)}}{(k'^2 - \Delta_{\Psi(m)}^2)^2} \quad (3.51)$$

luego, integrando respecto a  $k'$  y reacomodando los términos tenemos

$$-i\Sigma_V^{(m)}(\not{p}) = -\frac{i\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx [(2-D)\not{p}x + Dm_{\Psi(0)}] \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\Delta_{\Psi(m)}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})}. \quad (3.52)$$

Observe que si hacemos  $m_{(m)} = 0$  el resultado se reduce a  $-i\Sigma^{(0)}(\not{p})$  y  $\Delta_{\Psi(m)}^2$  se reduce a  $\Delta_{\Psi(0)}^2$ .  
 Prosigamos con la contribución escalar, en cuyo caso

$$\begin{aligned} -i\Sigma_S^{(m)}(p) &= (ie)^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \mathcal{R}_{\bar{\nu}\nu'}^{(m)} \mathcal{R}_{\nu\bar{\mu}'}^{(m)} \left[ \left( \Pi^{\bar{\mu}} V_F^{(m)} \right)_{ac} P_R - \Pi_{ac}^{\bar{\mu}} P_L \right] \\ &\quad \frac{i(\not{k} + m_{\Psi(m)})}{k^2 - m_{\Psi(m)}^2} \left[ \left( \Pi^{\bar{\mu}'} V_F^{(m)} \right)_{cb}^{\dagger} P_L - \Pi_{cb}^{\bar{\mu}'} P_R \right] \frac{i}{(k-p)^2 - m_{(m)}^2} \\ &= e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} \mathcal{R}_{\nu\bar{\mu}'}^{(m)} \left\{ \left[ \left( \Pi^{\bar{\mu}} V_F^{(m)} \right)_{ac} \left( \Pi^{\bar{\mu}'} V_F^{(m)} \right)_{cb}^{\dagger} P_R + \Pi_{ac}^{\bar{\mu}} \Pi_{cb}^{\bar{\mu}'} P_L \right] \not{k} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \left( \Pi^{\bar{\mu}} V_F^{(m)} \right)_{ac} \Pi_{cb}^{\bar{\mu}'} P_R + \Pi_{ac}^{\bar{\mu}} \left( \Pi^{\bar{\mu}'} V_F^{(m)} \right)_{cb}^{\dagger} P_L \right] m_{\Psi(m)} \right\} \frac{1}{(k^2 - m_{\Psi(m)}^2) [(k-p)^2 - m_{(m)}^2]}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Al igual que en el caso anterior tenemos simplificaciones para los productos de  $\Pi^{\bar{\mu}}$  con  $V_F^{(m)}$ , para el término que acompaña a  $\not{k}$

$$\left( \Pi^{\bar{\mu}} V_F^{(m)} \right)_{ac} \left( \Pi^{\bar{\mu}'} V_F^{(m)} \right)_{cb}^{\dagger} P_R + \Pi_{ac}^{\bar{\mu}} \Pi_{cb}^{\bar{\mu}'} P_L = \left( \Pi^{\bar{\mu}} \Pi^{\bar{\mu}'} \right)_{ab}, \quad (3.54)$$

y al multiplicar por las matrices  $\mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}$  nos queda

$$\mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} \mathcal{R}_{\nu\bar{\mu}'}^{(m)} = \left( \Pi^{\bar{\mu}} \Pi^{\bar{\mu}'} \right)_{ab} = \delta_{\bar{\mu}\bar{\mu}'} \left( \Pi^{\bar{\mu}} \Pi^{\bar{\mu}'} \right)_{ab} = \left( \Pi^{\bar{\mu}} \Pi^{\bar{\mu}'} \right)_{ab} = \delta_{ab}. \quad (3.55)$$

Para el otro término tenemos

$$\mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} \mathcal{R}_{\nu\bar{\mu}'}^{(m)} \left[ \left( \Pi^{\bar{\mu}} V_F^{(m)} \right)_{ac} \Pi_{cb}^{\bar{\mu}'} P_R + \Pi_{ac}^{\bar{\mu}} \left( \Pi^{\bar{\mu}'} V_F^{(m)} \right)_{cb}^{\dagger} P_L \right] = \left( \Pi^{\bar{\mu}} V_F^{(m)} \Pi^{\bar{\mu}'} \right)_{ab} P_R + \left( \Pi^{\bar{\mu}} V_F^{(m)\dagger} \Pi^{\bar{\mu}'} \right)_{ab} P_L, \quad (3.56)$$

pero a partir de las definiciones de  $\Pi^{\bar{\mu}}$  y  $V_F^{(m)}$  vemos que en  $a = b = \frac{2\bar{\mu}}{2} + 1$

$$\left( \Pi^{\bar{\mu}} V_F^{(m)} \Pi^{\bar{\mu}'} \right)_{ab} = \left( \Pi^{\bar{\mu}} V_F^{(m)\dagger} \Pi^{\bar{\mu}'} \right)_{ab} = 0 \quad (3.57)$$

con esto, la ecuación (3.53) resulta

$$-i\Sigma_S^{(m)}(p) = e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\not{k}}{(k^2 - m_{\Psi(m)}^2) [(k-p)^2 - m_{(m)}^2]}. \quad (3.58)$$

Ahora hacemos la parametrización de Feynman, que como se puede ver es igual a la de la contribución vectorial, así



$$-i\Sigma_S^{(m)}(p) = e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\not{k}}{[(k-px)^2 - \Delta_{\Psi^{(m)}}^2]^2}, \quad (3.59)$$

haciendo el cambio de variable  $k' = k - px$  la expresión anterior pasa a ser

$$-i\Sigma_S^{(m)}(\not{p}) = e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \frac{\not{k}' + \not{p}x}{(k'^2 - \Delta_{\Psi^{(m)}}^2)^2}, \quad (3.60)$$

finalmente al integrar en la variable  $k'$  obtenemos

$$-i\Sigma_S^{(m)}(\not{p}) = \frac{i\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx (\not{p}x) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\Delta_{\Psi^{(m)}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})}. \quad (3.61)$$

Podemos escribir la contribución completa de los modos de KK de la siguiente manera

$$-i\Sigma^{(m)}(\not{p}) = -i\Sigma_V^{(m)}(\not{p}) + n \left(-i\Sigma_S^{(m)}(\not{p})\right), \quad (3.62)$$

donde la  $n$  resulta del hecho de que tenemos  $n - 1$  escalares físicos y un pseudo bosón de Goldstone, así podemos escribir

$$-i\Sigma^{(m)}(\not{p}) = -\frac{i\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx [(2 - D - n)\not{p}x + Dm_{\Psi^{(0)}}] \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\Delta_{\Psi^{(m)}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})} \quad (3.63)$$

y con esto, de forma completa  $-i\Sigma(\not{p})$  se escribe

$$-i\Sigma(\not{p}) = -i\Sigma^{(0)}(\not{p}) + \sum_{(m)} \left[-i\Sigma^{(m)}(\not{p})\right], \quad (3.64)$$

con  $-i\Sigma^{(0)}(\not{p})$  dada por la ecuación (3.38) y  $-i\Sigma^{(m)}(\not{p})$  por la ecuación (3.63).

Utilicemos ahora el esquema de regularización presentado en la sección anterior para esta última ecuación. Tenemos que

$$\sum_{(m)} \left[-i\Sigma^{(m)}(\not{p})\right] = -\frac{i\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx [(2 - D - n)\not{p}x + Dm_{\Psi^{(0)}}] \sum_{(m)} \left(\frac{\Delta_{\Psi^{(m)}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right), \quad (3.65)$$

note que

$$\begin{aligned} \Delta_{\Psi^{(m)}}^2 &= m_{(m)}^2 + \Delta_{\Psi^{(0)}}^2 \\ &= R^{-2} \underline{m}^2 + \frac{R^{-2}}{R^{-2}} \Delta_{\Psi^{(0)}}^2 \\ &= R^{-2} \left( \underline{m}^2 + \frac{\Delta_{\Psi^{(0)}}^2}{R^{-2}} \right) \\ &= R^{-2} (\underline{m}^2 + C_{\Delta}^2), \end{aligned} \quad (3.66)$$

donde  $R$  es el radio de compactificación y además se ha definido

$$C_{\Delta}^2 = \frac{\Delta_{\Psi^{(0)}}^2}{R^{-2}} = \frac{m_{\Psi^{(0)}}^2 (1-x) - p^2 x (1-x)}{R^{-2}}. \quad (3.67)$$

Usando esto obtenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{(m)} \left[ -i\Sigma^{(m)}(\not{p}) \right] = \\
& -\frac{i\alpha}{4\pi} \left( \frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \int_0^1 dx \left[ (2-D-n)\not{p}x + Dm_{\Psi^{(0)}} \right] \sum_{(m)} (m^2 + C_\Delta^2)^{-(2-\frac{D}{2})} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \\
& = -\frac{i\alpha}{4\pi} \left( \frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \int_0^1 dx \left[ (2-D-n)\not{p}x + Dm_{\Psi^{(0)}} \right] \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \mathbf{E}_l^{C_\Delta^2} \left(2 - \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) .
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Las divergencias ultravioletas asociadas con las excitaciones de KK son canceladas por las sumas  $\sum_{(m)}$ , para esto recuerde que se debe considerar el límite  $D \rightarrow 4$ . Sea

$$\begin{aligned}
F_\Sigma(\not{p}) &= \lim_{D \rightarrow 4} \left( \frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \int_0^1 dx \left[ (2-D-n)\not{p}x + Dm_{\Psi^{(0)}} \right] \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \mathbf{E}_l^{C_\Delta^2} \left(2 - \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \\
&= \int_0^1 dx \left[ 4m_{\Psi^{(0)}} - (2+n)\not{p}x \right] \left[ \alpha_2^n + \beta_2^n \log(C_\Delta^2) + \gamma_2^n C_\Delta^2 + \delta_2^n C_\Delta^2 \log(C_\Delta^2) \right] + \delta_\Sigma ,
\end{aligned} \tag{3.69}$$

note que  $F_\Sigma(\not{p})$  es de la forma de la función  $F_N$  dada por la ecuación (3.27) para  $N = 2$ , además, se ha incluido una constante  $\delta_\Sigma$  que se encargará de remover los efectos no desacoplates. La condición para eliminar los efectos no desacoplates es

$$\lim_{R^{-1} \rightarrow \infty} [F_\Sigma(\not{p}) + \delta_\Sigma] = 0 , \tag{3.70}$$

de donde se determina  $\delta_\Sigma$ ,

$$\delta_\Sigma = - \int_0^1 dx \left[ 4m_{\Psi^{(0)}} - (2+n)\not{p}x \right] \left[ \alpha_2^n + \beta_2^n \log(C_\Delta^2) \right] , \tag{3.71}$$

con esto,  $F_\Sigma(\not{p})$  nos queda

$$F_\Sigma(\not{p}) = \int_0^1 dx \left[ 4m_{\Psi^{(0)}} - (2+n)\not{p}x \right] \left[ \gamma_2^n C_\Delta^2 + \delta_2^n C_\Delta^2 \log(C_\Delta^2) \right] . \tag{3.72}$$

De esta forma tenemos que

$$-i\Sigma(\not{p}) = -\frac{i\alpha}{4\pi} \left\{ \int_0^1 dx \left[ (2-D)\not{p}x + Dm_{\Psi^{(0)}} \right] \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left( \frac{\Delta_{\Psi^{(0)}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} + F_\Sigma(\not{p}) \right\} \tag{3.73}$$

Definiremos las cantidades renormalizadas de la siguiente manera

$$\Psi_B^{(0)} = \sqrt{Z_{\Psi^{(0)}}} \Psi^{(0)} \tag{3.74}$$

(el subíndice  $B$  indica que la cantidad es desnuda) y los contratérminos

$$\delta_{\Psi^{(0)}} = Z_{\Psi^{(0)}} - 1 \quad , \quad \delta m_{\Psi^{(0)}} = Z_{\Psi^{(0)}} m_{\Psi^{(0)}B} - m_{\Psi^{(0)}} \tag{3.75}$$

La primer condición de renormalización es

$$[-\Sigma(\not{p}) + \not{p}\delta_{\Psi^{(0)}} - \delta m_{\Psi^{(0)}}] \Big|_{\not{p}=m_{\Psi^{(0)}}} = 0 , \tag{3.76}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned}\Sigma(m_{\Psi(\omega)}) &= m_{\Psi(\omega)}\delta_{\Psi(\omega)} - \delta m_{\Psi(\omega)} \\ &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \int_0^1 dx [2x + D(1-x)] m_{\Psi(\omega)} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\hat{\Delta}_{\Psi(\omega)}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})} + F_{\Sigma}(m_{\Psi(\omega)}) \right\},\end{aligned}\tag{3.77}$$

en esta última ecuación se ha definido

$$\hat{\Delta}_{\Psi(\omega)}^2 = \Delta_{\Psi(\omega)}^2 \Big|_{\not{p}=m_{\Psi(\omega)}} = (1-x)^2 m_{\Psi(\omega)}^2,\tag{3.78}$$

y note que

$$F_{\Sigma}(m_{\Psi(\omega)}) = \int_0^1 dx [4 - (2+n)x] m_{\Psi(\omega)} \left[ \gamma_2^n \hat{C}_{\Delta}^2 + \delta_2^n \hat{C}_{\Delta}^2 \log(\hat{C}_{\Delta}^2) \right],\tag{3.79}$$

con

$$\hat{C}_{\Delta}^2 = C_{\Delta}^2 \Big|_{\not{p}=m_{\Psi(\omega)}} = \frac{\hat{\Delta}_{\Psi(\omega)}^2}{R^{-2}}.\tag{3.80}$$

Así, la expresión para el primer contratérmino es

$$\begin{aligned}\delta m_{\Psi(\omega)} &= m_{\Psi(\omega)}\delta_{\Psi(\omega)} - \Sigma(m_{\Psi(\omega)}) \\ &= m_{\Psi(\omega)}\delta_{\Psi(\omega)} - \frac{\alpha}{4\pi} m_{\Psi(\omega)} \int_0^1 dx \left\{ [2x + D(1-x)] \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\hat{\Delta}_{\Psi(\omega)}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})} \right. \\ &\quad \left. + [4 - (2+n)x] \left[ \gamma_2^n \hat{C}_{\Delta}^2 + \delta_2^n \hat{C}_{\Delta}^2 \log(\hat{C}_{\Delta}^2) \right] \right\}.\end{aligned}\tag{3.81}$$

La segunda condición de renormalización establece

$$\frac{d}{d\not{p}} [-\Sigma(\not{p}) + \not{p}\delta_{\Psi(\omega)} - \delta m_{\Psi(\omega)}] \Big|_{\not{p}=m_{\Psi(\omega)}} = 0,\tag{3.82}$$

de donde podemos obtener  $\delta_{\Psi(\omega)}$ ,

$$\delta_{\Psi(\omega)} = \frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=m_{\Psi(\omega)}}\tag{3.83}$$

y calculando la derivada

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{d}{d\psi} \Sigma(\psi) \right|_{\psi=m_{\Psi(\Omega)}} \\
 = & \left. \frac{d}{d\psi} \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \int_0^1 dx [(2-D)\psi x + Dm_{\Psi(\Omega)}] \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \left(\frac{\hat{\Delta}_{\Psi(\Omega)}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})} + F_{\Sigma}(\psi) \right\} \right|_{\psi=m_{\Psi(\Omega)}} \\
 = & \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \left(\frac{\hat{\Delta}_{\Psi(\Omega)}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})} \right. \\
 & \left. \left\{ (2-D)x + \left(2-\frac{D}{2}\right) [2x + D(1-x)] \frac{2m_{\Psi(\Omega)}^2 x(1-x)}{\hat{\Delta}_{\Psi(\Omega)}^2} \right\} + \left. \frac{d}{d\psi} F_{\Sigma}(\psi) \right|_{\psi=m_{\Psi(\Omega)}} \right\}, \tag{3.84}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{d}{d\psi} F_{\Sigma}(\psi) \right|_{\psi=m_{\Psi(\Omega)}} = \\
 & \lim_{D \rightarrow 4} \left(\frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})} \int_0^1 dx x \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \left\{ (2-n-D) \mathbf{E}_l^{\hat{C}_{\Delta}^2} \left(2-\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{R^{-2}} [(2-n)x + D(1-x)] 2m_{\Psi(\Omega)}^2 (1-x) \mathbf{E}_l^{\hat{C}_{\Delta}^2} \left(3-\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right) \right\} \\
 = & \int_0^1 dx -x(2+n) \left[ \gamma_2^n \hat{C}_{\Delta}^2 + \delta_2^n \hat{C}_{\Delta}^2 \log(\hat{C}_{\Delta}^2) \right] \\
 & + \frac{1}{R^{-2}} \int_0^1 dx [4-x(2+n)] 2m_{\Psi(\Omega)}^2 x(1-x) \left[ \alpha_3^n + \beta_3^n \log(\hat{C}_{\Delta}^2) + \gamma_3^n \hat{C}_{\Delta}^2 + \delta_3^n \hat{C}_{\Delta}^2 \log(\hat{C}_{\Delta}^2) \right]. \tag{3.85}
 \end{aligned}$$

Con esto, el segundo contratérmino es

$$\begin{aligned}
 \delta_{\Psi(\Omega)} = & \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \left\{ \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \left(\frac{\hat{\Delta}_{\Psi(\Omega)}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})} \left\{ (2-D)x \right. \right. \\
 & \left. + \left(2-\frac{D}{2}\right) [2x + D(1-x)] \frac{2m_{\Psi(\Omega)}^2 x(1-x)}{\hat{\Delta}_{\Psi(\Omega)}^2} \right\} - x(2+n) \left[ \gamma_2^n \hat{C}_{\Delta}^2 + \delta_2^n \hat{C}_{\Delta}^2 \log(\hat{C}_{\Delta}^2) \right] \\
 & \left. + \frac{1}{R^{-2}} [4-x(2+n)] 2m_{\Psi(\Omega)}^2 x(1-x) \left[ \alpha_3^n + \beta_3^n \log(\hat{C}_{\Delta}^2) + \gamma_3^n \hat{C}_{\Delta}^2 + \delta_3^n \hat{C}_{\Delta}^2 \log(\hat{C}_{\Delta}^2) \right] \right\}. \tag{3.86}
 \end{aligned}$$

### Comprobación

En este apartado calcularemos la suma del diagrama calculado más el contratérmino. Fijámonos en la figura 3.1, la regla de Feynman para el contratérmino es  $\not{\psi}\delta_{\Psi(\Omega)} - \delta m_{\Psi(\Omega)}$ . Vamos a necesitar la expresión

para  $-\Sigma(\not{p})$ , dada por la ecuación (3.73), y las expresiones para los contratérminos. Note que en estas expresiones falta tomar el límite  $D \rightarrow 4$  para la parte estándar. Para  $-\Sigma(\not{p})$  tenemos entonces

$$\begin{aligned}
 -\Sigma(\not{p}) &= -\frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \left\{ (4m_{\Psi(\omega)} - 2x\not{p}) \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln \left( \frac{\hat{\Delta}_{\Psi(\omega)}^2}{\mu^2} \right) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right. \\
 &\quad \left. + (4m_{\Psi(\omega)} - (2+n)x\not{p}) \left[ \gamma_2^n C_\Delta^2 + \delta_2^n C_\Delta^2 \log(C_\Delta^2) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

para  $\delta m_{\Psi(\omega)}$ , de la ecuación (3.81) tenemos

$$\begin{aligned}
 \delta m_{\Psi(\omega)} &= m_{\Psi(\omega)} \delta_{\Psi(\omega)} - \frac{\alpha}{4\pi} m_{\Psi(\omega)} \int_0^1 \left\{ (4-2x) \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln \left( \frac{\hat{\Delta}_{\Psi(\omega)}^2}{\mu^2} \right) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right. \\
 &\quad \left. + [4 - (2+n)x] \left[ \gamma_2^n \hat{C}_\Delta^2 + \delta_2^n \hat{C}_\Delta^2 \log(\hat{C}_\Delta^2) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

y de la ecuación (3.86) tenemos

$$\begin{aligned}
 \delta_{\Psi(\omega)} &= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 \left\{ -2x \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln \left( \frac{\hat{\Delta}_{\Psi(\omega)}^2}{\mu^2} \right) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right. \\
 &\quad - (2+n)x \left[ \gamma_2^n \hat{C}_\Delta^2 + \delta_2^n \hat{C}_\Delta^2 \log(\hat{C}_\Delta^2) \right] \\
 &\quad \left. + \frac{1}{R-2} [4-x(2+n)] 2m_{\Psi(\omega)}^2 x(1-x) \left[ \alpha_3^n + \beta_3^n \log(\hat{C}_\Delta^2) + \gamma_3^n \hat{C}_\Delta^2 + \delta_3^n \hat{C}_\Delta^2 \log(\hat{C}_\Delta^2) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

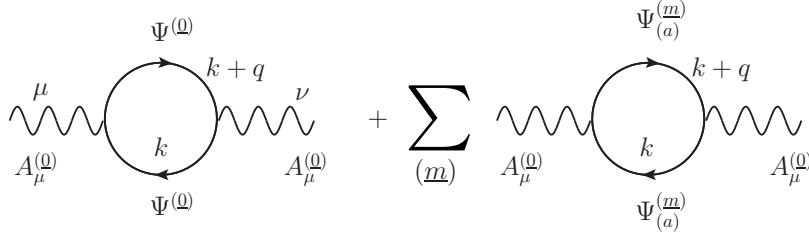
Con lo cual, la suma de los diagramas más el contratérmino resulta

$$\begin{aligned}
 -\Sigma(\not{p}) + (\not{p}\delta_{\Psi(\omega)} - \delta m_{\Psi(\omega)}) &= -\frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \left\{ (4m_{\Psi(\omega)} - 2x\not{p}) \ln \left( \frac{\hat{\Delta}_{\Psi(\omega)}^2}{\Delta_{\Psi(\omega)}^2} \right) \right. \\
 &\quad + [4m_{\Psi(\omega)} - (2+n)x\not{p}] \left[ \gamma_2^n (C_\Delta^2 - \hat{C}_\Delta^2) + \delta_2^n (C_\Delta^2 \log(C_\Delta^2) - \hat{C}_\Delta^2 \log(\hat{C}_\Delta^2)) \right] \\
 &\quad \left. - \frac{1}{R-2} [4-x(2+n)] 2m_{\Psi(\omega)}^2 x(1-x) (\not{p} - m_{\Psi(\omega)}) \left[ \alpha_3^n + \beta_3^n \log(\hat{C}_\Delta^2) + \gamma_3^n \hat{C}_\Delta^2 + \delta_3^n \hat{C}_\Delta^2 \log(\hat{C}_\Delta^2) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

Note que esta expresión es libre de SD, NSD y de efectos no desacoplantes. Esto muestra que el proceso de renormalización propuesto funciona correctamente.

### 3.3. Cálculo de la autoenergía del fotón

A orden de un lazo y con dimensiones extra, la contribución a  $i\Pi^{\mu\nu}(q)$  surge de los siguientes diagramas



de igual forma tenemos ahora una parte que corresponde a la contribución estándar  $i\Pi^{(0)\mu\nu}(q)$  y una segunda parte que corresponde a las excitaciones de KK,  $i\Pi^{(\underline{m})\mu\nu}(q)$ , donde tendremos  $2^{\frac{n}{2}}$  espinores  $\Psi_{(a)}^{(\underline{m})}$  para  $n$  dimensiones extra. De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(q) &= i\Pi^{(0)\mu\nu}(q) + i \sum_{(a)} \sum_{(\underline{m})} \Pi^{(\underline{m})\mu\nu}(q) \\ &= i\Pi^{(0)\mu\nu}(q) + i 2^{\frac{n}{2}} \sum_{(\underline{m})} \Pi^{(\underline{m})\mu\nu}(q), \end{aligned} \quad (3.91)$$

pero note que en la sección 1.3.5 calculamos lo que corresponde a la contribución estándar, vimos que  $\Pi^{(0)\mu\nu}$  debe ser de la forma:

$$\Pi^{(0)\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi^{(0)}(q^2), \quad (3.92)$$

con  $\Pi^{(0)}(q^2)$  regular en  $q^2 = 0$ . Entonces, tenemos que

$$i\Pi^{(0)\mu\nu}(q) = (-ie)^2 (-1) (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m_{\Psi^{(0)}}} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m_{\Psi^{(0)}}} \right]. \quad (3.93)$$

Los pasos intermedios serán omitidos ya que son los mismos a los mostrados en la sección 1.3.5, pondremos el resultado final, esto es

$$\begin{aligned} i\Pi^{(0)\mu\nu}(q) &= (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \frac{-i\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx 8x(1-x) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\Omega_{\Psi^{(0)}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})} \\ &= (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) i \Pi^{(0)}(q^2), \end{aligned} \quad (3.94)$$

donde

$$\Pi^{(0)}(q^2) = -\frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx 8x(1-x) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\Omega_{\Psi^{(0)}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})} \quad (3.95)$$

y

$$\Omega_{\Psi^{(0)}}^2 = m_{\Psi^{(0)}}^2 - q^2 x(1-x). \quad (3.96)$$

Note ahora que la diferencia entre  $\Pi^{(0)\mu\nu}$  y  $\Pi^{(\underline{m})\mu\nu}$  es la masa del espinor, y dado que su estructura mantiene las mismas simetrías y la regla de Feynman para la parte excitada es la misma que en el caso estándar tenemos que  $\Pi^{(\underline{m})\mu\nu}$  debe ser de la forma

$$\Pi^{(\underline{m})\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) i\Pi^{(\underline{m})}(q^2), \quad (3.97)$$

siendo ahora

$$\Pi^{(m)}(q^2) = -\frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx 8x(1-x) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\Omega_{\Psi^{(m)}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})}, \quad (3.98)$$

donde

$$\Omega_{\Psi^{(m)}}^2 = m_{\Psi^{(m)}}^2 - q^2 x(1-x). \quad (3.99)$$

Usando la ecuación (3.96) esto se puede escribir

$$\begin{aligned} \Omega_{\Psi^{(m)}}^2 &= m_{\Psi^{(m)}}^2 - q^2 x(1-x) \\ &= m_{(m)}^2 + m_{\Psi^{(0)}}^2 - q^2 x(1-x) \\ &= m_{(m)}^2 + \Omega_{\Psi^{(0)}}^2, \end{aligned} \quad (3.100)$$

con lo cual la ecuación (3.91) se escribe

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) i\Pi(q^2), \quad (3.101)$$

con

$$\Pi(q^2) = \Pi^{(0)}(q^2) + 2^{\frac{n}{2}} \sum_{(m)} \Pi^{(m)}(q^2). \quad (3.102)$$

Trabajemos ahora la suma que actúa sobre  $\Pi^{(m)}$ , en principio tenemos

$$\sum_{(m)} \Pi^{(m)}(q^2) = -\frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx 8x(1-x) \sum_{(m)} \left(\frac{\Omega_{\Psi^{(m)}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right), \quad (3.103)$$

reescribiendo  $\Omega_{\Psi^{(m)}}^2$

$$\begin{aligned} \Omega_{\Psi^{(m)}}^2 &= m_{(m)}^2 + \Omega_{\Psi^{(0)}}^2 \\ &= R^{-2} \underline{m}^2 + \frac{R^{-2}}{R^{-2}} \Omega_{\Psi^{(0)}}^2 \\ &= R^{-2} \left( \underline{m}^2 + \frac{\Omega_{\Psi^{(0)}}^2}{R^{-2}} \right) \\ &= R^{-2} (\underline{m}^2 + C_\Omega^2), \end{aligned} \quad (3.104)$$

en este caso

$$C_\Omega^2 = \frac{\Omega_{\Psi^{(0)}}^2}{R^{-2}} = \frac{m_{\Psi^{(0)}}^2 - q^2 x(1-x)}{R^{-2}}, \quad (3.105)$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
\sum_{\langle m \rangle} \Pi^{(m)}(q^2) &= -\frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \, 8x(1-x) \sum_{\langle m \rangle} \left( \frac{\Omega_{\Psi^{(m)}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \\
&= -\frac{2\alpha}{\pi} \left( \frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \int_0^1 dx \, x(1-x) \sum_{\langle m \rangle} (m^2 + C_\Omega^2)^{-(2-\frac{D}{2})} \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \\
&= -\frac{2\alpha}{\pi} \left( \frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \int_0^1 dx \, x(1-x) \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \mathbf{E}_l^{C_\Omega^2} \left(2-\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right).
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Para el tratamiento de las divergencias nuevamente definiremos una función de la siguiente manera, sea

$$\begin{aligned}
F_\Omega(q^2) &= \lim_{D \rightarrow 4} \left( \frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \int_0^1 dx \, x(1-x) \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \mathbf{E}_l^{C_\Omega^2} \left(2-\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \\
&= \int_0^1 dx \, x(1-x) [\alpha_2^n + \beta_2^n \log(C_\Omega^2) + \gamma_2^n C_\Omega^2 + \delta_2^n C_\Omega^2 \log(C_\Omega^2)] + \delta_\Omega,
\end{aligned} \tag{3.107}$$

para remover los efectos no desacoplantes ajustamos  $\delta_\Omega$  de tal forma que

$$\lim_{R^{-1} \rightarrow \infty} [F_\Omega(q^2) + \delta_\Omega] = 0, \tag{3.108}$$

de donde  $\delta_\Omega$  es,

$$\delta_\Omega = - \int_0^1 dx \, x(1-x) [\alpha_2^n + \beta_2^n \log(C_\Omega^2)], \tag{3.109}$$

con lo cual  $F_\Omega(q^2)$  nos queda

$$F_\Omega(q^2) = \int_0^1 dx \, x(1-x) [\gamma_2^n C_\Omega^2 + \delta_2^n C_\Omega^2 \log(C_\Omega^2)]. \tag{3.110}$$

Con esto, la forma completa de  $\Pi(q^2)$  es

$$\begin{aligned}
\Pi(q^2) &= \Pi^{(0)}(q^2) + 2^{\frac{n}{2}} \left( -\frac{2\alpha}{\pi} \right) F_\Omega(q^2) \\
&= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left\{ \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \left( \frac{\Omega_{\Psi^{(0)}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} + 2^{\frac{n}{2}} [\gamma_2^n C_\Omega^2 + \delta_2^n C_\Omega^2 \log(C_\Omega^2)] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.111}$$

El campo desnudo, el campo renormalizado y el contratérmino se definen por

$$A_B^{(0)\mu} = \sqrt{Z_A} A^{(0)\mu}, \quad \delta_A = Z_A - 1. \tag{3.112}$$

La condición de renormalización en este caso es

$$[\Pi(q^2) - \delta_A] \Big|_{q^2=0} = 0, \tag{3.113}$$



esto es

$$\begin{aligned}\delta_A &= \Pi(q^2)|_{q^2=0} \\ &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left\{ \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{m_{\Psi^{(0)}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})} + 2^{\frac{n}{2}} \left[\gamma_2^n \hat{C}_\Omega^2 + \delta_2^n \hat{C}_\Omega^2 \log(\hat{C}_\Omega^2)\right] \right\}.\end{aligned}\quad (3.114)$$

donde se ha definido

$$\hat{C}_\Omega^2 = C_\Omega^2|_{q^2=0} = \frac{m_{\Psi^{(0)}}^2}{R^{-2}}. \quad (3.115)$$

### Comprobación

De igual forma que en el cálculo de la sección anterior verificaremos que la suma del diagrama calculado más el contratérmino está libre de SD, NSD y efectos no desacoplantes. De la ecuación (3.111) tenemos que

$$\Pi(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left\{ \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{\Omega_{\Psi^{(0)}}^2}{\mu^2}\right) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right) + 2^{\frac{n}{2}} \left[\gamma_2^n C_\Omega^2 + \delta_2^n C_\Omega^2 \log(C_\Omega^2)\right] \right\}, \quad (3.116)$$

y la ecuación (3.117) tenemos que

$$\delta_A = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left\{ \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{\hat{\Omega}_{\Psi^{(0)}}^2}{\mu^2}\right) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right) + 2^{\frac{n}{2}} \left[\gamma_2^n \hat{C}_\Omega^2 + \delta_2^n \hat{C}_\Omega^2 \log(\hat{C}_\Omega^2)\right] \right\}, \quad (3.117)$$

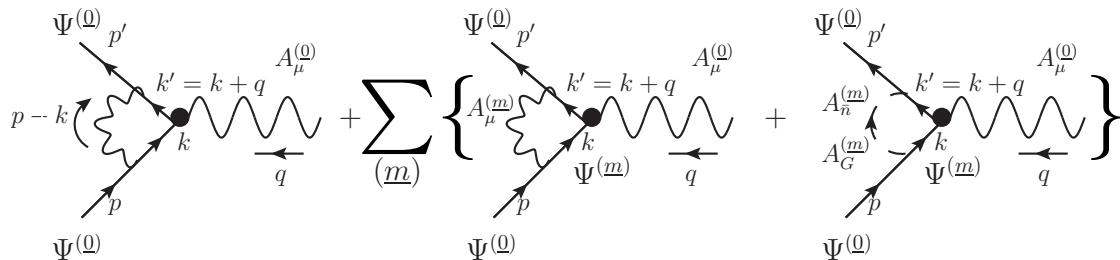
de esta forma, obtenemos

$$\Pi(q^2) - \delta_A = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left\{ \ln\left(\frac{\hat{C}_\Omega^2}{C_\Omega^2}\right) + 2^{\frac{n}{2}} \left[\gamma_2^n (C_\Omega^2 - \hat{C}_\Omega^2) + \delta_2^n (C_\Omega^2 \log(C_\Omega^2) - \hat{C}_\Omega^2 \log(\hat{C}_\Omega^2))\right] \right\}. \quad (3.118)$$

Efectivamente esta última expresión es libre de SD, NSD y efectos no desacoplantes tal como se esperaba.

### 3.4. Cálculo de la función vértice

A orden de un lazo y con dimensiones extra la contribución a la función vértice está dada por los siguientes diagramas:



a orden de un lazo tenemos que  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu$ , donde de acuerdo con los diagramas anteriores la corrección a la corriente para este caso es de la forma

$$\delta\Gamma^\mu = \delta\Gamma^{(0)\mu} + \sum_{(m)} \left( \delta\Gamma_V^{(m)\mu} + \delta\Gamma_S^{(m)\mu} \right). \quad (3.119)$$

Comenzaremos por la contribución estándar  $\delta\Gamma^{(0)\mu}$ , de la aplicación de las reglas de Feynman tenemos

$$\bar{u}(p') \delta\Gamma^{(0)\mu} u(p) = -ie^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') \gamma_\rho (\not{k}' + m_{\Psi(\Omega)}) \gamma^\mu (\not{k} + m_{\Psi(\Omega)}) \gamma^\rho u(p)}{\left[ (k-p)^2 - m_\gamma^2 \right] (k^2 - m_{\Psi(\Omega)}^2) (k'^2 - m_{\Psi(\Omega)}^2)}. \quad (3.120)$$

Por analogía al cálculo de la sección 1.3.6, el resultado es

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \delta\Gamma^{(0)\mu} u(p) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\Xi_{\Psi(\Omega)}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \\ &\times \bar{u}(p') \left\{ \gamma^\mu \left\{ \left(1 - \frac{D}{2}\right)^2 \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) + \left[ (1-x)(1-y) - \left(2 - \frac{D}{2}\right) xy \right] q^2 \right. \right. \\ &\left. \left. + \left[ (1-4z+z^2) - \left(2 - \frac{D}{2}\right) (1-z)^2 \right] m_{\Psi(\Omega)}^2 \right\} \frac{\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)}{\Xi_{\Psi(\Omega)}^2} \right\} + 2m_{\Psi(\Omega)}^2 z(1-z) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_{\Psi(\Omega)}} \frac{\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)}{\Xi_{\Psi(\Omega)}^2} \left\} u(p), \end{aligned} \quad (3.121)$$

donde

$$\Xi_{\Psi(\Omega)}^2 = -q^2 xy + m_{\Psi(\Omega)}^2 (1-z)^2 + m_\gamma^2 z. \quad (3.122)$$

Al igual que en el cálculo de la autoenergía del electrón en lo que sigue no será necesario conservar la masa ficticia del electrón, por lo que la ecuación anterior queda

$$\Xi_{\Psi(\Omega)}^2 = -q^2 xy + m_{\Psi(\Omega)}^2 (1-z)^2. \quad (3.123)$$

La forma de la ecuación (3.119) induce la siguiente expresión para los factores de forma

$$\delta F_i(q^2) = \delta F_i^{(0)}(q^2) + \sum_{(m)} \left( \delta F_{iV}^{(m)}(q^2) + \delta F_{iS}^{(m)}(q^2) \right) \quad i = 1, 2. \quad (3.124)$$

como ya sabemos, para el caso estándar tenemos

$$\begin{aligned} \delta F_1^{(0)}(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\Xi_{\Psi(\Omega)}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \\ &\times \left\{ \left(1 - \frac{D}{2}\right)^2 \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) + \left[ (1-x)(1-y) - \left(2 - \frac{D}{2}\right) xy \right] q^2 \right. \\ &\left. + \left[ (1-4z+z^2) - \left(2 - \frac{D}{2}\right) (1-z)^2 \right] m_{\Psi(\Omega)}^2 \right\} \frac{\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)}{\Xi_{\Psi(\Omega)}^2} \end{aligned} \quad (3.125)$$

y

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE QED A UN LAZO CON DIMENSIONES EXTRA**  
**3.4. CÁLCULO DE LA FUNCIÓN VÉRTICE**

---

$$\delta F_2^{(0)}(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\Xi_{\Psi(\Omega)}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} 2m_{\Psi(\Omega)}^2 z(1-z) \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})}{\Xi_{\Psi(\Omega)}^2}. \quad (3.126)$$

Continuaremos con el cálculo para los modos excitados, comenzando por la contribución vectorial tenemos

$$\bar{u}(p') \delta \Gamma_V^{(m)\mu} u(p) = -ie^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') N_V^\mu u(p)}{\left[ (k-p)^2 - m_{\Psi(m)}^2 \right] (k^2 - m_{\Psi(m)}^2) (k'^2 - m_{\Psi(m)}^2)}, \quad (3.127)$$

con el numerador del integrando dado por

$$N_V^\mu = \gamma_\rho \left( V_{Fac}^{(m)} P_R + \delta_{ac} P_L \right) (\not{k}' + m_{\Psi(m)}) \gamma^\mu (\not{k} + m_{\Psi(m)}) \gamma^\rho \left( V_{Fcb}^{(m)\dagger} P_R + \delta_{cb} P_L \right). \quad (3.128)$$

Trabajaremos ahora el álgebra del numerador para simplificarlo, note que

$$\begin{aligned} N_V^\mu &= \left( V_{Fac}^{(m)} P_L + \delta_{ac} P_R \right) \left[ \gamma_\rho \not{k}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\rho + m_{\Psi(m)} \gamma_\rho \not{k}' \gamma^\mu \gamma^\rho + m_{\Psi(m)} \gamma_\rho \gamma^\mu \not{k} \gamma^\rho + m_{\Psi(m)}^2 \gamma_\rho \gamma^\mu \gamma^\rho \right] \\ &\quad \left( V_{Fcb}^{(m)\dagger} P_R + \delta_{cb} P_L \right) \\ &= - \left( V_{Fac}^{(m)} P_L + \delta_{ac} P_R \right) 2 \left\{ \left[ \not{k} \gamma^\mu \not{k}' - 2m_{\Psi(m)} (k'^\mu + k^\mu) + m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(4-D)}{2} \left[ \not{k}' \gamma^\mu \not{k} - m_{\Psi(m)} (\not{k}' \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k}) + m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu \right] \right\} \left( V_{Fcb}^{(m)\dagger} P_R + \delta_{cb} P_L \right) \\ &= -2 \left\{ \left[ \left( V_{Fac}^{(m)} V_{Fcb}^{(m)\dagger} P_L + \delta_{ac} \delta_{cb} P_R \right) \not{k} \gamma^\mu \not{k}' - \left( V_{Fac}^{(m)} \delta_{cb} P_L + V_{Fcb}^{(m)\dagger} \delta_{ac} P_R \right) 2m_{\Psi(m)} (k'^\mu + k^\mu) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( V_{Fac}^{(m)} V_{Fcb}^{(m)\dagger} P_L + \delta_{ac} \delta_{cb} P_R \right) m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu \right] - \frac{(4-D)}{2} \left[ \left( V_{Fac}^{(m)} V_{Fcb}^{(m)\dagger} P_L + \delta_{ac} \delta_{cb} P_R \right) \not{k}' \gamma^\mu \not{k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( V_{Fac}^{(m)} \delta_{cb} P_L + V_{Fcb}^{(m)\dagger} \delta_{ac} P_R \right) m_{\Psi(m)} (\not{k}' \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k}) + \left( V_{Fac}^{(m)} V_{Fcb}^{(m)\dagger} P_L + \delta_{ac} \delta_{cb} P_R \right) m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu \right] \right\} \\ &= -2 \left\{ \left[ \not{k} \gamma^\mu \not{k}' - 2m_{\Psi(m)} (k'^\mu + k^\mu) + m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(4-D)}{2} \left[ \not{k}' \gamma^\mu \not{k} - m_{\Psi(m)} (\not{k}' \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k}) + m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu \right] \right\}, \quad (3.129) \end{aligned}$$

este resultado se verá modificado por los cambios de variable inducidos por la parametrización de Feynman, veamos cómo ocurre esto. El denominador de la ecuación (3.127) se puede expresar de la siguiente manera

$$\frac{1}{\left[ (k-p)^2 - m_{\Psi(m)}^2 \right] (k^2 - m_{\Psi(m)}^2) (k'^2 - m_{\Psi(m)}^2)} = 2 \int_0^1 \frac{dx dy dz \delta(x+y+z-1)}{\left\{ \left[ (k-p)^2 - m_{\Psi(m)}^2 \right] z + (k^2 - m_{\Psi(m)}^2) x + (k'^2 - m_{\Psi(m)}^2) y \right\}^3}, \quad (3.130)$$

para trabajar el denominador D tenga en cuenta que  $k' = k + q$ ,  $q = p' - p$  y que tomaremos  $l = qy - pz$ ,

$$\begin{aligned} D &= (k^2 - m_{\Psi(m)}^2) x + (k'^2 - m_{\Psi(m)}^2) y + \left[ (k-p)^2 - m_{\Psi(m)}^2 \right] z \\ &= (k+l)^2 - \left[ l^2 - q^2 y - p^2 z + m_{\Psi(m)}^2 (x+y) + m_{\Psi(m)}^2 z \right] \\ &= (k+l)^2 - \Xi_{\Psi(m)}^2, \quad (3.131) \end{aligned}$$

note que de la definición de  $\Xi_{\Psi(m)}^2$  se cumple que

$$\begin{aligned}
 \Xi_{\Psi(m)}^2 &= l^2 - q^2 y - p^2 z + m_{\Psi(m)}^2 (x + y) + m_{(m)}^2 z \\
 &= q^2 y^2 + q^2 y z + m_{\Psi(0)}^2 z^2 - q^2 y - p^2 z + m_{\Psi(m)}^2 (x + y) + m_{(m)}^2 z \\
 &= -q^2 x y + m_{\Psi(0)}^2 z^2 - m_{\Psi(0)}^2 z + (m_{\Psi(0)}^2 + m_{(m)}^2) (1 - z) + m_{(m)}^2 z \\
 &= -q^2 x y + m_{\Psi(0)}^2 (1 - z)^2 + m_{(m)}^2 \\
 &= m_{(m)}^2 + \Xi_{\Psi(0)}^2 .
 \end{aligned} \tag{3.132}$$

Con esto, el denominador dado por la ecuación (3.130) se reescribe

$$2 \int_0^1 \frac{dx dy dz \delta(x + y + z - 1)}{\left\{ \left[ (k - p)^2 - m_{(m)}^2 \right] z + (k^2 - m_{\Psi(m)}^2) x + (k'^2 - m_{\Psi(m)}^2) y \right\}^3} = 2 \int_0^1 \frac{dx dy dz \delta(x + y + z - 1)}{\left[ \tilde{k}^2 - \Xi_{\Psi(m)}^2 \right]^3}, \tag{3.133}$$

donde  $\tilde{k} = k + l$ .

Ahora, aplicamos los mismos cambios de variable para reescribir el numerador (3.129), el procedimiento es análogo al realizado en la sección 1.3.6. Tomando sólo las partes que contribuyen a la integral el resultado es

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(p') N_V^\mu u(p) &= \bar{u}(p') \left\{ \gamma^\mu \left\{ \left( \frac{D}{2} - 1 \right) \left( \frac{2}{D} - 1 \right) \tilde{k}^2 + \left[ (1 - x)(1 - y) - \frac{(4 - D)}{2} xy \right] q^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left[ (1 - 2z - z^2) - \frac{(4 - D)}{2} (1 - z)^2 \right] m_{\Psi(0)}^2 + \left( \frac{D}{2} - 1 \right) m_{(m)}^2 \right\} \right. \\
 &\quad \left. + m_{\Psi(0)} z (z - 1) (p'^\mu + p^\mu) \right\} u(p),
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

con esto la ecuación (3.127) toma la forma

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(p') \delta \Gamma_V^{(m)\mu} u(p) &= \\
 4i e^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} &\int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \int \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left[ \tilde{k}^2 - \Xi_{\Psi(m)}^2 \right]^3} \\
 &\times \bar{u}(p') \left\{ \gamma^\mu \left\{ \left( \frac{D}{2} - 1 \right) \left( \frac{2}{D} - 1 \right) \tilde{k}^2 + \left[ (1 - x)(1 - y) - \frac{(4 - D)}{2} xy \right] q^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left[ (1 - 2z - z^2) - \frac{(4 - D)}{2} (1 - z)^2 \right] m_{\Psi(0)}^2 + \left( \frac{D}{2} - 1 \right) m_{(m)}^2 \right\} \right. \\
 &\quad \left. + m_{\Psi(0)} z (z - 1) (p'^\mu + p^\mu) \right\} u(p),
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

en este momento es posible hacer la integración sobre la variable  $\tilde{k}$ , utilizando las integrales del apéndice A.4 y la identidad de Gordon para poder identificar los factores de forma obtenemos

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') \delta\Gamma_V^{(m)\mu} u(p) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\Xi_{\Psi(m)}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \\
&\times \bar{u}(p') \left\{ \gamma^\mu \left\{ \left(1 - \frac{D}{2}\right)^2 \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) + \left[ (1-x)(1-y) - \left(2 - \frac{D}{2}\right)xy \right] q^2 \right. \right. \\
&+ \left. \left[ (1-4z+z^2) - \left(2 - \frac{D}{2}\right)(1-z)^2 \right] m_{\Psi(0)}^2 + \left(\frac{D}{2} - 1\right) m_{(m)}^2 \right\} \frac{\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)}{\Xi_{\Psi(m)}^2} \left. \right\} \\
&+ 2m_{\Psi(0)}^2 z(1-z) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_{\Psi(0)}} \frac{\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)}{\Xi_{\Psi(m)}^2} \left. \right\} u(p).
\end{aligned} \tag{3.136}$$

Note que si  $m_{(m)} = 0$  se recupera la parte estándar  $\delta\Gamma^{(0)\mu}$ . Con este resultado tenemos que

$$\begin{aligned}
\delta F_{1V}^{(m)}(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\Xi_{\Psi(m)}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \\
&\times \left\{ \left(1 - \frac{D}{2}\right)^2 \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) + \left[ (1-x)(1-y) - \left(2 - \frac{D}{2}\right)xy \right] q^2 \right. \\
&+ \left. \left[ (1-4z+z^2) - \left(2 - \frac{D}{2}\right)(1-z)^2 \right] m_{\Psi(0)}^2 + \left(\frac{D}{2} - 1\right) m_{(m)}^2 \right\} \frac{\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)}{\Xi_{\Psi(m)}^2},
\end{aligned} \tag{3.137}$$

y

$$\delta F_{2V}^{(m)}(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\Xi_{\Psi(m)}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} 2m_{\Psi(0)}^2 z(1-z) \frac{\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)}{\Xi_{\Psi(m)}^2}. \tag{3.138}$$

Calcularemos ahora la contribución escalar, aplicando las reglas de Feynman tenemos que

$$\bar{u}(p') \delta\Gamma_S^{(m)\mu} u(p) = ie^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') N_S^\mu u(p)}{\left[ (k-p)^2 - m_{(m)}^2 \right] (k^2 - m_{\Psi(m)}^2) (k'^2 - m_{\Psi(m)}^2)}, \tag{3.139}$$

donde el numerador del integrando es ahora

$$N_S^\mu = \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} \mathcal{R}_{\mu'\nu'}^{(m)} \left[ \left( \Pi^\mu V_F^{(m)} \right)_{ac} P_R - \Pi_{ac}^\mu P_L \right] \left( \not{k}' + m_{\Psi(m)} \right) \gamma^\mu \left( \not{k} + m_{\Psi(m)} \right) \left[ \left( \Pi^{\mu'} V_F^{(m)} \right)_{cb}^\dagger P_L - \Pi_{cb}^{\mu'\dagger} P_R \right], \tag{3.140}$$

trabajando este numerador obtenemos

$$\begin{aligned}
N_S^\mu &= \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} \mathcal{R}_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}^{(m)} \left[ \left( \Pi^{\bar{\mu}} V_F^{(m)} \right)_{ac} P_R - \Pi_{ac}^{\bar{\mu}} P_L \right] \left( \not{k}' \gamma^\mu \not{k} + m_{\Psi(m)} \not{k}' \gamma^\mu + m_{\Psi(m)} \gamma^\mu \not{k} + m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu \right) \\
&\quad \times \left[ \left( \Pi^{\bar{\mu}'} V_F^{(m)} \right)_{cb}^\dagger P_L - \Pi_{cb}^{\bar{\mu}'} P_R \right] \\
&= \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} \mathcal{R}_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}^{(m)} \left[ \left( \Pi^{\bar{\mu}} V_F^{(m)} \right)_{ac} P_R - \Pi_{ac}^{\bar{\mu}} P_L \right] \left[ \left( \Pi^{\bar{\mu}'} V_F^{(m)} \right)_{cb}^\dagger P_R - \Pi_{cb}^{\bar{\mu}'} P_L \right] \not{k}' \gamma^\mu \not{k} \\
&\quad + \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} \mathcal{R}_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}^{(m)} \left[ \left( \Pi^{\bar{\mu}} V_F^{(m)} \right)_{ac} P_R - \Pi_{ac}^{\bar{\mu}} P_L \right] \left[ \left( \Pi^{\bar{\mu}'} V_F^{(m)} \right)_{cb}^\dagger P_L - \Pi_{cb}^{\bar{\mu}'} P_R \right] \left( m_{\Psi(m)} \not{k}' \gamma^\mu + m_{\Psi(m)} \gamma^\mu \not{k} \right) \\
&\quad + \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} \mathcal{R}_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}^{(m)} \left[ \left( \Pi^{\bar{\mu}} V_F^{(m)} \right)_{ac} P_R - \Pi_{ac}^{\bar{\mu}} P_L \right] \left[ \left( \Pi^{\bar{\mu}'} V_F^{(m)} \right)_{cb}^\dagger P_R - \Pi_{cb}^{\bar{\mu}'} P_L \right] m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu \\
&= \not{k}' \gamma^\mu \not{k} + m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu, \tag{3.141}
\end{aligned}$$

con lo cual, la ecuación (3.139) queda

$$\bar{u}(p') \delta \Gamma_S^{(m)\mu} u(p) = ie^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') \left( \not{k}' \gamma^\mu \not{k} + m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu \right) u(p)}{\left[ (k-p)^2 - m_{(m)}^2 \right] \left( k^2 - m_{\Psi(m)}^2 \right) \left( k'^2 - m_{\Psi(m)}^2 \right)}. \tag{3.142}$$

Note que el denominador de esta última expresión es el mismo que el de la contribución vectorial discutida arriba, por lo cual usaremos la expresión (3.133) para este cálculo junto con los cambios de variable que implica. Con esto, el numerador de la ecuación (3.142) se convierte en

$$\begin{aligned}
\not{k}' \gamma^\mu \not{k} + m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu &= (k+q) \gamma^\mu \not{k} + m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu \\
&= (\tilde{k} - l) \gamma^\mu (\tilde{k} - l) + \not{q} \gamma^\mu (\tilde{k} - l) + m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu \\
&= \tilde{k} \gamma^\mu \tilde{k} + \tilde{l} \gamma^\mu \tilde{l} - \not{q} \gamma^\mu \tilde{l} + m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu \\
&= \left( \frac{2}{D} - 1 \right) \tilde{k}^2 \gamma^\mu + (\not{q} y - \not{p} z) \gamma^\mu (\not{q} y - \not{p} z) - \not{q} \gamma^\mu (\not{q} y - \not{p} z) + m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu \\
&= \left( \frac{2}{D} - 1 \right) \tilde{k}^2 \gamma^\mu + y(y-1) \not{q} \gamma^\mu \not{q} + z(1-y) \not{q} \gamma^\mu \not{p} - yz \not{p} \gamma^\mu \not{q} + z^2 \not{p} \gamma^\mu \not{p} + m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu, \tag{3.143}
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
&\bar{u}(p') \left\{ \left( \frac{2}{D} - 1 \right) \tilde{k}^2 \gamma^\mu + y(y-1) \not{q} \gamma^\mu \not{q} + z(1-y) \not{q} \gamma^\mu \not{p} - yz \not{p} \gamma^\mu \not{q} + z^2 \not{p} \gamma^\mu \not{p} + m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu \right\} u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left\{ \left( \frac{2}{D} - 1 \right) \tilde{k}^2 \gamma^\mu + y(y-1) [2q^\mu \not{q} - q^2 \gamma^\mu] + z(1-y) [\not{p}' \gamma^\mu \not{p} - 2p^\mu \not{p} + p^2 \gamma^\mu] \right. \\
&\quad \left. - yz [-2q^\mu \not{q} + q^2 \gamma^\mu + 2p^\mu \not{p} - p^2 \gamma^\mu - \not{p}' \gamma^\mu \not{p}] + z^2 [2p^\mu \not{p} - p^2 \gamma^\mu] + m_{\Psi(m)}^2 \gamma^\mu \right\} u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left\{ \gamma^\mu \left[ \left( \frac{2}{D} - 1 \right) \tilde{k}^2 + xyq^2 + (2z - z^2) m_{\Psi(0)}^2 + m_{\Psi(m)}^2 \right] + z(z-1) m_{\Psi(0)} (p^\mu + p'^\mu) \right. \\
&\quad \left. - z(z-1) m_{\Psi(0)} q^\mu \right\} u(p), \tag{3.144}
\end{aligned}$$

usando esto junto con los cambios correspondientes antes mencionados la ecuación (3.142) toma la forma

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \delta \Gamma_S^{(m)\mu} u(p) &= 2ie^2 (\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{[\tilde{k}^2 - \Xi_{\Psi(m)}^2]^3} \\ &\times \bar{u}(p') \left\{ \gamma^\mu \left[ \left( \frac{2}{D} - 1 \right) \tilde{k}^2 + xyq^2 + (2z - z^2) m_{\Psi(\omega)}^2 + m_{\Psi(m)}^2 \right] + z(z-1) m_{\Psi(\omega)} (p^\mu + p'^\mu) \right. \\ &\left. - z(z-1) m_{\Psi(\omega)} q^\mu \right\} u(p), \end{aligned} \quad (3.145)$$

Ahora procedemos a hacer la integración en la variable  $\tilde{k}$  y utilizar la identidad de Gordon, el resultado es

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \delta \Gamma_S^{(m)\mu} u(p) &= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\Xi_{\Psi(m)}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \\ &\times \bar{u}(p') \left\{ \gamma^\mu \left[ \left( \frac{D}{2} - 1 \right) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) + (xyq^2 + (1+z^2) m_{\Psi(\omega)}^2 + m_{\Psi(m)}^2) \frac{\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)}{\Xi_{\Psi(m)}^2} \right] \right. \\ &\left. + 2m_{\Psi(\omega)}^2 z(1-z) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m_{\Psi(\omega)}} \frac{\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)}{\Xi_{\Psi(m)}^2} \right\} u(p), \end{aligned} \quad (3.146)$$

así,

$$\begin{aligned} \delta F_{1S}^{(m)}(q^2) &= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\Xi_{\Psi(m)}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \\ &\times \left[ \left( \frac{D}{2} - 1 \right) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) + (xyq^2 + (1+z^2) m_{\Psi(\omega)}^2 + m_{\Psi(m)}^2) \frac{\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)}{\Xi_{\Psi(m)}^2} \right] \end{aligned} \quad (3.147)$$

y

$$\delta F_{2S}^{(m)}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\Xi_{\Psi(m)}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} 2m_{\Psi(\omega)}^2 z(1-z) \frac{\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)}{\Xi_{\Psi(m)}^2}. \quad (3.148)$$

Note que la ecuación (3.124) incluye una sumatoria para la contribución de los modos excitados, esto se puede expresar de la siguiente forma

$$\sum_{(m)} \delta F_i^{(m)}(q^2) = \sum_{(m)} \left( \delta F_{iV}^{(m)}(q^2) + \delta F_{iS}^{(m)}(q^2) \right) \quad i = 1, 2. \quad (3.149)$$

Tomando en cuenta el tratamiento empleado para las sumatorias sobre  $\underline{m}$  y la expresión anterior para los factores de forma  $\delta F_i^{(m)}$  escribimos

$$\begin{aligned}
 & \sum_{(m)} \delta F_1^{(m)}(q^2) = \sum_{(m)} \left( \delta F_{1V}^{(m)}(q^2) + \delta F_{1S}^{(m)}(q^2) \right) \\
 = & \sum_{(m)} \left\{ \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\Xi_{\Psi}^2(m)}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \right. \\
 & \times \left\{ \left( \frac{2+D(D-3)}{4} \right) \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) + \left[ (1-x)(1-y) - \left( \frac{3-D}{2} \right) xy \right] q^2 \right. \\
 & \left. \left. + \left[ \left( \frac{3-8z+3z^2}{2} \right) - \left( 2-\frac{D}{2} \right) (1-z)^2 \right] m_{\Psi(\omega)}^2 + \left( \frac{D-1}{2} \right) m_{(m)}^2 \right\} \frac{\Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right)}{\Xi_{\Psi}^2(m)} \right\} \\
 = & \frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \\
 & \left\{ \mathbf{E}_l^{C_{\Xi}^2} \left( 2-\frac{D}{2} \right) \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \left( \frac{2+D(D-3)}{4} \right) + \frac{1}{R^{-2}} \mathbf{E}_l^{C_{\Xi}^2} \left( 3-\frac{D}{2} \right) \Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right) \right. \\
 & \times \left\{ \left[ (1-x)(1-y) - \left( \frac{3-D}{2} \right) xy \right] q^2 + \left[ \left( \frac{3-8z+3z^2}{2} \right) - \left( 2-\frac{D}{2} \right) (1-z)^2 \right] m_{\Psi(\omega)}^2 \right\} \\
 + & \mathbf{E}_l^{C_{\Xi}^2} \left( 2-\frac{D}{2} \right) \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \left( \frac{D-1}{2} \right) \left( 2-\frac{D}{2} \right) \\
 - & C_{\Xi}^2 \mathbf{E}_l^{C_{\Xi}^2} \left( 3-\frac{D}{2} \right) \Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right) \left( \frac{D-1}{2} \right) \left. \right\} \\
 = & \frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \\
 & \left\{ \mathbf{E}_l^{C_{\Xi}^2} \left( 2-\frac{D}{2} \right) \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \left( \frac{D-1}{2} \right) + \frac{1}{R^{-2}} \mathbf{E}_l^{C_{\Xi}^2} \left( 3-\frac{D}{2} \right) \Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right) \right. \\
 & \times \left\{ \left[ (1-x)(1-y) - \left( \frac{3-D}{2} \right) xy \right] q^2 + \left[ \left( \frac{3-8z+3z^2}{2} \right) - \left( 2-\frac{D}{2} \right) (1-z)^2 \right] m_{\Psi(\omega)}^2 - R^{-2} C_{\Xi}^2 \left( \frac{D-1}{2} \right) \right\} \left. \right\} \\
 = & \frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \\
 & \left\{ \mathbf{E}_l^{C_{\Xi}^2} \left( 2-\frac{D}{2} \right) \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \left( \frac{D-1}{2} \right) + \frac{1}{R^{-2}} \mathbf{E}_l^{C_{\Xi}^2} \left( 3-\frac{D}{2} \right) \Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right) \right. \\
 & \left. \times \left\{ \left[ (1-x)(1-y) - (2-D)xy \right] q^2 - z m_{\Psi(\omega)}^2 \right\} \right\}, \tag{3.150}
 \end{aligned}$$

donde se ha definido  $C_{\Xi}^2 = \frac{\Xi_{\Psi}^2(\omega)}{R^{-2}}$ . Para el segundo factor de forma note que  $\delta F_{2S}^{(m)} = \frac{1}{2} \delta F_{2V}^{(m)}$ , así



$$\begin{aligned}
\sum_{(m)} \delta F_2^{(m)}(q^2) &= \sum_{(m)} \left( \delta F_{2V}^{(m)}(q^2) + \delta F_{2S}^{(m)}(q^2) \right) \\
&= \sum_{(m)} \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left( \frac{\Xi_{\Psi}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} 3m_{\Psi(\omega)}^2 z(1-z) \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})}{\Xi_{\Psi}^2} \\
&= \sum_{(m)} \frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \frac{1}{R^{-2}} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right) (\underline{m} + C_{\Xi}^2)^{-(3-\frac{D}{2})} 3m_{\Psi(\omega)}^2 z(1-z) \\
&= \frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \frac{1}{R^{-2}} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \mathbf{E}_l^{C_{\Xi}^2} \left(3-\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right) 3m_{\Psi(\omega)}^2 z(1-z) .
\end{aligned} \tag{3.151}$$

Como en los casos anteriores vamos a definir dos funciones a través de un límite para el tratamiento de las divergencias. Sean estas

$$\begin{aligned}
F_{1\Xi}(q^2) &= \lim_{D \rightarrow 4} \left( \frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \\
&\quad \left\{ \mathbf{E}_l^{C_{\Xi}^2} \left(2-\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \left(\frac{D-1}{2}\right) + \frac{1}{R^{-2}} \mathbf{E}_l^{C_{\Xi}^2} \left(3-\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. \times \left\{ [(1-x)(1-y) - (2-D)xy] q^2 - zm_{\Psi(\omega)}^2 \right\} \right\} \\
&= \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{3}{2} [\alpha_2^n + \beta_2^n \log(C_{\Xi}^2) + \gamma_2^n C_{\Xi}^2 + \delta_2^n C_{\Xi}^2 \log(C_{\Xi}^2)] + \delta_{\Gamma} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{R^{-2}} [\alpha_3^n + \beta_3^n \log(C_{\Xi}^2) + \gamma_3^n C_{\Xi}^2 + \delta_3^n C_{\Xi}^2 \log(C_{\Xi}^2)] \right. \\
&\quad \left. \times \left\{ [(1-x)(1-y) + 2xy] q^2 - zm_{\Psi(\omega)}^2 \right\} \right\}
\end{aligned} \tag{3.152}$$

y

$$\begin{aligned}
F_{2\Xi}(q^2) &= \lim_{D \rightarrow 4} \left( \frac{R^{-2}}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \frac{1}{R^{-2}} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\
&\quad \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \mathbf{E}_l^{C_{\Xi}^2} \left(3-\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right) 3m_{\Psi(\omega)}^2 z(1-z) \\
&= \frac{1}{R^{-2}} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) 3m_{\Psi(\omega)}^2 z(1-z) \\
&\quad \times [\alpha_3^n + \beta_3^n \log(C_{\Xi}^2) + \gamma_3^n C_{\Xi}^2 + \delta_3^n C_{\Xi}^2 \log(C_{\Xi}^2)] ,
\end{aligned} \tag{3.153}$$

note que  $F_{2\Xi}(q^2)$  es libre de efectos no desacoplantes, lo único que debemos ajustar es  $\delta_{\Gamma}$  en el primer factor de forma tal que

$$\lim_{R^{-1} \rightarrow \infty} [F_{1\Xi}(q^2) + \delta_{\Gamma}] = 0 , \tag{3.154}$$

de donde  $\delta_\Gamma$  es,

$$\delta_\Gamma = - \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{3}{2} [\alpha_2^n + \beta_2^n \log(C_\Xi^2)] , \quad (3.155)$$

de esta forma el factor de forma  $F_{1\Xi}(q^2)$  queda

$$\begin{aligned} F_{1\Xi}(q^2) &= \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \frac{3}{2} [\gamma_2^n C_\Xi^2 + \delta_2^n C_\Xi^2 \log(C_\Xi^2)] \right. \\ &+ \frac{1}{R-2} [\alpha_3^n + \beta_3^n \log(C_\Xi^2) + \gamma_3^n C_\Xi^2 + \delta_3^n C_\Xi^2 \log(C_\Xi^2)] \\ &\left. \times \left\{ [(1-x)(1-y) + 2xy] q^2 - z m_{\Psi(\omega)}^2 \right\} \right\} , \end{aligned} \quad (3.156)$$

con lo cual definimos ahora

$$\delta F_1(q^2) = \delta F_1^{(0)}(q^2) + \frac{\alpha}{2\pi} F_{1\Xi}(q^2) \quad (3.157)$$

$$\delta F_2(q^2) = \delta F_2^{(0)}(q^2) + \frac{\alpha}{2\pi} F_{2\Xi}(q^2) , \quad (3.158)$$

esto es

$$\begin{aligned} \delta F_1(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \left( \frac{\Xi_{\Psi(\omega)}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \right. \\ &\times \left\{ \left(1 - \frac{D}{2}\right)^2 \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) + \left\{ [(1-x)(1-y) - \left(2 - \frac{D}{2}\right)xy] q^2 \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left[ (1-4z+z^2) - \left(2 - \frac{D}{2}\right)(1-z)^2 \right] m_{\Psi(\omega)}^2 \right\} \frac{\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)}{\Xi_{\Psi(\omega)}^2} \right\} \\ &+ \frac{3}{2} [\gamma_2^n C_\Xi^2 + \delta_2^n C_\Xi^2 \log(C_\Xi^2)] + \frac{1}{R-2} [\alpha_3^n + \beta_3^n \log(C_\Xi^2) + \gamma_3^n C_\Xi^2 + \delta_3^n C_\Xi^2 \log(C_\Xi^2)] \\ &\left. \times \left\{ [(1-x)(1-y) + 2xy] q^2 - z m_{\Psi(\omega)}^2 \right\} \right\} , \end{aligned} \quad (3.159)$$

y

$$\begin{aligned} \delta F_2(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \left( \frac{\Xi_{\Psi(\omega)}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} 2m_{\Psi(\omega)}^2 z(1-z) \frac{\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)}{\Xi_{\Psi(\omega)}^2} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{R-2} 3m_{\Psi(\omega)}^2 z(1-z) [\alpha_3^n + \beta_3^n \log(C_\Xi^2) + \gamma_3^n C_\Xi^2 + \delta_3^n C_\Xi^2 \log(C_\Xi^2)] \right\} . \end{aligned} \quad (3.160)$$

La carga renormalizada  $e$  y el contratérmino  $\delta_e$  se definen por

$$eZ_e = e_B Z_{\Psi(\omega)} \sqrt{Z_A}, \quad \delta_e = Z_e - 1 , \quad (3.161)$$

la condición de renormalización para este caso es

$$[1 + \delta F_1(q^2) + \delta_e] \Big|_{q^2=0} = 1, \quad (3.162)$$

de donde

$$\begin{aligned} \delta_e &= -\delta F_1(0) \\ &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \left( \frac{\hat{\Xi}_{\Psi(\omega)}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \right. \\ &\quad \times \left\{ \left(1 - \frac{D}{2}\right)^2 \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) + \left\{ (1-4z+z^2) - \left(2 - \frac{D}{2}\right)(1-z)^2 \right\} m_{\Psi(\omega)}^2 \right\} \frac{\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)}{\hat{\Xi}_{\Psi(\omega)}^2} \left. \right\} \\ &\quad + \frac{3}{2} \left[ \gamma_2^n \hat{C}_{\Xi}^2 + \delta_2^n \hat{C}_{\Xi}^2 \log(\hat{C}_{\Xi}^2) \right] - \frac{1}{R^{-2}} z m_{\Psi(\omega)}^2 \left[ \alpha_3^n + \beta_3^n \log(\hat{C}_{\Xi}^2) + \gamma_3^n \hat{C}_{\Xi}^2 + \delta_3^n \hat{C}_{\Xi}^2 \log(\hat{C}_{\Xi}^2) \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (3.163)$$

siendo

$$\hat{\Xi}_{\Psi(\omega)}^2 = \Xi_{\Psi(\omega)}^2 \Big|_{q^2=0} = m_{\Psi(\omega)}^2 (1-z)^2, \quad (3.164)$$

y

$$\hat{C}_{\Xi}^2 = C_{\Xi}^2 \Big|_{q^2=0} = \frac{\hat{\Xi}_{\Psi(\omega)}^2}{R^{-2}}. \quad (3.165)$$

### Comprobación

Nuevamente verificaremos que la renormalización se cumple satisfactoriamente, para el caso de la función vértice la renormalización se da a través del factor de forma  $\delta F_1(q^2)$ . De la ecuación (3.159) tenemos que

$$\begin{aligned} \delta F_1(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{\Xi_{\Psi(\omega)}^2}{\mu^2}\right) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right. \\ &\quad + \left\{ (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m_{\Psi(\omega)}^2 \right\} \frac{1}{\Xi_{\Psi(\omega)}^2} \\ &\quad + \frac{3}{2} \left[ \gamma_2^n C_{\Xi}^2 + \delta_2^n C_{\Xi}^2 \log(C_{\Xi}^2) \right] + \frac{1}{R^{-2}} \left[ \alpha_3^n + \beta_3^n \log(C_{\Xi}^2) + \gamma_3^n C_{\Xi}^2 + \delta_3^n C_{\Xi}^2 \log(C_{\Xi}^2) \right] \\ &\quad \times \left\{ [(1-x)(1-y) + 2xy]q^2 - z m_{\Psi(\omega)}^2 \right\} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (3.166)$$

y de la ecuación (3.163) obtenemos la expresión para el contratérmino  $\delta_e$

$$\begin{aligned} \delta_e &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{\hat{\Xi}_{\Psi(\omega)}^2}{\mu^2}\right) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right. \\ &\quad + (1-4z+z^2) \frac{m_{\Psi(\omega)}^2}{\hat{\Xi}_{\Psi(\omega)}^2} + \frac{3}{2} \left[ \gamma_2^n \hat{C}_{\Xi}^2 + \delta_2^n \hat{C}_{\Xi}^2 \log(\hat{C}_{\Xi}^2) \right] \\ &\quad \left. - \frac{1}{R^{-2}} z m_{\Psi(\omega)}^2 \left[ \alpha_3^n + \beta_3^n \log(\hat{C}_{\Xi}^2) + \gamma_3^n \hat{C}_{\Xi}^2 + \delta_3^n \hat{C}_{\Xi}^2 \log(\hat{C}_{\Xi}^2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.167)$$

con esto calculamos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\delta F_1(q^2) + \delta_e &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \ln \left( \frac{\hat{\Xi}_{\Psi^{(0)}}^2}{\Xi_{\Psi^{(0)}}^2} \right) + (1-x)(1-y) \frac{q^2}{\Xi_{\Psi^{(0)}}^2} \right. \\
&+ (1-4z+z^2) m_{\Psi^{(0)}}^2 \left( \frac{1}{\Xi_{\Psi^{(0)}}^2} - \frac{1}{\hat{\Xi}_{\Psi^{(0)}}^2} \right) + \frac{3}{2} \left[ \gamma_2^n (C_{\Xi}^2 - \hat{C}_{\Xi}^2) + \delta_2^n (C_{\Xi}^2 \log(C_{\Xi}^2) - \hat{C}_{\Xi}^2 \log(\hat{C}_{\Xi}^2)) \right] \\
&+ \frac{1}{R^{-2}} [\alpha_3^n + \beta_3^n \log(C_{\Xi}^2) + \gamma_3^n C_{\Xi}^2 + \delta_3^n C_{\Xi}^2 \log(C_{\Xi}^2)] \left\{ [(1-x)(1-y) + 2xy] q^2 - z m_{\Psi^{(0)}}^2 \right\} \\
&+ \left. \frac{1}{R^{-2}} z m_{\Psi^{(0)}}^2 [\alpha_3^n + \beta_3^n \log(\hat{C}_{\Xi}^2) + \gamma_3^n \hat{C}_{\Xi}^2 + \delta_3^n \hat{C}_{\Xi}^2 \log(\hat{C}_{\Xi}^2)] \right\}, \tag{3.168}
\end{aligned}$$

nuevamente obtenemos una expresión libre de SD, NSD y efectos no desacoplantes.

### 3.5. Renormalización de la carga

A orden  $\alpha$  el corrimiento en la carga está dado por  $\delta Z_A = \Pi(0)$ , pero como vimos en el primer capítulo esta cantidad no es observable, lo que es observable es la diferencia  $\Pi(q^2) - \delta_A$ . Recordemos que lo que se obtiene es una expresión para la carga renormalizada en función del momento transferido, dicha expresión es

$$e_R^2 = \frac{e_B^2}{1 - [\Pi(q^2) - \delta_A]},$$

donde  $\Pi(q^2) - \delta_A$  está dado por la ecuación (3.118), es decir

$$\begin{aligned}
\Pi(q^2) - \delta_A &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left\{ \ln \left( \frac{m_{\Psi^{(0)}}^2}{m_{\Psi^{(0)}}^2 - q^2 x(1-x)} \right) \right. \\
&+ \left. 2^{\frac{n}{2}} \left[ \gamma_2^n \left( \frac{\Omega_{\Psi^{(0)}}^2 - \hat{\Omega}_{\Psi^{(0)}}^2}{R^{-2}} \right) + \delta_2^n \left( \frac{\Omega_{\Psi^{(0)}}^2}{R^{-2}} \log \left( \frac{\Omega_{\Psi^{(0)}}^2}{R^{-2}} \right) - \frac{\hat{\Omega}_{\Psi^{(0)}}^2}{R^{-2}} \log \left( \frac{\hat{\Omega}_{\Psi^{(0)}}^2}{R^{-2}} \right) \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

con

$$\Omega_{\Psi^{(0)}}^2 = m_{\Psi^{(0)}}^2 - q^2 x(1-x), \quad \hat{\Omega}_{\Psi^{(0)}}^2 = m_{\Psi^{(0)}}^2. \tag{3.169}$$

Note que en el límite  $R^{-1} \rightarrow \infty$  recuperamos la expresión para la carga estándar renormalizada.

### 3.6. Límite electrostático

Recordemos que el efecto de la renormalización al potencial eléctrico se discutió en la sección 1.5, se definió una función  $\hat{\Pi}(q^2)$ . En este caso definiremos la misma función pero tomando en cuenta ahora el resultado que contiene el cálculo con las dimensiones extra, es decir, la ecuación (3.102). Así definimos

$$\hat{\Pi}(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0) = [\Pi^{(0)}(q^2) - \Pi^{(0)}(0)] + 2^{\frac{n}{2}} \sum_{(m)} [\Pi^{(m)}(q^2) - \Pi^{(m)}(0)], \tag{3.170}$$

note que la parte estándar  $\Pi^{(0)}(q^2) - \Pi^{(0)}(0)$  ya fue calculada. Utilizando la ecuación (3.103) la contribución de las dimensiones extra es

$$\begin{aligned}
 & 2^{\frac{n}{2}} \sum_{(m)} \left[ \Pi^{(m)}(q^2) - \Pi^{(m)}(0) \right] = \\
 & -2^{\frac{n}{2}} \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x (1-x) \sum_{(m)} \left[ \left( \frac{\Omega_{\Psi^{(m)}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) - \left( \frac{\hat{\Omega}_{\Psi^{(m)}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \right],
 \end{aligned} \tag{3.171}$$

ahora utilizando la fórmula (A.8) tenemos

$$\begin{aligned}
 & -2^{\frac{n}{2}} \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x (1-x) \sum_{(m)} \left[ \left( \frac{\Omega_{\Psi^{(m)}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) - \left( \frac{\hat{\Omega}_{\Psi^{(m)}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) \right] \\
 = & -2^{\frac{n}{2}} \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x (1-x) \sum_{(m)} \left[ \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{\Omega_{\Psi^{(m)}}^2}{\mu^2}\right) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right. \\
 & \left. - \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{\hat{\Omega}_{\Psi^{(m)}}^2}{\mu^2}\right) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right] \\
 = & -2^{\frac{n}{2}} \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x (1-x) \sum_{(m)} \ln\left(\frac{\hat{\Omega}_{\Psi^{(m)}}^2}{\Omega_{\Psi^{(m)}}^2}\right) \\
 = & -2^{\frac{n}{2}} \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x (1-x) \sum_{(m)} \ln\left(\frac{m_{\Psi^{(m)}}^2}{m_{\Psi^{(m)}}^2 - q^2 x(1-x)}\right).
 \end{aligned} \tag{3.172}$$

Luego, como en el caso estándar se hace el cambio  $q^2 = -\mathbf{q}^2$  y se hace la una expansión en serie a primer orden en el límite  $\mathbf{q}^2 \ll m_{\Psi^{(m)}}^2$

$$\begin{aligned}
 & -2^{\frac{n}{2}} \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x (1-x) \sum_{(m)} \ln\left(\frac{m_{\Psi^{(m)}}^2}{m_{\Psi^{(m)}}^2 + \mathbf{q}^2 x(1-x)}\right) \\
 \approx & 2^{\frac{n}{2}} \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x^2 (1-x)^2 \sum_{(m)} \frac{\mathbf{q}^2}{m_{\Psi^{(m)}}^2} \\
 = & 2^{\frac{n}{2}} \frac{\alpha \mathbf{q}^2}{15\pi R^{-2}} \sum_{(m)} \frac{1}{(m^2 + \hat{C}_{\Omega}^2)^{-1}} \\
 = & 2^{\frac{n}{2}} \frac{\alpha \mathbf{q}^2}{15\pi R^{-2}} \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \mathbf{E}_l^{\hat{C}_{\Omega}^2}(1) \\
 = & 2^{\frac{n}{2}} \frac{\alpha \mathbf{q}^2}{15\pi R^{-2}} \left[ \alpha_3^n + \beta_3^n \log(\hat{C}_{\Omega}^2) \right],
 \end{aligned} \tag{3.173}$$

note que en este caso la contribución al propagador del fotón es

$$D_{\mu\nu}(-\mathbf{q}^2) \approx \frac{i g_{\mu\nu} e^2}{\mathbf{q}^2} 2^{\frac{n}{2}} \frac{\alpha \mathbf{q}^2}{15\pi R^{-2}} \left[ \alpha_3^n + \beta_3^n \log(\hat{C}_{\Omega}^2) \right]. \tag{3.174}$$

Por último usamos la aproximación de Born para obtener el potencial  $V(q^2)$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
V(r) &= i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}} D_{00}(-\mathbf{q}^2) \\
&= -2^{\frac{n}{2}} \frac{\alpha e^2}{15\pi R^{-2}} \left[ \alpha_3^n + \beta_3^n \log\left(\frac{m_{\Psi(0)}^2}{R^{-2}}\right) \right] \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}} \\
&= -2^{\frac{n}{2}} \frac{4\alpha^2}{15R^{-2}} \left[ \alpha_3^n + \beta_3^n \log\left(\frac{m_{\Psi(0)}^2}{R^{-2}}\right) \right] \delta^3(r), \tag{3.175}
\end{aligned}$$

y con el resultado de la parte estandar (1.163) el resultado total es

$$V(r) = -\left\{ \frac{\alpha}{r} + \frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^3(r) + 2^{\frac{n}{2}} \frac{4\alpha^2}{15R^{-2}} \left[ \alpha_3^n + \beta_3^n \log\left(\frac{m_{\Psi(0)}^2}{R^{-2}}\right) \right] \delta^3(r) \right\}. \tag{3.176}$$

Este resultado muestra que la contribución de las dimensiones extra refuerza el efecto del apantallamiento de la carga ya que los coeficientes  $\alpha_3^n$  mostrados en la tabla 3.2 son positivos y el producto  $\beta_3^n \log(m_{\Psi(0)}^2/R^{-2})$  también lo es. Note que al tomar el límite  $R^{-1} \rightarrow \infty$  obtenemos el resultado estándar para  $V(r)$ .

### 3.7. Momento magnético anómalo del electrón

Recordemos que en la sección 1.6 se discutió el corrimiento en el factor  $g$  de Landé dado por el segundo factor de forma  $\delta F_2(q^2)$  proveniente del cálculo de la función vértice, en ese caso obtuvimos que

$$a_e = \frac{g-2}{2} = \delta F_2(q^2)|_{q^2=0} = \frac{\alpha}{2\pi}. \tag{3.177}$$

Ahora tomaremos en cuenta la contribución dada por las dimensiones extra, recordemos que el cálculo de la sección 3.4 nos dice que el factor de forma se modifica de la siguiente manera

$$\delta F_2(q^2) = \delta F_2^{(0)}(q^2) + \sum_{(\underline{m})} \delta F_2^{(\underline{m})}(q^2), \tag{3.178}$$

y como ya vimos, de acuerdo con la ecuación (3.160) tenemos

$$\begin{aligned}
\delta F_2(q^2) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \left( \frac{\Xi_{\Psi(0)}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} 2m_{\Psi(0)}^2 z(1-z) \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})}{\Xi_{\Psi(0)}^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{R^{-2}} 3m_{\Psi(0)}^2 z(1-z) [\alpha_3^n + \beta_3^n \log(C_{\Xi}^2) + \gamma_3^n C_{\Xi}^2 + \delta_3^n C_{\Xi}^2 \log(C_{\Xi}^2)] \right\},
\end{aligned}$$

así, al evaluar en  $q^2 = 0$  y resolver la integral paramétrica el resultado es

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ 1 + \frac{m_{\Psi(0)}^2}{600R^{-2}} \left[ 150\alpha_3^n - 175\beta_3^n + 30\log\left(\frac{m_{\Psi(0)}^2}{R^{-2}}\right) \left( 5\beta_3^n + 2\delta_3^n \frac{m_{\Psi(0)}^2}{R^{-2}} \right) + 4\frac{m_{\Psi(0)}^2}{R^{-2}} (15\gamma_3^n + 11\delta_3^n) \right] \right\}. \tag{3.179}$$

En este resultado, el primer término dentro de los corchetes proviene de la contribución estándar mientras que el segundo término proviene de la contribución de las dimensiones extra. Note que en el límite  $R^{-1} \rightarrow \infty$  la contribución de las dimensiones extra se desvanece.

### 3.8. La función $\beta$

Para el estudio del efecto de las dimensiones extra en la función beta consideramos en límite de masa cero, en este caso las masas estándar de la teoría como las masas de excitadas se consideran de menor orden que la escala de renormalización. Recordemos que para este cálculo se deben evaluar las condiciones de renormalización en la escala  $p^2 = -M^2$ , en este escenario las funciones de Epstein no aparecen así que tanto las divergencias estándar como las de las excitaciones de KK deben ser removidas por el contratérmino adecuado que renormalice la acción estándar. Veamos cuál es la estructura del contratérmino. A partir de la ecuación (3.102) y de la definición del contratérmino tenemos que

$$\delta_A = \Pi(0) = \Pi^{(0)}(0) + 2^{\frac{n}{2}} \sum_{(m)} \Pi^{(m)}(0), \quad (3.180)$$

la parte estándar  $\Pi^{(0)}(0)$  ya fue calculada previamente. Por otro lado, la contribución al conratérmino proviene de la evaluación de la ecuación (3.103) en  $q^2 = 0$

$$2^{\frac{n}{2}} \sum_{(m)} \Pi^{(m)}(0) = -2^{\frac{n}{2}} \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \sum_{(m)} \left( \frac{\hat{\Omega}_{\Psi^{(m)}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(2-\frac{D}{2})} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right), \quad (3.181)$$

con  $\hat{\Omega}_{\Psi^{(m)}}^2$  definido por la ecuación (3.169). Lo que sigue es evaluar en la escala  $-M^2$ , con lo cual tenemos

$$2^{\frac{n}{2}} \sum_{(m)} \Pi^{(m)}(M^2) = -2^{\frac{n}{2}} \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \sum_{(m)} (-M^2)^{-(2-\frac{D}{2})} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right). \quad (3.182)$$

Recordemos que la función beta se define por

$$\beta = M \frac{e}{2} \frac{\partial \delta_A}{\partial M}, \quad (3.183)$$

calculando la derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_A}{\partial M} &= -2^{\frac{n}{2}} \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) 2M \left(2 - \frac{D}{2}\right) (-M^2)^{-(3-\frac{D}{2})} \sum_{(m)} \\ &= -2^{\frac{n}{2}} \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{6} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) 2M (-M^2)^{-(3-\frac{D}{2})} \sum_{(m)}, \end{aligned} \quad (3.184)$$

utilizando el resultado (3.25) y tomando el límite  $D \rightarrow 4$  obtenemos

$$\frac{\partial \delta_A}{\partial M} = 2^{\frac{n}{2}} \frac{2e^2}{4\pi^2 3M} \left( \frac{1-2^n}{2^n} \right), \quad (3.185)$$

así la contribución a la función beta es

$$\frac{e^3}{12\pi^2} 2^{\frac{n}{2}} \left( \frac{1-2^n}{2^n} \right). \quad (3.186)$$

Tomando en cuenta el resultado estándar y la contribución por las dimensiones extra la función  $\beta$  es

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} \left[ 1 + 2^{\frac{n}{2}} \left( \frac{1-2^n}{2^n} \right) \right], \quad (3.187)$$

y la constante de acoplamiento queda

$$\bar{e}^2 = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \left[ 1 + 2^{\frac{n}{2}} \left( \frac{1-2^n}{2^n} \right) \right] \log\left(\frac{q^2}{M^2}\right)}. \quad (3.188)$$

Note que al hacer el número de dimensiones extra igual a cero,  $n = 0$ , se recupera el resultado estandar en las últimas dos ecuaciones.





## Capítulo 4

# Conclusiones

En este proyecto se abordó la renormalización a orden de un lazo de la electrodinámica cuántica con dimensiones extra compactadas. A partir de una teoría efectiva en el contexto de las dimensiones extra se demostró que la electrodinámica es renormalizable en un sentido moderno, lo cual involucra un tratamiento sistemático tanto a las divergencias de la teoría ordinaria para la electrodinámica cuántica, como de las divergencias inducidas por las masas de las partículas de Kaluza-Klein en la escala de energía  $R^{-1}$ . Una vez logrado esto se aplicaron las condiciones de renormalización correspondientes y se obtuvieron las siguientes expresiones para los contratérminos necesarios en el proceso de renormalización:

- Para fijar la masa:

$$\begin{aligned} \delta m_{\Psi(\omega)} &= m_{\Psi(\omega)} \delta_{\Psi(\omega)} - \frac{\alpha}{4\pi} m_{\Psi(\omega)} \int_0^1 \left\{ (4-2x) \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln \left( \frac{\hat{\Delta}_{\Psi(\omega)}^2}{\mu^2} \right) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right. \\ &\quad \left. + [4 - (2+n)x] \left[ \gamma_2^n \hat{C}_\Delta^2 + \delta_2^n \hat{C}_\Delta^2 \log(\hat{C}_\Delta^2) \right] \right\}. \end{aligned}$$

- Para fijar el residuo del propagador del electrón:

$$\begin{aligned} \delta_{\Psi(\omega)} &= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 \left\{ -2x \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln \left( \frac{\hat{\Delta}_{\Psi(\omega)}^2}{\mu^2} \right) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right. \\ &\quad - (2+n)x \left[ \gamma_2^n \hat{C}_\Delta^2 + \delta_2^n \hat{C}_\Delta^2 \log(\hat{C}_\Delta^2) \right] \\ &\quad \left. + \frac{1}{R^{-2}} [4 - x(2+n)] 2m_{\Psi(\omega)}^2 x(1-x) \left[ \alpha_3^n + \beta_3^n \log(\hat{C}_\Delta^2) + \gamma_3^n \hat{C}_\Delta^2 + \delta_3^n \hat{C}_\Delta^2 \log(\hat{C}_\Delta^2) \right] \right\}. \end{aligned}$$

- Para fijar el residuo del propagador del fotón:

$$\delta_A = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left\{ \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln \left( \frac{\hat{\Omega}_{\Psi(\omega)}^2}{\mu^2} \right) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) + 2^{\frac{n}{2}} \left[ \gamma_2^n \hat{C}_\Omega^2 + \delta_2^n \hat{C}_\Omega^2 \log(\hat{C}_\Omega^2) \right] \right\}.$$

- Para fijar la carga:

$$\begin{aligned} \delta_e &= -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left\{ \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln \left( \frac{\hat{\Xi}_{\Psi(\omega)}^2}{\mu^2} \right) - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right. \\ &+ (1-4z+z^2) \frac{m_{\Psi(\omega)}^2}{\hat{\Xi}_{\Psi(\omega)}^2} + \frac{3}{2} \left[ \gamma_2^n \hat{C}_{\Xi}^2 + \delta_2^n \hat{C}_{\Xi}^2 \log \left( \hat{C}_{\Xi}^2 \right) \right] \\ &\left. - \frac{1}{R^{-2}} z m_{\Psi(\omega)}^2 \left[ \alpha_3^n + \beta_3^n \log \left( \hat{C}_{\Xi}^2 \right) + \gamma_3^n \hat{C}_{\Xi}^2 + \delta_3^n \hat{C}_{\Xi}^2 \log \left( \hat{C}_{\Xi}^2 \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

La siguiente parte consistió en estudiar las implicaciones de la renormalización en los siguientes fenómenos electromagnéticos:

- Renormalización de la carga:

$$e_R^2 = \frac{e_B^2}{1 - [\Pi(q^2) - \delta_A]},$$

donde  $\Pi(q^2) - \delta_A$  está dado por

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) - \delta_A &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left\{ \ln \left( \frac{m_{\Psi(\omega)}^2}{m_{\Psi(\omega)}^2 - q^2 x(1-x)} \right) \right. \\ &+ 2^{\frac{n}{2}} \left[ \gamma_2^n \left( \frac{-q^2 x(1-x)}{R^{-2}} \right) + \delta_2^n \left( \frac{m_{\Psi(\omega)}^2}{R^{-2}} \log \left( \frac{m_{\Psi(\omega)}^2}{R^{-2}} \right) - \frac{m_{\Psi(\omega)}^2 - q^2 x(1-x)}{R^{-2}} \log \left( \frac{m_{\Psi(\omega)}^2 - q^2 x(1-x)}{R^{-2}} \right) \right) \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

- Apantallamiento de la carga eléctrica:

Este fenómeno se puede observar a través del potencial eléctrico  $V(r)$  en el límite no relativista

$$V(r) = -\left\{ \frac{\alpha}{r} + \frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^3(r) + 2^{\frac{n}{2}} \frac{4\alpha^2}{15R^{-2}} \left[ \alpha_3^n + \beta_3^n \log \left( \frac{m_{\Psi(\omega)}^2}{R^{-2}} \right) \right] \delta^3(r) \right\},$$

este resultado muestra que la contribución de las dimensiones extra refuerza el efecto del apantallamiento de la carga.

- Momento magnético anómalo:

El corrimiento al factor  $g$  está dado por

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ 1 + \frac{m_{\Psi(\omega)}^2}{600R^{-2}} \left[ 150\alpha_3^n - 175\beta_3^n + 30 \log \left( \frac{m_{\Psi(\omega)}^2}{R^{-2}} \right) \left( 5\beta_3^n + 2\delta_3^n \frac{m_{\Psi(\omega)}^2}{R^{-2}} \right) + 4 \frac{m_{\Psi(\omega)}^2}{R^{-2}} (15\gamma_3^n + 11\delta_3^n) \right] \right\}.$$

- Función  $\beta$ :

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} \left[ 1 + 2^{\frac{n}{2}} \left( \frac{1-2^n}{2^n} \right) \right],$$

y bajo el marco del grupo de renormalización la constante de acoplamiento queda

$$\bar{e}^2 = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \left[ 1 + 2^{\frac{n}{2}} \left( \frac{1-2^n}{2^n} \right) \right] \log \left( \frac{q^2}{M^2} \right)}.$$

Nótese que en estas expresiones al tomar el límite  $R^{-1} \rightarrow \infty$  o  $n = 0$  según corresponda, la teoría se desacopla.

## Apéndice A

# Parametrización de Feynman e identidades en $D$ dimensiones

### A.1. Parametrización de Feynman

La parametrización de Feynman nos permite mezclar productos de denominadores de los propagadores a través de una integral y un parámetro para cada uno de ellos a través de la siguiente identidad:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n \delta(\Sigma x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[A_1 x_1 A_2 x_2 \dots A_n x_n]^n} \quad (\text{A.1})$$

### A.2. Contracciones en $D$ dimensiones

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu} \quad (\text{A.2a})$$

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = D \quad (\text{A.2b})$$

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = D \quad (\text{A.2c})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -(D-2) \gamma^\nu \quad (\text{A.2d})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\rho \gamma_\mu = 4 g^{\nu\rho} - (4-D) \gamma^\nu \gamma_\rho \quad (\text{A.2e})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2 \gamma^\sigma \gamma_\rho \gamma^\nu + (4-D) \gamma^\nu \gamma_\rho \gamma^\sigma \quad (\text{A.2f})$$

### A.3. Trazas

Las siguientes propiedades son independientes de la dimensionalidad.

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4 g^{\mu\nu} \quad (\text{A.3a})$$

$$\text{Tr} [\text{núm. impar de } \gamma^\mu] = 0 \quad (\text{A.3b})$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (\text{A.3c})$$

#### A.4. Integrales en $D$ dimensiones

$$\int \frac{d^D S}{(2\pi)^D} \frac{1}{(S^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{D}{2}} \quad (\text{A.4a})$$

$$\int \frac{d^D S}{(2\pi)^D} \frac{S^2}{(S^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{D}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{D}{2} - 1} \quad (\text{A.4b})$$

#### A.5. Límite $D \rightarrow 4$

Si la integral diverge, el comportamiento cerca de  $D = 4$  puede ser extraído expandiendo:

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{D}{2}} = 1 - \left(2 - \frac{D}{2}\right) \ln \Delta + \dots, \quad (\text{A.5})$$

y para la función  $\Gamma(x)$  cerca de sus polos

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma + 1 + \dots + \mathcal{O}(x), \quad (\text{A.6})$$

cerca de  $x = 0$ , o

$$\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{1}{x+n} - \gamma + 1 + \dots + \frac{1}{n} + \mathcal{O}(x+n) \right) \quad (\text{A.7})$$

cerca de  $x = -n$ . Aquí  $\gamma \approx 0,5772$  es la constante de Euler - Mascheroni. Con esto:

$$\frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{D}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\epsilon} - \ln \Delta - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right), \quad (\text{A.8})$$

con  $\epsilon = 4 - D$ .  $\Delta$  es positivo si es una combinación de masas e invariantes espacialoides, si  $\Delta$  contiene momentos temporaloides, podría ser negativo.

## Apéndice B

# Definiciones relacionadas con el proceso de compactificación

### B.1. Integrales

Los campos definidos en la variedad extendida  $\mathcal{M}^{4+n}$  introducidos en el capítulo 2 tienen la propiedad de poder ser expandidos en un desarrollo de Fourier, los términos definidos y sus propiedades son enlistados a continuación.

- Los coeficientes:

$$f_E^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi R_1) \dots (2\pi R_n)}} \quad (\text{B.1})$$

$$f_E^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = \sqrt{\frac{2}{(2\pi R_1) \dots (2\pi R_n)}} \cos(\bar{p} \cdot \bar{x}) \quad (\text{B.2})$$

$$f_O^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = \sqrt{\frac{2}{(2\pi R_1) \dots (2\pi R_n)}} \text{sen}(\bar{p} \cdot \bar{x}) \quad (\text{B.3})$$

donde el producto escalar  $\bar{p} \cdot \bar{x} = \frac{m_1 \bar{x}_1}{R_1} + \dots + \frac{m_n \bar{x}_n}{R_n}$  considera todas las posibles combinaciones de  $p_{\bar{\mu}}$  a lo largo de las dimensiones extra.

- Integrales sobre las funciones pares/impares,

$$\int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_E^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = \int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_O^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = 0, \quad (\text{B.4})$$

- Ortonormalidad del conjunto  $\{f_E^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}), f_O^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x})\}$ ,

$$\int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_E^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) f_O^{(k)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_E^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) f_E^{(k)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = \delta_{(\underline{m}\underline{k})} \quad (\text{B.6})$$

$$\int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_O^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) f_O^{(k)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = \delta_{(\underline{m}\underline{k})} \quad (\text{B.7})$$

siendo  $\delta_{(\underline{m}\underline{k})} = \delta_{m_1 k_1} \dots \delta_{m_n k_n}$ .

- Integral de combinaciones de funciones pares e impares con diferentes modos de Fourier

$$\int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_E^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) f_E^{(k)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) f_E^{(r)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = \frac{\Delta_{(mkr)}}{\sqrt{(2\pi R_1) \dots (2\pi R_n)}} \quad (\text{B.8})$$

$$\int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_O^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) f_O^{(k)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) f_E^{(r)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = \frac{\Delta'_{(mkr)}}{\sqrt{(2\pi R_1) \dots (2\pi R_n)}} \quad (\text{B.9})$$

$$\int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_O^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) f_O^{(k)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) f_O^{(r)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_E^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) f_E^{(k)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) f_O^{(r)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = 0. \quad (\text{B.11})$$

## B.2. Objetos covariantes

Los términos que aparecen en la lagrangiana de la teoría de Dirac (2.42) son:

$$(D_\mu \Psi_{(a)})^{(0)} = D_\mu^{(0)} \Psi_{(a)}^{(0)} - ie \sum_{(m)} A_\mu^{(m)} \Psi_{(a)}^{(m)} \quad (\text{B.12})$$

$$(D_\mu \Psi_{(a)})^{(m)} = \sum_{(n)} D_\mu^{(mn)} \Psi_{(a)}^{(n)} - ie A_\mu^{(m)} \Psi_{(a)}^{(0)} \quad (\text{B.13})$$

$$(D_\mu \Psi_{(\hat{a})})^{(m)} = \sum_{(n)} D_\mu^{(mn)} \Psi_{(\hat{a})}^{(n)} \quad (\text{B.14})$$

$$(D_\mu \Psi_{(\bar{a})})^{(m)} = \sum_{(n)} D_\mu'^{(mn)} \Psi_{(\bar{a})}^{(n)} \quad (\text{B.15})$$

$$(D_\mu \Psi_{(b)})^{(m)} = \sum_{(n)} D_{\bar{\mu}}^{(mn)} \Psi_{(b)}^{(n)} - ie A_{\bar{\mu}}^{(m)} \Psi_{(b)}^{(0)} \quad (\text{B.16})$$

$$(D_{\bar{\mu}} \Psi_{(\hat{b})})^{(m)} = \sum_{(n)} D_{\bar{\mu}}^{(mn)} \Psi_{(\hat{b})}^{(n)} \quad (\text{B.17})$$

$$(D_{\bar{\mu}} \Psi_{(\bar{b})})^{(m)} = \sum_{(n)} D_{\bar{\mu}}'^{(mn)} \Psi_{(\bar{b})}^{(n)} \quad (\text{B.18})$$

$$(\text{B.19})$$

donde

$$D_\mu^{(0)} = \partial_\mu - ieA_\mu^{(0)} \quad (\text{B.20})$$

$$D_\mu^{(mn)} = \delta^{(mn)} D_\mu^{(0)} - ie \sum_{(r)} A_\mu^{(r)} \Delta_{(mrn)} \quad (\text{B.21})$$

$$D'_\mu^{(mn)} = \delta^{(mn)} D_\mu^{(0)} - ie \sum_{(r)} A_\mu^{(r)} \Delta'_{(mrn)} \quad (\text{B.22})$$

$$D'_\mu^{(mn)} = \delta^{(mn)} p_\mu^{(n)} - ie \sum_{(r)} A_\mu^{(r)} \Delta'_{(mrn)} \quad (\text{B.23})$$

$$D_{\bar{\mu}}^{(mn)} = -\delta^{(mn)} p_{\bar{\mu}}^{(n)} - ie \sum_{(r)} A_{\bar{\mu}}^{(r)} \Delta'_{(mrn)} \quad (\text{B.24})$$

$$D_{\bar{\mu}}^{(n)} = -2ie \sum_{(r)} A_{\bar{\mu}}^{(r)} \Delta'_{(mnr)} - ie \bar{\Psi}_{(a)}^{(0)} A_{\bar{\mu}}^{(n)}. \quad (\text{B.25})$$





# Bibliografía

- [1] T. Y. CAO and S. S. SCHWEBER, *The conceptual foundations and the philosophical aspects of renormalization theory*, *Synthese* **97** no. 1, 33 (1993).
- [2] I. ANTONIADIS, *A possible new dimension at a few TeV*, *Phys. Lett. B* **246**, 377 (1990).
- [3] N. ARKANI-HAMED, S. DIMOPOULOS, G. DVALI *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, *Phys. Lett. B* **429**, 263 (1998).
- [4] G. SERVANT, T. M. TAIT, *Elastic scattering and direct detection of Kaluza-Klein dark matter*, *New J. Phys.* **4**, 99 (2002).
- [5] H. DE SANDES, R. ROSENFELD, *Higgs pair production in models with universal extra dimensions*, *Phys. Lett. B* **659**, 323 (2008).
- [6] E. ELIZALDE and S. D. ODINTSOV, A. A. BYTSENKO, S. ZERBINI *Zeta Regularization Techniques with Applications*, (World Scientific, 1994).
- [7] E. ELIZALDE, A. ROMEO, *Epstein function analysis of the Casimir effect at finite temperature for massive fields*, *Int. J. Mod. Phys. A* **7**, no. 29 , 7365 (1992).
- [8] J. S. DOWKER, R. CRITCHLEY, *Effective lagrangian and energy-momentum tensor in de Sitter space*, *Phys. Rev. D.* **13**, no. 12 , 3224 (1976).
- [9] S. W. HAWKING, *Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime*, *Commun. math. Phys.* **55**, 133 (1977).
- [10] M. E. PESKIN and D. V. SCHROEDER, *An introduction to Quantum Field Theory*, 1st indian edition (Levant Books, India, 2005).
- [11] T. AOYAMA, M. HAYAKAWA, T. KINOSHITA and M. NIO, *Revised value of the eighth-order QED contribution to the anomalous magnetic moment of the electron*, *Phys. Rev. D* **77**, 053012 (2008).
- [12] D. HANNEKE, S. FOGWELL HOOPERHEIDE and G. GABRIELSE, *Cavity control of a single-electron quantum cyclotron: Measuring the electron magnetic moment*, *Phys. Rev. A* **83**, 052122 (2011).
- [13] I. GARCÍA-JIMENEZ, M.A. LÓPEZ-OSORIO, E. MARTÍNEZ-PASCUAL, H. NOVALES-SÁNCHEZ and J.J. TOSCANO, *Standard Model with extra dimensions I: The Kaluza-Klein mass generating mechanism and the classical Lagrangian*, *arXiv:1603.03128v2 [hep-ph]* (2017).
- [14] A. GRANADOS GONZÁLES, M.A. LÓPEZ-OSORIO, E. MARTÍNEZ-PASCUAL, G.I NÁPOLES-CAÑEDO, H. NOVALES-SÁNCHEZ and J.J. TOSCANO, *Standard Model with extra dimensions II: One-loop structure, regularization, renormalization, and asymptotic freedom*, *arXiv:1704.07339v1 [hep-ph]* (2017).