



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Filosofía y Letras

"Análisis comparativo entre cuantores y conjuntos"

Tesis presentada al
Colegio de Filosofía
como requisito para la obtención del grado de

Licenciada en Filosofía

Presentada por
Karla Estefanía González Santoyo

Asesorada por:
Dr. Juan Manuel Campos Benítez

Noviembre, 2020

*Esta investigación fue realizada gracias al apoyo del Consejo de Ciencia y Tecnología del
Estado de Puebla*

3.2.1. Operaciones con conjuntos: Intersección y Unión.....	64
3.2.1.1. Las leyes de Morgan y su construcción en las tablas de pertenencia.....	66
3.2.1.2. Distinción entre la unión de \wedge y la unión de \cup	68
3.2.1.3. La interpretación de la relación de pertenencia: la limitación de la lógica de predicados y el alcance de la teoría de conjuntos.....	69
3.3. El universo infinito: entre la armonía y la incompletitud de los lenguajes.....	71
Conclusiones.....	VIII
Bibliografía.....	XII

INTRODUCCIÓN

La relación entre lógica y matemática resulta hoy en día bastante cercana. Prueba de ello es la generación de una nueva área que se ha integrado a la matemática moderna, nombrada precisamente como *lógica matemática*. Esta área se divide en las siguientes ramas: *teoría de la recursión*, *teoría de conjuntos*, *teoría de la demostración* y *teoría de modelos*. Debido a que estas áreas trabajan con sistemas formales, comparten la característica de ser simbólicas, operatorias y calculables.

El presente trabajo se enfoca en el estudio de una de estas ramas, que es la teoría de conjuntos. Específicamente se centra en uno de los resultados que ha dado pie a la construcción de esta teoría: *la demostración de diferentes tamaños de infinitos*. Esta demostración fue realizada en los años 1873 y 1874 por un matemático ruso bastante peculiar, de nombre George Cantor. El aporte de esta teoría ha sido vital para la matemática moderna, pero como se mostrará a lo largo de esta investigación, también ha influido en la lógica de predicados.

La lógica de predicados, al igual que la teoría de conjuntos, dispone de signos de cantidad conocidos como *cuantores o cuantificadores*. Estos signos indican el rango de los dominios en los que operan; de modo que, es justo en ellos donde se localiza la influencia de las demostraciones de Cantor. A partir de estas demostraciones y del ya conocido Teorema de Skölem se comienza a hacer visible que la lógica de predicados tiene dificultades al momento de abordar dominios infinitos. De hecho, como se verá a detalle mediante análisis, la lógica de predicados al ser un sistema de primer orden no puede discernir entre los diversos tamaños del infinito, y en general, no “es capaz de determinar el cardinal de sus modelos”.¹

Conforme a estos resultados surge la siguiente interrogante ¿puede el infinito ser considerado como límite respecto al dominio manipulado por los cuantificadores? Para responder a esta cuestión se analiza la siguiente triada de teoremas: el Teorema de Skölem, el Teorema de Compacidad y el Teorema de Completud. En estos teoremas se puede apreciar el rol que juegan los dos tipos de infinitos, identificados por Cantor como *numerables* y *no numerables*. Al mismo tiempo se puede identificar el tratamiento que hace de ellos un sistema de primer orden respecto a uno de segundo orden o superior.

Por otra parte, el infinito también se vincula con el *dominio universo*, entendido como aquella colección que contiene a todas las cosas, pero, cuando se refiere a *todas las cosas* ¿a cuántas cosas

¹ Torres, Carlos. (2000). *La lógica matemática en el siglo XX*. Miscelánea Matemática, 31, p 72.

podemos referir? La interpretación de los cuantificadores forma parte de esta investigación debido a que “el uso de la cuantificación... implica *prima facie* el compromiso ontológico con determinados objetos”.² De modo que cada interpretación estipulará condiciones diferentes para el compromiso ontológico, y con ello, se establecen condiciones diferentes para concebir al *dominio universo*. Las teorías que atañen a la interpretación de los cuantificadores son la *teoría objetual* y la *teoría sustitucional*. Conviene resaltar que estas teorías no se contraponen, sino que, al parecer, ocurre lo que ha señalado la filósofa Susan Haack: “las dos tienen sus usos”.³ Y del mismo modo que tienen sus usos, tienen también, sus marcadas diferencias.

En la interpretación de la teoría objetual se indica que las “variables se extienden a las cosas u objetos”;⁴ mientras que, en la interpretación correspondiente a la teoría sustitucional se apela a los nombres de los objetos y no a los objetos mismos. Pero ¿se dispone de tantos nombres para nombrar a todos los objetos? ¿o acaso se cumple la propuesta de Quine, que hay “más cosas de las que se puede designar...contando con una infinidad de nombres”.⁵ La respuesta de estas interrogantes la encontramos nuevamente en el estudio del infinito, pero de un infinito en particular: el que corresponde al conjunto de los números reales, es decir, al infinito no numerable.

Las demostraciones de Cantor indican que el conjunto de los números reales es mayor al conjunto de los números naturales. Por otra parte, a partir de los aportes de Gödel se sabe que el conjunto de los nombres propios es del mismo tamaño que el conjunto de los números naturales, de modo que, el conjunto de los reales resulta mayor al conjunto de los nombres propios. Esto sugiere que dentro del conjunto de los números reales encontramos elementos innominados. Esta afirmación resulta confortante para la teoría objetual; sin embargo, para la teoría sustitucional esta afirmación la pone en jaque, en tanto que no se puede soslayar la existencia de los números reales, pero al mismo tiempo, el compromiso ontológico de esta teoría la obliga a rechazarlos. Por esto la condición de la teoría sustitucional se considera restrictiva, al menos en cuanto a los dominios infinitos no numerables. No obstante, cabe añadir que aun cuando la teoría objetual aboga por un dominio con objetos innominados, se mostrará que manejar este tipo de dominios sobrepasa la capacidad del sistema de la lógica predicativa, pues como hemos mencionado anteriormente, el infinito se presenta como un gran reto para este sistema lógico.

² Quine, Willard. (2002). *Desde un punto de vista lógico*. España: Paidós. p, 158.

³ Haack, Susan. (1982) *Filosofía de las lógicas*. España: Cátedra. p, 62.

⁴ Redmond. Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p. 107.

⁵ Quine, Willard. (1970) *Filosofía de la lógica*, España: Alianza. p, 156.

Además del vínculo que ejerce el estudio del infinito en la teoría de conjuntos y la lógica de predicados, también se presenta otro lazo a partir del isomorfismo entre las operaciones realizadas en la lógica proposicional y la teoría de conjuntos bajo el nombre de las *leyes de Morgan*, también conocidas en el gremio lógico como *las equivalencias de Ockham*. Estas operaciones funcionan de igual manera operando en conjuntos o en proposiciones, pero ¿A qué se debe este isomorfismo? ¿Son iguales las operaciones realizadas por las conectivas lógicas que por los operadores conjuntistas?

Para dar respuesta a estas interrogantes se analiza a detalle el comportamiento operativo de cada conexión, tanto de los pertenecientes a la lógica proposicional como a los utilizados en la teoría de conjuntos. Persiguiendo esta finalidad se incorpora el método conocido como *tablas de verdad*, utilizado en la lógica proposicional y que nos permite analizar tanto la estructura sintáctica como los valores de la semántica proposicional. Este método resulta fácilmente equiparable al aplicado en la teoría de conjuntos, denominado *tablas de pertenencia*. De hecho, sorprenderá al lector el parecido entre estas metodologías, pues a pesar de operar con elementos distintos, su procedimiento es cuasi idéntico.

Cabe destacar que, debido a que la lógica predicativa es considerada “una extensión de la lógica de proposiciones”,⁶ se ha optado por comenzar este estudio con la lógica proposicional. Además, este proyecto se propone iniciar con los aspectos más sencillos, para profundizar posteriormente en los más complejos. Luego de la lógica proposicional se explicará la lógica predicativa, detallando los tipos de relaciones, su traducción al lenguaje formal así como las operaciones que se añaden a las utilizadas en la lógica proposicional. En este apartado también se detallan todos los aspectos que involucran a la interpretación de los cuantificadores así como ciertos vínculos entre la estructura predicativa y la estructura conjuntista. Finalmente, el estudio concluye con la teoría de conjuntos, en la que se detallan las operaciones realizadas en las leyes de Morgan así como las relacionadas con la cardinalidad y los números transfinitos. El objetivo final de toda esta investigación no es otro sino acercar a los estudiantes al “modelo matemático del razonamiento correcto”.⁷

⁶ Torres, Carlos. (2000). *La lógica matemática en el siglo XX*. Miscelánea Matemática, 31, p. 66

⁷ Amor, José. (2009). *Compacidad en la lógica de primer orden y su relación con el Teorema de la Completud*. México: UNAM p. V.

1. Lógica proposicional

La lógica proposicional se caracteriza por analizar las relaciones que se presentan entre las proposiciones, ya que a partir de ellas se puede demostrar si una conclusión es verdadera, o en su caso, si su negación lo es y si se sigue válidamente. Este procedimiento resulta sencillo debido a que las proposiciones son *bivalentes*, es decir, que se rigen por dos valores: verdadero o falso. Estos valores se conocen como *valores veritativos*, y se representan mediante el *1* cuando la proposición es verdadera y con el *0* cuando la proposición es falsa. Cabe señalar que a cada proposición le corresponde sólo un valor y que se restringe una valuación doble, es decir, la asignación de los dos valores al mismo tiempo, pues cada proposición puede ser verdadera o falsa.

El contenido que se expresa dentro de una proposición puede incluir tanto oraciones declarativas compuestas así como “símbolos no verbales o incluso los meros pensamientos cuando tengan un carácter simbólico”.⁸ De esta forma las expresiones “ $2+3=8$ ” y “Beethoven fue un compositor alemán” pueden ser representadas proposicionalmente, en tanto que ambas son susceptibles de ser verdaderas o falsas. La primera es un ejemplo de una expresión puramente simbólica mientras que la segunda es una muestra de una oración declarativa.

Se puede observar que en el caso de la expresión simbólica “ $2+3=8$ ” el valor de verdad puede ser determinado con el simple hecho de realizar la operación aritmética; mientras que en el caso de la oración declarativa “Beethoven fue un compositor alemán” no se puede concluir nada sobre su verdad o falsedad, ya que esta proposición no contiene ninguna conexión interna que nos permita determinar su valor veritativo. Es por ello que la única forma de establecer el valor de esta oración sería apelando al mundo real, en el que puede comprobarse. Su comprobación es empírica mientras que la primera es *a priori*.

Se presenta en este ejemplo la importancia que tienen las conexiones al momento de realizar una demostración, ya que como puede notarse, son las que construyen los enlaces que determinan la conclusión. De hecho, “gran parte de lo que se tratará en el estudio de la lógica se refiere a la manera cuidadosa de cómo se han de utilizar estos términos de enlace.”⁹

⁸ Russell, Bertrand (1988) *Introducción a la filosofía matemática*, Barcelona: Paidós. p, 136.

⁹ Suppes y Hill (1988), *Primer curso de lógica matemática*, Colombia: Reverté, p. 1.

1.1. Proposiciones atómicas y moleculares

Para poder identificar cuando una proposición se encuentra enlazada o conectada con otra es necesario distinguir entre dos tipos de proposiciones: atómicas y moleculares. Las proposiciones atómicas son las partes más pequeñas con las que cuenta la lógica para construir a las proposiciones moleculares. Se distinguen por representar a una sola expresión, como es el caso de “ $2+3=8$ ” o “Beethoven fue un compositor alemán”. Estos átomos son indispensables para formar las moléculas, las cuales se identifican por tener al menos una conectiva proposicional. Las conectivas pueden ser “indicadas aproximadamente por las palabras “y”, “o”, “si...entonces” y “si y sólo si”; se incluye la negación “no””.¹⁰ Y hay que tomar en cuenta sus variantes dialectales: “tanto...como”, “mientras que”, “a menos que”, “en caso que”, etcétera.

Conviene recalcar que para que una proposición sea molecular debe poseer al menos una de las conectivas mencionadas; de no ser así, se estaría hablando de átomos proposicionales, aun cuando las oraciones declarativas sean muy extensas. Esto se menciona debido a que “Generalmente se cree que las proposiciones atómicas son proposiciones cortas, pero también algunas de las proposiciones en el lenguaje corriente son largas, resultando por ello pesadas y de difícil manejo”.¹¹ Debido a esta dificultad la lógica representa simbólicamente a las proposiciones, evitando confusiones al momento de realizar las conexiones con otras proposiciones y con ello, sus conclusiones se logran de manera exacta.

1.1.1. Simbolización: Variables proposicionales

Al igual que la matemática, la lógica se caracteriza por emplear “símbolos regidos por leyes combinatorias generales y conocidas, cuyos resultados admiten una interpretación no contradictoria”.¹² Debido a que es capaz de operar simbólicamente puede prescindir de los elementos que se encuentran en el mundo real. Esta forma operatoria la aplicamos en cualquier procedimiento matemático, en el que, sin importar lo que represente un número las operaciones pueden ser realizadas sin alterar el resultado. Tal es el caso de la siguiente operación aritmética: $8+2=10$. En este ejemplo podemos observar que no importa si el

¹⁰ Redmond. Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p.31.

¹¹ Suppes y Hill (1988), *Primer curso de lógica matemática*, Colombia: Reverté, p.10.

¹² Ruiz, Ángel. (2003) *Historia y filosofía de las matemáticas*. Costa Rica: UNED. p, 507.

número representa manzanas, perros o monedas, sea cual sea su referente el resultado siempre será 10.

Del mismo modo, al simbolizar a una proposición su referente se dejará de lado, en tanto que pasará a representar a cualquier proposición, es decir, que su contenido proposicional puede variar sin que se alteren los resultados. Es por ello que una vez que la proposición ha sido simbolizada o formalizada ésta se convierte en una *variable proposicional*. Las *variables proposicionales* se simbolizan regularmente con las últimas letras del alfabeto: *p, q, r, s, t*, etc. Debido a que cumplen con la función de representar a cualquier proposición su valuación tendrá que ser o 1 o 0. Conviene señalar que la lógica proposicional trabaja con este tipo de variables, ya que sólo “se ocupa de las relaciones entre las proposiciones, no de su contenido”.¹³

A continuación se presenta una serie de ejemplos de proposiciones y su respectiva representación simbólica.

Proposición	Representación simbólica
1. “Ramanujan fue el matemático hindú elegido por la diosa Namagiri”	p
2. “Gödel es el autor de la teoría de la incompletitud”	q
3. “ $15 \times 15 = 225$ ”	r
4. “Ramanujan fue el matemático hindú elegido por la diosa Namagiri” y “ $15 \times 15 = 225$ ”	p y r

Se puede observar que a cada oración o expresión se le asigna sólo una letra y que ninguna letra representa a dos proposiciones. Esto se debe a que la variable proposicional debe ser constante en su representación, es decir, no puede representar en un momento a una

¹³ Pérez, Álvaro (-) *Lógica, conjuntos, relaciones y funciones* Publicaciones Electrónicas Sociedad Matemática Mexicana. p, 1.

proposición y de un momento a otro representar a otra, ya que nuestra demostración sería errónea. Su valor proposicional debe permanecer fijo durante toda la demostración, es decir, que si hemos asignado la variable p a la proposición “Ramanujan fue el matemático hindú elegido por la diosa Namagiri” tiene que mantener a este referente durante toda nuestra demostración para que ésta pueda ser consistente, es decir, que no contenga contradicciones dentro de su resultado.

1.2. Conectivas o enlaces proposicionales

En la tabla anterior la expresión número cuatro es un ejemplo de una proposición molecular, ya que contiene una conectiva proposicional, la cual se encarga de realizar el enlace entre las dos variables. En este caso el término de enlace se lleva a cabo por la letra “y”, pero también podría realizarse con cualquiera de las “expresiones españolas “no”, “si...entonces”... “y/o” y “si y sólo si””.¹⁴ En consecuencia, todas las moléculas proposicionales podrán ser identificadas al presentar por lo menos alguna de éstas conectivas.

Las conectivas o términos de enlace se clasifican en dos grupos: monarios y binarios. El grupo de los enlaces monarios se conforma por un solo miembro, que es la negación, misma que se indica coloquialmente con la palabra “no”. Se dice que es un enlace monario debido a que se aplica en una sola proposición, ya sea molecular o atómica. Por ejemplo: si tenemos la variable p , al incluirle ésta conectiva el resultado será “no p ”; del mismo modo que si tenemos la molécula p y q , al introducirle la negación se obtiene “no es el caso que p y q ”

Por otra parte tenemos al grupo de los enlaces binarios, los cuales necesitan de dos proposiciones para poder operar. En este grupo se encuentra la conjunción, la disyunción, la implicación y la doble implicación (o coimplicación, también conocida como equivalencia). Cabe destacar que iniciaremos explicando las características de las primeras dos conectivas, posteriormente, se dedicará un apartado para estudiar la forma operativa de las equivalencias. Por otra parte, la implicación será explicada en el siguiente capítulo, en la medida en que su interpretación requiere de mayor precisión.

¹⁴ Redmond. Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p.37.

Comenzamos a continuación por caracterizar el uso cotidiano de la conjunción, el cual se expresa regularmente con la letra “y”, no obstante, también puede aparecer con las palabras “pero” y “aunque”, ya que mantienen el sentido de la conjunción: realizar una unión entre dos o más cosas. Ejemplo de ello son las siguientes expresiones: “Las matemáticas y la lógica son ciencias exactas”, “Leer a Wittgenstein es interesante aunque es difícil”, “El sistema de Frege era impresionante, pero Russell le encontró una contradicción”.

Cuando se habla de una alternativa entre dos o más opciones se utiliza la disyunción, como se muestra en la siguiente oración: “Puedo comprar el libro de Frege o el libro de Wittgenstein”. En este caso se utiliza una disyunción inclusiva, ya que puede suceder que dadas ciertas condiciones ambas opciones se lleven a cabo, es decir, que se realice la compra del libro de Frege y la compra del libro de Wittgenstein. Es por ello que se ha indicado anteriormente como “y/o”.

Se dice que una disyunción es exclusiva cuando sólo se puede elegir a uno de los elementos. Por ejemplo: o prendo la computadora o apago la computadora. Como podemos notar, no podemos realizar ambas opciones, por lo que al elegir a una de ellas automáticamente se opta por excluir a la otra, en tanto que no se pueden realizar de manera simultánea. Conviene mencionar que debido a que este tipo de disyunción tiene diferentes características operativas no será utilizada en el presente trabajo, por lo que se tomará en cuenta únicamente a la disyunción inclusiva.¹⁵

1.2.1. Representación simbólica de las conectivas proposicionales

Al igual que las proposiciones, las conectivas o enlaces proposicionales también se simbolizan para ser manejadas con mayor precisión. A continuación se presenta una tabla que nos muestra las conectivas con su respectiva representación simbólica:

¹⁵ Si bien podemos representarla con la conjunción y negación: “Compro el libro de Wittgenstein y no compro el de Frege o compro el libro de Frege y no compro el de Wittgenstein” equivale a “compro el libro de Wittgenstein o el de Frege pero no ambos”, que es disyunción exclusiva.

Conectiva proposicional	Símbolo	Se lee
Conjunción	\wedge	“y”
Disyunción	\vee	“o”
Negación	\sim	“No”, “no es el caso que...”

Como se ha mencionado anteriormente, la función de las conectivas consiste en realizar un enlace proposicional que puede ser monario o binario. Se ha dicho también que las proposiciones son bivalentes, por lo que su enlace entraña una relación directa con cada uno de los valores veritativos de las proposiciones. Es por ello que para explicar el sentido lógico de las conectivas se utilizará el método semántico, que se caracteriza por trabajar con las *tablas de verdad*. Estas tablas ilustran todas las combinaciones posibles que se pueden hacer a partir de los valores de verdad y del número de proposiciones que se encuentran enlazadas.

Para realizar una tabla de verdad se comienza por calcular el número de renglones, en los que se anota el valor veritativo de cada proposición. Por ejemplo: si queremos trazar una tabla de verdad para una proposición el número de renglones es igual a dos, en tanto que dos son las opciones posibles de su valor veritativo: 1 y 0. De tal manera que la tabla nos queda de la siguiente forma:

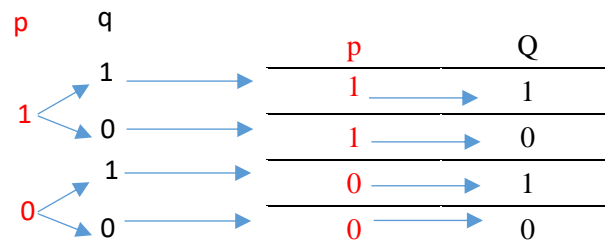
Variable proposicional	→	p
		1
Valores veritativos	}	0

La cantidad de renglones se calcula por la fórmula 2^n , en la que el dos representa a los valores veritativos y la n la cantidad de variables proposicionales. Es por ello que si queremos realizar una tabla para dos proposiciones el número de renglones a trazar serían cuatro, dado que $2^2=4$. Puede observarse que el dos funciona como constante mientras que la n es la que opera como variable. Esto se debe a que la bivalencia de las proposiciones siempre se mantiene fija, es decir, que siempre serán verdaderas o falsas, en consecuencia lo único que cambia aquí es la cantidad de proposiciones, y con ello, la cantidad de renglones a trazar.

A continuación se presenta una tabla de verdad para dos variables proposicionales:

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

El proceso que se utiliza para calcular el rango de todas las combinaciones posibles se lleva a cabo de la siguiente manera:



Como puede notarse, cada valor de p tiene dos posibilidades de enlace, del mismo modo que cada valor de q. Debido a esta correspondencia es que debe cuidarse el orden en el que se colocan los valores veritativos, ya que si nos equivocamos en la asignación de un valor la tabla de verdad será inexacta. La relación entre los valores veritativos es de suma importancia para el análisis de las conectivas proposicionales, en tanto que de ella depende la valuación de la proposición molecular. A partir de esta relación se puede observar que el sentido lógico de las conectivas es *verofuncional*. “Esto significa que la verdad de la proposición molecular depende sólo de la verdad o falsedad de las proposiciones de que consta”.¹⁶

1.2.2. Análisis semántico de las conectivas proposicionales

“La teoría semántica de la lógica proposicional exige que cada proposición sea verdadera o falsa”.¹⁷ Es por ello que opera con un método de valuaciones, en el que se asignan los valores de verdad a cada proposición. Sin embargo, conviene puntualizar que los valores de verdad se asignan tanto a las variables proposicionales como a los términos de enlace. Esto se debe a que el enlace entre los respectivos valores de las variables determina un nuevo valor, que

¹⁶ Redmond, Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p.37

¹⁷ Torres, Carlos. (2000). *La lógica matemática en el siglo XX*. Miscelánea Matemática, 31, p. 63.

corresponde al valor veritativo de la conectiva proposicional. En consecuencia se operará con los valores de las variables y con los valores de las conectivas, sin perder de vista que las conectivas siempre dependerán de la valuación de las variables, es decir, que están en función de ellas. Debido a esto cada conectiva se define a partir de la relación entre los valores de las variables proposicionales.

1.2.2.1. Conjunción

La conjunción es una operación binaria que se denota comúnmente con el símbolo “ \wedge ”. Se caracteriza por realizar una unión entre dos o más proposiciones, las cuales deben ser forzosamente verdaderas para que la unión resultante sea también verdadera. De otro modo, si alguna de las variables es falsa, la conjunción también lo será. Conviene mencionar que además de estas características la conjunción posee otras propiedades que han sido estudiadas por el álgebra proposicional, que se encarga de analizar las relaciones de forma abstracta, por lo que no considera el comportamiento particular de cada proposición, sino que se enfoca en un grupo no determinado de proposiciones que representa a partir de variables.

Lo anterior puede entenderse mediante la fórmula $\langle\langle (a+2)^2 = a^2 + 4a + 4 \rangle\rangle$, en donde la variable a “representa cualquier número. La relación expresada por la fórmula se mantendría, tanto si a valiera 1 o 5 o 10 u otro número”.¹⁸ Esto se debe a que el análisis algebraico se encarga únicamente de estudiar las relaciones que se dan entre determinados operadores, lo que le permite establecer fórmulas universales que se basan en las definiciones elaboradas respecto a cada conector. El comportamiento mecánico que se obtiene a partir de dichas definiciones nos permite vislumbrar que las operaciones se encuentran sometidas a leyes, mismas que en el área de lógica se conocen como *las leyes del álgebra proposicional*.

Las propiedades algebraicas que posee la conjunción son: “la idempotencia, la asociatividad, la conmutatividad, existencia de un elemento neutro y de un elemento dominante”¹⁹ El elemento neutro se refiere a la valuación en 1 y el elemento dominante a la valuación en 0, ya que la conjunción no se ve afectada por la valuación en 1, sino que se ve afectada directamente por cualquier valuación en 0. Es por ello que el 0 se determina como

¹⁸ Kondo, H (1980) *Enciclopedia de las ciencias*, Vol.1, México: Cumbre. p 332.

¹⁹ Pérez, Álvaro (-) *Lógica, conjuntos, relaciones y funciones* Publicaciones Electrónicas Sociedad Matemática Mexicana p, 10.

el elemento dominante, pues basta que un elemento posea éste valor para que toda la serie conectada por conjunciones se torne automáticamente en falsa.

La propiedad de idempotencia se refiere a la operación que se lleva a cabo al conectar a una proposición consigo misma. Por ejemplo " $p \wedge p$ ". En este caso la valuación de la conjunción depende del valor de p , ya que si $p=1$ entonces $p \wedge p=1$, pero si $p=0$, el resultado de $p \wedge p=0$. Por otra parte, la asociatividad establece la forma en la que pueden ser agrupadas más de dos proposiciones, siendo enlazadas únicamente a partir de conjunciones. Esta forma de agrupación se vincula con la conmutatividad, la cual determina "que el orden de las proposiciones en una conjunción es irrelevante.",²⁰ dado que su orden no altera el resultado.

Para definir las agrupaciones moleculares se utilizan los corchetes "[]", aunque también es frecuente el uso de paréntesis "()". La finalidad de estos símbolos es "evitar la ambigüedad en las expresiones complejas",²¹ ya que pueden construirse proposiciones moleculares utilizando otras proposiciones moleculares, por lo que es necesario indicar el alcance operativo que tiene cada conectiva en su respectiva agrupación. Ejemplo de ello es la siguiente formación proposicional: " $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$ ". En este caso se enlazan dos moléculas, la primera es $(p \wedge q)$ y la segunda es $(r \wedge s)$. Podemos identificar que la conectiva principal es la conjunción que une a nuestras dos moléculas, en consecuencia, su valuación dependerá del valor de cada una de las moléculas que la conforman, y la valuación de éstas dependerá a su vez del valor de los átomos que la integran.

No obstante, gracias a la propiedad de conmutatividad sabemos que el orden distributivo de una serie de conjunciones es irrelevante, por lo que podemos agrupar de diferentes formas y el resultado se mantiene intacto. Esto quiere decir que se puede agrupar indistintamente " $((p \wedge q) \wedge r) \wedge s$ o $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$ " y la valuación no se modifica. A continuación se presentan dos tablas de verdad que ilustran los resultados de las operaciones mencionadas.

²⁰ Pérez, Álvaro (-) *Lógica, conjuntos, relaciones y funciones* Publicaciones Electrónicas Sociedad Matemática Mexicana p, 9.

²¹ Redmond. Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p.33

Tabla 1

P	q	r	s	$(p \wedge q \wedge r \wedge s)$
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

Tabla 2

$((p \wedge q) \wedge r) \wedge s)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$(q \wedge r)$	$(p \wedge s)$	$(q \wedge s)$	$(r \wedge s)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0

Se puede observar que el valor 0 es el dominante y que la valuación de las moléculas $(p \wedge q \wedge r \wedge s)$ y $((p \wedge q) \wedge r) \wedge s)$ coincide en cada uno de los renglones. Esta coincidencia en las valuaciones nos indica que las proposiciones son equivalentes, es decir, que poseen el mismo valor de verdad. Cabe destacar que la equivalencia tiene otras características importantes, las cuales explicaremos con mayor detalle en la última parte de este capítulo. Por ahora nos resulta suficiente sólo identificar la equivalencia entre dos proposiciones, ya que, siendo equivalentes se puede sustituir una proposición con otra, según nos convenga en nuestro desarrollo operativo. Por ejemplo, en el caso de la tabla 1 la resolución de la operación es más práctica que la realizada en la tabla 2, ya que su agrupación nos permite ahorrarnos columnas, y con ello, también ahorrarnos tiempo.

1.2.2.2. Disyunción

La conectiva binaria que estudiaremos a continuación es la *disyunción inclusiva*, que se expresa comúnmente mediante el símbolo “ \vee ”. Se caracteriza por indicar una alternativa entre dos o más opciones. No obstante, hay que tener presente que al no ser exclusiva se permite considerar a todas las opciones de manera simultánea. Es por ello que se ha señalado como “y/o”, en tanto que las dos proposiciones pueden cumplirse, o en su caso, por lo menos alguna de ellas para que la disyunción resultante sea satisfactoria. Esto quiere decir que la disyunción será valuada en 1 si alguna de las proposiciones que la conforma vale 1, igualmente si ambas valen 1. Debido al impacto que causa el elemento con valor 1 dentro de una serie proposicional disyuntiva se le califica dominante.

Por consiguiente, el elemento neutro de la disyunción es el valor 0, en tanto que su presencia no causa ninguna repercusión en la serie disyuntiva, a menos que todos los elementos de la serie posean este valor. Ante la ausencia de todo elemento valuado en 1 la serie disyuntiva toma automáticamente el valor de 0. Podemos notar que en este sentido la disyunción presenta una diferencia con la conjunción, y “es que los papeles de 1 y 0, como elementos neutro y dominante respectivamente, se invierten”.²²

Respecto a la asociatividad, conmutatividad y propiedad de idempotencia conviene mencionar que la disyunción y la conjunción cumplen con las mismas características. El aspecto asociativo indica que podemos prescindir del uso de corchetes o paréntesis, en tanto que cualquier lectura proposicional nos lleva a un resultado equivalente. Sin embargo, conviene destacar que la serie debe contener únicamente un solo tipo de conectiva, es decir, o sólo conjunciones o sólo disyunciones, ya que de no ser así, la lectura de las diversas agrupaciones moleculares se verá afectada al no identificar la jerarquía de la operación.

La propiedad conmutativa establece que tanto en la conjunción como en la disyunción el orden del procedimiento operativo es irrelevante, en tanto que no altera el resultado. Por otra parte, la propiedad de idempotencia nos muestra la forma en la que actúan las variables al operar consigo mismas. Tal es el caso de $(p \wedge p)$ o de $(p \vee p)$, del que se obtienen respectivamente: $(1 \wedge 1)$ $(0 \wedge 0)$, $(1 \vee 1)$ $(0 \vee 0)$. Se puede observar que en ambas

²² Pérez, Álvaro (-) *Lógica, conjuntos, relaciones y funciones* Publicaciones Electrónicas Sociedad Matemática Mexicana p, 11.

proposiciones moleculares la valuación final coincide con el valor del átomo proposicional, lo que indica que son equivalentes. Esto quiere decir que si $p=1$ entonces $p \wedge p = 1$, si $p=0$ entonces $p \wedge p = 0$. Ocurre lo mismo cuando el operador es la disyunción: Si $p=1$ entonces $p \vee p = 1$, si $p=0$ entonces $p \vee p = 0$.

A continuación se presentan dos tablas de verdad que ilustran las propiedades conmutativas y asociativas de la disyunción. En ellas se puede observar que las dos proposiciones son equivalentes, lo que muestra que la asociatividad y la conmutatividad se cumplen, al mantener el mismo valor sin importar la jerarquía ni el orden seguido en el desarrollo de la operación.

(p	\vee	(p	\vee	r))
1	1	1	1	1
1	1	1	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0

((p	\vee	p)	\vee	r)
1	1	1	1	1
1	1	1	1	0
0	0	0	1	1
0	0	0	0	0

1.2.2.3. Negación

La negación es la única conectiva monaria y se denota comúnmente con el símbolo “ \sim ”, aunque también es frecuente el uso de la siguiente representación “ \neg ”. Esta conectiva realiza una operación en la que se invierten los valores, de tal manera que al contar con un rango bivalente el resultado de la operación es sencillo, pues tenemos que si $p=1$ entonces $\sim p=0$; y si $p=0$ entonces $\sim p=1$. Conviene destacar que la negación puede aplicarse tanto a un átomo como a una molécula proposicional, de modo que puede realizarse tanto de forma interna como de forma externa, de ahí que se requiera del uso de paréntesis o corchetes para indicar el rango en el que opera ésta conectiva.

Se dice que una negación es interna porque se encuentra dentro de la estructura de una molécula, de modo que niega al átomo de forma particular. Esta negación se puede encontrar ya sea en uno o en ambos átomos y no requiere de signos de agrupación, es decir, que puede prescindir del uso de los paréntesis. Ejemplo de ello son las siguientes proposiciones: $(\sim p \wedge r)$ y $(\sim p \vee \sim r)$. Se puede notar que no se agrupa $((\sim p) \wedge r)$ debido a que la negación es una conectiva monaria, por lo que queda claro que no actúa sobre r sino que sólo actúa sobre p . Si se deseara negar ambos átomos se tienen que negar de forma particular como en el caso de $(\sim p \vee \sim r)$. Conviene resaltar que éste tipo de negación no afecta a la conectiva, sólo al átomo proposicional sobre el que se aplica.

Para negar la conectiva se requiere de la negación externa, de modo que su simbolización siempre va por fuera de los paréntesis y al costado izquierdo de la misma, como se muestra en los siguientes ejemplos: $\sim(p \vee r)$, $(\sim(p \vee r) \wedge s)$, $\sim((p \vee r) \wedge s)$. Podemos notar que en la primera y segunda proposición la negación afecta a la molécula $\sim(p \vee r)$, provocando la inversa de los valores obtenidos en la disyunción. Mientras que en la tercera proposición la negación actúa sobre la conjunción, dado que se niega la molécula completa y la conjunción es su conectiva principal $\sim((p \vee r) \wedge s)$. Cabe destacar que la negación también puede aplicarse de forma externa aun cuando alguno o todos los átomos o moléculas que lo conforman se encuentre negado. Por ejemplo: $\sim(\sim p \vee \sim r)$, $\sim(p \wedge \sim r)$ y $\sim((\sim p \vee \sim r) \wedge \sim s)$.

A continuación se presentan las tablas de verdad que ilustran el comportamiento operativo de la negación:

$\sim p$	p
0	1
1	0

\sim	$(p$	\vee	$r)$
0	1	1	1
0	1	1	0
0	0	1	1
1	0	0	0

\sim	$(\sim p \vee \sim r)$		
1	0	0	0
0	0	1	1
0	1	1	0
0	1	1	1

\sim	$(p \wedge \sim r)$		
1	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1

\sim	$((\sim p \vee \sim r) \wedge \sim s)$				
1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1

\sim	$(p \vee r) \wedge s$				
0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0

\sim	$((p$	\vee	$r)$	\wedge	$s)$
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0

Conviene mencionar en este punto que la negación puede operar consigo misma, es decir, que la negación puede negarse. Esta forma operativa se conoce como *aplicación reiterada*, y establece que “la negación de la negación es equivalente a la proposición original”.²³ En consecuencia tenemos que la negación de la negación de p, simbolizada $\sim\sim p$, tiene la misma valuación que p, en tanto que p es la proposición original. Esto se muestra en la siguiente tabla:

\sim	\sim	p
1	0	1
0	1	0

²³ Perez Álvaro. *Ibíd.* p, 9

Además de esta equivalencia podemos encontrar otra bastante peculiar si convertimos la proposición $\sim(\sim p \vee \sim r)$ en una proposición afirmativa. Para llevar a cabo esta conversión se requiere de la aplicación reiterada de la negación, en la medida en que se necesita enlazar a cada elemento de la molécula con la negación externa, de modo que resulta lo siguiente: de la negación de $\sim p$ se obtiene p , al negar la disyunción se transforma en conjunción, y por último, al negar $\sim r$ se obtiene r , lo que se traduce en $(p \wedge r)$. Es importante resaltar que al negar la conjunción se convierte en disyunción, y a la inversa, si se niega la disyunción se transforma en conjunción.

A continuación se presentan las tablas de verdad que ilustran la equivalencia antes expuesta:

\sim	$(\sim p$	\vee	$\sim r)$
1	0	0	0
0	0	1	1
0	1	1	0
0	1	1	1

p	\wedge	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

Vale la pena comentar que la conversión también puede realizarse de una molécula afirmativa a una molécula negativa. Tal es el caso de $(p \vee q)$. Para transformarla en una molécula negada necesitamos “extraer” la negación e invertir la forma interna de la molécula (pues recordemos que la negación se caracteriza por operar de esta manera). El resultado que se obtiene es el siguiente: la inversa de p es $\sim p$, de \vee es \wedge y de q es $\sim q$; su agrupación debe incluir la negación externa, en consecuencia $\sim(\sim p \wedge \sim q)$ es el resultado final. De este modo, la proposición $(p \vee q)$ es equivalente a la molécula $\sim(\sim p \wedge \sim q)$, hecho que podemos observar en las siguientes tablas de verdad:

(p	v	q)
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

\sim	($\sim p$	\wedge	$\sim q$)
1	0	0	0
1	0	0	1
1	1	0	0
0	1	1	1

Las equivalencias presentadas en estas tablas pertenecen a “Un conjunto de equivalencias que relacionan la disyunción, conjunción y negación”²⁴. A este conjunto de equivalencias tan peculiares se le conoce como *Equivalencias de Ockham*, y para poder estudiarlas a detalle comenzaremos por especificar el comportamiento operativo de la conectiva binaria con la que se denota una equivalencia.

1.2.2.4. Equivalencias

Hasta ahora hemos señalado que dos proposiciones son equivalentes si cada renglón de las tablas de verdad coincide de forma exacta y ordenada, es decir, cuando ambas proposiciones poseen el mismo valor de verdad. No obstante, vale la pena comentar que esta condición no sólo asegura que dos proposiciones son equivalentes, sino que insta a que son *lógicamente equivalentes*. El ser lógicamente equivalentes indica que el resultado de la equivalencia es tautológico, por lo que “no puede ser falso bajo ninguna interpretación”.²⁵ Las tautologías tienen la característica de ser *siempre* verdaderas, de modo que, en las tablas de verdad se identifican por la valuación en 1 en todos los reglones pertenecientes a su columna.

Sin embargo, conviene añadir que no todas las equivalencias son *tautológicas*, sino que también pueden ser *contingentes*. Las equivalencias son contingentes cuando presentan “al menos una vez el valor de verdad 1 y al menos una vez el valor 0”. Si, por otra parte, al evaluar una equivalencia se obtienen sólo valuaciones en 0 nos encontramos ante dos

²⁴ Redmond, Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana, p. 77.

²⁵ Fernández, Max. (1996) *Lógica elemental*, México: Universidad Autónoma Metropolitana. p. 58.

proposiciones *contradictorias*. A este tipo de contradicción se le conoce como *contradicción formal*, y lo que indica es “que no tiene ninguna posibilidad de ser verdadera”.²⁶

Para representar la conectiva binaria correspondiente a la equivalencia se utiliza el símbolo “ \equiv ”. La valuación de esta conectiva se realiza de la siguiente manera: es verdadera cuando las dos proposiciones que la conforman tienen el mismo valor, y falsa cuando la valuación entre ellas no coincide. En este punto conviene matizar que la valuación se hace reglón por reglón, es decir, que no es necesario que coincidan todos los valores de la columna, basta que coincidan los del reglón para que ese reglón sea verdadero. El resultado total de los renglones es lo que nos indica si nos encontramos ante una tautología, una contingencia o una contradicción.

Conviene añadir que una equivalencia se puede dar tanto en proposiciones atómicas como en moleculares, muestra de ello son las siguientes tablas de verdad:

$$p \equiv q, (p \vee \sim p) \equiv \sim(\sim p \wedge p), (p \vee \sim p) \equiv (\sim p \wedge p)$$

1)

p	\equiv	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

2)

(p	\vee	$\sim p$)	\equiv	\sim	($\sim p$	\wedge	p)
1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0

3)

(p	\vee	$\sim p$)	\equiv	($\sim p$	\wedge	p)
1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0

En el caso de la primera tabla nos encontramos ante un resultado contingente; mientras que, en la segunda tabla presenciamos la estructura de una tautología. En el caso de la tercera tabla el resultado obtenido es una contradicción, fruto de retirar la negación externa de la molécula $\sim(\sim p \wedge p)$. Cabe señalar que esta molécula posee una estructura tautológica,

²⁶ Fernández, Max. *Ibíd.* p, 65

pero al retirarle la negación se convierte en una contradicción, del mismo modo que, si a la estructura contradictoria le aplicamos la negación se convierte en tautología.

Es pertinente destacar que la estructura de la molécula $\sim (\sim p \wedge p)$ es crucial dentro del sistema proposicional, en tanto que representa la arquitectura de uno de los principios lógicos fundamentales: *el principio de no contradicción*. Este principio insta que las proposiciones no pueden ser verdaderas y falsas simultáneamente, de modo que una proposición “Si no es verdadera, es falsa y si no es falsa es verdadera. No hay tercera opción”.²⁷ La imposibilidad de un tercer valor se conoce como *el principio del Tercero Excluido*, y, a *grosso modo* puede decirse que colabora con el *principio de bivalencia*, en tanto que éste último insta que “todas las proposiciones no pueden ser sino verdaderas o falsas”. La estructura del tercero excluido nos permite observar el principio de bivalencia, dado que su simbolización corresponde a la molécula $(p \vee \sim p)$.

Vale la pena resaltar que los principios lógicos son siempre verdaderos, de modo que poseen una estructura tautológica. Las proposiciones “de este tipo son verdaderas únicamente en virtud de su forma”.²⁸ Esto quiere decir que es la forma en la que se conectan las proposiciones la que hace posible la estructura tautológica de las mismas. En consecuencia, las tautologías son verdaderas independientemente de la valuación de sus componentes, pues sin importar el valor que éstos posean el resultado final siempre será verdadero.

Esta condición se puede observar con claridad en las equivalencias de Ockham, en donde a pesar de que las moléculas se construyen con diferentes elementos su forma estructural es la misma, de tal modo que son lógicamente equivalentes, y, en consecuencia, también tautológicas.

1.2.2.4.1. Las equivalencias de Ockham

Las equivalencias de Ockham se conocen también como “De Morgan” (“**dm**”), porque se pensó que A. De Morgan, lógico inglés de mediados del siglo XIX, había sido el primero que las descubrió.”²⁹ Sin embargo, conviene puntualizar que las De Morgan también se utilizan en el área de teoría de conjuntos, y dado que los símbolos operativos son diferentes en cada

²⁷ Barceló, Axel. (2015) “Las tablas de verdad como filosofía” en *Argumentos*, año 7, n. 13. p, 168-169.

²⁸ Fernández, Max. (1996) *Lógica Elemental*. México: Universidad Metropolitana. p, 38.

²⁹ Redmond. Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p. 77.

área, nos referiremos a cada grupo de equivalencias según convenga su aplicación. Esto quiere decir que si la operación es proposicional utilizamos la referencia a Ockham (**oc**), mientras que si es conjuntista las denominaremos como De Morgan (**dm**).

Las proposiciones que conforman a las equivalencias de Ockham son las siguientes:

(p	\wedge	q)	\equiv	\sim	(\sim p	\vee	\sim q)
1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	1

(p	\wedge	\sim q)	\equiv	\sim	(\sim p	\vee	q)
1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0

(\sim p	\wedge	q)	\equiv	\sim	(p	\vee	\sim q)
0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1

(\sim p	\wedge	\sim q)	\equiv	\sim	(p	\vee	q)
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0

(p	\vee	q)	\equiv	\sim	(\sim p	\wedge	\sim q)
1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1

(p	\vee	\sim q)	\equiv	\sim	(\sim p	\wedge	q)
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0

$(\sim p \vee q)$	\equiv	$\sim (p \wedge \sim q)$
0 1 1	1	1
0 0 0	1	0
1 1 1	1	0
1 1 0	1	1

$(\sim p \vee \sim q)$	\equiv	$\sim (p \wedge q)$
0 0 0	1	0
0 1 1	1	1
1 1 0	1	0
1 1 1	1	0

Podemos notar que cada una de estas equivalencias se conforma por dos proposiciones moleculares: una disyuntiva y otra conjuntiva. De este par de moléculas, si una está afirmada la otra debe estar negada, de tal modo que, si se afirma la molécula conjuntiva se niega la molécula disyuntiva; y a la inversa, si se afirma la molécula disyuntiva se niega la conjuntiva. Lo interesante de la arquitectura de estas dos moléculas es que, a pesar de que sus elementos son distintos, la forma en la que éstos se conectan deviene en la misma estructura. En consecuencia nos encontramos ante dos proposiciones cuyos componentes son totalmente distintos, pero que estructuralmente son iguales entre sí.

Este hecho nos indica que se puede expresar lo mismo utilizando formas diferentes, de tal manera que, si tenemos dos proposiciones cuya estructura es exactamente la misma, entonces podemos sustituir una por otra indistintamente. Resulta claro que se sustituye una proposición por otra “que ‘diga lo mismo’ de un modo diferente – que sea, quizás, más simple o conveniente de cara a los intereses que se tengan en un momento dado”.³⁰ En este punto vale la pena resaltar que sólo se pueden sustituir aquellas proposiciones que sean lógicamente equivalentes.

En el caso de las equivalencias de Ockham las moléculas que se enlazan son lógicamente equivalentes, por lo que son sustituibles entre sí. Las moléculas que hacen posible la equivalencia no son en sí mismas tautológicas, de hecho son contingentes. Sin embargo, el par molecular que constituye la equivalencia posee exactamente la misma forma contingente, coincidiendo en cada caso de falsedad y de verdad. Es a partir de esta

³⁰ Quine, Willard. (1993) *Los métodos de la lógica*, Argentina: Planeta. 81.

coincidencia donde se identifica la igualdad entre sus estructuras, igualdad que nos permite presenciar que el valor de verdad enlazado no realiza el menor influjo en los resultados. Sin importar la valuación, la estructura de las equivalencias permanece tautológica. En consecuencia las equivalencias de Ockham son verdaderas para todos los casos.

2. Lógica de Predicados

La *lógica de predicados* “es una extensión de la lógica de proposiciones”.³¹ Se caracteriza por analizar las relaciones que se presentan tanto al interior como al exterior de los átomos proposicionales. Dentro de su estudio se incluyen “las relaciones entre las proposiciones indicadas aproximadamente por palabras como “todo”, “alguno” y “ninguno””.³² Estas expresiones le brindan los elementos necesarios para lograr otro tipo de inferencias que resultarían imposibles bajo los procedimientos de la lógica proposicional. “Por ejemplo, el siguiente argumento no se puede justificar con base en las tablas de verdad:

Si Todos los hombres son mortales y Sócrates es un hombre
Sócrates es mortal”³³

La imposibilidad de justificar este razonamiento radica en la traducción proposicional, pues de ésta se obtiene: “ $(p \wedge q) \supset r$ ”, en donde p = Todos los hombres son mortales, q = Sócrates es un hombre y r = Sócrates es mortal. La conectiva expresada como “ \supset ” (se lee “implica”), es una conectiva binaria conocida como *implicación material*. También se le suele nombrar “condicional material” pues lo único que hace es hablar sobre la materia de las proposiciones, es decir, sus valores de verdad”.³⁴ En algunas ocasiones la podemos encontrar representada como “ \rightarrow ”, pero de igual manera nos indica la existencia de una relación condicional. Este tipo de relación suele articularse en el lenguaje ordinario bajo

³¹ Torres, Carlos. (2000). *La lógica matemática en el siglo XX*, en *Miscelánea Matemática*, 31, p. 66

³² Redmond, Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p. 31

³³ Torres, Carlos. (2000). *La lógica matemática en el siglo XX*, en *Miscelánea Matemática*, no.31, p. 66

³⁴ Morado, Raymundo. *Implicación material*. Consultado el 01 de febrero de 2019, del Sitio Web de la Universidad Nacional Autónoma de México:

<http://www.filosoficas.unam.mx/~morado/Cursos/11FilLog3Sem/110901.pdf> p, 1.

la forma “si... entonces”. No obstante, puede adoptar formas distintas, por ejemplo: “Don Quijote está feliz si Dulcinea lo ama” o “De hacer frío, la tierra está seca”.³⁵

Es preciso señalar que las diversas lecturas que pueden hacerse de la relación condicional han derivado en diversas polémicas, que tienen como centro de discusión el valor veritativo que se obtiene a partir de la conexión entre el valor del antecedente y el valor del consecuente. Para ilustrar lo anterior expondremos las posturas de los siguientes filósofos griegos: Filón de Megara y Diódoro Crono. El primero “consideraba que $\alpha \rightarrow \beta$ era verdadera a no ser que α sea verdadera y β falsa”.³⁶ De tal modo que la proposición “Si es hombre entonces es mortal” sólo podría ser falsa si se cumpliera que “es hombre” pero que no es “mortal”, pues en este caso se trunca la relación condicional, en tanto que se cumple el antecedente pero no el consecuente. Esta forma de interpretación corresponde a la implicación material, que también es conocida como “filónica”, porque el lógico griego fue el primero que ofreció una tal definición de la oración condicional”.³⁷

Por otra parte Diódoro sostenía “que $\alpha \rightarrow \beta$ es verdadero si siempre que α sea verdadero β también lo es”.³⁸ A esta lectura de la implicación se le conoce como *implicación estricta* y se usa “ \rightarrow ” para expresarla, y establece que la valuación en 1 del antecedente es condición necesaria y suficiente para que el consecuente posea el mismo valor. Debido a la condición de necesidad que se presenta en ésta conectiva es que se vincula con la *lógica modal*, la cual es una extensión de la lógica proposicional que estudia cuando las proposiciones son “necesaria y posiblemente V o F”.³⁹ En esta área de la lógica se “supone que es verdadero (que $\alpha \rightarrow \beta$) si β es verdadero en todos los mundos posibles en los que α es verdadero”.⁴⁰

Conviene mencionar que la teoría de los mundos posibles ha sido relacionada con el método semántico de tablas de verdad, en donde “los distintos renglones pueden verse como

³⁵ Redmond, Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p. 47-48.

³⁶ Ivorra, Carlos. *Lógica y teoría de conjuntos* Consultado el 12 de diciembre de 2017, del Sitio Web de la Universidad de Valencia: <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica.pdf> p.20

³⁷ Redmond, Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p. 40.

³⁸ Ivorra, Carlos. *Lógica y teoría de conjuntos*, Consultado el 12 de diciembre de 2017, del Sitio Web de la Universidad de Valencia: <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica.pdf> p.20

³⁹ Redmond, Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p. 157.

⁴⁰ Haack, Susan. (1982) *Filosofía de las lógicas*. España: Cátedra. p, 57

representando diferentes maneras en que el mundo pudo haber sido”.⁴¹ Bajo esta interpretación se torna más evidente la diferencia entre la implicación material y la implicación estricta, pues la primera concede la posibilidad de que un antecedente sea verdadero y el consecuente sea falso; mientras que en la segunda esto es imposible, ya que debido a su interdependencia, o bien los dos son verdaderos o los dos son falsos.

En la lógica proposicional se utiliza la implicación material, de manera que “abarca también los casos en que no existe forzosidad de derivación”.⁴² Su definición veritativa se presenta en la siguiente tabla de verdad:

p	→	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

Retomemos ahora el ejemplo del argumento “Todos los hombres son mortales, Sócrates es un hombre. Sócrates es mortal”, que ha sido simbolizado como “(p ∧ q) → r”. A éste argumento le corresponde la siguiente tabla de verdad:

(p ∧ q)	→	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

⁴¹ Barceló, Axel. *Sintaxis y semántica*, Consultado el 12 de diciembre de 2017, del Sitio Web de la Universidad Autónoma de México: <http://www.filosoficas.unam.mx/~abarcelo/LMV/SSCurso.pdf> p.4.

⁴² Ruiz, Marcos. (-) *Introducción a la lógica*. México: UANL p, 122.

Se presenta en la valuación de la molécula “ $(p \wedge q) \rightarrow r$ ” una posibilidad de ser falsa, que se basa en la verdad de la molécula $(p \wedge q)$ y en la falsedad de “ r ”. Sin embargo, es evidente que r no puede ser falsa, dado que la condición que cumple Sócrates al ser un hombre es suficiente para concluir que éste es mortal. La estructura que posee este argumento corresponde a un “Razonamiento deductivo, que es aquel en que la derivación es forzosa... *y nos es imposible considerarla falsa una vez que hemos admitido que “Todos los hombres son mortales” y que “Sócrates es un hombre”*”.⁴³

Este razonamiento nos muestra la limitación de la lógica proposicional al no incluir en su estudio a las relaciones internas, pues es justo en ellas donde se presenta el vínculo que sustenta la conclusión. En el ejemplo anterior el vínculo entre “Todos los hombres son mortales” y “Sócrates es un hombre” se presenta en la palabra “hombre”, la cual “permite el paso o el *tránsito*” hacia “Sócrates es mortal”. Conviene mencionar que dicha palabra pasa desapercibida en la traducción al lenguaje de la lógica proposicional; sin embargo, como veremos a continuación, en el tratamiento de la lógica de predicados no ocurre lo mismo, dado que su sistema dispone de los análisis internos de las estructuras atómicas, por lo que las traducciones en este sistema son tanto más complejas como más completas.

2.1. Relaciones atómicas: identidad y predicación.

En la lógica predicativa “se han identificado dos tipos fundamentales de proposición atómica, es decir, de relaciones intraproposicionales, a las que podemos llamar: predicación e identidad”.⁴⁴ La predicación se refiere a la asignación de una o más propiedades a por lo menos una cosa. Por propiedad se entiende cualquier “rasgo, característica, cualidad, atributo”⁴⁵ que permita identificar y discernir a una cosa de otra semejante. Por ejemplo: El gato es pequeño, la manzana es roja, el agua es incolora e insabora.

En la relación de identidad se estudia la “referencia a una cosa mediante dos “nombres” en el sentido amplio”.⁴⁶ Esto puede notarse cuando nombramos a una cosa por su nombre propio como Homero Simpson o si nos referimos a él mediante una descripción, como podría ser “el papá de Bart Simpson”. En este caso puede evidenciarse que da lo mismo

⁴³ Ruiz, Marcos. *Ibíd.* p. 84.

⁴⁴ Redmond. Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p.87.

⁴⁵ Redmond. Walter. *Ibíd.* p.88.

⁴⁶ Redmond. Walter. *Ibíd.* p. 88.

decir Homero Simpson o “el papá de Bart Simpson”, en tanto que ambas referencias señalan al mismo individuo. El estudio de esta peculiar correspondencia entre nombres se lleva a cabo en el área de *lógica de la identidad*, cuyo rango de operaciones incluye a las conectivas de lógica de predicados y a las de lógica proposicional.

2.1.1. Proposiciones predicativas: Sencilla y Compleja

Se dice que una proposición predicativa es *sencilla* cuando el predicado sólo relaciona a un elemento. Por ejemplo: Sócrates es humano o Aristóteles es mortal. A este tipo de predicados que ejercen una relación con el sujeto se les denomina *relatores*. “El rango de un relator es el número de complementos que necesita para tener sentido”.⁴⁷ En el caso de las proposiciones predicativas sencillas se dice que poseen un relator monádico o de rango 1, en tanto que sólo necesitan de un elemento para establecer la propiedad, y con ello, cobran sentido. El sentido que estas proposiciones nos envían mediante su estructura corresponde a la de un juicio, en el que “siempre pensamos que *algo es (o no es) así*”.⁴⁸

La estructura que identifica a este tipo de relaciones se conforma por los siguientes elementos: *sujeto, cópula y predicado*. El sujeto es “el concepto del objeto sobre el cual se afirma (o se niega) algo”; mientras que el predicado es aquello “que se afirma (o niega) de ese objeto”.⁴⁹ La cópula se refiere a la palabra “es”, que “establece la relación y, además de establecerla, la enuncia.”⁵⁰ Podemos identificar que la cópula es el relator monádico de la oración que se encarga de afirmar si el sujeto *es o no es* correspondiente a su predicado.

Es preciso mencionar que “Cuando digo “es” quiere decir que se trata de la misma cosa... Así pues lo que queremos decir con “Todo ser humano es animal” abarca relaciones de identidad entre las cosas que ostentan ambas propiedades, ser humano y ser animal”.⁵¹ A partir de estas relaciones se puede notar que la función que la cópula realiza es una correspondencia entre el sujeto y la propiedad, de tal modo que enlaza a cada elemento del sujeto con el atributo establecido. Cabe destacar que esta relación también puede interpretarse

⁴⁷ Ivorra, Carlos. *Lógica y teoría de conjuntos*, Consultado el 12 de diciembre de 2017, del Sitio Web de la Universidad de Valencia: <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica.pdf> p.18.

⁴⁸ Ruiz, Marcos. (-) *Introducción a la lógica*. México: UANL p, 56.

⁴⁹ Ruiz, Marcos. *Ibíd.* p. 56.

⁵⁰ Ruiz, Marcos. *Ibíd.* p. 56.

⁵¹ Campos, Juan. (2013) “El octágono medieval de oposición para oraciones con predicados cuantificados” en *Tópicos* Vol. 4 p, 179.

como la pertenencia en determinado conjunto, es por ello que “En vez de hablar de propiedades, podríamos hablar de clases o conjuntos”⁵², en tanto que sólo cambia la forma de interpretar la oración, pero su estructura no sufre modificación alguna.

Ejemplo de lo anterior son las siguientes oraciones: “El número dos es irracional” y “El número dos pertenece al conjunto de los números irracionales”. En estas oraciones podemos notar que “el nivel de abstracción de los conjuntos y de las propiedades es igual”.⁵³ No obstante, es conveniente mencionar que pese a la gran similitud entre las propiedades y los conjuntos, hay entre ellos, también importantes diferencias. Con la finalidad de tratar adecuadamente cada tema nos limitaremos a interpretar en esta parte los predicados como propiedades y relaciones, posteriormente ya expondremos su vínculo con los conjuntos, específicamente, bajo el tratamiento de la teoría de conjuntos.

Por otra parte, se dice que una proposición predicativa es *compleja* cuando la predicación requiere de un enlace de cuando menos dos elementos. Este tipo de proposiciones se distinguen por emplear relatores diádicos o de rango 2, e incluso de rango superior “(triádicos, y, en general, poliádicos)”.⁵⁴ Como se ha dicho, el rango del relator nos indica la cantidad de elementos que se requieren para que éste tenga sentido. En este punto conviene añadir que los relatores poliádicos expresan relaciones, y éstas tienen a su vez propiedades, de modo que, resulta fundamental detallar las características de cada relación con la finalidad de identificar las restricciones que cada relator lleva consigo.

2.1.1.1. Propiedades de las relaciones complejas

Las relaciones complejas se caracterizan por emplear relatores poliádicos, de manera que operan con un rango de mínimo dos elementos. Un ejemplo relator poliádico lo encontramos en la propiedad de *ser padre*, la cual ejerce un tipo de relación a la que se denomina *irreflexiva*, dada la imposibilidad de un elemento de relacionarse consigo mismo. En este caso resulta claro que “nadie es padre de sí mismo”,⁵⁵ de modo que el relator requiere de dos elementos distintos para que la relación pueda establecerse: el padre y de quien es padre.

⁵² Redmond. Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p. 88.

⁵³ Redmond. Walter. *Ibíd.* p. 88.

⁵⁴ Ruiz, Marcos. (-) *Introducción a la lógica*. México: UANL p, 140.

⁵⁵ Redmond. Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p, 109.

Por otra parte, las relaciones que son *reflexivas* no solicitan la existencia de elementos distintos, en tanto que “las cosas a que se aplica guardan la relación consigo mismas”.⁵⁶ Por ejemplo: La relación de identidad. En esta relación se establece que un sujeto x “– o cualquier cosa – es idéntico consigo mismo”,⁵⁷ simbolizada en la operación “ $x=x$ ”. Además de ser idéntico se dice que es simétrico, en tanto que “las cosas se relacionan en ambos sentidos”.⁵⁸ Tal es el caso de la siguiente oración: Dunia es hermana de Andrea. Debido a que presenta un predicado “simétrico” podemos cambiar el orden de los nombres y mantener el sentido de la relación: Andrea es hermana de Dunia.

Resulta notable que este cambio de nombres no se puede realizar en una oración de predicado “irreflexivo” como ser padre, ya que si “Homero es el padre de Bart” los términos “Homero” y “Bart” no pueden colocarse indistintamente, ya que sería erróneo expresar que “Bart es el padre de Homero”. En consecuencia, la relación de paternidad no es simétrica. La asimetría de una relación podemos vislumbrarla cuando varían los “grados” en los que las cosas poseen una propiedad. Por ejemplo: “Los babilonios son más antiguos que los griegos”. En esta oración se entiende que tanto las babilonios como los griegos son antiguos, no obstante, difieren en su grado de antigüedad. Otro tipo de relación asimétrica podemos encontrarlo en la expresión matemática “ $a > b$ ”, en la que se indica que a es mayor respecto a b .

También podemos encontrar relaciones que son *transitivas*. “Una relación es *transitiva* ssi se “transfiere”: si una cosa se relaciona con una segunda cosa y ésta con una tercera, entonces la primera se relaciona con la tercera”.⁵⁹ Esta transición la hemos mostrado previamente en el razonamiento deductivo: “Todos los hombres son mortales, Sócrates es un hombre. Sócrates es mortal”. También podemos encontrar relaciones transitivas en planteamientos matemáticos tales como: “si dos es menor que tres y tres es menor que cinco, entonces dos es menor que cinco”.⁶⁰ En donde *tres* permite la transferencia del predicado *ser menor que cinco*, de modo que éste resulta también aplicable al número *dos*.

⁵⁶ Redmond. Walter. *Ibíd.* p, 109.

⁵⁷ Redmond. Walter. *Ibíd.* p, 109.

⁵⁸ Redmond. Walter. *Ibíd.* p, 109.

⁵⁹ Redmond. Walter. *Ibíd.* p, 109.

⁶⁰ Redmond. Walter. *Ibíd.* p, 109.

2.1.2. Simbolización de proposiciones predicativas: términos singulares y términos comunes

Una proposición predicativa se caracteriza por su forma gramatical *sujeto-predicado*. El sujeto puede ser *cualquier cosa* y su predicado puede ser sencillo o complejo. Para referir a estos elementos se utilizan *términos*, que pueden ser singulares o comunes. “Llamemos términos singulares a aquellos que designan una sola cosa, a un solo individuo”.⁶¹ Por ejemplo: Sócrates, Aristóteles, Homero, cero, etc. Se dice que un término es común “precisamente porque no es el nombre de ninguna persona u objeto en particular”.⁶² Por ejemplo: el ser hombre, que puede predicarse tanto de Sócrates como de Aristóteles.

Existen entonces términos singulares que designan cosas y términos comunes que designan propiedades. Los términos individuales se simbolizan mediante las letras minúsculas del alfabeto y pueden indicar nombres propios o “descripciones que se refieren a un individuo u objeto”.⁶³ Por ejemplo: Homero Simpson, el papá de Bart Simpson y la cerveza Duff. Conviene mencionar que debido a que las descripciones forman parte de la lógica de la identidad sólo trabajaremos con la referencia a nombres propios, los cuales se desempeñan como constantes en el lenguaje predicativo. Para simbolizar a estas constantes es frecuente que se elijan aquellas letras que puedan “recordarnos de las cosas a que se refiere”.⁶⁴ Por ejemplo: h es Homero Simpson, b es Bart Simpson, c es la cerveza Duff.

También se puede hacer referencia a una cosa de manera “vaga”, a partir del uso de adjetivos demostrativos como *este o aquel*, que forman parte de los *términos singulares vagos*. “Un término singular vago es aquel que se refiere a un individuo específico cuando lo señalamos sin usar un nombre propio: “éste filósofo” se refiere a Sócrates cuando señalamos a Sócrates, y a Platón cuando señalamos a Platón”.⁶⁵ Estos términos también se desempeñan

⁶¹ Campos, Juan. (2013) “El octágono medieval de oposición para oraciones con predicados cuantificados” en *Tópicos* Vol. 4 p, 180.

⁶² Suppes y Hill (1988), *Primer curso de lógica matemática*, Colombia: Reverté p, 190.

⁶³ Suppes y Hill. *Ibíd.* p, 191.

⁶⁴ Redmond. Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p, 91.

⁶⁵ Campos, Juan. (2007). “La conversión simple ordinaria y modal de las oraciones”, en *Revista de Filosofía*. Vol. 57, No. 3. p, 2.

como constantes en el lenguaje predicativo y se simbolizan mediante las primeras letras “del alfabeto: a, b, c, etc.”.⁶⁶

La última forma en la que podemos referir a una cosa es como un “elemento cualquiera”, o en otras palabras, como “cualquier cosa”. Esta referencia tan amplia de sentido se simboliza con las últimas letras del alfabeto: x , y , z . La función de estas letras es expresar una *variable*, la cual puede ser remplazada por un elemento específico. Esta sustitución de x por otro elemento podemos vislumbrarla en el siguiente ejemplo: ($\frac{10x}{x} = 10$). En este caso se recurre a los “métodos del álgebra, porque x puede reemplazarse por cualquier número. Podríamos sustituirlo por 2, 3 o 15, y el resultado final sería 10”.⁶⁷

Continuamos ahora con la definición de los términos comunes. Comenzamos por aclarar que “términos como “gato”, “león” u otros que son sustantivos comunes...en lógica en ningún caso son nombres, sino predicados”.⁶⁸ Los términos comunes pueden indicarse de “varias maneras; p. ej., mediante adjetivos (“manchego”) , sustantivos (“ser humano”) y verbos(“correr”)”.⁶⁹ Para expresarlos simbólicamente se utilizan letras mayúsculas, como se muestra a continuación: A es ser Amarillo, I es ser Inteligente y H es ser hábil. “Cuando queremos especificar una propiedad en particular sin identificarla, usaremos las letras ... F , G , H . Tal uso corresponde al empleo de a , b , c ”.⁷⁰ Si el predicado se señala de manera directa se dice que es una *constante predicativa*. De otro modo, si el predicado se menciona de manera vaga como “mi hermano es algo” se dice que es una *variable predicativa* y se simboliza con las últimas letras del alfabeto: X , Y , Z .

Podemos notar que se utilizan las letras mayúsculas para simbolizar propiedades y minúsculas para representar cosas. De esta forma cuando requerimos simbolizar una oración como “Homero es Amarillo” distinguimos la propiedad que es “ser Amarillo” y el sujeto que la posee, que es Homero. De ello se obtiene Ah, que se lee “h es A”. Podría darse el caso de que el sujeto fuera señalado pero que no fuera nombrado, de tal forma que se dijera “este

⁶⁶ Redmond. Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p, 92.

⁶⁷ Kondo, H (1980) *Enciclopedia de las ciencias Vol.1*, México: Cumbre. p, 352.

⁶⁸ Pizcoya, Luis. (1997), *Lógica de predicados*, Consultado el 01 de febrero de 2019, del Sitio Web de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos: http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/libros/filosofia/intro_logica/2_parte.pdf p.230

⁶⁹ Redmond. Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p, 93.

⁷⁰ Redmond. Walter. *Ibíd.* p, 93.

sujeto es amarillo” representada como “Aa”. Asimismo podría ser que la propiedad fuera señalada pero no determinada, asintiendo que homero posee “Esta propiedad” o simbólicamente “Fx”. También podría suceder que se nombrara el sujeto de forma indeterminada a partir de la oración “el sujeto es amarillo”, que queda simbolizada como “Ax”. Y por último podría ocurrir que el predicado fuera lo indeterminado, afirmando que “Homero tiene una propiedad X”, quedando plasmado como “Xh”.

2.2. Cuantificación

“Los ejemplos anteriores se referían a enunciados singulares, es decir, no cuantificados”.⁷¹ Un enunciado se encuentra en forma singular cuando sólo vincula a un elemento, y está cuantificado cuando se relaciona con una colección. Los enunciados cuantificados se expresan coloquialmente con las palabras: *todo*, *alguno* y *ninguno*, las cuales funcionan como signo de cantidad y establecen “*cuántos* miembros del sujeto son también miembros del predicado”.⁷² No obstante, conviene precisar que la cantidad indicada por estos signos no suele ser exacta, aunque sí “opera con tres números, que son, en orden ascendente, «0», «1 o más» y «el número total de miembros del sujeto»”.⁷³

Los signos de cantidad se conocen como *cuantificadores*, y se utilizan para designar la forma Universal o Existencial de una proposición. La primera hace referencia a *todos los elementos* de una colección y se simboliza como: $\forall x$. La segunda alude sólo a *algunos elementos* y se representa mediante la expresión: $\exists x$. Cabe destacar que estos signos de cantidad admiten negaciones, por lo que hay proposiciones Universales Afirmativas y proposiciones Universales Negativas, así como Existenciales Afirmativas y Existenciales negativas.

2.2.1. El cuadrado tradicional

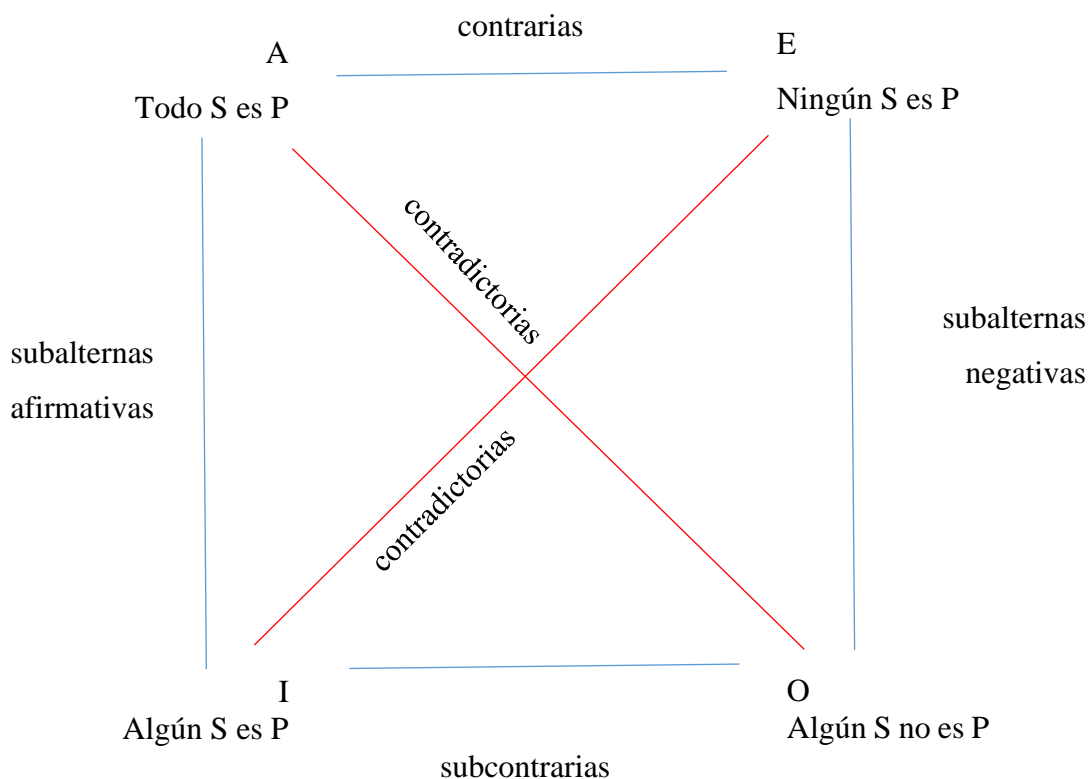
Un análisis clásico de éste tipo de formas proposicionales lo encontramos en el *cuadrado tradicional*, también conocido como el *cuadrado de oposición*. En esta figura se representan “cuatro oraciones a las que se les ha asignado una vocal y son estas: A: universal afirmativa; E: universal negativa; I: particular afirmativa y O: particular negativa. Si tomamos una

⁷¹ Ferrater, José. (1992) *Lógica matemática*. México: FCE p. 72

⁷² Carroll, Lewis. *El juego de la lógica*. Alianza: España. p, 44.

⁷³ Carroll, Lewis. *Ibíd.* p, 44.

oración cuantificada de la forma Sujeto-cópula-Predicado tenemos estas cuatro combinaciones ordenadas en este cuadrado”.⁷⁴



Se puede observar que las relaciones que se proponen en esta figura son monarias o de rango 1, en tanto que la relación sólo involucra a una clase, la cual se conforma de aquellos sujetos de los que se asume o se niega su correspondencia con la propiedad. En consecuencia, los relatores poliádicos quedan fuera de esta figura, en la medida en que requieren de dos o más colecciones poder operar, y en consecuencia, de dos o más cuantificadores que controlen el rango de dichas colecciones.

Comenzamos el estudio del cuadrado con la *proposición en A*, la cual establece que en una colección, *todos sus elementos* satisfacen la propiedad determinada. Esta colección supone un dominio de «1 o más» elementos, aunque también puede darse el caso en que se conozca «el número total de miembros del sujeto». De modo similar opera una *proposición en I*, al indicar una colección con un dominio de «1 o más» elementos, aunque por sí misma

⁷⁴ Campos, Juan. (2014). *Ensayos de filosofía y lógica novohispana del siglo XVI*. Porrúa p, 136.

no alcanza a regir a todos los elementos como lo hace la proposición en A (excepto cuando la colección se conforme por un solo elemento).

Por otra parte, una *proposición en E* instaure que en una cierta colección “ningún miembro de su sujeto es miembro de su predicado”. De tal manera que la cantidad con la que opera esta proposición es «0», en tanto que «0» sujetos satisfacen el predicado asignado. Esto se ejemplifica en la siguiente oración: «Ningún hombre es inmortal», entendida como «0 hombres son inmortales», no afirma que las propiedades H, I son vacías, sino que la colección «hombres inmortales» lo es, en tanto que no contiene a *ningún* elemento dentro de ella.

Por último, la *proposición en O* determina que en una colección de elementos «algunos de ellos NO» cumplen con la propiedad estipulada. Al igual que la proposición en I, su rango abarca a «algunos elementos, quizás todos»; pero se distingue de ella al negar que cierta parte de la colección pueda incluirse en el predicado. No obstante, pese a esta diferencia, es preciso destacar que las proposiciones O e I no se contradicen, en la medida en que se acepta que dentro de una colección algunos elementos puedan cumplir o no con una propiedad en específico sin que esto cause contradicción alguna.

Es preciso puntualizar que “Las cuatro oraciones del cuadrado deben tener el mismo sujeto y el mismo predicado en el mismo orden y ser afirmativas o negativas”.⁷⁵ Las únicas diferencias entre ellas sólo pueden ser de “cantidad, es decir, cuantificación, y de calidad, el ser afirmativas o negativas”.⁷⁶ Con la finalidad de profundizar en el estudio de la cantidad con la que operan las formas proposicionales antes mencionadas nos detendremos a continuación en un tema conocido en el gremio lógico como “*el universo del discurso o el “dominio” de los cuantificadores*”.⁷⁷

2.2.2. Universo del Discurso

El universo del discurso se suele interpretar en dos sentidos: 1) como la colección que contiene a todas las cosas y 2) como la colección definida mediante el discurso. En el primer

⁷⁵ Campos, Juan. Aristóteles “El cuadrado de Aristóteles, los cuadrados medievales y su absorción en el octágono de Buridan” en *Medievalia Americana Revista de la Red Latinoamericana de Filosofía Medieval*, Año 3, N. 2, diciembre 2016. p. 322.

⁷⁶ Campos, Juan. *Ibíd.* 322.

⁷⁷ Redmond. Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p. 97

sentido se alude a una cantidad indefinida de cosas, podríamos decir apresuradamente que es una cantidad “*infinita*”. En el segundo sentido se indica una restricción del discurso a partir de la formación de una clase, en la que se organizan y reagrupan los elementos que cumplen con determinadas propiedades.

Podemos notar que en ambas interpretaciones queda pendiente la situación ontológica. En este punto, “No estamos, en efecto, considerando la real situación ontológica, sino el compromiso, la implicación ontológica del discurso”.⁷⁸ Esto se entiende a partir de proposiciones cuantificadas, por ejemplo: se ha mencionado anteriormente que el *dominio de un cuantificador* de una proposición en A puede regir desde «1 o más» elementos, hasta «el número total de miembros del sujeto». De tal manera que el “uso de la cuantificación... implica *prima facie* el compromiso ontológico con determinados objetos”.⁷⁹

2.2.2.1. Interpretación de los cuantificadores

“Se han ofrecido dos explicaciones del sentido de los cuantificadores, interpretables como compatibles. La teoría usual es la *objetual*, según la cual las variables se extienden sobre las cosas u objetos”.⁸⁰ Esta extensión de las variables hacia las cosas construye condiciones de verdad que se basan en la demostración del objeto del que se afirma o se niega su relación con cierta propiedad. De tal modo que esta teoría afirma que un enunciado cuantificado es verdadero “si y sólo si podemos mostrar que... los individuos del discurso son como se declara en el enunciado que cae bajo el alcance del cuantificador”.⁸¹

Cabe resaltar que esta teoría fue defendida fuertemente por el lógico Willard Quine, quien se esmeró en demostrar que el universo puede contar con un dominio infinito de elementos, y que incluso puede tener “más cosas de las que se puede designar...contando con una infinidad de nombres”.⁸² Es justo en este punto donde se ubica una diferencia importante con la interpretación de la llamada *teoría sustitucional*, en la medida en que ésta teoría sostiene que “Mientras cada objeto tenga su nombre propio, se puede decir que una

⁷⁸ Quine, Willard. (2002). *Desde un punto de vista lógico*. España: Paidós. p, 158.

⁷⁹ Quine, Willard. *Ibíd.* p, 158.

⁸⁰ Redmond. Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p. 107.

⁸¹ Salguero, Francisco. (1991) “Lo que hay y lo que no hay o Cómo estar a favor de Quine estando contra él” En: *Liber Amicorum Ángel Nepomuceno*. Santander: Fénix Editora. p, 126.

⁸² Quine, Willard. (1970) *Filosofía de la lógica*, España: Alianza. p, 156.

cuantificación universal [sobre un universo infinito] es verdadero si y sólo si todos sus casos o ejemplos son verdaderos”.⁸³

La diferencia entre estas teorías radica en el compromiso ontológico que cada una defiende a partir de su propia interpretación de los cuantificadores. En este aspecto, se considera que la teoría sustitucional es restrictiva, “ya que, si suponemos un universo lo suficientemente rico, no sería posible asignar a todos y cada uno de sus elementos un nombre, lo que significaría que a efectos de la cuantificación, los objetos innominados no existirían”.⁸⁴ Bajo la lectura sustitucional el universo sólo admite la existencia de elementos nombrados.

Por otra parte, para la interpretación objetual los nombres no condicionan la capacidad del universo, de modo que, bajo su lectura el universo es tan basto que incluye a los elementos innominados. Para esta interpretación “no pueden ser los nombres quienes realicen el compromiso ontológico, sino que han de ser las variables cuantificadas”.⁸⁵ De acuerdo con esta teoría los valores de las variables se extienden sobre una agrupación de objetos mejor conocida como *dominio*. “El dominio puede ser restringido, esto es, D puede ser especificado como un conjunto de objetos asignados, como el rango de las variables... o puede ser no restringido, esto es, se requiere que D sea “el universo”... todos los objetos que hay”.⁸⁶

El límite del universo es la apoteosis de la disputa, el alcance de los cuantificadores se restringe dependiendo de la interpretación aceptada. “Por tanto, una interpretación aceptable tendrá que proporcionar la generalidad indispensable”.⁸⁷ En este sentido, conviene recalcar que los tipos de interpretación no se contraponen, sino que, como señala la filósofa Susan Haack: “los dos tienen sus usos”.⁸⁸ En el caso de la cuantificación se ha comentado que la interpretación usual es la objetual, de modo que los cuantificadores pueden aplicarse en dominios que involucren elementos innominados.

⁸³ Quine, Willard. *Ibíd.* p, 155.

⁸⁴ Salguero, Francisco. (1991) “Lo que hay y lo que no hay o Cómo estar a favor de Quine estando contra él” En: *Liber Amicorum Ángel Nepomuceno*. Santander: Fénix Editora. p, 126-127.

⁸⁵ Haack, Susan. (1982) *Filosofía de las lógicas*. España: Catedra. p, 66.

⁸⁶ Haack, Susan. *Ibíd.* p, 62.

⁸⁷ Haack, Susan. *Ibíd.* p, 62.

⁸⁸ Haack, Susan. *Ibíd.* p, 62.

Un ejemplo de dominio con elementos innominados podemos encontrarlo en el conjunto de los números reales, mismo que presenta dificultades para la interpretación sustitucional. El compromiso ontológico de la teoría sustitucional repercute directamente con la definición matemática de los números reales, en tanto que, si los “admitimos en nuestro universo... no será posible asignarle un nombre a cada uno de los individuos del dominio”,⁸⁹ lo que implica que bajo esta interpretación dichos números no existen. Conviene en este punto detenernos un momento para aclarar algunos puntos importantes del concepto *infinito*, con la finalidad de esclarecer la cuestión de la inexistencia de los números reales para la teoría sustitucional.

2.2.2.1.1. Sobre los dominios infinitos

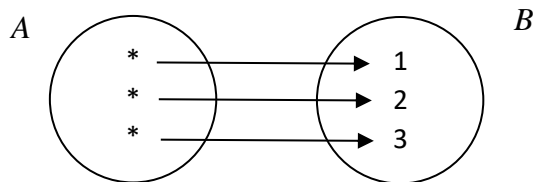
Es pertinente comenzar preguntándonos “¿Qué queremos decir con “infinito”? Mucha gente piensa en “infinito” como una cantidad muy grande. Sin embargo, cuando un matemático habla de infinito,... en verdad, encuentra que vale la pena evitar por completo cualquier referencia directa al recuento”.⁹⁰ De hecho, cabe resaltar que el infinito no necesariamente tiene que ser muy grande, ya que también se dispone de un infinito que se conforma de partes sumamente pequeñas, referido regularmente con el término *infinitesimal*. Este infinito comenzaba a vislumbrarse tras la invención del cálculo integral y diferencial por Newton y Leibniz en el siglo XVII, y trata de las aproximaciones numéricas que se pueden hacer hacia el 0 sin llegar a él, en la medida en que es imposible dividir entre cero.

A pesar de estas diferencias ambos infinitos pueden ser analizados de la misma manera, la cual, como se ha mencionado al inicio, evita cualquier tipo de recuento (pues claramente el conteo no tiene sentido al ser infinito). De tal manera que su estudio se encuentra enfocado en una *relación biyectiva*, expresada en la función ($f: A \rightarrow B$). Lo que nos indica básicamente esta función es lo siguiente: a cada elemento que está en A le corresponde un elemento diferente perteneciente a B, y que todo elemento de B tiene que estar relacionado con A. En consecuencia si tenemos una colección A que tiene tres elementos, ésta será *biyectable* con una colección B si y sólo si B tiene la misma cantidad de elementos que A.

⁸⁹ Haack, Susan. *Ibíd.* p, 127.

⁹⁰ Kondo, H (1980) *Enciclopedia de las ciencias Vol.1*, México: Cumbre. p, 443.

A continuación se presenta un esquema que ilustra la función biyectiva:



En esta correspondencia se puede notar que ambas colecciones coinciden con su enumeración, por lo que se puede afirmar que poseen la misma cantidad de elementos, y con ello, que son *equivalentes*. En este sentido, conviene matizar una diferencia importante entre las clases o colecciones y los atributos, ya que a pesar de su semejanza operativa estos conceptos no son del todo “iguales”. “Un creciente número de filósofos de la matemática nos ha recordado que dos concepciones de una “colección” tienen que ser fuertemente distinguidas, es decir, colecciones combinatorias y colecciones lógicas”.⁹¹

Las colecciones lógicas se fundamentan en la *extensión* de un predicado, es decir, en la visión cuantitativa de aquellos elementos que sostienen la propiedad o el atributo asignado. Por otra parte, una colección combinatoria es sinónimo de un conjunto, pero cabe destacar que no puede ser cualquier conjunto, sino que éste debe ser construido de acuerdo con algún sistema axiomático. “Así pues, todo lo que podemos saber en rigor... del concepto de conjunto, está plasmado en los axiomas aceptados. Es decir, los axiomas son la definición implícita de conjunto”.⁹²

Entre los sistemas más utilizados encontramos el sistema conocido por las siglas ZF (Zermelo-Fraenkel). Cuando este sistema incluye el axioma de elección se refiere como “ZFC (por Choice) en inglés o como ZFE (por elección) en español”.⁹³ Vale la pena señalar que las condiciones que cada sistema axiomático establece para legalizar la construcción de

⁹¹ Muller, F. (2001) “Sets, Classes and Categories”. En *British Journal for the Philosophy of Science* vol. 52 p, 551. “A growing number of philosophers of mathematics has reminded us that two conceptions of a ‘collection’ have to be sharply distinguished, *i.e.* *combinatorial* collections and *logical* collections”.

⁹² Amor, José. (2000). “La teoría de conjuntos en el siglo XX” en *Miscelánea Matemática*, No.31. p, 10.

⁹³ Amor, José. (2000). *Ibíd.* p, 11.

un conjunto son diferentes a las que regulan la formación de una clase lógica, y por ahora nos basta esta distinción para no cometer el error de usarlos como sinónimo.

Asimismo, conviene matizar una sutil pero importante diferencia entre las clases lógicas y los atributos; y es que “las clases son idénticas (la misma) cuando tienen los mismos miembros, [mientras que] los atributos pueden ser distintos aun cuando se presenten en las mismas cosas y sólo en ellas”.⁹⁴ De tal manera que la equivalencia de una clase se fundamenta en la cantidad y la equivalencia de un atributo en la cualidad, en la medida en que el atributo apela a las propiedades de los objetos o de las cosas.

En consecuencia, la función biyectiva se aplica en la *extensión* del predicado, afirmando o negando si dos *extensiones* son iguales respecto a su cantidad. Fue a partir de esta función que “el matemático alemán George Cantor (1845-1918) demostró en el siglo XIX que el infinito de los reales es *más grande* que el infinito de los naturales. Y no sólo demostró eso, también probó que el infinito de los irracionales es mayor que el de los racionales”.⁹⁵

Esta demostración se basa, a grandes rasgos, en la biyección entre los reales y los naturales, arrojando como resultado que siempre hay un número real que se escapa a la biyección, de tal forma que el conjunto de los reales es mayor al de los naturales, el cual, dicho sea de paso, es del mismo tamaño que el de los números racionales. Cabe añadir que el tamaño de un conjunto es referido como su *cardinal*, de modo que, si es finito su cardinal podrá expresarse con alguno de los números naturales, pero si es infinito, tendrá que denotarse con alguno de los *números transfinitos*, los cuales explicaremos en la sección de teoría de conjuntos.

El conjunto de los números reales se conforma por el conjunto de los números racionales (también conocidos como números fraccionarios) y por el conjunto de los números irracionales, que son “aquellos que no son representables como fracción de dos números enteros; p. ej.: $\sqrt{2}$, π , e ”.⁹⁶ De los números racionales se dice que son exactos o periódicos,

⁹⁴ Quine, Willard. (2002). *Desde un punto de vista lógico*. España: Paidós. p, 163.

⁹⁵ Domínguez, Santiago. (2004) “Sobre los números naturales. Reales, imaginarios” Consultado el 05 de febrero de 2019, del Sitio Web de la Universidad Nacional Autónoma de México: <http://www.cienciorama.unam.mx/#!titulo/316/?sobre-los-numeros-naturales--reales--imaginarios> p, 2.

⁹⁶ “Números irracionales” Def. *Diccionario de matemática*. (1977) España: Rioduero.

mientras que de los irracionales se dice lo opuesto, en tanto que “la expresión decimal de su división no tiene fin, y además, no podemos encontrar un periodo o ciclo que nos permita saber cómo crece”.⁹⁷ Cabe añadir que debido a que el conjunto de los números irracionales es mayor al de los números naturales, se dice que es no numerable, al igual que los números reales.

Es justo en este punto donde radica la diferencia entre la interpretación sustitucional y la interpretación objetual, en tanto que la primera admite sólo a los dominios numerables mientras que la segunda admite también a los no numerables. En consecuencia, el rango de operabilidad de los cuantificadores resulta condicionado, de modo que, el dominio propuesto por la teoría objetual resulta mayor al dominio propuesto por la teoría sustitucional. En este punto conveniente añadir que el conjunto formado por los nombres propios es biyectable con el conjunto de los números naturales, por lo que “se les puede asignar enteros distintos” a cada nombre. De modo que la teoría sustitucional cumple con sus estatutos ontológicos, y la numerabilidad traza sus límites.

Podemos ver aquí como una demostración de la matemática moderna se vincula directamente con la lógica de predicados, específicamente, con la interpretación de los cuantificadores. La existencia de colecciones tan grandes que incluso sobrepasen la cantidad de nombres posibles a asignar se vuelve un hecho tras las demostraciones de Cantor en 1873 y 1874. Estas demostraciones favorecen la postura de Willard Quine, quien, como hemos mencionado anteriormente, sostenía que “Un universo suficientemente generoso tiene más cosas de las que se puede designar incluso contando con una infinidad de nombres”.⁹⁸ De modo que, según la interpretación objetual, el universo del que se dispone tiene tantos elementos que no alcanzan a numerarse.

Sin embargo, ante la inmensidad de la no-numerabilidad de los objetos permitidos nos topamos ahora con un problema: la interpretación. Recordemos que “una interpretación aceptable tendrá que proporcionar la generalidad indispensable”.⁹⁹ Existe un teorema que

⁹⁷ Domínguez, Santiago. (2004) “Sobre los números naturales. Reales, imaginarios “ Recuperado el 05 de febrero de 2019, del Sitio Web de la Universidad Nacional Autónoma de México:

<http://www.cienciorama.unam.mx/#!titulo/316/?sobre-los-numeros-naturales--reales--imaginarios> p, 8.

⁹⁸ Quine, Willard. (1970) *Filosofía de la lógica*, España: Alianza. p, 156.

⁹⁹ Haack, Susan. *Ibíd.* p, 62.

establece que “si un esquema cuantificacional es verdadero bajo una interpretación definida a partir de un universo no-vacío, es también verdadero bajo una interpretación definida a partir del universo de los números enteros positivos”.¹⁰⁰ Este teorema se conoce como *El Teorema de Skolem* y, como podemos notar, limita la interpretación al infinito numerable. De hecho, fue a partir de este peculiar teorema que se comenzaron a vislumbrar las dificultades que se obtienen al involucrar dominios no numerables en la interpretación. Prueba de ello es lo que se conoce como *la paradoja de Skolem*, misma que explicaremos en el siguiente apartado.

2.2.2.1.2. El dominio de los cuantificadores en la lógica de predicados y su relación con los teoremas de Skolem, Compacidad y Completud

La lógica de predicados es un *lenguaje de primer orden* que se caracteriza por “su restricción a cuantificar sólo sobre elementos del universo del discurso”.¹⁰¹ Este lenguaje no tiene la capacidad para cuantificar sobre predicados o relaciones, su cuantificación es aplicable únicamente a los objetos de los que se afirma o se niega algo o de los que se afirma o niega una relación. Es por ello que “no podemos expresar hechos aparentemente tan simples como que *todo conjunto de números* tiene un elemento mínimo; o que *toda propiedad* poseída por el cero y transmitida de un número a su sucesor... es poseída por todo número natural”.¹⁰²

Para poder expresar este tipo hechos se requiere de sistemas lógicos de *segundo orden* o de *orden superior*, en tanto que estos sistemas si permiten la cuantificación de predicados y relaciones, así como de relaciones de relaciones. “La capacidad expresiva de los lenguajes de segundo orden es muy superior a los de primer orden”.¹⁰³ Ejemplo de ello es el tratamiento que se puede hacer con los conceptos de finitud e infinitud, dado que el primero es inexpressable en el lenguaje de primer orden; mientras que, para expresar el infinito requiere de un conjunto infinito de sentencias.¹⁰⁴

¹⁰⁰ Quine, Willard. (1993) *Los métodos de la lógica*, Argentina: Planeta. p. 234.

¹⁰¹ Jané, Ignacio. (1995) “Lógica de orden superior” en *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía. Vol.7* Editorial Trotta, España. p. 105

¹⁰² Jané, Ignacio. *Ibíd.* p, 105.

¹⁰³ Jané, Ignacio. *Ibíd.* p, 109.

¹⁰⁴ Cfr. Jané, Ignacio. (1995) “Lógica de orden superior” en *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía. Vol.7* Editorial Trotta, España. p, 109.

La capacidad expresiva de los lenguajes de orden superior es sin duda más amplia que la de primer orden; sin embargo, esta superioridad conlleva también serias dificultades. En los lenguajes de segundo orden y en los de orden superior no aplican los siguientes teoremas: *Teorema de Skölem*, *Teorema de Compacidad* y *Teorema de Completud*. El Teorema de Completud fue demostrado por el matemático Kurt Gödel en su tesis doctoral y se resume en lo siguiente: “Si $\Gamma \models \Phi$, entonces $\Gamma \vdash \Phi$ ” (que se lee si Φ es consecuencia lógica de Γ , entonces Φ también es derivable de Γ). La importancia de este teorema es que “garantiza la existencia de una prueba formal (y, por lo tanto de una prueba en definitiva, cualesquiera que sean Γ y Φ ”.¹⁰⁵

Además de esta demostración Gödel incluyó como corolario otro resultado, a saber, el *Teorema de Compacidad*, el cual establece lo siguiente: “Para que un conjunto infinito numerable de fórmulas sea satisfacible es necesario y suficiente que cada subconjunto finito suyo sea satisfacible”.¹⁰⁶ Podemos notar que, tanto en el Teorema de compacidad como en el Teorema de Skölem el concepto de numerabilidad es de suma importancia. En el primer teorema la numerabilidad se vincula directamente con el proceso de derivación o de consecuencia lógica, lo que resulta esencial para una demostración, en la medida en que las demostraciones son por excelencia finitas. No obstante, con el Teorema de compacidad, la demostración en un subconjunto finito puede extenderse a un conjunto infinito numerable. “La propiedad de compacidad o (finitud) es así necesaria para la existencia de una prueba. Pero, juntamente con la enumerabilidad de los teoremas lógicos, es también suficiente”.¹⁰⁷

Como se ha mencionado, el Teorema de Compacidad se añade como corolario en lo que fuera la demostración del Teorema de Completud, y podría decirse que funcionan a la par. La propiedad de Completud es esencial para los lenguajes de primer orden. Se dice que “Un *sistema deductivo* o un *cálculo* en una lógica es completo cuando todas las leyes lógicas (tautologías, o también *fórmulas válidas*...) pueden derivarse de los axiomas. O sea, si toda fórmula verdadera (bajo todas las interpretaciones) es derivable en el sistema”.¹⁰⁸ Cabe

¹⁰⁵ Quesada, Daniel. (1995) “Lógica clásica de primer orden” en *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*. Vol.7 Editorial Trotta, España. p. 96.

¹⁰⁶ Quesada, Daniel. *Ibíd.* p, 118.

¹⁰⁷ Quesada, Daniel. *Ibíd.* p, 96.

¹⁰⁸ Sirvent, Francisco. (2015) *Intuicionismo y formalismo en la filosofía de la matemática de I. Kant y D. Hilbert. Sobre función y significado de la intuición matemática*. Tesis de Doctorado. Universidad del País Vasco, p.192

destacar que cuando se dice que «*toda* fórmula verdadera es derivable» se debe de interpretar literalmente, con una sola condición: que la cantidad de fórmulas verdaderas sea biyectable con los números naturales, es decir, que la extensión de todas las formulas no debe ser mayor al infinito numerable.

En este punto coincide con lo que establece el Teorema de Skölem, dado que la numerabilidad aparece también como una condición para el sistema lógico. A continuación presentamos una versión del teorema conocida como *Löwenheim-Skolem-Tarski*: “si una teoría de primer orden es consistente, entonces tiene al menos un modelo con dominio finito o numerable”.¹⁰⁹ Hemos anticipado que los dominios no numerables provocan ciertas dificultades respecto al Teorema de Skolem. De hecho, fue a partir de dichos dominios que se señaló lo que se conoce como *la paradoja de Skolem*. Esta paradoja fue planteada por el propio Skolem, quien “se hizo la pregunta... de cómo era posible que un conjunto de fórmulas o proposiciones verdaderas sobre los números reales, que forman un conjunto no numerable, pudiera también ser verdadero en un ámbito numerable”.¹¹⁰

Lo que manifiesta la paradoja de Skolem es lo siguiente: “Con base en un lenguaje numerable podemos formalizar un fragmento τ de la teoría de conjuntos y demostrar ahí el enunciado p que afirma que el sistema R de los números reales no es numerable... Ahora bien, en caso de que τ tenga un modelo por el Teorema de Skolem sabemos de la existencia de un modelo numerable, digamos M . ¡En M , el enunciado p es verdadero, a pesar de que todo lo que hay en M es numerable”.¹¹¹ Es en el propio modelo en donde se tornan las dificultades, ya que al ser incapaz de identificar un dominio no numerable, la interpretación que hace de él es errónea y afirma fórmulas o proposiciones que están fuera del alcance de su capacidad interpretativa. Esto se debe a que “los dominios de que hablábamos intuitivamente se precisan como *conjuntos*, y, como son precisamente las teorías matemáticas acerca de los conjuntos las que nos dicen lo que estos son, las alternativas en esas teorías tienen repercusiones para la teoría lógica”.¹¹²

¹⁰⁹ Sirvent, Francisco. *Ibíd.* p. 200.

¹¹⁰ Quesada, Daniel. (1995) “Lógica clásica de primer orden” en *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*. Vol.7 Editorial Trotta, España. p.97.

¹¹¹ Torres, Carlos. (2000). *La lógica Matemática en el siglo XX*. Miscelánea Matemática p, 72.

¹¹² Quesada, Daniel. (1995) “Lógica clásica de primer orden” en *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*. Vol.7 Editorial Trotta, España. p, 98.

En efecto, “La moraleja es la siguiente: el teorema de Lowenheim-Skolem nos muestra que ningún conjunto de enunciados en un lenguaje de primer orden que tenga un modelo infinito es capaz de determinar el cardinal de sus modelos: una limitación del método axiomático y del poder expresivo de esta clase de lenguajes”.¹¹³ No obstante, cabe destacar que esta moraleja sólo se logra entender bajo los resultados obtenidos en la teoría matemática. Como señala el colectivo holandés conocido como GAMUT: “La fuerza genuina de este resultado probablemente sólo se aprecie si se conocen los fundamentos de la teoría de conjuntos de Cantor”.¹¹⁴

Si bien la teoría de conjuntos tiene indudablemente más ventajas que un lenguaje de primer orden, también tiene una gran desventaja: es *Incompleta*. En 1931 Gödel da a conocer su trabajo titulado “*Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas relacionados*” en el que demuestra que “todos los sistemas formales de la matemática (incluidos el de los *Principia Mathematica*, la aritmética formal de Peano, la teoría axiomática de conjuntos y, en general, cualquier sistema formal que cumpliera ciertas condiciones mínimas, en particular la *consistencia*), son *incompletos*, es decir, que para cada uno de ellos puede efectivamente construirse una sentencia indecidible (es decir, que ni ella ni su negación es deducible)”.¹¹⁵

La incompletitud de un sistema se entiende como lo opuesto a la Completud, es decir que, si la Completud nos garantiza la existencia de pruebas formales para todos los axiomas y teoremas que se puedan derivar; la incompletitud por su parte, establece que vamos a encontrar en el sistema sentencias cuya interpretación veritativa no es demostrable. Esto quiere decir que hay enunciados *A* tales que, “ni *A* ni $\sim A$ son deducibles”.¹¹⁶ Debido a que no se puede decidir entre la verdad o falsedad de dichos enunciados es que se les denomina indecidibles. Esta indecisión conduce a un sistema incompleto, desquebrajando la armonía entre la sintaxis y la semántica, armonía que, evidentemente si reina en los lenguajes de

¹¹³ Torres, Carlos. (2000). *La lógica matemática en el siglo XX*. Miscelánea Matemática, 31, p 72.

¹¹⁴ Gamut, (2002) *Introducción a la lógica*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires. p, 161.

¹¹⁵ Sirvent, Francisco. (2015) *Intuicionismo y formalismo en la filosofía de la matemática de I. Kant y D. Hilbert. Sobre función y significado de la intuición matemática*. Tesis de Doctorado. Universidad del País Vasco. p, 183.

¹¹⁶ Torres, Carlos. (2000). *La lógica matemática en el siglo XX*. Miscelánea Matemática, 31, p, 82.

primer orden. No obstante, vale la pena comentar que a pesar de que los lenguajes de orden superior pierden la cualidad de ser completos no pierden la cualidad de ser consistentes.

Esto se debe a que la consistencia es producto de las pruebas formales, de modo que, si una proposición es consistente se dice que es *correcta*. La corrección de un sistema se establece en el *Teorema de Correctud* (también conocido como Teorema de Corrección), el cual dicta lo siguiente: “Toda fórmula que es teorema es universalmente válida (...si $\vdash \alpha$ entonces $\models \alpha$ ”. Lo que señala a *grosso modo* dicho teorema es que *las reglas son correctas*, de modo que, si una fórmula es derivable entonces le corresponde un modelo cuya interpretación sea verdadera.¹¹⁷

Curiosamente el Teorema de Completud no es otra cosa sino la demostración de la conversa del Teorema de Correctud, de tal manera que es la pieza clave para demostrar que en efecto se cumple que “ $\vdash \alpha \equiv \models \alpha$ ”. Esto quiere decir, que una vez que se ha probado que “si $\models \alpha$ entonces $\vdash \alpha$ ”, puede probarse también que “($\vdash \alpha \rightarrow \models \alpha$) \wedge ($\models \alpha \rightarrow \vdash \alpha$)”, lo que es traducible en “ $\vdash \alpha \equiv \models \alpha$ ”. Cabe destacar que “Los Teoremas de Correctud y de Completud son considerados los resultados fundamentales de la lógica de primer orden, pues establecen la equivalencia entre la noción de derivabilidad formal (\vdash) y la de consecuencia lógica (\models), esto es, entre la sintaxis y la semántica de un lenguaje formal”.¹¹⁸ Esto indica, a muy grandes rasgos que, a toda sentencia que es verdadera semánticamente le corresponde una prueba formal que la demuestra, y viceversa, que a toda demostración formal le corresponde una interpretación semántica verdadera.

La numerabilidad aparece en la parte armónica de los sistemas, y hemos visto que al sobrepasarla se pone en riesgo la decidibilidad de los mismos, y con ello, el proceso de derivación. De ahí la importancia de los teoremas antes expuestos, ya que a partir de ellos el lenguaje de primer orden queda bien limitado en cuanto a su dominio, a tal grado que sabemos que ninguno de sus componentes puede sobrepasar al infinito numerable. En consecuencia un cuantificador universal aplicado en la lógica de primer orden no podrá ligar a una cantidad de variables que exceda al infinito numerable, del mismo modo que a las

¹¹⁷ Gamut, (2002) *Introducción a la lógica*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires. p, 157.

¹¹⁸ Atocha, Aliseda. (1999) “*Compacidad en la lógica de primer orden y su relación con el teorema de Completud*” en CRÍTICA, Revista Hispanoamericana de Filosofía Vol. XXXI, No. 93 p. 117.

constantes. Así mismo, por los teoremas antes expuestos la cantidad de fórmulas validas dentro del sistema no podrán sobrepasar al infinito numerable.

2.2.2.2. Cuantificación en dominios finitos e infinitos numerables

“Si concebimos al universo limitadamente, de manera que esté compuesto de un conjunto finito de objetos a, b, \dots, h , podemos desarrollar la cuantificación existencial por medio de disyunciones y la cuantificación universal por medio de conjunciones”.¹¹⁹ Esto nos indica que en dominios finitos los cuantificadores son prescindibles, en la medida en que el dominio puede controlarse ya sea conjuntiva o disyuntivamente. Para explicar lo anterior utilizaremos el siguiente ejemplo: “Supongamos que hay tres animales en el mundo, y nada más. Dos de ellos son humanos y el tercero es un caballo”.¹²⁰

En este ejemplo se manifiestan las siguientes relaciones: *Todos son animales, algunos son caballos y algunos son humanos*. Para comprender sus conexiones es elemental identificar los signos de cantidad que delimitan el dominio de cada agrupación. Sabemos que el dominio mayor corresponde al *universo*, y, en este ejemplo, el universo está conformado por tres elementos que ostentan la misma condición, a saber: la de *ser animales*. El signo de cantidad que opera en este dominio es el cuantificador universal, manifestado en el enunciado: Todos son animales.

Cabe añadir que el universo se encuentra dividido y agrupado de acuerdo a dos propiedades distintas: ser humano y ser caballo. Esta división legaliza los signos de cantidad que se expresan en los enunciados *algunos son caballos y algunos son humanos*. El grupo de los humanos posee dos elementos, mientras que el grupo de los caballos posee tan sólo un elemento. Si estos elementos se unen el resultado a obtener es el dominio del universo. En este punto, es conveniente aclarar que esta unión se lleva a cabo mediante la conjunción, dado que su finalidad como conector es precisamente esa: realizar una unión entre dos o más cosas.

¹¹⁹ Quine, Willard. (1993) *Los métodos de la lógica*, Argentina: Planeta. p. 161

¹²⁰ Campos Juan. (2013). “Octágono medieval de oposición para oraciones con predicados cuantificados” en *Tópicos*, 44, p. 178.

2.2.2.2.1. Traducción de las oraciones cuantificadas al lenguaje simbólico

Simbolicemos lo anterior para que las relaciones vayan quedando más claras. Tenemos el enunciado que delimita al universo: “todos son animales”, que se traduce al lenguaje lógico como: $\forall xAx$. Asimismo los enunciados que dividen al universo: *algunos son caballos* y *algunos son humanos* se simbolizan como $\exists yCy$ y $\exists zHz$ respectivamente. Las variables que aquí aparecen se encuentran *ligadas*, es decir, que son “gobernadas” o “regidas” por el cuantificador.¹²¹ Esto nos indica que las variables fluctúan sobre un dominio específico, de tal modo que se permite su reemplazo, ya sea por *cualquier letra* o *por lo menos alguna de ellas*.

Recordemos que las letras minúsculas representan a los individuos, y, aun cuando “No sabemos sus nombres... podemos referirnos a ellos de alguna manera”.¹²² En el habla cotidiana, por ejemplo, se suele tomar “un nombre propio como genérico y con él crear un nombre común...(por ejemplo): el cuarteto formado por fulano, zutano, mengano y perengano”.¹²³ En esta forma de referenciar discernimos entre cuatro sujetos distintos, que si bien todos tienen la misma cualidad *ser humanos*, a la vez son diferentes entre sí, es decir, que fulano no es igual a zutano ni mengano es igual a perengano.

Estos nombres asignados por el habla coloquial cumplen el papel de un término vago, en tanto que han pasado de ser un nombre propio a ser un nombre común, por lo que “Nadie sabe quiénes son pero los nombramos”.¹²⁴ Su uso es similar a la aplicación de pronombres demostrativos tales como “este” o “aquel”. Por ejemplo cuando se distingue a “este” hombre de “aquel” otro, también se podría diferenciar mediante los nombres fulano y mengano. En el lenguaje lógico “podemos representar los términos vagos con índices numéricos h_1 (“este hombre”), a_3 (“aquel” animal)”.¹²⁵

¹²¹ Redmond, Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana, p. 97.

¹²² Campos, Juan. (2013). *Octágono medieval de oposición para oraciones con predicados cuantificados*, en *Tópicos*, 44, p, 178.

¹²³ García, Laura. (2018) *Funderelele y más hallazgos de la lengua* México: Planeta. p. 33.

¹²⁴ García, Laura. *Ibíd.* p, 33

¹²⁵ Redmond, Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana, p, 105.

De este modo tenemos que el dominio descrito en el ejemplo mediante la oración “todos son animales”, simbolizada como $\forall xAx$ dispone de los siguientes elementos: a_1 , a_2 , a_3 , o bien x_1 , x_2 y x_3 . Estos elementos conforman el rango de fluctuación de x , en tanto que $\forall xAx$ se interpreta como “Para todos los objetos, x , en el dominio, D , Ax ”.¹²⁶ Hemos comentado al inicio de esta sección que la cuantificación universal también puede realizarse conjuntamente si se trata de dominios finitos, como el dominio de nuestro ejemplo. Es por ello que la forma proposicional $\forall xAx$ resulta equiparable a la siguiente estructura: $Ax_1 \wedge Ax_2 \wedge Ax_3$. Esta equivalencia resulta sencilla, ya que afirmar “Todos son animales” es lo mismo que decir “El individuo x_1 es Animal y el individuo x_2 es Animal y el individuo x_3 es Animal”.

Por otra parte, el dominio operado por el cuantificador existencial posee estructuras diferentes. Esto se puede ejemplificar en las oraciones *algunos son caballos* y *algunos son humanos* simbolizadas como $\exists yCy$ y $\exists zHz$. La forma proposicional que es equiparable al cuantificador existencial es un enlace disyuntivo, tal como se muestra a continuación: $Cy_1 \vee Cy_2 \vee Cy_3$. En este caso la cadena disyuntiva nos indica que “El individuo y_1 es Caballo o el individuo y_2 es Caballo o el individuo y_3 es Caballo”. Lo mismo sucede en el caso de $\exists zHz$: El individuo z_1 es Humano o el individuo z_2 es Humano o el individuo z_3 es Humano.

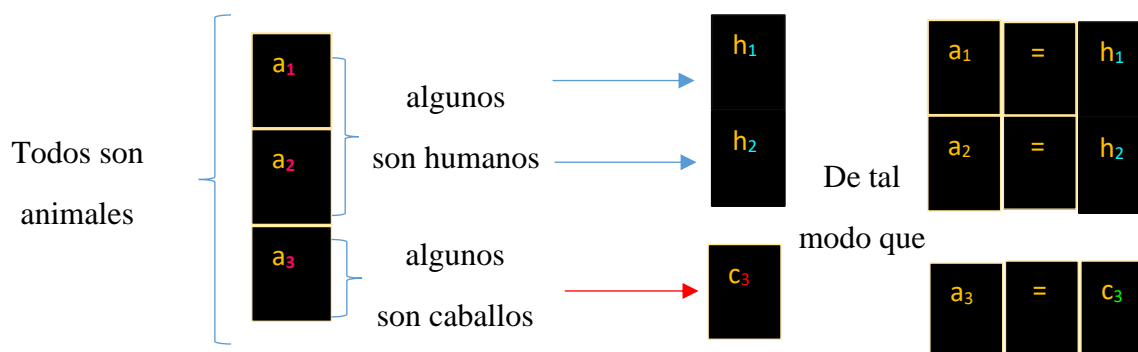
En este punto vale la pena recordar que la disyunción presenta al valor 0 como elemento neutro, es decir, que si alguno de los elementos de la serie disyuntiva es falso, este valor no causa ninguna repercusión en la serie, siempre y cuando alguno de los elementos presente la valuación en 1. De modo que, la serie expuesta como $Cy_1 \vee Cy_2 \vee Cy_3$ resultará verdadera si algún elemento es verdadero. Este hecho lo sabemos con certeza, dado que de los tres animales el tercero es un caballo, por lo que Cy_3 es verdadera, y con ello, toda la serie disyuntiva.

En el caso de la serie $Ax_1 \wedge Ax_2 \wedge Ax_3$, que resulta equivalente a la fórmula cuantificada $\forall xAx$, los elementos que la conforman tienen que ser todos verdaderos, ya que para la conjunción el elemento dominante es el 0, puesto que con la presencia de un solo elemento valuado con esta denominación basta para que toda la cadena conjuntiva obtenga el mismo valor. Sin embargo, este no es el caso de nuestra cadena, ya que todos los elementos

¹²⁶ Haack, Susan. (1982) *Filosofía de las lógicas*. España: Catedra, p, 62.

involucrados cumplen la propiedad de ser Animal, y con ello, la serie conjuntiva se evalúa como verdadera.

Dado que “Podemos llamar “a₁” al primer animal, “a₂” al segundo y “a₃” al tercero. Lo mismo podemos hacer con las otras propiedades, ser humano y ser caballo: “h₁” y “h₂” y “c₃”. Los subíndices nos ayudan a identificarlos: “a₃” y “c₃” se refieren a la misma cosa, al tercer animal y al único caballo”.¹²⁷ Para esclarecer lo anterior mostraremos la relación de igualdad mediante los siguientes diagramas:



Hemos mencionado previamente que el enunciado “Todo ser humano es animal” abarca relaciones de identidad entre las cosas que ostentan ambas propiedades, ser humano y ser animal”.¹²⁸ Estas relaciones se reflejan en la traducción al lenguaje lógico-predicativo, dado que la propiedad de ser humano condiciona la de ser animal, de modo que si es humano entonces es animal. Esta relación condicional queda simbolizada precisamente por el condicional material; no obstante, vale la pena resaltar que es el signo de cantidad el que legitima dicha relación, ya que en la cuantificación existencial la conexión es distinta. De modo que nuestra oración cuantificada queda representada de la siguiente forma: $\exists x(Hx \rightarrow Ax)$

En el caso del enunciado “algún animal es humano” utiliza la cuantificación existencial. En consecuencia, en vez de recurrir a un conector condicional para su

¹²⁷ Campos, Juan. (2013). *Octágono medieval de oposición para oraciones con predicados cuantificados*, en *Tópicos*, 44 p, 178.

¹²⁸ Campos, Juan. *Ibíd.* p, 179.

simbolización se recurre a una conexión conjuntiva. Esto se debe a que “El denominado *cuantificador existencial*... se corresponde con las palabras ‘hay algún x tal que’”¹²⁹, de modo que, el enunciado inicial toma la forma siguiente: hay algún x tal que x es Animal y x es Humano. En este punto conviene hacer mención de la lectura sugerida por Quine respecto a este tipo de estructuras, que no son otras sino las que conforman al tipo I del cuadrado tradicional. La propuesta de Quine es la siguiente: “Algunas cosas son *a la vez* F y G ”¹³⁰, por tanto, “Algunas x son a la vez A y H ”. La simbolización de este tipo de enlaces corresponde a la siguiente proposición cuantificada: $\exists x(Ax \wedge Hx)$.

Ahora bien, en el caso de la proposición $\forall x(Hx \rightarrow Ax)$ su generalidad nos indica las propiedades de todo el dominio, “Pero hay tres animales, ¿Cómo saber “quien es quien”? Bueno, podemos decir que: ... El ser humano uno es este animal, o ese o aquel; y el ser humano dos es este animal, o ese animal o aquel animal”.¹³¹ Esta propuesta corresponde al descenso, que es un método de la lógica escolástica “que consiste en “descender” de una oración cuantificada a disyunciones o conjunciones de oraciones no cuantificadas”.¹³²

2.2.2.2. El descenso de oraciones cuantificadas

El descenso y el ascenso son operaciones lógicas a las que “hoy podríamos llamar deducción e inducción respectivamente”.¹³³ El descenso consiste en obtener una conclusión particular dada una proposición universal; mientras que la inducción es lo contrario, ya que parte de los elementos particulares para concluir en una proposición universal. Para explicar el descenso continuamos con el ejemplo trabajado previamente, pero ahora “Supongamos un mundo M donde existen estos animales, y en ese mundo tienen también un nombre propio: los seres humanos (y también animales) son Don Quijote de la Mancha y Dulcinea del Toboso, nuestro caballo (que también es animal) es el sin par Rocinante”.¹³⁴

¹²⁹ Quine, Willard. (1993) *Los métodos de la lógica*, Argentina: Planeta. p. 155

¹³⁰ Quine, Willard. *Ibíd.* p, 160.

¹³¹ Campos, Juan. (2013). *Octágono medieval de oposición para oraciones con predicados cuantificados*, en *Tópicos*, 44, p. 179.

¹³² Campos, Juan. *Ibíd.* p, 182.

¹³³ Campos, Juan. 2006 “*La lógica medieval y la enseñanza de la lógica*”, en *La lámpara de Diógenes*, revista de filosofía, números 12 y 13. p, 214.

¹³⁴ Campos, Juan. (2013). *Octágono medieval de oposición para oraciones con predicados cuantificados*, en *Tópicos*, 44, p.180

La cuestión ahora es la siguiente ¿qué ser humano es don quijote? Y al ser humano es también animal, entonces ¿qué animal es? Para responder a estas interrogantes se recurre al descenso, el cual plantea lo siguiente: “don Quijote es (idéntico a) este hombre o es ese hombre o...”.¹³⁵ que se simboliza como $qh_1 \vee qh_2 \vee qh_n$. Este planteamiento establece relaciones de identidad, por lo que también puede formularse mediante la siguiente estructura $q = h_1 \vee q = h_2 \vee q = h_n$.

Saber qué humano es don quijote resulta sencillo cuando el dominio es finito, y más sencillo aun cuando el dominio es tan pequeño como el de nuestro ejemplo, en donde solo hay tres animales, de los cuales sólo dos son humanos. De modo que el descenso indica que o bien q es h_1 o q es h_2 . Los elementos h_1 y h_2 presentan, a su vez, relaciones de igualdad con los elementos a_1 y a_2 respectivamente, es decir, que $a_1 = h_1$ y $a_2 = h_2$. Como la relación de igualdad es transitiva, si $q = h_1$ y $h_1 = a_1$ entonces $q = a_1$. Lo mismo procede si resultase que $q = h_2$. Al ser $h_2 = a_2$ y $q = h_2$ entonces $q = a_2$.

Dado que el dominio de los humanos se compone de sólo dos elementos, si don quijote es h_1 entonces Dulcinea es h_2 y si don quijote es h_2 entonces Dulcinea es h_1 . Saber qué animal es Rocinante también es un proceso sencillo, ya que resulta claro que “Rocinante no es ningún humano” sino que, “Rocinante es un caballo”. En el caso de la primera afirmación en donde “Rocinante no es ningún humano”, se encuentra un cuantificador universal negativo, indicado en la palabra *ningún*. Este cuantificador pasa a su equivalente conjuntivo con su respectiva negación, obteniendo la siguiente estructura: Rocinante no es h_1 y tampoco es h_2 . En la simbolización propuesta por el Dr. Walter Redmond la estructura se representaría como: $r / h_1 \ \& \ r / h_2$. En esta propuesta “La negación se expresa con una línea diagonal “/” entre los componentes de una oración”¹³⁶ y la conjunción mediante el signo “&”.

En el caso de la segunda afirmación en donde “Rocinante es un caballo”, cabe agregar que también es un animal, pero ¿qué animal es? Conviene resaltar que la pregunta ¿qué caballo es? no tiene sentido plantearla, dado que Rocinante es el único caballo en el dominio. Sin embargo, no es el único animal. En consecuencia “Rocinante es algún animal” se plantea

¹³⁵ Redmond, Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana. p, 105.

¹³⁶ Campos, Juan. (2013). *Octágono medieval de oposición para oraciones con predicados cuantificados*, en *Tópicos*, 44, p. 180.

conforme al descenso de la siguiente manera: $ra_1 \vee ra_2 \vee ra_3$. Debido a que a_1 y a_2 sostienen relaciones de igualdad con h_1 y h_2 , se puede descartar que ra_1 y ra_2 sean verdaderas. De modo que quien hace verdadera la cadena disyuntiva es ra_3 , o bien $r=a_3$.

Es preciso destacar que el signo de cuantificación de esta oración se encuentra en un lugar peculiar, ya que no cuantifica al sujeto como en el cuadrado, sino que cuantifica al predicado. Esto se debe a que “en las oraciones singulares es el predicado el que está cuantificado”¹³⁷, tal como se presenta en “Rocinante es algún animal”. El signo de cantidad de esta oración nos indica que Rocinante es alguno de los elementos que se encuentran en A. La diferencia radica en que, en el cuadrado, el cuantificador liga a la colección que cumple con el papel del sujeto de la oración, mientras que, en las oraciones singulares es el dominio del predicado el que se está cuantificando.

Los lógicos medievales se percataron que los predicados son susceptibles de cuantificación, lo que hizo posible que las relaciones del cuadrado se extendieran hacia un octágono, que incluía precisamente, a las oraciones con sujeto y predicado cuantificado. El análisis de esta figura medieval no se llevará a cabo en este trabajo, no obstante, es conveniente resaltarla para remarcar la posibilidad de cuantificar también el predicado y no quedarnos con la concepción de que sólo el sujeto es cuantificable.

3. Teoría de conjuntos

La teoría de conjuntos es una rama de la lógica matemática que se caracteriza por utilizar un sistema axiomático. Este sistema funciona de tal manera que “todo lo que podemos saber con rigor hasta ahora, acerca del concepto de conjunto, está plasmado por los axiomas”.¹³⁸ En este punto, es conveniente resaltar que hay diversas propuestas axiomáticas, y cada propuesta ofrece normatividades particulares, de modo que no todos los sistemas axiomáticos operan de la misma manera ni admiten los mismos axiomas. Tal es el caso de la axiomática de “Quine, y las axiomáticas de clases NBG (von Neumann-Bernays-Gödel), y MKT (Morse-

¹³⁷ Campos, Juan. *Ibíd.* p, 183

¹³⁸ Amor, José. (2000). “La teoría de conjuntos en el siglo XX” en *Miscelánea Matemática*, No.31. p,10

Kelly-Tarski). En esas axiomáticas los objetos definidos por los axiomas son las clases y los conjuntos son ciertas clases, se definen como *clases que pertenecen a otra clase*".¹³⁹

Ante la elección de una estructura axiomática el matemático Zermelo proclama lo siguiente: “debemos por un lado, restringir estos principios suficientemente para excluir contradicciones y, por el otro, elegirlos suficientemente amplios para retener todo lo de valor que tenga la teoría”.¹⁴⁰ Este matemático es de suma relevancia para la teoría axiomática, ya que, junto a los aportes de Adolf Fraenkel se construye “la axiomática más trabajada, la históricamente más aceptada y considerada como la más natural; la de Zermelo–Fraenkel”,¹⁴¹ abreviada como ZF. En ocasiones podemos encontrar a esta teoría bajo la referencia de *ZFC* o *ZFE*, en estos casos, es porque se añade al sistema ZF el *axioma de elección*, o bien, en su referencia al inglés *axiom of choice*. Es pertinente advertir que no se profundizará en la disputa generada a partir de la aceptación del axioma de elección, ya que la finalidad de este capítulo es analizar la estructura de los conjuntos.

3.1. La construcción de conjuntos

Hasta ahora hemos hablado de los axiomas de la teoría de conjuntos, pero no hemos brindado una definición de lo que es un conjunto. Esto se debe a la sugerencia del Dr. José Alfredo Amor, quien en su artículo titulado *La teoría de conjuntos en el siglo XX* comenta lo siguiente: “si en vez de preguntarnos ¿qué son los conjuntos? nos preguntamos ¿cómo construimos conjuntos?”.¹⁴² El cambio de preguntas radica en la delimitación de la capacidad de pertenencia de los conjuntos, es decir, en establecer claramente aquellos elementos que pueden y aquellos que no pueden pertenecer a un conjunto, por ejemplo: no pueden ser elementos de sí mismos. De otro modo, si se responde a la pregunta ¿qué son? La respuesta breve pero peligrosa es que son colecciones. Esta respuesta es peligrosa porque no todas las colecciones son conjuntos, pero, sí todos los conjuntos son colecciones, excepto uno: *el conjunto vacío*. Una muestra de una colección que no es un conjunto la encontramos en la colección universo, representada como *V*.

¹³⁹ Amor, José. *Ibíd.* p.11

¹⁴⁰ Consultado el 10 de octubre de 2019 del sitio web del departamento de matemática de la Universidad de Buenos Aires: http://www.dm.uba.ar/materias/optativas/topicos_de_logica/2014/2/Capitulo_1-2014.pdf p, 8.

¹⁴¹ Amor, José. (2000). “La teoría de conjuntos en el siglo XX” en *Miscelánea Matemática*, No.31. p, 10.

¹⁴² Amor, José. *Ibíd.* p, 4.

3.1.1. La paradoja de Cantor y su vínculo con la colección universo

George Cantor fue un matemático del siglo XIX cuyos aportes son considerados como los fundamentos de la teoría de conjuntos. No obstante, es preciso mencionar que sus aportes son tanto relevantes como debatibles. Muestra de ello es la paradoja que lleva su apellido, así como su forma tan peculiar de abordar el estudio del infinito, que lo llevó a proponer incluso una *aritmética transfinita*. Esta forma de pensar causó toda una revuelta en la matemática debido a los nuevos conceptos que proponía: conjuntos numerables, conjuntos infinitos y tamaños de conjuntos infinitos. Pero había un planteamiento en especial que llamaba la atención por su alarmante forma lógica, esto es: la existencia del “conjunto de todos los conjuntos”.¹⁴³ A este planteamiento se le conoce como *la paradoja de Cantor*.

La existencia de este tipo de conjuntos “fue descubierta por Georg Cantor y luego comunicada por este a Dedekind en una carta escrita en 1899”.¹⁴⁴ El problema de su estructura se encuentra en la relación reflexiva, a partir de la cual un conjunto puede pertenecer a sí mismo. Este problema se resolvió definiendo a los conjuntos de una manera más específica, como: *conjuntos regulares*. Se define como *conjunto regular* a un conjunto que no puede ser elemento de sí mismo, simbolizado de la siguiente manera: x tal que $x \notin x$ (que se lee x no pertenece a x).¹⁴⁵

Bajo este procedimiento, lo que inicialmente Cantor había planteado como *conjunto de los conjuntos* se postula como *colección regular*, representada como R . Esta colección contiene a todos los conjuntos regulares y se plantea de la siguiente forma: “la definición de R , para todo *conjunto* x se cumple que $x \in R$ si y sólo si $x \notin x$. Por lo tanto, si R fuera conjunto debería cumplirse que $R \in R$ si y sólo si $R \notin R$. Lo cual es absurdo”.¹⁴⁶ En consecuencia R no puede ser conjunto.

La colección R , además de ser una colección regular puede ser también la *colección universo*. En este punto conviene advertir que, “Si no todos los conjuntos son regulares

¹⁴³ Cfr. Castro, I. (2003). “Las paradojas en matemática” en *Universitas Scientiarum*, vol. 8.

¹⁴⁴ Mora, Rafael. (2016) *La evolución de la paradoja de las clases propuesta por Bertrand Russell*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional Mayor de San Marcos p, 92.

¹⁴⁵ El trazo en diagonal sobre el símbolo \in nos indica que se encuentra negado, de modo que, cuando se encuentra libre de este trazo significa que se encuentra afirmado, por lo que afirma la relación de pertenencia. Esta relación será explicada con mayor detalle en la sección 3.1.2. del presente trabajo.

¹⁴⁶ Amor, José. (2000). “La teoría de conjuntos en el siglo XX” en *Miscelánea Matemática*, No.31. p, 4.

entonces R no es V , pero de todos modos R no es un conjunto por la misma razón y V , la colección universo de todos los conjuntos, tampoco es un conjunto”.¹⁴⁷ Esto indica que, independientemente de si $R=V$, R no es conjunto como tampoco lo es V . La colección V es relevante para la teoría en la medida en que ella contiene a todos los elementos con los que se puede construir cualquier conjunto.

“La observación de que si construimos un conjunto disponemos ya de sus elementos nos lleva a considerar lo que se conoce como la Estructura Acumulativa de los Conjuntos Bien Fundados, que es una idea subyacente a la axiomática de Zermelo de 1908”.¹⁴⁸ Esta estructura se caracteriza por sus impecables estratos dentro de la jerarquía, en los cuales se puede identificar el orden de formación de los conjuntos. Esto indica que cuando se ha construido un conjunto, este debe contar con un estrato inferior dentro de la jerarquía acumulativa, de modo que “todo conjunto construido... tiene un inicio constructivo por lo que tendrá necesariamente un fondo respecto a la relación de pertenencia. Estos son los conjuntos bien fundados”.¹⁴⁹

3.1.2. Definición de conjuntos: comprensión y extensión

Se ha comentado que los conjuntos son constructivos, pero ¿cómo delimitamos las fronteras de aquello que precisamos construir? Es decir ¿cómo establecemos la definición para un conjunto? La definición de un conjunto se puede realizar de dos maneras: por *extensión* o por *comprensión*. La definición por extensión se caracteriza por ser una definición numerable, de modo que puede llevarse a cabo mediante una lista. En esta lista quedan asignados cada uno de los miembros del conjunto. Estos miembros se agrupan y se especifican mediante el uso de llaves “{}”. De hecho, vale la pena destacar que “Las llaves { } se usarán siempre en las definiciones de conjuntos”.¹⁵⁰

La función que cumplen las llaves es de agrupación, como se muestra a continuación:

¹⁴⁷ Amor, José. *Ibíd.* p. 4.

¹⁴⁸ Amor, José. *Ibíd.* p. 5.

¹⁴⁹ Amor, José. *Ibíd.* p. 6.

¹⁵⁰ Uzcátegui, Carlos. (2011) *Lógica, Conjuntos y Números*. Consultado el 10 de octubre de 2019 del sitio web del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Los Andes: http://www.matematica.ciens.ucv.ve/materias/files_materias/Elemento/01%20-%20L%F3gica%2C%20Conjuntos%20y%20N%FAmeros_Carlos%20Uzc%Eltegui%20%28ULA%202011%29.pdf p, 34.

$$A = \{x, y, z\}$$

En este ejemplo el conjunto definido se representa con la letra A y $\{x, y, z\}$ son los elementos que lo conforman, es decir, que $\{x, y, z\}$ son elementos que le *pertenecen* a A . En este punto, cuando un objeto pertenece a un conjunto, se dice que es miembro o elemento de ese conjunto. Esta relación de pertenencia es primordial dentro de la teoría de conjuntos. Se representa mediante el símbolo \in “(épsilon... “esti(n)”, significa “es” en griego)”,¹⁵¹ aunque también suele interpretarse como “está en”.¹⁵²

Los elementos “pueden ser cualquier tipo de objetos que no sean colecciones o bien pueden ser conjuntos”.¹⁵³ Es preciso tener presente lo que se ha dicho anteriormente: no todas las colecciones son conjuntos, pero, sí todos los conjuntos son colecciones, excepto el conjunto vacío. Es por ello, que la relación de pertenencia asegura que el elemento puede ser o no un conjunto; mientras que quien lo contiene, tiene que ser forzosamente un conjunto.¹⁵⁴ Si retomamos el ejemplo anterior, un elemento del conjunto A puede ser y , de modo que se simbolizaría como: $y \in A$. Si, de otra forma se presenta un elemento que no está en el conjunto, por ejemplo el elemento q , esta negación de pertenencia se simboliza como: $q \notin A$. Resulta claro que q no es miembro de A en tanto que no lo encontramos en el listado $\{x, y, z\}$.

Sin embargo, no todos los conjuntos poseen listados de objetos tan pequeños, sino que, por lo contrario, también se dispone de conjuntos extremadamente grandes, y, aunque pueden ser detallados en una lista, “En muchos casos no es posible o no es fácil dar la lista completa de todos los elementos... en su lugar se da una propiedad que satisfacen única y exclusivamente los elementos del conjunto”.¹⁵⁵ Cuando un conjunto no se define por un

¹⁵¹ Redmond, Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p, 93.

¹⁵² Flores, Conrado. (1985) *Conjuntos. Álgebra, estructuras y operaciones*. México: Trillas. p, 16.

¹⁵³ Amor, José. (2011) *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*, México: UNAM. p, 1.

¹⁵⁴ Cfr. Amor, José. (2011) *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*, México: UNAM. p, 7.

¹⁵⁵ Uzcátegui, Carlos. (2011) *Lógica, Conjuntos y Números*. Consultado el 10 de octubre de 2019 del sitio web del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Los Andes:

http://www.matematica.ciens.ucv.ve/materias/files_materias/Elemento/01%20-%20L%F3gica%2C%20Conjuntos%20y%20N%FAmeros_Carlos%20Uzc%Eltegui%20%28ULA%202011%29.pdf p, 34.

listado sino que se define a partir de la propiedad que cumple se lleva a cabo una *definición por comprensión*.

Este tipo de definición opera de la siguiente manera: El conjunto X es igual a la colección de elementos que cumplen la propiedad P , simbolizado como: $X = \{x \mid P(x)\}$. En esta simbolización la barra vertical “|” se lee como “es tal que”, por lo que indica que x es tal que x cumple P . Cabe añadir que esta definición también puede estructurarse mediante el *esquema de comprensión*, el cual plantea lo siguiente: “Si A es un conjunto y P es una propiedad, la colección de los elementos en A que cumplen la propiedad P es un conjunto al que denotamos $\{a \in A \mid P(a)\}$ ”.¹⁵⁶

A continuación presentamos ejemplos de la definición por comprensión:

$N = \{x \mid x \text{ es un número natural}\}$

$N = \{x \mid P(x)\}$

$X =$ la colección de elementos x pertenecientes a los números naturales tales que son mayor o igual (“ \leq ”) a tres y menor (“ $<$ ”) a 8.

$X = \{x \in N \mid 3 \leq x < 8\}$

En el caso del conjunto representado como X su listado es posible, pues las x que cumplen con la propiedad establecida son: 3, 4, 5, 6, 7; mientras que, en el caso del conjunto N , sabemos que los números naturales son infinitos, de modo que el listado nunca se terminaría. En este punto es conveniente retomar lo planteado en el apartado 2.2.2.1. del presente trabajo, titulado *Sobre los dominios infinitos*, en el cual se ha indicado que en el estudio del infinito algo que debe evitarse es el recuento. Por otra parte, se ha señalado que su estudio se lleva a cabo mediante la *función biyectiva*, a partir de la cual es posible comparar conjuntos cuyo tamaño es infinito. La comparación entre los tamaños de los conjuntos se hizo posible a partir de uno de los conceptos propuestos por Cantor: *La cardinalidad de los conjuntos*.

3.1.3. Cardinalidad y Equipotencia

¹⁵⁶ Consultado el 10 de octubre de 2019 del sitio web de la Universidad Nacional Autónoma de México: <https://www.matem.unam.mx/~sumano/cursos/superior/conjuntos/conjuntos/node1.html>

La propuesta de Cantor a partir del concepto de *cardinalidad* es determinar el tamaño de los conjuntos. En el caso de los conjuntos finitos su *cardinal* corresponde al último elemento del conteo, es decir, que si tenemos la colección $\{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 8\}$, el cardinal queda establecido por el número 5, en tanto que 5 es el último número en el conteo de sus elementos: $\{3, 4, 5, 6, 7\}$. Para expresar el cardinal de un conjunto se utiliza el símbolo “#”, aunque también es común su referencia a partir de las barras “| ”, en donde la letra del conjunto es colocada justo en el medio de ellas. Por ejemplo, si $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 8\}$, entonces $|X| = 5$ (que se lee “el cardinal del conjunto X es igual a 5”); o bien $|\{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 8\}| = 5$ (interpretado como “el cardinal de la colección de las x pertenecientes a \mathbb{N} tales que son mayor o igual a tres y menor a ocho, es igual a 5”).

Además de indicar el tamaño de los conjuntos, el cardinal también señala lo que se ha denominado como *potencia* de un conjunto (que no hay que confundir con el conjunto potencia). La *potencia* de un conjunto es igual a su cardinal, de modo que, cuando dos conjuntos coinciden en el mismo cardinal se dice que tienen la misma *potencia*, o bien, que son *equipotentes*. En consecuencia, dos conjuntos son equipotentes “si sus elementos se pueden hacer corresponder por pares”,¹⁵⁷ es decir, si son conjuntos *biyectables*.

En el caso de los conjuntos infinitos el tratamiento de Cantor es esencial. A partir de la función biyectiva logró demostrar en 1873 que el conjunto de los números naturales, el de los racionales y el de los enteros es del mismo tamaño. Cabe destacar que al demostrar que son del mismo tamaño también demostró su equipotencia. Para referir el tamaño de estos conjuntos propuso “una prolongación de los números naturales: *la teoría de los ordinales transfinitos*”.¹⁵⁸ Esta teoría se centra “en términos intuitivos, [en] que podemos dar por terminado un proceso infinito y tras él volver a comenzar otro proceso”.¹⁵⁹ Para que este planteamiento pueda ser elaborado es indispensable abordar el infinito en acto y no en potencia, tal como se explica en el siguiente apartado.

3.1.3.1. Los infinitos de Cantor

¹⁵⁷ “Potencia” Tercera Def. *Diccionario de matemática*. (1977) España: Rioduero.

¹⁵⁸ Gutiérrez, Verónica. (2017) *Detrás de la noción de infinito. Sobre el problema de fundamentación de la matemática*. Tesis Licenciatura. Universidad de Valladolid. p, 10.

¹⁵⁹ Gutiérrez, Verónica. *Ibíd.* p, 10.

Resulta frecuente que al pensar en la representación del infinito se piense en la lemniscata “ (∞) ”. Esta representación fue propuesta por el matemático inglés John Wallis (1616-1703), quien fuera amigo de Newton, e influenciado... por Vieta, Fermat y Descartes.¹⁶⁰ Sin embargo, a partir de las demostraciones de Cantor el infinito necesita ser representado dependiendo del tamaño que tenga, es decir, que se tiene que especificar si es numerable o si no lo es. El tamaño, además de brindarnos información sobre el dominio también indica si se trata de conjuntos biyectables o no. Para indicarlo, Cantor propuso la teoría de *los números transfinitos*, entre los cuales sobresalen “ \aleph_0 y \aleph_1 ” (que se leen Aleph cero y Aleph uno respectivamente).¹⁶¹

Conviene precisar que la teoría de los ordinales transfinitos y de los números transfinitos sólo se puede comprender si el infinito se aborda como algo ya terminado, algo que podría decirse: *pasó de la potencia al acto*. Esto sugiere que en lugar de pensar en el conjunto de los números naturales como un infinito en potencia, podamos “concebirlo como terminado; y pensar en el conjunto formado por todos los números naturales. Este se denomina ω [se lee omega], y se trata del primer ordinal infinito (Los números naturales serían los ordinales finitos)”.¹⁶²

3.1.3.1.1. Infinito numerable

El conjunto representado como ω tiene la característica de ser infinito numerable. Esto nos indica que es biyectable con el conjunto de los números naturales. Y dado que el conjunto de los números naturales resulta biyectable, a su vez, con el conjunto de los números racionales y con el conjunto de los números enteros, es que se determina que todos estos conjuntos poseen el mismo tamaño. En consecuencia se afirma lo siguiente:

Siendo N el conjunto de los números naturales, Q el conjunto de los números racionales y Z el conjunto de los números enteros se obtiene: $|N|=|Q|=|Z|$

¹⁶⁰ Cfr, con Ruiz, Ángel. (2003) *Historia y filosofía de las matemáticas*. Costa Rica: UNED.p, 263.

¹⁶¹ Dado que la familia de Cantor era judía, este matemático “adoptó la vieja letra hebrea “Aleph”, o \aleph ” que corresponde justo a la primera letra del alfabeto hebreo. Cfr. Ziauddin, Sardar. (2005) *Matemáticas para todos*. España: Paidós. p, 133.

¹⁶² Gutiérrez, Verónica. (2017) *Detrás de la noción de infinito. Sobre el problema de fundamentación de la matemática*. Tesis Licenciatura. Universidad de Valladolid. p, 10.

Debido a esta relación es que se utiliza ω “para representar el tamaño común a todos ellos y se les denomina ordinales enumerables”.¹⁶³ El tamaño de este tipo de ordinales se indica mediante el primer número transfinito, esto es: \aleph_0 . Nos encontramos en este caso ante el primer ordinal transfinito que es ω y el primer número transfinito que es \aleph_0 . En este punto conviene destacar que la “esencia de la teoría de Cantor es precisamente el disponer de un método— en realidad de dos: la teoría de ordinales y la de cardinales — para «contar» el infinito”.¹⁶⁴

Vale la pena comentar que el trabajo de uno de los colegas cercanos a Cantor tuvo cierta influencia en su forma de concebir al infinito. De hecho, ciertas piezas claves de la propia teoría de conjuntos provienen de sus demostraciones. Nos referimos al matemático Richard Dedekind, quien fuera el primero en proponer que un conjunto es infinito si y sólo si existe una colección contenida en él cuyo tamaño es el mismo, es decir, que una parte del conjunto es del mismo tamaño que todo el conjunto en sí. Mediante este planteamiento logró establecer “la primera definición precisa del concepto de infinitud: un conjunto A es infinito si y sólo si existe una biyección entre A y un subconjunto propio de A”.¹⁶⁵

Un subconjunto propio es un conjunto que se encuentra *contenido* en otro conjunto. Por ejemplo: Resulta que A es un subconjunto propio de B cuando “Todos los elementos de A están en B, pero, cuando menos un elemento de B no está en A”¹⁶⁶. Esta definición nos indica que el subconjunto propio A no abarca todos los elementos de B, y se simboliza como: $A \subset B$. Conviene añadir que también se admite que un conjunto sea subconjunto propio de sí mismo. De modo que “Podemos decir que: A es un subconjunto propio de A”, es decir, $A \subset A$, Tomando en cuenta que hay elementos de A que quedan fuera de su subconjunto propio.

En el caso de la definición de conjunto infinito que brinda Dedekind queda instaurado que hay elementos de A que no están en su subconjunto propio, lo interesante es que a pesar de ello el subconjunto propio sea equipotente al conjunto que lo contiene. Este resultado es

¹⁶³ Gutiérrez, Verónica. *Ibíd.* p, 11.

¹⁶⁴ González, Wenceslao. (1988) *Aspectos metodológicos de la investigación científica*. España: Universidad de Murcia. P,132.

¹⁶⁵ Jané, Ignacio. () *Labyrinth of Thought. A history of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. Consultado el 10 de octubre de 2019 en la sección de historia de la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española: <http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=179> p, 582.

¹⁶⁶ Flores, Conrado. (1985) *Conjuntos. Álgebra, estructuras y operaciones*. México: Trillas. p, 41.

relevante en tanto que logra refutar a una de las nociones de Euclides; específicamente a la quinta noción del primer libro de los Elementos, la cual dicta lo siguiente: *El todo es mayor a las partes*.¹⁶⁷ A partir de Dedekind esta noción resultaría válida sólo en los conjuntos finitos, ya no en los infinitos, dado que por definición, el conjunto infinito debe ser de igual tamaño que una de sus partes. Es conveniente mencionar que si bien la definición de Dedekind es crucial para abordar el estudio del infinito, esta no ofrece tratamiento alguno respecto a los tamaños de los conjuntos infinitos. El estudio de las cardinalidades infinitas corresponde, propia y únicamente, a la teoría de Cantor.¹⁶⁸

3.1.3.1.2. Infinitos no numerables

Se ha establecido que los conjuntos infinito numerables son representados por el cardinal transfinito \aleph_0 , de modo que los conjuntos que se definen como no numerables, al ser mayores que los numerables, su cardinal tiene que resultar mayor a \aleph_0 . Cabe destacar que los conjuntos que han sido establecidos como no numerables son el conjunto de los números irracionales y el conjunto de los números reales; sin olvidar, que este último se conforma precisamente por el conjunto de los irracionales y por el conjunto de los racionales. En otras palabras, el conjunto de los reales contiene tanto a los números expresados en razones $\frac{p}{q}$ como a los que no se expresan en razones, tales como $\sqrt{2}$, π , e.

En el caso del conjunto de los números irracionales, simbolizado como I , su cardinalidad es equipotente a la cardinalidad del conjunto de los números reales, representado como R . Ahora bien, es conveniente plantear la siguiente interrogante ¿qué cardinal transfinito le corresponde a esta talla de infinitos? “Cantor estaba convencido de que no existía ningún conjunto infinito estrictamente más grande que los naturales y estrictamente menor que los reales, es decir, que la cantidad de los reales, era la cantidad infinita que seguía a la cantidad de naturales”.¹⁶⁹ En consecuencia la propuesta de Cantor es la siguiente: $|R|=|I|=\aleph_1$, en donde $\aleph_0 < \aleph_1$. Asimismo, al ser $|R|=|I|$, entonces $|I|=\aleph_1$.

¹⁶⁷ Ziauddin, Sardar. (2005) *Matemáticas para todos*. España: Paidós. p, 60.

¹⁶⁸ Cfr. Jané, Ignacio. (-) *Labyrinth of Thought. A history of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. Consultado el 10 de octubre de 2019 en la sección de historia de la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española: <http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=179> p, 578.

¹⁶⁹ Álvarez, Ana. (2005) *Forcing: otros mundos posibles*, en *Ciencias*, no.78, abril-junio, p, 67.

Sin embargo, a pesar del gran esfuerzo que Cantor invirtió en construir la demostración para $|\mathbb{R}| = \aleph_1$, nunca pudo lograrlo. Por lo contrario, esta demostración se convirtió en una gran interrogante que se dio a conocer bajo el nombre de *la hipótesis del continuo*. Esta hipótesis fue retomada por el matemático David Hilbert, quien la postuló como la primera interrogante de una lista que se volvería famosa dentro del gremio matemático. Este suceso ocurrió “En 1900, en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos en París, [cuando] presentó una lista de 23 problemas importantes no resueltos. Estos problemas de Hilbert tuvieron un tremendo efecto en la dirección posterior de la investigación matemática”.¹⁷⁰

En este punto, vale la pena destacar que la cuestión central de la hipótesis del continuo era dar respuesta a lo siguiente: ¿es el cardinal del conjunto de los números reales el siguiente del cardinal del conjunto \mathbb{N} de los números naturales o es mayor aún?¹⁷¹ De modo que no se discute la demostración de $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, en tanto que esta demostración sí es posible a partir de la función biyectiva; sino que lo que queda pendiente es demostrar si efectivamente se cumple que $|\mathbb{R}| = \aleph_1$.

Tuvieron que pasar sesenta años de la publicación de la lista de Hilbert para que se diera respuesta a la hipótesis del continuo. La solución quedó en manos del matemático Paul Cohen, quien demostró que “la respuesta depende de qué axiomas escojamos para la teoría de conjuntos. Con unos axiomas razonables, los dos cardinales son iguales. Pero con otros axiomas, igualmente razonables, son diferentes.”.¹⁷² Es preciso anunciar, que esta demostración requiere de procedimientos más elaborados que los empleados en esta investigación, de modo que, no profundizaremos en el análisis de la hipótesis del continuo, sino que, nuestro interés se enfocará en la demostración de la no numerabilidad de \mathbb{R} y de I .

Tanto el conjunto \mathbb{R} como I se caracterizan por su imposibilidad de emparejar uno a uno sus elementos con los conjuntos del tipo ω . Esto nos indica que, por ejemplo, en el caso de I no

¹⁷⁰ Stewart, Ian. (2008) *Historia de las matemáticas*. España: Crítica. p, 317.

¹⁷¹ Amor, José. (2000). “La teoría de conjuntos en el siglo XX” en *Miscelánea Matemática*, No.31. p, 1.

¹⁷² Stewart, Ian. (2008) *Historia de las matemáticas*. España: Crítica. p, 316.

es biyectable con \mathbb{Q} , en tanto que \mathbb{Q} es ω ¿Por qué no es biyectable \mathbb{I} con \mathbb{Q} ? porque “es posible encontrar un número irracional entre dos números racionales cualesquiera”.¹⁷³

Esto indica que si enlistamos el conjunto de los números racionales, entre cada uno de ellos siempre habrá un irracional de más, lo que conlleva a la afirmación que $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{I}|$. Esta afirmación la ejemplificamos a continuación: para obtener un número irracional entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{4}$, en primer lugar se convierten a su expresión decimal, de modo que al dividir a dos entre cuatro se obtiene 0.5; mientras que al dividir a tres entre cuatro se obtiene 0.75. Entre estas dos cifras 0.5 y 0.75 podemos encontrar, por ejemplo el número 0.512469853659863369984... el cual es más grande que 0.5 pero menor a 0.75, y cuya expresión fraccionaria resulta imposible, lo que muestra que “es posible encontrar un número irracional entre dos números racionales cualesquiera”.¹⁷⁴

Con la finalidad de obtener el cardinal de los números racionales Cantor ingenió una tabla para ordenar cada uno de sus elementos,¹⁷⁵ y con ello, logró demostrar que los racionales poseen un cardinal \aleph_0 . A continuación presentamos la tabla para los números racionales:

	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$...
2	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$...
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$...
4	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$...
5	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$...
6	$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$...
7	$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$...
8	$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{8}$...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

¹⁷³ Britton, Jack. (2002) *Matemáticas contemporáneas*. México: Oxford México. p, 178.

¹⁷⁴ Britton, Jack. *Ibíd.*, 178.

¹⁷⁵ La imagen pertenece al sitio web de la BBC: <https://www.bbc.com/mundo/noticias-45300219>. Consultado el 14 de octubre de 2019.

Lo interesante de esta tabla es que, al ubicar a cada uno de los números racionales, se puede probar que los irracionales se escapan a su lista. Esta constitución tan peculiar de cardinalidades le permitió a Cantor establecer la cardinalidad de los números reales como no numerable. Su método: una reducción al absurdo. Se ha indicado que \mathbb{R} se conforma por conjunto I y por el conjunto Q . Luego I es no numerable mientras que Q es numerable. En consecuencia, \mathbb{R} , al contener un conjunto no numerable no puede ser numerable. Si \mathbb{R} se supone como numerable se llega al absurdo, pues por I sabemos que no lo es. Conviene añadir que además del absurdo, Cantor realizó una demostración mediante el segmento entre el 0 y el 1 de la recta numérica, evidenciando que la cantidad de puntos sobre la recta resultaba biyectable con el conjunto \mathbb{R} . Esta demostración no se llevará a cabo en esta investigación, pero es relevante en tanto que Cantor logró vislumbrar con ella “la grandeza de lo pequeño”, utilizando las palabras del arquitecto *György Dóczy*.

3.2. Clasificación de conjuntos

En la teoría de conjuntos es vital identificar el tipo de conjunto con el que se trata. Dentro de los conjuntos básicos de la teoría destaca uno en particular, conocido como el *conjunto universal*. Este conjunto “se representa por la letra omega Ω del alfabeto griego”¹⁷⁶, y, es conveniente advertir que no se trata de la colección universal (en tanto que ya se especificó que la colección V no puede ser un conjunto), sino que se trata de un conjunto delimitado según el caso. En consecuencia el conjunto Ω “una vez que se ha determinado, permanece fijo y cualquier otro conjunto requerido se forma con elementos de Ω . A Ω también se le llama universo lógico o universo del discurso”.¹⁷⁷ Por ejemplo, si se desea hablar de números, pero específicamente de los números naturales entonces el conjunto de los naturales es el que conformará a Ω .

A partir de Ω se construyen todos los nuevos conjuntos, de modo que serán subconjuntos de Ω . Cuando se construye un subconjunto y quedan elementos fuera él, la colección de los elementos que no está incluida conforma un nuevo conjunto llamado *complemento*. El complemento de un conjunto se representa regularmente mediante el uso del apóstrofe, de modo que si tenemos un conjunto A , su complemento se expresa como A' .

¹⁷⁶ Ortiz, Francisco. (2002) *Matemáticas 2 Álgebra y Funciones*, México: Patria. p, 12.

¹⁷⁷ Ortiz, Francisco. *Ibíd.* p, 13.

También se puede encontrar simbolizado como \bar{A} o $\sim A$. Su definición formal es la siguiente:
 $A' = \{x \mid x \in \Omega \text{ si y sólo si } x \notin A\}$.

En este punto vale la pena señalar que el conjunto A utilizado previamente es un subconjunto propio, en tanto que cumple la definición: Todos los elementos de A están en Ω , pero, cuando menos un elemento de Ω no está en A . De modo que su simbolización corresponde a $A \subset \Omega$. Esta puntualización es relevante en la medida en que no todos los subconjuntos son propios, sino que también existe otro tipo, conocido como *subconjuntos impropios*. Se dice que un subconjunto es impropio cuando se admite la posibilidad de igualdad con el conjunto que lo contiene y se representa como " \subseteq ". De lo anterior se sigue que, si tenemos dos conjuntos tales que $A \subseteq B$, entonces es posible que $A=B$. La relación $A=B$ se cumple "si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$ ".¹⁷⁸

Conviene agregar que la relación de contención admite negación, tanto en los subconjuntos propios como en los impropios. La negación se indica a partir de una barra en diagonal, como se muestra a continuación: $\not\subset$ y $\not\subseteq$. Esto sugiere que dados dos conjuntos A y B , $A \not\subset B$ se lee como "el conjunto A no es subconjunto propio de B " y $A \not\subseteq B$ se lee como "el conjunto A no es subconjunto impropio de B ".

Además de este tipo de conjuntos es necesario incluir la definición del *conjunto vacío* y de *conjunto unitario*. El conjunto vacío, como su nombre lo indica, es un conjunto carente de elementos. Se caracteriza por su representación mediante el símbolo " \emptyset " y por su descripción entre llaves como " $\{ \}$ ". Por otra parte, se define como *conjunto unitario* a aquellos que contienen a un solo elemento. En este punto vale la pena resaltar una diferencia en su descripción: el conjunto vacío se expresa como " $\{ \}$ ", mientras que un conjunto unitario puede ser " $\{\emptyset\}$ ", es decir, un conjunto cuyo único elemento es \emptyset .

A partir de los conjuntos antes expuestos y mediante la aplicación de operaciones reglamentadas es posible construir otros conjuntos. A continuación presentamos las operaciones elementales de la teoría de conjuntos.

3.2.1. Operaciones con conjuntos: Intersección y Unión

¹⁷⁸ Ortiz, Francisco. *Ibíd.* p, 16.

La intersección es una operación que se caracteriza por construir un conjunto cuyos elementos son comunes a otros conjuntos. De modo que, “si A y B son conjuntos, la intersección de ellos representada por $A \cap B$ (léase “A intersección B”) es el conjunto de los elementos que son comunes tanto a A como a B”.¹⁷⁹ Su representación formal corresponde a la siguiente $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$. Cuando los conjuntos que son intersectados no tienen elementos en común el resultado es el conjunto vacío, es decir que $A \cap B = \emptyset$.

Por otra parte, en el caso de la unión de conjuntos, la operación nos indica que el conjunto resultante se construye de los elementos de por lo menos alguno de los conjuntos involucrados, es decir, que “Si A y B son conjuntos, la unión de A y B, indicada por $A \cup B$ (léase “A unión B”) es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A, a B o a ambos”.¹⁸⁰ Esta definición se expresa como: $\{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$. Es importante destacar que “la letra o es inclusiva”¹⁸¹, en tanto que la inclusión permite que los elementos puedan pertenecer a ambos conjuntos.

En seguida presentamos ejemplos de ambos operadores:

Sean los conjuntos

$$A = \{do, re, mi, fa\}$$

$$A \cap B = \{do, mi, fa\}$$

$$B = \{mi, fa, sol, la, si, do\}$$

$$A \cup B = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$$

Notemos ahora qué sucede cuando estos operadores actúan con conjuntos complemento. Por ejemplo: $A \cap A'$ y $A \cup A'$. En el caso de la intersección $A \cap A'$ es claro que no tienen elementos en común, dado que por definición $A' = \{x \mid x \in \Omega \text{ si y sólo si } x \notin A\}$. En consecuencia el resultado de la intersección es: $A \cap A' = \emptyset$. Por otra parte, en el caso de $A \cup A'$ se obtienen todos los elementos, tanto los que pertenecen a A como los que no pertenecen a A. De este modo el resultado que se obtiene es: $A \cup A' = \Omega$.

¹⁷⁹ Britton, Jack. (2002) *Matemáticas contemporáneas*. México: Oxford México. p 20.

¹⁸⁰ Britton, Jack. *Ibíd.* p, 21.

¹⁸¹ Ortiz, Francisco. (2002) *Matemáticas 2 Álgebra y Funciones*, México: Patria. p, 22.

Para analizar la relación de pertenencia entre los elementos involucrados en estas operaciones se suele utilizar un método, conocido como *tablas de pertenencia*. En estas tablas se considera que “para los conjuntos $A, B \subseteq \Omega$, un elemento $x \in \Omega$ satisface exactamente una de las siguientes situaciones:

a) $x \notin A, x \notin B$

b) $x \notin A, x \in B$

c) $x \in A, x \notin B$

d) $x \in A, x \in B$ ¹⁸²

Debido a que estas situaciones conforman todas las posibles combinaciones entre conjuntos, estas se colocan dentro de la tabla de pertenencia, de tal modo que resulta sencillo determinar los resultados de las operaciones. Las relaciones de pertenencia se indican de la siguiente manera: “Cuando x es un elemento de un conjunto dado, escribimos un 1 en la columna que representa ese conjunto dado... cuando x no está en el conjunto, escribimos un 0”.¹⁸³ A continuación se ejemplifica la construcción de la tabla:

A	A'	$A \cap A'$	$A \cup A'$
0	1	0	1
1	0	0	1

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

En estas tablas se puede percibir que su forma de operar resulta muy similar a las tablas de verdad, trabajadas previamente en el apartado correspondiente a la lógica proposicional. Y a continuación mostraremos que la semejanza entre estas tablas no es sólo metódica, sino que los elementos con las que operan también presentan ciertas similitudes.

3.2.1.1. Las leyes de Morgan y su construcción en las tablas de pertenencia

Hemos mencionado previamente que las *Equivalencias de Ockham* también se conocen como *Las leyes de Morgan*. Estas operaciones se caracterizan porque, a pesar de pertenecer a diferentes sistemas operativos, sus conexiones conllevan a los mismos resultados. Es claro que los resultados no son “exactamente” los mismos, pues no se manipulan los mismos

¹⁸² Grimaldi, Ralph. (1998) *Matemáticas discreta y combinatoria*, México: Adisson Wesley. p, 164.

¹⁸³ Grimaldi, Ralph. *Ibíd.* p, 164.

objetos, lo que resulta igual es el proceso mediante el cual éstos son operados. Conviene mencionar que, si bien el grupo de las equivalencias de Ockham se conforma por ocho proposiciones, las leyes de Morgan constan sólo de dos operaciones, que son: $(A \cap B)' = A' \cup B'$ y $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Las proposiciones análogas a las leyes de Morgan son, en orden correspondiente: $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ y $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$. En seguida se presentan las tablas correspondientes a cada operación:

(A	\cap	B)	'	=	A'	\cup	B'
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0

\sim	(p	\wedge	q)	\equiv	($\sim p$	\vee	$\sim q$)
0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1

(A	\cup	B)	'	=	A'	\cap	B'
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0

\sim	(p	\vee	q)	\equiv	($\sim p$	\wedge	$\sim q$)
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1

Podemos notar que el complemento opera de la misma manera que la negación. Esto es posible en tanto que $A \cap B$ conforman un conjunto, de modo que el complemento $(A \cap B)'$ es complemento dicho conjunto. Lo mismo sucede con la negación, en tanto que su principal cualidad es ser una conectiva monaria, de modo que sólo es aplicable en una proposición, sea esta atómica o molecular. En el caso del complemento del conjunto, sucede lo mismo, pues se puede aplicar a un conjunto individual, como A' , o en conjunto denotado operativamente, tal como $(A \cap B)'$.

Además de estas similitudes, en las tablas anteriores resulta notable que su forma de operar es idéntica, ya que tanto el complemento como la negación invierten los valores de los conjuntos en los que se aplican. Por otra parte, también se puede observar que las operaciones \cup , \cap , son idénticas a las realizadas por \vee , \wedge . Esta relación idéntica nos indica

que para dichas conexiones los elementos determinados como dominantes y neutros son iguales. Se ha mencionado anteriormente que el elemento dominante de la conjunción es el 0 y el neutro es el 1; mientras que, para la disyunción estos elementos son inversos, de modo que el dominante es el 1 y el neutro es el 0.

En consecuencia, el elemento neutro en la intersección corresponde a \in , que es 1, y el dominante a \notin , que corresponde a 0. Esta distinción entre dominante y neutro es apreciable en las tablas, ya que si se presta atención a la columna de \cap y de \wedge , hay más 0 que 1, de modo que el elemento que domina es 0. En contraste a estas conectivas, notemos la valuación para \cup y \vee . En el caso de \cup su elemento dominante corresponde a \in y el neutro a \notin , lo cual es observable en la tabla dada su traducción en 1 y 0. Notamos enseguida que hay más 1 que 0 en su columna, de modo que quien domina es 1.

Por último, cabe añadir que al igual que en las tablas de verdad, “por medio de las tablas de pertenencia [también] podemos establecer la igualdad de dos conjuntos si comparamos sus columnas respectivas en la tabla”.¹⁸⁴ Recordemos que en la lógica proposicional dos proposiciones son equivalentes sólo si su valuación coincide en cada uno de los renglones, es decir, si poseen el mismo valor de verdad. Del mismo modo, dos conjuntos son iguales si cada uno de los renglones de la tabla de pertenencia coincide. Esto puede verificarse en las tablas anteriores, dado que las leyes de Morgan se integran justo por conjuntos equivalentes.

3.2.1.2. Distinción entre la unión de \wedge y la unión de \cup

Se ha dicho en el apartado sobre la conjunción que esta conectiva se caracteriza por realizar una unión entre por lo menos dos proposiciones. Sin embargo, también se ha puntualizado en que, para que la unión resultante sea verdadera, todas las proposiciones que son conectadas por ella tienen que ser verdaderas. Ahora bien, conviene preguntarse ¿por qué si la conjunción lleva a cabo una operación que une elementos, no es ésta operación la que resulta análoga a la unión realizada en la teoría de conjuntos a partir de \cup ?

La respuesta la encontramos en la propia definición de \cup , en tanto que, dados los conjuntos A y B, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$. Esta definición, como hemos señalado, indica

¹⁸⁴ Grimaldi, Ralph. *Ibíd.* p, 164.

que la letra *o* es inclusiva, de modo que permite que los elementos puedan pertenecer a ambos conjuntos. De este modo, la unión \cup queda estrechamente vinculada con la disyunción y no con la conjunción. Cabe destacar, que esta unión no tiene garantía de que el elemento esté tanto en A como en B, a pesar de que la unión sea verdadera. Esto se debe a que la unión es verdadera aun cuando el elemento pertenezca ya sea a uno u a otro conjunto, aunque también en ambos pero no exclusivamente.

En este punto, se comienza a atisbar la semejanza con la lógica de predicados, la cual, cabe recordar que se refiere como una extensión de la lógica proposicional. Esto se debe a que las relaciones de pertenencia también resultan relevantes en el análisis, por lo que se deben de incluir no sólo las relaciones externas sino también las internas. Se ha mencionado en el apartado de lógica de predicados que la cópula se vincula con la pertenencia en la teoría de conjuntos, y que se puede hablar tanto de poseer propiedades como de pertenecer a un conjunto, y el resultado, al menos en su interpretación es el mismo.

En consecuencia, $\langle x \in A \text{ o } x \in B \rangle$ puede interpretarse también como $\langle Ax \vee Bx \rangle$. En este punto, además de que la estructura es la misma, podría decirse que etimológicamente la lectura también es la misma, ya que hemos indicado que \in “(épsilon... “esti(n)”, significa “es” en griego)”.¹⁸⁵ De este modo, $\langle x \in A \text{ o } x \in B \rangle$ interpretado como “x es a o x es B” es igual a la lectura de “ $Ax \vee Bx$ ”, en donde “x es A o x es B”.

Por otra parte, si analizamos la estructura $x \in A$ y $x \in B$ y la estructura de “ $Ax \wedge Bx$ ”, nos daremos cuenta que también resultan idénticas. Partiendo de que su lectura es la misma así como su condición para ser valuadas en 1 en su tabla correspondiente, ambas operaciones solicitan que el elemento x sea tanto A como B, o, de otro modo y retomando la propuesta de Quine, que x sea A y *a la vez* B. No obstante, conviene detenernos aquí con la finalidad de precisar unas sutiles pero importantes diferencias entre predicados y conjuntos.

3.2.1.3. La interpretación de la relación de pertenencia: la limitación de la lógica de predicados y el alcance de la teoría de conjuntos

Cuando se menciona la similitud entre $x \in A$ y Ax , hay que tener en cuenta que la lógica de predicados se limita a elementos y sólo a ellos, es decir, que no está en su alcance

¹⁸⁵ Redmond, Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana p, 93.

cuantificar propiedades ni relaciones, y por ende, tampoco conjuntos. Esto se debe, a que, como se ha comentado, la lógica de predicados es un lenguaje de primer orden que se caracteriza por su “restricción a cuantificar sólo sobre elementos del universo del discurso”.¹⁸⁶ En consecuencia, los objetos que se manipulan son objetos individuales, de modo que, cuando se compara $x \in A$ y Ax , se está interpretando a x como elemento individual y no como un conjunto.

Sin embargo, esto no sucede así en la teoría de conjuntos, en tanto que esta teoría es un lenguaje de orden superior. De modo que, para esta teoría, la interpretación de x como elemento en $x \in A$, no indica sólo elementos del universo del discurso, sino que también puede referir a un conjunto o subconjunto de dicho universo.¹⁸⁷ De hecho, “un conjunto puede tener solamente a conjuntos como sus elementos, ya que los objetos que pertenecen a un conjunto pueden ser cualquier tipo de objeto de la teoría de conjuntos, en particular conjuntos”.¹⁸⁸

Además, aun cuando una proposición esté cuantificada universalmente, por los teoremas de Skölem, de Compacidad y de Completud expuestos en el apartado 2.2.2.1.2, sabemos que el lenguaje de primer orden está bien limitado en cuanto a su dominio, a tal grado que ninguno de sus componentes puede sobrepasar al infinito numerable, incluyendo a la cantidad de fórmulas validas dentro del sistema. Esto nos indica que las colecciones que pueden formarse a partir de proposiciones cuantificadas tendrán como máximo un dominio correspondiente al ordinal ω cuyo cardinal es \aleph_0 .

Por otra parte, en la teoría de conjuntos hemos visto que disponemos de conjuntos cuyo dominio es aún mayor que el referido por ω , y que corresponden a los llamados conjuntos infinito no numerables. Los ejemplos centrales de este tipo de conjuntos los encontramos en *el conjunto de los números irracionales* y en *el conjunto de los números reales*. El tratamiento de este tipo de conjuntos es posible al ser la teoría de conjuntos un

¹⁸⁶ Cfr. Jané, Ignacio. (1995) “Lógica de orden superior” en *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*. Vol.7 Editorial Trotta, España. p. 105

¹⁸⁷ Jané, Ignacio. *Ibíd.* p, 105.

¹⁸⁸ Amor, José. (2011) *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*, México: UNAM. p, 7.

lenguaje de orden superior. Pues si hay una pieza clave entre un lenguaje de primer orden y una de lenguaje de orden superior esta será el tratamiento del infinito.

3.3. El universo infinito: entre la armonía y la incompletitud de los lenguajes

Los objetos a partir de los cuales se pueden construir colecciones tanto en la lógica de predicados como en la teoría de conjuntos se encuentran en algo que se menciona como *Universo*. El universo para la lógica de predicados se ha planteado de acuerdo a dos interpretaciones:

- 1) como la colección que contiene a todas las cosas y
- 2) como la colección definida mediante el discurso.

Por otra parte, para la teoría de conjuntos la colección que contiene a todos los objetos, como hemos visto, es la colección V , o bien, la colección universo. No obstante, dado que esta colección fue problemática en la propuesta de Cantor del “conjunto de los conjuntos”, es que la colección universo establece una condición: si no todos los conjuntos son regulares, es decir, que si hay conjuntos tales que $x \in x$, entonces R no es V . Es decir, que $V=R$ si y sólo si, para todo *conjunto* x se cumple que $x \in R$ si y sólo si $x \notin x$.

En el caso de la interpretación del universo entendida como la colección definida mediante el discurso, se ha visto que para la teoría de conjuntos esta colección conforma a un conjunto, específicamente al conjunto universal, simbolizado como Ω . No obstante, conviene recordar que a este conjunto también lo hemos referido como *universo lógico* o *universo del discurso*. Al igual que en la lógica de predicados, el universo del discurso concentra todo lo que puede disponerse para el análisis de un caso específico; o bien, en materia de conjuntos, el universo del discurso concentra todos los elementos con los cuales se pueden construir más conjuntos.

Cabe puntualizar en este aspecto, que el conjunto universo concentra todos los elementos de un caso particular, mientras que la colección universo es la que concentra a todos los elementos de la teoría, elementos a partir de los cuales todo se construye. La colección universo es la base que sustenta a los conjuntos. Se debe tener presente que la teoría de conjuntos dispone de un sistema jerárquico, de un sistema cuya estructura se ha determinado como una estructura acumulativa, la cual hace posible que los conjuntos sean bien fundados.

El hecho de que al construir un conjunto disponemos ya de sus elementos, se fundamenta precisamente en dicha estructura, y, como se ha indicado anteriormente, “es una idea subyacente a la axiomática de Zermelo”.¹⁸⁹

En este punto, esta idea de suponer los objetos como ya dados, coincide con lo indicado por Quine en cuanto al uso de la cuantificación: que “implica *prima facie* el compromiso ontológico con determinados objetos”.¹⁹⁰ Se puede notar que inclusive en el aspecto fundacional se presentan similitudes entre la lógica de predicados y la teoría de conjuntos. Sin embargo, aun cuando el planteamiento del universo resulta muy similar, hay grandes diferencias entre el tamaño del dominio conforme a cada teoría. Esto se debe a que, incluso cuando Quine abogó por un infinito que pudiera tener “más cosas de las que se puede designar...contando con una infinidad de nombres”,¹⁹¹ la numerabilidad lo tornó imposible, una vez que ésta se identificó como el punto de quiebre entre la sintaxis y la semántica, dado que al sobrepasarla se pone en riesgo la decidibilidad de los sistemas de primer orden.

Si bien, a la teoría de conjuntos le resulta crucial el estudio de las cardinalidades infinitas, y, en tanto que lenguaje de orden superior se ha mostrado su capacidad para analizarlas, también se ha señalado su ruptura con la armonía entre la sintaxis y la semántica. Esta ruptura fue realizada por Gödel, y como se ha mencionado, radica en lo que éste lógico estableció como *Incompletitud*. Recordemos que Gödel demostró que “todos los sistemas formales de la matemática (incluidos el de los *Principia Mathematica*, la aritmética formal de Peano, la teoría axiomática de conjuntos y, en general, cualquier sistema formal que cumpliera ciertas condiciones mínimas, en particular la *consistencia*), son *incompletos*, es decir, que para cada uno de ellos puede efectivamente construirse una sentencia indecidible (es decir, que ni ella ni su negación es deducible)”.¹⁹²

En suma, la teoría de conjuntos es un lenguaje de orden superior, su capacidad de análisis no resulta limitada por infinitos no numerables. Sin embargo, es una teoría incompleta. En contraste, la lógica proposicional, como lenguaje de primer orden, resulta incapaz de

¹⁸⁹ Amor, José. *Ibíd.* p, 5.

¹⁹⁰ Quine, Willard. *Ibíd.* p, 158.

¹⁹¹ Quine, Willard. (1970) *Filosofía de la lógica*, España: Alianza. p, 156.

¹⁹² Sirvent, Francisco. (2015) *Intuicionismo y formalismo en la filosofía de la matemática de I. Kant y D. Hilbert. Sobre función y significado de la intuición matemática*. Tesis de Doctorado. Universidad del País Vasco. p, 183.

manipular infinitos no numerables, pero a cambio, brinda un sistema completo, en donde la sintaxis y la semántica mantienen su equivalencia. A pesar de que esta teoría se ha indicado como incapaz de determinar el cardinal de sus modelos,¹⁹³ los aportes de Cantor han ayudado a vislumbrar una de las limitaciones de los sistemas de primer orden. De modo que, además de que la lógica de predicados y la teoría de conjuntos resultan cercanas operativamente, también resultan vinculadas respecto al tratamiento del infinito, dado que, aun cuando la lógica de predicados es indiferente a éste, como hemos visto, está estrechamente ligado a él

¹⁹³ Cfr. Torres, Carlos. (2000). *La lógica matemática en el siglo XX*. Miscelánea Matemática, 31, p 72

CONCLUSIONES

A lo largo de esta investigación se ha logrado sustentar que el sistema de la lógica proposicional, el sistema de la lógica de predicados y el sistema de la teoría de conjuntos se vinculan desde diversos puntos que van desde el aspecto operativo hasta el aspecto cuantitativo. En el caso del sistema de la lógica de predicados y de la lógica proposicional el vínculo resulta implícito dado que el primer sistema es considerado como una extensión del segundo, es decir, que la lógica de predicados incluye a la lógica proposicional. De modo que el nexo entre ambos sistemas se manifiesta en su forma operativa, ya que las conectivas que operan en la lógica proposicional también operan en la lógica de predicados.

Por otra parte, el vínculo entre lógica proposicional y teoría de conjuntos fue sustentado a partir de la comparación metodológica entre las tablas de verdad y las tablas de pertenencia. En el caso de las tablas de verdad se analizó la forma operativa de las equivalencias de Ockham; mientras que en las tablas de pertenencia se analizó la arquitectura de las leyes de Morgan. El resultado obtenido fue que las conectivas utilizadas en las equivalencias de Ockham y en las leyes de Morgan se fundamentan bajo las mismas normativas, cambiando únicamente los elementos con los que operan.

De hecho, a partir de la comparativa entre las metodologías ya mencionadas se pudo evidenciar que la relación de pertenencia en teoría de conjuntos funciona de igual manera que los valores de verdad en la lógica proposicional, ya que para marcar la pertenencia o la no pertenencia así como la verdad o falsedad en las respectivas tablas se requiere de su traducción a los valores 1 o 0 según sea el caso. Esta forma de representación se postula como la primera evidencia de igualdad entre las metodologías comparadas, ya que a partir de la valuación en las tablas se obtuvo la confirmación de su equivalencia operativa.

En el caso de la comparación entre conjunción e intersección se logró identificar que ambas conectivas comparten lo que se precisó como *elemento neutro* y *elemento dominante*. Lo mismo ocurrió en el caso de la comparación entre la unión y la disyunción inclusiva. Vale la pena destacar que estas conectivas tanto conjuntistas como proposicionales comparten la característica de ser binarias, de modo que cada una de ellas requiere de dos elementos para poder operar. Asimismo, conviene agregar que a partir de la lectura de las columnas en ambas

tablas se puede identificar la igualdad ya sea entre conjuntos o entre proposiciones, o, como en nuestro análisis, la igualdad operativa entre conjuntos y proposiciones.

Además, la lectura en las tablas también facilitó la evidencia al cotejar el comportamiento operativo de la negación respecto al complemento de un conjunto. El resultado mostró que ambas operaciones son *monarias*, lo que presentó ya de inicio una semejanza entre ellas. Seguido a esto se pudo constatar que estas conectivas monarias operan de igual forma en las tablas, ya que ambas realizan la inversión de valores, ya sea de un conjunto o de una proposición. En este punto conviene destacar que la proposición bien puede ser atómica o molecular, así como un conjunto puede ser individual o denotado operativamente como en el caso de $(A \cap B)'$ o $(A \cup B)'$. Lo relevante en ambos casos es que se sigue estipulando como condición que se trate de un objeto individual, en la medida en que estas conectivas son monarias.

A diferencia del vínculo operativo entre la lógica proposicional y la teoría de conjuntos, la lógica de predicados se vincula a esta última mediante un nexo cuantitativo, mismo que se presenta en el tratamiento de los dominios. Este tratamiento se llevó a cabo en las dos formas de plantear el universo del discurso: 1) como la colección que contiene a todas las cosas de la teoría y 2) como la colección que se limita a un discurso dado. En ambas formas la relevancia cuantitativa se enlaza con el dominio máximo que puede ser controlado por los cuantificadores. No obstante, cabe destacar que el dominio que se conforma por todos los elementos de la teoría fue tratado tanto en su aspecto cuantitativo como en el aspecto ontológico, dado que, como se mencionó desde la introducción de este proyecto, “el uso de la cuantificación... implica *prima facie* el compromiso ontológico con determinados objetos”.¹⁹⁴

De hecho, al profundizar en el estudio de la cantidad de objetos admitidos en el universo, se comenzó a vislumbrar que este se encontraba fuertemente vinculado con el compromiso ontológico. Esto se pudo notar a partir de los marcos normativos que cada teoría de la cuantificación estipula para la interpretación de los signos de cantidad, pues cada teoría propone una definición distinta para conformar e interpretar el dominio universo. De modo que, a partir del nexo entre la cantidad y la ontología se logró identificar que la teoría objetual

¹⁹⁴ Quine, Willard. (2002). *Desde un punto de vista lógico*. España: Paidós. p. 158.

acepta dominios de infinito no numerables, es decir, los de cardinal \aleph_1 ; mientras que la teoría sustitucional no admite dicho infinito, sino que se queda con un infinito de talla menor, como lo es el numerable, o bien, el de cardinal \aleph_0 .

Sin embargo, a pesar de que la teoría objetual se postula a favor de un dominio tan amplio que incluso sea capaz de contener elementos innominados, esto no sería suficiente para poder sostener la capacidad de un sistema, pues faltaba un factor por enfrentar: la interpretación. Vale la pena enfatizar que “una interpretación aceptable tendrá que proporcionar la generalidad indispensable”.¹⁹⁵ Partiendo de ello se llegó al análisis de los siguientes teoremas: el teorema de Skölem, el teorema de Compacidad y el teorema de Completud. Si bien el teorema de Skölem es el que se postula para identificar el rango de interpretación de un modelo, todos los teoremas comparten una condición en común: *la numerabilidad*.

A través del análisis de la numerabilidad se pudo concluir que es justo en ella donde se sustenta la armonía de los sistemas, y que, si ésta se sobrepasa se pone en riesgo la decidibilidad de los mismos. Vale la pena destacar que la armonía surge de la relación entre la semántica y la sintaxis, y fue demostrada por Gödel en su teorema de la Completud. En ella se puede apreciar que la semántica y la sintaxis sostienen una relación de equivalencia, de modo que, resultan equivalentes las nociones de “derivabilidad formal (\vdash) y la de consecuencia lógica (\vDash)”.¹⁹⁶

Asimismo, este teorema está vinculado con el teorema de Compacidad, en la medida en que éste último posibilita la demostración de fórmulas válidas en un conjunto infinito numerable. De tal modo que “La propiedad de compacidad o (finitud) es así necesaria para la existencia de una prueba. Pero, juntamente con la enumerabilidad de los teoremas lógicos, es también suficiente”.¹⁹⁷ En consecuencia la capacidad de demostración a partir de subconjuntos finitos tiene como límite un rango máximo de cardinal \aleph_0 .

¹⁹⁵ Haack, Susan. (1982) *Filosofía de las lógicas*. España: Cátedra. p, 62.

¹⁹⁶ Atocha, Aliseda. (1999) “Compacidad en la lógica de primer orden y su relación con el teorema de Completud” en CRÍTICA, Revista Hispanoamericana de Filosofía Vol. XXXI, No. 93 p. 117.

¹⁹⁷ Quesada, Daniel. (1995) “Lógica clásica de primer orden” en *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*. Vol.7 Editorial Trotta, España. p. 96.

De igual manera, el teorema de Skölem también limita el dominio de los modelos a un cardinal \aleph_0 , en tanto que estipula lo siguiente: “si un esquema cuantificacional es verdadero bajo una interpretación definida a partir de un universo no-vacío, es también verdadero bajo una interpretación definida a partir del universo de los números enteros positivos”.¹⁹⁸ De esto se sigue que un modelo interpretativo de un sistema de primer orden no puede atravesar el límite del cardinal \aleph_0 , ya que si esto sucede, se origina la famosa paradoja de Skölem. No obstante, mediante el análisis de la estructura de la paradoja se logró avistar “que ningún conjunto de enunciados en un lenguaje de primer orden que tenga un modelo infinito es capaz de determinar el cardinal de sus modelos”.¹⁹⁹

Es por ello que a partir de los teoremas mencionados se pudo llegar a la conclusión de que el estudio del infinito en la teoría de conjuntos si es relevante en la lógica de predicados, pues sólo si se comprenden los aportes de Cantor respecto a su teoría de los ordinales transfinitos se pueden comprender los límites establecidos en la triada de teoremas trabajados en este análisis. Asimismo, permite esclarecer el rango de operabilidad máximo de un cuantificador, al mismo tiempo que esclarece la interpretación de las teorías de la cuantificación. En conclusión, aunque el infinito no es un tema propio de la lógica de predicados, se encuentra estrechamente relacionado con él, en la medida en que se utiliza como límite para salvaguardar tanto la decidibilidad del sistema como la armonía del mismo.

¹⁹⁸ Quine, Willard. (1993) *Los métodos de la lógica*, Argentina: Planeta. p. 234.

¹⁹⁹ Torres, Carlos. (2000). *La lógica matemática en el siglo XX*. Miscelánea Matemática, 31, p 72.

BIBLIOGRAFÍA

- Álvarez, Ana. (2005) *Forcing: otros mundos posibles*, en *Ciencias*, no.78, abril-junio. pp. 66-73. [Disponible en: <https://www.revistaciencias.unam.mx/images/stories/Articles/78/CNS07808.pdf>]
- Amor, José. (2000). “La teoría de conjuntos en el siglo XX” en *Miscelánea Matemática*, No.31.
- Amor, José. (2009). *Compacidad en la lógica de primer orden y su relación con el Teorema de la Completud*. México: UNAM
- Amor, J. (2011) *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*, México: UNAM.
- Arguedas Vernor. (2014). *Georg Cantor (1845-1918): la locura del infinito o el infinito de la locura*. *Matemática, Educación e Internet*, 14, 1-7.
- Atocha, Aliseda. (1999) “*Compacidad en la lógica de primer orden y su relación con el teorema de Completud*” en *CRÍTICA*, Revista Hispanoamericana de Filosofía Vol. XXXI, No. 93
- Barceló, Axel. *Sintaxis y semántica* Consultado el 12 de diciembre de 2017, del Sitio Web de la Universidad Autónoma de México: <http://www.filosoficas.unam.mx/~abarcelo/LMV/SSCurso.pdf>
- Barceló, Axel. (2015) “*Las tablas de verdad como filosofía*” en *Argumentos*, año 7, n. 13. p. 165-178.
- Britton, Jack. (2002) *Matemáticas contemporáneas*. México: Oxford México.
- Campos, Juan. 2006 “La lógica medieval y la enseñanza de la lógica”, en *La lámpara de Diógenes*, revista de filosofía, números 12 y 13.
- Campos, Juan. (2013). “Octágono medieval de oposición para oraciones con predicados cuantificados”, en *Tópicos*, No. 44, p. 177-205
- Campos, Juan. (2014). *Ensayos de filosofía y lógica novohispana del siglo XVI*. Porrúa
- Campos, Juan. (2007). “La conversión simple ordinaria y modal de las oraciones”, en *Revista de Filosofía*. Vol. 57, No. 3. pp. 53-72.
- Campos, Juan. Aristóteles “El cuadrado de Aristóteles, los cuadrados medievales y su absorción en el octágono de Buridan” en *Medievalia Americana Revista de la Red Latinoamericana de Filosofía Medieval*, Año 3, N. 2, diciembre 2016, pp. 321-343.
- Cantor, George. (2005) *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*. España: Crítica.
- Carrol, Lewis. (2013) *El juego de la lógica*. España: Alianza.
- Castro, I. (2003). “*Las paradojas en matemática*” en *Universitas Scientiarum*, vol. 8. pp. 25-37.
- Climent, Juan. (2010) *Teoría de conjuntos*. Consultado el 15 de mayo de 2016, del Sitio Web de la Universidad de Valencia: www.uv.es/~jkliment/Documentos/SetTheory.pc.pdf

Domínguez, Santiago. (2004) “Sobre los números naturales. Reales, imaginarios” Consultado el 05 de febrero de 2019, del Sitio Web de la Universidad Nacional Autónoma de México: <http://www.cienciorama.unam.mx/#!/titulo/316/?sobre-los-numeros-naturales--reales--imaginarios>

Fernández, Max. (1996) *Lógica Elemental*. México: Universidad Metropolitana.

Ferrater, José. (1992) *Lógica matemática*. México: FCE.

Flores, Conrado. (1985) *Conjuntos. Álgebra, estructuras y operaciones*. México: Trillas.

Frege, Gottlob. (1992) *Conceptografía* México: UNAM

Fuenlabrada, Samuel. (2007). *Aritmética y Álgebra*. Estados Unidos: McGraw Hill.

García, L. (2018) *Funderelele y más hallazgos de la lengua* México: Planeta.

Gödel, K. (2006) *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los principios mathematica y sistemas afines*. España: KRK

Goldstein, Rebecca. (2005) *Gödel: paradoja y vida*. España: Antoni Bosch.

Gómez, José. (2008). *Un paseo alrededor de la teoría de conjuntos*. La Gaceta de la RSME, 11, 45-96.

González, Wenceslao. (1988) *Aspectos metodológicos de la investigación científica*. España: Universidad de Murcia.

Grimaldi, Ralph. (1998) *Matemáticas discreta y combinatoria*, México: Addison Wesley.

Gutiérrez, Verónica. (2017) *Detrás de la noción de infinito. Sobre el problema de fundamentación de la matemática*. Tesis Licenciatura. Universidad de Valladolid.

Haack, S. (1982) *Filosofía de las lógicas*. España: Catedra.

Huertas, Antonia. (2002). *Teoría de conjuntos*. Consultado el 03 de abril de 2016, del Sitio Web de la Universidad Complutense de Madrid: <https://pendientedemigracion.ucm.es/info/pslogica/teoriakonjuntos.pdf>

Ivorra, Carlos. *Lógica y teoría de conjuntos* Consultado el 03 de abril de 2016, del Sitio Web de la Universidad Complutense de Madrid: <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica.pdf>

Jané, I. () *Labyrinth of Thought. A history of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. Consultado el 10 de octubre de 2019 en la sección de historia de la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española: <http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=179>

Jané, Ignacio. (1995) “Lógica de orden superior” en *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía. Vol.7* Editorial Trotta, España.

Mora, Rafael. (2016) *La evolución de la paradoja de las clases propuesta por Bertrand Russell*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Olivert, J. (1996). *Estructuras de álgebra multilineal*. España: Universidad de Valencia

Ortiz, Francisco. (2002) *Matemáticas 2 Álgebra y Funciones*, México: Patria.

Pérez, Álvaro, (-) *Lógica, conjuntos, relaciones y funciones* Publicaciones Electrónicas Sociedad Matemática Mexicana.

Pizcoya, Luis. (1997), *Lógica de predicados*, Consultado el 01 de febrero de 2019, del Sitio Web de la *Universidad Nacional Mayor de San Marcos*: http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/libros/filosofia/intro_logica/2_parte.pdf

Quesada, Daniel. (1995) “Lógica clásica de primer orden” en *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía*. Vol.7 Editorial Trotta, España

Quine, Willard. (2002). *Desde un punto de vista lógico*. España: Paidós.

Quine, Willard. (1970) *Filosofía de la lógica*, España: Alianza.

Quine, Willard. (1993) *Los métodos de la lógica*, Argentina: Planeta.

Redmond, Walter. (1999) *Lógica para todos*. México: Universidad Veracruzana

Romero, Leocadia. (1997). *Desarrollo histórico del concepto de límite*. España: Universidad de Murcia

Ruiz, Ángel. (2003) *Historia y filosofía de las matemáticas*. Costa Rica: UNED.

Ruiz, Marcos. (-) *Introducción a la lógica*. México: UANL

Salguero, Francisco. (1991) “Lo que hay y lo que no hay o Cómo estar a favor de Quine estando contra él” En: *Liber Amicorum Ángel Nepomuceno*. Santander: Fénix Editora.

Sirvent, Francisco. (2015) *Intuicionismo y formalismo en la filosofía de la matemática de I. Kant y D. Hilbert. Sobre función y significado de la intuición matemática*. Tesis de Doctorado. Universidad del País Vasco

Suppes, Patrick. (2013). *Introducción a la lógica matemática*. España: Reverté.

Stewart, Ian. (2008) *Historia de las matemáticas*. España: Crítica.

Tamariz, L. (2002) “Los infinitos” en *Revista Ciencias*, No. 68, México: Universidad Nacional Autónoma de México. p, 66-77.

Torres, Carlos. (2000). *La lógica matemática en el siglo XX*, en *Miscelánea Matemática*, no.31, pp.61-105.

Uzcátegui, Carlos. (2011) *Lógica, Conjuntos y Números*. Consultado el 10 de octubre de 2019 del sitio web del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Los Andes: http://www.matematica.ciens.ucv.ve/materias/files_materias/Elemento/01%20-%20L%F3gica%2C%20Conjuntos%20y%20N%FAmeros_Carlos%20Uzc%Eltegui%20%28ULA%202011%29.pdf

Ziauddin, S. (2005) *Matemáticas para todos*. España: Paidós.