



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Modelación del oscilador armónico y población bajo migración vía Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

por

Oscar Hernández Torres

Asesorado por

Dr. Hugo Adán Cruz Suárez

Puebla Pue.
15 de abril de 2024



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Modelación del oscilador armónico y población bajo migración vía Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

por

Oscar Hernández Torres

Asesorado por

Dr. Hugo Adán Cruz Suárez

Puebla Pue.
15 de abril de 2024

Título: Modelación del oscilador armónico y población bajo migración
vía Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

Estudiante: OSCAR HERNÁNDEZ TORRES

COMITÉ

Dr. Carlos Camilo Garay
Presidente

Dr. Ruy Alberto López Ríos
Secretario

Dr. Rei Israel Ortega Gutiérrez
Vocal

Dr. Hugo Adán Cruz Suárez
Asesor

IV

A mis padres, Obdulia y Gerardo.

But, I'll live for you, my selfless love.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres por todo su apoyo y dedicación para lograr que pudiera realizar mi carrera, por todo su cariño y atención.

A mi director de tesis Hugo Adán por asesorarme en todo este proceso, por siempre tener paciencia en aquellas dudas que se me presentaban, por sus ideas y enseñanzas.

A mis profesores de la carrera, que me brindaron sus conocimientos y consejos, sin poder mencionar a todos: Profesor Soriano, con quien aprendí a conllevar de mejor manera la carrera, sus enseñanzas y su compromiso con nosotros. Profesora Mónica Macías, una grandiosa persona y excelente docente, cursar materias con ella, siempre me motivó a querer indagar y aprender más en todas mis investigaciones.

A mis amigos de la carrera con quienes pasé felices momentos, pero también tristes, Zaira, Alexis y Ximena. A personas con quienes inesperadamente coincidí y se han vuelto una parte muy importante de mi vida, Zury y Esteban; También con quienes a pesar de ya no vernos tanto, el cariño y lealtad se han mantenido, Yalin y Zugeiri.

A mi hermanita, tíos y primas por tanto cariño que he recibido de ellos.

Quisiera expresar mi sincero agradecimiento a VIEP por la generosa beca concedida para la realización de esta tesis. Esta oportunidad ha sido fundamental para llevar a cabo mi investigación y contribuir al avance del conocimiento en las ciencias físico matemáticas.

Aprecio profundamente el apoyo financiero proporcionado, que no solo ha allanado el camino para la ejecución de este proyecto, sino que también ha fortalecido mi compromiso con la excelencia académica y la contribución significativa al ámbito científico.

Asimismo, deseo expresar mi gratitud al Dr. Hugo Adán Cruz Suárez por su confianza en mi propuesta de investigación. Su respaldo ha sido una fuente de inspiración para abordar este desafío con dedicación y determinación.

Esta beca no solo ha facilitado el desarrollo de mi proyecto, sino que también ha enriquecido mi experiencia académica de manera invaluable. Estoy emocionado por la oportunidad de aportar nuevos conocimientos a la comunidad científica, y este logro no habría sido posible sin el respaldo de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

Nuevamente, gracias por brindarme esta oportunidad única, la cual no solo ha impactado mi carrera académica, sino que ha consolidado mi compromiso con la investigación y la excelencia científica.

Resumen

Las matemáticas han ayudado a evolucionar nuestra comprensión de nosotros mismos y del universo en el que vivimos, desde nuestro propio origen y, seguramente, hasta el fin. La humanidad usará esta herramienta para aprender y desarrollar conocimiento que pueda garantizar su supervivencia y mejorarla, pero también para lograr el entendimiento de aquello que aún desconoce y prevalecerá en el futuro, como grandes desafíos que aún tiene por enfrentar.

El desarrollo de las matemáticas siempre ha sido un hito fundamental en cualquiera de sus etapas. ¿Qué sería de la invención del cálculo sin el desarrollo de sistemas numéricos que permitieran al hombre realizar una simple suma? La probabilidad ha sido un descubrimiento "nuevo", claro, si nos situamos en una línea temporal donde hay vestigios de esta ciencia dejados por los antiguos babilonios. Su desarrollo ha tenido enormes y considerables avances en el último siglo, desde sus orígenes que se remontan a grandes mentes como Fermat o Pascal, hasta la invención teórica que la constituyó como una ciencia pura. Entonces, empiezan a sobresalir nombres como Kolmogorov, Markov, Fisher, etc. Uno de los avances más importantes, del cual se abordan sus aplicaciones en este trabajo, es la construcción de una nueva integral bajo un contexto estocástico, más precisamente la integral de Itô y los resultados siguientes que unen la probabilidad con otra de las áreas más importantes de las matemáticas: Ecuaciones Diferenciales.

El desarrollo del cálculo es, hasta ahora, quizás uno de los mayores logros de la humanidad. En la modelación matemática, nos ha permitido entender y estudiar fenómenos sociales, físicos, biológicos y químicos. En la modelación se requiere mucha abstracción para poder construir un sistema que explique la información de algún fenómeno; sin embargo, también se requiere de otras herramientas para que estos resultados sean útiles. La programación y los métodos numéricos constituyen el puente entre la abstracción y una utilidad real para la humanidad, ya que las computadoras son capaces de optimizar procesos que nosotros simplemente no podríamos.

Los modelos matemáticos que se han desarrollado a menudo se adaptan a una situación particular, tratando de capturar la mayor información posible en un sistema observable. Sin embargo, hay información que muchas veces queda fuera de nuestro control y que difícilmente es posible calcular sus efectos o el momento en que pueda emerger. Como se verá, esta información "no observada" es un fenómeno completamente aleatorio que naturalmente no puede ser descrito como parte de un modelo determinista. Se debe incursionar en una teoría más desarrollada de modelación en la que un sistema pueda tener características indeterministas, pero conservando la parte que no lo es.

En esta tesis, se desarrollan modelos estocásticos, es decir, sistemas que expliquen fenómenos tratando de juntar la mayor información posible, tanto la que es determinista como la que no. A esta última, se le llamará "ruido". Se observa, que toda esta información aleatoria puede ser explicada por un resultado probabilístico el cual se denomina movimiento browniano. Así pues, se introducirá la noción de ecuaciones diferenciales estocásticas, las cuales serán primordiales para aplicaciones en dos ciencias: física y biología, que de manera breve se resumen:

- El oscilador armónico estocástico es la extensión probabilística del mismo fenómeno visto de manera determinista. En una primera instancia, se estudia el modelo más simple, que es el resorte amortiguado, con el objetivo de comprender e inducir a una ecuación diferencial estocástica. Se explica el proceso de discretización de una ecuación diferencial para obtener

su forma estocástica. Posteriormente, se aborda un fenómeno más complejo, el péndulo doble, cuya forma matemática está constituida por un sistema de ecuaciones diferenciales. De esta manera, se introducen los sistemas de ecuaciones estocásticas (EDE's) junto con formas más complejas de elementos probabilísticos, como el movimiento browniano multidimensional. Se comparan tanto las soluciones estocásticas como las deterministas, con el propósito de realizar un análisis y resaltar los resultados que presentan los modelos aleatorios en comparación con los deterministas.

- Con las bases establecidas para crear y desarrollar un modelo de ecuaciones diferenciales estocásticas, nos sumergimos en el estudio de un fenómeno biológico: el modelo logístico aplicado a una especie migratoria de dos fases, en particular a la ballena gris en México. Se trata de una especie marina para la cual se han recopilado datos reales, los cuales son procesados para ajustarlos a los modelos mencionados, posteriormente, se simula el sistema determinista y el estocástico, para compararlos, con el fin de enfatizar como los datos verdaderos obedecen de mejor manera el modelo probabilístico. Este resultado contribuye a un mejor entendimiento del sistema y del fenómeno en cuestión.

Un factor crucial para llevar a cabo estas investigaciones es la implementación de métodos numéricos, en particular, los métodos de Euler-Maruyama y Runge-Kutta de cuarto orden. Estos métodos son el medio a través del cual se discretizan los modelos, permitiéndonos programarlos y obtener simulaciones que, según la teoría, convergen o se aproximan a la solución exacta.

El desarrollo de este trabajo implica contar con la teoría suficiente que garantice su fiabilidad. Por ello, se exploran y presentan resultados significativos de procesos estocásticos y cálculo estocástico, que constituyen nuestras principales herramientas y nos proporcionan todas las habilidades técnicas necesarias para llevar a cabo este trabajo de tesis.

Palabras clave: *Proceso de Wiener, Movimiento Browniano, Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, Itô, Runge Kutta, Sistemas, Física, Oscilador Armónico, Péndulo Doble, Resorte Amortiguado, Biología, Ballena Gris, Logístico, Simulación, Modelación.*

Índice general

1. Movimiento browniano	1
1.1. ¿Qué es el movimiento browniano?	1
1.2. Construcción matemática	2
1.3. Propiedades y simulación	5
1.4. Movimiento browniano multidimensional.	7
1.5. Movimiento browniano bidimensional correlacionado	8
2. Integral Estocástica	11
2.1. Espacios \mathcal{L}^2	11
2.2. Integral de Itô	12
3. Ecuaciones diferenciales estocásticas	17
3.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias	17
3.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas	18
3.3. Formula de Itô	19
3.4. Aproximación numérica de EDE	20
3.4.1. Método de Euler-Maruyama	20
3.4.2. Métodos de Runge Kutta para EDE	21
4. Aplicaciones de EDE	23
4.1. Modelación matemática estocástica	23
4.2. Movimiento armónico simple	23
4.2.1. Dinámica poblacional de una especie migratoria de dos etapas con captura.	30
4.2.2. Modelo logístico estocástico.	31
4.2.3. La ballena gris.	33
5. Conclusiones	37
Bibliografía	43

Capítulo 1

Movimiento browniano

[Caro, 2020] “Puedes ver la multitud de pequeñas partículas moviéndose en un sinnúmero de caminos, su baile es un indicio de movimientos subyacentes de materia escondidos de nuestra vista,... así el movimiento de los átomos emerge gradualmente de un nivel de sentido, que estos cuerpos están en movimiento, movidos por soplos que parecen invisibles”.

Sobre la naturaleza de las cosas, Lucrecio.

1.1. ¿Qué es el movimiento browniano?

El movimiento browniano, como se le llama usualmente, debe su nombre a Robert Brown, a quien se le atribuye su descubrimiento por observar un grano de polen suspendido en el agua y ver cómo las partículas comenzaban a experimentar movimientos "sin sentido". Sin embargo, no fue él quien descubrió este fenómeno, ya que cualquier persona que observara agua a través de un microscopio es propensa a ver pequeñas partículas en movimiento.

En [Antonio, 2013] se señala que la primer teoría dinámica del MB sugería que las partículas estaban vivas, lo que llevaba a un problema observacional al preguntarse si una partícula era un organismo, involucrando así el miedo al vitalismo.

Brown negó haber afirmado que las partículas estuvieran animadas. Su teoría se basa en que la materia está compuesta por pequeñas partículas a las que llamó moléculas activas, las cuales exhiben un movimiento rápido e irregular que tiene su origen en las propias partículas y no en el fluido circundante.

La contribución de Robert fue establecer el MB como un fenómeno importante, demostrar su presencia en materia orgánica como en inorgánica, y refutar mediante la experimentación explicaciones mecánicas simplistas del fenómeno.

En un contexto histórico, [Rincón, 2012], es Albert Einstein quien da una solución matemática a este fenómeno físico al resolver la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \tag{1.1}$$

como un fenómeno dinámico de ecuaciones diferenciales parciales, sin embargo, en este trabajo daremos un enfoque matemático para su construcción, dado por un proceso límite al cual se denominará proceso de Wiener, aclarando que este último es el modelo matemático y el movimiento Browniano el fenómeno físico.

1

¹La ecuación de calor (1.1) es una ecuación en derivadas parciales que describe fluctuaciones de densidad en un material que se difunde.

1.2. Construcción matemática

En primer instancia, definimos lo que es un proceso estocástico con la notación de [Rincón, 2012], sugiriendo consultar [Oksendal, 2013] para un mayor adentramiento de los procesos estocásticos.

Definición 1.2.1. *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizada por un conjunto T , llamado espacio parametral, y con valores en un conjunto S llamado espacio de estados.*

Definición 1.2.2. *Sea X_n un proceso estocástico $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ con valores en \mathbb{Z} , tal que $X_0 = 0$, con función de probabilidad:*

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) := \begin{cases} p, & \text{si } j = i + 1 \\ q, & \text{si } j = i - 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

con $i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ es una caminata aleatoria.

Observemos que:

$$X_1 = X_0 + \varepsilon_1, \dots, X_{n+1} = X_n + \varepsilon_{n+1}.$$

tal que para $i \in 1, \dots, n$:

$$\varepsilon_i := \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } p. \\ -1, & \text{con probabilidad } q = 1 - p. \end{cases}$$

se tiene además que X_n es una cadena de Markov, haciendo un desarrollo algebraico:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + \varepsilon_{n+1} = X_{n-1} + \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} \\ &= X_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i \iff X_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i \\ &\iff X_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

Teorema 1.2.1. *Sea X_n una caminata aleatoria, $n \in 1, 2, \dots$, entonces:*

$$\begin{aligned} E[X_n] &= n(p - q), \\ \text{Var}[X_n] &= 4npq. \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E[X_n] &= E \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^n E[\varepsilon_i] \\ &= \sum_{i=1}^n (p - q) \\ &= n(p - q), \text{ para } n \in 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Para agilizar la prueba del segundo resultado, empezamos con la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[\varepsilon_i] &= E[\varepsilon_i^2] - E^2[\varepsilon_i] \\
 &= p + q - (p - q)^2 \\
 &= 1 - (p - q)^2 \\
 &= (p + q)^2 - (p - q)^2 \\
 &= [(p + q) + (p - q)][(p + q) - (p - q)] \\
 &= (2p)(2q) \\
 &= 4pq.
 \end{aligned}$$

Por ser ε_i , con $i \in [1, \dots, n]$ independientes, se tiene que:

$$\text{Var}[X_n] = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[\varepsilon_i] = n[4pq] = 4npq.$$

□

Una caminata aleatoria simétrica, es una caminata aleatoria que cumple: $p = \frac{1}{2} = q$, es decir:

$$\varepsilon_i := \begin{cases} 1 & p = 1/2, \\ -1 & q = 1/2. \end{cases}$$

Por el teorema 1.2.1. se tiene que: $E[X_n] = 0$ y $\text{Var}[X_n] = n$.

Mediante un proceso de normalización, para $t \geq 0$, y usando la parte entera de un número², definamos:

$$X_n(t) = \sum_{i=1}^{[nt]} \frac{\varepsilon_i - E[X_n]}{\sqrt{\text{Var}[X_n]}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} \varepsilon_i.$$

Denotemos por $\phi_n(u)$ a la función generadora de momentos de X_n :

$$\begin{aligned}
 \phi_n(u) &= E[\exp(uX_n(t))] = E\left[\exp\left(\frac{u}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} \varepsilon_i\right)\right] \\
 &= E\left[\prod_{i=1}^{[nt]} \exp\left(\frac{u}{\sqrt{n}} \varepsilon_i\right)\right] = \prod_{i=1}^{[nt]} E\left[\exp\left(\frac{u}{\sqrt{n}} \varepsilon_i\right)\right] \\
 &= \prod_{i=1}^{[nt]} M_\varepsilon\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = \prod_{i=1}^{[nt]} \left(\frac{1}{2} \exp\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-u}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
 &= \left[\frac{1}{2} \exp\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-u}{\sqrt{n}}\right)\right]^{[nt]}
 \end{aligned}$$

²La parte entera de un número $x \in \mathbb{R}$ es la función: $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida de la siguiente manera:

$$[x] = \min\{k \in \mathbb{Z} | x \leq k\}$$

Aplicando la función logaritmo natural a $\phi_n(u)$ y haciendo $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \ln(\phi_n(u)) &= \ln\left(\left[\frac{1}{2}\exp\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(\frac{-u}{\sqrt{n}}\right)\right]^{[nt]}\right) \\ &= [nt]\ln\left(\frac{1}{2}\exp\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(\frac{-u}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \left[\frac{t}{x^2}\right]\ln\left(\frac{e^{ux} + e^{-ux}}{2}\right). \end{aligned}$$

Ahora, notemos que $x \rightarrow 0^+$ cuando $n \rightarrow \infty$, así:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\phi_n(u)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{t}{x^2}\right] \ln\left(\frac{e^{ux} + e^{-ux}}{2}\right)$$

Aplicando dos veces de la regla de L' Hopital ³, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\phi_n(u)) &= \frac{tu^2}{2}, \text{ es decir:} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n(u)) &= e^{\frac{tu^2}{2}}. \end{aligned}$$

Sea $Z \sim N(0, t)$, su función generadora de momentos es $M_z(u) = e^{tu^2/2}$, por la convergencia de la medida de probabilidad, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n(u)) = e^{tu^2/2} = M_z(u)$. Por lo tanto:

$$X_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} W(t) \sim N(0, t). \quad (1.2)$$

Se cumplen las siguientes condiciones para $W(t)$:

1. $W(0) = 0$.

Demostración.

$$W(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

□

2. Sea $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $X_n(t_i) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt_i]} \varepsilon_i$, para $i \in [0, \dots, n]$, notemos que $t_i > t_{i-1} \iff nt_i > nt_{i-1} \iff [nt_i] > [nt_{i-1}]$, entonces:

$$\begin{aligned} X_n(t_i) - X_n(t_{i-1}) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt_i]} \varepsilon_i - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt_{i-1}]} \varepsilon_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[nt_{i-1}]+1}^{[nt_i]} \varepsilon_i. \end{aligned}$$

³Regla de L' Hopital: La regla establece que si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son diferenciables en un intervalo abierto que contiene un número c , excepto posiblemente en c mismo, y si $f(c) = g(c) = 0$ o $f(c) = g(c) = \infty$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Siempre y cuando el límite de la fracción original exista como una indeterminación del tipo: "0/0" o " ∞/∞ ".

Sean $l, m \in [1, n] : l > m$ entonces:

$$\begin{aligned}
 & P[X_n(t_l) - X_n(t_{l-1}) = S_l | M_n(t_m) - M_n(t_{m-1}) = S_m] \\
 &= \frac{P[X_n(t_l) - X_n(t_{l-1}) = S_l, M_n(t_m) - M_n(t_{m-1}) = S_m]}{M_n(t_m) - M_n(t_{m-1}) = S_m} \\
 &= \frac{P\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[nt_{l-1}]+1}^{[nt_l]} \varepsilon_i = S_l, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[nt_{m-1}]+1}^{[nt_m]} \varepsilon_i = S_m\right]}{\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[nt_{m-1}]+1}^{[nt_m]} \varepsilon_i = S_m\right]} \\
 &= \frac{P\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[nt_{l-1}]+1}^{[nt_l]} \varepsilon_i = S_l\right] P\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[nt_{m-1}]+1}^{[nt_m]} \varepsilon_i = S_m\right]}{P\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[nt_{m-1}]+1}^{[nt_m]} \varepsilon_i = S_m\right]} \\
 &= P\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[nt_{l-1}]+1}^{[nt_l]} \varepsilon_i = S_l\right] \\
 &= P[X_n(t_l) - X_n(t_{l-1}) = S_l].
 \end{aligned}$$

Es decir, $X_n(t_l) - X_n(t_{l-1}) = S_l$ y $M_n(t_m) - M_n(t_{m-1}) = S_m$ son independientes, para $l > m$, por tanto, $W_n(t_l) - W_n(t_{l-1})$ y $W_n(t_m) - W_n(t_{m-1})$ tiene n incrementos independientes.

3. $W(t) : t \neq 0$, tiene trayectorias continuas en el tiempo. Para verificar la demostración rigurosa ver [Mörsters and Peres, 2010], pág. 14.
4. $W(t)$ se distribuye normalmente, con media 0 y varianza σ^2 , se deduce de (1.2).

Un proceso que cumple con las propiedades siguientes es un proceso de Wiener o Movimiento browniano, así definimos:

Definición 1.2.3. *Un proceso de Wiener unidimensional de parámetro σ^2 es un proceso estocástico $\{W_t : t \geq 0\}$ con valores en \mathbb{R} que cumpla con las propiedades:*

1. $W_0 = 0$ c.s⁴.
2. W_t tiene incrementos independientes y estacionarios.
3. w_t tiene trayectorias continuas.
4. La variable $W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2(t - s))$, para $0 \leq s \leq t$.

1.3. Propiedades y simulación

Simular el movimiento browniano es una tarea sencilla cuando se tienen funciones que permitan simular variables aleatorias, de ser así, podemos simular un proceso de Wiener usando el algoritmo descrito en el apéndice.

Repetiendo el algoritmo una cantidad finita de veces, las graficamos en una sola imagen y se analiza visualmente su comportamiento natural, mismo que se muestra en la siguiente imagen, en la cual se simuló 50 veces el proceso y como resultado se observa:

⁴Casi seguramente se define como el evento que ocurre con probabilidad uno, en esté caso, la convergencia:

$$P(W_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(0) = 0) = 1$$

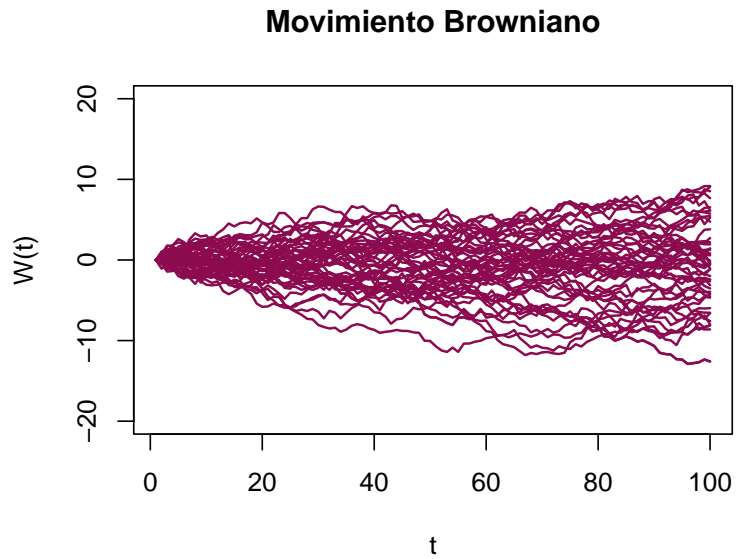


Figura 1.1: Simulaciones del movimiento browniano, para $t = 100$ y $N = 100$.

Tras n simulaciones del movimiento browniano, se observa un comportamiento promedio que este toma en el tiempo:

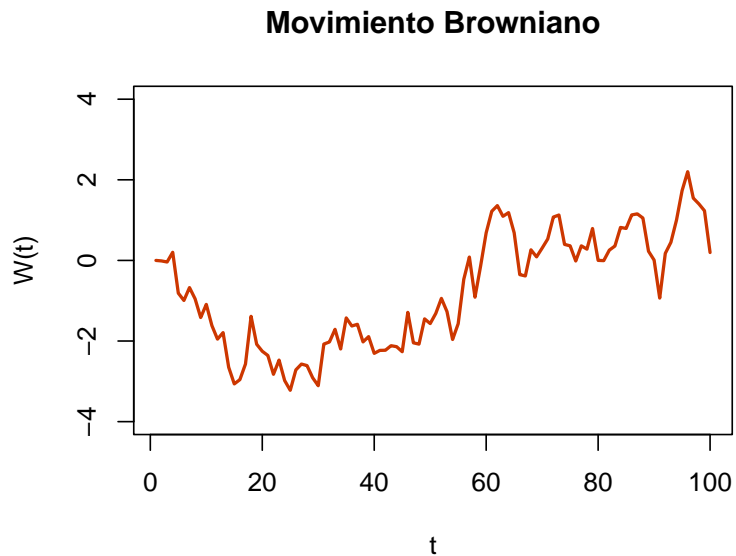


Figura 1.2: Simulación del movimiento browniano, $t = 100$, $N = 100$.

En general, el MB es de suma importancia en el desarrollo del cálculo estocástico, pues posee propiedades que permiten la construcción matemática de una integral muy particular, que si bien, se puede definir con respecto a otro tipo de procesos, el movimiento browniano es con el que se

obtienen resultados muy importantes, así en lo que sigue, se enunciarán algunas características que nos servirán para entender y justificar aspectos fundamentales de la integral de Itô y las ecuaciones diferenciales estocásticas.

Antes de enunciar algunos resultados importantes del movimiento browniano, enunciamos algunos conceptos fundamentales de la teoría de procesos estocásticos:

Definición 1.3.1. Una filtración es una colección de σ -álgebras $\{\mathfrak{F}_n\}$ con $n \geq 1$, tal que $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{F}_m$, cuando $n \leq m$.

Definición 1.3.2. Un proceso $\{X_n\}$ es adaptado a una filtración $\{\mathfrak{F}_n\}$ si la variable X_n es \mathfrak{F}_n -medible, para cada $n \leq 1$.

Teorema 1.3.1. El proceso de Wiener $\{W_t : t \geq 0\}$ es una martingala.

Demostración. Es evidente que W_t es adaptada a su propia filtración natural \mathfrak{F}_s . Sean t, s tales que $t > s \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned} E[W_t | \mathfrak{F}_s] &= E[W_t - W_s + W_s | \mathfrak{F}_s] \\ &= E[W_t - W_s | \mathfrak{F}_s] + E[W_s | \mathfrak{F}_s] \\ &= W_s. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3.2. Con probabilidad 1, el proceso de Wiener $\{W_t | t \geq 0\}$, no es diferenciable en ningún t .

1.4. Movimiento browniano multidimensional.

El movimiento browniano multidimensional o proceso de Wiener multidimensional, según [Rincón, 2012], es una extensión de nuestra definición de proceso de Wiener con valores en \mathbb{R}^n . Evidentemente, su aplicación se vuelve más compleja al considerar varias dimensiones, lo cual nos permite adentrarnos en el análisis matricial y todas las aplicaciones que pueden surgir al emplear estas herramientas. Por ende, enunciamos la definición formal según la notación de [Oksendal, 2013]:

Definición 1.4.1. Un proceso estocástico con valores en \mathbb{R}^n , $W_t := (W_t^1, \dots, W_t^n)$ es un movimiento browniano multidimensional si cumple que:

- Para cada $k = 1, \dots, n$, W_t^k , es un proceso de Wiener unidimensional.
- Las σ -álgebras generadas $W^k := \mathcal{U}(W^k(t) | t \leq 0)$, son independientes, $k = 1, \dots, n$.

Bajo los supuestos de los puntos anteriores, podemos construir un espacio de probabilidad y en él, n movimientos brownianos unidimensionales independientes W_t^k , $k = 1, \dots, n$.⁵ Entonces W_t es un movimiento browniano n -dimensional.

A continuación, se presentan las simulaciones realizadas en Python para el caso bidimensional y tridimensional del movimiento browniano:

⁵En esta tesis adoptaremos la notación W_t , sin embargo es usualmente encontrada en otros textos como $W(t)$, sin pérdida de generalidad, W_t^i representa la i -ésima componente del movimiento browniano W_t n -dimensional.

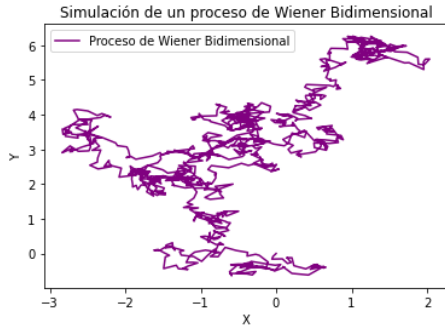


Figura 1.3: Simulación del proceso de Wiener Bidimensional.

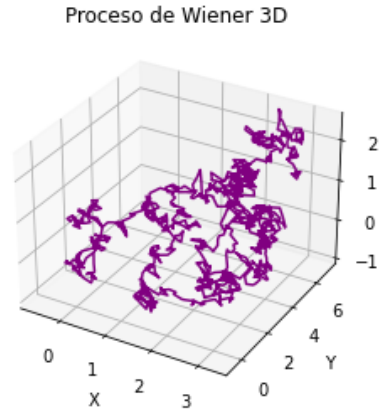


Figura 1.4: Simulación del proceso de Wiener Tridimensional.

1.5. Movimiento browniano bidimensional correlacionado

Aunque la caracterización del proceso de Wiener correlacionado [Chen, 2016] se extiende a n dimensiones, pero para nuestros fines, sólo abordaremos la correlación del movimiento browniano bidimensional, ya que será de gran importancia en las investigaciones que se realizan en este trabajo.

Definición 1.5.1. Sea X un proceso estocástico y consideremos una partición Φ del intervalo $[0, t]$, tal que:

$$\Phi : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = t.$$

La norma de Φ se define como:

$$\|\Phi\| = \max_{1 \leq i \leq n-1} t_{i+1} - t_i.$$

Entonces, definimos la variación cuadrática de X como:

$$\langle X \rangle_t = \lim_{\|\Phi\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2.$$

Definición 1.5.2. La covarianza entre los procesos estocásticos X, Y se define como:

$$\langle X, Y \rangle_t = \lim_{\|\Phi\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}).$$

Así, sea $V = (V_1, V_2)$ un proceso de Wiener bidimensional y

$$d\langle V_i, V_j \rangle_t = \begin{cases} dt & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nuestro objetivo, como el de [Chen, 2016], es la construcción de un proceso de Wiener n -dimensional W , basado en el proceso V , con una matriz de correlación $p(t) = (p_{ij}(t))_{n \times 2}$, tal que:

$$d\langle W^i, W^j \rangle_t = p_{ij}(t)dt.$$

Si la matriz de correlación es definida positiva, tiene descomposición de la forma:

$$p(t) = C_t C_t^*,$$

donde C_t es una matriz triangular superior con entradas reales y positivas, y C_t^* es la transpuesta de C_t . Entonces, $dW_t^i = C_t dV_t$, si suponemos que $C_t = (c_{ij}(t))_{2 \times 2}$, entonces dW_t puede ser escrita como:

$$dW_t^i = \sum_{k=1}^2 c_{ik}(t) dV_t^k.$$

Así, $dW_t^i = \sum_{k=1}^2 c_{ik}(t) c_{jk}(t) dt = p_{ij}(t) dt$.

Por tanto, en el espacio bidimensional la matriz de correlación tiene la forma:

$$p(t) = \begin{bmatrix} 1 & p_1(t) \\ p_1(t) & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Como $p(t) = C_t C_t^*$, se tiene que:

$$C_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_1(t) & \sqrt{1 - p_1^2(t)} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_1(t) & \sqrt{1 - p_1^2(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dV_t^1 \\ dV_t^2 \end{bmatrix}$$

A continuación se presenta la simulación de dos movimientos brownianos correlacionados, cuyo código para la implementación en Python se puede encontrar en el apéndice, con coeficiente de correlación $\rho = 0.8$:

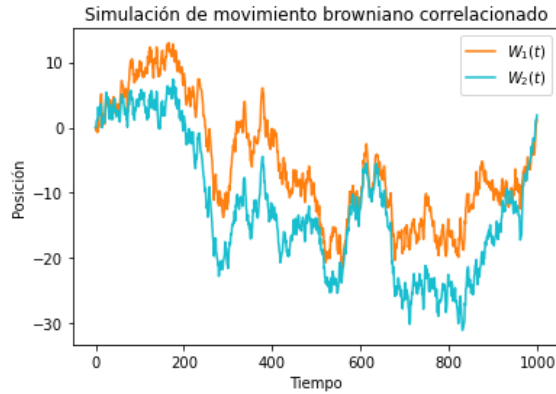


Figura 1.5: Simulación de $W_1(t)$ y $W_2(t)$ con $\rho = 0.8$.

Capítulo 2

Integral Estocástica

Para comenzar con la construcción de la integral estocástica, en particular, la integral de Itô, se enuncia una definición importante acerca del espacio al que pertenecerán los procesos X_t para los cuales existe la integral.

2.1. Espacios \mathcal{L}^2

Definición 2.1.1. Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, se define el siguiente espacio vectorial de variables aleatorias:

$$\mathcal{L}^2 := \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : E[|X|^2] < \infty\}$$

Definición 2.1.2. Sea $X \in \mathcal{L}^2$ definimos una norma sobre el espacio \mathcal{L}^2 como sigue:

$$\|X\|_2 := (E[|X|^2])^{\frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

Nota: La ecuación (2.1) se puede escribir como:

$$\|X\|_2^2 := \int |X(w)|^2 d\mathbb{P}(w).$$

El espacio \mathcal{L}^2 es semi-normado, pues se cumplen las siguientes propiedades:

- $\|X\| \geq 0$.
- $\|X\| = 0 \iff X = 0$ c.s.
- $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.
- $\|\alpha X\| = |\alpha| \cdot \|X\|$, α constante.

Los detalles en [Allen, 2007], también se puede demostrar como en [Rincón, 2012], que \mathcal{L}^2 es un espacio de Banach, es decir, toda sucesión de Cauchy en este espacio tiene límite en él. A la convergencia generada por esta norma se le llama convergencia en \mathcal{L}^2 o en *media cuadrática* y la denotamos por:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} X, \text{ i.e. } E[|X_n - X|^2] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

2.2. Integral de Itô

Definiremos la integral de Itô para procesos estocásticos simples, luego mediante una propiedad del espacio \mathcal{L}^2 se extiende la definición a procesos más generales.

Denotamos al espacio lineal \mathcal{L}_{ad}^2 dado por todos los procesos $X : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, adaptados al proceso de Wiener, con $t \in [a, b]$, que cumplen con la condición:

$$\|X\|_{2,ad}^2 := E \left[\int_a^b |X_t|^2 dt \right] < \infty. \quad (2.2)$$

Donde $\|X\|_{ad}^2$ es la norma para este espacio lineal.

Definición 2.2.1. Sea $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, una partición del intervalo $[a, b]$, $1(w)$ la función indicadora, un proceso estocástico simple es de la forma:

$$X(t, w) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i-1}(w) 1_{[t_{i-1}, t_i]}(t), \text{ con } w \in \Omega, t \in [a, b].$$

Donde $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$ es una colección de variables aleatorias que son cuadrado integrables y adaptadas a la filtración:

$$\mathcal{F}_s = \sigma(W(s) : 0 \leq s \leq t).$$

Denotamos al conjunto de procesos estocásticos simples por $\mathcal{H}_{2,ad}^2$. Por tanto, estamos en condiciones de dar la primer definición de la integral de Itô para procesos simples:

Definición 2.2.2. Sea $X(t, w) \in \mathcal{H}_{ad}^2$, definimos la integral de Itô como sigue:

$$I(X) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i-1}(w) [W(t_i) - W(t_{i-1})] = \int_a^b X(t, w) dW(t)$$

Enunciaremos algunas propiedades importantes de está integral:

Teorema 2.2.1. La integral de Itô es lineal, es decir, para los procesos simples X, Y y una constante $c \in \mathbb{R}$ se cumple la igualdad:

$$I(cX + Y) = cI(X) + I(Y).$$

Teorema 2.2.2. La integral de Itô tiene esperanza cero.

Demostración.

$$\begin{aligned} E[I(x)] &= E \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i-1}(w) [W(t_i) - W(t_{i-1})] \right] \\ &= \sum_{i=1}^n E[\varepsilon_{i-1}(w) [W(t_i) - W(t_{i-1})]] \\ &= \sum_{i=1}^n E[E[\varepsilon_{i-1}(w) [W(t_i) - W(t_{i-1})] | \mathcal{F}_{i-1}]] \\ &= \sum_{i=1}^n E[\varepsilon_{i-1}(w) E[W(t_i) - W(t_{i-1})]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.3. *La integral de Itô es cuadrado integrable y se cumple la siguiente igualdad, llamada **Isometría de Itô**.*

$$E[|I(X)|^2] = \int_a^b E[|X(t)|^2] dt$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E[|I(X)|^2] &= E \left[\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i-1}(w)[W(t_i) - W(t_{i-1})] \right) \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{j-1}(w)[W(t_j) - W(t_{j-1})] \right) \right] \\ &= \sum_{i,j} E[\varepsilon_{i-1}(w)\varepsilon_{j-1}(w)[W(t_i) - W(t_{i-1})][W(t_j) - W(t_{j-1})]] \end{aligned}$$

Supongamos que $i \neq j$, en particular para $i < j$:

$$\begin{aligned} E[|I(X)|^2] &= \sum_{i,j=1}^n E[E[\varepsilon_{i-1}(w)\varepsilon_{j-1}(w)[W(t_i) - W(t_{i-1})][W(t_j) - W(t_{j-1})] | \mathcal{F}_{t_{j-1}}]] \\ &= \sum_{i,j=1}^n E[\varepsilon_{i-1}(w)\varepsilon_{j-1}(w)[W(t_i) - W(t_{i-1})]E[W(t_j) - W(t_{j-1})]] \\ &= \sum_{i,j=1}^n E[\varepsilon_{i-1}(w)\varepsilon_{j-1}(w)[W(t_i) - W(t_{i-1})] \times 0] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $i = j$, entonces:

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_{i-1}^2[W(t_i) - W(t_{i-1})]^2] &= E[E[\varepsilon_{i-1}^2[W(t_i) - W(t_{i-1})]^2 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]] \\ &= E[\varepsilon_{i-1}^2 E[(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2]] \\ &= E[\varepsilon_{i-1}^2(t_i - t_{i-1})] \\ &= (t_i - t_{i-1})E[\varepsilon_{i-1}^2]. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} E[|I(X)|^2] &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})E[\varepsilon_{i-1}^2] \\ &= \sum_{i=1}^n E[\varepsilon_{i-1}^2] \int_a^b I_{t_i-t_{i-1}}(t) dt \\ &= \int_a^b E \left[\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i-1} I_{t_i-t_{i-1}}(t) \right)^2 \right] dt \\ &= \int_a^b E[|X(t)|^2] dt. \end{aligned}$$

□

Esto es,

$$\|I(X)\|_2^2 = \|X(t)\|_{2,ad}^2 \tag{2.3}$$

La isometría de Itô establece que, tanto el proceso X como $I(X)$ tienen la misma norma en sus respectivos espacios, así la integral de Itô asigna a cada elemento de $\mathcal{H}_{2,ad}^2$ una variable del espacio \mathcal{L}^2 , induciendo así una transformación lineal, que además es continua, por la isometría de Itô. Véase [Rincón, 2012].

$$I : \mathcal{L}_{ad}^2 \mapsto \mathcal{L}^2. \quad (2.4)$$

Así la integral de Itô asocia un proceso $X \in \mathcal{H}_{2,ad}^2$ a una variable aleatoria $X \in \mathcal{L}^2$.

Ahora se enuncia un resultado importante sobre el espacio \mathcal{L}^2 que nos permitirá definir la integral de Itô sobre procesos estocásticos más generales, al cual llamaremos resultado de aproximación.

Teorema 2.2.4. *Sea $X \in \mathcal{L}_{ad}^2$ entonces existe una sucesión $\langle X_n \rangle \subset \mathcal{H}_{2,ad}^2$ que converge en media cuadrática a X , esto es:*

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} X \iff \|X_n - X\|_{2,ad} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Definición 2.2.3. *Definición de la integral de Ito para $X \in \mathcal{L}_{ad}^2$.*

Sea $X \in \mathcal{L}_{ad}^2$, por el teorema (2.2.4) de aproximación, existe una sucesión $\langle X_n \rangle \subset \mathcal{H}_{2,ad}^2$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b E [|X_n - X|^2] dt = 0$$

Así para cada $n, m \geq 1$ se tiene:

$$\|(I(X_n) - I(X_m))^2\|_{2,ad} = \|I(X_n - X_m)\|_{2,ad}^2 = E [|I(X_n - X_m)|^2]$$

$$\text{Así, } \lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_a^b E [|X_n - X_m|^2] dt = 0.$$

$\therefore \langle I(X_n) \rangle$ es de Cauchy en \mathcal{L}^2 , por consiguiente se define la **Integral de Itô** como el límite:

$$I(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(X_n). \quad (2.5)$$

Sean $X, Y \in \mathcal{L}_{ad}^2$, a constante, se cumplen las siguientes propiedades para la integral estocástica:

- $I(aX + Y) = aI(X) + I(Y)$

Demostración. Como $X, Y \in \mathcal{L}_{ad}^2$, existen $\langle X_n \rangle, \langle Y_n \rangle \subset \mathcal{H}_{2,ad}^2$, tal que:

$$\begin{aligned} I(aX + Y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(aX_n + Y_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [aI(X_n) + I(Y_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} aI(X_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} I(Y_n) \\ &= aI(X) + I(Y). \end{aligned}$$

□

Para las siguientes propiedades, la demostración se sigue de la definición de la integral de Itô.

- $E[I(X)] = E\left(\lim_{n \rightarrow \infty} I(X_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} E[I(X_n)] = 0.$

- $Var[I(X)] = E [|I(X)|^2] = \int_a^b E[X^2] dt.$

A continuación resolvemos la integral estocástica:

$$\int_a^b W(t)dW(t).$$

Siguiendo la definición de la integral de Itô:

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{i=1}^n W(t_{i-1})[W(t_i) - W(t_{i-1})] \\ R_n &= \sum_{i=1}^n W(t_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})] \\ L_n + R_n &= \sum_{i=1}^n [W(t_{i-1}) + W(t_i)][W(t_i) - W(t_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n W(t_i)^2 - W(t_{i-1})^2 \\ &= \dots \\ &= W(t_n)^2 - W(t_0)^2 \\ &= W(b)^2 - W(a)^2. \end{aligned}$$

Luego, desarrollando y aplicando artificios algebraicos:

$$\begin{aligned} L_n - R_n &= \sum_{i=1}^n [W(t_i) - W(t_{i-1})]^2 \\ R_n &= L_n + \sum_{i=1}^n [W(t_i) - W(t_{i-1})]^2 \\ 2L_n &= W(b)^2 - W(a)^2 - \sum_{i=1}^n [W(t_i) - W(t_{i-1})]^2 \\ L_n &= \frac{1}{2} \left(W(b)^2 - W(a)^2 - \sum_{i=1}^n [W(t_i) - W(t_{i-1})]^2 \right). \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} I(X_n) &= \frac{1}{2} [W(b)^2 - W(a)^2 - (b - a)]. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$I(X) = \int_a^b W(t)dW(t) = \frac{1}{2} [W(b)^2 - W(a)^2 - (b - a)].$$

Así, es evidente que el cálculo de integrales estocásticas puede volverse bastante complicado, sobre todo en la parte algebraica, al igual que en el cálculo tradicional, se desarrollan algunas técnicas de “integración estocástica”, que facilitan el cálculo de estas, sin embargo, al igual que las integrales clásicas, la gran mayoría no tienen una solución exacta, por ello, en la siguiente sección, analizaremos algunas formas de estas integrales para las cuales se ha desarrollado un método bastante famoso, la fórmula de Itô, pero también abordaremos métodos numéricos que nos permitan aproximar su solución.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales estocásticas

3.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

La modelación matemática mediante ecuaciones diferenciales es una poderosa herramienta que se utiliza prácticamente en toda ciencia como la física, química, económica y social; nos provee de una metodología para poder abstraer de algún fenómeno su representación matemática. De manera general, explica [Evans, 2012], una ecuación diferencial ordinaria (EDO), toma la forma general:

$$\frac{dX}{dt} = b(X(t)), t \geq 0 \quad (3.1)$$

$$X(0) = x_0 \quad (3.2)$$

Donde $X(t)$ es la solución de la EDO, en el caso más simple, esta solución es una función definida en el tiempo, cuya gráfica se denomina curva solución o trayectoria del sistema, con una condición inicial x_0 , matemáticamente se dice que esta es una curva suave, en el sentido de que es diferenciable y continua. Tal como se observa en la imagen:

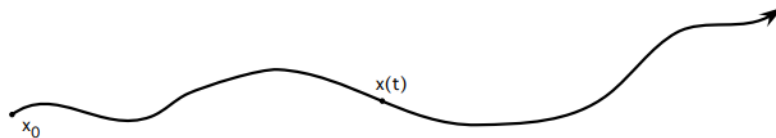


Figura 3.1: Trayectoria de una ecuación diferencial ordinaria.

Nota: “Trajectory of the differential equation ODE”, por [Evans, 2012].

Sin embargo, en la realidad, cuando ajustamos una base de datos reales a un modelo, el comportamiento gráfico no pareciera obedecer a las ecuaciones que lo determinan, pareciendo más a una gráfica como la que se muestra en la figura (3.2).

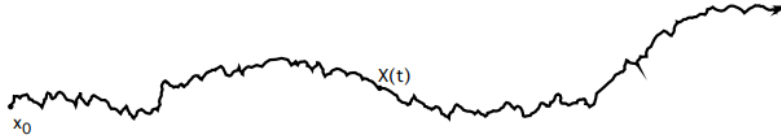


Figura 3.2: Trayectoria de una ecuación diferencial estocástica.
Nota: “Trajectory of a stochastic differential equation (SDE)”, por [Evans, 2012].

Se observan ciertas perturbaciones que hacen ver la trayectoria de forma irregular y no como se esperaría, estos cambios se deben a fenómenos aleatorios que ocurren en lapsos muy pequeños, los cuales nombramos “fluctuaciones”.

Así parece intuitivo que debemos agregar un término extra a la ecuación 3.1, el cual contenga la información generada por estas fluctuaciones aleatorias, a cuyo coeficiente le llamaremos ruido (drift) como normalmente se le llama en la mayoría de textos, el ruido a su vez, estará representado por el diferencial del movimiento browniano, que si bien carece de un sentido matemático, su forma integral es algo de lo que ya tenemos conocimiento previo del capítulo anterior y podremos entender.

3.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Definiremos lo que es una ecuación diferencial estocástica (EDE) unidimensional, siguiendo la notación de [Allen, 2007], luego vamos a trabajar en un contexto n -dimensional, lo cual solo es la extensión de esta definición.

Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad, y sea $\{W_t\}$ el movimiento browniano unidimensional, adaptado a su filtración natural \mathfrak{F} .

Definición 3.2.1. Sea $\{X_t(w) : t \in [0, T]\}$ un proceso estocástico, sean $f(t, x)$, $g(t, x)$ dos funciones de $[0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, si X_t cumple la ecuación:

$$X_t(w) = X_0(w) + \int_0^t f(s, X_s(w))dt + \int_0^t g(s, X_s(w))dW_s(w) \quad (3.3)$$

donde el primer término, corresponde a una integral de Riemman y el segundo término es la integral de Itô, X_t es un proceso de Itô¹, y su forma diferencial es una ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t(w) = f(t, X_t(w))dt + g(t, X_t(w))dW_t(w) \quad (3.4)$$

a los coeficientes² f, g se les suele denominar términos de deriva y difusión, respectivamente.

De la misma manera que existen métodos algebraicos y numéricos para resolver o aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, para las ecuaciones diferenciales estocásticas existe una fórmula que nos proporciona un método para hallar soluciones analíticas exactas. Sin embargo, esta fórmula solo es aplicable a EDE que son un proceso de Itô, y aún así, en la mayoría de los casos que cumplan dicha condición, tal método podría complicarse y convertirse en un problema más difícil de abordar, también exploraremos dos métodos numéricos, los cuales resultan ser una extensión de aproximaciones numéricas famosas. En lo que sigue, hablaremos de la fórmula de Itô y los métodos de Euler-Maruyama y Runge Kutta.

¹Un proceso de Itô también es llamado un proceso de difusión.

²También a f y g se les denomina como los coeficientes: “drift” y “diffusion” de una ecuación estocástica.

3.3. Formula de Itô

Sea un proceso de Itô $\{X_t\}$, sea $F(t, x)$ de clase C^1 en t y de clase C^2 en x , es decir, continua y con derivadas parciales: $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ entonces el proceso $Y_t = F(t, X_t)$ es un proceso de Itô y se cumple la siguiente fórmula:

Teorema 3.3.1. *La fórmula de Itô.*

$$dF(t, X_t) = \left(\frac{\partial F(t, X)}{\partial t} + f(t, X) \frac{\partial F(t, X)}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(t, X) \frac{\partial^2 F(t, X)}{\partial x^2} \right) dt + g(t, X) \frac{\partial F(t, X)}{\partial x} dW_t.$$

Esta fórmula nos permite encontrar los momentos la solución de una EDE y su solución exacta como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.3.1. Sean $\{X_t\} = \{W_t, t \geq 0\}$ y $F(t, x) = tx$, por la fórmula de Itô tenemos:

$$\begin{aligned} d(F(t, W_t)) &= F_t(t, W_t)dt + F_x(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}F_{xx}(t, W_t)(dW_t)^2 \\ d(tW_t) &= W_t dt + t dW_t, \\ \text{si y sólo si } \int_0^t s dW_s &= tW_t - \int_0^t W_s ds. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.2.

$$dX(t)^3 = -\frac{X(t)}{1+t}dt + \frac{1}{1+t}dW(t) \quad (3.5)$$

Sea $f(t, x) = \frac{x}{1+t}$, por la fórmula de Itô se tiene que:

$$dX(t) = f_t(t, W_t)dt + f_x(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, W_t)dt. \quad (3.6)$$

Comparando las coeficientes de (3.5) y (3.6) se tiene que:

$$f_t(t, x) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, x) = -\frac{f(t, x)}{1+t}. \quad (3.7)$$

$$f_x(t, x) = \frac{1}{1+t}. \quad (3.8)$$

De la ecuación de (3.8):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{1}{1+t} \Leftrightarrow f(t, x) = \frac{x}{1+t} + C(t).$$

Sustituyendo en la ecuación (3.7), obtenemos que:

$$\begin{aligned} -x(1+t)^{-2} + C'(t) + \frac{1}{2}(0) &= \frac{-x}{(1+t)^2} - \frac{C(t)}{1+t} \\ \frac{-x}{(1+t)^2} + C'(t) &= \frac{-x}{(1+t)^2} - \frac{C(t)}{1+t} \\ -x + (1+t)^2 C'(t) &= -x - (1+t)C(t) \\ \Leftrightarrow (1+t)^2 C' + (1+t)C(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow C'(t) + \frac{1}{1+t}C(t) &= 0. \end{aligned}$$

³El uso de la notación $dX(t)$ en el ejemplo, tiene como fin, no confundir los términos al momento de manipular términos en función de sus derivadas parciales, sin embargo, para W_t se mantiene la notación, pues ya se ha aclarado el significado en este contexto del cálculo estocástico.

Ahora, mediante la técnica de factor integrante:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{dt}{1+t}} = e^{\ln(1+t)} = 1 + t.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (1+t)C'(t) + C(t) = 0 &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (C(t)(1+t)) = 0 \\ \Leftrightarrow C(t)(1+t) = k &\Leftrightarrow C(t) = \frac{k}{1+t} \end{aligned}$$

$$\therefore f(t, x) = \frac{x}{1+t} + \frac{k}{1+t},$$

y el proceso solución es $X_t = f(t, W_t) = \frac{W_t}{1+t} + \frac{k}{1+t}$. Usando la condición inicial:

$$X(0) = \frac{W_0}{1+0} + \frac{k}{1+0} = 0 \iff k = 0.$$

En conclusión, la solución de la ecuación diferencial estocástica es:

$$X(t) = \frac{W_t}{1+t}, \quad t \geq 0.$$

3.4. Aproximación numérica de EDE

3.4.1. Método de Euler-Maruyama

Los métodos numéricos para EDE son una extensión de los métodos para aproximar soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Ecuaciones Diferenciales Parciales, en este trabajo implementamos la extensión del método de Euler, descrito en [Asmussen and Glynn, 2007], el cual fue propuesto por el matemático japonés Korezumi Maruyama quien dedico su vida al campo de la probabilidad y las EDE, tanto que actualmente dicho método numérico recibe el nombre de Euler-Maruyama.

Una de las principales condiciones para poder utilizar este método, es que el modelo tiene que ser escrito como una EDO a la cual se le ha agregado un término estocástico explicado por el MB, en otras palabras, el método se ajusta para simular la solución de un proceso de Itô $X(t)$ el cual se describió en la sección anterior.

Entonces, sea $dX(t)$ un proceso de Itô definido en el intervalo $[0, t]$, con condición inicial $X(0) = X_0$, luego dividimos el intervalo $[0, t]$ en n subintervalos de longitud idéntica h , definimos así: $t_n^h = nh$, tal que:

$$\Delta_n^h W = W(t_n^h) - W(t_{n-1}^h)$$

Una aproximación para la solución X al tiempo t_n^h e interpolada linealmente, la cual denotamos por $X^h(t)$ tal que debemos entender por notación: $X_n^h = X^h(t_n^h)$, donde denotamos $X_0^h = X(0)$ tiene la siguiente forma:

$$X_n^h = X_{n-1}^h + f(t_{n-1}^h, X_{n-1}^h) h + f(t_{n-1}^h, X_{n-1}^h) \Delta_n^h B \quad (3.9)$$

Donde $\Delta_n^h W$ son i.i.d $N(0, h)$, a esta discretización se le llama el método de Euler-Maruyama.

3.4.2. Métodos de Runge Kutta para EDE

Uno de los métodos numéricos más famosos para aproximar ecuaciones diferenciales, caracterizado por su rápida convergencia y simplicidad en comparación con otros métodos, son los métodos de Runge-Kutta, en particular, el de cuarto orden: RK4, cuyo desarrollo y análisis se puede ver en [Chapra et al., 2011], este método tiene la siguiente forma:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) h$$

donde,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right), \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3h). \end{aligned}$$

En el desarrollo de sistemas de ecuaciones diferenciales, resulta práctico adaptar RK4 a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Dado que nuestro objetivo posterior será calcular numéricamente soluciones para Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, es de gran interés estudiar la forma que tiene este método cuando queremos agregar términos de probabilidad. Naturalmente, como en la mayoría de los casos, pasar del caso unidimensional al multidimensional, en particular, el bidimensional, para los fines de este trabajo, implica simplemente aplicar una serie de pasos recursivos y trabajar con matrices. Así pues, tal como se puede encontrar en [Ahmad, 1988], el Método de Runge-Kutta para EDE tiene la siguiente forma aplicado a:

$$dX = f(t, X)dt + g(t, X)dW.$$

$$X_n = X_{n-1} + \frac{1}{6} \{[F_0 + 2F_2 + 2F_2 + F_3] h + [G_0 + 2G_1 + 2G_2 + G_3] \Delta W_n\}$$

donde,

$$\begin{aligned} F_0 &= f(t_{n-1}, X_{n-1}), \\ F_1 &= f\left(t_{n-1} + \frac{1}{2}h, X_{n-1} + \frac{1}{2}F_0h + \frac{1}{2}G_0\Delta W_n\right), \\ F_2 &= f\left(t_{n-1} + \frac{1}{2}h, X_{n-1} + \frac{1}{2}F_1h + \frac{1}{2}G_1\Delta W_n\right), \\ F_3 &= f(t_n, X_{n-1} + F_2h + G_2\Delta W_n), \end{aligned}$$

y los G_i se definen como los mismos puntos evaluados en g , es decir:

$$\begin{aligned} G_0 &= g(t_{n-1}, X_{n-1}), \\ G_1 &= g\left(t_{n-1} + \frac{1}{2}h, X_{n-1} + \frac{1}{2}F_0h + \frac{1}{2}G_0\Delta W_n\right), \\ G_2 &= g\left(t_{n-1} + \frac{1}{2}h, X_{n-1} + \frac{1}{2}F_1h + \frac{1}{2}G_1\Delta W_n\right), \\ G_3 &= g(t_n, X_{n-1} + F_2h + G_2\Delta W_n). \end{aligned}$$

A este método recursivo se le llama método de RK4 para Ecuaciones Estocásticas.

El estudio de ecuaciones diferenciales estocásticas de manera analítica como su implementación numérica, constituyen una parte fundamental de este trabajo, pues nos permitirán dar un razonamiento matemático riguroso y bien fundamentado a nuestras posteriores hipótesis sobre la construcción de modelos de ciertos fenómenos, pues en lo siguiente, abordaremos temas de investigación, aplicaremos todo lo estudiado hasta este punto, teniendo la certeza de que los resultados presentados, tienen una base matemática sólida y rigurosa.

Capítulo 4

Aplicaciones de EDE

4.1. Modelación matemática estocástica

Los fenómenos que se modelan matemáticamente, se basan en el cambio que estos tienen en pequeños intervalos de tiempo, así un estudio infinitesimal en el tiempo nos brinda ecuaciones que son interpretadas por el cálculo tradicional, surgiendo así las ecuaciones diferenciales, sin embargo estos modelos tienen una desventaja, pues no consideran aquellos cambios de los cuales no podemos tener la seguridad de que ocurran o el momento que puedan pasar, dichos cambios son ocasionados por la aleatoriedad de la propia naturaleza; el desarrollo de la probabilidad como un campo propio dentro de las matemáticas, nos dotan de herramientas para poder incluir estos efectos aleatorios a los modelos que ya han sido desarrollados en áreas como la física, biología, química e ingenierías, etc.

De esta manera, la mayoría de modelos estocásticos han sido desarrollados bajo la metodología que se detalla en [Allen, 2007], que de manera general, se describe en el siguiente proceso de modelación:

- Se estudia un sistema dinámico el cual experimenta influencias aleatorias, al cual queremos desarrollar un modelo estocástico discreto.
- Para intervalos de tiempo Δt se determinan los cambios posibles con sus transiciones de probabilidad, respectivamente.
- Se calcula el cambio esperado y la matriz de covarianza para los cambios de este proceso, esta información induce al modelo de ecuaciones diferenciales estocásticas que nos interesa, haciendo el siguiente paso: El cambio esperado dividido por Δt se toma como el coeficiente de deriva y la raíz cuadrada de la matriz de covarianza dividida por Δt se acepta como el coeficiente de difusión, esto como resultado del estudio de las ecuaciones de Kolmogorov [Allen, 2007].

Esta metodología nos induce de manera natural una EDE de Itô o proceso de Itô, para lo cual, en este punto, ya hemos abordado la teoría suficiente para poder desarrollar un estudio analítico y numérico de los fenómenos que abordaremos a continuación.

4.2. Movimiento armónico simple

Empezamos con un sistema clásico de la física, el cual se aborda de manera descriptiva en [Nagle et al., 2000], el sistema masa-resorte con amortiguamiento, al cual aplicaremos la metodología ya mencionada y se analiza numéricamente las diferencias que hay con el modelo determinista.

Supongamos el sistema masa-resorte amortiguado, en el que actúan dos fuerzas principales:
 F_S : Fuerza elástica y F_R : Fuerza de amortiguamiento, tales que:

$$F_S = -kx(t), \quad F_R = -c \frac{dx}{dt}.$$

Por la ley de Newton¹: $F = ma$, obtenemos:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (4.1)$$

En esta ecuación diferencial, $x(t)$ representa la posición del objeto con masa m , $v(t)$ denota su velocidad de movimiento, k corresponde a la constante de rigidez y c representa el coeficiente de amortiguamiento.

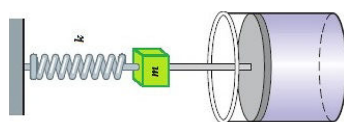


Figura 4.1: Sistema Masa-Resorte con amortiguamiento. Nota: Escalante, Martínez. (2016). Esquema del sistema masa resorte amortiguador (MRA). Recuperado el 05 de septiembre de 2023, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1870-35422016000200066&lng=es&tlng=es.

Retomando, ahora con el enfoque de [Gitterman, 2005] y guiándonos de [Allen, 2007] para construir el modelo estocástico, por la definición de velocidad: $\frac{dx}{dt} = v(t)$, entonces denotemos por $M(t) = mv(t)$, de la ecuación (4.1) obtenemos el siguiente sistema de ED:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \quad \frac{dM(t)}{dt} = -kx(t) - cv(t)$$

Para pequeños cambios de tiempo, Δt podemos aproximar:

$$\Delta M = M(t + \Delta t) - M(t) \approx -(kx(t) + cv(t)) \Delta t$$

Si impulsos aleatorios son aplicados a la masa, en pequeños lapsos Δt y la probabilidad de que ocurran es $\lambda \Delta t$, tanto para un cambio positivo como negativo, con magnitud γ , además existe un tercer escenario que será el complemento de ambos caos, es decir, cuando no hay perturbación alguna y los tres posibles escenarios quedan descritos por:

$$\begin{aligned} \Delta M_1 &= \gamma + (-kX(t) - cv(t)) \Delta t & \rho_1 &= \lambda \Delta t + \phi(\Delta t) \\ \Delta M_2 &= -\gamma + (-kX(t) - cv(t)) \Delta t & \rho_2 &= \lambda \Delta t + \phi(\Delta t) \\ \Delta M_3 &= (-kX(t) - cv(t)) \Delta t & \rho_3 &= 1 - \rho_1 - \rho_2 \end{aligned}$$

Calculando $E[\Delta M] = (-kX(t) - cv(t)) \Delta t$ y $E[(\Delta M)^2] = 2\gamma^2 \lambda \Delta t$, permitiendo que el valor esperado dividido por dt sea el coeficiente de deriva y la raíz cuadrada de la varianza dividido por dt el coeficiente de difusión, obtenemos el sistema estocástico:

$$dX(t) = v(t)dt, \quad dM(t) = (-kX(t) - cv(t)) dt + \sqrt{2\gamma^2 \lambda} dW(t).$$

Una simulación de la trayectoria del sistema estocástico, dado por el método de discretización de Euler-Maruyama, en contraste con la simulación del sistema determinista dado por el método de Runge-Kutta, bajo las condiciones iniciales: $X(0) = 10$, $v(0) = 3$, $m = 5$, $\gamma = 20$, $k = 24$.

Se muestra la diferencia entre usar un modelo determinista y uno estocástico, la gráfica que se observa muestra las trayectorias de lo que se denomina: El Oscilador Armónico Simple y el Oscilador Armónico Estocástico².

¹La tercera ley de Newton (Acción y reacción): $F = m \cdot a$.

²A menudo se le denomina como el Oscilador armónico cuántico, por la fuerte relación que existe entre la mecánica

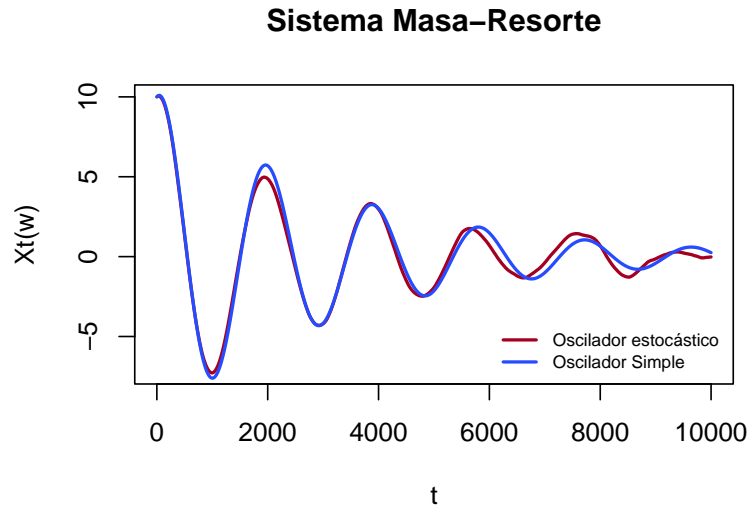


Figura 4.2: Oscilador armónico

El péndulo doble estocástico

Como caso complementario, y para adentrarnos en los sistemas de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE's), estudiaremos y analizaremos de forma análoga el caso del oscilador armónico aplicado a un fenómeno físico más complejo: el péndulo doble, del cual examinaremos su modelo probabilístico.

En general, según [Lozano et al., 2017], un péndulo doble es un sistema compuesto por dos péndulos, con el segundo colgando del extremo del primero. En el caso más simple, se trata de dos péndulos simples, con el inferior colgando de la masa pendular del superior.

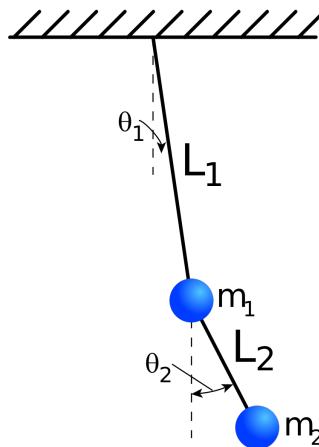


Figura 4.3: El péndulo doble. (Wikipedia).

estadística y la física moderna, sin embargo, darle ese nombre puede ocasionar confusión entre lo que es esta área y una muy distinta como lo es la física.

Motivados por [Lozano et al., 2017], también describiremos el modelo como un sistema Lagrangiano, el cual describe el estado de un sistema mecánico en términos de variables de posición y momento. Este enfoque sirve como base para la reformulación de la mecánica clásica, conocida como mecánica Lagrangiana.

Iniciando un análisis trigonométrico, donde x_1, x_2 representan la posición del péndulo uno y dos al eje x , así como y_1, y_2 denotan la posición sobre el eje y del primer y segundo péndulo respectivamente, obtenemos las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} x_1 &= L_1 \text{sen}(\theta_1) & x_2 &= L_1 \text{sen}(\theta_1) + L_2 \text{sen}(\theta_2) \\ y_1 &= L_2 + L_1(1 - \cos(\theta_1)) & y_2 &= L_2(2 - \cos(\theta_2)) - L_1 \cos(\theta_1) \end{aligned}$$

Bajo el supuesto físico de que la energía cinética esta dada por la siguiente igualdad:

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Entonces la energía cinética T del sistema del péndulo doble, queda descrita por:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) . \\ &= \frac{1}{2}m_1 L_1^2 \left(\cos^2(\theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \text{sen}^2(\theta_1 \dot{\theta}_1^2) \right) + \\ &\quad \frac{1}{2}m_2 \left(L_1 \cos(\theta_1 \dot{\theta}_1 + L_1 2 \cos(\theta_2 \dot{\theta}_2) \right)^2 + (L_1 \text{sen}(\theta_1 \dot{\theta}_1) + L_1 2 \text{sen}(\theta_2 \dot{\theta}_2))^2 . \\ &= \frac{1}{2}m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 (L_1^2 \cos^2(\theta_1 \dot{\theta}_1^2) + L_2^2 \cos^2(\theta_2 \dot{\theta}_2^2) + 2L_2 L_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ &\quad + L_2^2 \text{sen}^2(\theta_2 \dot{\theta}_2^2) + 2L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{sen}(\theta_1) \text{sen}(\theta_2)) . \\ &= \frac{1}{2}m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2) \right) . \end{aligned}$$

Simplificamos el sistema en base a la identidad: $\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2)$, tal que:

$$T = \frac{1}{2}m_1 L_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) .$$

La energía potencial V , del péndulo doble tiene la siguiente forma:

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = m_1 g (L_2 + L_1(1 - \cos(\theta_1))) + m_2 g (L_2(1 - \cos(\theta_2)) + L_1(1 - \cos(\theta_1))) .$$

De acuerdo con postulados de la mecánica lagrangiana, el lagrangiano del sistema queda descrito por:

$$\mathcal{L} = T - V .$$

Así, definimos el primer y segundo momento angular del sistema como: $\dot{\theta}_1 = p_{\theta_1}$ y $\dot{\theta}_2 = p_{\theta_2}$ respectivamente, por tanto el sistema que describe el fenómeno mecánico que sigue el péndulo doble tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}) &= \frac{l_2^2 m_2 p_{\theta_1}^2 + l_1^2 (m_1 + m_2) p_{\theta_2}^2 - 2m_2 l_1 l_2 p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2l_1^2 l_2^2 m_2 [m_1 + \text{sen}^2(\theta_1 - \theta_2) m_2]} \\ &\quad - (m_1 + m_2) g l_1 \cos(\theta_1) - m_2 g l_2 \cos(\theta_2) . \end{aligned}$$

Donde los parámetros en el sistema representan lo siguiente:

- $\theta_1, \theta_2 :=$ son los ángulos del primero y segundo péndulo, respectivamente.
- $p_{\theta_1}, p_{\theta_2} :=$ son los momentos del primer y segundo péndulo respectivamente.

- $m_1, m_2 :=$ son las masas del primer y segundo péndulo respectivamente.
- $l_1, l_2 :=$ representan las longitudes del primer y segundo péndulo de manera respectiva.
- $g :=$ es la constante gravitacional, 9,8.

Bajo estos supuesto, podemos describir los cambios en el tiempo del sistema, tanto de los ángulos como de los momentos, haciendo la derivación del Lagrangiano, así como en [Lozano et al., 2017] obtenemos las siguientes fórmulas del sistema:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_{\theta_1}} &= \frac{l_2 p_{\theta_1} - l_1 p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1^2 l_2 [m_1 + m_2 \text{sen}^2(\theta_1 - \theta_2)]}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_2}} &= \frac{l_1(m_1 + m_2)p_{\theta_2} - l_2 m_2 p_{\theta_1} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 l_2^2 m_2 [m_1 + m_2 \text{sen}^2(\theta_1 - \theta_2)]}, \\ \frac{\partial H}{\partial \theta_1} &= -(m_1 + m_2)gl_1 \text{sen}(\theta_1) - K_1 + K_2, \\ \frac{\partial H}{\partial \theta_2} &= -m_2 gl_2 \text{sen}(\theta_2) + K_1 - K_2.\end{aligned}$$

donde K_1 y K_2 son:

$$\begin{aligned}K_1 &:= \frac{p_{\theta_1} p_{\theta_2} \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 l_2 [m_1 + m_2 \text{sen}^2(\theta_1 - \theta_2)]}, \\ K_2 &:= \frac{l_2^2 m_2 p_{\theta_1}^2 + l_1^2 (m_1 + m_2) p_{\theta_2}^2 - l_1 l_2 m_2 p_{\theta_1} p_{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2 l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \text{sen}^2(\theta_1 - \theta_2)]} \text{sen}[2(\theta_1 - \theta_2)].\end{aligned}$$

Una implementación numérica mediante los métodos de Runge Kutta de cuarto orden (RK4), nos muestra el comportamiento en los cambios de la velocidad angular del sistema determinista. El estudiado en ecuaciones diferenciales e implementado mediante RK4, presenta el siguiente comportamiento:

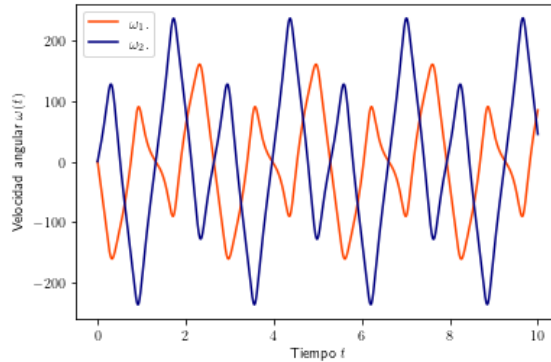


Figura 4.4: Implementación numérica del sistema de ecuaciones diferenciales del péndulo doble mediante RK4.

Sin embargo, ahora nuestra intención es analizar el comportamiento del sistema, en particular de los cambios en el tiempo de la velocidad angular tomando en cuenta aquellas perturbaciones que puedan ocurrir en pequeños lapsos.

En primera instancia, se podría pensar que también podríamos analizar esas perturbaciones en los ángulos de cada péndulo, sin embargo por la naturaleza del problema, se podría obtener que la distancia del primer péndulo al pivote es mayor que l_1 , aunque a escalas microscópicas, esto violentaría el sistema según [Haan, 2021].

Por ello, nos centraremos en estudiar los efectos causados en el momento angular, es decir, agregar el ruido o coeficiente de difusión al sistema:

$$\begin{aligned}\overline{\partial p_{\theta_1}} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} dt, \\ \overline{\partial p_{\theta_2}} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_2} dt.\end{aligned}$$

Como hemos visto en el ejemplo pasado, y como se verá en el ejemplo siguiente, la discretización del sistema y su adaptación estocástica, nos dará un sistema compuesto por la suma de los coeficientes de deriva y de difusión, que siguiendo el procedimiento descrito al inicio de esta sección, el término de deriva corresponderá al valor esperado del sistema determinista, es decir, aquel que solo cambia con el tiempo, o sea la información contenida por el sistema descrito anteriormente, a esto, le debemos sumar el término de difusión, que será el factor β , el cual contendrá la variabilidad del sistema, descrita por el movimiento browniano.

Aquí algo importante que hay que tomar en cuenta, es que el movimiento browniano que afecta el fenómeno, es el movimiento browniano bidimensional, es decir $W(t) = (W_1, W_2)$, puesto existen dos ecuaciones que son regidas por ello y a la vez, es claro que existe una relación entre ambas, por tanto, existe un coeficiente de correlación ρ que explica la fuerza con la que perturbaciones del segundo péndulo afectan al primero. Así, siguiendo las ecuaciones de Lagrange, según [Haan, 2021], el sistema estocástico queda descrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}dp_{\theta_1} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} dt - \beta_1 \theta_1 dW_1 + \beta_2 \theta_2 dW_2 \\ dp_{\theta_2} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_2} dt - \beta_1 \theta_1 dW_1 + \beta_2 \theta_2 dW_2\end{aligned}$$

Escribiendo el sistema de EDE's en su forma compacta:

$$dp_{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} dt - \beta \theta dW(t).$$

Realizando las simulaciones para el sistema estocástico y el determinista, tenemos los siguientes resultados:

Primero analizamos los cambios en el momento angular o velocidad angular para el primer péndulo:

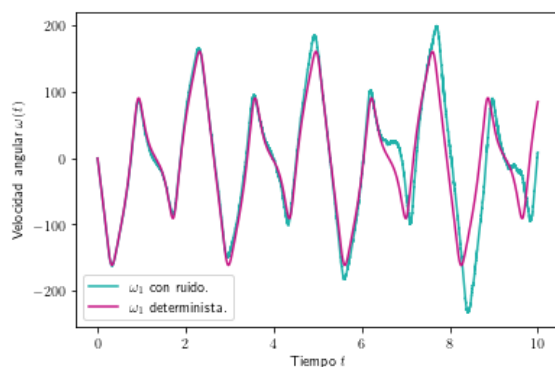


Figura 4.5: Comparativa del comportamiento del momento angular: Con ruido vs Determinista.

Posteriormente se visualizan los cambios en el momento angular o velocidad angular para el segundo péndulo:

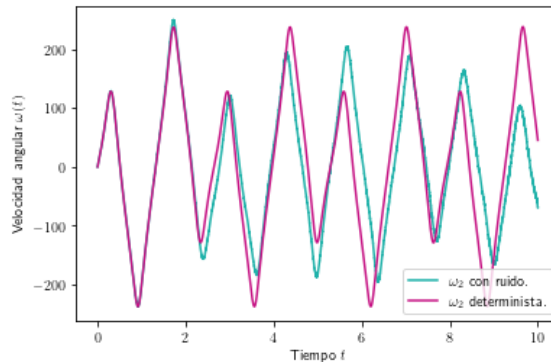


Figura 4.6: Comparativa de la simulación del momento angular determinista y con ruido, para el segundo péndulo.

Una trayectoria que en promedio debería seguir el sistema, es decir, el promedio de la realización numérica de un número “considerable” de simulaciones de este sistema, presenta la siguiente solución:

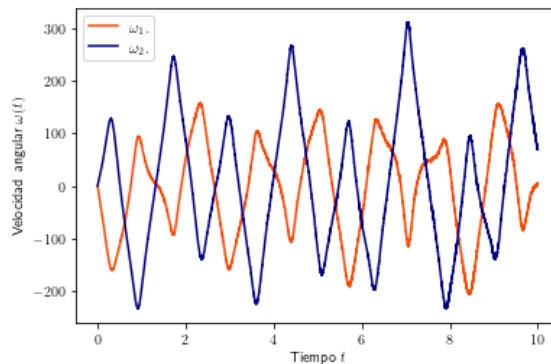


Figura 4.7: Simulación del sistema estocástico para el péndulo doble, mediante RK4.

El cual, por propiedades de la integral de Itô, esa trayectoria converge a la solución estocástica del sistema.

La forma en que se presentan los resultados, nos proporciona una visión de la importancia que tiene la implementación de ecuaciones diferenciales estocásticas, en cuanto a la naturaleza indeterminista de un fenómeno. Aunque al principio parecieran converger, con el tiempo se observa cómo las trayectorias de cada solución van difiriendo una de la otra. Resumiendo a [Espinosa and Ureta, 2014], se establece que algún pequeño cambio en cierto momento provocan soluciones totalmente diferentes. A este tipo de comportamiento se le denomina sistema caótico³. En resumen, esto nos dice que “pequeñas variaciones de las condiciones iniciales de un sistema determinista no lineal acabarán dando lugar a una diferencia mayor en los estados posteriores”. Aunque esta es un área totalmente distinta y está fuera de los alcances de este trabajo, podemos destacar el hecho de que este tipo de modelos probabilísticos se vuelve más complejo. Una trayectoria de solución no representa precisamente el comportamiento real, sino el comportamiento que, en promedio, un sistema tiende a seguir. Considerar la relación con los sistemas dinámicos

³Un sistema caótico es el comportamiento que pueden llegar a tener algunos sistemas dinámicos, engloba toda una área completamente distinta pero con una estrecha relación con la estadística y probabilidad.

caóticos nos ofrece una visión de cuánto aún queda por explorar en esta área y las posibles líneas de investigación que podrían surgir en el futuro, así como su importancia para la comprensión de la realidad. Se puede consultar [Hirsch et al., 2012] como un texto introductorio para aquellos que ya tienen conocimientos previos de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Modelo logístico: Una aplicación biológica.

En la biología, un fenómeno que resulta importante estudiar es el crecimiento de poblaciones de especies con ciertas características dadas, las ecuaciones diferenciales juegan un papel fundamental en el desarrollo de modelos matemáticos que puedan describir tales fenómenos. Un modelo de crecimiento poblacional o logístico como se le denomina en [Fernández Pérez et al., 2003], tiene a consideración todos los factores que puedan afectar a la población en observación.

Sin embargo, suele volverse casi imposible considerar todos los factores que puedan provocar cambios pequeños en cierta población, ya que algunos pueden suceder o no de manera aleatoria, por tal motivo, se suelen considerar solo aquellos factores con mayor peso en los cambios del sistema y los de menor consideración pueden ser explicados por un solo término, en función del movimiento browniano.

Como ya hemos visto, la mayoría de modelos estocásticos son una adaptación de algún modelo de ecuaciones diferenciales, en este trabajo, damos seguimiento y desarrollo a un modelo de dinámica de poblaciones desarrollado en [Martínez, 2013], el cual es un trabajo de tesis doctoral, enfocado a especies migratorias, dicho modelo comparte similitudes con uno desarrollado en [Allen, 2007], partiremos de ambos con el objetivo de poder hacer el ajuste a una base de datos sobre tamaños de población de la ballena gris en México, hacer la simulación del sistema usando métodos que ya hemos abordado y finalmente, tener un modelo de EDE para esta especie en particular.

4.2.1. Dinámica poblacional de una especie migratoria de dos etapas con captura.

Presentaremos el modelo ordinario de dinámica poblacional para una especie estructurada en dos fases, esto es, existe una relación establecida por la transición de una fase a otra (reclutamiento), y un factor de captura a la especie en general.

Como dice, [Martínez, 2013], “Un modelo matemático de dinámica de una especie debe involucrar los diferentes cambios de estado relacionados con su ciclo de vida ecológico y su explotación”.

Siguiendo estas ideas y las estructuras del modelado matemático de poblaciones biológicas; [Martínez, 2013], presenta el siguiente sistema de ecuaciones no lineales que modelan la dinámica poblacional, bajo los siguientes supuestos:

- La población total $N(t)$ se divide en dos subpoblaciones:

$$X_1(t) := \text{Población pre-recluta. } X_2(t) := \text{Población explotable.}$$

- El parámetro $\delta :=$ Tasa de reproducción de X_2 , ya que solo la población adulta puede reproducirse.
- El parámetro $\mu :=$ Tasa de muerte natural asumida igual para ambas subpoblaciones.
- El reclutamiento implica una migración a la población explotable de la población de crías (pre-recluta).

- Los individuos crías que logren sobrevivir a la muerte natural, pasarán a la fase pos recluta, integrándose a la población explotable.
- El número de reclutas depende solo del tamaño de la población pre-recluta, tal que:

$$R = \frac{\alpha \cdot X_1(t)}{\beta + X_1(t)}.$$

- α := máximo número de reclutas producido.
- β := población necesaria para producir un reclutamiento igual a $\alpha/2$ reclutas.
- q := coeficiente de capturabilidad.
- E := esfuerzo de captura.

El modelo queda escrito por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1(t)}{\partial t} &= \delta X_2(t) - \frac{\alpha \cdot X_1(t)}{\beta + X_1(t)} - \mu X_1(t), \\ \frac{\partial X_2(t)}{\partial t} &= \frac{\alpha \cdot X_1(t)}{\beta + X_1(t)} - (\mu + qE) \cdot X_2(t). \end{aligned}$$

Este modelo se ha aplicado para distintas especies migratorias, en particular, acuáticas. En [Martínez, 2013] se pueden consultar algunos artículos donde se utilizó este sistema determinista.

4.2.2. Modelo logístico estocástico.

Basándonos en la construcción del sistema dinámico de interacción entre dos especies descrito previamente, y como se lo hicimos anteriormente, adaptaremos el modelo logístico a su forma estocástica, inspirándonos en [Allen, 2007], seguiremos el proceso de modelación descrito al inicio de esta sección, para la construcción de un modelo estocástico.

Para facilitar el proceso, sustituiremos términos en el sistema por variables más simples, también por simplicidad de la notación, omitiremos escribir la dependencia del tiempo de las variables X de manera explícita.

$$\begin{aligned} \partial X_1 &= \delta X_2 - \frac{\alpha \cdot X_1}{\beta + X_1} - \mu X_1 \\ \partial X_2 &= \frac{\alpha \cdot X_1}{\beta + X_1} - (\mu + qE) \cdot X_2 \end{aligned}$$

Sean $\frac{\alpha \cdot X_1(t)}{\beta + X_1(t)} = m_{12}$, $\delta = m_{21}$, el término $\mu = d_1$ y $\mu + qE = d_2$, entonces tenemos el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} \partial X_1 &= m_{21} X_2 - (m_{12} + d_1) X_1 \\ \partial X_2 &= m_{12} X_1 - d_2 X_2 \end{aligned}$$

Supongamos que cambios aleatorios provocan alteraciones en algunos de los factores que determinan el comportamiento del sistema en pequeños lapsos Δt , entonces 4 cambios pueden ocurrir, denotados por Δx_i con $i \in [1, 2, 3, 4]$ en Δt . Así, por ejemplo, la alteración $\Delta x_2 = [-1, 1]$ representa un decremento en la población X_1 y un incremento en X_2 con probabilidad: $p = m_{12} X_1 \Delta t$, notemos que existe el complemento del sistema, es decir, aquella alteración nula en ambas poblaciones, denotada por $\Delta x_5 = [0, 0]^T$, por tanto, se muestran en la siguiente tabla los posibles cambios:

Cambios	Probabilidad
$\Delta x_1 = [-1, 0]^T$	$p_1 = d_1 X_1 \Delta t$
$\Delta x_2 = [-1, 1]^T$	$p_2 = m_{12} X_1 \Delta t$
$\Delta x_3 = [0, -1]^T$	$p_3 = d_2 X_2 \Delta t$
$\Delta x_4 = [1, 0]^T$	$p_4 = m_{21} X_2 \Delta t$
$\Delta x_5 = [0, 0]^T$	$p_5 = 1 - \sum_1^4 p_i$

Ahora nuestro fin es poder calcular $E[\Delta x]$, y la matriz de covarianza $E[\Delta x(\Delta x)^T]$ del sistema, visto de forma matricial:

$$E[\Delta x] = \sum_{j=1}^5 p_j \Delta x_j = \begin{bmatrix} m_{21} X_2 - d_1 X_1 - m_{12} X_1 \\ -d_2 X_2 + m_{12} X_1 \end{bmatrix} \Delta t$$

Para la matriz de covarianza, tenemos:

$$\begin{aligned} E[\Delta x(\Delta x)^T] &= \sum_{j=1}^5 p_j \Delta x_j (\Delta x_j)^T \\ &= \begin{bmatrix} d_1 X_1 + m_{12} X_1 + m_{21} X_2 & -m_{12} X_1 - m_{21} X_2 \\ -m_{12} X_1 - m_{21} X_2 & d_2 X_2 + m_{12} X_1 + m_{21} X_2 \end{bmatrix} \Delta t \end{aligned}$$

Como el producto $E[\Delta x] \cdot (E[\Delta x])^T$ es de orden $(\Delta t)^2$, la matriz de covarianza V se iguala a $E[\Delta x(\Delta x)^T] / \Delta t$, la cual es definida positiva y por ende, tiene raíz cuadrada positiva definida $\mathbf{B} = \mathbf{V}^{1/2}$, entonces la esperanza, denotada por \mathbf{u} y la matriz de covarianza \mathbf{V} quedan escritas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} m_{21} X_2 - d_1 X_1 - m_{12} X_1 \\ -d_2 X_2 + m_{12} X_1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} d_1 X_1 + m_{12} X_1 + m_{21} X_2 & -m_{12} X_1 - m_{21} X_2 \\ -m_{12} X_1 - m_{21} X_2 & d_2 X_2 + m_{12} X_1 + m_{21} X_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matriz $B = \mathbf{V}^{1/2}$ se puede obtener exactamente y está dada por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^{1/2} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} a + w & b \\ b & c + w \end{bmatrix},$$

Donde $w = \sqrt{ac - b^2}$, $d = \sqrt{a + c + 2w}$, con

$$\begin{aligned} a &= d_1 X_1 + \frac{m_{12} X_1}{\beta + X_1} + m_{21} X_2. \\ b &= -\frac{m_{12} X_1}{\beta + X_1} - m_{21} - m_{21} X_2. \\ c &= \frac{m_{12} X_1}{\beta + X_1} + d_2 X_2 + m_{21} X_2. \end{aligned}$$

En consecuencia y siguiendo la metodología que se ha abordado en este trabajo, el modelo de ecuaciones diferenciales estocásticas para este sistema dinámico logístico queda escrito en su forma compacta de la siguiente manera:

$$dX = \mathbf{u}(X_1, X_2, t) dt + \mathbf{B}(X_1, X_2, t) dW \tag{4.2}$$

con condiciones iniciales $X_1 = x_1, X_2 = x_2$, donde $W(t)$ es el movimiento browniano bidimensional, es decir $W = [W_1(t), W_2(t)]^T$.

4.2.3. La ballena gris.

El fin de este trabajo es poder aplicar un modelo de EDE a un fenómeno real, que expongan la importancia del desarrollo de estos modelos y su relevancia, por ello, se hizo la investigación de una especie marina migratoria, la ballena gris en las costas de Baja California, ver [Urbán et al.,] para detallar más acerca de esta extraordinaria especie, cuya población se puede dividir en dos etapas: Etapa de ballenatos o prerecluta, y la etapa adulta o población explotable, dicha especie es descrita a continuación, según en [de Medio Ambiente Y Recursos Naturales,]:

- La ballena gris es una de las especies más grandes del mundo marino. Mide de 11 a 15 metros con un peso aproximado de 30 toneladas.
- Este cetáceo realiza una de las migraciones más largas, al recorrer más de 9 mil kilómetros al año, durante toda su vida.
- Fue intensamente cazada desde mediados del siglo XIX hasta principios de XX. Para la década de 1870, la captura se detuvo principalmente por el decremento en la demanda de aceite de estos animales.



Figura 4.8: Nota: [de Medio Ambiente Y Recursos Naturales,], desde la década de los treinta, la ballena gris se encuentra protegida internacionalmente a través de la Comisión Ballenera Internacional de la que México forma parte.

En [Swartz et al.,] se analizan algunos datos numéricos, mismos que se hallaron en dos bases de datos actualizadas, que contienen el registro de llegadas de la ballena gris en su etapa adulta y el total de ballenas a costas mexicanas, en su temporada de apareamiento, los registros van desde el año 1995 hasta 2022, así mismo, se pueden verificar su existencia así como futuras actualizaciones en el siguiente link <https://www.snib.mx/proyectos/L229/SNIB-L229-DwC.zip>.

Se realizó un tratamiento de ambas bases, para obtener información estadística importante, también se combinaron para obtener los valores numéricos solo de las ballenas adultas y ballenatos, estos últimos, bajo la suposición de que por año:

$$\text{Ballenatos} = \text{Ballenas} - \text{Ballenas adultas}$$

La siguiente gráfica nos muestra de manera mas intuitiva la información tratada de ambas subpoblaciones:

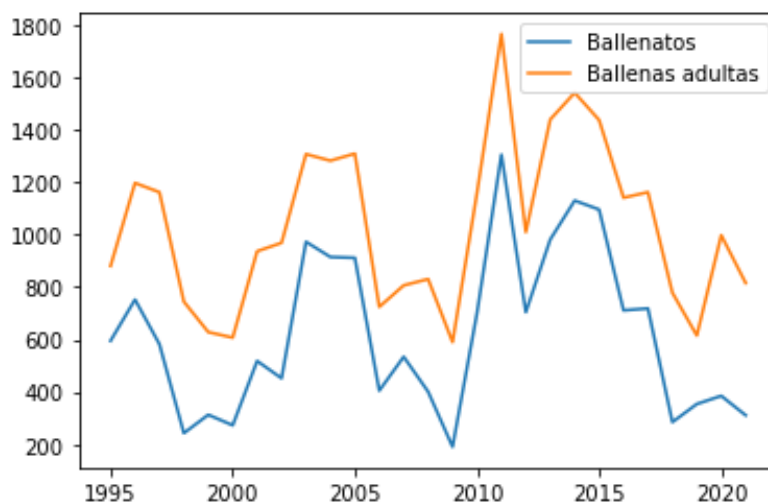


Figura 4.9:

Retomando el modelo estocástico:

$$dX = \mathbf{u}(X_1, X_2, t) dt + \mathbf{B}(X_1, X_2, t) dW \quad (4.3)$$

En su forma explícita:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= [m_{21}X_2(t) - (m_{12} + d_1)X_1(t)] dt + (a + w)dW_1 + bd W_2(t) \\ dX_2(t) &= [m_{12}X_1(t) - d_2X_2(t)] dt + bd dW_1 + (c + w)dW_2(t) \end{aligned}$$

Con el tratamiento se estimaron los parámetros y en base a [Fleischer et al., 2007] donde se obtienen ciertos valores que caracterizan a esta especie, se establecen las siguientes condiciones:

- $X_{10} = 595$ Población inicial de ballenatos.
- $X_{20} = 880$ Población inicial de ballenas adultas.
- $m_{12} = 338$ Capacidad de transición a adultas.
- $m_{21} = 0.2597$ Capacidad reproductiva.
- $d_1 = 0.40$ Mortalidad en ballenatos.
- $d_2 = 0.109$ Mortalidad en adultos.
- $\beta = 900$.

Bajo estos supuestos, simulando el sistema mediante Runge-Kutta de cuarto orden, con un valor para $\rho = 0.9565$ obtenido a partir de fórmulas implementadas en Python, que determina la correlación para el proceso de Wiener bidimensional correlacionado, el cual se abordó anteriormente, se obtienen los siguientes resultados, que para ejemplificar su eficiencia con respecto a los valores reales, se presentan en el mismo tipo de gráfico:

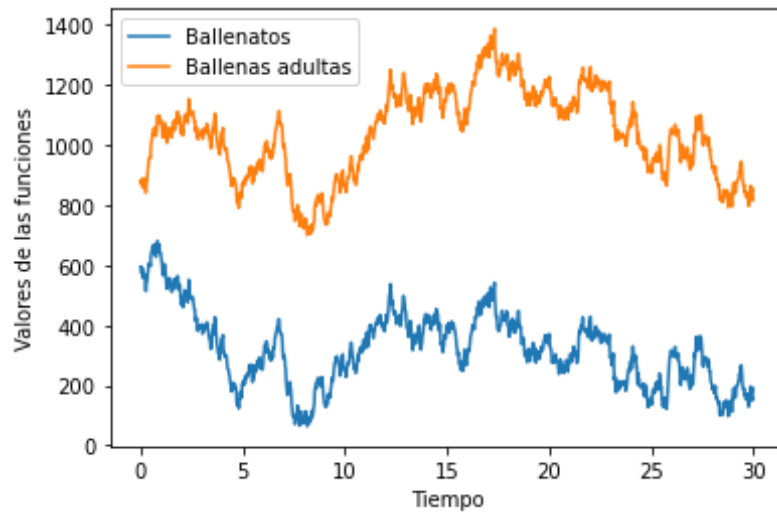


Figura 4.10: Simulación del modelo estocástico para la ballena gris.

También se simuló mediante RK4 el sistema determinista, cuyas soluciones se comportan de la siguiente manera:

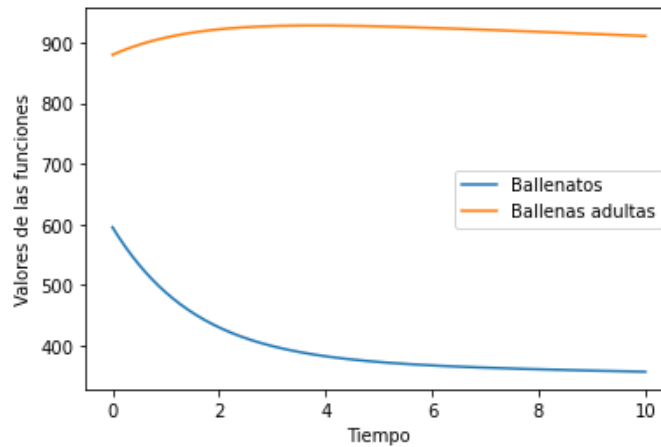


Figura 4.11: Simulación del sistema determinista.

Como se observa, el modelo estocástico al contener la información aleatoria que no logra capturar el modelo ordinario, presenta un mejor comportamiento apegado al fenómeno real, claro está, se necesita una mayor cantidad de datos para poder perfeccionar y tener una mejor aproximación de los parámetros, sin embargo, el modelo se apeg a los datos reales de años más actuales, destacando que en el mismo, se pueden apreciar esos cambios que no da el modelo determinista.

Como se mencionaba antes, un sistema estocástico al tener en consideración esos cambios aleatorios de los cuales no podemos estar seguros o tener un control, los cuantifica en función del movimiento browniano, lo cual, lo hace un modelo más preciso y mayor confiabilidad al tener en consideración la aleatoriedad del entorno.

Es importante recordar que en promedio, el sistema estocástico tendrá como valor esperado los valores del sistema determinista, esto por propiedades de la integral de Itô, sin embargo, de allí su importancia de considerar cambios aleatorios en el modelo, que como ya se observó, muestra una

aproximación más realista de un fenómeno físico o biológico.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis, se abordaron dos áreas científicas: la física y la biología, con el objetivo de proporcionar un enfoque multidisciplinario. Mediante la modelación matemática, se exploraron fenómenos dinámicos utilizando herramientas clásicas, como las ecuaciones diferenciales, para el análisis y la construcción de modelos. Además, se incorporó matemática más moderna con el fin de estudiar estos fenómenos en un contexto probabilístico. Para lograr estos objetivos, se estudió el cálculo estocástico, aplicándolo a ecuaciones diferenciales, y la construcción matemática de una integral de probabilidad proporcionó herramientas para la modelación matemática estocástica.

La adaptación de fenómenos clásicos, como el resorte con amortiguamiento, en un contexto no determinista resultó de gran interés. En un modelo aparentemente simple, se destacó la notable diferencia en las soluciones en comparación con los modelos deterministas. Este enfoque permitió presentar, en la Semana Internacional de la Estadística y Probabilidad (BUAP), la versión estocástica del oscilador armónico.

Sin embargo, la mayoría de los fenómenos reales se modelan con más de una ecuación. Para abordar el campo multidimensional de las ecuaciones estocásticas, se estudió y analizó el sistema dinámico del péndulo doble. Su solución, que corresponde a una forma más compleja del oscilador armónico, resaltó la fuerte relación entre sistemas dinámicos, caóticos y estocásticos, sugiriendo una posible línea de investigación futura.

El uso de herramientas numéricas fue fundamental para estudiar estos fenómenos. Aunque contamos con una rica teoría matemática, sin las ciencias computacionales, esta sería prácticamente obsoleta debido a la limitación natural del ser humano para procesar grandes cantidades de información. Por lo tanto, es destacable el uso de métodos numéricos y su adaptación al modo estocástico. Además, el uso de lenguajes de alto nivel, como Python y R (ambos empleados en este trabajo), facilitó la interacción entre el aspecto matemático y computacional, haciendo más digerible la implementación teórica.

Con todas estas herramientas, se exploró el campo biológico, analizando bases de datos sobre ballenas grises en México. Se ajustaron los parámetros necesarios para el modelo logístico estocástico, se implementó numéricamente y se compararon los resultados con el modelo determinista y los valores reales.

Al final, se desarrolló un modelo continuo y estocástico que explica un fenómeno que existe en tiempo discreto, teniendo mejores resultados en comparación al modelo determinista, al considerarse el poder explicativo y predictivo del modelo probabilístico.

Pensar que las matemáticas solo generan soluciones perfectas, alejadas de la realidad, es un error grave, más bien, falta priorizar la implementación de teoría probabilística, como las ecuaciones diferenciales estocásticas y el movimiento browniano, que en conjunto nos conducen a la integral de Itô, en este trabajo, se demuestra que con un desarrollo adecuado, es posible explicar casi de manera exacta algún fenómeno físico o biológico.

Apéndice A: Algoritmos computacionales.

Movimiento browniano. Implementación del movimiento browniano.

```

1 #Simulación del movimiento browniano unidimensional
2 h <- 1000 #Numero de puntos en la malla.
3 T <- 1 #Tiempo de paro.
4 Delta <- T/h # Incrementos de tiempo
5 t <- seq(0,T,length=h+1)
6 W <- c(0,cumsum(sqrt(Delta)*rnorm(h)))
7
8 plot(t,W, type = "l", col="#A50021", lwd = 2,
9 main="Movimiento Browniano",xlab="t", ylab="W(t)")

```

Código para simular el movimiento browniano bidimensional correlacionado:

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def movimiento_browniano(num_pasos):
5     x = np.zeros(num_pasos)
6
7     for i in range(1, num_pasos):
8         paso_x = np.random.normal(0, 1)
9         x[i] = x[i - 1] + paso_x
10    return x
11
12 # Numero de pasos en la simulacion
13 num_pasos = 1000
14
15 #Coeficiente de correlacion
16 rho = 0.8
17
18 #Simular movimiento Browniano
19 dW_1 = movimiento_browniano(num_pasos)
20 y = movimiento_browniano(num_pasos)
21
22 dW_2 = rho*dW_1 + np.sqrt(1-rho**2)*y
23 # Visualizar el resultado
24 plt.plot(dW_1, '#ff7f0e', label=r'$W_1(t)$')
25 plt.plot(dW_2, '#17becf', label=r'$W_2(t)$')
26 plt.title('Simulación de movimiento browniano correlacionado')
27 plt.xlabel('Tiempo')
28 plt.ylabel('Posición')
29 plt.legend()
30 plt.show()

```

Péndulo estocástico.

```

1 #Resorte masa amortiguador
2 #Constantes
3 k<-24 #Constante de rigidez
4 c<-2 #Coeficiente de amortiguamiento
5 m<-5 #Masa
6 lamda<-4
7 gamma<-20
8
9 t <- 15 #Tiempo
10 N <- 10000 #Particiones
11 dt <- t/N
12
13 #Valores iniciales
14 X <- rep(0,N)
15 M <- rep(0,N)
16 Xrep <-rep(0,N)
17 dw <-rep(0,N)
18 X[1] <- 10

```

```

19 M[1] <- 3*m #M = v(t)*m
20 dw[1] <- sqrt(dt)*rnorm(1,0,1)
21
22 Xaux <- X
23 Maux <- M
24 dwaux <- dw
25
26 for (j in 1:100) {
27   for (i in 2:N) {
28     dw[i] <- sqrt(dt)*rnorm(1,0,1)
29     X[i]=X[i-1]+M[i-1]*(dt/m)
30     M[i]=M[i-1]-(k*X[i-1]+(c/m)*M[i-1])*dt+sqrt(2*gamma^2*lamda)*dw[i-1]
31   }
32   Xrep <- Xrep+X
33   X <- Xaux
34   M <- Maux
35   dw <- dwaux
36 }
37 X <- Xrep/100
38 #Sistema sin ruido
39 Y <- rep(0,N)
40 M1 <-rep(0,N)
41
42 #Condiciones iniciales
43 Y[1] <- 10
44 M1[1] <- 3*m
45
46 for (i in 2:N) {
47   Y[i] <- Y[i-1]+(dt/m)*M1[i-1]
48   M1[i] <- M1[i-1]-(k*Y[i-1]+(c/m)*M1[i-1])*dt
49 }
50
51 plot(X, type = "l", col="#A50021", lwd=2, main="Sistema Masa-Resorte", xlab="t",
52      ylab="Xt(w)")
53 lines(Y, type = "l", col="#264CFF", lwd=2, xlab="t", ylab="Xt(w)")
54 legend("bottomright", legend = c("Oscilador estocastico", "Oscilador Simple"),
55      bty = "n",cex = .7, lwd = 2, col = c("#A50021", "#264CFF"))

```

Péndulo doble estocástico.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Definir las ecuaciones del pendulo doble
5 def pendulo_doble(t, estado, l1, l2, m1, m2, g):
6     theta1, theta1_dot, theta2, theta2_dot = estado
7
8     # Ecuaciones de movimiento del pendulo doble
9     theta1_dot_dot = (-g * (2 * m1 + m2) * np.sin(theta1) - m2 * g * np.sin(theta1 -
10     2 * theta2) -
11     2 * m2 * np.sin(theta1 - theta2) * (l2 * theta2_dot**2 + l1 * np.cos(theta1 -
12     theta2) * theta1_dot**2)) \
13     / (l1 * (2 * m1 + m2 - m2 * np.cos(2 * (theta1 - theta2))))
14
15     theta2_dot_dot = (2 * np.sin(theta1 - theta2) * (l1 * (m1 + m2) * theta1_dot**2 +
16     g * (m1 + m2) * np.cos(theta1) +
17     12 * m2 * theta2_dot**2 * np.cos(theta1 - theta2))) \
18     / (12 * (2 * m1 + m2 - m2 * np.cos(2 * (theta1 - theta2))))
19
20     return np.array([theta1_dot, theta1_dot_dot, theta2_dot, theta2_dot_dot])
21
22 # Implementar el RK4 Estocastico
23 def runge_kutta_cuarto_orden(func, y0, t, *args):
24     n = len(t)
25     h = t[1] - t[0]
26     y = np.zeros((n, len(y0)))

```

```

24 y[0] = y0
25
26 #Movimiento browniano y coeficiente de correlacion
27 rho = 0.9
28 dW1 = np.random.normal(scale=np.sqrt(h), size=len(t))
29 dW2 = rho*dW1 + np.sqrt(1-rho**2)*np.random.normal(scale=np.sqrt(h), size=len(t))
30
31 for i in range(n - 1):
32     k1 = h * func(t[i], y[i], *args)
33     k2 = h * func(t[i] + 0.5 * h, y[i] + 0.5 * k1, *args)
34     k3 = h * func(t[i] + 0.5 * h, y[i] + 0.5 * k2, *args)
35     k4 = h * func(t[i] + h, y[i] + k3, *args)
36     y[i + 1] = y[i] + ((k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) +
37     np.sqrt(t[i])*(0.9*dW1[i] - 0.7*dW2[i]))/ 6
38     return y
39
40 # Implementar el RK4 Estocastico
41 def rk4(func, y0, t, *args):
42     n = len(t)
43     h = t[1] - t[0]
44     y = np.zeros((n, len(y0)))
45     y[0] = y0
46
47     for i in range(n - 1):
48         k1 = h * func(t[i], y[i], *args)
49         k2 = h * func(t[i] + 0.5 * h, y[i] + 0.5 * k1, *args)
50         k3 = h * func(t[i] + 0.5 * h, y[i] + 0.5 * k2, *args)
51         k4 = h * func(t[i] + h, y[i] + k3, *args)
52
53     y[i + 1] = y[i] + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)/ 6
54
55     return y
56
57 #-----
58 # Parametros del pendulo doble
59 l1 = 1.0 # Longitud del primer pendulo
60 l2 = 1.0 # Longitud del segundo pendulo
61 m1 = 1.0 # Masa del primer pendulo
62 m2 = 1.0 # Masa del segundo pendulo
63 g = 9.8 # Aceleracion debida a la gravedad
64
65 # Condiciones iniciales
66 theta1_0 = np.radians(45.0) # Angulo inicial del primer pendulo en radianes
67 theta2_0 = np.radians(0.0) # Angulo inicial del segundo pendulo en radianes
68 theta1_dot_0 = 0.0 # Velocidad angular inicial del primer pendulo
69 theta2_dot_0 = 0.0 # Velocidad angular inicial del segundo pendulo
70
71 # Condiciones iniciales del sistema
72 estado_inicial = np.array([theta1_0, theta1_dot_0, theta2_0, theta2_dot_0])
73
74 # Tiempo de integracion
75 tiempo_inicio = 0.0
76 tiempo_final = 10.0
77 puntos_temporales = 100000
78 tiempo = np.linspace(tiempo_inicio, tiempo_final, puntos_temporales)
79
80 #SIMULACION
81 ede = runge_kutta_cuarto_orden(pendolo_doble, estado_inicial, tiempo,l1, l2, m1,
82     m2, g)
83 edo = rk4(pendolo_doble, estado_inicial, tiempo,l1, l2, m1, m2, g)
84
85 # Graficar resultados
86 plt.plot(tiempo, np.degrees(ede[:,1]), '#FF4500', label=r'$\omega_1$.')
87 plt.plot(tiempo, np.degrees(ede[:,3]), '#000080', label=r'$\omega_2$.')
88 plt.xlabel(r'Tiempo $t$')

```

```

88 plt.ylabel(r'Velocidad angular  $\omega(t)$ ')
89 plt.legend()
90 plt.show()

```

Modelo logístico.

```

1  import pandas as pd
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  import numpy as np
4
5  #Tratamiento de base de datos de poblaciones totales
6  #PTBO := Poblacion total de ballenas de Ojo de Liebre
7  #PTBS := Poblacion total de ballenas de San Ignacio
8
9  PTBO = pd.read_csv(r"C:\Users\oscar\Downloads\PoblacionDeBallenasOjo.csv")
10 PTBS = pd.read_csv(r"C:\Users\oscar\Downloads\PoblacionDeBallenasSnIgnacion.csv")
11
12 PTBO.rename(columns={"Temp Ojo de Liebre":"temporada","Poblacion de ballenas":"
    poblacion"}, inplace=True)
13 PTBS.rename(columns={"Temp San Ignacio":"temporada","Poblacion de ballenas":"
    poblacion"}, inplace=True)
14
15 totalballenas = PTBS.poblacion + PTBO.poblacion
16
17 #Tratamiento base de registro de ballenas adultas
18 #PBAO := Poblacion de ballenas adultas de Ojo de Liebre
19 #PBAS := Poblacion de ballenas adultas de San Ignacio
20
21 PBAO = pd.read_csv(r"C:\Users\oscar\Downloads\ConteoDeBallenasAdultasOjo.csv")
22 PBAS = pd.read_csv(r"C:\Users\oscar\Downloads\ConteoDeBallenasAdultasSnIgnacio.
    csv")
23
24 PBAO.rename(columns={"Laguna Ojo de Liebre":"temporada", "Conteo maximo de
    ballenas adultas":"conteo"}, inplace=True)
25 PBAS.rename(columns={"Laguna San Ignacio":"temporada","Conteo maximo de ballenas
    adultas":"conteo"}, inplace=True)
26
27 totaladultas = PBAO.conteo+PBAS.conteo
28 totalbabys = totalballenas-totaladultas
29 n = np.arange(1995,2022,1)
30 fig, ax = plt.subplots()
31 ax.scatter(x=n, y=totaladultas)
32 ax.scatter(x=n, y=totalbabys)
33 plt.show()
34
35 fig1, ax = plt.subplots()
36 ax.plot(n,totalbabys, label='Ballenatos')
37 ax.plot(n,totaladultas, label='Ballenas adultas')
38 plt.legend()
39 plt.show()
40
41 #Natalidad
42 b = []
43 a=0
44 p=0
45 for i in range(26):
46 B = (totalballenas[i+1] - totalballenas[i])/totalballenas[i+1]
47 b.append(B)
48 if b[i]>0:
49 p += 1
50 a += b[i]
51
52 correlation_matrix = np.corrcoef(totalbabys, totaladultas)

```

```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt

```

```

3
4 #DEFINICION SISTEMA DE EDO
5 def funcion1(t, f1, f2):
6     X1 = m21*f2 - (m12/(beta+f1) + d1)*f1
7     X2 = m12*f1/(beta+f1) - d2*f2
8     return X1,X2
9
10 #METODO RUNGE KUTTA 4
11 def rk4(func, f1_0, f2_0, t0, tn, h, rho):
12     t_values = np.arange(t0, tn + h, h)
13     f1_values = []
14     f2_values = []
15     #Estocastico
16     dW1 = np.random.normal(scale=np.sqrt(h), size=int(tn/h)+1)
17     dW2 = rho*dW1 + np.sqrt(1-rho**2)*np.random.normal(scale=np.sqrt(h), size=int(tn/
18         h)+1)
19     f1 = f1_0
20     f2 = f2_0
21
22     i=0
23     for t in t_values:
24         f1_values.append(f1)
25         f2_values.append(f2)
26         k11,k12 = func(t, f1, f2) + np.sqrt(t)*(-45.4*dW1[i] + 679.6*dW2[i])
27         k21,k22 = func(t + 0.5 * h, f1 + 0.5 * k11*h, f2 + 0.5 * k12*h) + np.sqrt(t)
28             *(-45.4*dW1[i] + 679.6*dW2[i])
29         k31,k32 = func(t + 0.5 * h, f1 + 0.5 * k21*h, f2 + 0.5 * k22*h) + np.sqrt(t)
30             *(-45.4*dW1[i] + 679.6*dW2[i])
31         k41,k42 = func(t + h, f1 + k31*h, f2 + k32*h) + np.sqrt(t)*(-454*dW1[i] + 679.6*
32             dW2[i])
33         f1 = f1 + (k11*h + 2*k21*h + 2*k31*h + k41*h) / 6.0
34         f2 = f2 + (k12*h + 2*k22*h + 2*k32*h + k42*h) / 6.0
35         i +=1
36     return t_values, f1_values, f2_values
37
38 #CONDICIONES INICIALES
39 t0 = 0.0
40 tn = 30
41 h = 0.025
42 f1_0 = 595 #Poblacion inicial de ballenatos
43 f2_0 = 880 #Poblacion incial de ballenas adultas
44 m12 = 338 #Maximo de trancision a adultas
45 m21 = 0.101 #Capacidad reproductiva
46 d1 = .09 #Mortalidad en ballenatos
47 d2 = .08 #Mortalidad en adultos
48 beta= 900 #Poblacion necesaria para alcanzar una transicion m12/2
49 rho = 0.9565
50
51 t_values, f1_values, f2_values = rk4(funcion1, f1_0, f2_0, t0, tn, h, rho)
52
53 # Visualizacion de los resultados
54 plt.plot(t_values, f1_values, label='Ballenatos')
55 plt.plot(t_values, f2_values, label='Ballenas adultas')
56 plt.xlabel('Tiempo')
57 plt.ylabel('Valores de las funciones')
58 plt.legend()
59 plt.show()

```

Bibliografía

- [Ahmad, 1988] Ahmad, R. (1988). Introduction to stochastic differential equations.
- [Allen, 2007] Allen, E. (2007). *Modeling with Itô stochastic differential equations*, volume 22. Springer Science & Business Media.
- [Antonio, 2013] Antonio, J. S. (2013). El movimiento browniano: un paradigma de la materia blanda y de la biología. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 106(1):39–54.
- [Asmussen and Glynn, 2007] Asmussen, S. and Glynn, P. W. (2007). *Stochastic simulation: algorithms and analysis*, volume 57. Springer.
- [Caro, 2020] Caro, T. L. (2020). *De la naturaleza de las cosas*. Editorial Verbum.
- [Chapra et al., 2011] Chapra, S. C., Canale, R. P., Ruiz, R. S. G., Mercado, V. H. I., Díaz, E. M., and Benites, G. E. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros*, volume 5. McGraw-Hill New York, NY, USA.
- [Chen, 2016] Chen, P. (2016). Modelling the stochastic correlation.
- [de Medio Ambiente Y Recursos Naturales,] de Medio Ambiente Y Recursos Naturales, S. Conoce más de la ballena gris.
- [Espinosa and Ureta, 2014] Espinosa, A. E. and Ureta, C. (2014). La creación de la metáfora. "el efecto mariposa". *Ciencia-Academia Mexicana de Ciencias*, 65(4):66–73.
- [Evans, 2012] Evans, L. C. (2012). *An introduction to stochastic differential equations*, volume 82. American Mathematical Soc.
- [Fernández Pérez et al., 2003] Fernández Pérez, C., Vázquez Hernandez, F. J., and Vegas Montaner, J. (2003). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias: sistemas dinámicos*. Ediciones Paraninfo, SA.
- [Fleischer et al., 2007] Fleischer, L. A., Michel-Guerrero, E., Zárate-Villafranco, A., and Álvarez Andrade, A. (2007). Variabilidad interanual (1983-87) y (1996-97) de la ballena gris (*eschrichtius robustus*) en la zona norte de bahía magdalena. *Estudios Ecológicos en Bahía Magdalena*, page 251.
- [Gitterman, 2005] Gitterman, M. (2005). *Noisy Oscillator, The: The First Hundred Years, From Einstein Until Now*. World Scientific.
- [Haan, 2021] Haan, D. (2021). Numerical time integration of stochastic differential equations. Master's thesis, University of Twente.
- [Hirsch et al., 2012] Hirsch, M. W., Smale, S., and Devaney, R. L. (2012). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press.

- [Lozano et al., 2017] Lozano, A., Ortiz, J. P., Fontanot, E. M., and Díaz, J. M. (2017). La dinámica del péndulo doble. *Instituto Tecnológico Autónomo de México*, 3.
- [Martínez, 2013] Martínez, L. M. L. (2013). *Modelos de Dinámicas Migratorias con factores de reclutamiento, depredación y captura*. PhD thesis, Universidad de Castilla-La Mancha.
- [Mörters and Peres, 2010] Mörters, P. and Peres, Y. (2010). *Brownian motion*, volume 30. Cambridge University Press.
- [Nagle et al., 2000] Nagle, R. K., Saff, E. B., and Snider, A. D. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Pearson Educación.
- [Oksendal, 2013] Oksendal, B. (2013). *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media.
- [Rincón, 2012] Rincón, L. (2012). *Introducción a los procesos estocásticos*. UNAM, Facultad de Ciencias.
- [Swartz et al.,] Swartz, S. L., Urbán, J., Gámez-Gallardo, A., Martínez, S., Nanduca, H., Urbán, A. L., Mercado, J. R., and Rojas-Bracho, L. Incremento en el número de ballenas grises (*eschrichtius robustus*) que visitaron la laguna de san ignacio, baja california sur, méxico, durante el invierno del 2011.
- [Urbán et al.,] Urbán, J., Swartz, S. L., and Aguilar, S. M. La ballena gris en la laguna de san ignacio, baja california sur méxico.