Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

El Potencial no Relativista en Teoría Cuántica de Campos

Una Tesis Presentada al:

Colegio de Física

Como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

Por

Kevin Yair Platas Matias

Asesorado por

Dr. Justiniano Lorenzo Díaz Cruz

Dr. Mario Aldair Pérez de León

Puebla, Pue.

17 de Mayo de 2023

El Potencial no Relativista en Teoría Cuántica de Campos

Autor

Kevin Yair Platas Matias

Licenciatura en Física

Tesis

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemerita Universidad Autonoma de Puebla

(**17 de Mayo de 2023**)

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

El Potencial no Relativista en Teoría Cuántica de Campos

Una Tesis Presentada al:

Colegio de Física

Como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

Por

Kevin Yair Platas Matias

Asesorado por

Dr. Justiniano Lorenzo Díaz Cruz

Dr. Mario Aldair Pérez de León

Puebla, Pue.

17 de Mayo de 2023

El Potencial no Relativista en Teoría Cuántica de Campos

Un proyecto de grado presentado
al Colegio de

Física

Como requisito parcial para la obtención del Título

Licenciado en Física

Supervisor:

Dr. Justiniano Lorenzo Díaz Cruz
Profesor Investigador
Departmento de Fisica
FCFM, BUAP.

Firma: _____
Nombre

Supervisor:

Dr. Mario Aldair Pérez de León
PosDoc
Departmento de Fisica
FCFM, UAS.

Firma: _____
Nombre

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Aprobación Final

Esta tesis titulada

El Potencial no relativista en Teoría Cuántica de Campos

Presentada para el Grado de Licenciado en Física

Por

Kevin Yair Platas Matias

ha sido aprobada por el Comité

Presidente: _____

Dra. Avilez López Ana Aurelia
Profesora Investigadora
FCFM, BUAP

Secretario: _____

Dr. Ramírez Romero Cupatitzio
Profesor Investigador
FCFM, BUAP

Vocal: _____

Dr. Novales Sánchez Héctor
Profesor Investigador
FCFM, BUAP

Vocal: _____

Dra. Pedraza Morales María Isabel
Profesora Investigadora
FCFM, BUAP

Asesor: _____

Dr. Justiniano Lorenzo Díaz Cruz
Profesor Investigador
FCFM, BUAP

Asesor: _____

Dr. Mario Aldair Pérez de León
PosDoc Investigador
FCFM, UAS

Declaración

Declaro que esta disertación no incluye ningún trabajo copiado o plagiado y que se ha otorgado el crédito apropiado dentro de esta tesis donde se ha hecho referencia al trabajo de otros. Se declara además que he desarrollado esta disertación completamente por esfuerzo propio bajo la guía de mis supervisores, el Dr. Justiniano Lorenzo Díaz Cruz y el Dr. Mario Aldair Pérez de León. Ninguna parte del trabajo que se presenta en esta disertación se ha presentado para respaldar ningún otro grado de calificación de esta u otra universidad o instituto de aprendizaje, si se encuentra, seré responsable.

Fecha: _____ Firma del estudiante:

Fecha de presentación de la tesis

Agradecimientos

«Solo a base de trabajar duro puede descubrirse algo.»

RICHARD FEYNMAN

A mis padres, por acompañarme en cada paso de mi vida, siempre nutrieron mi curiosidad y mis sueños, aunque a veces no los comprendieran, me alentaron a ir mas haya de lo que creía posible.

Me han enseñado a ser la persona que soy hoy, mis principios, mis valores, mi perseverancia y mi empeño. Todo esto con una enorme dosis de amor y sin pedir nada a cambio, siempre haciendo lo mejor que podían y aprendiendo juntos sobre la marcha, este trabajo es para ustedes.

A mis mentores el Dr. Díaz Cruz y el Dr. Pérez de León, quienes tienen un lugar muy especial en mi historia, han sido ellos quienes me han mostrado el maravilloso mundo de la física, guiaron mi camino desde el momento en que ingrese a la carrera, sin ellos estaría perdido, y es gracias a ellos que he logrado mis metas, de ellos aprendí y aprendo en cada oportunidad, espero poder seguir trabajando a su lado por muchos años más.

A mi hermana, que aunque no siempre nos entendemos, ha estado acompañándome en cada momento importante de mi vida, espero esto sirva de ejemplo para que con su esfuerzo pueda lograr mucho más.

También se la dedico a mis abuelos, ya que sin sus sacrificios y esfuerzo todo este sueño no habría siquiera existido, espero que a su modo se sientan parte de este logro.

A mi prima, Eloisa, por cuidarme de pequeño y jugar conmigo, a su hermano Raul con quienes tengo algunos de mis recuerdos mas felices de la infancia, de igual forma agradezco a sus padres, mis tíos Genoveva y Wilfrido, porque siempre puedo contar con ellos para cualquier situación. También a mis primas Andrea y Cristina y a sus familias porque es con ustedes que he crecido como persona aprendiendo de sus virtudes.

A todos mis maestros, hasta aquellos de quienes mas me queje, a la maestra Meche por cuidarme con tanto cariño en mis momentos de enfermedad, a las profesoras de secundaria, Evangelina y Catalina por afianzar mi decisión de dedicarme a la ciencia; de forma muy especial quiero agradecer y hacer parte de este trabajo a la profesora Yamila, quien me acogió en su casa como uno más de su familia, sin su apoyo no habría tenido mi segunda oportunidad para haber sido parte de esta noble institución.

De forma especial a mis “físicos en el bar”, Julian, Silvana, Arturo, Mariana, Emanuel, Sofia, Eber con quienes sobreviví a los exámenes imposibles, reí, llore, compartí experiencias únicas y se han vuelto como una segunda familia para mi, ustedes saben cuanto los quiero.

A Valeria, por su amistad incondicional, por ser el soporte más leal cuando la necesite, tus consejos y platicas hicieron posible que saliera adelante de momentos difíciles, gracias por las quesadillas.

A mi mejor amiga, Quero, me ha acompañado desde el bachillerato y desde la distancia hemos compartido momentos importantes para ambos, siempre sabiendo que contamos el uno para el otro.

A Mitzia, mi segunda hermana, eres una fuente de inspiración total, ni la distancia ni el tiempo lograra que nuestra amistad se pierda, por el contrario, aun en la distancia te las arreglas para darme tu apoyo incondicional, para desestresarme, para hablar nimiedades o para hablar de nuestros sueños, por tener siempre palabras de ánimo, por toda la vida gracias.

A Kath, por ser una gran amiga y una inspiración constante, me mostraste que siempre se puede seguir adelante a pesar de las adversidades y ser la mejor versión de mi, gracias por las profundas platicas, los juegos de basquet y las lecciones de vida.

También a la profa Guadalupe y al profe Michel, junto a todo el ballet folclórico Tlatoani, gracias por permitirme vivir mi segunda gran pasión, en compañía de personas tan talentosas y de una calidad sin igual.

A susy y gravity, quienes me acompañaron en noches de desvelo escribiendo estas paginas, me mostraron una forma diferente de amor y sus nombres reflejan la pasión que siento por lo que hago.

Y a todos los que sin nombre compartieron un instante de su vida conmigo, formando parte de mi historia.

Índice de figuras

2.1. El momento entrante y saliente de una dispersión elástica en el marco del centro de masa. 6

3.1. QED Vértice. 10
3.2. Propagador del fermión. 11
3.3. Propagador del fotón 11
3.4. Estado inicial de la partícula. 11
3.5. Estado final de la partícula 11
3.6. Estado final de la antipartícula. 12
3.7. Estado inicial de la antipartícula. 12
3.8. Estado inicial del fotón. 12
3.9. Estado final del fotón. 12
3.10. Diagrama de Feynman para el calculo de la amplitud y obtener el potencial de Coulomb. 16
3.11. Diagrama de Feynman para el calculo de la amplitud y obtener el potencial de Coulomb, dispersión partícula-antipartícula 18
3.12. Diagrama de Feynman para el calculo de la amplitud y obtener el potencial de Yukawa. 19
3.13. Diagrama de Feynman para el calculo de la amplitud y obtener el potencial de Yukawa, partícula-antipartícula 21
3.14. Propagador del gravitón. 22

5.1. Gravitón-Materia 35
5.2. Dos Gravitones-Materia 36
5.3. Tres Gravitones-Materia 36
5.4. Diagrama para el calculo del potencial de Newton. 37
5.5. Cinemática básica de la dispersión gravitacional. 40
5.6. Diagrama de la corrección a nivel cuántico. 41
5.7. Correcciones del vértice del gravitón a nivel de un lazo. . 41

5.8. Correcciones del vértice del gravitón a nivel de un lazo. . 41

Índice general

1. Introducción **2**

2. QFT y el potencial de interacción no relativista **4**
2.1. QFT Historia 4
2.2. Potencial 5
2.3. Aproximación de Born 6
2.4. Transformada de Fourier 7

3. Potencial de interacción no relativista, casos de Coulomb y Yukawa **9**
3.1. QED y el potencial de Coulomb 9
3.1.1. Reglas de Feynman para QED 10
3.1.2. Potencial de Coulomb a partir de la teoría clásica de campos . 13
3.1.3. Potencial de Coulomb con reglas de Feynman 15
3.2. Potencial de Yukawa - mediado por partículas escalares 18

4. Gravedad Cuántica perturbativa como una teoría efectiva **23**
4.1. Teoría de Campo Efectiva 23
4.2. Repaso de Relatividad General 25
4.2.1. Acción de Einstein-Hilbert 26
4.2.2. Tensor de Energía-Momento 29
4.2.3. La gravedad como una teoría efectiva 31

5. Potencial de Newton **33**
5.1. Gravedad Cuántica Perturbativa y Reglas de Feynman 33
5.2. El potencial gravitacional a nivel árbol 36
5.3. Corrección cuantica del potencial de newton 41
5.4. El Principio de Equivalencia 47
5.4.1. El Principio de Equivalencia en Mecánica Clásica y Mecánica Cuántica 48

5.4.2. La ecuación de Schrödinger 48
5.4.3. El principio de Equivalencia en la Relatividad de Einstein . . 49

6. Conclusiones **51**

Appendices **53**

A. Aproximación de Born **54**

B. Tensor de Riemann-Christoffel **56**

C. Metrica **57**

D. Tensor de energía-momento **59**

E. Expresión para el propagador **61**

F. Método de integral de caminos **64**

Capítulo 1

Introducción

La Teoría Cuántica de Campos o Quantum Field Theory (QFT) en ingles, es el marco que nos ha permitido descubrir y describir los constituyentes fundamentales de la naturaleza y sus interacciones; históricamente un paso muy importante para describir interacciones fue reemplazar la acción a distancia por el concepto de campo, en el caso estático esta descripción se ha basado en el concepto de potencial. Con el nacimiento de la Mecánica Cuántica y la posterior unión con la Relatividad Especial se llegó al concepto de partícula mediadora de la interacción, por ejemplo el papel del fotón en la interacción electro-magnética, sin embargo es importante recobrar el limite de una teoría para obtener la descripción previa. En nuestro caso nos interesa ver como se recupera el concepto de potencial en QFT.

El análisis de las diversas interacciones mediadas por un potencial es el punto de arranque del estudio de las interacciones al nivel clásico, en un principio se llega a tales potenciales de una manera empírica, desde el potencial de Newton, el oscilador armónico hasta el de Coulomb, y se presentan así desde el nivel de bachillerato o licenciatura, los cuales resultan ser la primer forma de comprender la interacción. Mediante la mecánica clásica se estudian las implicaciones de estos potenciales para estudiar el movimiento de las particulas sometidas a los mismos, incluidas las consideraciones de conservación de la energía y la estabilidad de las orbitas.

A lo largo del siglo XX hemos visto el impresionante avance de la física cuántica, con sus muy variadas aplicaciones para sistemas moleculares, atómicos, nucleares hasta llegar a las partículas elementales, para las cuales necesitamos considerar los efectos relativistas. El tratamiento riguroso de los efectos cuánticos relativistas se realiza mediante el formalismo de la teoría cuantica de campos, en la cual se trabajan las amplitudes de dispersión mediante técnicas perturbativas. El enfoque mas conocido usa los diagramas de Feynman, con sus reglas especificas para cada teoría, y los

métodos de regularización y renormalización para tratar las divergencias que aparecen en ordenes altos de teoría de perturbaciones.

Dado que tenemos una descripción de las fuerzas o interacciones, valida al nivel fundamental, nos podemos preguntar si es posible recuperar los potenciales clásicos en cierto limite a partir de QFT. Esta tesis trata justamente de revisar este tema, tanto como una revisión didáctica. Como punto de partida vamos a considerar el caso en que las interacciones son mediadas por partículas vectoriales, esto es cuando dos particulas interactúan por medio del intercambio de partículas representadas por un vector, esto lo haremos primero al nivel clásico, para presentar el formalismo relativista, luego lo haremos al nivel cuántico, construyendo una amplitud de dispersión entre dos particulas cargadas, que intercambian un fotón, veremos que en este caso es posible tener un potencial atractivo o repulsivo, dependiendo de los signos de las cargas. Como segundo ejemplo discutiremos el caso en que la interacción es mediada por partículas escalares, las cuales producen el llamado potencial de Yukawa, el cual describe las fuerzas nucleares fuertes entre los protones y neutrones que forman el núcleo atómico. Finalmente consideramos el caso en que la interacción es mediada por particulas tensoriales, como son los gravitones $h_{\mu\nu}$, y veremos que este tipo de particulas reproduce el potencial de Newton, a bajas energías. Por ultimo se ha de discutir el tema del Principio de Equivalencia (el cual se refiere a la conexión entre masa inercial m_i y la masa gravitacional m_g) y la relación que guarda este con el potencial de Newton.

El sustento y estructura de los cálculos a realizar tiene su base en la bibliografía dada al final de este trabajo, siendo las principales fuentes los libros *"An Introduction to Quantum Field Theory"*, *"Quantum Field Theory in a Nutshell"*, *"Einstein Gravity in a Nutshell"*, *"Effective Field Theories"*, y como articulo principal tomamos la obra de John F. Donoghue *"General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections"*, los cálculos, ecuaciones y definiciones presentados en este trabajo se pueden encontrar en esas obras, el objetivo de la presente tesis fue reproducir los pasos esenciales que no se presentan en las obras mencionadas para tener una imagen clara de lo que implica el calculo de los potenciales no relativistas.

Capítulo 2

QFT y el potencial de interacción no relativista

2.1. QFT Historia

Comenzando con este capitulo y como un buen punto de partida demos una idea general de lo que ha sido el desarrollo de "QFT" desde los años 20 en que fuese formulada. En la física clásica, la razón principal para introducir el concepto de campo es construir las leyes de la Naturaleza que sean locales, las antiguas leyes de Coulomb y Newton implican "acción a distancia", esto significa que la fuerza que siente un electrón (o un planeta) cambia inmediatamente si se mueve un protón (o una estrella) distante, esta situación es filosóficamente insatisfactoria, más importante aún, es experimentalmente incorrecto, las teorías de campo de Maxwell y Einstein remedian la situación, con todas las interacciones mediadas de manera local por el campo.

La Teoría Cuántica de Campos nace a finales de los años 20 gracias a los estudios de Erwin Schrödinger y Paul Dirac, quienes deseaban explicar los fenómenos cuánticos teniendo en cuenta también las leyes de la relatividad general, de ahí que sea una teoría cuántica relativista, sin embargo la Teoría Cuántica de Campos primigenia tenía problemas teóricos graves, pues muchos cálculos daban valores infinitos. Entre los años 30 y 40, Richard Feynman, Julian Schwinger, Shinichiro Tomonaga y Freeman Dyson fueron capaces de resolver estas divergencias matemáticas, en los años 60 se logra llegar al desarrollo de la electrodinámica cuántica. Posteriormente, en la década de los 70, esta Teoría Cuántica de Campos permitió explicar la naturaleza cuántica de dos fuerzas fundamentales, además de la electromagnética, las cuales eran la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte, todo lo anterior representa un paso increíble ya que en 5 décadas aproximadamente se sentaron las bases de una de las teorías

mas poderosas que el hombre haya desarrollado, sin embargo está aún en desarrollo, faltan puntos claves como lograr dar una descripción completa de la gravedad como una fuerza fundamental.

Teniendo una idea de lo que fuera el desarrollo de "QFT" es buen momento para tratar de responder a la pregunta, "¿Qué es la Teoría Cuántica de Campos?". La pista está en el nombre: es la cuantización de un campo clásico, cuyo ejemplo más familiar es el campo electromagnético. En la mecánica cuántica estándar, se nos enseña a tomar los grados de libertad clásicos y promoverlos a operadores que actúan en un espacio de Hilbert. Las reglas para cuantificar un campo no son diferentes. Por lo tanto, los grados de libertad en la teoría cuántica de campos son funciones de espacio y tiempo con valor de operador, esto significa que estamos tratando con un número infinito de grados de libertad, al menos uno para cada punto en el espacio. Las interacciones en la teoría cuántica de campos están gobernadas por algunos principios básicos: localidad, simetría y flujo de grupo de renormalización (el desacoplamiento de fenómenos de corta distancia de la física a escalas más grandes). Estas ideas hacen de QFT un marco muy robusto: dado un conjunto de campos, muy a menudo hay una forma casi única de unirlos.

La teoría cuántica de campos ha tenido un gran impacto en la materia condensada, la física de altas energías, la cosmología, la gravedad cuántica y las matemáticas puras. Es literalmente el lenguaje en el que están escritas las leyes de la Naturaleza[1].

2.2. Potencial

El análisis de potenciales mediados por partículas vectoriales es de gran interés dentro de la física, desde el comienzo de su estudio en nivel bachillerato o licenciatura resultan ser la primer forma de comprender la interacción entre dos sistemas por medio del intercambio de partículas representadas por un vector, es con este tratamiento que las bases para entender lo que es un potencial son sentadas, entendiendo el potencial como una magnitud que sirve para describir la evolución o variación probable de otra magnitud, generalmente los potenciales aparecen para describir a un campo físico.

El primer potencial mediado por partículas con el que trabajamos es el de Coulomb nombrado así en honor del físico francés Charles-Augustin de Coulomb, quien enunciara su famosa ley en 1785 la que fuera la base de la electrostática, el potencial es responsable de las interacciones electromagnéticas del entorno; en un estudio más avanzado y en particular de las interacciones fundamentales de la naturaleza se encuentra uno con el llamado potencial de Yukawa, demostrado en los años 30's por Hideki Yukawa, responsable de las interacciones nucleares de la fuerza fuerte, este potencial nos dice que los nucleones pueden experimentar interacción fuerte de tipo

atractivo debido al intercambio de piones cargados, de una manera similar a como dos partículas interaccionan electromagnéticamente mediante intercambio de fotones. Así como el campo electromagnético es "transmitido" por fotones, el campo piónico descrito por el potencial de Yukawa es "comunicado" por piones.

Atreviéndonos a ir un poco mas lejos con el concepto de potencial, podemos mencionar bajo el contexto relativista al Potencial de Higgs, descrito por el Modelo Estándar bajo este fundamento: **"Los quarks y leptones tienen interacciones que se derivan del principio de Gauge, es decir, las fuerzas están mediadas por partículas vectoriales asociadas con simetrías de gauge, y hay un campo de gauge para cada generador de las álgebras de Lie asociadas con las simetrías del sistema".**[2]

La idea de trabajar con partículas vectoriales que medien potenciales es bastante poderosa a la hora de tratar con fenómenos microscópicos como los son los de la teoría electromagnética y nuclear, sin embargo no es necesario remitirse a escalas tan pequeñas para apreciar el valor del potencial, a nuestro al rededor interactuamos constantemente con el potencial gravitatorio (o de Newton), el cual tiene su partícula análoga al de Coulomb y Yukawa para su interacción, el supuesto gravitón.

2.3. Aproximación de Born

En la mecánica cuántica no relativista, la aproximación de Born de primer orden de la amplitud de dispersión elástica viene dada por la transformada de Fourier del potencial. En consecuencia, el potencial se da como la transformada inversa de Fourier de la amplitud de dispersión. [3].

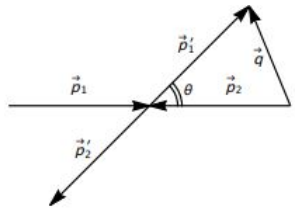

Figura 2.1: `El momento entrante y saliente de una dispersión elástica en el marco del centro de masa.`

El vector de transferencia de momento $\vec{q}$, viene dado por:

$$\vec{q} = \vec{p_1'} - \vec{p_1}. \tag{2.1}$$

Donde $\vec{p_1}$ y $\vec{p_1'}$ son respectivamente el momento final e inicial de una de las particulas en el marco del centro de masas. Para una dispersión elástica $|\vec{p_1}| = |\vec{p_1'}| = p$, teniendo:

$$q = 2p \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{2.2}$$

Con $\theta \in [0, \pi]$, $q \in [0, 2p]$. Para un potencial simétrico esférico, $V(r)$, la amplitud de dispersión en la aproximación de Born viene dada por:

$$f_B = -\frac{m}{2\pi} \int V(r) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r. \tag{2.3}$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier obtenemos:

$$V(\vec{r}) = -(2\pi)^3 \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} T_{fi}. \tag{2.4}$$

Así pues la prescripción para obtener el potencial no relativista de QFT es relativamente simple: calcular la amplitud de transición relativista para la dispersión elástica en la teoría de perturbaciones de orden más bajo ($T_{fi} = \mathcal{M}$); hacer el límite no relativista; y calcular su transformada inversa de Fourier.

2.4. Transformada de Fourier

Como cierre a este capitulo daremos un par de definiciones claves para realizar la transformada de Fourier.

Recordar que la transformada de Fourier de una función-δ es simplemente 1 : $\tilde{\delta}(k) = 1$. Lo cual se traduce en la expresión siguiente [7] :

$$\delta^3(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}}. \tag{2.5}$$

Ya que el Laplaciano se define como $\triangle = \delta^2_{\vec{x}}$, obtenemos

$$\triangle^n \delta^3(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \triangle^n e^{i\vec{k}\vec{x}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (-\vec{k^2})^n e^{i\vec{k}\vec{x}}. \tag{2.6}$$

Con lo anterior es posible definir:

$$[\widetilde{\triangle^n \delta}](\vec{k}) = (-\vec{k^2})^n. \tag{2.7}$$

Lo anterior es aplicable para cantidades invariantes de Lorentz:

$$\delta^4(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu x_\mu}. \tag{2.8}$$

$$\Box^n \delta^4(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Box^n e^{ik_\mu x_\mu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-k^2)^n e^{ik_\mu x_\mu}. \tag{2.9}$$

De forma general:

$$\Box^n f(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Box^n \tilde{f}(k) e^{ik_\mu x_\mu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-k^2)^n \tilde{f}(k) e^{ik_\mu x_\mu}. \tag{2.10}$$

De lo anterior:

$$[\widetilde{\Box^n f}](k) = (-k^2)^n \tilde{f}(k). \tag{2.11}$$

Así en general es posible establecer:

$$\triangle \leftrightarrow -\vec{k^2} \quad y \quad \Box \leftrightarrow -k^2. \tag{2.12}$$

Estas definiciones serán clave para el calculo de los tres potenciales a analizar en el presente trabajo, usarlas nos dará un camino claro al momento de aplicar la transformada de Fourier.

Capítulo 3

Potencial de interacción no relativista, casos de Coulomb y Yukawa

El presente capitulo lo hemos de dedicar a la construcción de los potenciales de Coulomb y Yukawa en ese respectivo orden, daremos primero un repaso general de deducción a partir de principios primero de QFT y luego procederemos a obtenerlos a partir del calculo de una amplitud con reglas de Feynman y la aplicación de una transformada inversa de Fourier. Antes de comenzar con nuestros cálculos es conveniente mencionar las reglas de Feynman para el caso de la Electrodinámica Cuántica (Quantum Electrodynamics "QED").

3.1. QED y el potencial de Coulomb

Como se menciono de manera breve en el capitulo anterior, QED o "la electrodinámica cuántica", es la teoría que nos brinda la descripción de partículas tales como los electrones, positrones y fotones, así como las interacciones entre estos y es la base para estudiar procesos de dispersión; el formalismo que mayor éxito tuvo para trabajar con las dispersiones fue el de los Diagramas de Feynman, propuestos por Richard P. Feynman, este método permite representar una "amplitud", así como computar la sección eficaz a partir del conjunto de propagadores y vértices conocidos como Reglas de Feynman. Otro resultado importante para calcular procesos consiste en una expresión que permita relacionar las funciones de Green con los elementos de la matriz S, este resultado es conocido como la formula de reducción LSZ, obtenida por Lehmann, Symanzik y Zimmermann.

A partir de la introducción del concepto de matriz S se puede calcular los proceso de dispersión dentro de la teoría, la matriz S es el objeto definido en el espacio de estados que contiene toda la información fisica del proceso de colisión, esta matriz se puede ver como la probabilidad de que un estado inicial evolucione en un estado final. Sin embargo al trabajar con la matriz S, y la formula LSZ vemos que QFT no se puede resolver de manera exacta, por lo tanto se recurre a teoría de perturbaciones, para lo cual necesitamos de las reglas de Feynman.

3.1.1. Reglas de Feynman para QED

Para referirnos a un diagrama de Feynman conectado es necesario establecer las siguientes definiciones.

- **Línea externa**: es aquella que une causalmente un punto externo con un punto interno.
- **Línea interna**: es aquella que une casualmente dos puntos internos.
- **Vértice**: Es un punto donde convergen tres o más líneas, nos describen el tipo de interacción que participa en el proceso.

Las reglas de Feynman nos dicen como construir la amplitud invariante $\mathcal{M}$ dado el diagrama correspondiente. En QED las reglas han de ser:

1. Para cada vértice escribimos $-ieQ\gamma^{\mu}$, donde Q es el signo de la carga de la partícula:

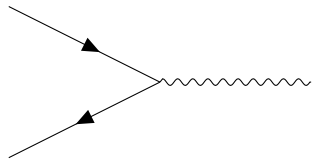

Figura 3.1: `QED Vértice.`

2. Para cada línea interna que contenga dos vértices, se escribe el propagador correspondiente:

a) Para el electrón es de la siguiente forma $-\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}$:

Figura 3.2: `Propagador del fermión.`

b) Para el fotón es de la forma $-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$:

Figura 3.3: `Propagador del fotón`

3. Para cada línea externa asociamos los siguientes factores:

   a) Un electrón incidiendo sobre un vértice, escribimos el espinor $u(p_i, s_i)$

Figura 3.4: `Estado inicial de la partícula.`

   b) Un electrón partiendo de un vértice, escribimos el espinor $\hat{u}(p_f, s_f)$

Figura 3.5: `Estado final de la partícula`

c) Un positrón incidiendo sobre un vértice, escribimos el espinor $\nu(p_i, s_i)$

Figura 3.6: `Estado final de la antipartícula.`

d) Un positrón partiendo de un vértice, escribimos el espinor $\hat{\nu}(p_f, s_f)$

Figura 3.7: `Estado inicial de la antipartícula.`

e) Un fotón incidiendo sobre un vértice, escribimos su vector de polarización $\epsilon_\mu(k_i, \alpha_i)$

Figura 3.8: `Estado inicial del fotón.`

f) Un fotón partiendo de un vértice, escribimos el vector de polarización $\epsilon^*_\nu(k_f, \alpha_f)$

Figura 3.9: `Estado final del fotón.`

3.1.2. Potencial de Coulomb a partir de la teoría clásica de campos

Siguiendo el orden en que comenzamos a trabajar con los potenciales vectoriales durante los cursos escolares pasamos ahora a discutir el potencial de Coulomb.

Comencemos con una carga en el origen. Esto se puede representar con una corriente externa, con densidad de carga $\rho(x)$:

$$J_\mu(x) : \begin{cases} J_0(x) = \rho(x) = e\delta^3(x), \\ J_i(x) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

El operador D'Alambertiano está definido como:

$$\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \partial^0\partial_0 + \partial^i\partial_i = \partial_0^2 - \partial_i\partial_i = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \nabla^2. \tag{3.2}$$

En QFT los potenciales van a estar asociados con los fotones. Para describirlo en forma covariante empleamos el cuadripotencial: $A^\mu = (A^0, \vec{A})$, donde: $A^0 = \phi$

El lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu. \tag{3.3}$$

siendo $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, el tensor de intensidad de campo electromagnético. Agregamos las corrientes al lagrangiano libre mediante la suma del término $-A_\mu J^\mu$.

Una propiedad importante del lagrangiano es que es invariante bajo la transformación de norma:

$$\phi(x) \to e^{i\alpha}\phi(x), \qquad A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha(x) \tag{3.4}$$

Para calcular las ecuaciones de movimiento, primero expandimos el lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} =& -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - A_\mu J^\mu \\ =& -\frac{1}{4}[\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu + \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu] - A_\mu J_\mu \\ =& -\frac{1}{2}[\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu] - J^\mu A_\mu \\ =& \frac{1}{2}[\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu] - J^\mu A_\mu. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = 0. \tag{3.6}$$

Haciendo primero

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}(-J^\nu A_\nu) = -J^\nu \delta^\mu_\nu = -J^\mu. \tag{3.7}$$

Por otra parte

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu)} \left(\frac{1}{2}[\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu] \right) = -F^{\mu\nu}. \tag{3.8}$$

Lo que nos da

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -J^\mu - \partial_\nu(-F^{\mu\nu}) = 0 \tag{3.9}$$

$$\Rightarrow \partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu. \tag{3.10}$$

Estas son solo las ecuaciones de Maxwell en presencia de una fuente.
Trabajando con la ecuación 3.10.

$$J^\nu = \partial^\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial^\mu A^\mu). \tag{3.11}$$

Ahora bajo la simetría de norma y la condición de Lorentz $\partial^\mu A^\mu = 0$:

$$\Box A_\nu(x) = J_\nu(x). \tag{3.12}$$

lo cual tiene como solución formal

$$A^\nu(x) = \frac{1}{\Box} J^\nu(x). \tag{3.13}$$

$\frac{1}{\Box}$ es el inverso de $\Box$. Lo anterior quiere decir que el campo A^ν es determinado por la fuente J^ν después de que se propague con el propagador.

Para la fuente particular que nos interesa, la carga puntual en el origen, las ecuaciones de movimiento son

$$A_i = 0. \tag{3.14}$$

$$A_0(x) = \frac{e}{\Box} \delta^3(x). \tag{3.15}$$

A continuación tomamos la transformada de Fourier.

Ya que $\delta^3(\vec{x})$ es independiente del tiempo, nuestro potencial escalar se simplifica a

$$A_0(x) = \frac{e}{\Box}\delta^3(\vec{x}) = -\frac{e}{\triangle}\delta^3(\vec{x}). \tag{3.16}$$

Podemos resolver esta ecuación es el espacio de Fourier:

$$\begin{aligned} A_0(x) = &\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e}{\vec{k}^2}e^{i\vec{k}\vec{x}} = \frac{e}{(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{k^2}e^{ikr\cos\theta} \\ =&\frac{e}{(e\pi)^2}\int_0^\infty dk \frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{ikr} = \frac{e}{8\pi^2}\frac{1}{ir}\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{k}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Para poder simplificar la expresión, tomamos un cambio infinitesimal en el denominador, con lo cual obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{k} = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{k+i\delta}\right]. \tag{3.18}$$

Si $\delta > 0$, entonces el polo en $k = -i\delta$ se encuentra en el eje imaginario negativo. Para e^{ikr} debemos cerrar el contorno hacia arriba para obtener un decaimiento exponencial en k. Esto pierde el polo, así que este término da cero. Para e^{-ikr} cerramos el contorno hacia abajo y obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{k+i\delta} = -(2\pi i)(-e^{-\delta r}) = 2\pi i e^{-\delta r}. \tag{3.19}$$

Por lo tanto,

$$A_0(x) = \frac{e}{4\pi}\frac{1}{r}. \tag{3.20}$$

Con lo cual hemos logrado deducir la expresión deseada a partir del cuadripotencial y el tensor del campo electromagnético[4].

3.1.3. Potencial de Coulomb con reglas de Feynman

Como una simple aplicación de las reglas de Feynman podemos construir la amplitud del proceso para nuestras particulas fermionicas involucradas, tal como lo muestra el diagrama de Feynman siguiente[5]. La contribución de primer orden dada por las reglas de Feynman enumeradas al principio del capitulo:

$$i\mathcal{M} = (-ie)^2\bar{u}(p')i\gamma^\mu u(p)\frac{-g_{\mu\nu}}{(p'-p)^2}\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k). \tag{3.21}$$

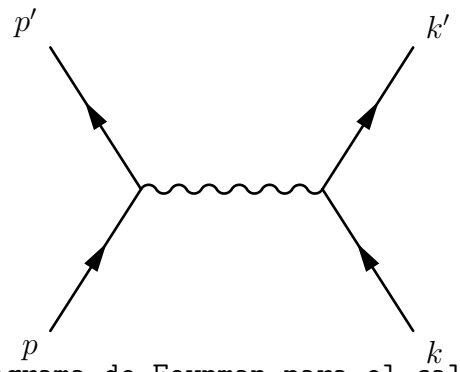

Figura 3.10: `Diagrama de Feynman para el calculo de la amplitud y obtener el potencial de Coulomb.`

Para evaluar la amplitud en el límite no relativista, mantenemos los términos solo en el orden más bajo en el tri-momento $|p| \ll m$ y energía $p^0 \approx m$.

$$p = (m, p), \qquad \kappa = (m, k), \qquad p' = (m, p'), \qquad \kappa' = (m, k). \tag{3.22}$$

Usando estas expresiones, tenemos

$$(p' - p)^2 = -|p' - p|^2 + O(p^4), \tag{3.23}$$

$$u^s(p) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Donde ξ^s es un spinor constante de dos componentes normalizado, esto es $\xi^{s'\dagger}\xi^s = \delta^{ss'}$.

Para simplificar más la expresión (3.27) hemos usado la propiedad siguiente los espinores:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{s'}(p')\gamma^0 u^{s'}(p) &= u^\dagger(p')u(p) = 2m\xi^{s'\dagger}\xi^s = 2m\delta_{ss'} \\ \bar{u}^{r'}(k')\gamma^0 u^{r'}(k) &= u^\dagger(p')u(p) \approx 2m\xi^{r'\dagger}\xi^r == 2m\delta_{rr'} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Es posible verificar que los términos espaciales, $\bar{u}(p')\gamma^i u(p)$, desaparecen si $p = p' = 0$; por lo tanto, pueden despreciarse, así solo conservamos el termino $\bar{u}(p')\gamma^0 u(p)$.

$$\bar{u}(p')\gamma^i u(p) = m(\xi^\dagger, \xi^\dagger) \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 0. \tag{3.26}$$

Es posible observar que la amplitud esta dominada por los términos $\mu = 0$.

Así obtenemos lo siguiente:

$$i\mathcal{M} \approx \frac{+ie^2}{-|p' - p|^2}(2m\xi'^\dagger\xi)_p(2m\xi'^\dagger\xi)_k \cdot g_{00} = \frac{ie^2}{|p' - p|^2}(2m\xi'^\dagger\xi)_p(2m\xi'^\dagger\xi)_k. \tag{3.27}$$

Donde $g_{00} = -1$.

Para continuar con el calculo de nuestro potencial debemos comparar la expresión previa con la aproximación de Born para la amplitud de dispersión en mecánica cuántica no relativista, escrito en términos de la función potencial $V(x)$:

$$\langle p'| iT |p\rangle = -i\tilde{V}(q)(2\pi)\delta(E_{p'} - E_p), \qquad (q = p' - p). \tag{3.28}$$

En términos de la amplitud de dispersión normalizada no relativista:

$$\tilde{V} = \frac{1}{2E_{p'}}\frac{1}{2E_p}\mathcal{M} \tag{3.29}$$

con $E_{p'} = E_p \approx m$.

Las deltas adicionales $\delta^{(3)}(p' - p)$ se van cuando integramos sobre el momento.

Tomando en cuenta todas las consideraciones mencionadas llegamos a que la interacción de Coulomb a de tener la forma:

$$\tilde{V}(q) = \frac{g^2}{|q|^2} \tag{3.30}$$

Aplicando la trasformada inversa de Fourier para hallar $V(x)$:

$$\begin{aligned} V(x) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{g^2}{|q|^2}e^{iq\cdot x} \\ &= \frac{g^2}{4\pi^2}\int_0^\infty dq q^2 \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr}\frac{1}{q^2} \\ &= \frac{g^2}{4\pi^2 ir}\int_\infty^\infty dq \frac{qe^{iqr}}{q^2}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Evaluando la integral en el plano complejo, tomando el polo en $q = im_\phi$, además de sustituir $g = e$ y con $m = 0$. Obtenemos:

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi r} = \frac{\alpha}{r}. \tag{3.32}$$

donde $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$ es la constante de estructura fina. La forma de esta expresión nos dice que tenemos un potencial de Coulomb repulsivo.

Sin embargo sabemos que la principal característica del potencial es su naturaleza repulsivo y atractivo, para hallar este ultimo veamos la dispersión partícula-antipartícula.

El diagrama para este proceso a de ser:

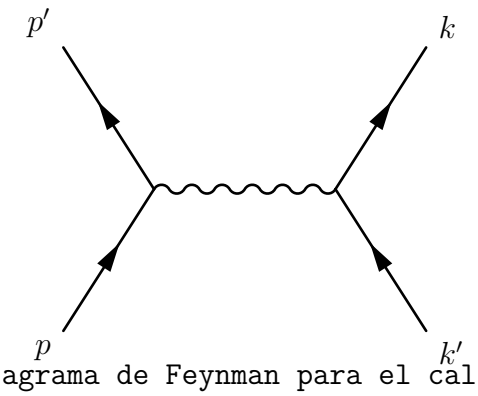

Figura 3.11: `Diagrama de Feynman para el calculo de la amplitud y obtener el potencial de Coulomb, dispersión partícula-antipartícula`

Siguiendo las reglas de Feynman obtenemos la expresión para la amplitud:

$$i\mathcal{M} = (-1)\frac{-(ie)^2 i g_{\mu\nu}}{-|p'-p|}(2m\xi'^{\dagger}\xi)_p(2m\xi'^{\dagger}\xi)_k. \tag{3.33}$$

En nuestro limite no-relativista, tenemos:

$$\bar{\nu}(k)\gamma^0\nu(k') = \nu^{\dagger}(k)\nu(k') = -2m\xi^{\dagger}\xi' \tag{3.34}$$

Para resolver y llegar al resultado deseado seguimos el proceso ya conocido, sin embargo el factor extra -1 nos da como resultado un potencial atractivo.

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi r} = -\frac{\alpha}{r}. \tag{3.35}$$

Hemos verificado en la Teoría Cuántica de Campos que al intercambiar una partícula vectorial, unas cargas se atraen mientras otras se repelen.

3.2. Potencial de Yukawa - mediado por partículas escalares

Como pudimos apreciar en el desarrollo del potencial de Coulomb este tiene una naturaleza repulsiva y atractiva correspondiente a lo observado en las interacciones electromagnéticas a las que esta asociado, bajo esta premisa nos preguntamos, ¿cuál es la naturaleza del potencial de Yukawa?. Este potencial fue desarrollado por Yukawa en la década de 1930 con el objetivo de explicar las interacciones a escalas del núcleo atómico.

Antes de continuar con la discusión de QED, es conveniente dar un paso atrás de la abstracción hacia la física concreta y considerar una aplicación simple de estas reglas: la dispersión de fermiones distinguibles, en el límite no relativista. Comparando la amplitud de este proceso con la fórmula de aproximación de Born de la mecánica cuántica no relativista, podemos determinar el potencial $V(r)$ creado por la interacción de Yukawa.

Los dos diagramas que conforman el proceso que nos interesa analizar son:

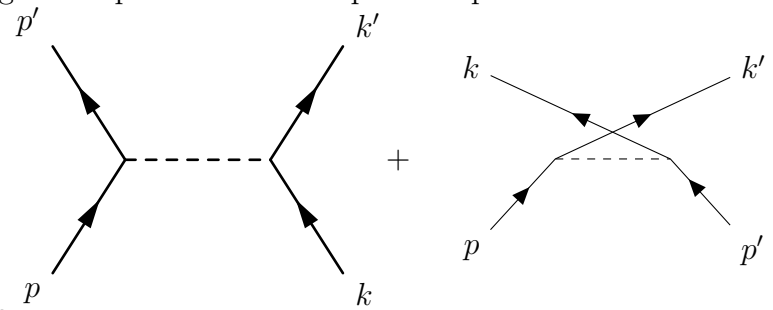

Figura 3.12: `Diagrama de Feynman para el calculo de la amplitud y obtener el potencial de Yukawa.`

Recordemos que denotamos las particulas escalares mediante lineas punteadas y a los fermiones con lineas continuas. La correspondiente amplitud se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} =&(-ie)^2 \left(\bar{u}(p')u(p)\frac{i}{(p'-p)^2-m_\phi^2}\bar{u}(k')u(k) \right. \\ &\left. -\bar{u}(p')u(k)\frac{i}{(p'-k)^2-m_\phi^2}\bar{u}(k')u(p) \right). \end{aligned} \tag{3.36}$$

El signo negativo entre las expresiones de los diagramas es un reflejo de la estadística de Fermi.

Si las dos partículas que interactúan son distinguibles, sólo contribuye el primer diagrama:

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p')u(p)\frac{-ig^2}{(p'-p)^2-m_\phi^2}\bar{u}(k')u(k). \tag{3.37}$$

Los productos espinoriales en (3.39) son

$$\bar{u}^{s'}(p')u^s(p) = 2m\xi^{s'\dagger}\xi^s = 2m\delta^{ss'}; \tag{3.38}$$

$$\bar{u}^{r'}(\kappa')u^r(\kappa) = 2m\xi^{r'\dagger}\xi^r = 2m\delta^{rr'}. \tag{3.39}$$

Entonces, nuestra primera conclusión física es que el espín de cada partícula se conserva por separado en esta interacción de dispersión no relativista, un resultado agradable a nuestra descripción clásica.

Tomando las mismas consideraciones para los espinores que mencionamos en la amplitud para Coulomb tendremos la ecuación:

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p')u(p)\frac{-ig^2}{|p'-p|^2 - m_\phi^2}2m\delta^{ss'}2m\delta^{rr'}. \tag{3.40}$$

Comparando con la aproximación de Born a la amplitud de dispersión en la mecánica cuántica no relativista, escrita en términos de la función potencial $V(x)$, para la interacción de Yukawa tendremos:

$$\tilde{V}(q) = \frac{-g^2}{|q|^2 + m_\phi^2}. \tag{3.41}$$

Trabajando la función inversa de Fourier:

$$\begin{aligned} V(x) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{-g^2}{|q|^2+m_\phi^2}e^{iq\cdot x} \\ &= \frac{-g^2}{4\pi^2}\int_0^\infty dq q^2 \frac{e^{iqr}-e^{-iqr}}{iqr}\frac{1}{q^2+m_\phi^2} \\ &= \frac{-g^2}{4\pi^2 ir}\int_{-\infty}^\infty dq \frac{qe^{iqr}}{q^2+m_\phi^2}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

En el paso anterior utilizamos la siguiente igualdad:

$$\int_{-\infty}^\infty dq \frac{qe^{iqr}}{q^2+m_\phi^2} = -i\pi e^{m_\phi r}. \tag{3.43}$$

El contorno de esta integral se puede cerrar arriba en el plano complejo, y tomamos $q = +im_\phi$. Así encontramos:

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{r}e^{-m_\phi r}. \tag{3.44}$$

Resultando en un "potencial de Yukawa" atractivo, con rango $\frac{1}{m_\phi} = \frac{\hbar}{m_\phi c}$. Yukawa utilizó el potencial anterior como la base de su teoría de la fuerza fuerte. Uno asume

que existe una partícula que es responsable para mantener juntos el protón y el neutrón en el núcleo atómico . A partir del rango de la fuerza (aproximadamente 1 fm) fue posible predecir la masa (aproximadamente 200 MeV) del bosón requerido, el pión. El pión fue descubierto con una masa de $m_\pi \approx 140 MeV$[7].

Como hicimos para el caso de Coulomb merece la pena preguntarse, ¿qué pasa si tenemos involucradas antipartículas?. El punto de partida a de ser el diagrama correspondiente al proceso, dado por:

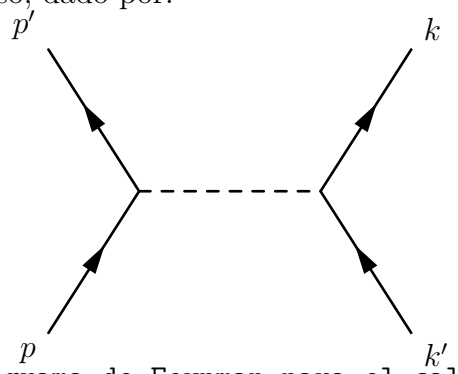

Figura 3.13: `Diagrama de Feynman para el calculo de la amplitud y obtener el potencial de Yukawa, partícula-antipartícula`

La amplitud correspondiente es:

$$i\mathcal{M} = (-1)\bar{u}(p')u(p)\frac{-ig^2}{(p'-p)^2 - m_\phi^2}\bar{\nu}(k')\nu(k). \tag{3.45}$$

Evaluando no relativisticamente:

$$\bar{\nu}^s(k)\bar{\nu}^{s'}(k') \approx m(\xi^{s\dagger}, -\xi^{s\dagger}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{s'} \\ -\xi^{s'} \end{pmatrix} = -2m\delta^{ss'}. \tag{3.46}$$

Lo que cancela el signo negativo extra, siguiendo los pasos ya conocidos obtenemos el potencial entre fermiones y anti-fermiones, lo que nos permite concluir que el potencial de Yukawa es universalmente atractivo.

Como un preámbulo a los capítulos siguientes vale la pena notar que la repulsión entre la dispersión fermión-fermión surge directamente del factor extra $-g_{00} = -1$ en el propagador. Un boson tensor, como el gravitón, tendrá un propagador de la siguiente forma:

Figura 3.14: `Propagador del gravitón.`

$$= \frac{1}{2}\Big(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\Big)\left(\frac{i}{q^2 - i\epsilon}\right). \tag{3.47}$$

En colisiones no relativistas da un factor $(-g_{00})^2 = 1$, esto resulta en un potencial universalmente atractivo. Con este resultado podemos ver complacientemente que la teoría cuántica de campos reproduce las características de las fuerzas nuclear fuerte, eléctrica y gravitacional.

Podemos resumir en la siguiente tabla los resultados reunidos en este capitulo.

Partícula intercambiada	ff y $\bar{f}\bar{f}$	$f\bar{f}$
Escalar (Yukawa)	atractivo	atractivo
Vector (eléctrico)	repulsivo	atractivo
Tensor (gravedad)	atractivo	atractivo

Capítulo 4

Gravedad Cuántica perturbativa como una teoría efectiva

El sentido de realizar este capitulo es dar una idea del tratamiento que se le da a la teoría de la relatividad general como si esta fuese una teoría efectiva, para lograr esta comprensión necesitamos entender que es este tipo de teorías y su utilidad; una vez hecho lo anterior se ira desglosando y desarrollando los conceptos y herramientas necesarias para poder llegar al calculo del Potencial Gravitacional no-relativista a través de los principios de la Teoría Cuántica de Campos.

4.1. Teoría de Campo Efectiva

En la actualidad nuestro conocimiento sobre la naturaleza del universo tiene sustento en los dos grandes pilares de la física moderna, la mecánica cuantica (MC) y la relatividad, ambos marcos ofrecen una descripción increíble de los distintos fenómenos que podemos observar y registrar (incluso especular sobre aquellos que aun se investigan) sin embargo cada una de estas teorías operan en distintas escalas y niveles de energía, lo cual hace que el tratamiento aplicado a los fenómenos físicos sea una aproximación, creemos que para lograr una comprensión mejor, e incluso total, necesitamos de una nueva teoría que "unifique" nuestras teorías. Han habido progresos en el camino de esta unificación, como ya dijimos QFT opera en el dominio de la cuántica y la relatividad especial, sin embargo la relatividad general (RG) es mas reacia al tratamiento cuántico, sin embargo es un tema que suscita varias discusiones, muchas de las cuales giran en torno a la escala de Plank y a las nuevas interacciones y nuevos grados de libertad que puedan tener lugar a ese nivel.

Con el objetivo de hacer un acercamiento al marco conjunto de MC y RG

tomaremos una postura conservativa, usando ambas teorías a energías ordinarias, donde ambas sean validas. El objetivo es argumentar que RG es un teoría cuantica a energías cotidianas, y buscamos una clase de "correcciones cuánticas" que son los efectos cuánticos dominantes a largas distancias. El obstáculo es que las correcciones incluyen integración sobre todas las escalas de energía, incluyendo las extremadamente altas, la solución es el uso de teoría de campo efectiva. Una teoría de campo efectiva o solo teoría efectiva, es una técnica que permite separar los efectos de altas energías de aquellos a bajas energías, incluye los grados de libertad apropiados para describir un fenómeno físico mientras que ignora la subestructura y los grados de libertad a otras escalas. Típicamente, las teorías de campo efectivo funcionan mejor cuando existe una gran separación entre la escala de longitud de interés y la escala de longitud de la dinámica fundamental. Las teorías de campo efectivo han resultado ser útiles en la física de partículas, la mecánica estadística, la física de la materia condensada, la relatividad general y la hidrodinámica. Estas teorías simplifican los cálculos y permiten tratar los efectos de disipación y radiación.

En el marco de la gravedad como ya mencionamos tenemos un problema, no conocemos la correcta explicación a a altas energías, sin embargo como una consecuencia del principio de incertidumbre, sabemos que al trabajar a bajas energías, los grados de libertad de altas energías no tienen mayor efecto, estos pueden ser integrados fuera de la teoría, dejando un lagrangiano local, aunque este lagrangiano en general contenga interacciones no-renormalizables. En contraste los grados de libertad a bajas energías se propagan grandes distancias y no pueden ser sumados por una interacción local, deben de ser incluidos explícitamente.

Para una teoría a altas energías desconocida, es necesario escribir el Lagrangiano general que contenga las interacciones a bajas energías, y que sea consistente con las simetrías y la estructura del vacío de la teoría. En el caso de la interacción de la gravedad con un campo masivo de materia:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{RG}} + \mathcal{L}_{\mathrm{materia}} \tag{4.1}$$

El segundo fundamento clave en una teoría de campo efectiva es la expansión de la energía, donde los términos del Lagrangiano efectivo se ordenan en potencias de la escala de baja energía sobre la escala de alta energía.

En general, las técnicas de la teoría efectiva organizarán cualquier elemento de matriz dado en los efectos calculables de baja energía y los efectos desconocidos de la teoría de altas energías, comúnmente los términos no analíticos son las principales contribuciones a gran distancia. Esta división no se ha aplicado comúnmente a las interacciones gravitatorias y gran parte de la sabiduría estándar de la relatividad general debe examinarse a través de los ojos de la teoría del campo efectivo. Espe-

ramos que los efectos de las correcciones cuánticas sean pequeños en un fenómeno macroscópico, muchos de sus efectos no son obsérvales en los experimentos de hoy.

4.2. Repaso de Relatividad General

La relatividad general es una teoría construida sobre el principio de la covarianza general. Este principio establece que la física es insensible a la elección del sistema de coordenadas, es decir, las formas de las leyes físicas son invariantes bajo transformaciones arbitrarias de coordenadas.
Recordemos un par de nociones las cuales serán de gran importancia durante la discusión de este capitulo. En la teoría de Einsten, la gravedad cambia la geometría del continuo espacio-tiempo continuo. Esto significa que los objetos, cuando no actúan sobre ellos fuerzas externas, ya no se mueven en línea recta. Para restablecer la Primera Ley de Newton, esta desviación de las líneas rectas puede reinterpretarse como proveniente de una nueva fuerza: ¡la fuerza de la gravedad! [8].

Hemos de comenzar definiendo la convención de la métrica que hemos de usar en donde el espacio plano es dado por[9]:

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1). \tag{4.2}$$

Usando que $g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, se puede obtener sencillamente el conocido resultado siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta^{\mu}_{\rho}. \tag{4.3}$$

esto es

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta^{\rho}_{\mu}. \tag{4.4}$$

El tensor de curvatura de Riemann-Christoffel es definido como[10]

$$R^{\sigma}_{\rho\mu\nu} = \partial_{\mu}(\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}) + \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \partial_{\nu}(\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}) - \Gamma_{\nu\lambda}\rho\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \tag{4.5}$$

Si deseamos contraer el tensor de Riemann $R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}$ podemos sumar sobre uno de los índices covariantes con uno de los contravariantes. En principio:

$$R^{\sigma}_{\sigma\mu\nu} \neq R^{\sigma}_{\rho\sigma\nu} \neq R^{\sigma}_{\rho\mu\sigma}. \tag{4.6}$$

La simetría de índices tiene algunas implicaciones para $R^{\sigma}_{\rho\mu\nu}$. Si estamos contrayendo sobre el primer índice $R^{\sigma}_{\sigma\mu\nu}$ podemos ver que $R^{\sigma}_{\sigma\mu\nu} = g^{\sigma\lambda}R_{\lambda\sigma\mu\nu} = -g^{\sigma\lambda}R_{\sigma\lambda\mu\nu} = -g^{\lambda\sigma}R_{\sigma\lambda\mu\nu} = -R^{\lambda}_{\lambda\mu\nu} = -R^{\sigma}_{\sigma\mu\nu}$. La unica manera en que esto puede ser cierto en general es si $R^{\sigma}_{\sigma\mu\nu} = 0$. Así que tenemos la opción de contraer sobre los índices 3 ó 4. Pero $R_{\sigma\rho\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\nu\mu} \Rightarrow R^{\sigma}_{\rho\sigma\nu} = -R^{\sigma}_{\rho\nu\sigma}$. Por tanto solo hay una contracción distinta de cero del tensor de Riemann que llamamos el tensor de Ricci: $R_{\sigma\rho} = R^{\mu}_{\sigma\rho\mu}$, el cual se define como sigue:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}. \tag{4.7}$$

El símbolo de Christoffel esta definido como:

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}). \tag{4.8}$$

Las fluctuaciones cuánticas en el campo gravitacional pueden expandirse sobre una métrica de fondo suave, esto es:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}. \tag{4.9}$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + ... \tag{4.10}$$

El desarrollo de las Ecuaciones (4.3) y (4.8) se encuentran en el Apéndice A y B Como ultimo término a analizar definamos

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} = \sqrt{\det(-g)} &= \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln g\right) \\
&= \sqrt{g} exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln(\delta^{\alpha}_{\nu} + h^{\alpha}_{\nu})\right) \\
&= \sqrt{g}\exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(h^{\alpha}_{\nu} - \frac{1}{2}h^{\alpha}_{\beta}h^{\beta}_{\alpha}\right)\right) \\
&= \sqrt{g}\exp\left(\frac{1}{2}h^{\alpha}_{\alpha} - \frac{1}{4}h^{\alpha}_{\beta}h^{\alpha}_{\beta}\right) \\
\sqrt{-g} &= \sqrt{g}\left(1 + \frac{1}{2}h^{\alpha}_{\alpha} - \frac{1}{4}h^{\alpha}_{\beta}h^{\beta}_{\alpha} + \frac{1}{8}h^{\alpha 2}_{\alpha}\right).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

4.2.1. Acción de Einstein-Hilbert

Partamos de la acción de Einstein-Hilbert[11]:

$$S_{\text{EH}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{2}{k^2}R\right]. \tag{4.12}$$

con $k^2 = 32\pi\text{G}$ y $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$

Los campos pesados de materia sin espín interactúan con el campo gravitacional por la acción:

$$S_{\text{materia}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right]. \tag{4.13}$$

Haciendo variar ambas acciones

$$\delta(S_{\text{EH}}) = \frac{1}{16\pi G}\left[\int d^4x\sqrt{-g}R_{\sigma\rho}\delta(g^{\sigma\rho}) + \int d^4x\delta(\sqrt{-g})R_{\sigma\rho}g^{\sigma\rho} + \int d^4x\sqrt{-g}\delta(R_{\sigma\rho})g^{\sigma\rho}\right]. \tag{4.14}$$

donde:

$$\begin{aligned}
&\int d^4x\sqrt{-g}R_{\sigma\rho}\delta g^{\sigma\rho} = \int d^4x\sqrt{-g}R_{\sigma\rho}(-g^{\sigma\mu}\delta g_{\mu\nu}g^{\nu\rho}) = -\int d^4x\sqrt{-g}R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\\
&\int d^4x\delta\sqrt{-g}R_{\sigma\rho}g^{\sigma\rho} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu}\\
&\int d^4x\sqrt{-g}\delta R_{\sigma\rho}g^{\sigma\rho} = 0.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\delta(S_{\text{EH}}) = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)\delta(g_{\mu\nu}). \tag{4.16}$$

Variando S_{materia} podemos ver que de los dos términos a trabajar solo nos ha de interesar el primero

$$\begin{aligned}
\delta(S_{\text{materia}}) &= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu})\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}R^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\delta(g_{\mu\nu})\\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\delta(g_{\mu\nu}).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

La acción total viene dada por

$$\delta(S) = \delta(S_{\text{EH}})+\delta(S_{\text{materia}}) = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{16\pi G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) - \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\right]\delta(g_{\mu\nu}) = 0. \tag{4.18}$$

$$-\frac{1}{16\pi G}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)-\frac{1}{2}T^{\mu\nu}=0. \tag{4.19}$$

de lo anterior podemos concluir

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-8\pi \mathrm{G}T^{\mu\nu}. \tag{4.20}$$

Estas ecuaciones nos dicen inmediatamente que es la energía del cuerpo, no su masa, la que define la curvatura del espacio tiempo a su alrededor.

Ahora elegimos el espacio de Minkowski, el cual es apropiado para describir campos gravitatorios débiles. Para este caso el cambio infinitesimal de las coordenadas en $x^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ toma la forma de una transformación de norma.

$$h_{\mu\nu}\to h_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\partial_\mu\epsilon_\nu-\partial_\nu\epsilon_\mu. \tag{4.21}$$

Usando lo anterior obtenemos el tensor de Riemann[13]:

$$R^a_{bcd}=\frac{1}{2}\kappa\eta^{af}\left[\frac{\partial^2 h_{bd}}{\partial x^c\partial x^f}+\frac{\partial^2 h_{df}}{\partial x^c\partial x^b}-\frac{\partial^2 h_{bc}}{\partial x^d\partial x^f}-\frac{\partial^2 h_{cf}}{\partial x^d\partial x^b}\right]. \tag{4.22}$$

El tensor de Ricci puede ser encontrado usando $R_{ab}=R^c_{acb}$. Si definimos el operador Dalambertiano

$$\Box=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]=\eta^{ab}\partial_a\partial_b. \tag{4.23}$$

y $h=\eta^{cd}h_{cd}$

el tensor de Ricci puede ser escrito como:

$$R_{ab}=\frac{1}{2}\kappa\left(\Box h_{ab}-\frac{\partial^2 h^c_a}{\partial x^b\partial x^c}-\frac{\partial^2 h^c_b}{\partial x^a\partial x^c}+\frac{\partial^2 h}{\partial x^a\partial x^b}\right). \tag{4.24}$$

donde el escalar de Ricci es:

$$R=\left(\Box h-\frac{\partial^2 h^{cd}}{\partial x^c\partial x^d}\right)\kappa=(\Box h-\partial_\lambda\partial_\sigma h^{\lambda\sigma})\kappa. \tag{4.25}$$

Para lidiar con la invarianza propuesta se debe hacer una elección de norma y eligiendo una armónica ($g^{\mu\nu}T^\lambda_{\mu\nu}=0$) obtenemos:

$$0=\partial^\beta h_{\beta\alpha}-\frac{1}{2}\partial_\alpha h=\partial^\lambda h_{\lambda\alpha}-\frac{1}{2}\partial_\alpha h \tag{4.26}$$

$$\Rightarrow \partial^\lambda h_{\lambda\alpha}=\frac{1}{2}\partial_\alpha h. \tag{4.27}$$

donde la ecuación de Einstein linealizada es:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}\left[\Box\left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h\right) - \partial_\mu\left(\partial^\lambda h_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu h\right)\right.$$

$$\left. -\partial_\nu\left(\partial^\lambda h_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu h\right) + \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\left(\partial^\lambda h_{\lambda\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\alpha h\right)\right].$$

$$= -8\pi \mathrm{G} T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\kappa^2 T_{\mu\nu}. \tag{4.28}$$

la ultima igualdad esta dada por 4.28 y $\kappa^2 = 32\pi\mathrm{G}$.

Trabajando con el primer termino y la ultima igualdad de 4.20

$$\Box\left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h\right) = -\frac{1}{2}\kappa T_{\mu\nu}. \tag{4.29}$$

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\kappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Box\eta_{\mu\nu}h \tag{4.30}$$

$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right). \tag{4.31}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para obtener varias soluciones las cuales dependen de la forma de los términos del lado derecho. En regiones donde no hay materia, la ecuación se simplifica a $\Box h_{\mu\nu} = 0$, es decir la ecuación de onda[12].

4.2.2. Tensor de Energía-Momento

Regresando por un instante a la expresión $\delta(S_{\text{materia}})$ podemos definir el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$[14]

$$\delta(S_{\text{mat}}) = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta(g_{\mu\nu}) \tag{4.32}$$

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(S_{\text{mat}})}{\delta(g_{\mu\nu})}. \tag{4.33}$$

Usando esta expresión buscamos utilizar las interacciones gravedad-materia, es decir, una forma consistente de acoplar campos gravitatorios a fuentes externas.Las propiedades de transformación de los campos de materia se pueden escribir como:

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad \text{Escalar}$$

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(x)A^{\nu}(x) \quad \text{Vector.}$$

En el caso más simple, el campo escalar ϕ puede acoplarse a la gravedad vía:

$$S_{\text{mat}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{g^{\mu\nu}}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2\right). \tag{4.34}$$

esta acción puede expandirse, esto es:

$$S_{\text{mat}} = \int d^4x\sqrt{-g}\{\mathcal{L}_m^{(0)} + \mathcal{L}_m^{(1)} + \mathcal{L}_m^{(2)} + ...\}. \tag{4.35}$$

Donde

$$\sqrt{-g}\mathcal{L}_m^{(0)} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2. \tag{4.36}$$

Representa una expresión familiar para el Lagrangiano escalar en el espacio-tiempo plano.

Este lagrangiano puede ser usado para calcular el tensor de energía-momento para campos escalares, usando (4.33). Con lo cual obtenemos la expresión familiar:

$$T_{mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - m^2\phi^2). \tag{4.37}$$

A mayor orden en k el lagrangiano tendrá la siguiente forma:

$$\sqrt{-g}\mathcal{L}_m^{(1)} = -\frac{k}{2}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}, \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\mathcal{L}_m^{(1)} = &-\frac{k}{2}\,[\,\frac{1}{8}(h^2 - 2h_{\mu\nu}h^{\mu\nu})(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - m^2\phi^2)\\ &+\left(h^{\mu\alpha}h^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{2}hh^{\mu\nu}\right)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\Big].\end{aligned}$$

Estos lagrangianos juegan un papel fundamental en la obtención de las expresiones para el vértice del gravitón.

El tensor de energía momento se define como sigue $T^{\text{grav}}_{\mu\nu}$ es:

$$\begin{aligned}T^{grav}_{\mu\nu} = &-2h^{\lambda\kappa}(\partial_\mu\partial_\nu h_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda\partial_\kappa h_{\mu\nu} - \partial_\kappa(\partial_\nu h_{\mu\lambda} + \partial_\mu h_{\nu\lambda}))\\ &- 2\partial_\lambda h_{\sigma\nu}\partial^\lambda h^{\sigma}{}_{\mu} + 2\partial_\lambda h_{\sigma\nu}\partial^\sigma h^{\lambda}{}_{\mu} - \partial_\nu h_{\sigma\lambda}\partial_\mu h^{\sigma\lambda}\\ &- \eta_{\mu\nu}\left(\partial_\lambda h_{\sigma\xi}\partial^\sigma h^{\lambda\xi} - \frac{3}{2}\partial_\lambda h_{\sigma\xi}\partial^\lambda h^{\sigma\xi} - h^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta}\right) - h_{\mu\nu}\Box h.\end{aligned} \tag{4.39}$$

La comprensión de los fundamentos de QFT ha sido objeto de una intensa investigación durante más de un siglo. La QFT ha tenido bastante éxito para describir

las interacciones de las partículas elementales, es decir, las interacciones fuertes y electro débiles de los quarks y los leptones. Sin embargo, dicho marco incluye un tratamiento cuántico consistente de la gravedad. Se han realizado muchos intentos durante mucho tiempo para construir una teoría completa de la gravedad cuántica [Cuerdas o la Gravedad Cuántica de Lazos (Loop Quantum Gravity "LQG")], y se puede afirmar que se ha logrado cierto progreso, al menos a bajas energías. En particular, dentro del tratamiento perturbativo, la interacción gravitatoria se supone mediada por el gravitón, una partícula sin masa con espín-2, y el enfoque lagrangiano efectivo nos permite calcular el proceso gravitacional incluso a nivel de bucle cuántico, a pesar del hecho de que tal teoría no es renormalizable[15].

4.2.3. La gravedad como una teoría efectiva

Desde el punto de vista de la teoría efectiva de campos, no hay una razón para que el lagrangiano efectivo de la gravedad conserve la estructura clásica de la acción de Einstein-Hilbert, en cambio tres operadores adicionales deben ser incluidos para generalizar la expresión:

$$S_{\text{RG} \quad \text{efec}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\Lambda + \frac{2}{k^2}R + c_1R^2 + c_2R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + ...\right]. \tag{4.40}$$

El primer termino “Λ”, representa la constante cosmológica ($\lambda = -8\pi G_N\Lambda$), sus efectos como sabemos son importantes para la evolución del universo, sin embargo, debido a su pequeño valor es irrelevante para los experimentos. Los términos proporcionales a c_i, con valores $c_i < 10^{74}$ tendrán un efecto despreciable en cualquier experimento gravitacional.

Con lo anterior podemos trabajar de manera tranquila con la acción de Einstein-Hilbert clásica para los efectos prácticos de la relatividad general.

Sin embargo, si seguimos lo principios de TEC (EFT), no hay ningún motivo para despreciar los términos adicionales de 4.40. A bajas energías solo k^2 es importante, podemos esperar que se logren desarrollar experimentos, con la suficiente precisión para medir c_i. Si lográramos obtener la teoría completa de la gravedad podríamos predecir estos valores. Con nuestro incompleto conocimiento a bajas energías, debemos tratar estos términos como parámetros libres.

Es sabido que la información de una teoría puede ser obtenida a través del método de integral de caminos (path integral). Esta información de un teoría total de la gravedad se encontrara en una función generatriz. La gravedad como teoría efectiva de campos tendría la función generatriz:

$$W[J] = e^{Z[J]} = \int [d\phi][dh_{\mu\nu}] e^{iS_{efec}(\phi,\bar{g},h,J)}. \tag{4.41}$$

Ya que estamos solo interesados en pequeñas fluctuaciones y configuraciones de energía bajas para $h_{\mu\nu}$, no necesitamos preocuparnos de valores grandes de $h_{\mu\nu}$. Es posible utilizar cualquier esquema de regularización que no viole la covarianza general. Debido a que el acoplamiento de las fluctuaciones de baja energía es muy débil, la integral de camino tiene un buen comportamiento al hacer la expansión perturbativa.

El lagrangiano efectivo más general contendrá tanto términos gravitacionales como de materia:

$$S_{\text{efec}} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{efect}}. \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{efec}} &= \mathcal{L}_{\text{grav}} + \mathcal{L}_{\text{materia}} \\ \mathcal{L}_{\text{grav}} &= \mathcal{L}_{g0} + \mathcal{L}_{g2} + \mathcal{L}_{g4} + ... \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{m0} + \mathcal{L}_{m2} + ... \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{g0} &= \Lambda \\ \mathcal{L}_{g2} &= \frac{2}{k^2} R \\ \mathcal{L}_{g4} &= c_1 R^2 + c_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{4.44}$$

Los dos primeros términos en el lagrangiano general de la materia, para un campo masivo son:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m0} &= \frac{1}{2}[g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2] \\ \mathcal{L}_{m2} &= d_1 R^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + R(d_2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + d_3 m^2\phi^2). \end{aligned} \tag{4.45}$$

La teoría efectiva de campos gravitacional es una teoría cuántica completa y se requiere de diagramas de bucle para satisfacer principios generales, como la unitariedad. También se obtienen en el cálculo habitual de muchos diagramas de bucle las divergencias ultravioleta. Estos surgen en una región donde la teoría efectiva a bajas energías puede no ser confiable y, por lo tanto, las divergencias pueden no ser de gran importancia. Sin embargo, como cuestión técnica, deben abordarse sin influir en las predicciones de bajas energías, las divergencias pueden pueden ser absorbidas en valores renormalizados para los coeficientes desconocidos que aparecen en el Lagrangiano general. Además, se puede demostrar que para bucles que involucran términos de orden bajo en la expansión de energía, la renormalización involucra los coeficientes que aparecen en orden superior.[11].

Capítulo 5

Potencial de Newton

EL capitulo previo ofreció una perspectiva amplia de lo que implica tratar a la gravedad como una teoría efectiva, ahora es turno de aplicar todo lo que obtuvimos previamente para poder obtener el potencial de Newton tal cual lo conocemos clásicamente y las respectivas correcciones cuánticas, para comenzar debemos dar las reglas de Feynman que describen los procesos para nuestra hipotética partícula, el gravitón, con estas reglas construiremos las amplitudes a estudiar.

5.1. Gravedad Cuántica Perturbativa y Reglas de Feynman

La cuantización de la gravedad puede desarrollarse a través de dos métodos, el formalismo canónico y mediante "path integrals", a partir del segundo enfoque es que podemos obtener nuestras reglas de feynman para el graviton; el lagrangiano propuesto para trabajar tiene la forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{EH}} + \mathcal{L}_{\text{materia}} + \mathcal{L}_{\text{gf}} + \mathcal{L}_{\text{fantasma}}. \tag{5.1}$$

Se propone que la condición que fije la norma sea:

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = -G_\mu G^\mu \qquad\qquad G_\mu \equiv \partial^\lambda h_{\mu\lambda} - \frac{1}{2}\partial_\mu h^\lambda_\lambda = 0. \tag{5.2}$$

El término fantasma corresponde a:

$$\mathcal{L}_{\text{fantasma}} = -c^\mu \left[\frac{\delta G_\mu}{\delta \epsilon^\nu}\right] c^\nu. \tag{5.3}$$

Con estos términos es posible construir la acción de tal forma que la extracción del propagador del gravitón se vuelve posible:

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x h_{\alpha\beta}(x) P^{\alpha\beta,\mu\nu}\Box h_{\mu\nu}(x) + S_{\text{fantasma}}. \tag{5.4}$$

El propagador del gravitón toma la forma[16]:

$$iD^{\alpha\beta,\mu\nu} = \frac{iP^{\mu\nu,\alpha\beta}}{p^2 + i\epsilon}. \tag{5.5}$$

con

$$P^{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}]. \tag{5.6}$$

Usando el lagrangiano siguiente:

$$\mathcal{L}_m^{(2)} = -\frac{\kappa^2}{2}\left[\frac{1}{8}(h^2 - 2h_{\mu\nu}h^{\mu\nu})(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - m^2\phi) + \left(h^{\mu\alpha}h^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{2}hh_{\mu\nu}\right)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right]. \tag{5.7}$$

las reglas de Feynman para los vértices de interacción gravedad-materia pueden ser derivados. El vértice de interacción de un gravitón con un campo de materia es[17]:

$$V_{\mu\nu}(p_2, p_1, m) = -i\frac{\kappa}{2}\left[p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - \eta_{\mu\nu}(p_1\cdot p_2 - m^2)\right]. \tag{5.8}$$

El vértice de dos gravitones con un campo de materia tomara la forma:

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu,\alpha\beta}(p_2, p_1, m) = i\frac{\kappa^2}{2}\Big[&2I_{\mu\nu,\gamma\delta}I^{\delta}_{\lambda,\alpha\beta}\left(p_1^\gamma p_2^\lambda + p_1^\lambda p_2^\gamma\right) \\ &- (\eta_{\mu\nu}I_{\delta\lambda,\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta}I_{\delta\lambda,\mu\nu})p_1^\delta p_2^\lambda \\ &- P_{\mu\nu,\alpha\beta}(p_1\cdot p_2 - m^2)\Big]. \end{aligned} \tag{5.9}$$

La expresión para el vértice de tres gravitones con un campo de materia es:

$$
\begin{aligned}
V^{\mu\nu}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(k,q) = \frac{i\kappa}{2}\Bigg[& P_{\alpha\beta,\gamma\delta}\left[k^\mu k^\nu + (k-q)^\mu (k-q)^\nu + q^\mu q^\nu - \frac{3}{2}\eta^{\mu\nu} q^2\right] \\
& + 2 q_\nu q_\sigma Q^{\lambda\sigma,\mu\nu}_{\alpha\beta,\gamma\delta} + [q_\lambda q^\mu (\eta_{\alpha\beta} I^{\lambda\nu}{}_{\gamma\delta} + \eta_{\gamma\delta} I^{\lambda\nu}{}_{\alpha\beta}) \\
& + q_\lambda q^\nu (\eta_{\alpha\beta} I^{\lambda\mu}{}_{\gamma\delta} + \eta_{\gamma\delta} I^{\lambda\mu}{}_{\alpha\beta}) - q^2 (\eta_{\alpha\beta} I^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta} + \eta_{\gamma\delta} I^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}) \\
& - \eta^{\mu\nu} q^\lambda q^\sigma (\eta_{\alpha\beta} I_{\gamma\delta,\lambda\sigma} + \eta_{\gamma\delta} I_{\alpha\beta,\lambda\sigma})] \\
& + [2 q^\lambda (I^{\sigma\nu}{}_{\alpha\beta} I_{\gamma\delta,\lambda\sigma} (k-q)^\mu + I^{\alpha\beta}{}_{\sigma\mu} I_{\gamma\delta,\lambda\sigma} (k-q)^\nu \\
& - I^{\sigma\nu}{}_{\alpha\beta} I_{\gamma\delta,\lambda\sigma} k^\mu - I^{\sigma\mu}{}_{\alpha\beta} I_{\gamma\delta,\lambda\sigma} k^\nu) \\
& + q^2 (I^{\sigma\nu}{}_{\alpha\beta} I_{\gamma\delta,\sigma}{}^{\nu} + I_{\alpha\beta,\sigma}{}^{\nu} I^{\sigma\mu}{}_{\gamma\delta}) \\
& + \eta^{\mu\nu} q^\nu q_\sigma (I_{\alpha\beta,\lambda\rho} I^{\rho\sigma}{}_{\gamma\delta} + I_{\gamma\delta'\lambda\rho} I^{\rho\sigma}{}_{\gamma\delta})] \\
& + \Bigg\{ (k^2 + (k-q)^2) \left[I^{\sigma\mu}{}_{\alpha\beta} I_{\gamma\delta,\sigma}{}^{\nu} + I^{\sigma\nu}{}_{\alpha\beta} I_{\gamma\delta,\sigma}{}^{\mu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} P_{\alpha\beta,\gamma\delta} \right] \\
& - (k^2 \eta_{\gamma\delta} I^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} + (k-q)^2 \eta_{\alpha\beta} I^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta})] \Bigg\} .
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

donde definimos

$$
Q^{\lambda\sigma,\mu\nu}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = I^{\lambda\sigma}{}_{\alpha\beta} I^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta} + I^{\lambda\sigma}{}_{\gamma\delta} I^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} - I^{\lambda\mu}{}_{\alpha\beta} I^{\sigma\nu}{}_{\gamma\delta} - I^{\sigma\nu}{}_{\alpha\beta} I^{\lambda\mu}{}_{\gamma\delta}. \tag{5.11}
$$

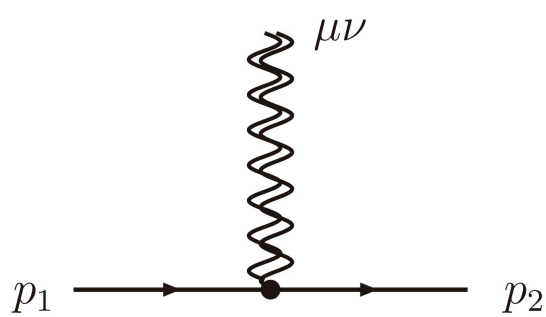

Figura 5.1: `Gravitón-Materia`

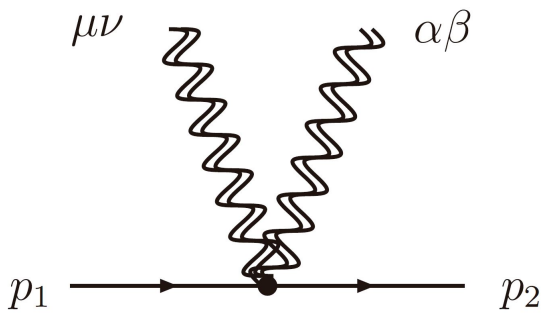

Figura 5.2: `Dos Gravitones-Materia`

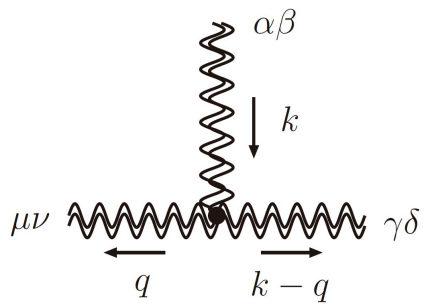

Figura 5.3: `Tres Gravitones-Materia`

5.2. El potencial gravitacional a nivel árbol

Es sabido que la interacción de dos objetos masivos en reposo es descrito a menor orden por el potencial de Newton[18]

$$V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{5.12}$$

este es modificado en relatividad general para efectos de orden mayor en $\frac{v^2}{c^2}$ y por términos no lineales en las ecuaciones de campo por $\frac{Gm}{rc^2}$. Las correcciones generales toman la forma:

$$V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\left[1 + a\frac{G(m_1+m_2)}{rc^2} + ...\right]. \tag{5.13}$$

A cierto nivel habrá correcciones cuánticas, nos podemos dar una idea la forma que tendrá. Dado que se originan de los diagramas de "loop" serán $k^2 \sim$ G y deben ser lineales en $\hbar$. Otro parámetro a considerar es "r'', dando la combinación

$$\frac{G\hbar}{r^2c^3}. \tag{5.14}$$

La modificación al potencial sera entonces de la forma:

$$V(r) = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\left[1 + a\frac{G(m_1+m_2)}{rc^2} + b\frac{G\hbar}{r^2c^3}\right]. \tag{5.15}$$

La meta es poder calcular el termino "b".

El potencial Newtoniano puede ser encontrado en el limite no relativista del intercambio del gravitón.

Donde nuestra convención de normalización es:

$$\langle p'|p\rangle = 2E(3\pi)^3\delta^3(p-p'). \tag{5.16}$$

Usaremos el enfoque más simple para calcular el potencial en el espacio de coordenadas. En este enfoque se estudia el elemento de matriz para la dispersión de dos masas de prueba. En el límite no relativista, este elemento de la matriz, después de un cambio adecuado de normalización, corresponde a la amplitud de transición de la mecánica cuántica[20]. La aproximación de Born nos dice que el potencial del espacio de coordenadas se puede obtener mediante una transformada de Fourier simple

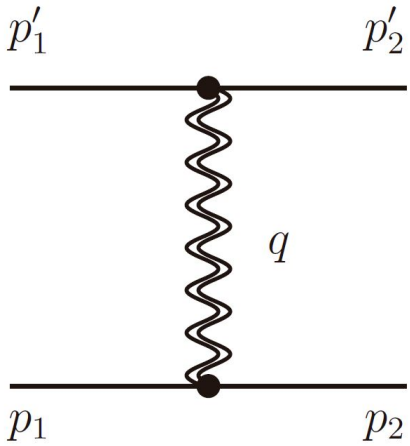

Figura 5.4: `Diagrama para el calculo del potencial de Newton.`

La amplitud de dispersión a nivel de árbol se puede obtener de la figura 4.4 utilizando el vértice de la ecuación. (9.50) y el propagador de la ecuación. (4.48)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{12} &= V^{(1)}_{\mu\nu}(q) D^{\mu\nu,\alpha\beta}(q) V^{(2)}_{\alpha\beta}(-q) \\
&= \left(-i\frac{\kappa}{2}\left[p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - \eta_{\mu\nu}(p_1\cdot p_2 - m_1^2)\right]\right) \\
&\left(\frac{iP^{\mu\nu,\alpha\beta}}{p^2+i\epsilon}\right)\left(-i\frac{\kappa}{2}\left[p_{1\alpha}p_{2\beta} + p_{1\beta}p_{2\alpha} - \eta_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2 - m_2^2)\right]\right).
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{k^2}{4}[p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - \eta_{\mu\nu}(p_1\cdot p_2 - m_1^2)]\left(\frac{iP^{\mu\nu,\alpha\beta}}{p^2+i\epsilon}\right) \\
&[p_{1\alpha}p_{2\beta} + p_{1\beta}p_{2\alpha} - \eta_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2 - m_2^2)] \\
=&-\frac{k^2}{4q^2}\{[p_{1\mu}p_{3\nu} + p_{1\nu}p_{3\mu} - \eta_{\mu\nu}(p_3\cdot p_1) - m_1^2][\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}] \\
&[p_{2\alpha}p_{4\beta} + p_{2\beta}p_{4\alpha} - \eta_{\alpha\beta}(p_4\cdot p_2) - m_2^2]\} \\
=&-\frac{k^2}{4q^2}\left\{\frac{1}{2}[p_1^\alpha p_3^\beta + p_1^\beta p_3^\alpha - \eta^{\alpha\beta}(p_3\cdot p_1 - m_1^2) - \eta^{\beta\alpha}(p_3\cdot p_1 - m_1^2)\right. \\
&\left. + \delta_\mu{}^\mu \eta^{\alpha\beta}(p_3\cdot p_1 - m_1^2)]\,[p_{2\alpha}p_{4\beta} + p_{2\beta}p_{4\alpha} - \eta_{\alpha\beta}(p_4\cdot p_2) - m_2^2]\right\}.
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

tomando en cuenta $\delta_\mu{}^\mu = 4$ y $\eta^{\beta\alpha} = \eta^{\alpha\beta}$

$$
\begin{aligned}
&=-\frac{k^2}{4q^2}\left\{\frac{2}{2}[p_1^\alpha p_3^\beta + p_1^\beta p_3^\alpha - 4\eta^{\alpha\beta}(p_3\cdot p_1 - m_1^2) + 4\eta^{\alpha\beta}(p_3\cdot p_1 - m_1^2)]\right. \\
&\quad\left.[p_{2\alpha}p_{4\beta} + p_{2\beta}p_{4\alpha} - \eta_{\alpha\beta}(p_4\cdot p_2) - m_2^2]\ \right\} \\
&=-\frac{k^2}{4q^2}\left\{\ [p_1^\alpha p_3^\beta + p_1^\beta p_3^\alpha][p_{2\alpha}p_{4\beta} + p_{2\beta}p_{4\alpha} - \eta_{\alpha\beta}(p_4\cdot p_2 - m_2^2)]\right\}.
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

usando que $p_i^\alpha p_{j\alpha} = p_i\cdot p_j$

$$
\begin{aligned}
&=-\frac{k^2}{4q^2}\left\{\ p_1^\alpha p_{2\alpha}p_3^\beta p_{4\beta} + p_1^\alpha p_{4\alpha}p_3^\beta p_{2\beta} - p_{1\alpha}p_3^\alpha(p_4\cdot p_2 - m_2^2)\right. \\
&\quad\left. + p_1^\beta p_{4\beta}p_3^\alpha p_{2\alpha} + p_1^\beta p_{2\beta}p_3^\alpha p_{4\alpha} - p_{1\alpha}p_3^\alpha(p_4\cdot p_2 - m_2^2)\ \right\} \\
&=-\frac{k^2}{4q^2}\left\{\ 2(p_1\cdot p_2 p_3\cdot p_4 + p_1\cdot p_4 p_3\cdot p_2 - p_1\cdot p_3 p_2\cdot p_4)(p_4\cdot p_2 - m_2^2)\right\}.
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

Usando el marco de referencia del centro de masa con momentos entrantes $p_1 = -p_2$ y momento saliente $p_3 = -p_4$ de igual forma definiendo las siguientes variables

$$
q^2 = (p_1 - p_3^2) = (p_4 - p_2)^2 \to p_1\cdot p_3 = \frac{1}{2}(2m_1^2 - q^2). \tag{5.21}
$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \rightarrow p_1 \cdot p_2 = p_3 \cdot p_4 = \frac{1}{2}(s - m_1^2 - m_2^2). \tag{5.22}$$

y

$$p_1^2 = p_3^2 = m_1^2. \tag{5.23}$$

$$p_2^2 = p_4^2 = m_2^2. \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{k^2}{4q^2}\left\{ 2[p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_3 p_3 \cdot p_1 - p_1 \cdot p_3 (p_3 \cdot p_1 - m_2^2)]\right\} \\
&= -\frac{k^2}{4q^2}\left\{ 2\left[\frac{1}{4}\ \Big((s - m_1^2 - m_2^2)(s - m_1^2 - m_2^2) + (2m_1^2 - q^2)(2m_1^2 - q^2)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - (2m_1^2 - q^2)(2m_1^2 - q^2)\ \Big) + (2m_1^2 - q^2)\frac{m_2^2}{2}\ \right]\ \right\} \\
&= -\frac{k^2}{4q^2}\left\{ \frac{1}{2}(s - m_1^2 - m_2^2) + m_1^2 m_2^2 - q^2 m_2^2 \right\} \\
&= -\frac{k^2}{4q^2}\left\{ \frac{(s - m_1^2 - m_2^2 + 2m_1^2 m_2^2 - 2q^2 m_2^2}{2} \right\} \\
&= -\frac{k^2}{8}\left\{ \frac{(s - m_1^2 - m_2^2 + 2m_1^2 m_2^2 - 2q^2 m_2^2}{q^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

En el limite no relativista $q^2, p^2 \ll m^2$, $p_\mu = (m, 0)$, $q = (0, q)$

$$= -\frac{k^2}{8}\frac{2m_1^2 m_2^2}{q^2}. \tag{5.26}$$

$$\frac{1}{2m_1 2m_2}\mathcal{M}_{12} \sim -\frac{k^2}{8}\frac{m_1 m_2}{q^2}. \tag{5.27}$$

El potencial Newtoniano se obtiene a partir de la transformada de Fourier del termino anterior.

$$\begin{aligned}
V(r) &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{-iq\cdot r}\frac{k^2}{8}\frac{m_1 m_2}{q^2} \\
&= -\frac{k^2}{8} m_1 m_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}\frac{1}{q^2} \\
&= -\frac{k^2}{8} m_1 m_2 \left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty}\frac{q^2}{q^2}dq \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\theta e^{-iqr\sin\theta} d\theta \right].
\end{aligned} \tag{5.28}$$

sea

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi. \tag{5.29}$$

y

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta e^{-iqr\sin\theta} d\theta \\
&= \int_{iqr}^{-iqr} -\frac{e^z}{iqr} dz = -\frac{e^{-iqr} + e^{iqr}}{iqr} = \frac{2i\sin(qr)}{iqr} \\
&= \frac{2\sin(qr)}{qr}.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Regresando al primer termino de nuestra transformada y sustituyendo los resultados anteriores:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{k^2}{8} m_1 m_2 \left[\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iqr}}{q} dq \right] \\
&= -\frac{k^2}{8} m_1 m_2 \left[\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sent}{t} dt \right] \\
&= -\frac{k^2}{8} m_1 m_2 \left[\frac{1}{4\pi r} \right] = -\frac{k^2}{32\pi r} m_1 m_2.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Usando la definición $k^2 = 32\pi G$

$$V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \tag{5.32}$$

Lo cual nos ha regresado el potencial clásico de Newton.

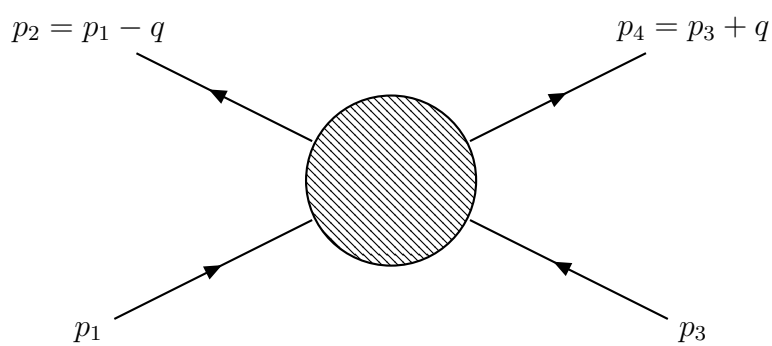

Figura 5.5: `Cinemática básica de la dispersión gravitacional.`

5.3. Corrección cuantica del potencial de newton

Para definir un potencial cuántico, se puede considerar el diagrama 5.6, donde los puntos gruesos representan el conjunto completo de correcciones radiativas a la función del vértice y al propagador del gravitón.

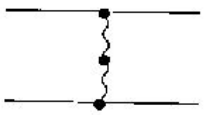

Figura 5.6: `Diagrama de la corrección a nivel cuántico.`

Los puntos representan el conjunto completo de correcciones a la función del vértice y al propagador del gravitón. Estas correcciones explícitamente son:

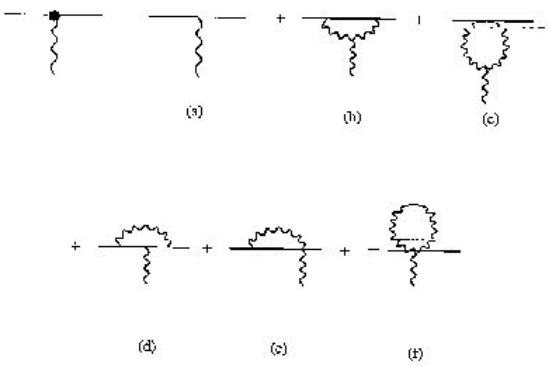

Figura 5.7: `Correcciones del vértice del gravitón a nivel de un lazo.`

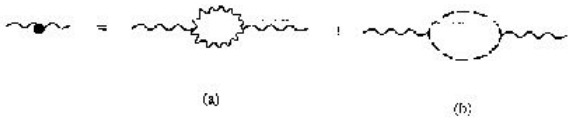

Figura 5.8: `Correcciones del vértice del gravitón a nivel de un lazo.`

Afortunadamente la información necesaria y los cálculos para la polarización del vacío se encuentra en los trabajos de 't Hooft y Veltman. Esto permite analizar la corrección del vértice.

Los diagramas involucrados en la corrección del vértice son los que observamos en 5.8 donde d, e, f no contribuyen a las correcciones cuánticas, solo es necesario calcular los diagramas b y c, que tienen la forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\mu\nu}(3b) = \int \frac{d^4k}{(2\pi 9^4} i\tau_{\eta\lambda}(p, p'-k)\frac{i}{(k-p')^2 - m^2 + i\epsilon} i\tau_{\rho\sigma}(p'-k, p') \\ iD^{\eta\lambda,\alpha\beta}(k-q) i\tau^{\mu\nu}_{\alpha\beta'\gamma\delta} iD^{\gamma\delta,\rho\sigma}(k).\end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\mathcal{M}^{\mu\nu}(3c) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iV_{\eta\lambda,\rho\sigma} iD^{\eta\lambda,\alpha\beta}(k-q) i\tau^{\mu\nu}_{\alpha\beta,\gamma\delta} iD^{\gamma\delta,\rho\sigma}(k). \tag{5.34}$$

El vértice general estaría descrito por dos factores:

$$\begin{aligned}V_{\mu\nu} \equiv \langle p'| T_{\mu\nu} |p\rangle =& F_1(q^2)\left[p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu + q^2\frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\right] \\ &+ F_2(q^2)[q_\mu q_\nu - q_{\mu\nu}q^2].\end{aligned} \tag{5.35}$$

Con la condición de normalización $F_1(0) = 1$. La expansión en energía corresponde a una expansión de los factores en potencias de q^2. Los diagramas de bucle producen términos no analíticos con la forma $\ln(-q^2)$ y $\frac{m^2}{-q^2}$, que son adimensionales. De igual forma se observa que contribuyen a los "factores de forma" los términos en el lagrangiano de orden superior, ya que estos dan factores adicionales q^2.

Al tomar las contribuciones y la forma general de los diagramas de bucle a partir de consideraciones dimensionales se consigue :

$$F_1(q^2) = 1 + d_1 q^2 + k^2 q^2 \left(\ell_1 + \ell_2 ln\frac{(-q^2)}{\mu^2} + \ell_3\sqrt{\frac{m^2}{-q^2}}\right) + ... \tag{5.36}$$

$$F_2(q^2) = -4(d_2 + d_3)m^2 + k^2 m^2 \left(\ell_4 + \ell_5 ln\frac{(-q^2)}{\mu^2} + \ell_6\sqrt{\frac{m^2}{-q^2}}\right) + ... \tag{5.37}$$

Para q^2 , $\ln(-q^2)$ y $\frac{m^2}{-q^2}$ escogemos la parte imaginaria, que corresponde a los estados físicos intermedios ("on shell") descritos por la unitariedad.

Al formar una interacción gravitacional de dos particulas, se debe combinar el vértice con el propagador[21]:

$$
\begin{aligned}
\frac{k^2}{4} \qquad & V^{(1)}_{\mu\nu}(q) D^{\mu\nu,\alpha\beta}(q) V^{(2)}_{\alpha\beta}(-q) \\
& = \frac{k^2}{2q^2}\Big[F_1^{(1)}(q^2) F_1^{(2)}(q^2) p_1 \cdot p_2 p_1' \cdot p_2' + p_1 \cdot p_2' p_2 \cdot p_1' - m_1^2 m_2^2 \\
& + \frac{q^2}{2} F_1^{(1)}(q^2) F_2^{(2)}(q^2) m_1^2 + F_1^{(2)}(q^2) F_2^{(1)}(q^2) m_2^2 \Big] \\
& \approx \frac{k^2 m_1^2 m_2^2}{2} \left\{ \frac{1}{q^2} + 2(d_1 - 2d_2 - 2d_3) \right. \\
& \left. + k^2 \left((2\ell_1 - \ell_4) + (2\ell_2 - \ell_5) ln \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right) + (2\ell_3 - \ell_6) \sqrt{\frac{m^2}{-q}} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.38}
$$

La segunda línea es el resultado aproximado en el límite estático. Los términos analíticos lineales en q^2 en los factores de forma, producen constantes en las interacciones, que a su vez corresponden a una interacción puntual (función delta)

$$
\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \delta^3(x). \tag{5.39}
$$

Los términos no analíticos conducen a un comportamiento de ley de potencia ya que

$$
\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{1}{q} = \frac{1}{2\pi^2 r^2} \tag{5.40}
$$

$$
\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \ln \vec{q^2} = \frac{-1}{2\pi^2 r^3}. \tag{5.41}
$$

Al enfocarnos en los términos no analíticos, simplificamos un poco el cálculo (los cuales son independientes del esquema de regularización).

Una de las propiedades que podemos usar, por ejemplo, es que cualquier factor de k^2 ó $(k-q)^2$ en el numerador, automáticamente remueve cualquier comportamiento no analítico, por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-q)^2} \frac{k^2}{(k-p')^2 - m^2} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-q)^2} \frac{1}{(k-p')^2 - m^2} \\
&= \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{k'^2} \frac{k^2}{(k'-p)^2 - m^2} = I(p^2).
\end{aligned} \tag{5.42}
$$

Donde se hace uso de $k' = k - q$. Este resultado es función de m^2 y es independiente de q^2. Por lo tanto los términos no analíticos se desvanecen.

Como resultado, la función de vértice se simplifica, ya que todos los componentes entre {} de la ecuación 5.10 no contribuyen.

El cálculo de los términos no analíticos es sencillo, aunque tedioso debido a la forma del acoplamiento triple del gravitón. Para el diagrama de la Figura 5.8b Donoghue [17] nos dice que a de ser:

$$\begin{aligned}
\triangle F_1(q^2) &= \frac{k^2q^2}{32\pi^2}\left\{\left[\frac{1}{4}-2+1+0\right]\ln\left(-q^2\right)+\left[\frac{1}{16}-1+1+0\right]\frac{\pi^2 m}{\sqrt{-q^2}}\right\} \\
&= \frac{k^2q^2}{32\pi^2}\left\{-\frac{3}{4}\ln\left(-q^2\right)+\frac{1}{16}\frac{\pi^2 m}{\sqrt{-q^2}}\right\} \\
\triangle F_2(q^2) &= \frac{k^2m^2}{32\pi^2}\left\{[1-3+8-3]\ln\left(-q^2\right)+\left[\frac{7}{8}-1+2-1\right]\frac{\pi^2 m}{\sqrt{-q^2}}\right\} \\
&= \frac{k^2m^2}{32\pi^2}\left\{3\ln\left(-q^2\right)+\frac{7}{8}\frac{\pi^2 m}{\sqrt{-q^2}}\right\}.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Para la Figura 5.8c tendríamos:

$$\begin{aligned}
\triangle F_1 &= \frac{k^2q^2}{32\pi^2}[0+2+0-2]\ln\left(-q^2\right) \\
&= 0 \\
\triangle F_2 &= \frac{k^2m^2}{32\pi^2}\left[-\frac{25}{3}+0+2+2\right]\ln\left(-q^2\right) \\
&= \frac{k^2m^2}{32\pi^2}\left[-\frac{13}{2}\ln\left(-q^2\right)\right].
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Los diagramas de la Figura 5.8d,e,f no tienen términos no analíticos de la forma considerada aquí porque los campos de materia son masivos o las integrales de bucle son independientes de q^2. La Figura 5.8d tiene una divergencia infrarroja similar a la de la corrección de vértice en QED.

Las contribuciones no analíticas resultantes F_1 , F_2 son entonces:

$$\begin{aligned}
F_1(q^2) &= 1+\frac{k^2q^2}{32\pi^2}\left[-\frac{3}{4}\ln\left(-q^2\right)+\frac{1}{16}\frac{\pi^2 m}{\sqrt{-q^2}}\right] \\
F_2(q^2) &= \frac{k^2m^2}{32\pi^2}\left[-\frac{4}{3}\ln\left(-q^2\right)+\frac{7}{8}\frac{\pi^2 m}{\sqrt{-q^2}}\right].
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Por lo tanto, las correcciones de larga distancia a las interacciones gravitatorias provienen únicamente de los términos no analíticos en los diagramas de bucle.

$$\begin{aligned}\Pi_{\alpha\beta,\gamma\delta} =& -\frac{k^2}{32\pi^2}\ln\left(-q^2\right)\left\{\frac{21}{120}q^4 I_{\alpha\beta\gamma\delta}+\frac{23}{120}q^4\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}\right.\\ &-\frac{23}{120}(\eta_{\alpha\beta}q_\gamma q_\delta+\eta_{\gamma\delta}q_\alpha q_\beta)\\ &+\frac{21}{240}(q_\alpha q_\delta\eta_{\beta\gamma}+q_\alpha q_\gamma\eta_{\beta\delta}+q_\beta q_\gamma\eta_{\alpha\delta}+q_\beta q_\delta\eta_{\alpha\gamma})\\ &\left.+\frac{11}{30}q_\alpha q_\beta q_\gamma q_\delta\right\}+(nonlogs).\end{aligned} \tag{5.46}$$

Cuando construimos el potencial, se necesitará calcular

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}\Pi^{\alpha\beta,\gamma\delta}P_{\gamma\delta,\rho\sigma} = \frac{k^2q^4}{32\pi^2}\left[\frac{21}{120}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}+\eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma})+\frac{1}{120}\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\right][-\ln\left(-q^2\right)]+... \tag{5.47}$$

Si combinamos estos diagramas como se muestra en la Figura 4.6 para formar una interacción gravitacional para una partícula, encontramos

$$-\frac{1}{2m_1}V^{(1)}_{\mu\nu}(q)[iD^{\mu\nu,\alpha\beta}(q)+iD^{\mu\nu,\rho\sigma}i\Pi_{\rho\sigma,\eta\alpha}iD^{\eta\lambda,\alpha\beta}]V_{\alpha\beta}(q)\frac{1}{2m_2}. \tag{5.48}$$

Para poder desarrollar el calculo de la amplitud, comenzamos realizando el producto $[V^{(1)}_{\mu\nu}][V^{(2)}_{\alpha\beta}]$, esto es:

$$\begin{aligned}[V^{(1)}_{\mu\nu}][V^{(2)}_{\alpha\beta}] =& \frac{k^2}{4}[p_{1\mu}p_{2\nu}+p_{1\nu}p_{2\mu}-\eta_{\mu\nu}(p_1\cdot p_2-m_1^2)][p_{1\alpha}p_{2\beta}+p_{1\beta}p_{2\alpha}-\eta_{\alpha\beta}(p_1\cdot p_2-m_2^2)]\\ =& -\frac{k^2}{4}[p_{1\mu}p_{3\nu}p_{2\alpha}p_{4\beta}+p_{1\mu}p_{3\nu}p_{2\beta}p_{4\alpha}-p_{1\mu}p_{3\nu}\eta_{\alpha\beta}(p_4\cdot p_2-m_2^2)\\ &+p_{1\nu}p_{3\mu}p_{2\alpha}p_{4\beta}-p_{1\nu}p_{3\mu}\eta_{\alpha\beta}(p_4\cdot p_2-m_2^2)-p_{2\alpha}p_{4\beta}\eta_{\mu\nu}(p_3\cdot p_1-m_1^2)\\ &-p_{2\beta}p_{4\alpha}\eta_{\mu\nu}(p_3\cdot p_1-m_1^2)+\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}(p_4\cdot p_2-m_2^2)(p_3\cdot p_1-m_1^2)].\end{aligned} \tag{5.49}$$

Con el calculo anterior podemos obtener el primer termino del paréntesis, el cual corresponde al potencial gravitacional a nivel árbol, obtenido arriba, la segunda expresión es similar a la obtenida en la Ecuación (4.90), queda calcular el producto con (4.92)

$$
\begin{aligned}
&[V^{(1)}_{\mu\nu}V^{(2)}_{\alpha\beta}][iD^{\mu\nu,\rho\sigma}i\Pi_{\rho\sigma,\eta\alpha}iD^{\eta\lambda,\alpha\beta}] = [p_{1\mu}p_{3\nu}p_{2\alpha}p_{4\beta} + p_{1\mu}p_{3\nu}p_{2\beta}p_{4\alpha} \\
&- p_{1\mu}p_{3\nu}\eta_{\alpha\beta}(p_4\cdot p_2 - m_2^2) + p_{1\nu}p_{3\mu}p_{2\alpha}p_{4\beta} - p_{1\nu}p_{3\mu}\eta_{\alpha\beta}(p_4\cdot p_2 - m_2^2) \\
&- p_{2\alpha}p_{4\beta}\eta_{\mu\nu}(p_3\cdot p_1 - m_1^2) - p_{2\beta}p_{4\alpha}\eta_{\mu\nu}(p_3\cdot p_1 - m_1^2) + \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}(p_4\cdot p_2 - m_2^2)(p_3\cdot p_1 - m_1^2)] \\
&\left[\frac{21}{120}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma}) + \frac{1}{120}\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\right][-ln(-q^2)].
\end{aligned}
\tag{5.50}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} = &\left(\frac{23m_1^2}{15} - \frac{23}{30}(p_1\cdot p_2)\right)(m_2^2 - p_3\cdot p_4) + \frac{23}{30}m_1^2(p_3\cdot{}_4) + \frac{7}{10}(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot{}_3) \\
&+ \frac{7}{10}(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) - \frac{11}{15}(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4)[-\ln(-q^2)].
\end{aligned}
\tag{5.51}
$$

para seguir simplificando la amplitud recordamos las variables de Mandelstam definidas en 5.21, 5.22 , 5.23 y 5.24, además de una nueva definición dada por:

$$
p_4\cdot p_2 = m_2^2 - \frac{q^2}{2} \tag{5.52}
$$

$$
p_1\cdot p_3 = \frac{q^2}{2} - m_1^2. \tag{5.53}
$$

las definiciones previas nos da:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} = &\frac{7}{10}\left(-m_1^2m_2^2 - m_2^2\frac{q^2}{2} + m_1^2\frac{q^2}{2} + \frac{q^4}{4}\right) + \frac{23}{60}m_1^2(-m_1^2 - m_2^2 + s) \\
&- \frac{11}{60}(-m_1^2 - m_2^2 - s)^2 + \left(\frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 - s) + m_2^2\right)\left(\frac{23}{15}m_1^2 - \frac{23}{60}(-m_1^2 - m_2^2 + s)\right) \\
&+ \frac{7}{40}(2m_1^2 - q^2)^2[-\ln(-q^2)].
\end{aligned}
\tag{5.54}
$$

nuevamente nos interesan los términos dados por el producto $m_1^2m_2^2$[22]:

$$
\begin{aligned}
&\left(-\frac{23}{60} + \frac{23}{120} + \frac{23}{30} + \frac{23}{120} + \frac{23}{15} + \frac{23}{60} - \frac{7}{10} - \frac{11}{30} + \frac{30}{60}\right)(m_1^2m_2^2)[-\ln(-q^2)] \\
&= -\frac{127}{60}(m_1^2m_2^2)[\ln(-q^2)].
\end{aligned}
\tag{5.55}
$$

tomando en cuenta el resultado previo y el limite no relativista la amplitud dada por la ecuación 5.48 es:

$$\mathcal{M} \approx 4\pi \mathrm{G} m_1 m_2 \left[\frac{i}{q^2} - \frac{i\kappa^2}{32\pi^2} \left[-\frac{127}{60} \ln\left(q^2\right) + \frac{\pi^2(m_1+m_2)}{2\sqrt{q^2}} \right] + \mathrm{const} \right]. \tag{5.56}$$

Esta expresión puede ser escrita en el espacio de coordenadas aplicando la transformada de Fourier, dando el resultado:

$$V(r) = -\frac{\mathrm{G} m_1 m_2}{r} \left[1 - \frac{\mathrm{G}(m_1+m_2)}{rc^2} - \frac{127}{30\pi^2} \frac{\mathrm{G}h}{r^2 c^3} \right]. \tag{5.57}$$

Lo cual nos da la estructura general del potencial gravitacional dada en la ecuación 5.15.

Una consecuencia interesante de la corrección cuántica es que parece no existir una fuente de gravedad puramente clásica. En electrodinámica, las correcciones a la función de vértice son tales que cuando uno lleva la masa de las partículas al infinito, todas las correcciones cuánticas se desvanecen. Por lo tanto, al llevar el límite $m \to \infty$ a la teoría completa, se obtiene una fuente puramente clásica para el electromagnetismo. En el caso de la gravedad, esto no funciona, ya que las correcciones cuánticas se mantienen incluso cuando $m \to \infty$. Esto se debe a que el propio acoplamiento gravitacional crece con m, de modo que la disminución esperada de los efectos cuánticos a medida que $m \to \infty$ se compensa con el aumento de la constante de acoplamiento.

5.4. El Principio de Equivalencia

Para una mayor comprensión de la teoría cuántica de la gravedad, también se puede intentar obtener una comprensión más profunda de sus fundamentos y ver cómo su descripción está conectada con el límite clásico. En este sentido, elegimos partir del Principio de Equivalencia (EP) y ver cómo se puede aplicar a las partículas cuánticas. En la mecánica clásica, y en muchas otras áreas de la física, la masa aparece como parámetro, la constante de proporcionalidad entre la fuerza y la aceleración, y es una propiedad de la materia. Entonces, cuando se incluye la gravitación, la masa aparece como la fuente de la fuerza gravitatoria. Sin embargo, en la física de partículas elementales moderna, las masas de partículas aparecen en un nivel más fundamental, asociado con las propiedades del vacío. Es decir, se necesita recurrir al vacío para restaurar el choque entre simetrías y masa, para la estructura quiral de las partículas dentro del Modelo Estándar (Standar Model "SM"). Esto se logra a través del mecanismo de Higgs, que se encuentra en el origen de masas de partículas dentro del Modelo Estándar. Entonces, es pertinente preguntar qué masa genera el

mecanismo de Higgs, pero como el SM no sabe nada sobre la fuerza gravitatoria, solo se puede hablar de la masa inercial. Sin embargo, una vez que se reconoce que las partículas se acoplan con la gravedad a través del tensor Energía-Momento, al aplicar las reglas de la teoría cuántica de campos, se obtiene la igualdad de masa inercial y gravitatoria. Este es el Principio de Equivalencia (PE), es decir, la declaración sobre la igualdad de la masa inercial y gravitatoria. Pero incluso antes de hablar de gravitones, estamos interesados en estudiar cómo incluir la gravedad al nivel de las ecuaciones relativistas que describen las partículas elementales del MS, que pueden tener espín 0, 1/2 o 1. Comenzamos considerando primero el caso más simple de spin-0, a saber, el campo de Klein-Gordon[23].

5.4.1. El Principio de Equivalencia en Mecánica Clásica y Mecánica Cuántica

En la mecánica clásica, la masa de una partícula aparece primero en la segunda Ley de Newton, como un parámetro: la constante de proporcionalidad entre la fuerza y la aceleración, es decir, $F = ma$. Entonces, cuando se incluye la gravitación, la masa también aparece como la "carga" de la interacción gravitacional. Entonces, en principio hay que distinguir esta masa, la masa gravitacional (m_g) de la masa que aparece en la ley de Newton, que es la masa inercial (m_i). Pero es un hecho experimental que ambas masas son iguales, ($m_i = m_g$) "***cuerpos de diferente masa caen con la misma aceleración***", así es precisamente el enunciado del PE, una de sus versiones más sencillas y antiguas.

Dentro de la mecánica cuántica no relativista, la información sobre la evolución de una partícula está contenida en su función de onda $\Psi(x,t)$, que obedece a la ecuación de Schrödinger. Las interacciones se pueden incluir a través de un potencial V.

5.4.2. La ecuación de Schrödinger

La función de onda obedece a la ecuación de Schrödinger; para una partícula que interactúa con una fuerza externa descrita por un potencial (V), dada por:

$$-ih\frac{\partial}{\partial}\Psi(x,t) = -\frac{h^2}{2m}\nabla^2\Psi(x,t) + V\Psi(x,t). \tag{5.58}$$

Así, en principio se pueden incluir los efectos gravitatorios en esta ecuación, y se han medido efectos interesantes, como la caída libre de neutrones, etc. Al menos los efectos de la gravedad clásica se han medido para un sistema cuántico.

5.4.3. El principio de Equivalencia en la Relatividad de Einstein

Para acoplar el campo KG con la gravedad, uno tiene que trabajar dentro de un marco relativista completo. En el nivel clásico, en la teoría de la relatividad de Einstein, la fuerza gravitatoria surge de la curvatura del espacio-tiempo, que está contenida en el tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$. De la geometría diferencial se sabe que el tensor de Riemann, construido a partir del tensor métrico, caracteriza un espacio curvo. Pero para definir un formalismo lagrangiano el campo gravitatorio, uno necesita trabajar con la curvatura escalar (R). El acoplamiento de la materia con la gravedad, se realiza a través del tensor energía-momento, i.e. $\mathcal{L} = -kGg^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$, y aquí está la raíz del principio de equivalencia, como veremos. En el espacio-tiempo plano, el tensor de energía-momento para un campo escalar viene dado por:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi(x)\partial_\nu\phi(x) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\partial^\lambda\phi(x)\partial_\lambda\phi(x) + m^2\phi(x)^2]. \tag{5.59}$$

Se debe considerar tres campos escalares $\phi_{1,2}$, Φ, con las masas $m_{1,2}$ y M, estamos interesados en el acoplamientos de la correspondiente partícula escalar con la gravedad, lo cual esta descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}(\phi_i) - g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}(\Phi). \tag{5.60}$$

En el enfoque de la gravedad cuántica perturbativa, se comienza expandiendo la métrica alrededor del fondo plano de Minkowski,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + kh_{\mu\nu}. \tag{5.61}$$

$h_{\mu\nu}$ es interpretado como el campo del gravitón, el mediador de la interacción gravitacional. La constante define la fuerza del acoplamiento del gravitón con los campos de KG. Aquí permitiremos la posibilidad de que las constantes gravitatorias para $\phi_{1,2}$, relativas a Φ, son diferentes, es decir, dejamos $_1$ y $_2$. Entonces, las interacciones están dadas por:

$$\mathcal{L} = -h^{\mu\nu}T_{\mu\nu}(\phi_i) - h^{\mu\nu}T_{\mu\nu}(\Phi). \tag{5.62}$$

Es posible evaluar la amplitud para dos procesos de dispersión: $A[\phi_i(p_1)+\Phi(p_2) \to \phi_i(p_3) + \Phi(p_4)]_{arbol}$ A nivel árbol, los diagramas de Feynman contienen un gravitón en el canal t. La amplitud resultante se evalúa en el límite no relativista, con el límite $M \gg m_i$. Esta amplitud puede aplicarse una transformada de Fourier del espacio de momento al espacio de coordenadas, y este resultado se interpreta como el potencial

gravitacional newtoniano para las dos masas m_i y M, separadas una distancia r, que vienen dadas por:

$$V_1 = \frac{k_1 m_1 G}{r} \tag{5.63}$$

$$V_2 = \frac{k_2 m_2 G}{r}. \tag{5.64}$$

Es un hecho experimental que ambas masas m_1 y m_2 caen con la misma aceleración, lo que debe implicar

$$k_1 = k_2. \tag{5.65}$$

lo cual es precisamente el principio de equivalencia.

Capítulo 6

Conclusiones

En este proyecto de tesis, se ha presentado una revisión de la derivación de los potenciales clásicos de Yukawa y Coulomb utilizando las herramientas de teoría cuántica de campos. Primero, discutimos esto a partir de las ecuaciones de campo clásicas en electrodinámica, para familiarizarnos con el formalismo relativista y el uso de funciones de Green y propagadores fue así como tuvimos un primer vistazo al potencial de Coulomb. Luego mediante el uso de los diagramas y reglas de Feynman para QED estudiamos las amplitudes de dispersión en el orden principal (nivel de árbol) y consideramos el límite de baja energía, del cual pudimos extraer/definir el potencial mediante la transformada inversa de Fourier, siguiendo estos pasos fuimos capaces de obtener nuevamente el potencial de Coulomb y derivar el de Yukawa, gracias a las herramientas de QED es que fuimos capaces de comprobar que es posible obtener las características conocidas para cada uno de estos potenciales y comprobar que sean atractivos o repulsivos.

Para el caso de la teoría gravitacional fue gracias al tratamiento de teoría efectiva que fuimos capaces de usar las reglas de Feynman para el gravitón para con ellas obtener el deseado potencial de Newton con un procedimiento similar al de sus contra partes en QED. Cerramos con una discusión de los posibles efectos cuánticos que surgirían del cálculo de bucles, en particular como correcciones a los propagadores, vimos que estas correcciones son muy pequeñas, tal como se esperaba para las escalas de energías trabajadas, aunque estas correcciones no son observables en nuestros experimentos actuales vale la pena considerarlas en las simulaciones que se realizan en súper ordenadores.

Por otra parte se discutió cómo enunciar el principio de equivalencia con el marco de la teoría cuántica de campos. Es decir, partimos de la observación de que el Modelo Estándar no conoce la gravedad a priori. Luego, para incluir la

gravedad de las partículas MS, se las acopla con el tensor Energía-Momento. Aquí nos interesa identificar una receta para incluir la interacción gravitatoria dentro de las ecuaciones de ondas relativistas, y averiguar las interacciones tanto de partículas como de antipartículas. Como primer paso en esta dirección, analizamos el caso del campo escalar, que se describe mediante la ecuación de Klein-Gordon. En este caso tenemos un campo real, y es su propia antipartícula. Resulta que para una descripción consistente, uno debe trabajar con un formalismo relativista completo, y para esto consideramos el enfoque perturbativo de la gravedad cuántica. Entonces, el gravitón de spin-2 se interpreta como el mediador de la interacción gravitatoria. La conexión con el principio de equivalencia surge cuando se considera la dispersión de partículas masivas. Luego, aplicando las reglas de la teoría cuántica de campos, se obtiene la igualdad de masa inercial y gravitatoria.

Uno de los objetivos para la elaboración de este trabajo fue crear una "guia" que motivase a alumnos de licenciatura (e incluso otros niveles) a adentrarse en el estudio de la teoría cuántica de campos, aunque el análisis descrito fuese superficial, al no mencionar de manera explicita como construir las reglas de Feynman para cada marco, al ver que los principios de esta teoría nos conducen a la obtención de resultados clásicos y de suma importancia como los potenciales estudiados aquí, vemos el porque esta teoría es el marco mas solido y fuerte que tenemos en la actualidad para comprender la estructura y funcionamiento del universo en que vivimos.

Appendices

Apéndice A

Aproximación de Born

La ecuación de Schrôdinger puede convertirse en la ecuación integral

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} - \frac{m}{2\pi}\int \frac{e^{ip|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|}V(r')\psi(\vec{r'})d^3r' \tag{A.1}$$

donde $V(r')$ es un potencial simétrico. La ecuación integral (A.1) es exacta y tiene la ventaja de que está construida de manera que la condición de frontera se satisface automáticamente por la solución $\psi(\vec{r})$. Nos ocupamos del término de orden más bajo en la serie de Born, la llamada aproximación de Born. Para calcular este término, tenemos que hacer algunas aproximaciones razonables a la Ec. (A.1). Si asumimos que $V(r')$ disminuye lo suficientemente rápido a medida que r' se vuelve grande, entonces el dominio de integración sobre r' es esencialmente finito y para r muy grande podemos escribir

$$|\vec{r}-\vec{r'}| = r\left(1 + \frac{(r')^2}{r^2} - \frac{2\vec{r}\cdot\vec{r'}}{r^2}\right)^{1/2} \approx r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{r} \tag{A.2}$$

Aproximando $|\vec{r}-\vec{r'} \sim r|$ en el denominador de la integral, la exponencial depende de r'

$$e^{ip|\vec{r}-\vec{r'}|} \approx e^{ip\left(r-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{r}\right)} = e^{ipr-i\vec{p_1'}\cdot\vec{r'}} \tag{A.3}$$

Usando Ec. (A.2) y (A.3) podemos simplificar (A.1)

$$\psi(\vec{r}) \approx e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} - \frac{m}{2\pi}\left(\frac{e^{ipr}}{r}\right)\int e^{-i\vec{p_1'}\cdot\vec{r'}}V(r')\psi(\vec{r'})d^3r' \tag{A.4}$$

$$f(p,\theta) = -\frac{m}{2\pi}\int e^{-i\vec{p_1'}\cdot\vec{r'}}V(r')\psi(\vec{r'})d^3r' \tag{A.5}$$

la aproximación de menor orden para $\psi(\vec{r'})$

$$\psi(\vec{r'}) \sim e^{i\vec{p_1'}\cdot\vec{r'}} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned} f_B(p,\theta) &= -\frac{m}{2\pi}\int e^{i(\vec{p_1'}-\vec{p_1})\cdot\vec{r'}}V(r')d^3r' \\ &= -\frac{m}{2\pi}\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r'}}V(r')d^3r' \end{aligned} \tag{A.7}$$

Apéndice B

Tensor de Riemann-Christoffel

Calculando el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, para lo cual usamos el conmutador: $[D_\mu, D_\nu]S_\rho = D_\mu D_\nu S_\rho - D_\nu D_\mu S_\rho \equiv R^\beta_{\rho\mu\nu} S_\beta$

Donde

$$D_\nu S_\rho = \partial_\nu S_\rho - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} S_\sigma$$
$$D_\mu D_\nu S_\rho = \partial_\mu (D_\nu S_\rho) - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} D_\sigma S_\rho - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} D_\nu S_\sigma$$

Partiendo de lo anterior podemos emplear el conmutador de modo que

$$[D_\mu, D_\nu]S_\rho = \partial_m u(\partial_n u S_\rho - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} S_\sigma) - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}(\partial_\nu S\sigma - \Gamma^\kappa_{\nu\sigma} S_\kappa) - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}(\partial_\nu S_\sigma - \Gamma^\sigma_{\nu\sigma} S_\kappa) - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad \text{(B.1)}$$
$$= \partial_\mu \partial_n u S_\rho - (\partial_m u \Gamma^\sigma_{\nu\rho}) S_\sigma - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \partial_{mu} S_\sigma - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \partial_\nu S_\sigma + \Gamma^{sigma}_{\mu\rho} \Gamma^\kappa_{\nu\sigma} S_\kappa - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \partial_\mu \partial_\lambda - (\mu \leftrightarrow \nu)$$
$$= \partial_\mu \partial_\nu S_\rho - \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} S_\sigma - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \partial_\mu S_\sigma - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \partial_\nu S_\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \Gamma^\kappa_{\nu\sigma} S_\kappa - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \partial_\mu S_\lambda - \partial_\nu \partial_\mu S_\rho + \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} S_\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \partial_n u S_\sigma + \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \partial_\mu S_\sigma - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \Gamma^\kappa_{\mu\sigma} S_\kappa + \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \partial_n u S_\lambda$$
$$= -\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} S_\rho - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \partial_\mu S_\sigma + \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} S_\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \partial_\nu S_\sigma$$

con $-\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} S_\rho - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \partial_\mu S_\sigma = -\partial_\mu (\Gamma^\sigma_{\nu\rho} S_\sigma)$ y $\partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} S_\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \partial_\nu S_\sigma = \partial_\nu (\Gamma^\sigma_{\mu\rho} S_\sigma)$

$$= -\partial_\mu (\Gamma^\sigma_{\nu\rho} S_\sigma) + \partial_\nu (\Gamma^\sigma_{\mu\rho} S_\sigma) - \Gamma_{\mu\lambda}\rho \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} S_\sigma + \Gamma_{\mu\lambda}\rho \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} S_\sigma$$
$$= -[\partial_\mu (\Gamma^\sigma_{\nu\rho}) + \Gamma_{\mu\lambda}\rho \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} S_\sigma - \partial_\nu (\Gamma^\sigma_{\mu\rho}) - \Gamma_{\mu\lambda}\rho \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} S_\sigma] S_\sigma = R^\sigma_{\rho\mu\nu} S_\sigma \quad \text{(B.2)}$$

Podemos concluir

$$R^\sigma_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu (\Gamma^\sigma_{\nu\rho}) + \Gamma_{\mu\lambda}\rho \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} S_\sigma - \partial_\nu (\Gamma^\sigma_{\mu\rho}) - \Gamma_{\mu\lambda}\rho \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad \text{(B.3)}$$

Apéndice C

Metrica

Partiendo de la métrica dada y trabajando con el símbolo de Christoffel

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{g^{ad}}{2}(\frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{db}}{\partial x^c}) \tag{C.1}$$

considerando uno de los términos

$$\frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d} = \frac{\partial}{\partial x^d}(\eta_{bc} + \kappa h_{bc}) = \frac{\partial \eta_{bc}}{\partial x^d} + \frac{\partial \kappa h_{bc}}{\partial x^d} \tag{C.2}$$

debido a como esta dada establecida la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ es posible afirmar lo siguiente:

$$\frac{\partial \eta_{bc}}{\partial xd} = 0 \qquad \frac{\partial g_{bc}}{\partial xd} = \kappa \frac{\partial h_{bc}}{\partial xd} \tag{C.3}$$

por otra parte necesitamos conocer la forma de g^{ab}. Sabemos que usando la métrica podemos subir y bajar índices, recordando que $g_{ab}gbc = \delta^c_a$

$$h^{ab} = \eta^{ac}\eta^{bd}h_{cd} \tag{C.4}$$

supongamos $g^{ab} = \eta^{ab} + \kappa\epsilon h^{ab}$

$$\begin{aligned}
\delta^c_a &= (\eta_{ab} + \kappa h_{ab})(\eta^{bc} + \kappa\epsilon h^{bc}) \\
&= \eta_{ab}\eta^{bc} + \kappa\eta^{bc}h_{ab} + \kappa\epsilon\eta_{ab}h^{bc} + \kappa^2\epsilon h_{ab}h^{bc} \\
&= \eta_{ab}\eta^{bc} + \kappa\eta^{bc}h_{ab} + \kappa\epsilon\eta_{ab}h^{bc} \\
&= \delta^c_a + \kappa(\eta^{bc}h_{ab} + \epsilon\eta_{ab}h^{bc})
\end{aligned} \tag{C.5}$$

para que lo anterior sea cierto el paréntesis a de ser 0

$$
\begin{aligned}
\epsilon\eta_{ab}h^{bc} &= -\eta^{bc}h_{ab} \\
\epsilon\eta_{ab}h^{bc} &= -\epsilon\eta_{ab}\eta^{be}\eta^{cf}h_{ef} \\
&= -\epsilon\delta^{e}_{a}\eta^{cf}h_{ef} \\
\epsilon\eta_{ab}h^{bc} &= -\epsilon\eta^{cf}h_{af}
\end{aligned}
\tag{C.6}
$$

usando el hecho que $\eta^{cb} = \eta^{bc}$ se puede concluir que $\epsilon = -1$ dándonos como resultado la conclusión:

$$
g^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + ... \tag{C.7}
$$

Apéndice D

Tensor de energía-momento

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2\right) \\
&= \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - m^2\phi^2)
\end{aligned}
\tag{D.1}
$$

por otra parte

$$
\mathcal{L}_m^{(1)} = -\frac{\kappa}{2}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \tag{D.2}
$$

$$
\mathcal{L}_m^{(2)} = -\frac{\kappa^2}{2}\left[\frac{1}{8}(h^2 - 2h_{\mu\nu}h^{\mu\nu})(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - m^2\phi^2) + (h^{\mu\alpha}h^{\nu\alpha} - \frac{1}{2}hh^{\mu\nu})\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right] \tag{D.3}
$$

La expresión correspondiente para el tensor de energía-momento puede ser encontrado como:

$$
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = -\frac{\kappa}{2}(T_{\mu\nu}^{mat} + T_{\mu\nu}^{grav}) \tag{D.4}
$$

donde

$$
T_{\mu\nu}^{grav} = \frac{4}{\kappa^2}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R\right) - \frac{2}{\kappa}h_{\mu\nu}R \tag{D.5}
$$

con

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} = \kappa^2\Bigg[&-\frac{1}{4}\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial_\nu h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\partial_\alpha h_{\mu\alpha}\partial^\alpha h_\nu^\alpha + \frac{1}{2}\partial_\alpha h_{\mu\alpha}\partial^\lambda h_\nu^\alpha + \frac{1}{2}h^{\lambda\alpha}[\partial_\lambda\partial_\nu h_{\mu\alpha} \\
&+\partial_\alpha\partial_\mu h_{\nu\alpha} - \partial_\mu\partial_\nu h_{\lambda\alpha} - \partial_\lambda\partial_\alpha h_{\mu\nu}] + \frac{1}{2}\left(\partial_\lambda h^{\lambda\alpha} - \frac{1}{2}\partial^\alpha h\right)(\partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\nu})\Bigg]
\end{aligned}
\tag{D.6}
$$

por tanto

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \kappa^2 \left\{ -\frac{3}{4}\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\mu h^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\partial_\alpha h_{\mu\alpha}\partial^\alpha h^{\mu\alpha} + \frac{1}{2}h^{\lambda\alpha}\left(2\partial_\lambda\left(\partial^\lambda h_{\lambda\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\alpha h\right) - \Box h_{\lambda\alpha}\right) \right.$$
$$\left. + \left(\partial_\lambda h^{\lambda\alpha} - \frac{1}{2}\partial^\alpha h\right)\left(\partial^\lambda h_{\lambda\alpha} - \frac{1}{2}\partial_\alpha h\right)\right\} \quad \text{(D.7)}$$

con lo anterior se llega a que $T^{grav}_{\mu\nu}$ es:

$$T^{grav}_{\mu\nu} = -2h^{\lambda\kappa}(\partial_\mu\partial_\nu h_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda\partial_\kappa h_{\mu\nu} - \partial_\kappa(\partial_\nu h_{\mu\lambda} + \partial_\mu h_{\nu\lambda}))$$
$$- 2\partial_\lambda h_{\sigma\nu}\partial^\lambda h^\sigma_\mu + 2\partial_\lambda h_{\sigma\nu}\partial^\sigma h^\lambda_\mu - \partial_\nu h_{\sigma\lambda}\partial_\mu h^{\sigma\lambda}$$
$$- \eta_{\mu\nu}\left(\partial_\lambda h_{\sigma\xi}\partial^\sigma h^{\lambda\xi} - \frac{3}{2}\partial_\lambda h_{\sigma\xi}\partial^\lambda h^{\sigma\xi} - h^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta}\right) - h_{\mu\nu}\Box h \quad \text{(D.8)}$$

Apéndice E

Expresión para el propagador

Cuando construimos el potencial, se necesitará calcular

$$
\begin{aligned}
P_{\mu\nu,\alpha\beta}\Pi^{\alpha\beta,\gamma\delta}P_{\gamma\delta,\rho\sigma} =& [\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}] \left[-\frac{k^2}{32\pi^2}\, ln(-q^2) \left\{ \frac{21}{120} q^4 I^{\alpha\beta\gamma\delta} \right.\right. \\
&+ \frac{23}{120} q^4 \eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} - \frac{23}{120}(\eta^{\alpha\beta}q^\gamma q^\delta + \eta^{\gamma\delta}q^\alpha q^\beta) + \frac{21}{240}(q^\alpha q^\delta \eta^{\beta\gamma} \\
&\left.\left. + q^\alpha q^\gamma \eta^{\beta\delta} + q^\beta q^\gamma \eta^{\alpha\delta} + q^\beta q^\delta \eta^{\alpha\gamma}) + \frac{11}{30} q^\alpha q^\beta q^\gamma q^\delta \ \right\} \ \right] [\eta_{\gamma\rho}\eta_{\delta\sigma} \\
&+ \eta_{\delta\rho}\eta_{\gamma\sigma} - \eta_{\gamma\delta}\eta_{\rho\sigma}]
\end{aligned}
\tag{E.1}
$$

$$
\begin{aligned}
= & -\frac{k^2}{32\pi^2} ln(q^2) \left[\ \left\{ \frac{21}{120}\, q^4 \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}(\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta}\eta^{\beta\gamma}) \right.\right. \\
&+ \frac{23}{120} q^4 \eta_{\mu\nu}\eta^{\gamma\delta} - \frac{23}{120}(\eta_{\mu\nu}q^\gamma q^\delta + \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta^{\gamma\delta}q^\alpha q^\beta) \\
&+ \frac{21}{240}(q^\alpha q^\delta \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta^{\beta\gamma} + q^\alpha q^\gamma \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta^{\beta\delta}) + q^\beta q^\gamma \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta^{\alpha\delta} \\
&+ q^\beta q^\delta \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta^{\alpha\gamma} + \frac{11}{30} q_\mu q_\nu q^\gamma q^\delta \\
&+ \frac{21}{120} q^4 \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}(\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta}\eta^{\beta\gamma}) + \frac{23}{120} q^4 \eta_{\nu\mu}\eta^{\gamma\delta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{23}{120}(\eta_{\nu\mu}q^\gamma q^\delta + \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}\eta^{\gamma\delta}q^\alpha q^\beta) + \frac{21}{240}(q^\alpha q^\delta \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}\eta^{\beta\gamma} \\
&+ q^\alpha q^\gamma \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}\eta^{\beta\gamma} + q^\beta q^\gamma \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}\eta^{\alpha\delta} + q^\beta q^\delta \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}\eta^{\alpha\gamma}) \\
&+ \frac{11}{30}q_\nu q_\mu q^\gamma q^\delta - \frac{21}{120}q^4\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta}\eta^{\beta\gamma}) \\
&- \frac{23}{120}q^4\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} + \frac{23}{120}(4\eta_{\mu\nu}q^\gamma q^\delta + \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}q^\alpha q^\beta) \\
&- \frac{21}{240}(\eta_{\mu\nu}\eta^{\beta\gamma}q_\beta q^\delta + \eta_{\mu\nu}\eta^{\beta\delta}q_\beta q^\gamma + \eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\delta}q_\alpha q^\gamma + \eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\gamma}q_\alpha q^\delta) \\
&- \frac{11}{30}q^\alpha q_\alpha q^\gamma q^\delta \ \Big\} \ \Big] \, [\eta_{\gamma\rho}\eta_{\delta\sigma} + \eta_{\delta\rho}\eta_{\gamma\sigma} - \eta_{\gamma\delta}\eta_{\rho\sigma}] \\
= &- \frac{k^2}{32\pi^2} ln(-q^2) \Bigg[\frac{21}{120}\, q^4\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta_{\gamma\rho}\eta_{\delta\sigma}(\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta}\eta^{\beta\gamma}) + \frac{23}{120}q^4(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) \\
&- \frac{23}{120}(\eta_{\mu\nu}q_\rho q_\sigma + q_\mu q_\nu \eta_{\rho\sigma}) + \frac{21}{240}(q_\mu q_\sigma \eta_{\nu\rho} + q_\mu q_\rho \eta_{\nu\sigma} + q_\nu q_\rho \eta_{\mu\sigma} + q_\nu q_\sigma \eta_{\mu\rho}) \\
&+ \frac{11}{30}q_\mu q_\nu q_\rho q_\sigma + \frac{21}{120}q^4(\eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\eta_{\mu\rho}) + \frac{23}{120}q^4\eta_{\nu\mu}\eta_{\rho\sigma} - \frac{23}{120}(\eta_{\mu\nu}q_\rho q_\sigma + q_\nu q_\mu \eta_{\rho\sigma}) \\
&+ \frac{21}{240}(q_\nu q_\sigma \eta_{\mu\rho} + q_\nu q_\rho \eta_{\mu\sigma} + q_\mu q_\rho \eta_{\nu\sigma} + q_\mu q_\sigma \eta_{\nu\rho}) + \frac{11}{30}q_\nu q_\mu q_\rho q_\sigma \\
&- \frac{21}{120}q^4(\eta_{\beta\rho}\eta_{\mu\nu}\eta_{\delta\sigma} + \eta_{\beta\sigma}\eta_{\mu\nu}\eta_{\gamma\rho}\eta^{\beta\gamma}) - \frac{23}{120}q^4(4\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) + \frac{23}{120}(4\eta_{\mu\nu}q_\rho q_\sigma + q^\alpha q_\alpha \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) \\
&- \frac{21}{240}(q_\rho q_\sigma \eta_{\mu\nu} + q_\sigma q_\rho \eta_{\mu\nu} + q_\sigma q_\rho \eta_{\mu\nu} + q_\rho q_\sigma \eta_{\mu\nu}) - \frac{11}{30}q^\alpha q_\alpha q_\rho q_\sigma \\
&+ \frac{21}{120}q^4\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta_{\delta\rho}\eta_{\gamma\sigma}(\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\delta}\eta^{\beta\gamma}) + \frac{23}{120}q^4\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho} - \frac{23}{120}(\eta_{\mu\nu}q_\sigma q_\rho + q_\mu q_\nu \eta_{\sigma\rho}) \\
&+ \frac{21}{240}(q_\mu q_\rho \eta_{\nu\sigma} + q_\mu q_\sigma \eta_{\nu\rho} + q_\nu q_\sigma \eta_{\mu\rho} + q_\nu q_\rho \eta_{\mu\sigma}) + \frac{11}{30}q_\mu q_\nu q_\sigma q_\rho + \frac{21}{120}q^4(\eta_{\nu\sigma}\eta_{\mu\rho} + \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma}) \\
&+ \frac{23}{120}q^4\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho} - \frac{23}{120}(\eta_{\nu\mu}q_\sigma q_\rho + q_\nu q_\mu \eta_{\sigma\rho}) + \frac{21}{240}(q_\nu q_\rho \eta_{\mu\sigma} + q_\nu q_\sigma \eta_{\mu\sigma} + q_\mu q_\sigma \eta_{\nu\rho} + q_\mu q_\rho \eta_{\nu\sigma})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{11}{30}q_\nu q_\mu q_\sigma q_\rho-\frac{21}{120}q^4\eta_{\beta\sigma}\eta_{\mu\nu}\eta^{\beta\delta}\eta_{\delta\rho}+\eta_{\beta\rho}\eta_{\mu\nu}\eta^{\beta\gamma}\eta_{\gamma\sigma}-\frac{23}{120}q^4(4\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho})\\
&+\frac{23}{120}(4\eta_{\mu\nu}q_\sigma q_\rho+\eta_{\mu\nu}\eta^{\gamma\delta}\eta_{\delta\rho}\eta_{\gamma\sigma}q_\beta q^\beta)-\frac{21}{240}(\eta_{\mu\nu}q_\sigma q_\rho+\eta_{\mu\nu}q_\rho q_\sigma+\eta_{\mu\nu}q_\rho q_\sigma+\eta_{\mu\nu}q_\sigma q_\rho)\\
&-\frac{11}{30}q^\alpha q_\alpha q_\sigma q_\rho-\frac{21}{120}q^4\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\eta_{\gamma\delta}\eta_{\rho\sigma}(\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}+\eta^{\alpha\delta}\eta^{\beta\gamma})-\frac{23}{120}q^4(4\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma})\\
&-\frac{23}{120}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}q_\delta q^\delta+4q_\mu q_\nu\eta_{\rho\sigma})-\frac{21}{240}(q_\mu q_\gamma\eta_{\nu\beta}\eta^{\beta\gamma}\eta_{\rho\sigma}+q_\mu q_\delta\eta_{\nu\beta}\eta^{\beta\delta}\eta_{\rho\sigma}+q_\nu q_\mu\eta_{\rho\sigma}+q_\nu q_\mu\eta_{\rho\sigma})\\
&-\frac{11}{30}q_\mu q_\nu q_\delta q^\delta\eta_{\rho\sigma}-\frac{21}{120}q^4(\eta_{\alpha\delta}\eta_{\mu\beta}\eta_{\rho\sigma}\eta^{\beta\delta}+\eta_{\nu\gamma}\eta_{\mu\beta}\eta_{\rho\sigma}\eta^{\beta\gamma})-\frac{23}{120}q^4(4\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma})\\
&+\frac{23}{120}(\eta_{\nu\mu}q_\delta q^\delta\eta_{\rho\sigma}+q_\nu q_\mu 4\eta_{\rho\sigma})-\frac{21}{240}(q_\nu q_\mu\eta_{\rho\sigma}+q_\nu q_\mu\eta_{\rho\sigma}+q_\mu q_\nu\eta_{\rho\sigma}+q_\mu q_\nu\eta_{\rho\sigma})\\
&-\frac{11}{30}q_\nu q_\mu q_\delta q^\delta\eta_{\rho\sigma}+\frac{21}{120}q^4(\eta_{\beta\delta}\eta_{\mu\nu}\eta_{\nu\sigma}\eta^{\beta\delta}+\eta_{\beta\gamma}\eta_{\mu\nu}\eta_{\nu\sigma}\eta^{\beta\gamma})+\frac{23}{120}q^4(16\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma})\\
&-\frac{23}{120}(4\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}q_\delta q^\delta+4\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}q^\alpha q_\alpha)+\frac{21}{240}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}q_\delta q^\delta+\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}q^\delta q_\delta+\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}q^\delta q_\delta+\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}q^\delta q_\delta)\\
&+\frac{11}{30}q^\alpha q_\alpha q_\delta q^\delta\eta_{\rho\sigma}\ \Big]
\end{aligned}
$$

donde todos los términos relacionados con q_μ, q_ρ, etc. pueden eliminarse ya que q_μ contraído con la función de vértice da un resultado nulo.

$$
=\frac{k^2q^4}{32\pi^2}\left[\frac{21}{120}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}+\eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma})+\frac{1}{120}\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}\right][-ln(-q^2)]+... \qquad \text{(E.2)}
$$

Apéndice F

Método de integral de caminos

A modo de una pequeña introducción al formalismo de QFT haremos una breve descripción del método de "Path Integral" o en español, integral de caminos, que nos permite obtener el propagador a partir del cual se pueden deducir alguno de los resultados conseguidos en esta tesis.

Tenemos la representación de path integral:

$$Z \equiv \langle 0| \, e^{-iHT} \, |0\rangle = \int Dq(t) e^{i \int_0^T dt [\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(q)]}. \tag{F.1}$$

A partir de lo cual tras una serie de tratamientos es posible obtener la path integral que define a una teoria escalar en $d = (D+1)$ espacio-tiempo dimensional:

$$Z = \int D\varphi e^{i \int d^d x (\frac{1}{2} (\delta\varphi)^2 - V(\varphi))}. \tag{F.2}$$

En $(0+1)$ QFT es solo mecánica cuántica.

Si se desea ahora perturbar el vacio, añadiendo un generador $J(t, \vec{x})$ el cual desaparece en todas partes del espacio-tiempo, excepto en algunas regiones. Tenemos:

$$Z = \int D\varphi e^{i \int d^4 x [\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - V(\varphi) + J(x)\varphi(x)]}. \tag{F.3}$$

La función integral es imposible de resolver, excepto cuando:

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2} [(\partial\varphi)^2 - m^2 \varphi^2]. \tag{F.4}$$

Trabajando en este caso especial, escribimos:

$$Z = \int D\varphi e^{i\int d^4x \frac{1}{2}[(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2] + J\varphi} = \int D\varphi e^{i\int d^4x[-\frac{1}{2}\varphi(\partial^2+m^2)\varphi + J\varphi]}. \tag{F.5}$$

Evaluando la integral obtenemos:

$$= \left(\frac{(2\pi i)^N}{det[A]}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-(i/2)J\cdot A^{-1}\cdot J}. \tag{F.6}$$

El papel de A en la expresión anterior esta dado en (F.5) por $-(\partial^2 + m^2)$. La ecuación para el inverso, $A \cdot A^1 = I$ ó $A_{ij}A^{-1}_{jk} = \delta_{ik}$, en el limite continuo:

$$-(\partial^2 + m^2)D(x-y) = \delta^{(4)}(x-y). \tag{F.7}$$

La función $D(x)$, conocido como el propagador, juega un rol esencial en QFT. Podemos resolver (F.7) trabajando en el espacio de momento:

$$\delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)}. \tag{F.8}$$

La solución es

$$D(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{F.9}$$

Sustituyendo en (F.7):

$$-(\partial^2 + m^2)D(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - m^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ik(x-y)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} = \delta^{(4)}(x-y). \tag{F.10}$$

Ahora para la teoría libre tenemos:

$$W(J) = -\frac{1}{2}\int\int d^4x d^4y J(x) D(x-y) J(y). \tag{F.11}$$

Consideremos $J(x) = J_1 + J_2$, tendríamos que $J_1 = a\delta^3(\vec{x} - \vec{x_1})$ y $J_2 = b\delta^3(\vec{y} - \vec{y_2})$, tomando en cuenta que $d^4x d^4y = dx^0 dy^0 d^3\vec{x} d^3\vec{y}$ y (F.9) tenemos para (F.11):

$$\begin{aligned} W(J) = &-\frac{1}{2}\int dx^0 dy^0 d^3\vec{x} d^3\vec{y} \delta^3(\vec{x} - \vec{x_1})\delta^3(\vec{y} - \vec{y_2}) \\ &\int \frac{dk^0}{(2\pi)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik(x-y)e^{-ik(x-y)}}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \tag{F.12}$$

Haciendo la integral sobre d^3x y d^3y:

$$W(J) = -\int\int dx^0 dy^0 \int \frac{dk^0}{2\pi} e^{ik^0(x-y)^0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x_1}-\vec{x_2})}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{F.13}$$

Integrando sobre y^0 tenemos una función delta haciendo $k^0 = 0$, Lo que nos deja con:

$$W(J) = \left(\int dx^0\right) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x_1}-\vec{x_2})}}{k^2 + m^2}. \tag{F.14}$$

Del formalismo de path integrals $Z = Ce^{iW(j)}$ representa $\langle 0| e^{-iHT} |0\rangle 0e^{-iET}$, E representa la energía de dos fuentes actuando sobre cada una. El termino $(\int dx^0)$ produce el intervalo de tiempo T. Fijando $iW = -iET$ se llega a:

$$E = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x_1}-\vec{x_2})}}{k^2 + m^2}. \tag{F.15}$$

Al realizar la integral llegamos a un conocido resultado:

$$E = -\frac{1}{4\pi r} e^{-mr} \tag{F.16}$$

Con $E = V$ siendo este nuestro conocido potencial de Yukawa.

Haber obtenido el potencial de Yukawa por este método es un gran logro, ¿ podría este mismo método darnos el potencial de Coulomb?. Para comenzar con esta tarea dotemos al fotón con una masa m, para al final tomarla como $m = 0$. Modificando el lagrangiano para electromagnetismo:

$$\mathcal{M} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F\mu\nu + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + A_\mu J^\mu. \tag{F.17}$$

Añadimos una fuente $J^\mu(x)$, conocida como corriente, asumimos que la corriente es conservada, por tanto:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \tag{F.18}$$

La teoría de campo para nuestro mesón esta definida por la integral de camino:

$$Z = \int DAe^{iS(A)} \equiv e^{iW(J)}. \tag{F.19}$$

Con la acción:

$$S(A) = \int d^4\mathcal{L} = \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu [(\partial^2 + m^2) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu] A_\nu + A_{\mu.} \tag{F.20}$$

La segunda igualdad surge de desarrollar el lagrangiano siguiendo la definición de $F_{\mu\nu}$ y comparando con (F.5).

Como aprendimos del caso de Yukawa, debemos encontrar el inverso del operador diferencial:

$$[(\partial^2 + m^2) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu] D_{\nu\lambda}(x) = \partial^\mu_\lambda \lambda^{(4)}(x). \tag{F.21}$$

Pasamos al espacio de momento definiendo:

$$D_{\nu\lambda}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\nu\lambda}(k) e^{ikx}. \tag{F.22}$$

Obteniendo:

$$[-(k^2 - m^2) g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu] D_{\nu\lambda}(k) = \delta^\mu_\lambda. \tag{F.23}$$

Por tanto llegamos a:

$$D_{\nu\lambda}(k) = \frac{-g_{\nu\lambda} + k_\nu k\lambda/m^2}{k^2 - m^2}. \tag{F.24}$$

Lo que resulta ser el propagador del fotón. Entonces:

$$W(J) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} J^\mu(k)^* \frac{-g_{\nu\lambda} + k_\nu k_\lambda/m^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} J^\nu(k). \tag{F.25}$$

Gracias a la conservación de la corriente es que podemos olvidarnos del termino $k_\mu k_\nu$. La acción efectiva se simplifica:

$$W(J) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} J^\mu(k)^* \frac{g_{\nu\lambda}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} J^\nu(k). \tag{F.26}$$

En este punto resta seguir los pasos a partir de (F.12), observando que la teoría a producido un signo extra. La energía potencial entre dos "lumps" de densidad de carga $J^0(x)$ es positiva. Lo cual se traduce en que la fuerza electromagnética entre dos cargas es repulsiva.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi r} e^{-mr} \\ &\Rightarrow \frac{1}{4\pi r}. \end{aligned} \tag{F.27}$$

Para obtener el caso en que el potencial sea atractivo basta tomar la consideración siguiente $J^\mu = J_p^\mu - J_n^\mu$. Con este ultimo resultado observamos el poder y utilidad que presenta el método de "path integral", así como vemos que desde el formalismo de QFT es posible seguir reproduciendo resultados clásicos, lo que nos indica la valía de QFT como teoría.

Bibliografía

[1] Kuhlmann, Meinard, “Quantum Field Theory”, “The Stanford Encyclopedia of Philosophy”, Edward N. Zalta, https://plato.stanford.edu/archives/-fall2020/entries/quantum-field-theory/, 2020, Fall 2020, Metaphysics Research Lab, Stanford University

[2] J. Lorenzo Díaz-Cruz, “The Higgs profile in the standard model and beyond,” Rev. Mex. Fis. **65**, no.5, 419-439 (2019) doi:10.31349/RevMexFis.65.419 [arXiv:1904.06878 [hep-ph]].

[3] Peter Collas, Çoulomb scattering in the Born approximation and the use of generalized functions", https://doi.org/10.11192F10.0005453, 2021,aug, American Association of Physics Teachers (AAPT), 89, 8, 799–805, American Journal of Physics

[4] A. Zee, “Quantum field theory in a nutshell,” Princeton University Press, 2010, ISBN 1400835321, 9781400835324

[5] M. Thomson, “Modern particle physics,” Cambridge University Press, 2013, ISBN 978-1-107-03426-6 doi:10.1017/CBO9781139525367

[6] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,” Addison-Wesley, 1995, ISBN 978-0-201-50397-5

[7] M. D. Schwartz, “Quantum Field Theory and the Standard Model,” Cambridge University Press, 2014, ISBN 978-1-107-03473-0, 978-1-107-03473-0

[8] Collier, P., “A Most Incomprehensible Thing: Notes Towards a Very Gentle Introduction to the Mathematics of Relativity”, Incomprehensible Books, 2013, ISBN 9780957389441

[9] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity," John Wiley and Sons, 1972, ISBN 978-0-471-92567-5, 978-0-471-92567-5

[10] McMahon, D. and Alsing, P.M., "Relativity Demystified", ISBN 9780071486736, Demystified, url=https://books.google.com.mx/books?id=RqFn-_T8MbYC, 2005, McGraw-Hill Education

[11] J. F. Donoghue, "The Ideas of gravitational effective field theory," [arXiv:hep-th/9409143 [hep-th]].

[12] A. Zee, "Einstein Gravity in a Nutshell," Princeton University Press, 2013, ISBN 978-0-691-14558-7

[13] N. E. J. Bjerrum-Bohr, J. F. Donoghue and B. R. Holstein, "Quantum corrections to the Schwarzschild and Kerr metrics," Phys. Rev. D **68**, 084005 (2003) [erratum: Phys. Rev. D **71**, 069904 (2005)] doi:10.1103/PhysRevD.68.084005 [arXiv:hep-th/0211071 [hep-th]].

[14] J. F. Donoghue, "Introduction to the effective field theory description of gravity," [arXiv:gr-qc/9512024 [gr-qc]].

[15] J. F. Donoghue and B. R. Holstein, "Low Energy Theorems of Quantum Gravity from Effective Field Theory," J. Phys. G **42**, no.10, 103102 (2015) doi:10.1088/0954-3899/42/10/103102 [arXiv:1506.00946 [gr-qc]].

[16] J. F. Donoghue, M. M. Ivanov and A. Shkerin, "EPFL Lectures on General Relativity as a Quantum Field Theory," [arXiv:1702.00319 [hep-th]].

[17] J. F. Donoghue, "General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections," Phys. Rev. D **50**, 3874-3888 (1994) doi:10.1103/PhysRevD.50.3874 [arXiv:gr-qc/9405057 [gr-qc]].

[18] J. F. Donoghue, "The effective field theory treatment of quantum gravity," AIP Conf. Proc. **1483**, no.1, 73-94 (2012) doi:10.1063/1.4756964 [arXiv:1209.3511 [gr-qc]].

[19] J. F. Donoghue, "Leading quantum correction to the Newtonian potential," Phys. Rev. Lett. **72**, 2996-2999 (1994) doi:10.1103/PhysRevLett.72.2996 [arXiv:gr-qc/9310024 [gr-qc]].

[20] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, "One loop divergencies in the theory of gravitation," Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. A **20**, 69-94 (1974)

[21] A. A. Petrov and A. E. Blechman, "Effective Field Theories," WSP, 2016, ISBN 978-981-4434-92-8, 978-981-4434-94-2 doi:10.1142/8619

[22] V. Shtabovenko, R. Mertig and F. Orellana, "FeynCalc 9.3: New features and improvements," Comput. Phys. Commun. **256**, 107478 (2020) doi:10.1016/j.cpc.2020.107478 [arXiv:2001.04407 [hep-ph]].

[23] P. Worden and J. Overduin, "Einstein's Happiest Moment: The Equivalence Principle," [arXiv:2209.13781 [physics.hist-ph]].