



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

“GRAVEDAD UNIMODULAR COMO POSIBLE
EXPLICACIÓN A LA ACELERACIÓN DEL UNIVERSO”

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

André Valera Pérez

Asesorado por

Dr. Miguel Ángel García Aspeitia

Dra. Ana Aurelia Avilez López

Puebla Pue.
13 de Septiembre de 2021



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

“GRAVEDAD UNIMODULAR COMO POSIBLE
EXPLICACIÓN A LA ACELERACIÓN DEL UNIVERSO”

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

André Valera Pérez

Asesorado por

Dr. Miguel Ángel García Aspeitia

Dra. Ana Aurelia Avilez López

Puebla Pue.
13 de Septiembre de 2021

Título: "GRAVEDAD UNIMODULAR COMO POSIBLE
EXPLICACIÓN A LA ACELERACIÓN DEL UNIVERSO"
Estudiante: ANDRÉ VALERA PÉREZ

COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco
Torres del Castillo
Presidente

Dra. Iraís Rubalcava
García
Secretario

Dr. Alberto Hernández
Almada
Vocal

Dra. Mercedes Paulina
Velázquez Quesada
Vocal

Dra. Ana Aurelia Avilez
López
Asesor

Dr. Miguel Ángel García
Aspeitia
Asesor

"Lo que nos hace grandes es el hecho de que podamos ver lo pequeños que somos".

-Martí Montferrer

A mi familia: mis padres y mi hermana.

Agradecimientos

Esta tesis va dedicada a todas las personas importantes de mi vida. Agradecimientos a mi familia, a mis amigos, a mis grandes compañeros y a mis maestros. Será insuficiente resumir en pocas palabras mi aprecio a cada uno, pero haré un esfuerzo.

Mis dos grandes aficiones en la vida han sido las artes marciales y la ciencia, en especial la física y las matemáticas. Durante el camino de aprendizaje, he conocido grandes pilares de amistad y apoyo en estas dos partes de mí. Agradezco la enorme amistad de años, y el apoyo brindado por Osbaldo S. Santamaría López e Inés Jiménez Cuya; de mis años en la Universidad, gracias por las risas y la confianza de Manuel E. Hernandez Gonzalez, Maximiliano Limón Salazar y Laura Mateo Aquino. Ustedes son personas increíbles que estimaré y querré siempre.

A quien probablemente nunca lea esto, gracias por la inspiración a seguir mis sueños y mejorar; siempre formarás parte importante de mí. En la inmensidad del cosmos, dos seres coincidieron su existencia; en la brevedad de la vida, dos seres se separan; de las múltiples posibles realidades que existen, en al menos una pueden ser felices juntos. Has sido la persona más pura que he conocido.

Infinitos agradecimientos a mi familia, por siempre estar pendiente de mí y brindarme todo: a Socorro Pérez Güemez y a Alina Olavarria Pérez. Fabián Valera Rivera, mi maestro de vida a quien admiro enormemente, un papá genial, quien me guió con mis primeros pasos a amar la ciencia y en especial la física y las matemáticas; Lorena Pérez Güemes, la mejor mamá que alguien pueda tener, inigualable tu cariño y valores transmitidos, eres una persona que vale millones; Edith Valera Pérez, la sangre nos une como hermanos y las historias nos hacen los mejores hermanos, cada momento contigo es divertido, y sé que siempre podremos contar el uno con el otro. Los amo, y mi vida no sería la misma de no ser por su amor, su apoyo y sus enseñanzas.

Finalmente, agradezco a mi alma mater, la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, donde viví mis estudios en Bachillerato y Universidad, pasando por años llenos de experiencias tan variadas como emotivas que me han ayudado a crecer y definir mi camino a seguir. Agradezco las correcciones, de los miembros del comité revisor, que pulieron la tesis; gracias a sus estilos particulares de redacción, pude darme cuenta de varias cosas y aprender en el proceso. Por supuesto, la persona más importante a quien debo agradecer, y por quien ha sido posible esta tesis, mi Profesor Miguel Ángel García Aspeitia; no puedo expresar la gratitud y admiración por sus clases, sus consejos, su paciencia y su increíble personalidad, que hicieron amenos los meses durante la elaboración de esta tesis; sin duda es una persona única y llena de dedicación que siempre recordaré y agradeceré por ser quien me ayudó a culminar mis primeros pasos en este maravilloso mundo de la investigación en física.

Nunca me hubiera imaginado que el tiempo durante el desarrollo de esta tesis coincidiera con demasiados cambios en mi vida, que me resulta increíble las cosas que he aprendido a nivel personal y profesional. Pareciese la gran culminación de una vida, al ser inclusive la cosa más grande que he dedicado esfuerzo hasta ahora, sin duda. Pero tan solo es el comienzo de una aventura que, por primera vez en mi vida, no sé que esperar. Solo el tiempo lo dirá, aunque sería mejor estar preparado. Estén listos para brillar.

Palabras clave: Gravedad unimodular, cosmología, energía oscura.

Índice general

Introducción	XIII
1. Relatividad General	1
1.1. Contexto de Relatividad General	1
1.2. Herramientas Tensoriales de la Relatividad General	2
1.3. Ecuación de Campo de Einstein	3
2. Cosmología	5
2.1. Antecedentes de Cosmología	5
2.2. Principio Cosmológico	6
2.2.1. Factor de Escala	7
2.2.2. Parámetro de Hubble	8
2.3. Desarrollo Teórico de Cosmología	8
2.4. Energía Oscura	9
2.4.1. Ecuación de Estado	9
2.4.2. Ecuación de Aceleración	10
2.5. Densidades del Universo	12
2.6. Parámetros Cosmológicos	14
2.7. Edad e Historia del Universo	16
3. Cosmología de Gravedad Unimodular	19
3.1. Antecedentes de Gravedad Unimodular	19
3.2. Desarrollo Teórico del Campo de Einstein de Gravedad Unimodular	20
3.3. Desarrollo de Ecuación de Continuidad de Gravedad Unimodular	21
3.4. Discusión sobre Cosmología de Gravedad Unimodular	23
3.5. Ecuación de Friedmann Gravedad Unimodular	23
3.6. Forma del “Jerk”	24
3.7. Propuesta al Problema Planteado	25
3.8. Desarrollo de la forma del “Jerk” e implicaciones	26
3.8.1. Primer modelo: Materia	26
3.8.2. Segundo modelo: Materia y Radiación	27
3.8.3. Tercer modelo: Materia, Radiación y un Potencial	34
3.8.4. Resumen de los Tres Modelos y Forma General	38
3.9. Expresiones encontradas	40
3.10. Comprobación de modelo con datos de cronómetro cósmico	41
Conclusiones	45
A. Relatividad General	47
A.1. Construcción del Tensor de Riemann	47

B. Cosmología	49
B.1. Construcción del Tensor de Riemann y del escalar de Ricci a partir del elemento de línea FLRW	49
C. Cosmología de Gravedad Unimodular	53
C.1. Análisis de índices del Tensor de Energía-Momento para FLRW	53
C.2. Derivada contravariante de la ecuación de campo	54
C.3. Desarrollo de la derivada contravariante en FLRW	55
C.4. Desarrollo derivada parcial respecto al tiempo	56
C.5. Ecuación de continuidad	56
C.6. Integración de la variación de H^2 para obtener la ecuación de Friedmann	57
Bibliografía	59

Introducción

Esta tesis es realizada en el área de cosmología del modelo de Gravedad Unimodular, siendo el principal tema a tratar la energía oscura. La convención de unidades utilizada, a lo largo de esta tesis, es la de unidades naturales (unidades de Planck). Se dan por entendido los conceptos básicos, que no serán tratados aquí y pueden ser consultados en la literatura, sobre los antecedentes de Relatividad General, como son: la gravitación y la mecánica de Newton, la electrodinámica de Maxwell, la relatividad especial de Einstein, el lenguaje de geometría diferencial y el álgebra tensorial; los temas abordados, en los primeros dos capítulos introductorios, comenzarán desde las herramientas tensoriales para la construcción de las ecuaciones de campo de Einstein y para el desarrollo de su cosmología al construir las ecuaciones de Friedmann y de continuidad, por mencionar un par. En el capítulo de cosmología se explica el comportamiento de las densidades de energía del Universo y cómo logran modelar la evolución de éste, dando énfasis a estas variables sobre todas las demás debido a su importancia en la hipótesis de esta tesis, la cual funge como un primer acercamiento al modelo de energía oscura de Gravedad Unimodular; se cuenta la evolución térmica del Universo; se explica a más detalle el surgimiento de la idea de Constante Cosmológica y de las teorías alternas de Energía Oscura; se realiza el cálculo de la edad del Universo y su formulación, que será útil para los modelos presentados en el último capítulo sobre Gravedad Unimodular.

El meollo de esta tesis radica en la energía oscura, por lo que conviene contextualizar esta misma. Las observaciones de Supernovas tipo IA (1998) [1] indican que el Universo se encuentra en una etapa de aceleración que comienza en un “redshift” alrededor de $z = 0.7$, correspondiente al momento donde la Constante Cosmológica se vuelve dominante a las otras densidades del Universo. Normalmente se atribuye la expansión del Universo a esta Constante Cosmológica [2] que, a pesar de ser compatible con observaciones, no se termina de conocer su naturaleza; teniendo como principal problema una discrepancia entre su cálculo teórico y su observación de hasta 120 órdenes de magnitud. Debido a esto, se plantean diversos modelos que intentan explicar la aceleración del Universo [3], acuñando así el término de Energía Oscura al conjunto de los diversos modelos competitivos. Un enfoque novedoso surge con la teoría de Gravedad Unimodular, donde una aparente no conservación del tensor de energía momento [4] permite el estudio de las propiedades de una nueva energía oscura que puede resolver la gran discrepancia entre el cálculo teórico y la observación que presenta el modelo de Constante Cosmológica [5]. En el capítulo de Gravedad Unimodular se explica en qué consiste esta teoría, que permite mantener las bases de Relatividad General, alterándolas al restringir la métrica como no dinámica al fijar el determinante de la métrica a la unidad, haciendo así válidos solo los grupos invariantes que transformen dejando el determinante de la métrica sin cambios.

De la teoría, surge un parámetro “jerk”, con forma como la encontrada en [6], el cual depende las densidades de energía y sus factores de proporcionalidad; de esto último, surge la hipótesis de esta tesis que consiste en que las funciones del “jerk” con forma de combinación lineal de los factores de proporcionalidad de las densidades son soluciones de la ecuación de continuidad. Con esto, se propone formular la función de los “jerk” propuestos, analizar las implicaciones cosmológicas de las soluciones formuladas, comparar los modelos analizados entre sí, y contrastar los modelos obtenidos con datos de observaciones del Telescopio Hubble.

Capítulo 1

Relatividad General

1.1. Contexto de Relatividad General

A continuación se hará un breve resumen divulgativo para contextualizar la Relatividad General. Cualquier experto en el tema puede saltarse esta sección. Las personas principiantes, que busquen una explicación más detallada, pueden consultar: de [7] a [16] para consultar los antecedentes históricos y teóricos de la Relatividad Especial, así como el desarrollo y aplicaciones de la misma; [7, 8] y [17, 18] para los antecedentes y el desarrollo teórico de la geometría diferencial, y sus aplicaciones en la física.

El espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse, la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse [19]. En 1915, Albert Einstein presenta su teoría de Relatividad General, respaldada experimentalmente en 1919, por observaciones de deflexión de la luz, durante una expedición de Sir Arthur Eddington. La Relatividad General surge de incorporar la teoría de gravedad de Newton, cuya mecánica se basa en transformaciones de Galileo [7], a la dinámica impuesta por la Relatividad Especial, que se basa en la invariancia ante transformaciones de Lorentz. Esto último, debido a que la teoría electrodinámica de Maxwell, presentada en 1864, no satisface el principio de relatividad galileana, pero sí es invariante ante las transformaciones de Lorentz; Maxwell calculó una velocidad de propagación para las ondas electromagnéticas, en un supuesto éter luminífero, coincidente con el valor medido de la velocidad de la luz. La existencia de un éter luminífero era con el fin de conseguir las ecuaciones invariantes en marcos galileanos en reposo respecto al éter. Experimentos para detectar dicho éter fallaron, destacando el realizado por Michelson y Morley en 1887 [10]. Lorentz y Poincaré idearon un grupo de transformaciones para intentar responder la razón por la cual el éter no era detectable, estas transformaciones serían usadas por la Relatividad de Einstein en 1905. Einstein fue quien perfeccionó y entendió los conceptos físicos y matemáticos, creando así su teoría que tiene como principio mantener la velocidad de la luz como constante para cualquier observador y conservar toda ecuación física invariante ante transformaciones de Lorentz, manteniendo así la teoría de Maxwell [15]. Toda ecuación física, incluyendo la teoría de gravitación de Newton la cual, para incorporarse a la Relatividad de Einstein, debe modificarse en sus conceptos geométricos referentes al espacio. Para entender la trayectoria de los objetos en el espacio, hay que entender la geometría del mismo. La geometría euclídea, en la cual se basan todas las ecuaciones de movimiento antes de la Relatividad, se construye a partir de pocos axiomas y postulados [17]. Entre 1799 y 1844, Gauss y Riemann presentan trabajos de geometría no euclídea que se desarrollan a partir de la negación del quinto axioma de Euclides, el cual dice (en forma equivalente) que la suma de los ángulos internos de un triángulo suman dos ángulos rectos [7]. En 1854, Riemann presenta las bases de lo hoy en día conocido como Geometría Diferencial o Geometría de Riemann. Entre los conceptos que más destacan, para lo que ahora interesa, es que en la localidad de una variedad (con cierta curvatura propia de este espacio) se observa una geometría euclídea. Einstein encontró

en esto el enlace para la gravedad y su teoría de Relatividad: localmente la física de Relatividad General se reduce a Relatividad Especial. Así, se procede a desarrollar la teoría de Gravitación de Einstein mediante las herramientas tensoriales de la Geometría Diferencial, construyendo la relación entre energía y espacio-tiempo en las Ecuaciones de Campo de Einstein.

1.2. Herramientas Tensoriales de la Relatividad General

En esta sección se presentan algunos conceptos y herramientas básicas para la construcción usual de las ecuaciones de campo. Empezando con el tensor métrico denotado en la teoría como $g_{\mu\nu}$ y del cual, usando derivadas parciales del tensor métrico y el concepto de transporte paralelo se construyen las geodésicas, íntimamente relacionadas con los símbolos de Christoffel o conexión métrica. Se puede seguir con el transporte paralelo para construir la curvatura del espacio, pero en esta tesis se opta por un camino más fácil al usar un método que mide la diferencia al derivar un vector respecto a dos coordenadas, de forma que no es lo mismo (en un espacio no euclídeo) derivar respecto a una coordenada y luego respecto a otra, que derivar respecto a la segunda y luego respecto a la primera. De esta forma es que se contruye el tensor de curvatura, o tensor de Riemann, el cual es una función de los elementos de la métrica y sus derivadas espaciales y temporales (resultado que se puede ver en seguida). Con estos elementos es que Einstein pudo ver matemáticamente el Principio de Equivalencia con el cual se sostendría su teoría, dado que al trabajar con una métrica de Minkowski, el resto de resultados es cero y se puede trabajar con Relatividad Especial. En resumen, el procedimiento para obtener las herramientas es como sigue: se parte de una métrica de donde se obtiene el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, de donde al obtener sus derivadas parciales se construye la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, la cual al combinarla con derivadas parciales y productos con esta misma se construye el tensor de curvatura $R_{\rho\mu\nu}^\lambda$ (donde $R_{\rho\mu\nu}^\lambda =$ matriz 4×4 de matrices 4×4 , un tensor de rango 4). Antes se vio una forma de definir la métrica, pero también se puede escribir en términos de los elementos de la base: $g_{\mu\nu} := e_\mu \cdot e_\nu$ y de esto construir los símbolos de Christoffel [7], como:

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\eta e_\eta, \quad (1.1)$$

simétrico, i.e, $\Gamma_{\mu\nu}^\eta = \Gamma_{\nu\mu}^\eta$. Y al comparar la ecuación de una geodésica con la del transporte paralelo, se obtiene la relación entre la métrica y los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\gamma\delta}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\gamma g_{\beta\delta} + \partial_\delta g_{\beta\gamma} - \partial_\beta g_{\gamma\delta}). \quad (1.2)$$

Se desarrolla el tensor de Riemann partiendo de la métrica, usando la diferencia de segundas derivadas de un vector [12] (Ver Apéndice A.1):

$$R_{\eta\nu\mu}^\gamma = \partial_\nu \Gamma_{\eta\mu}^\gamma - \partial_\mu \Gamma_{\eta\nu}^\gamma + \Gamma_{\eta\mu}^\kappa \Gamma_{\kappa\nu}^\gamma - \Gamma_{\eta\nu}^\kappa \Gamma_{\kappa\mu}^\gamma. \quad (1.3)$$

Una propiedad del tensor de Riemann es que es antisimétrico al cambiar los primeros dos o los últimos dos índices: $R_{\eta\nu\mu}^\gamma = -R_{\eta\mu\nu}^\gamma$. También se define el tensor de Ricci, que es una contracción del tensor de Riemann:

$$R_{\eta\gamma\mu}^\gamma = R_{\eta\mu}. \quad (1.4)$$

Y la curvatura escalar se define como: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Será útil recordar las propiedades del símbolo de Levi-Civita [17]: $\epsilon_{ilm}\epsilon^{jkm} = \delta_i^j \delta_l^k - \delta_i^k \delta_l^j$, $\epsilon_{ilm}\epsilon^{jlm} = 2\delta_i^j$, $\epsilon_{ilm}\epsilon^{ilm} = 6$.

De relatividad especial, un fluido perfecto se define teniendo cada punto a una velocidad tal que un observador que se mueva con esta velocidad vea el fluido a su alrededor isótropo, cierto si el camino libre promedio entre colisiones es pequeño comparado con la escala de longitud dada por el observador [7]. Su tensor de energía momento toma la forma $T^{\mu j} = p\delta_{ij}$, $T'^{00} = \rho$ en coordenadas comóviles, siendo p y ρ la presión y densidad propia de energía que cumplen las transformaciones de Lorentz, entonces:

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)U^\mu U^\nu, \quad (1.5)$$

CAPÍTULO 1. RELATIVIDAD GENERAL
1.3. ECUACIÓN DE CAMPO DE EINSTEIN

siendo $U_\alpha U^\alpha = -1$, la normalización del vector cuadrivelocidad; donde $U^i = 0$ y $U^0 = 1$ heredado del sistema comóvil [12]. Su traza mantendrá 3 componentes de presión y 1 de energía bajo la métrica de Minkowski:

$$T = 3p - \rho. \quad (1.6)$$

Usando la ecuación para partículas interactuantes solo en puntos concretos [7], se obtiene $p = 1/3 \sum_{i=1}^3 T^{ii} = 1/3 \sum_N (p_N^2/E_N) \delta^3(x - x_n)$, $\rho = T^{00} = \sum_N E_N \delta^3(x - x_N)$, siendo $n = \sum_N \delta^3(x - x_n)$ la densidad numérica de partículas. De aquí sigue en general que

$$0 \leq p \leq \frac{\rho}{3}. \quad (1.7)$$

Un fluido perfecto puede incluir hasta una cantidad conservada, aparte de la presión y la densidad de energía, tal puede ser el número de densidad de partículas. Incluyendo este término, se obtienen valores dependientes de la entropía del sistema [17]. Además, se puede considerar fluidos imperfectos de los cuales se obtendrán términos pequeños referentes a los coeficientes de viscosidad [7].

Conviene mencionar la identidad de Bianchi [8]:

$$\nabla_\mu R_\nu^\mu = \frac{1}{2} \nabla_\nu R, \quad (1.8)$$

siendo también que: $\nabla_\mu g_{\mu\nu} = 0$. Es conveniente recordar que la derivada covariante de un tensor es [12]:

$$\nabla_\gamma T_{\mu\nu} = \partial_\gamma T_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\gamma}^\sigma T_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\gamma}^\delta T_{\mu\delta}, \quad (1.9)$$

por lo que, al multiplicar por la métrica para volver la derivada contravariante:

$$\nabla^\gamma T_{\mu\nu} = \partial^\gamma T_{\mu\nu} - g^{\gamma\rho} \Gamma_{\mu\rho}^\sigma T_{\sigma\nu} - g^{\gamma\rho} \Gamma_{\nu\rho}^\delta T_{\mu\delta}. \quad (1.10)$$

1.3. Ecuación de Campo de Einstein

Una vez construidas las herramientas, da paso a aplicarlas para construir una ecuación relacionada con la energía y que pueda describir la gravedad. Einstein supuso una relación proporcional entre el espacio-tiempo curvo, descrito por el tensor de curvatura, y la energía, descrita por el tensor de energía (el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ es una matriz 4×4 , un tensor de rango 2 que representa energía, densidad, presión, tensión), i.e., existe una relación entre la energía y el espacio-tiempo descrito por el tensor de curvatura $R_{\rho\mu\nu}^\lambda \leftrightarrow T_{\mu\nu}$, pero dado que el primero es un tensor de rango 4 y el segundo un tensor de rango 2, la relación debe ser mediante una contracción de $R_{\rho\mu\nu}^\lambda$ (como nota, el tensor de Riemann tiene 64 elementos, que al contraerse $\Rightarrow R_{\rho\nu} = \sum_\lambda R_{\rho\lambda\nu}^\lambda$ el tensor de Ricci, con 16 elementos, donde al contraerse con la métrica da como resultado $\Rightarrow R = R_\lambda^\lambda$ el escalar de curvatura de 1 elemento). Por lo que la relación entre espacio-tiempo y energía está dada por la proporcionalidad entre el tensor de Ricci y el de energía $R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$ [13]. Pero al derivar covariantemente la ecuación anterior, esta no da como resultado cero, implicando que el tensor de energía no se conservaba. Una mejor suposición a esta ecuación diferencial fue restar al tensor de Ricci un medio del tensor métrico multiplicado por el escalar de Ricci proporcional al tensor de energía, de forma que este nuevo tensor $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$ (siendo $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)Rg_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein) permite la conservación del tensor de energía. La constante k esta dada por el límite newtoniano [17] de curvatura plana $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ y velocidades muy pequeñas en comparación a la luz $v \ll 1$; por lo que se recupera $F = Gm_1m_2r^{-2}$ si $k = 8\pi G$, que es independiente de las masas, respondiendo así el porqué estas masa inercial y gravitacional son las mismas en la teoría de Newton, pues todo recae en la curvatura del espacio. Así es como Einstein pudo demostrar que la gravedad es una consecuencia de la curvatura del espacio y no es más que el trayecto que siguen los objetos en un espacio curvo, siendo congruente con el Principio de Equivalencia. Entonces:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.11)$$

CAPÍTULO 1. RELATIVIDAD GENERAL

1.3. ECUACIÓN DE CAMPO DE EINSTEIN

la ecuación de campo de Einstein. Hilbert, poco después, hallaría una forma de recuperar las ecuaciones de campo a través del principio de mínima acción [13]:

$$S = \int dtL = \int d^4x\mathcal{L}; \mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G}R + \mathcal{L}_{materia} \Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.12)$$

la acción de Einstein-Hilbert. De la ecuación de campo de Einstein se han obtenido cientos de distintas soluciones, aplicaciones y predicciones, entre ellas están: la precesión de la órbita de Mercurio y la deflexión de la luz, el “redshift” (corrimiento al rojo), los agujeros negros y sus singularidades, las ondas gravitacionales, y la cosmología, siendo esta última tema del siguiente capítulo.

Capítulo 2

Cosmología

2.1. Antecedentes de Cosmología

En 1912 Leavitt mide la relación entre la luminosidad y el periodo de cefeidas [7], siendo las de mayor luminosidad las que mayor período tienen; aunque no pudo encontrar la constante de proporcionalidad, su método fue mejorado en posteriores medidas, midiendo la distancia de pocas cefeidas por paralaje (método inicial para medición en la escalera cósmica), como las de Hertzsprung y Russell [15], generando los diagramas de Hertzsprung-Russell que mantienen una relación entre la luminosidad y su clasificación espectral; mediante la ley del inverso cuadrado $L = 4\pi d^2 f$ es como se logra obtener la distancia de las estrellas (a partir de sus valores aproximados en el diagrama Hertzsprung-Russell), generando el siguiente peldaño de la escalera cósmica. El último escalón de la escalera cósmica, por ahora conocido, son las candelas estándar extragalácticas: de los métodos más populares se encuentra la ley de Hubble y las Supernovas tipo IA. En 1925 Hubble hace observaciones de la forma espiral de las galaxias [11], y usando la ley de Leavitt logra calcular sus distancias.

De las ecuaciones de campo de Einstein se procede, como una aplicación de estas, a la Cosmología. En un principio, Einstein imaginaba el Universo como un espacio infinito y estático, quizás cayendo en el mismo engaño que Newton; de la Relatividad General, si el Universo tiene densidad uniforme entonces inevitablemente se expande o se contrae; así fue que Einstein incluyó un término constante a su ecuación $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ a manera que se igualara con la cantidad de materia en el Universo y lo mantuviera estático; a esta constante se le conoció como constante cosmológica [7]. Sin embargo, predicciones teóricas de Friedmann, Lemaître, Robertson y Walker (incluyendo trabajos de De Sitter) indicaban que ese caso tan particular debía estar regido por ecuaciones más generales, dependientes de una métrica en evolución con un Universo o bien, en expansión o en contracción; fue con las observaciones de Hubble, en 1929 [11], que se confirman estos modelos de evolución de un Universo en expansión, además de obtener la ley de Hubble $z = Hd$ (ver Figura 2.1, marcando esta relación en la gráfica de arriba); así es como la constante cosmológica desapareció por un tiempo y así nació a la cosmología. Con la llegada del concepto de un Universo evolutivo, surge la clasificación de densidades de energía y su evolución con la expansión del mismo: materia, radiación y alguna otra especie que explique la expansión del Universo. Pero no fue hasta 1998 con las observaciones de Supernovas IA [1], midiendo su corrimiento al rojo, que se notó que no solo se expande el Universo, sino que esta expansión es acelerada, concluyendo que algo oculto debía estar acelerando el Universo, regresando así la Constante Cosmológica (en la parte inferior de la Figura 2.1 se puede ver la relación de las densidades del Universo de acuerdo a mediciones de Supernovas). Las Supernovas IA (candela estándar) es la explosión de una enana blanca [8], la cual se debe a un par de estrellas: una enana blanca y una normal; la materia de la estrella normal es absorbida por la enana blanca, generando una masa, en esta última, más allá de donde la degeneración de

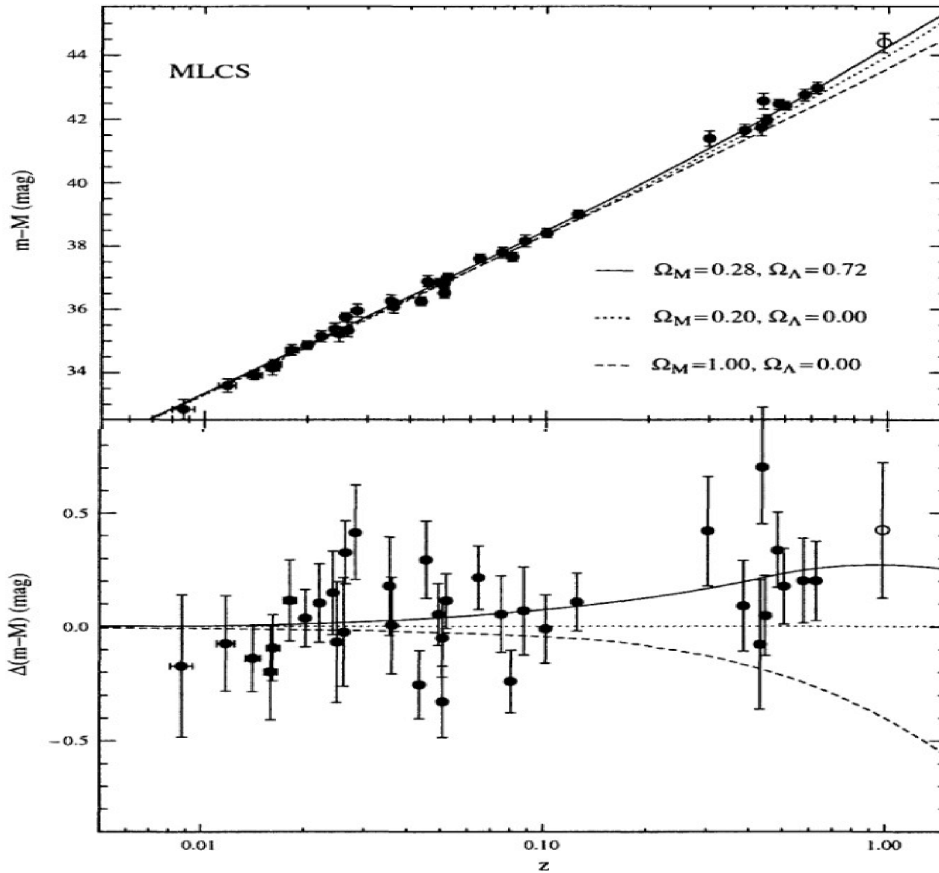


Figura 2.1: Diagrama de Hubble de supernovas distantes, magnitud contra “redshift” [20].

electrones no puede contrarrestar la fuerza gravitacional ocasionando un colapso hacia una estrella de neutrones (o un agujero negro) liberando tanta energía en el proceso [21]. El límite de masa se conoce como límite de Chandrasekhar, este indica que una enana blanca puede tener una máxima masa posible de 1.4 masas solares antes de colapsar en una estrella de neutrones o un agujero negro. Antes se conocían alrededor de 60 SIA, ahora se tiene un catálogo de alrededor de 1200 SIA.

2.2. Principio Cosmológico

Homogéneo e isótropo es el Universo Observable a grandes distancias. Eso es lo que dicta el Principio Cosmológico, siendo una de las bases en la construcción de la cosmología. Homogéneo significa que existe misma cantidad y distribución de algo (especies de densidad de energía, en cosmología) en un espacio (considerando el Universo una variedad, indica que la métrica es la misma sobre toda esta variedad) [8], e isótropo significa que todo se observa igual en todas direcciones. La idea es que el Universo se puede considerar uniforme, basandose en el principio Copernicano; es debido a este principio, que la isotropía observada implica homogeneidad [11], más no siempre una implica la otra. Existen matices en esta aseveración, puesto que en lo cotidiano (escala usual de percepción humana, o a nivel de laboratorio) no existen esas homogeneidades e isotropías que se mencionan, inclusive yendo a niveles estelares o galácticos se sigue viendo anisotropías; es posible que sea necesario analizar el principio cosmológico a más detalle [22], dado que se observan estructuras más grandes de lo permitidas por dicho principio (faltan más observaciones,

pues aún puede ser una coincidencia estadística de 4.5 sigmas). El principio cosmológico se aplica para escalas de 10^8 años luz en adelante [17], i.e., aproximadamente $300Mpc$. Existen factores dependientes de la expansión del Universo, que son consecuencia directa del principio cosmológico, y que se verán en las siguientes dos subsecciones.

2.2.1. Factor de Escala

El principio cosmológico y la expansión del Universo llevan al siguiente tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}; \quad (2.1)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala, siendo así la expansión lineal $dl_x = a(t)dx$, normalizada de forma que $a(t_0) = a_0 = 1$ en la actualidad [13]; siendo esta una proporción del cambio de las distancias al expandirse el Universo, a modo que $d_2/d_1 = a(t_2)/a(t_1)$ [17]. El término dl_x corresponde a una distancia física (o real) y el término dx a una distancia en coordenadas comóviles. En cosmología se utiliza el concepto de coordenada comóvil presentado en relatividad especial (el cuadrivector de una partícula en un sistema comóvil solo tendrá componente temporal, dado que ésta permanece en reposo respecto al marco comóvil); estas coordenadas siguen la expansión del Universo, de modo que dos puntos cuyo movimiento sea dominado por la expansión mantienen siempre las mismas coordenadas. El factor de escala es un parámetro que depende del tiempo, cuya proporción entre un factor de escala a un cierto tiempo final entre uno a tiempo inicial es la misma que la proporción entre distancias reales, útil para medir la expansión del Universo de manera escala sin preocuparse por los números. Debido a que la métrica del Universo debe seguir el Principio Cosmológico, se deben adoptar idealizaciones como [9]: el espacio-tiempo se puede seccionar en hipersuperficies a tiempos constantes que sean perfectamente homogéneas e isotropas; y que el marco de reposo de las galaxias este acorde a la definición de simultaneidad. El problema se simplifica al adoptar coordenadas comóviles, que adoptan una forma ortogonal [8]. Debido a que la expansión es isotrópica, el factor de escala se puede usar con total tranquilidad para indicar una expansión a una misma escala. Algo importante de aclarar es que la expansión es intrínseca, lo que quiere decir que no se expande dentro de algo más. También, se puede ver desde el Principio Cosmológico, no existe centro; lo que implica que la expansión ocurre en todos lados así como ocurrió en todos lados en su comienzo.

De forma útil se puede encontrar que $z + 1 = a_0/a(t)$, por lo que $a = (z + 1)^{-1}$. A diferencia del factor de escala que va de un valor cero a uno, el “redshift” z va de infinito a cero, siendo el “Big Bang” esta singularidad $z \rightarrow \infty$, y $z = 0$ el momento actual. Por lo mismo, existe una singularidad en $a(t) = 0$; esta singularidad se puede analizar igual que la tratada con agujeros negros: se encuentra que el término escalar de Kretschmann (recordando su utilidad para hallar singularidades dada una métrica) es $k = R_{abcd}R^{abcd} = 12a^{-4}[(a\ddot{a})^2 + \dot{a}^4]$, por lo que, para $a = 0$, k se indefine, es decir el Big Bang. También se puede remarcar que el desacoplamiento que produce el CMB abarca entre $z = 1000$ y $z = 1200$. Por observaciones de Supernovas IA [1], se encuentra que el Universo empieza una etapa de aceleración aproximadamente en $z = 0.7$, i.e., cuando la energía oscura se vuelve dominante.

Finalmente, es bueno introducir al parámetro de desaceleración q y al “jerk” j que surgen de una expansión en Taylor del factor de escala. Siendo el parámetro de desaceleración una función de la constante de Hubble en segundas derivadas del factor de escala y el “jerk” en terceras derivadas. Haciendo una expansión de Taylor del factor de escala:

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}\dddot{a}(t_0)(t - t_0)^3 + \dots, \quad (2.2)$$

y dividiendo todo entre $a(t_0)$ para obtener la constante de Hubble $H_0 = H(z_0)$ en primer orden:

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + j_0 H_0^3 (t - t_0)^3 + \dots, \quad (2.3)$$

siendo $q_0 = -\ddot{a}(t_0)(a(t_0)H_0^2)^{-1}$ el parámetro de desaceleración y $j_0 = \ddot{\ddot{a}}(t_0)(a(t_0)H_0^3)^{-1}$ el parámetro “jerk”, aunque en cosmología es más común usar el parámetro de desaceleración que el parámetro “jerk” (a diferencia de esta tesis que empleará j en el siguiente capítulo).

2.2.2. Parámetro de Hubble

El parámetro de Hubble $H = \dot{a}a^{-1}$ [16] es dependiente del factor de escala a ; a su vez, con este parámetro de Hubble, se logra definir la velocidad a la que se expande el Universo como el producto de este parámetro por la distancia entre dos puntos $v = Hd$, o $z = Hd$ en su forma más usual (siendo z el “redshift” mencionado anteriormente). En un inicio, este parámetro se podía obtener de mediciones directas de supernovas (subiendo en la escalera cósmica), siendo así una constante medida en $73.5 \pm 1.4[km/s/Mpc]$ [23]; sin embargo, tomando distancias mayores (bajando en la escalera cósmica; siendo el término de escalera cósmica la forma usual para referirse a las mediciones a distintas distancias en el Universo observable), se encuentra que este parámetro debe depender de las densidades del Universo, por lo que será dependiente del modelo y observaciones el valor de la constante de Hubble: $67.04 \pm 0.5[km/s/Mpc]$ en el modelo Λ CDM [24]. La diferencia entre mediciones y modelo se conoce como la crisis en cosmología, y con las mediciones de ondas gravitacionales se planea afrontar esta crisis, actualmente la medida es de $70 \pm 12.8[km/s/Mpc]$ [25] (pero dejando el terreno como estaba, debido al margen de error). Como sea, parece prometedor que el error no sea debido al modelo, sino a la calibración de medidas, tal como muestra la reciente calibración en el método TRGB (“Tip of the Red Giant Branch”) con datos de Gaia: $69.8 \pm 0.6(\text{estadístico}) \pm 1.6(\text{sistemático}) km s^{-1} Mpc^{-1}$ [26], medida ascendente en la escalera cósmica y acorde con el valor H_0 del modelo estándar.

En la siguiente sección se partirá como base lo visto hasta ahora en la tesis y se construirán las ecuaciones de Friedmann y la de continuidad, viendo así la construcción del parámetro de Hubble dependiente de las densidades del Universo. Más adelante en el capítulo, se analizará el comportamiento de las distintas densidades del Universo y la evolución de estas conforme el Universo se expande, así como el uso del parámetro de Hubble para calcular la Edad del Universo (que será de ayuda para acotar valores del modelo estudiado en el Capítulo 3); se verá brevemente la necesidad de una Constante Cosmológica y algunos de los modelos de Energía Oscura que intentan explicar la expansión del Universo.

2.3. Desarrollo Teórico de Cosmología

Para aplicaciones de cosmología se deben considerar tres ingredientes [16]: El principio cosmológico, que lleva a una métrica especial que incluye el factor de escala; el postulado de Weyl, que requiere que el Universo se comporte como un fluido perfecto; y la relatividad general representada por la ecuación de Einstein. El elemento de línea Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), del tensor métrico (2.1), se define como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) dx^i dx^j. \quad (2.4)$$

Para el espacio plano tipo FLRW, se puede calcular las componentes del tensor de Ricci y su escalar (ver Apéndice B.1):

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\delta_{ij} \quad y \quad R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]. \quad (2.5)$$

Luego, tomando la notación de Weinberg de (1.11): $R_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - 1/2g_{\mu\nu}T)$; y considerando la ecuación de un fluido perfecto (1.5) y (1.6), se obtiene la ecuación de Friedmann, de la cual se puede sustituir el parámetro de Hubble en ella. Sustituyendo en (2.5) temporal, se tiene que: $3\ddot{a}/a = -8\pi G(T_{00} - (1/2)g_{00}T)$, siendo $T_{00} = pg_{00} + (p + \rho)U_0U_0$ y $T = 3p + \rho$; por lo que $3\ddot{a}/a = -8\pi G[(1/2)\rho + (3/2)p]$, o bien:

$$3\ddot{a} = -4\pi G[3p + \rho]a. \quad (2.6)$$

Cabe señalar que basta con sustituir una métrica general en el tensor de energía de un fluido perfecto de Relatividad Especial (antes mencionado), aunque más detalle de su construcción adecuada y de los conceptos se encuentra en [27]. Mismo procedimiento para (2.5) espacial y se obtiene:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\ddot{a}}{a} + 4\pi G(p + \rho). \quad (2.7)$$

Sustituyendo (2.6) en (2.7), se obtiene la Ecuación de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (2.8)$$

dependiente de las densidades de energía en su forma general $\rho = \rho_m + \rho_r$; siendo materia compuesta por materia bariónica y materia oscura y radiación por fotones y neutrinos (a las densidades de energía se les dedicará una sección entera más adelante); nótese que esta ecuación de Friedmann surge de una ecuación de campo sin una constante cosmológica Λ , cuya inclusión en la ecuación de Friedmann haría sumar un ρ_Λ (asociado a la constante cosmológica en el modelo estándar) a ρ , y la cual es importante introducir una vez se presente la ecuación de aceleración de la siguiente sección.

Si la derivada covariante del tensor de energía es cero $\nabla_\alpha T_{\mu\alpha} = 0$, entonces la Ecuación de continuidad se define como la derivada temporal de la densidad más tres veces la constante de Hubble por la suma de la presión y la densidad igual a cero, la derivada explícita de (1.6) (toda Ecuación de campo tiene asociada una Ecuación de Continuidad):

$$\sum_i [\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + p_i)] = 0, \quad (2.9)$$

con el índice i corriendo para las distintas especies existentes en el Universo.

2.4. Energía Oscura

2.4.1. Ecuación de Estado

De los análisis estadísticos de Bose-Einstein y de Fermi-Dirac se obtiene la ecuación de estado $p = \rho\omega$, la cual indica que la presión de un gas ideal (fluido perfecto en cosmología) es proporcional a su densidad y el parámetro que los iguala debe ser $\omega = 1/3$ (para gas de fotones, radiación en cosmología) y $\omega = 0$ (para gas de fermiones, materia en cosmología). En cosmología, esta ecuación de estado es aplicable para un fluido barotrópico [28], término dado de un sistema isentrópico de entropía $s = s(p, \rho)$ constante [29], conocido como barotrópico si se cumple que $p = p(\rho)$, e isotérmico, además, si ω es constante. Más aún, $0 \leq \omega \leq 1$ (aunque en casos especiales se puede $\omega < 0$ sin violación del principio fuerte de energía [16]) para mantener la primer ley de termodinámica (la cual puede ser obtenida a partir de la ecuación de continuidad [27]). En esta tesis, se llamará parámetro de proporción (de densidad de energía) a ω , aunque en la literatura se encuentra como energía de fluido o trabajo de fluido [29].

2.4.2. Ecuación de Aceleración

Derivando (2.8) y sustituyendo en (2.9) se obtiene la ecuación de Raychaudhuri o ecuación de aceleración:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G \left(p + \frac{\rho}{3} \right); \quad (2.10)$$

con esta ecuación se analiza la aceleración del Universo. Nótese que el lado izquierdo de la ecuación puede ser mayor, menor o igual a 0, dependiendo de las variables ρ y ω (al sustituir la ecuación de estado) del lado derecho de la ecuación. Estas dos variables corresponden, en un primer acercamiento, a materia y radiación; sin embargo, aunque el resultado general depende de todas las densidades de energía, el estudio se realiza para las especies de forma individual.

Variable ρ

En el análisis de la variable ω se presentará la constante cosmológica como fuente de una expansión acelerada, más desde aquí se puede ver que para hacer que el lado izquierdo de (2.10) reproduzca los tres casos antes mencionados ($<, >, = 0$) es necesario incluir una nueva densidad de energía $\rho_\Lambda \propto \Lambda$. El valor de Λ determinará la evolución del Universo, siendo este primer caso estudiado en la fila II de la Figura 2.2; de esta misma fila, (i) alberga el caso de la constante cosmológica y (ii) el caso de las ecuaciones de campo sin constante cosmológica (luego de los descubrimientos de Hubble y antes de las observaciones de un Universo con expansión acelerada).

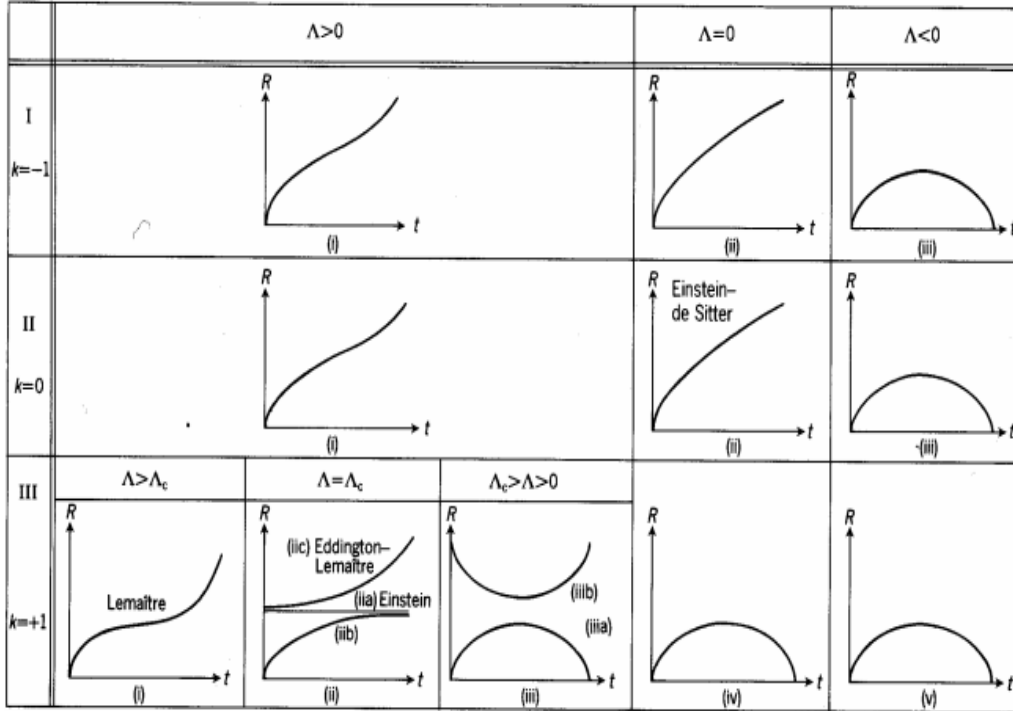


Figura 2.2: Evolución del Universo distancia contra tiempo, para valores de curvatura k y de energía oscura Λ [16]

Para estudiar las filas I y III se debe ver un caso aún más completo de (2.8). En la ecuación de Friedmann se puede incluir un término dependiente de la curvatura del Universo, el cual sumaría k/a^2 en el escalar de Ricci y restaría el mismo en la ecuación de Friedmann: $H^2 = (8/3)\pi G\rho - k/a^2$ [8]; siendo ρ general que puede, o no, incluir Λ (el caso donde no se incluye es en la columna $\Lambda = 0$).

Esta curvatura surge del hecho de un espacio uniforme, lo que lleva a la conclusión de que debe tener curvatura constante la cual puede ser positiva, negativa o cero [16]; el último caso ya fue estudiado arriba, el de curvatura positiva corresponde a la fila III y el de curvatura negativa a la fila I. Dependiendo de los valores de curvatura k o de energía oscura Λ , el Universo puede evolucionar de distintas formas (Ver Figura 2.2): expandirse eternamente a distintos ritmos, o expandirse y contraerse.

Variable ω

De igual forma que para la variable ρ , la variable ω resultaba constante a forma de no afectar el análisis, ahora se invierten los papeles y se buscan los casos que definen a esta. Como las observables son de un Universo en expansión acelerada, el lado izquierdo de la ecuación de Raychaudhuri debe ser mayor a cero $\ddot{a}a^{-1} > 0$, por lo cual la presión debe ser menor a menos un tercio de la densidad $p < -\rho/3$, $\omega = -1/3!!$; pero esto es contradictorio pues las soluciones de la constante de proporcionalidad no son negativas, ya que esto viola el principio de conservación de energía. Cabe notar que la constante cosmológica, como energía del vacío, satisface dicha condición para la cual $\omega = -1$ [30]. El término hallado de $\omega = -1/3$, sustituido en la ecuación de Friedmann, corresponde a un valor crítico Λ_c que permite un Universo estático, tal como Einstein lo deseaba.

El término Λ se agrega a mano en la ecuación de Einstein, y estará asociado a la expansión acelerada del Universo; pero es importante hacer una aclaración, debido a un abuso de lenguaje: el parámetro Λ se refiere a todo lo asociado con la expansión acelerada del Universo (como se ha visto hasta ahora), y su valor cambiará conforme evoluciona el Universo. Esto último se puede ver del desarrollo en la ecuación de continuidad, reescrita como $\dot{\rho} = -3H\rho(1 + \omega)$ al sustituir la ecuación de estado, y donde $H = \dot{a}/a$; así, sustituyendo este último y haciendo los pasos necesarios para quitar las diferenciales de tiempo:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{da}{a}, \quad (2.11)$$

que al integrar

$$\ln(\rho) = -3(1 + \omega)\ln(a) + c; \quad (2.12)$$

siendo esto último

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.13)$$

Así, al tomar la densidad de energía del vacío ρ_Λ , la Λ tomará distintos valores dependiendo del valor que tome su ω en la ecuación de estado. El caso particular de la constante cosmológica $\omega = -1$ hace que coincida $\Lambda = \Lambda_0$, por lo que es entendible la confusión al nombrar Λ a la constante cosmológica y, a su vez, a la energía oscura; pero, al conjunto de estas distintas Λ se les conoce como energía oscura y, de no ser que el tema tratado sea constante cosmológica, en esta tesis se tratará el caso general. A continuación se mostrarán los distintos casos de ω y los modelos que generan, tanto de energía oscura como de destino final del Universo.

- $\omega_\Lambda = -1$ permite una energía oscura constante. A esto, está asociada la constante cosmológica. Aprovechando que ya se ha llegado a este punto, es necesario mencionar que existe una incongruencia entre el cálculo teórico y la observación al asociar una energía del vacío a esta constante cosmológica. En realidad, no es tan fácil poner un valor a la Constante Cosmológica, pues cualquier cosa que contribuya a la densidad del vacío (campos cuánticos en general) puede actuar como una Λ [2]. Cuando se calcula el valor esperado de la densidad de energía oscura y se compara con el valor observado, se encuentra un enorme error de más de 118 órdenes de magnitud. El valor observado ya se esperaba por la teoría de Relatividad General que debía tener un valor máximo en Λ_c , por lo que $\Omega_\Lambda \leq (8\pi G\rho_{0\Lambda})/(3H_0^2)$, con un valor medido $\rho_\Lambda \approx 10^{-47} GeV^4$. El valor teórico se obtiene a partir de calcular el valor esperado de la energía de vacío correspondiente a teorías supersimétricas a partir del formalismo de

teoría cuántica de campos:

$$\langle \rho \rangle = \int_0^\lambda \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2} \approx \frac{\lambda^4}{16\pi^2}, \quad (2.14)$$

siendo $\lambda \approx (8\pi G)^{-1/2}$, así $\langle \rho \rangle \approx 2 \times 10^{71} \text{GeV}^4$.

El destino del Universo que provoca esta constante cosmológica se conoce como “Big Freeze” (Gran Congelamiento, o muerte térmica), siendo que la expansión continúa por siempre haciendo que los sistemas eventualmente queden aislados y su energía se disperse en la inmensidad del espacio teniendo un final térmico.

- $\omega_\Lambda < -1$ genera energía oscura que aumenta su densidad con la evolución del Universo. La energía oscura tipo “phantom” (fantasma, nombre dado por sus propiedades tan sorprendentes) cumple esta propiedad. Es causante del “Big Rip” (Gran Desgarro), debido a que su aceleración es tan abrupta que termina por separar no solo sistemas estelares como en la constante cosmológica, sino inclusive la estructura fundamental de la materia.
- $\omega_\Lambda > -1$ genera energía oscura que disminuye su densidad con la evolución del Universo. Existen distintos modelos que cumplen esta propiedad, e.g. energía oscura quinta esencia (“quintessence” en inglés) que es un campo cuántico escalar [13] asociado a esta presión negativa y que disminuye con el tiempo, disminuyendo con ello la expansión del Universo. Si $\Lambda > \Lambda_c$ se permiten Universos que se expanden por un periodo de tiempo, y terminan por contraerse, estos modelos son causa del “Big Crunch” (Gran Colapso) que incluye Universos cíclicos; existen otros modelos, como los modelos asociados a campos cuánticos surgidos de la idea de Universos cíclicos que dan pie al “Big Bounce” (Gran Rebote), donde debido a las fluctuaciones cuánticas del Universo se puede generar un nuevo “Big Bang” (Gran Explosión) y reiniciar con otro Universo.

Recientemente se presentaron resultados de la colaboración DES (“Dark Energy Survey Year 3”) que presenta valor de $\omega_\Lambda = -0.98_{-0.2}^{+0.32}$ [31] en contraste con el valor aceptado anteriormente $\omega_\Lambda = -1.031_{-0.379}^{+0.218}$ [32].

2.5. Densidades del Universo

De la ecuación de estado $p = \omega\rho$, se analizan los tres casos más estudiados en cosmología de la constante de proporcionalidad ω , se encuentra materia, radiación y vacío con valores cero, un tercio y menos uno respectivamente [30]. Sustituyendo en la Ecuación de Continuidad, se obtienen las ecuaciones respectivas a cada especie de densidad en el Universo dependientes del factor de escala, o de forma general (2.13): $\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}$ [8]. Los parámetros de densidad $\Omega_0 \propto \rho_0$ pueden ser arbitrarias dependiendo el tiempo inicial que se considere y se mida, o del modelo que se estudie. Además, se puede sustituir la expresión encontrada $\rho(a)$ en la ecuación de Friedmann, y hallar una relación $a(t)$ para cada densidad dominante.

1. Materia: la constituyen partículas que se mueven lentamente ($v \ll 1$), entonces de $E = m \Rightarrow \rho = mn$; n es la densidad numérica (partículas por volumen). $n \propto a^{-3} \Rightarrow \rho_m \propto a^{-3}$. La materia oscura y bariónica tienen un $\omega = 0$ tipo polvo $\Rightarrow p = 0$ y de (2.9):

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \Rightarrow \rho_m = \rho_{0m}a^{-3}. \quad (2.15)$$

Sustituyendo (2.15) en (2.8) y desarrollando para el factor de escala, se encuentra al integrar que:

$$a = \left[\frac{3}{2} \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_{0m}} \right]^{2/3} t^{2/3}. \quad (2.16)$$

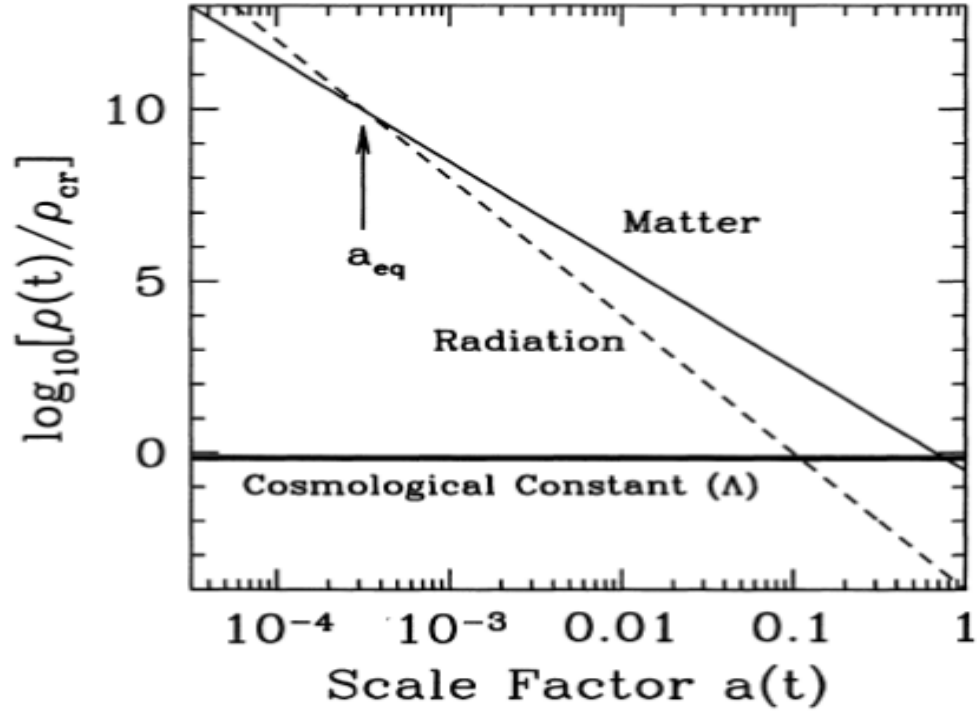


Figura 2.3: Evolución del Universo de las especies de densidad del Universo (en escala \log_{10} y en forma adimensional de parámetro cosmológico) contra factor de escala [20]

- Radiación: la constituyen partículas livianas (masa nula o casi nula) moviéndose a velocidades relativistas cercanas a las de la luz (o igual a la luz). Se sabe, para fotones, que la longitud de onda debe ser proporcional al factor de escala $\lambda \propto a$; por lo que su frecuencia será proporcional al recíproco del factor de escala $\nu \propto \lambda^{-1} \propto a^{-1}$ y su energía será $E = h\nu \propto a^{-1}$. Por lo que $\rho_r = E_\rho n \propto a^{-1}a^{-3} \Rightarrow \rho_r \propto a^{-4}$. Luego, para un gas de fotones (aplicable también para un gas de fermiones relativista, en específico los neutrinos) se obtiene que $\omega = 1/3$ (del análisis de física estadística [20]) tipo radiación. Y de (2.9):

$$\dot{\rho} + 4H\rho = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -4\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \rho_r = \rho_{0r}a^{-4}, \quad (2.17)$$

incluido neutrinos por masa pequeña. En los inicios del Universo la radiación era dominante. Sustituyendo (2.17) en (2.8) y desarrollando para el factor de escala, luego de integrar se tiene que:

$$a = \left[2\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_{0r}} \right]^{1/2} t^{1/2}. \quad (2.18)$$

- Energía del vacío: lo constituye toda energía oscura, pero en este análisis se considera la constante cosmológica con $\omega = -1 \Rightarrow p = -\rho$, a modo que al sustituir en (2.9), se obtiene una constante:

$$\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \rho = \rho_{0\Lambda}. \quad (2.19)$$

Sustituyendo (2.19) en (2.8) y desarrollando para el factor de escala, después de integrar se obtiene:

$$a = \exp \left[\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_{0\Lambda}} t \right]; \quad (2.20)$$

o bien, $a = e^{H_0 t}$. Luego, $\dot{a} = H_0 e^{H_0 t} = H_0 a$; siendo H_0 una constante, indicando que el Universo se expande aceleradamente.

Las tres densidades comparadas evolucionan conforme se expande el universo como en la Figura 2.3. Y la expansión del Universo con sus distintas etapas de dominación de las especies de

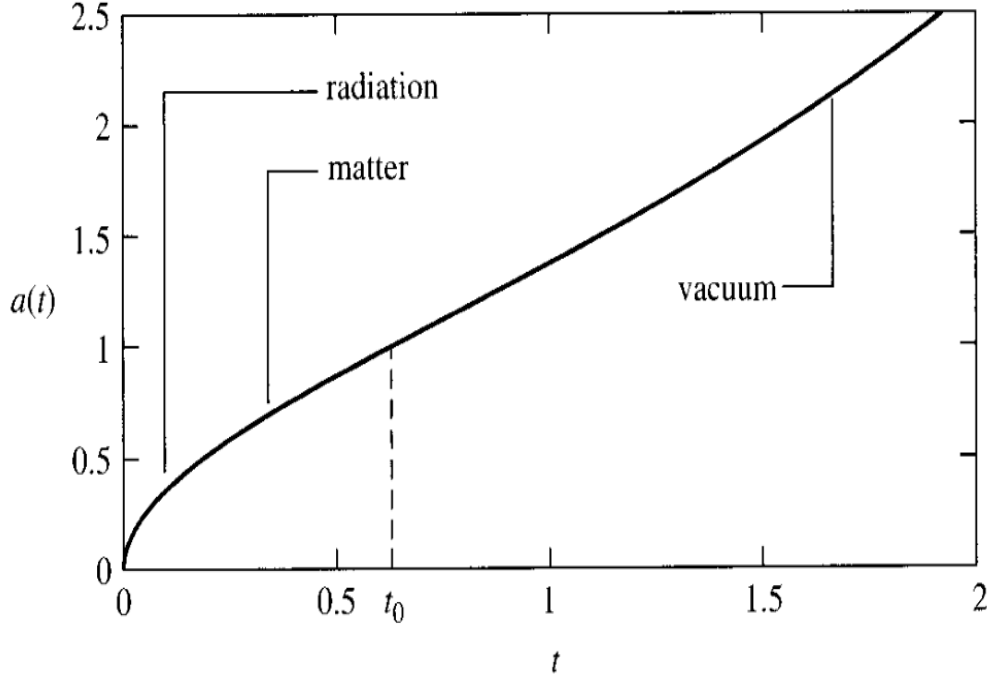


Figura 2.4: Evolución del factor de escala respecto al tiempo, se marcan los instantes en que cada especie es dominante respectivamente [15]

densidades como en la Figura 2.4.

2.6. Parámetros Cosmológicos

Es útil definir una densidad crítica del Universo de la siguiente forma $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$, de modo que al dividir las densidades de todas las especies por esta densidad crítica, se obtienen los parámetros de densidad del Universo $\Omega(t) = \rho(t)/\rho_c$. Luego, sustituyendo en la ecuación de Friedmann (2.8), se encuentra una constricción: $1 = (8\pi G/3H^2)[\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda] = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda$. Y al sustituir la forma $a(z)$, antes mencionada en la subsección de factor de escala, se obtiene la ecuación de Friedmann adimensional:

$$E^2(z) \equiv \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{0r}(z+1)^4 + \Omega_{0m}(z+1)^3 + \Omega_{0\Lambda}; \quad (2.21)$$

con valores, inferidos de las observaciones, de los parámetros [6]: $\Omega_{0m} = 0.315$, $\Omega_{0r} = 9.07 \times 10^{-5}$, $\Omega_{0\Lambda} = 0.685$ y $H_0 = 67.8 \text{ km}(s \cdot \text{Mpc})^{-1}$. Algo que se puede mencionar, es la transformación del parámetro de desaceleración; de la ecuación de Friedmann adimensional (2.21) se encuentra que:

$$q(z) = \frac{z+1}{E(z)} \frac{dE(z)}{dz} - 1, \quad (2.22)$$

pero es más fácil medir $E(z)^2$ que $E(z)$, por lo que $dE(z)^2/dz = 2E(z) \cdot dE(z)/dz$ para:

$$q(z) = \frac{z+1}{2E(z)^2} \frac{dE(z)^2}{dz} - 1; \quad (2.23)$$

y al sustituir las especies de densidad, se tiene:

$$q(z) = \frac{z+1}{2E(z)^2} \cdot (4\Omega_{0r}(z+1)^3 + 3\Omega_{0m}(z+1)^2) - 1 = \quad (2.24)$$

$$(2E(z)^2)^{-1} (4\Omega_{0r}(z+1)^4 + 3\Omega_{0m}(z+1)^3) - 1.$$

Los valores de los parámetros de densidades del Universo se obtienen de las BAO (“Barionic Acoustic Oscillations”, Oscilaciones Acústicas Bariónicas) observadas del CMB (“Cosmic Microwave Background”, Fondo Cósmico de Microondas). La idea se basa en que el Universo no es perfectamente homogéneo, notable si se toma escalas de $\partial\rho(x)\rho^{-1} \approx 10^{-5}$, teniendo irregularidades propias de la composición inicial de densidades de energía en el Universo y su naturaleza caótica aún incomprensible (ver [20] para un análisis más profundo que incluye el efecto de cada parámetro). Estas pequeñas perturbaciones primordiales crecieron debido a inestabilidades gravitacionales; estas perturbaciones de densidad son (aproximadamente) libres de escala. Las perturbaciones lograron dejar marca conforme el Universo evolucionaba, y pueden ser observadas en el CMB; para una mejor medición, se puede asociar $\partial\rho/\rho \Rightarrow \partial T/T$. Como primera suposición, siguiendo el Principio Cosmológico, se esperaría que el resultado de graficar $\partial T/T$ contra la escala de distancia usada (yendo de lo más grande a lo pequeño) sea una función constante, esto porque el Principio Cosmológico supone un Universo liso (libre de perturbaciones). Sin embargo, la evolución de las perturbaciones genera oscilaciones que se puede caracterizar en tres situaciones (este caso queda graficado por una especie de función de Bessel, aunque la Figura 2.5 mantiene la misma información y por eso se usa como ilustración):

1. Primero ocurre una inestabilidad gravitacional, i.e, regiones demasiado densas que se contraen. En la Figura 2.5 se representa por la pendiente positiva en las oscilaciones.
2. Las regiones contraídas se calientan y se recuperan (lo que se conoce como oscilaciones acústicas), i.e, se vuelven a expandir. En la Figura 2.5 se representa por las crestas y pendientes negativas en las oscilaciones.
3. Las perturbaciones enmudecen porque la radiación fluye entre ellas. En la figura 2.5 se representan por los valles en las oscilaciones.

Dando como resultado una especie de oscilador armónico amortiguado (una función de Bessel), debido a que las perturbaciones a escalas más grandes evolucionan más lentamente que las pequeñas por la densidad de energía acumulada, siendo así que en escalas más grandes existan oscilaciones más grandes pero en menor cantidad y en escalas más pequeñas haya oscilaciones más pequeñas en mayor cantidad; las escalas más grandes, en la escala de medición, no tienen oscilaciones debido a que son más grandes que el Universo primitivo y no tiene tiempo de propagar una oscilación acústica. Es importante recalcar que en esta segunda grafica esperada, solo se supone la interacción de materia bariónica y radiación. Entonces, teniendo esta nueva suposición, se hacen observaciones en el CMB y se encuentra que los picos de las oscilaciones no presentan un comportamiento perfecto a una oscilación amortiguada esperada: se observa que las oscilaciones impares se expanden más de lo esperado y las pares se suprimen más de lo esperado (Ver Figura 2.5). La explicación a esto es que alguna, o las tres etapas de evolución de las oscilaciones están siendo afectadas por alguna partícula neutra (que no interactúa con la radiación o con la materia bariónica, más que posiblemente de forma gravitacional en la última), que solo contribuye en la contracción o en la expansión de los bariones, i.e, se debe incluir materia y energía oscura. La cantidad de cada especie se determina de la diferencia entre picos del modelo que solo considera materia bariónica y las observados BAO. Con los datos proporcionados de [33], se puede deducir un inventario de densidades del Universo:

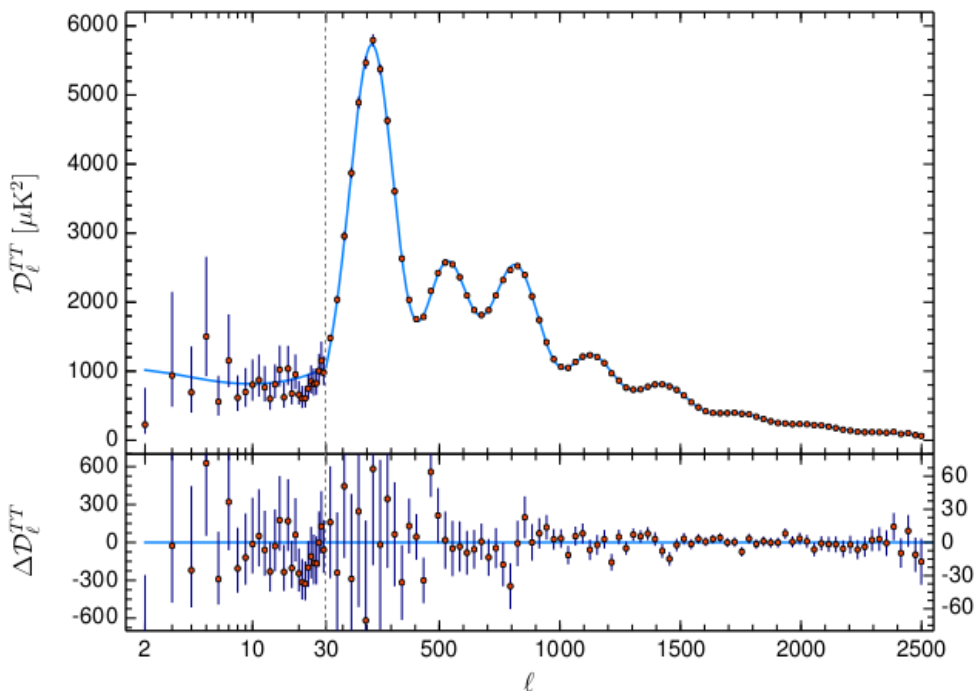


Figura 2.5: Visualización de los picos acústicos de la radiación cósmica de fondo [33].

- 5% Materia Bariónica,
- 10^{-4} % Radiación,
- 26% Materia Oscura,
- 69% Energía Oscura.

2.7. Edad e Historia del Universo

Es de notar que al moverse los fotones por el espacio, su energía disminuirá (debido al corrimiento al rojo gravitacional) conforme el Universo se expanda, haciendo así la densidad de energía de la radiación dependiente de la expansión y muy útil para medir la temperatura T del Universo la cual evolucionará como el inverso del factor de escala. De la estadística de Bose-Einstein para fotones y de la ecuación de continuidad se puede obtener que: $\rho_{0r}a^{-4} = (\pi^2/15)T^4$. Siendo así que $T = (15\rho_{0r}/\pi^2)^{1/4} a^{-1}$. O bien, se encuentra que $T(t) = T_0a(t)^{-1}$, siendo la temperatura actual $T_0 = 2.725K$ [20]. A continuación se presenta la historia térmica del Universo, siendo T la temperatura (dada en $[K] \approx 10^{-4}[eV]$ [30]) y t el tiempo, donde se representan las diferentes etapas de la historia del Universo a diferentes escalas de energía:

- $T > 10^{15}K$ ($t < 10^{-10}s$): a esta escala, la física que describe el Universo en este rango de energía se encuentra abierta a especulaciones [30]; sin embargo, existen modelos bastante aceptados a nivel teórico. La era de Planck ocurre en $T > 10^{32}K$ ($t < 10^{-43}s$) [13]: el Universo se encuentra lleno de plasma de partículas relativistas elementales y quizás más allá del Modelo Estándar de Partículas fuera de la física conocida. Para $10^{-43}s < t < 10^{-33}s$ ocurre una época de inflación, ocurriendo la bariogénesis en $t = 10^{-35}s$. En $T \approx 10^{27}K$

($t \approx 10^{-35}$) se aplican los modelos de Gran Unificación, aunque la inflación es una predicción de estos modelos. La era del quark y la del hadrón ocurren entre $10^{-33}s < t < 10^{-26}s$ y $10^{-26}s < t < 10^{-6}s$ respectivamente, siendo la era electrodébil comprendida entre estas $10^{-33}s < t < 10^{-10}s$;

- $T \approx 10^{15}K$ ($t \approx 10^{-10}s$): ocurre el rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil por el mecanismo de Higgs;
- $T \approx 10^{13}K$ (1 GeV, $t \approx 10^{-6}s$): durante la era del hadrón, sucede confinamiento de quarks y gluones haciendo fuerte la teoría de cromodinámica cuántica, en este momento se crean los protones y neutrones. A pesar de que se hayan confinado los quarks en bariones y mesones, la dominancia en materia era leptónica, comprendiendo la época del leptón $10^{-6}s < t < 10s$;
- $T \approx 5 \times 10^{11}K$ (50 MeV, $4 \cdot 10^{-4}s$): la fuerte interacción entre bariones y mesones hace difícil el estudio de temperaturas superiores a esta [7], para $T \approx 1.3 \times 10^{11}K$ ($t \approx 10^{-3}s$) la energía no es suficiente para generar pares muon-antimuon, y comienza su aniquilación (cuando $T > 2m$, ocurre la aniquilación de las especies del Universo; siendo m la masa respectiva a cada fermión) y el desacoplamiento de los neutrinos de las demás partículas;
- $T \approx 10^6 eV$: para la escala de 0.5 MeV (4 s) existe la aniquilación positrón-electrón liberando radiación, manteniendo el Universo con radiación dominante;
- $10^{10}K > T > 10^4K$ (1 s < t < 720 s) [13]: la Nucleosíntesis del Big Bang tiene lugar haciendo que protones y neutrones se junten apareciendo así los primeros núcleos de Deuterios, Helio y Litio;
- $T \approx 3000K$ (300 000 años): finalmente ocurre la recombinación del hidrógeno, generando los primeros átomos juntando núcleos y electrones. Durante toda esta etapa, los fotones se encuentran altamente acoplados debido a la dispersión de Compton, y es al final de la recombinación que los fotones quedan liberados, haciendo así el Universo transparente y formando el CMB que se observa hoy en día. La época de reionización ocurre entre los 300 mil y 400 mil años luego del “Big Bang”.

Finalmente, es necesario calcular la edad del Universo para verificar consistencia de los modelos a tiempos tardíos. En la sección anterior, sobre densidades del Universo, se mencionó el valor de la constante de Hubble. Lo que sigue es calcular el tiempo de Hubble: $t_H = H_0^{-1} \approx 4.55 \times 10^{17}[s] \approx 14.43 \times 10^9$ [años], cercano (por menos de mil millones de años) al valor de la edad del Universo de 13.7 Giga años. A partir de la ecuación de Friedmann, se despeja de un lado lo dependiente del factor de escala y del otro del tiempo explícito. Se integra y se obtiene el valor de la edad del Universo. La integral (nombrada A en el siguiente capítulo) será un factor de ajuste para t_H , y se integrará de 0 a 1, debido a que tiene como variable al factor de escala $a(t)$. Considerando la constricción de Friedmann: $1 = \Omega_\gamma + \Omega_\nu + \Omega_b + \Omega_{DM} + \Omega_\Lambda$ (es una constricción más detallada, donde $\Omega_\gamma + \Omega_\nu = \Omega_r$ radiación y $\Omega_b + \Omega_{DM} = \Omega_m$ materia), si solo se tomase un Universo de materia, entonces: $a \propto t^{2/3}$ y $\dot{a} \propto (2/3)t^{-1/3} \Rightarrow H = (2/3)t^{-1} \Rightarrow t_0 = (2/3)t_H$, sustituyendo t_H se encuentra $t_0 = 9.62$ mil millones de años; aunque se observan estrellas de 10 mil millones de años de edad [34] y el nacimiento de las primeras estrellas se estima más allá de los 13 mil millones de años [35]. Por lo tanto, es necesario incluir a la energía oscura: $H^2 = (8/3)\pi G(\rho_m + \rho_\Lambda)$, por lo que $H^2 = H_0^2[\Omega_{0m}a^{-3} + \Omega_{0\Lambda}]$. Separando de un lado lo referente al factor de escala y de los parámetros de densidad, y del otro del tiempo, se tiene que:

$$t_0 = t_H \frac{2 \ln(\sqrt{\Omega_\Lambda a^3 + \Omega_m} + \sqrt{\Omega_\Lambda} a^{3/2})}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \Big|_0^1; \quad (2.25)$$

luego $t_0 = 13.72 \times 10^9$ años. Y este valor se ajustará mejor al incluir radiación, pero no cambiará mucho debido a que es subdominante (para un Universo tardío); lo que puede afectar más es el valor

CAPÍTULO 2. COSMOLOGÍA

2.7. EDAD E HISTORIA DEL UNIVERSO

de la constante de Hubble. Estudios recientes ubican la edad del Universo en unos $13.770^{+0.310}_{-0.280}$ mil millones de años [36] (edad y error calculados del $H_0 = 67.9 \pm 1.5 \text{ km}(\text{sMpc})^{-1}$ dados por el artículo). La edad del Universo servirá en el siguiente capítulo para acotar los parámetros de los modelos propuestos ahí, pero también para el modelo de materia se deberá modificar el factor de ajuste A para reproducir la teoría de Gravedad Unimodular.

Capítulo 3

Cosmología de Gravedad Unimodular

3.1. Antecedentes de Gravedad Unimodular

En sus inicios, la Gravedad Unimodular se rastrea como una idea de Einstein [5] en la cual todo funciona tal como Relatividad General salvo por una condición unimodular que implica o establece que las ecuaciones de Einstein no tengan traza. Gravedad Unimodular surge como una forma de resolver la incongruencia de la constante cosmológica entre su valor observado y el calculado, discutidos en el capítulo anterior. Existen varias formas de afrontar el problema de la constante cosmológica [37], haciendo énfasis en que lo siguiente se trata de hipótesis al no conocer la naturaleza misma de la energía oscura o una teoría de gravedad cuántica:

1. otros grados de libertad que modelan la energía oscura podrían contribuir con energía negativa que permita reducir el valor esperado de la energía oscura hasta el observado;
2. el valor de la energía oscura, inferido por las observaciones, es un caso especial de un conjunto de valores en un multiverso;
3. la teoría cuántica de campos no es relevante en la formación de estructuras, de distribución de materia y geometría espacial, a escalas cósmicas: por lo que las ecuaciones de Einstein, y en específico la constante cosmológica, no deben tomar a consideración los campos cuánticos en sus cálculos;
4. las ecuaciones de Einstein no son las correctas y deberá existir unas mejores ecuaciones, para describir las interacciones gravitacionales, surgida de una teoría completa de gravedad cuántica, negando los efectos gravitacionales del vacío.

La forma de enfrentar el problema de la constante cosmológica escogida por Gravedad Unimodular es la cuarta de la lista anterior, alterando las ecuaciones de Einstein al imponer la condición de que el tensor de energía momento sea invariante ante una transformación $T_{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$ [12]; siendo Λ una constante, consiguiendo lo que se conoce como las ecuaciones de Einstein libres de traza. Lo anterior implica que cualquier potencial de energía, incluyendo energía del vacío proveniente de campos, quedan desacoplados de las ecuaciones gravitacionales; como sea, la derivada del campo escalar potencial aparece en las ecuaciones de materia y sigue afectando en la evolución del espacio-tiempo [5]. Las ecuaciones de movimiento obtenidas de Gravedad Unimodular tienen las mismas predicciones experimentales que las obtenidas a nivel clásico por Relatividad General, sin ser alterada esta equivalencia por correcciones de orden superior [38]; por lo tanto, la cosmología de Gravedad Unimodular resulta degenerada con la cosmología de Relatividad General en presencia de una constante cosmológica, así, ambas teorías son indistinguibles en observaciones de Hubble y en la mayoría de observaciones de energía oscura [37]. A lo largo de este capítulo se desarrollarán

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR
3.2. DESARROLLO TEÓRICO DEL CAMPO DE EINSTEIN DE GRAVEDAD UNIMODULAR

las ecuaciones de Einstein, modificadas para la métrica, de la teoría de Gravedad Unimodular, siguiendo con un desarrollo de la cosmología de estas y de la realización de los objetivos de la tesis a través de tres modelos: modelo de materia, modelo de radiación y un modelo general que incluye dos casos; se concluye el capítulo comparando el modelo de materia con Datos Observacionales de Hubble (“Observational Hubble Data”, OHD) y la comparación con los otros dos modelos.

3.2. Desarrollo Teórico del Campo de Einstein de Gravedad Unimodular

A continuación se realiza un análisis a partir de la acción, imponiendo la condición unimodular, y con ello obtener la ecuación de campo de la teoría. Tomando como inspiración [6], y siguiendo el procedimiento de [38] (de donde se puede revisar cualquier detalle que aquí se omita). El espacio de Gravedad Unimodular puede considerarse (al medirse) a un conteo de los modulos que lo componen, lo que indica que tiene una estructura modular debajo del límite de resolución en los instrumentos de medida actuales. Por esto, se define un campo de medida μ , que se interpreta como el número de modulos microscópicos en un volumen, y que esta sujeto a ningún desarrollo dinámico; bajo coordenadas unimodulares $\mu(x) = 1$. También se define, un tensor simétrico $f_{\mu\nu}(x)$ de peso 1/2, signatura 1–3 y determinante -1 en todo sistema de coordenadas, con 9 componentes independientes definidos por el sistema de trayectorias de la luz tal que $f_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$; esta es la única variable estructural sujeta a ecuaciones dinámicas, y juega el papel del tensor métrico en esta teoría:

$$g_{\mu\nu} = \sqrt{\mu} f_{\mu\nu}(x), \quad (3.1)$$

con determinante

$$-g := \det g_{\mu\nu} = -\mu^2, \quad (3.2)$$

conocida como la condición unimodular. En Relatividad General, esta condición se conocería como condición "gauge" (traducción ambigua como norma), más en Gravedad Unimodular esta depende de los eventos en el volumen y no puede ser considerada como una restricción. Se puede obtener las ecuaciones de campo de gravedad unimodular a partir de la acción:

$$S = \int d^4x \left(\frac{\Gamma}{2} R + \mathcal{L}_M \right); \quad (3.3)$$

siendo $\Gamma = 1/4\pi G$, R el escalar de Ricci calculado de la métrica unimodular y \mathcal{L}_M el lagrangiano de densidad de materia en presencia de $g_{\mu\nu} = \sqrt{\mu} f_{\mu\nu}$. Agregar un término $\Lambda \sqrt{g}$ no aplica debido a que $\sqrt{g} = \mu$ no varia; en general, los términos que expresan la condición unimodular rompen la covariancia general. De la misma forma, S no es invariante en la forma funcional porque μ es constante y genera una escala absoluta a cada evento. Por esto se introducen variedades que permiten esta invariancia al considerar $g \neq \mu^2$, de donde se debe transformar $S \rightarrow S'$ al agregar un multiplicador de lagrange λ , fijado por la condición unimodular, que expresa la condición unimodular y al agregar arbitrariamente un termino corrector sujeto a desaparecer en el sector unimodular al variar respecto al multiplicador de lagrange. Luego de un análisis (que se puede ver más detallado en el artículo original), se obtiene que:

$$S' = \int \sqrt{g(x)} d^4x \left[\frac{\Gamma}{2} R(x) + \frac{\Gamma}{2} \lambda(x) \left[\frac{\mu(x)}{\sqrt{g(x)}} - 1 \right] + \mathcal{L}_M + \Delta_M \mathcal{L} \right], \quad (3.4)$$

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR

3.3. DESARROLLO DE ECUACIÓN DE CONTINUIDAD DE GRAVEDAD UNIMODULAR

donde la variación de λ en S' recupera la condición $\sqrt{g(x)} = \mu(x)$, y $\Delta_M \mathcal{L}$ desaparece cuando la condición unimodular permanece. Luego, la variación de $g_{\mu\nu}$ de S' da las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \delta S' &= \int \sqrt{g} d^4x \left[\Gamma \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - R^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} \Gamma \lambda g^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} \\ &+ \int \sqrt{g} d^4x \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} (\sqrt{g} \mathcal{L}_M + \sqrt{g} \Delta_M \mathcal{L}) \right] \delta g_{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Lo que indica que

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - \frac{1}{2} \lambda g^{\mu\nu} = 8\pi G T'^{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

y

$$T'^{\mu\nu} := \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} (\sqrt{g} \mathcal{L}_M + \sqrt{g} \Delta_M \mathcal{L}). \quad (3.7)$$

De la ecuación (3.6) se obtiene la traza y con esto se obtiene el valor de

$$\lambda = -\frac{1}{2} (8\pi G T' + R). \quad (3.8)$$

Sustituyendo, se tiene que

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = 8\pi G T'^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} (8\pi G T' + R). \quad (3.9)$$

Simplificando y bajando índices

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T'_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

donde

$$T'_{\mu\nu} = T'_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} T'. \quad (3.11)$$

Véase que $T'^{\mu\nu}$ no es covariantemente continua porque en general S' no es covariante. Pero $T'^{\mu\nu}$ es ambiguo por un término aditivo

$$\Delta T'^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} l_M, \quad (3.12)$$

y su traza es ambigua por

$$\Delta T' = -2l_M. \quad (3.13)$$

Por lo que, de acuerdo a [38], sustituyendo en (3.10), se obtiene

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T'_{\mu\nu}, \quad (3.14)$$

con $T'_{\mu\nu}$ covariantemente continua (el tensor de tensión-energía del campo de materia).

3.3. Desarrollo de Ecuación de Continuidad de Gravedad Unimodular

Ahora, con la ecuación de campo, se analizará la cosmología de Gravedad Unimodular restringida a una métrica FLRW. Cambiando la forma obtenida a la notación de Weinberg y desarrollando hasta obtener la ecuación de continuidad. Entonces, se vuelve a la ecuación (3.9) y se sustituye por los tensores sin primar (por el tensor de tensión-energía):

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} (8\pi G T + R), \quad (3.15)$$

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR

3.3. DESARROLLO DE ECUACIÓN DE CONTINUIDAD DE GRAVEDAD UNIMODULAR

o bien

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - 8\pi GT_{\mu\nu} = - \left(\frac{1}{4}R + 2\pi GT \right) g_{\mu\nu}. \quad (3.16)$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones del tensor de energía momento de un fluido perfecto (1.5), (1.6), y las del tensor de Ricci para una métrica de Friedmann (2.5) en (3.16):

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] - 8\pi G [pg_{\mu\nu} + (p + \rho)u_\mu u_\nu] = \\ - \left(\frac{1}{4}6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 2\pi G [3p - \rho] \right) g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Analizando índices de (3.17), se obtiene (ver Apéndice C.1):

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 4\pi G [p + \rho]. \quad (3.18)$$

Usando el hecho de que $\dot{H} = \ddot{a}/a - H^2$, (3.18) se reescribe:

$$\dot{H} = -4\pi G [p + \rho]. \quad (3.19)$$

Por otra parte, a la ecuación (3.16), derivándola entera de manera contravariante, y usando la identidad de Bianchi (recordando que se está usando una signatura $\{-, +, +, +\}$) (Ver Apéndice C.2):

$$\frac{1}{4}\nabla_\nu(R + 8\pi GT) = 8\pi G\nabla^\mu T_{\mu\nu}. \quad (3.20)$$

Sustituyendo nuevamente (1.5), (1.6) y (2.5), se tiene que:

$$\frac{1}{4}\nabla_\nu \left(6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 8\pi G[3p - \rho] \right) = 8\pi G\nabla^\mu [pg_{\mu\nu} + (p + \rho)u_\mu u_\nu]. \quad (3.21)$$

Desarrollando la derivada contravariante (Ver Apéndice C.3):

$$\nabla_\nu \left(6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 8\pi G[3p - \rho] \right) = -32\pi G \left(\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}[\rho + p] \right). \quad (3.22)$$

Ahora son funciones escalares y no tensores, por lo que la derivada covariante ahora será una parcial. Sea $\nu = 0$, que es la que dará información interesante. También se usa $p/\rho = \omega$ y se pone todo en términos de H (Ver Apéndice C.4):

$$\frac{3}{16\pi G} \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + H [\dot{H} + H^2] - 2H^3 + \frac{4\pi G}{3}[3\omega - 1]\dot{\rho} \right] = -\dot{\rho} - 3H[\rho + p]. \quad (3.23)$$

Sustituyendo (3.19) en (3.23) y definiendo $\ddot{a}(t)/a(t) = jH^3$ el parámetro ‘‘Jerk’’, introducido en el capítulo anterior de la expansión de Taylor del factor de escala, se obtiene la ecuación de continuidad (ver Apéndice C.5):

$$-\frac{H^3[j - 1]}{4\pi G(1 + \omega)} = \dot{\rho} + 3\rho H. \quad (3.24)$$

Nótese que el lado izquierdo, de la ecuación de continuidad, funge como una fuente de algo que hace violar la conservación de energía; las ecuaciones de Relatividad General no indican de forma explícita lo anterior, aunque la constante cosmológica genera una violación de este principio, es de la diferencia en la simetría entre Relatividad General y Gravedad Unimodular que esta última sí dice de forma explícita la no conservación del tensor de energía.

3.4. Discusión sobre Cosmología de Gravedad Unimodular

Recapitulando, la Gravedad Unimodular se identifica por no poseer una traza en las ecuaciones de campo. Esto implica que no existirá una conservación covariante del tensor de energía momento, haciendo que la solución a estas implique un término de energía oscura que no está acoplado al tensor de densidad métrico (no gravita, en el sentido anglosajón del término), dado que su origen resulta de la integración y no como un término impuesto. El valor aún depende de las observaciones, pero su naturaleza afecta de manera distinta la evolución del Universo. Que el término de energía oscura surja de manera geométrica, ayuda a resolver el problema de la constante cosmológica [5]; no explica el porqué posee este valor, pero ayuda con la gran incongruencia que existe en otros modelos de hasta 120 ordenes de diferencia. Una forma de relacionar Relatividad General y Gravedad Unimodular es tomando (3.16) y notando que el lado izquierdo son las ecuaciones de campo usuales y el derecho es el término extra de Gravedad Unimodular: la constante de integración surgida de integrar la derivada covariante de los tensores libres de traza $\hat{G}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/4Rg_{\mu\nu}$ y $\hat{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - 1/4Tg_{\mu\nu}$, dando como resultado de la integración $R + 8\pi GT = 4\Lambda$ una constante [37]; este caso es particular, dado que la condición unimodular viola la covariancia del tensor de energía momento; este caso particular (y los propuestos más adelante en la tesis) impone la violación de la condición unimodular para mantener la covariancia del tensor de energía momento. Otra forma de ver esto es definiendo $J_\mu \equiv 8\pi G\nabla^\nu T_{\mu\nu}$ y suponiendo la integrabilidad de Gravedad Unimodular $dJ = 0$, y usando las identidades de Bianchi, se reproduce las ecuaciones de Einstein con un término de energía oscura [39]: $G_{\mu\nu} - 8\pi GT_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}$, siendo $\Lambda = \Lambda_0 + \int_l J$. Es de notar que en la expresión anterior, la violación de la energía de J es una fuente a un término de la Ecuación de Einstein que satisface la ecuación de estado de la energía oscura; además, de cumplirse la conservación de energía en J , i.e. $J = 0$, se recuperan las ecuaciones de campo usuales para la constante cosmológica. La gravedad y la cuántica poseen grandes problemas para encajar, uno de ellos es la energía oscura; el modelo de gravedad unimodular podría a resolver esto debido a que la violación de la conservación del tensor de energía-momento admitiría una descripción más fundamental de los grados de libertad de una gravedad cuántica [40].

Uno de los elementos prometedores para el desarrollo de estos mencionados grados de libertad en gravedad cuántica, se encuentra en la forma de este nuevo término “jerk” introducido en (3.24), con una nueva apariencia comparada con el de Relatividad General (cuyo valor es 1); esta nueva forma puede ser constante también, pero destaca su dependencia en las densidades de energía ρ , de modo que se pueden considerar distintos modelos para este parámetro, dependiendo de las especies que se tomen en cuenta. En un principio es preferente mantenerlo lo más simple posible, tomando en cuenta la materia y radiación (siendo la materia dominante a radiación) únicamente; posteriormente se podrían agregar más términos, con el fin de ganar más precisión y predicción, siempre y cuando se pueda reproducir los modelos ya observados y aceptados de Λ CDM (el modelo estándar de cosmología). Con esto en mente, se puede seguir analizando para encontrar los “jerk” que reproduzcan la expansión del Universo, de los cuales determinar si existe un único “jerk” o una familia de soluciones y su forma.

3.5. Ecuación de Friedmann Gravedad Unimodular

Continuando con el análisis, se despeja de la ecuación de continuidad de Gravedad Unimodular la densidad y se continua hasta encontrar la Ecuación de Friedmann de Gravedad Unimodular, la cual tiene la suma de la Ecuación de Friedmann usual de Relatividad General y un término correctivo de la teoría de Gravedad Unimodular en forma de una integral y un término constante dado por el factor de proporción de densidad y la ecuación de Friedmann usual. Es de recordar que al sustituir las ecuaciones del tensor de energía y del tensor de Ricci en la ecuación de Campo de Gravedad Unimodular se obtiene la ecuación (3.19) que debería ser la ecuación de Friedmann de este modelo, pero al no tener una forma usual de H^2 (la cual se puede medir) es que se busca

esta forma a partir de la ecuación de continuidad de Gravedad Unimodular. Entonces, despejando ρ de la ecuación de continuidad (3.24):

$$-\frac{H^2[j-1]}{12\pi G(1+\omega)} - \frac{\dot{\rho}}{3H} = \rho, \quad (3.25)$$

y sustituyendo en (3.19) escrita en términos de ω y ρ :

$$\dot{H} = -4\pi G[\omega+1] \left(-\frac{H^2[j-1]}{12\pi G(1+\omega)} - \frac{\dot{\rho}}{3H} \right); \quad (3.26)$$

que al desarrollarse se obtiene

$$\dot{H} = \frac{H^2[j-1]}{3} + 4\pi G[\omega+1] \frac{\dot{\rho}}{3H}. \quad (3.27)$$

De esta ecuación se quiere obtener de nuevo H^2 , pero esta se denotará como una H_{GU}^2 obtenida por Gravedad Unimodular. Nótese que $2H\dot{H} = d/dt(H^2)$, así que se multiplica (3.27) por $2H$:

$$\frac{d}{dt}H^2 = \frac{2H^3[j-1]}{3} + \frac{8\pi G\dot{\rho}[\omega+1]}{3}. \quad (3.28)$$

De modo que al integrar, se obtiene la ecuación de Friedmann (ver Apéndice C.6):

$$H_{GU}^2 = \frac{8\pi G\rho[\omega+1]}{3} + \frac{2}{3} \int \frac{H^2[j-1]}{a} da. \quad (3.29)$$

3.6. Forma del “Jerk”

Buscando la forma del jerk, se reescribe la ecuación de continuidad (3.24), recordando que $\rho = \rho(a)$:

$$-\frac{H^3[j-1]}{4\pi G(1+\omega)} = \frac{d\rho}{da}\dot{a} + 3\rho H; \quad (3.30)$$

se divide todo entre a , seguido de H

$$-\frac{H^2[j-1]}{4\pi Ga(1+\omega)} = \frac{d\rho}{da} + 3\frac{\rho}{a}, \quad (3.31)$$

se multiplica todo por $-(8/3)\pi G$

$$\frac{2}{3} \frac{H^2[j-1]}{a} = -\frac{8}{3}\pi G(1+\omega) \left[\frac{d\rho}{da} + 3\frac{\rho}{a} \right], \quad (3.32)$$

luego, realizando las operaciones adecuadas, se agrega un da a toda la ecuación y se integra

$$\frac{2}{3} \int \frac{H^2[j-1]}{a} da = -\frac{8}{3}\pi G(1+\omega) \left[\int d\rho + 3 \int \frac{\rho}{a} da \right], \quad (3.33)$$

notando que se puede acomodar la ecuación a manera de recuperar del lado izquierdo la ecuación de Friedmann (3.29)

$$H_{UG}^2 = -8\pi G(1+\omega) \int \frac{\rho}{a} da. \quad (3.34)$$

Luego, de (3.34) se derivará respecto a a y se despeja j , que bien devuelve a la ecuación (3.32), de donde al despejar j se obtiene:

$$-\frac{4\pi G(1+\omega)}{H^2} \left[3\rho + a \frac{d\rho}{da} \right] + 1 = j. \quad (3.35)$$

Se busca un comportamiento tipo $\rho = \rho_0 a^n$, por lo que al sustituir este ρ en la ecuación (3.35), se obtiene:

$$j = -\frac{4\pi G(1+\omega)}{H^2} [3+n] \rho_0 a^n + 1. \quad (3.36)$$

Se compara esta forma hallada con la del artículo [6], siendo entonces que se sospecha n debe ser menos cuatro, lo que indica que heredaría de la ecuación los términos de radiación.

3.7. Propuesta al Problema Planteado

Como contribución, se sustituyen las distintas especies de densidades, siendo estas solo materia y radiación con el fin de hacer surgir la energía oscura de forma natural de las ecuaciones y no como un término impuesto a mano (sea el caso de la constante cosmológica), en la ecuación de continuidad de Gravedad Unimodular y se supone recuperar la ecuación de continuidad de Relatividad General con el fin de encontrar una solución a la forma del “jerk” y poder desarrollar la cosmología de esta. Del resultado de este análisis, se obtiene una ecuación solución a la forma del “jerk” dependiendo de las ω_i correspondientes a cada especie considerada; se proponen algunas exploraciones para estas ω_i y densidades ρ_i asociadas:

- considerar solamente materia, dado que radiación es subdominante;
- considerar una combinación lineal de materia y radiación, usando una variable primero igual a uno y luego general;
- considerar una densidad extra, potencial, asociado un factor de proporcionalidad y hacer una combinación lineal de las tres especies;
- finalmente, una ecuación general que reproduzca todos los modelos.

Luego de la primer interacción, se llega a la misma conclusión que el artículo de García-Aspeitia [6] de que el “jerk” debe heredar los términos de radiación sin que esto implique que la energía oscura sea radiación. Luego, para cada exploración, se despejará el “jerk” y se hará el análisis de la ecuación de Friedmann y de las densidades asociadas con la energía oscura. Entonces, volviendo a la idea de recuperar la ecuación de continuidad usual para resolver la forma del “jerk”, se hace el término extra de la ecuación de continuidad de Gravedad Unimodular igual al producto de la constante de Hubble y la densidad de radiación, esto como resultado de lo a continuación expuesto. Recordando, las ecuaciones de Gravedad Unimodular llevan a una aparente no conservación de energía $\nabla^\mu T_{\mu\nu} \neq 0$, de donde explícitamente se obtiene la ecuación (3.24): $\sum_i [(\dot{\rho}_i + 3H\rho_i) = [H^3(1-j)]/[4\pi G(1+\omega_i)]]$. Es de recordar también que, en Relatividad General, se tiene la ecuación de continuidad (2.9): $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$; donde $\omega_m = 0 \Rightarrow p = 0$ tipo polvo, por lo que $\dot{\rho} + 3H\rho = 0$ para materia y $\omega_r = \frac{1}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{3}\rho$ obteniendo $\dot{\rho} + 4H\rho = 0$ para radiación (ecuaciones usadas en la sección correspondiente a las Densidades del Universo). Entonces, al solo considerar materia y radiación (por la razón antes expuesta), y sustituir en la ecuación de continuidad de Gravedad Unimodular (3.24):

$$(\dot{\rho}_m + 3H\rho_m) + \left(\dot{\rho}_r + 3H\rho_r - \frac{H^3(1-j)}{4\pi G(1+\omega_i)} \right) = 0, \quad (3.37)$$

siendo así, la expresión que devuelve la ecuación de continuidad de Relatividad General es:

$$-\frac{H^3(1-j)}{4\pi G(1+\omega_i)} = H\rho_r, \quad (3.38)$$

i.e., es intuitivo que para recuperar la Ecuación de Continuidad de Relatividad General (obtenida por la suma de todas las especies de densidad): $(\dot{\rho}_m + 3H\rho_m) + (\dot{\rho}_r + 4H\rho_r) = 0$, se tenga que cumplir la ecuación (3.38). A esta ecuación (3.38) se le llamará en adelante ecuación solución.

3.8. Desarrollo de la forma del “Jerk” e implicaciones

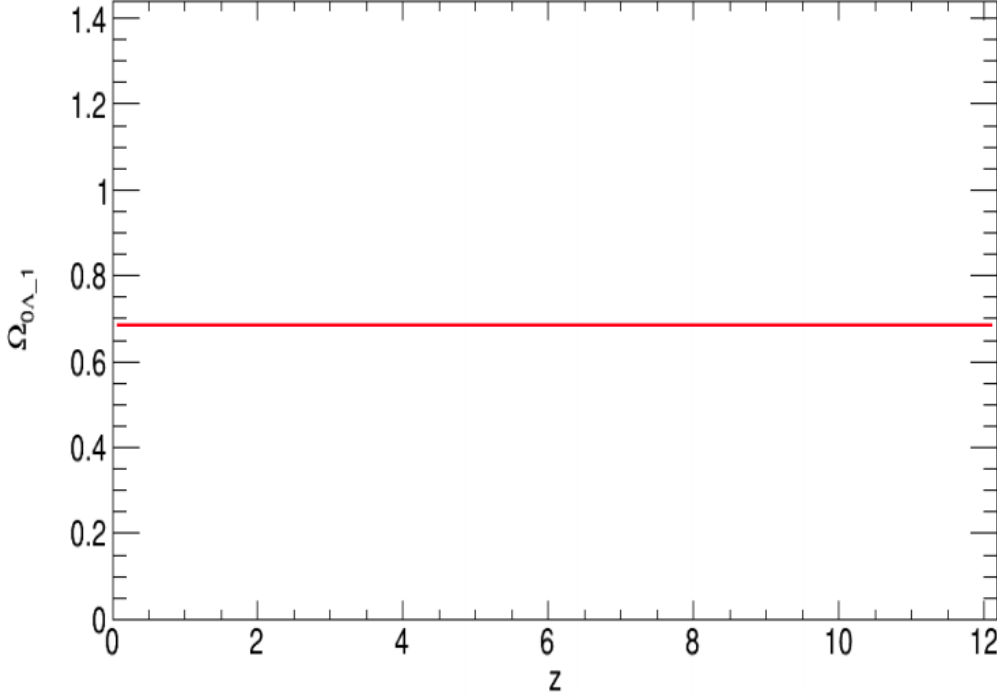


Figura 3.1: $\Omega_{0\Lambda_1}=0.685$ obtenida con un $z_{ini} = 12.1833$ (emergente para este valor z_{ini}), en concordancia con el valor de la Constante Cosmológica de Λ CDM

Aquí se hace el análisis de los “jerk” y las densidades Λ de Gravedad Unimodular, se grafican y se calculan las edades del Universo de cada caso para tener un filtro en el cual aceptar o descartar modelos. Se ve que existen ciertas constantes del modelo, y se nota el porqué se considera una energía oscura emergente.

3.8.1. Primer modelo: Materia

Antes de comenzar, es bueno resaltar que este primer modelo de materia coincide con los estudios de Gravedad Unimodular (e.g. [6] que asume la no covariancia general del tensor de energía-momento), pero que aquí se encuentra de forma independiente y desde el enfoque (la hipótesis de esta tesis, que asume de forma implícita la covariancia general del tensor de energía momento) propuesto en las anteriores secciones. Explorando una primera posibilidad, donde la radiación es subdominante, se considera $\omega_i = \omega_m = 0$. Se sustituye esta expresión en la ecuación solución (3.38) y se despeja j , obteniendo:

$$j = 1 + \frac{4\pi G}{H^2} \rho_r. \quad (3.39)$$

Sustituyendo en la ecuación de Friedmann (3.29), recordando que $\rho_r = \rho_{0r} a^{-4}$:

$$H_{UG}^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_r + \rho_m) + \frac{8\pi G}{3} \rho_{0r} \int \frac{1}{a^5} da. \quad (3.40)$$

Al realizarse la integral, nótese que:

$$H_{UG}^2 = H_{RG}^2 + \frac{8\pi G}{3} \rho_{0r} \left(-\frac{1}{4a^4} \right) \Big|_{a_0}^1, \quad (3.41)$$

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR
3.8. DESARROLLO DE LA FORMA DEL “JERK” E IMPLICACIONES

la integral debería realizarse en $a \in [0, 1]$, pero, de hacerse eso, el valor diverge. Por lo que es concluyente decir que para obtener los valores observados de energía oscura, este debería aparecer en un cierto a_0 . De forma que

$$H_{UG}^2 = H_{RG}^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho_{0r} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{a_0^4} \right); \quad (3.42)$$

donde se puede distinguir un término extra correspondiente a la contribución de la energía oscura:

$$\rho_{0r} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_0^4} - 1 \right) = \rho_{0\Lambda_1}, \quad (3.43)$$

que termina siendo un valor constante, en analogía a $\rho_{0\Lambda}$ de Λ CDM, i.e., la constante cosmológica. A diferencia de la constante cosmológica, esta energía aparece en un cierto valor z_{ini} de la evolución del Universo. Ahora, para graficar (3.43) (Ver Figura 3.1), se usará la notación de parámetro adimensional visto en la ecuación de Friedmann adimensional (2.21), siendo el parámetro $\Omega_{0\Lambda}$ el obtenido de (3.43). Luego, para reproducir el modelo Λ CDM se debe obtener de (3.43) el valor del parámetro $\Omega_{0\Lambda} = 0.685$ observado, i.e., que $0.685 = \Omega_{0r}/4 (a_0^{-4} - 1)$. Así, se obtiene que $a_0 \approx 0.07585$, o bien $z_{ini} \approx 12.1833$. Por último, si se quiere calcular la edad del Universo desde aquí, se toma la Ecuación de Friedmann escrita a partir de (2.21), considerando (3.43):

$$H^2 = \dot{a}^2 a^{-2} = H_0^2 (\Omega_{0m} a^{-3} + \Omega_{0r} a^{-4} + \Omega_{0\Lambda_1}), \quad (3.44)$$

por lo que, siguiendo el procedimiento usado para hallar la ecuación de la edad del Universo $t = t_H A$ (2.25), recordando del capítulo anterior que $t_H \approx 1.4431 \times 10^{10}$ años = 14.431 Gaños y la integral nombrada A (para mayor agilidad) es un factor de ajuste, y considerando que esta nueva energía oscura emerge, se define $A \equiv A_0 + A_\Lambda$ de la siguiente manera:

$$A \equiv A_0 + A_\Lambda = \int_0^{a_0} \frac{da}{\sqrt{\Omega_{0M} a^{-1} + \Omega_{0R} a^{-2}}} + \int_{a_0}^1 \frac{da}{\sqrt{\Omega_{0m} a^{-1} + \Omega_{0r} a^{-2} + \Omega_{0\Lambda_1} a^2}}; \quad (3.45)$$

en la forma usual de Relatividad General, la integral A_Λ se integraría en el intervalo $[0, 1]$ y A_0 no se tomaría en cuenta, sin embargo, en este modelo se considera una energía oscura emergente y se debe realizar como arriba se muestra (siendo realmente no muy grande la diferencia). Es de notar que, para evolucionar el Universo tal como se observa (un ajuste fino conocido como el problema de la planicidad), Ω en tiempos iniciales debe ser casi 1, y dado que los parámetros cosmológicos juegan un papel casi de porcentaje de densidad (debido a $\Omega \approx 1$ y a la restricción de Friedmann), entonces, conservando la proporción que tienen Ω_{0r} y Ω_{0m} , se encuentra que $\Omega_{0R} \approx 2.8785 \times 10^{-4}$ y $\Omega_{0M} \approx 0.9997$ (coincidente con el valor t obtenido para la edad del Universo con solo materia y radiación de la sección referente a la edad del Universo, en un error del 0.0278 % calculado de la diferencia numérica de la integral y del valor analítico antes obtenido). Finalmente, el valor obtenido de Relatividad General es $A = 0.9506 \pm 1.1352 \times 10^{-12}$ (error obtenido de la integral numérica), mientras que en este modelo de Gravedad Unimodular se calcula $A \approx 0.0138(A_0) + 0.9259 \pm (Error)(A_\Lambda) = 0.93978 \pm 1.0465 \times 10^{-14}$, siendo así la edad del Universo de $t \approx 13.562$ Gaños, que entra dentro del margen de error (discutido en el capítulo anterior) esperado a la Edad del Universo.

3.8.2. Segundo modelo: Materia y Radiación

Como segunda exploración, se propone una combinación lineal de materia y radiación $\omega_i = a\omega_m + b\omega_r$. Luego, sustituyendo en la ecuación solución (3.38); siendo $\omega_m = 0, \omega_r = \frac{1}{3}$, primero se considera el caso $b = 1$:

$$-\frac{H^3(1-j)}{4\pi G(1+\frac{1}{3})} = H\rho_r, \quad (3.46)$$

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR
3.8. DESARROLLO DE LA FORMA DEL “JERK” E IMPLICACIONES

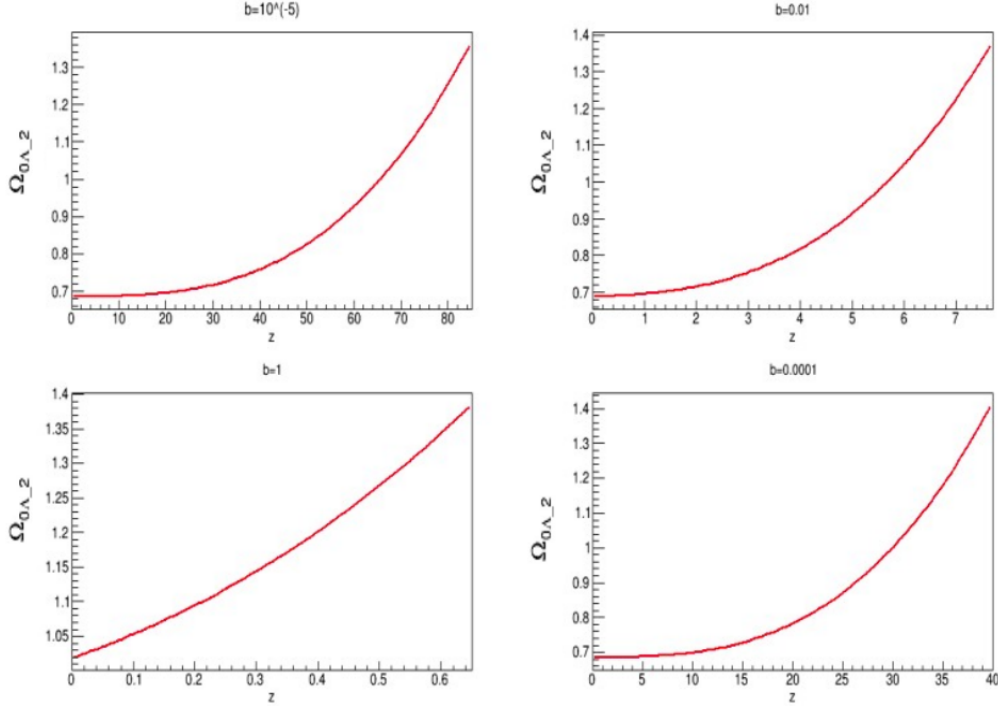


Figura 3.2: $\Omega_{0\Lambda_2}$ para valores de $b > 0$

que al despejar j :

$$j = 1 + \frac{16\pi G}{3H^2} \rho_r. \quad (3.47)$$

Sustituyendo en la Ecuación de Friedmann (3.29):

$$H_{UG}^2 = H_{RG}^2 + \frac{1}{3} \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_r) + \frac{2}{3} \frac{16\pi G}{3} \rho_{0r} \int \frac{1}{a^5} da; \quad (3.48)$$

donde se supone la misma evaluación de la integral, que en la anterior exploración:

$$H_{UG}^2 = H_{RG}^2 + \left[\left(\frac{1}{3} H_{RG_m}^2 \right) + \left(\frac{1}{3} H_{RG_r}^2 - \left(\frac{4}{3} \right) \frac{8\pi G}{3} \rho_{0r} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{a_0^4} \right) \right) \right]. \quad (3.49)$$

Así, se obtiene que

$$\rho_{0\Lambda_2} = \frac{1}{3} \left[\rho_m + \rho_r + \rho_{0r} \left(\frac{1}{a_0^4} - 1 \right) \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{\rho_{0m}}{a^3} + \frac{\rho_{0r}}{a^4} \right) + \frac{4}{3} \rho_{0\Lambda_1}, \quad (3.50)$$

lo que indica esto es que no solo emergió un valor en cierto factor de escala, sino que existe un valor que cambió conforme el factor de escala cambiaba, i.e.,

$$\rho_{0\Lambda_2} = \frac{1}{3} (\rho_m + \rho_r + \rho_{0\Lambda_1}) + \rho_{0\Lambda_1}, \quad (3.51)$$

o bien, escrita en términos de parámetros cósmicos:

$$\Omega_{0\Lambda_2} = \frac{\rho_{0\Lambda_2}}{\rho_c} = \frac{1}{3} (\Omega_{0m}(z+1)^3 + \Omega_{0r}(z+1)^4 + \Omega_{0\Lambda_1}) + \Omega_{0\Lambda_1}. \quad (3.52)$$

Para un caso general de b en (3.38):

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR
3.8. DESARROLLO DE LA FORMA DEL “JERK” E IMPLICACIONES

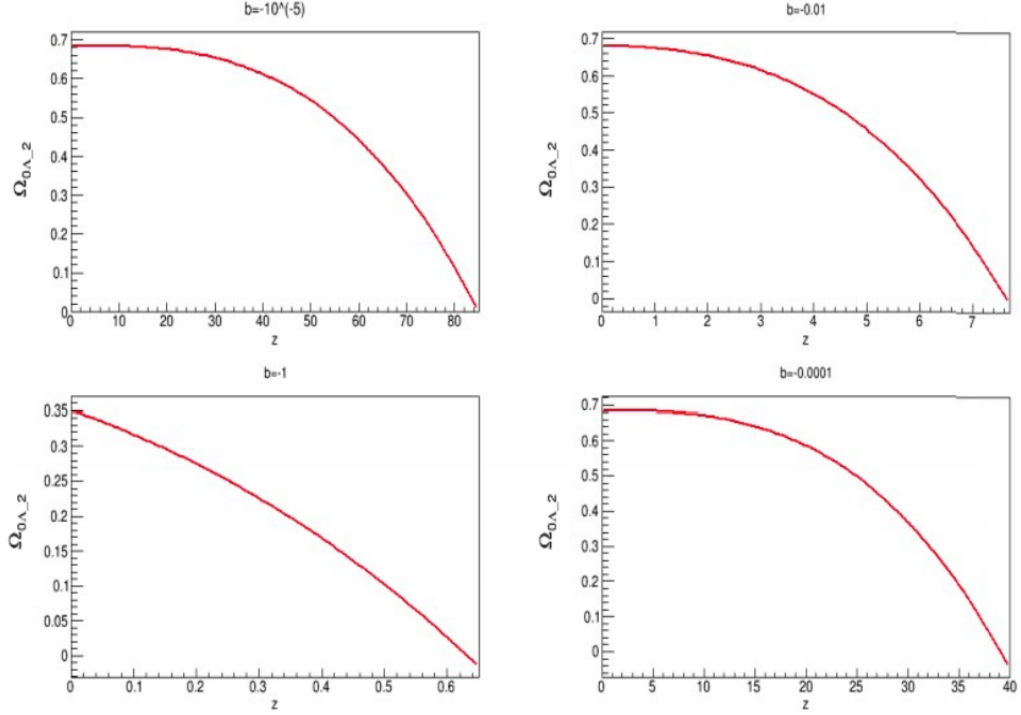


Figura 3.3: $\Omega_{0\Lambda_2}$ para valores de $b < 0$

$$-\frac{H^3(1-j)}{4\pi G(1+\frac{b}{3})} = H\rho_r, \quad (3.53)$$

de donde j será:

$$j = 1 + \frac{4\pi G}{3H^2}\rho_r(3+b). \quad (3.54)$$

Sustituyendo en (3.29):

$$H_{UG}^2 = H_{RG}^2 + \frac{b}{3}\frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r) + \frac{2}{3}(3+b)\frac{4\pi G}{3}\rho_{0r} \int \frac{1}{a^5} da; \quad (3.55)$$

que al integrar resulta

$$H_{UG}^2 = H_{RG}^2 + \left[\left(\frac{b}{3} H_{RGm}^2 \right) + \left(\frac{b}{3} H_{RGr}^2 - \left(\frac{3+b}{3} \right) \frac{8\pi G}{3} \rho_{0r} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{a_0^4} \right) \right) \right]. \quad (3.56)$$

Así, identificando lo correspondiente a energía oscura:

$$\rho_{0\Lambda_{2b}} = \frac{1}{3} \left[b\rho_m + b\rho_r + \rho_{0r} \frac{3+b}{4} \left(\frac{1}{a_0^4} - 1 \right) \right] = \frac{b}{3} \left(\frac{\rho_{0m}}{a^3} + \frac{\rho_{0r}}{a^4} \right) + \frac{3+b}{3} \rho_{0\Lambda_1}, \quad (3.57)$$

o bien

$$\rho_{0\Lambda_{2b}} = \frac{b}{3} \left[\left(\frac{\rho_{0m}}{a^3} + \frac{\rho_{0r}}{a^4} \right) + \rho_{0\Lambda_1} \right] + \rho_{0\Lambda_1}. \quad (3.58)$$

Usando el mismo a_0 de la exploración anterior, el comportamiento de $\Omega_{0\Lambda_{2b}}$ para distintas b es tal como se muestra (Ver Figura 3.2 y 3.3). En la Figura 3.2, correspondiente a $b > 0$, se muestra un comportamiento en el que antes la densidad de energía era mayor y luego disminuyó; mientras que cuando $b < 0$, correspondiente a la Figura 3.3, se muestra un comportamiento emergente en el

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR
3.8. DESARROLLO DE LA FORMA DEL “JERK” E IMPLICACIONES

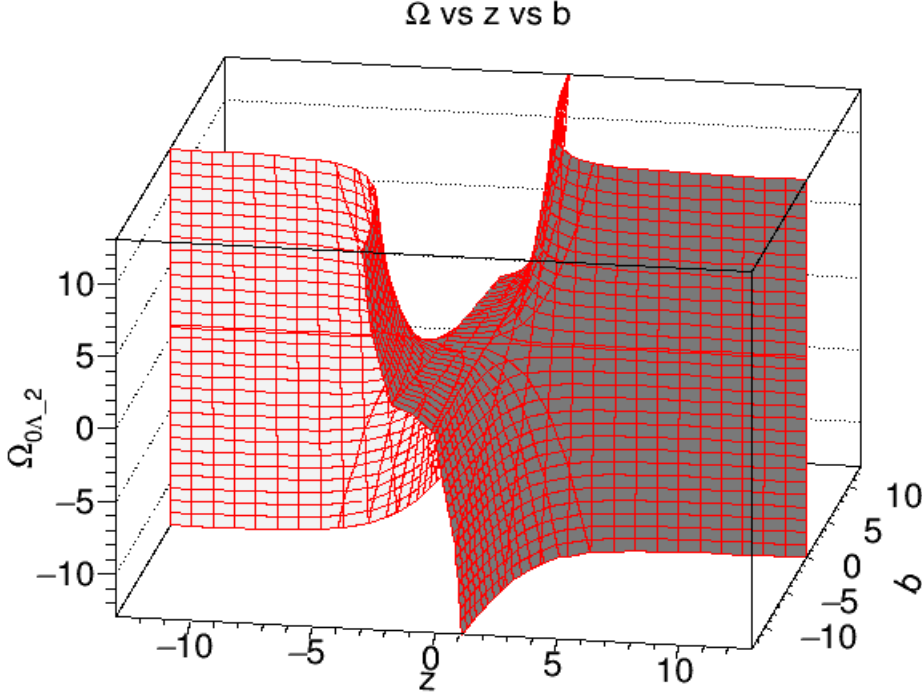


Figura 3.4: $\Omega_{0\Lambda_2}$ para todos los valores b y z

que antes, en el tiempo, la energía oscura era menor y luego aumentó. Por otro lado, si se quisiera hacer una corrección de a_0 , este dependería de b . Recordar que las mediciones de Ω_0 se hacen en $a = 1$; por lo que al dividir (3.58) por la densidad crítica, y sustituyendo los valores observados (y haciendo una aproximación numérica en lo a continuación presentado) de los parámetros:

$$0.685 = \frac{b}{3}(9.07 \times 10^{-5} + 0.315) + (9.07 \times 10^{-5}) \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_0^4} - 1 \right) \left(\frac{b}{3} + 1 \right), \quad (3.59)$$

así, haciendo el cambio de a_0 a z_{ini} , y despejando esta (donde se abrevia esta primer corrección como $c1$):

$$\begin{aligned} z_{ini,c1} &= \left[\frac{0.685 - b \cdot (9.07 \times 10^{-5} + 0.315)/3}{9.07 \times 10^{-5} (b/12 + 1/4)} + 1 \right]^{1/4} - 1 \\ &\approx \left[(132304.3) \left(\frac{0.685 - b \cdot 0.105}{b + 3} \right) + 1 \right]^{1/4} - 1, \end{aligned} \quad (3.60)$$

y volviendo a a_0 , por conveniencia en los cálculos de la integral A de la edad del Universo:

$$a_{0,c1} = \left[(132304.3) \left(\frac{0.685 - b \cdot 0.105}{b + 3} \right) + 1 \right]^{-1/4}. \quad (3.61)$$

Así, al sustituir en (3.57) y obtener el parámetro cósmico:

$$\Omega_{0\Lambda_1,c1} = \frac{2.055 - 0.315 \cdot b}{b + 3}. \quad (3.62)$$

Graficando lo obtenido para $\Omega_{0\Lambda_2b}$, usando las variables b, z (usando $a_{0,c1}$, que depende de las

Ω vs z vs b

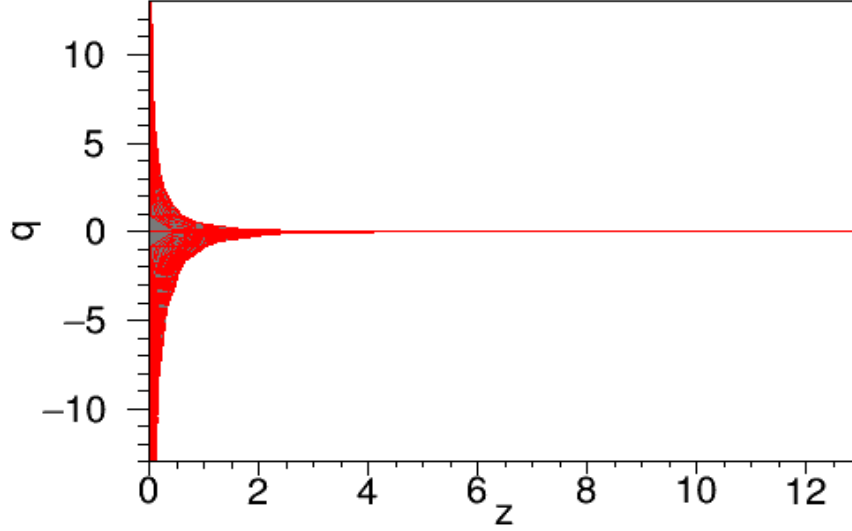


Figura 3.5: $\Omega_{0\Lambda_2}$ proyectada en b vs z

anteriores dos variables) (Ver Figura 3.4). Aunque se puede hacer ajustes a la hipersuperficie, pues se sabe que $z \in [0, z_{ini}]$ y $\Omega_{0\Lambda}$ no puede ser negativa y por mucho puede ser 1. Siendo así, la región de interés de la Figura 3.4 es toda la superficie de la parte derecha en z y acotada entre 0 y 1 en $\Omega_{0\Lambda}$. Cabe destacar que las Figuras 3.2 y 3.3 serán cortes transversales de la Figura 3.4; se podría teorizar un comportamiento de $b = b(z)$ tal que su evolución no sea necesariamente un corte transversal, como se mencionó antes, sino un camino potencial sobre la superficie vista en la Figura 3.4, sin embargo ese estudio no se analizará en esta tesis debido a que se intenta hacer una visualización a partir de valores numéricos, cosa que variaría mucho dependiendo de la forma que tome la función $b(z)$. Se puede ver una proyección sobre el plano bz de los valores aceptados de la Figura 3.4 (Ver Figura 3.5), donde las Figuras 3.2 y 3.3 reproducen un $z_{ini} \approx 12$, que se marcó en la primera exploración, se encuentran muy cercanos a $b = 0$. El que los valores de b sean tan cercanos a cero puede ser debido a la viscosidad de la energía oscura, la cual puede ser analizada al tomar en cuenta la ecuación de un fluido imperfecto en lugar de un fluido perfecto (1.5), e incluyendo dos cantidades conservadas extras a la densidad de energía ρ y a la presión p ; como resultado de este análisis, surge un valor muy cercano a cero, dependiente del factor de proporcionalidad de la radiación $\omega = 1/3$ [7], muy coincidente con este valor b y de energía oscura que se analiza. El desarrollo tomando un fluido imperfecto para comprobar la hipótesis de la viscosidad no se trabajará en esta tesis, debido a que solo se está planteando un primer acercamiento a la energía oscura de Gravedad Unimodular. Ahora, para acotar el parámetro b , se calcula la edad del Universo. Tomando la ecuación (3.45), sustituyendo el valor $\Omega_{0\Lambda_1}$ de la primera exploración por el $\Omega_{0\Lambda_{2b}}$ de esta segunda exploración en términos de la primera:

$$A(b) = \int_0^{a_0} \frac{da}{\sqrt{\Omega_{0M}a^{-1} + \Omega_{0R}a^{-2}}} + \int_{a_0}^1 \frac{da}{\sqrt{(\Omega_{0m}a^{-1} + \Omega_{0r}a^{-2} + \Omega_{0\Lambda_1}a^2)(1 + \frac{b}{3})}}. \quad (3.63)$$

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR
3.8. DESARROLLO DE LA FORMA DEL “JERK” E IMPLICACIONES

b	A [sc]	E [sc](10^{-14})	A [cc]	E [cc](10^{-14})	Ω_1 [cc]	a_0 [cc]	A_0 [cc]	A_Λ [cc]
-1	1.1479	1.2817	1.0485	2.9741	1.1850	0.0661	0.0113	1.0373
-0.9	1.1206	1.2509	1.0351	2.4953	1.1136	0.0672	0.0115	1.0236
-0.8	1.0951	1.2221	1.0225	2.1461	1.0486	0.0682	0.0118	1.0107
-0.7	1.0713	1.1952	1.0104	1.8725	0.9893	0.0692	0.0121	0.9984
-0.6	1.0491	1.1700	0.9990	1.6574	0.9350	0.0702	0.0123	0.9866
-0.5	1.0282	1.1464	0.9880	1.5005	0.8850	0.0711	0.0126	0.9754
-0.4	1.0085	1.1242	0.9775	1.3626	0.8388	0.0721	0.0128	0.9647
-0.3	0.9899	1.1032	0.9675	1.2528	0.7961	0.0731	0.0131	0.9544
-0.2	0.9723	1.0833	0.9579	1.1713	0.7564	0.0740	0.0133	0.9445
-0.1	0.9556	1.0645	0.9487	1.1043	0.7195	0.0749	0.0136	0.9351
0	0.9398	1.0466	0.9398	1.0444	0.6850	0.0759	0.0139	0.9259
0.1	0.9247	1.0295	0.9312	1.0182	0.6527	0.0768	0.0141	0.9171
0.2	0.9104	1.0133	0.9230	1.0087	0.6225	0.0777	0.0144	0.9086
0.3	0.8967	0.0998	0.9150	1.0000	0.5941	0.0786	0.0146	0.9004
0.4	0.8836	0.0983	0.9073	0.0991	0.5674	0.0795	0.0149	0.8924
0.5	0.8711	0.0969	0.8999	0.0982	0.5421	0.0804	0.0151	0.8848
0.6	0.8591	0.0955	0.8927	0.0974	0.5183	0.0813	0.0154	0.8773
0.7	0.8476	0.0942	0.8857	0.0966	0.4958	0.0822	0.0156	0.8701
0.8	0.8366	0.0930	0.8790	0.0958	0.4745	0.0831	0.0159	0.8631
0.9	0.8259	0.0918	0.8724	814.20	0.4542	0.0841	0.0162	0.8562
1	0.8157	0.0906	0.8661	703.80	0.4350	0.0850	0.0164	0.8496
1.1	-	-	0.8599	635.58	0.4167	0.0856	0.0166	0.8433
1.2	-	-	0.8539	527.05	0.3993	0.0868	0.0170	0.8539
1.3	-	-	0.8480	456.75	0.3827	0.0877	0.0172	0.8308
1.4	-	-	0.8423	390.66	0.3668	0.0887	0.0175	0.8248
1.5	-	-	0.8368	339.15	0.3517	0.0896	0.0178	0.8190
1.6	-	-	0.8315	311.79	0.3372	0.0901	0.0180	0.8135
1.7	-	-	0.8261	252.77	0.3233	0.0915	0.0184	0.8078
1.8	-	-	0.821	217.00	0.31	0.0925	0.0187	0.8023
1.9	-	-	0.816	186.47	0.2972	0.0935	0.019	0.797
2	-	-	0.8111	162.61	0.285	0.0944	0.0193	0.7918

Tabla 3.1: Valores de $A(b)$, con corrección (abreviado cc) y sin corrección (abreviado sc) en a_0 , para distintas b con paso igual a 0.1.

Siendo así, se procede a calcular el factor de ajuste $A(b)$. Tomando distintos valores de b , se observan valores variados para $A(b)$. Existe una cota en $b = -3$ donde el valor a integrar diverge y menores a esto se vuelven valores imaginarios que no interesan de momento. Para valores $b > 0$ la edad del Universo se reduce conforme b crece. Para acotar estos valores válidos de b , se hace que la edad del Universo este restringida entre $[12, 15]G$ años de manera casi arbitraria siguiendo las suposiciones de la edad del Universo de los astrónomos del siglo XX antes de las mediciones del telescopio WMAP. Los valores actuales se restringen mucho (y fueron presentados en el capítulo anterior), pero con fines de estudio del modelo, se amplían estos valores. Así, solo se consideran valores resultantes en el intervalo $A \approx [1.0394, 0.8315]$. Primero se tabulan los valores para un a_0 idéntico al de la primera exploración (Ver valores sc de Tabla 3.1) y se grafican (Ver parte superior de Figura 3.6), seguidos de los valores de $A(b)$ con un a_0 corregido (Ver valores cc de Tabla 3.1) y se grafican (Ver parte inferior de Figura 3.6); en la Tabla 3.1 se incluye el error (abreviado E) asociado a la integración numérica de cada $A(b)$, de igual forma, se incluyen los valores corregidos de Ω_{Λ_1} y $a_0 c_1$ para incluirse a cada valor de A_0 y A_Λ corregidos (siendo su suma el valor de $A(b)$).

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR
3.8. DESARROLLO DE LA FORMA DEL “JERK” E IMPLICACIONES

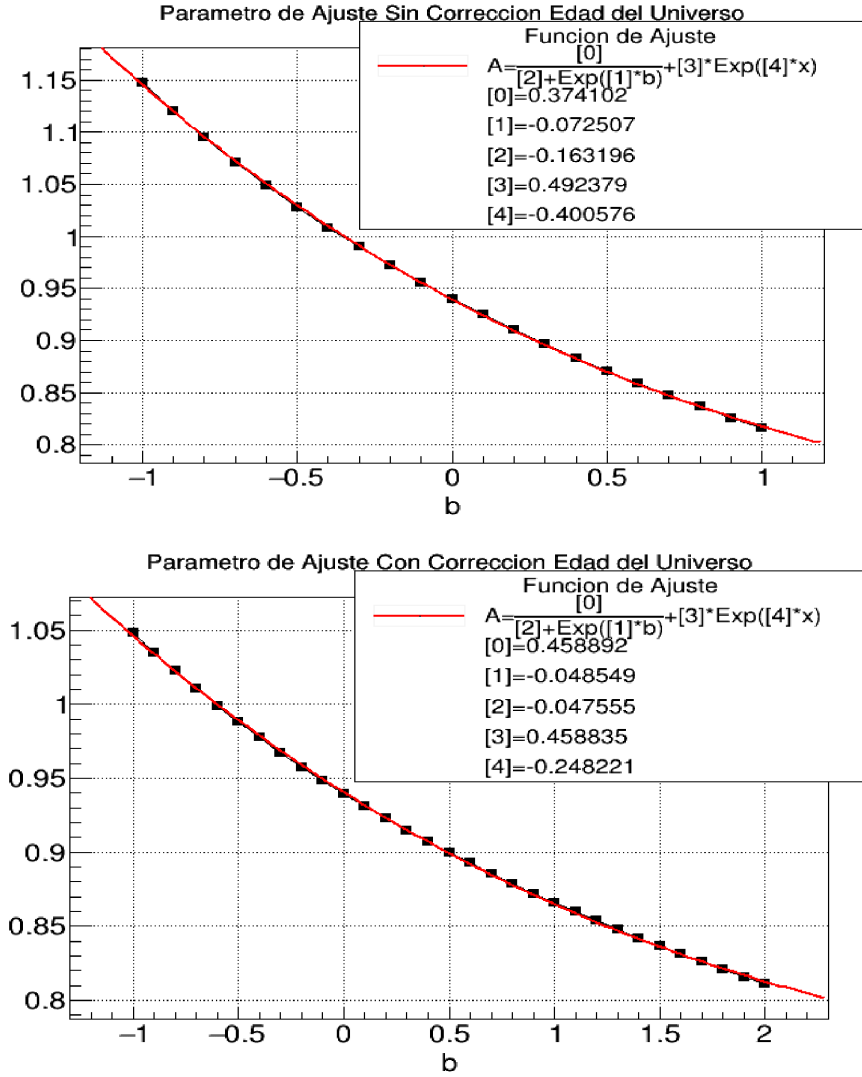


Figura 3.6: Parámetro de Ajuste de la Edad del Universo a diferentes b

Para las gráficas de la Figuras 3.6, se procede primero a hacer un ajuste exponencial a los datos, el cual no satisface todos los puntos (no se ajusta como debería). Luego se procede a un ajuste del tipo $a/(b + c \cdot \exp[d])$, el cual satisface mejor los valores de A para un a_0 sin corregir, pero no para el corregido. Entonces, con un ajuste del tipo

$$A(b) = \frac{[0']}{[2'] + e^{[1'] \cdot b}} + [3'] \cdot e^{[4'] \cdot b}, \quad (3.64)$$

se logran satisfacer ambos modelos. Más combinaciones se intentaron, e.g, funciones hiperbólicas y combinaciones lineales de estas, suma de exponenciales en combinación lineal; sin embargo, la función de ajuste (3.64) fue (con diferencia) la que mejor se ajustaba a los datos.

3.8.3. Tercer modelo: Materia, Radiación y un Potencial

En esta tercer exploración se introduce un término potencial en combinación lineal con las anteriores, tal que $\omega_i = a\omega_m + b\omega_r + c\omega_p$ siendo p alguna otra especie de densidad de energía desconocida, considerada aquí como un potencial. El valor de ρ_p es insignificante debido a las observaciones, además de que coincide muy bien con la propuesta de surgir una energía oscura de forma natural de las ecuaciones y de los datos de materia y radiación observadas; de ser significativo este valor, podría ser observado como parte de la energía oscura, y sería redundante su cálculo. Lo que sí es considerable es su ω_p así como lo es el de radiación. Considérese un primer caso $b = c = 1$, por lo que al sustituir en la ecuación solución (3.38):

$$-\frac{H^3(1-j)}{4\pi G(1 + \frac{1}{3} + \omega_p)} = H\rho_r, \quad (3.65)$$

y despejando j , se tiene

$$j = 1 + \frac{4\pi G}{H^2} \left(\frac{4}{3} + \omega_p \right) \rho_r. \quad (3.66)$$

Sustituyendo en la Ecuación de Friedmann (3.29):

$$H_{UG}^2 = H_{RG}^2 + \frac{8\pi G(\rho_m + \rho_r)[1/3 + \omega_p]}{3} + \frac{2}{3}4\pi G \left(\frac{4}{3} + \omega_p \right) \rho_{0r} \int \frac{1}{a^5} da, \quad (3.67)$$

e integrando como se ha hecho:

$$H_{UG}^2 = H_{RG}^2 + \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{3} + \omega_p \right) \left(\rho_m + \rho_r + \rho_{0r} \frac{1}{4} \left[\frac{1}{a_0^4} - 1 \right] \right) + \frac{8\pi G}{3} \rho_{0r} \frac{1}{4} \left[\frac{1}{a_0^4} - 1 \right]. \quad (3.68)$$

Parece conveniente nombrar

$$\left(\rho_m + \rho_r + \rho_{0r} \frac{1}{4} \left[\frac{1}{a_0^4} - 1 \right] \right) \equiv \rho_{UG}, \quad (3.69)$$

pues parece un valor que se repite. Notar que $\rho_{UG} = 3(\rho_{0\Lambda_2} - \rho_{0\Lambda_1})$; así, $\rho_{0\Lambda_3} = (1/3 + \omega_p) \rho_{UG} + \rho_{0\Lambda_1}$. Ahora, tomando el caso general donde b, c en (3.38):

$$-\frac{H^3(1-j)}{4\pi G(1 + b/3 + c\omega_p)} = H\rho_r, \quad (3.70)$$

de donde j será

$$j = 1 + \frac{4\pi G}{H^2} \left(1 + \frac{b}{3} + c\omega_p \right) \rho_r. \quad (3.71)$$

Sustituyendo en (3.29) y realizando directamente la integral:

$$H_{UG}^2 = H_{RG}^2 + \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{b}{3} + c\omega_p \right) (\rho_r + \rho_m) + \frac{8\pi G}{3} \rho_{0r} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_0^4} - 1 \right) \left(1 + \frac{b}{3} + c\omega_p \right). \quad (3.72)$$

Así, se identifica el término correspondiente a la energía oscura:

$$\rho_{0\Lambda_{3b,c}} = \left(\frac{b}{3} + c\omega_p \right) \left[\rho_m + \rho_r + \rho_{0r} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_0^4} - 1 \right) \right] + \rho_{0r} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_0^4} - 1 \right), \quad (3.73)$$

o bien, en términos de (3.69)

$$\rho_{0\Lambda_{3b,c}} = \left(\frac{b}{3} + c\omega_p \right) \rho_{UG} + \rho_{0\Lambda_1}. \quad (3.74)$$

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR
3.8. DESARROLLO DE LA FORMA DEL “JERK” E IMPLICACIONES

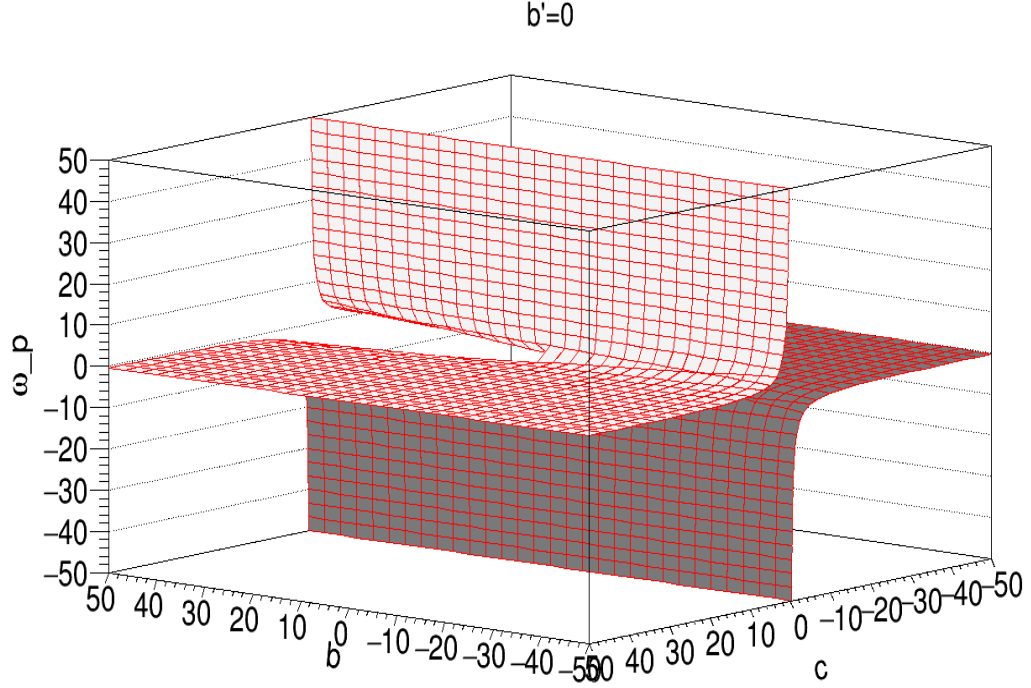


Figura 3.7: $b'=0$

Para graficar esta tercera interacción, se debe tener cuidado, pues son 4 variables independientes: z, b, c, ω_p , por lo que de una interacción a otra se pasa de 3 a 5 dimensiones en su visualización. Primero se encuentran los $z_{ini,c2}, a_{0,c2}$ (abreviando esta segunda corrección como $c2$) para ver como se comportan las variables juntas. Recordar que esto se hace para $a = 1$ o bien $z = 0$, se sustituyen los valores observados de los parámetros en (3.74) luego de que se convierta en parámetro adimensional:

$$0.685 = \left(\frac{b}{3} + c\omega_p\right) (0.315 + 9.07 \times 10^{-5}) + \frac{9.07 \times 10^{-5}}{4} \left(\frac{1}{a_0^4} - 1\right) \left(\frac{b}{3} + c\omega_p + 1\right); \quad (3.75)$$

de donde se despeja z_{ini}

$$(z_{ini,c2} + 1)^4 - 1 = \frac{0.685 - 0.3150907 \cdot (b/3 + c\omega_p)}{(9.07 \times 10^{-5}/12) \cdot ((b + 3c\omega_p) + 3)}, \quad (3.76)$$

que al simplificarse queda:

$$z_{ini,c2} = \left[(132304.3) \cdot \frac{0.685 - 0.105 \cdot (b + 3c\omega_p)}{(b + 3c\omega_p) + 3} + 1 \right]^{1/4} - 1, \quad (3.77)$$

o bien, al hacer el cambio de z_{ini} a a_0 :

$$a_{0,c2} = \left[(132304.3) \cdot \frac{0.685 - 0.105 \cdot (b + 3c\omega_p)}{(b + 3c\omega_p) + 3} + 1 \right]^{-1/4}. \quad (3.78)$$

Nótese que $z_{ini,c2}$ (3.77) y $a_{0,c2}$ (3.78) tienen la misma forma que las $z_{ini,c1}$ (3.60) y $a_{0,c1}$ (3.61) de la segunda interacción. En esta tercera interacción solo se sustituye todo lo que tenga término

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR
3.8. DESARROLLO DE LA FORMA DEL “JERK” E IMPLICACIONES

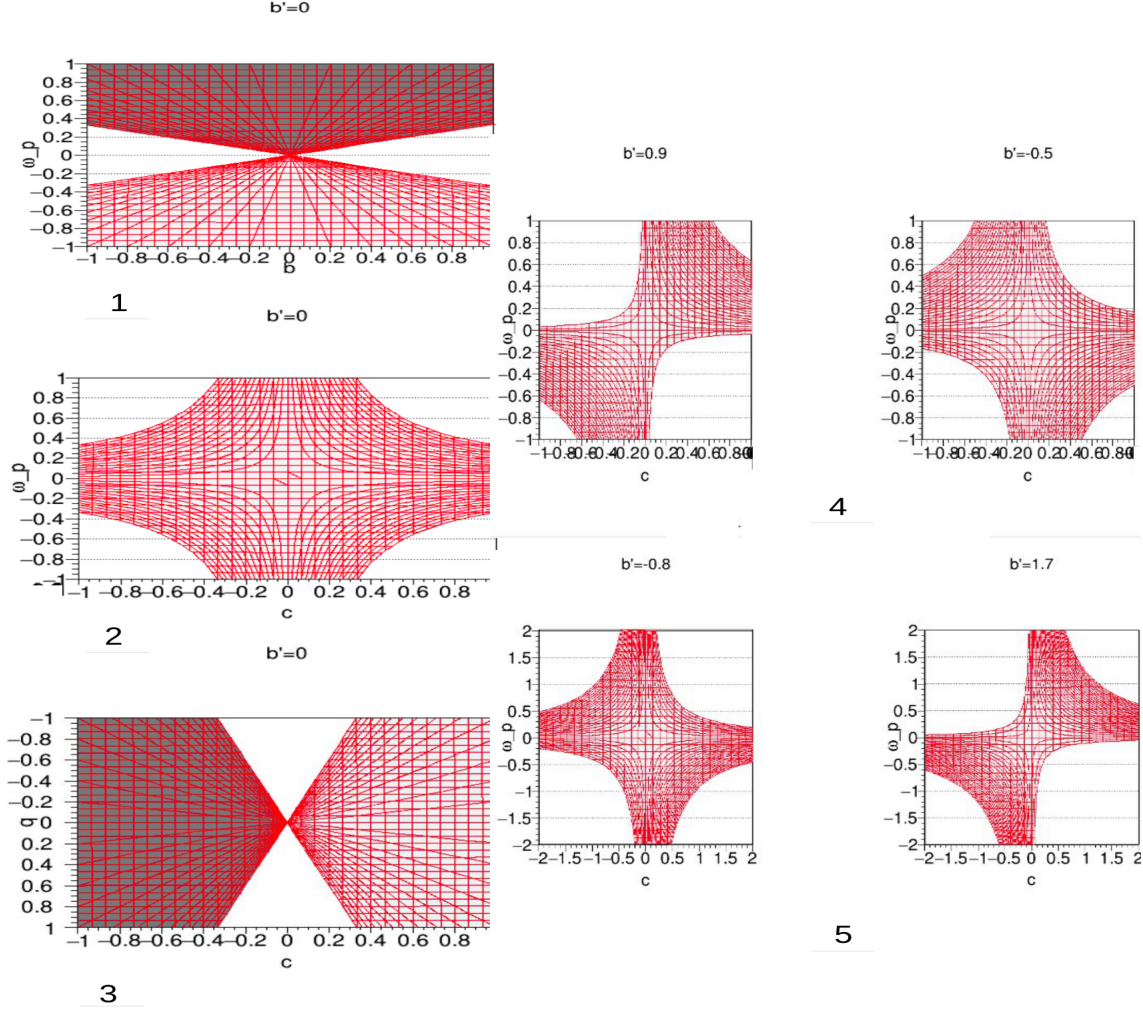


Figura 3.8: Proyecciones en los distintos planos b, c, ω_p de $A(b')$.

b por $b + 3c\omega_p$; lo cual es de gran ayuda pues, sin tener que graficar, ya se sabe que al calcular la edad del Universo se obtendrá para esta $\Omega_{0\Lambda_{3bc}}$:

$$A(b, c, \omega_p) = \int_0^{a_0} \frac{da}{\sqrt{\Omega_{0M}a^{-1} + \Omega_{0R}a^{-2}}} + \int_{a_0}^1 \left((\Omega_{0m}a^{-1} + \Omega_{0r}a^{-2} + \Omega_{0\Lambda_1}a^2) \left(1 + \frac{b + 3c\omega_p}{3} \right) \right)^{-1/2} da. \quad (3.79)$$

Y tomando las mismas cotas de $A(b)$ usadas en la interacción anterior, sea a_0 corregida o no, se obtendrán los mismos valores, en este caso para la variable $b' = b + 3c\omega_p$. Así que lo interesante en este caso es graficar las hipersuperficies a distintos valores de b' tales que $A(b')$ sean fijos. Por ejemplo, los límites superior e inferior en el análisis anterior fueron $A = [0.8259, 1.0282]$ a los que le correspondían los valores $b = 0.9, b = -0.5$ respectivamente; y para los valores corregidos se tuvo como límites $A = [1.0225, 0.8261]$ que corresponden a valores $b = -0.8, b = 1.7$ respectivamente. Y

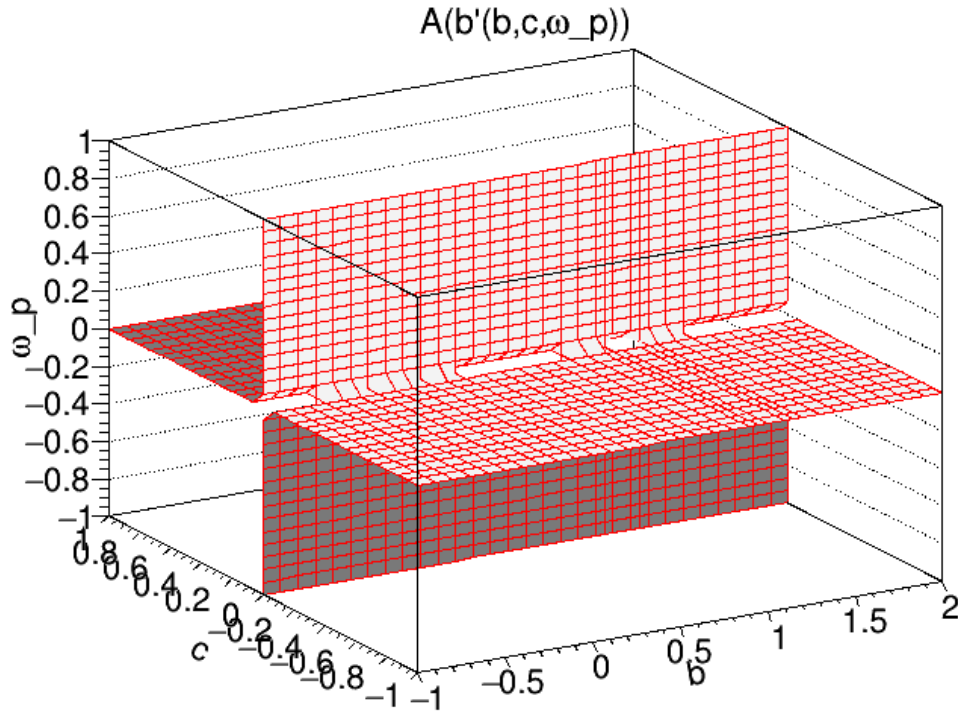


Figura 3.9: $A(b'(b,c,\omega_p))$

como forma control, se tomará $A(b') = 0.9398$ que le corresponde el valor fijo $b' = 0$. Desde lejos, todas las proyecciones de b' aceptadas tendrán la misma forma (Ver Figura 3.7), es acercándose a la intersección cuando cambian, véase primero las proyecciones de $b' = 0$ (Ver ilustraciones 1, 2 y 3 de Figura 3.8). En el lado izquierdo de la Figura 3.8 se presentan los valores $b' = 0$, siendo la ilustración 1 una proyección en $b - \omega_p$, la ilustración 2 una proyección en $c - \omega_p$, y la ilustración 3 una proyección en $b - c$. Resulta la ilustración 2 la más resaltante; ahora, compárese con las proyecciones $c - \omega_p$ para distintas b' (Ver ilustraciones 4 y 5 de Figura 3.8) y nótese que el centro termina rotando y estrechándose (situación similar para los distintos valores de b' en los otros dos planos, siendo el caso de la ilustración 1 y 3). El lado derecho de la Figura 3.8 presenta distintos valores de b' arbitrarios, y correspondientes a los límites aceptados de $A(b)$, proyectados en el plano $c - \omega_p$; la ilustración 4 presenta valores $b' = 0.9$, $b' = -0.5$ respectivamente en $A(b)$ sin corrección, y la ilustración 5 presenta valores $b' = -0.8$, $b' = 1.7$ respectivamente en $A(b)$ con corrección. Lo que se puede visualizar a simple vista de las ilustraciones mostradas en la Figura 3.8, es la independencia entre las variables $b - c$ y $b - \omega_p$ (como se esperaba), y la dependencia en las variables $c - \omega_p$; lo interesante de esta dependencia es que solo pueden existir en una determinada combinación que resulta simétrica y rotacional (estrechándose sobre una simetría diagonal izquierda o derecha para valores b' negativos o positivos, respectivamente) conforme b' cambia, siendo más restrictiva para valores más lejanos de $b' = 0$ y aún más considerando valores $A(b')$ corregidos. Luego, se puede ampliar más el análisis al considerar todo el espectro de $A(b)$, y no solo los valores fijos, al sustituir b' en la función de ajuste de la segunda interacción (para valores de A corregidos), visualizando la relación entre b, c, ω_p general (Ver Figura 3.9). Es interesante, a nivel de curiosidad matemática, ver el comportamiento que tienen estas tres variables para valores aún más grandes de c y ω_p . Los valores de b están restringidos para reproducir los A aceptados, pero los de c, ω_p pueden ser cualquier combinación y se observan patrones diversos pero que, a valores muy grandes, se vuelven cíclicos. Entre valores de 1 y 100 se observa un ciclo no único, pues para valores aún más grandes se observan patrones aún más diversos que se repiten para ciertos valores (quizás debido a

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR
3.8. DESARROLLO DE LA FORMA DEL “JERK” E IMPLICACIONES

la naturaleza cíclica de la función), de los cuales no se analizarán pero es interesante de mencionar para futuras ideas en la física que involucren esta clase de comportamiento cíclico.

3.8.4. Resumen de los Tres Modelos y Forma General

Como resumen de las tres interacciones hechas, se hallan valores correspondientes a energía oscura:

1. en la primera interacción se halla un valor correspondiente a energía oscura (3.43): $\Omega_{0\Lambda_1} = (\Omega_{0r}/4) (a_0^{-4} - 1)$;
2. en la segunda interacción, la expresión general correspondiente a energía oscura (3.58): $\Omega_{0\Lambda_{2b}} = b/3\Omega_{UG} + \Omega_{0\Lambda_1}$; donde $\Omega_{UG} = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_{0\Lambda_1}$;
3. de la tercera interacción, se encuentra que la energía oscura (3.74): $\Omega_{0\Lambda_{3bc}} = (b/3 + c\omega_p)\Omega_{UG} + \Omega_{0\Lambda_1}$.

Por inducción, es fácil concluir que no importa si existen otras especies de ω_i o inclusive si es una combinación lineal de estas, siempre se obtendrá una familia de soluciones con la forma:

$$j = 1 + \frac{4\pi G}{H^2} (1 + c_i\omega_i)\rho_r, \quad (3.80)$$

para el “jerk”;

$$H_{UG}^2 = H_{RG}^2 + \frac{8\pi G}{3} (c_i\omega_i\rho_{UG} + \rho_{0\Lambda_1}), \quad (3.81)$$

para la ecuación de Friedmann;

$$\rho_{0\Lambda} = c_i\omega_i\rho_{UG} + \rho_{0\Lambda_1}, \quad (3.82)$$

para las expresiones de energía oscura. Luego, haciendo el mismo análisis que en la tercer exploración, generando una $z_{ini,g}$ (abreviando general como g), sustituyendo los valores de los parámetros cosmológicos:

$$0.685 = c_i\omega_i \cdot 0.3150907 + 9.07 \times 10^{-5} \cdot 0.25 \cdot ((z_{ini,g} + 1)^4 - 1)(1 + c_i\omega_i), \quad (3.83)$$

y despejando así $z_{ini,g}$:

$$z_{ini,g} = \left(\frac{0.685 - 0.3150907 \cdot c_i\omega_i}{c_i\omega_i + 1} \cdot 44101.4333 + 1 \right)^{1/4} - 1; \quad (3.84)$$

o bien, en su transformación $a_{0,g}$:

$$a_{0,g} = \left(\frac{0.685 - 0.3150907 \cdot c_i\omega_i}{c_i\omega_i + 1} \cdot 44101.4333 + 1 \right)^{-1/4}. \quad (3.85)$$

Y por lo tanto, la edad del Universo (con el fin de ajustar parámetros y determinar el mejor modelo):

$$t = t_H \left(\int_0^{a_0} \frac{da}{\sqrt{(\Omega_{0M}a^{-1} + \Omega_{0R}a^{-2})}} + \int_{a_0}^1 \frac{da}{\sqrt{(\Omega_{0m}a^{-1} + \Omega_{0r}a^{-2} + \Omega_{0\Lambda_1}a^2)(1 + c_i\omega_i)}} \right); \quad (3.86)$$

donde se trabaja con las variables z, c_i, ω_j (con $i \neq j$), es decir con $2n + 1$ variables independientes, pero como ya se vio antes, las c_i, ω_i sí dependerán entre ellas y estarán restringidas a las hiper-superficies que reproduzcan los $A = [lim_{inf}, lim_{sup}]$ (los límites inferior y superior). Nótese que las combinaciones lineales de $c_i\omega_i$ son subdominantes, por lo que es probable que, de existir, sean

Ω_Φ VS z VS ω_Φ

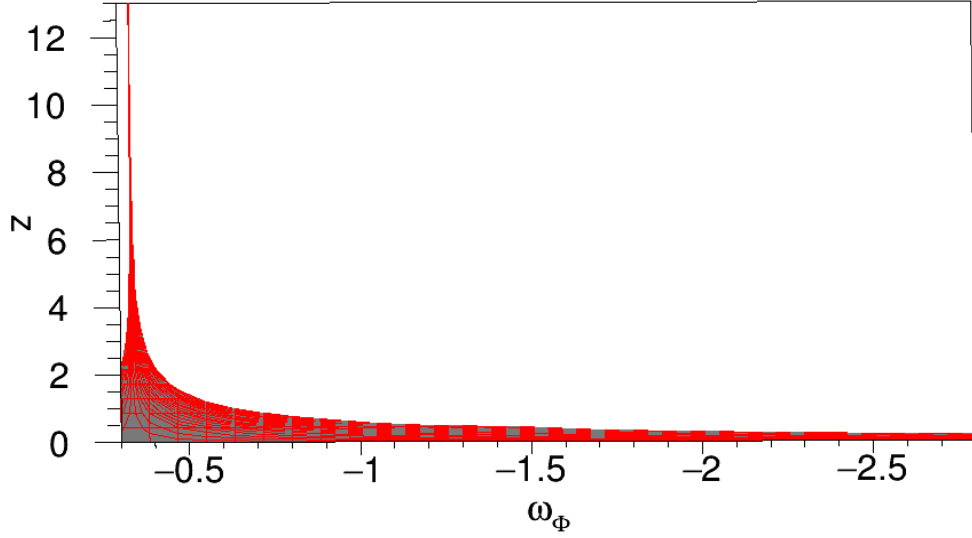


Figura 3.10: Ω_Φ proyectada en ω - z

difíciles de detectar, tal como se mencionó para la densidad ρ_p en la exploración 3. A su vez, estas deben reproducir materia y radiación, en principio.

Como caso particular, quizás se quiera incluir un campo escalar. Este dependería de un potencial dependiente del tiempo, teniendo como expresiones que la definen [8]: $\Phi = \Phi(t) + \delta\Phi(\vec{x}, t)$, $\rho_\Phi = (1/2)\dot{\Phi}^2 + V(\Phi)$, $\omega_\Phi = [(1/2)\dot{\Phi}^2 - V(\Phi)]/[(1/2)\dot{\Phi}^2 + V(\Phi)]$. Así bien, siendo $\omega_P = \omega_\Phi$, se sigue el análisis como se hizo en la exploración 3, ahora con variables z, b, ω_Φ , y haciendo arbitrariamente $b = 1$ (reproduciendo los valores de radiación usual) se acotan los valores de ω_Φ a la diferencia entre $b' = 2$ (como límite superior) y los valores válidos de b' . Finalmente se puede ajustar el modelo hasta obtener solo variables z y ω_Φ , que se pueden graficar con $\Omega_{0\Lambda}$ en un espacio de 3D y proyectarse sobre el plano $z - \Omega_\Phi$ (Ver Figura 3.10). También se puede analizar otro caso, al usar la forma general que se encontró arriba y al hacer que todos los ω_i , e inclusive sus c_i , sean funciones escalares dependientes del tiempo, salvo claro las constantes iniciales que siempre deben recuperar materia y radiación. Es beneficioso incluir términos dependientes del tiempo, pues $\rho = \rho(a)$ y a su vez $a = a(t)$, manteniendo así un único parámetro que sería el tiempo; para observaciones, sería más útil usar el “redshift” z . Realmente de ser así, el “jerk” podría tomar cualquier función, así como la ecuación de Friedmann y las consiguientes aplicaciones, siendo infinitas las posibles combinaciones surgidas de c_i, ω_i ; donde ya se vió un pequeño ejemplo en la tercer exploración (posibilidades cíclicas o de cualquier forma que siga la ecuación de ajuste). Aunque, esto supondría tener suficientes campos escalares dependientes del tiempo como para modelar las funciones, lo cual supone muchas preguntas sobre la existencia de esos campos esclares y sus características tan particulares. Otra cuestión a tratar es el tamaño tan pequeño de los parámetros propuestos; quizás, la forma de encontrar un sentido físico a esto, sería analizando un tensor de energía momento de un fluido imperfecto que incluya la densidad de partículas como cantidad conservada (mencionado anteriormente [7]), recordando que en esta tesis se trabajó con un fluido perfecto, y ver si los parámetros b y b' pueden corresponder a los coeficientes de viscosidad o similares; estos trabajos se basan en la teoría de Eckart, aunque también sería interesante analizar el trabajo de [41]. A su vez,

sería ilustrativo hacer un estudio para las anisotropías del Universo, del cual se podrían encontrar similitudes con los parámetros o descartar su existencia; sin duda el análisis no debería costar más de lo debido, pues muchas de las ecuaciones de Relatividad General son recuperadas en Gravedad Unimodular (como se mencionó antes [37]).

3.9. Expresiones encontradas

A continuación se resaltan las expresiones más importantes encontradas:

- Al tomar solo materia dominante:
 1. de sustituir en la ecuación solución (3.38), se halla la forma del “jerk” (3.39): $j = 1 + 4\pi GH^{-2}\rho_r$;
 2. de donde se obtiene, al sustituir en la ecuación de Friedmann (3.29), la parte correspondiente a energía oscura (3.43): $\rho_{0\Lambda_1} = (\rho_{0r}/4)(a_0^{-4} - 1)$;
 3. de donde, al sustituir los valores de los parámetros cosmológicos, se despeja el valor donde esta energía oscura emerge: $z_{ini} = 12.183$;
 4. valor que sirve para sustituir en la integral A de ajuste de la Edad del Universo, y calcular esta: $t = 13.562G$ años.
- Al considerar radiación ajustada con un parámetro b :
 1. al sustituir en (3.38), se despeja el “jerk” (3.54): $j = 1 + 4\pi GH^{-2}\rho_r(3 + b)/3$;
 2. que se sustituye en (3.29), obteniendo la parte correspondiente a energía oscura (3.58): $\rho_{0\Lambda_{2b}} = (b/3)\rho_{GU} + \rho_{0\Lambda_1}$;
 3. siendo (3.69): $\rho_{GU} = (\rho_m + \rho_r + \rho_{0\Lambda_1})$;
 4. luego, sustituyendo los valores de los parámetros cosmológicos y despejando una expresión para el surgimiento de esta energía oscura (3.60): $z_{ini}(b) = [(132304.3)((0.685 - b \cdot 0.105)/(b + 3)) + 1]^{(1/4)} - 1$;
 5. que es usada para sustituir en el factor de corrección de la Edad del Universo (3.64): $A(b) = 0.459((-0.048 + \exp(-0.049 \cdot b))^{-1} + \exp(-0.248 \cdot b))$.
- Considerando un factor de ajuste potencial ω_p en combinación lineal con la radiación:
 1. al sustituir en (3.38) y despejar el “jerk” (3.71): $j = 1 + 4\pi GH^{-2}(\rho_r(3 + b + 3c\omega_p))/3$;
 2. que se sustituye en (3.29), para distinguir la expresión correspondiente a energía oscura (3.74): $\rho_{0\Lambda_{3bc}} = (b + 3c\omega_p)/3\rho_{GU} + \rho_{0\Lambda_1}$;
 3. que conserva la misma forma de la segunda interacción, solo haciendo un cambio de variable $b' = b + 3c\omega_p$; por lo que hereda la misma forma para $z_{ini}(b')$ y para $A(b')$.
- Ecuación general, obtenida por inducción de los tres modelos estudiados:
 1. la forma del “jerk” será (3.80): $j = 1 + 4\pi GH^{-2}(1 + c_i\omega_i)\rho_r$;
 2. la expresión de energía oscura tendrá la forma (3.82): $\rho_{0\Lambda_i} = c_i\omega_i\rho_{GU} + \rho_{0\Lambda_1}$;
 3. y la expresión del “redshift” inicial se obtiene (3.84): $z_{ini} = [44101.4333 \cdot (0.685 - 0.3150907 \cdot c_i\omega_i)/(c_i\omega_i + 1) + 1]^{1/4} - 1$.

3.10. Comprobación de modelo con datos de cronómetro cósmico

Se usan datos de cronómetros cósmicos (Ver Tabla 3.3) para comprobar que el modelo de materia se ajusta bien al modelo estándar y contrastar sus predicciones. Los datos observacionales de Hubble (‘Observational Hubble Data’, OHD por sus siglas en inglés) corresponden a galaxias estándar con misma metalicidad, luminosidad y producción de estrellas baja (lo que equivale a galaxias viejas), así como que deben tener en comparación “redshift” similares. Los procesados son obtenidos mediante la expresión del parámetro de Hubble [42]:

$$H(z) = -\frac{1}{z+1} \frac{dz}{dt}, \quad (3.87)$$

y corresponden a datos libres de sesgo de modelo, donde dz/dt se mide utilizando la función de ruptura $D4000(z)$. Este método es usado por esta libertad de sesgo, en comparación a los datos BAO que dependen del modelo Λ CDM. El parámetro $H(z)$ libre de sesgo del modelo es muy útil para comparar la veracidad de modelos cosmológicos, los cuales se contrastan mediante la expresión:

$$\chi^2_{OHD} = \sum_{i=1}^{N_{OHD}} \frac{[H(z_i) - H_{Obs}(z_i)]^2}{\sigma_{H_i}^2}; \quad (3.88)$$

donde se toman los N_{OHD} datos comparando la $H(z_i)$ del modelo estudiado y la $H_{Obs}(z_i)$ observada, divididas entre el error asociado $\sigma_{H_i}^2$. Por definición, los modelos que minimicen el valor de χ^2 son los que mejor se ajustan a los datos.

La función $D4000$ depende de la metalicidad y de la población estelar, haciendo que la técnica empleada mida directamente el parámetro Hubble de datos espectroscópicos de galaxias en evolución pasiva, proporcionando $H(z)$ independiente del modelo [43]. El método usado parte de la estadística inferencial, cuyos resultados basados en datos representativos pueden concluir observaciones de toda una población (en contraste a la descriptiva que concluye para los datos empleados solamente), y lo mejor es tomarlo desde un punto de vista bayesiano, que postula la probabilidad de un suceso dependiente de que no ocurra: $P(H|E) = P(H)P(E|H)/P(E)$, siendo, en otras palabras, que un dato depende de todos los datos de la muestra. Para este análisis de modelo cosmológico, se usará una postura bayesiana de estadística inferencial. Para el análisis de los parámetros de dichos modelos, se usan cadenas de Markov de modo que en el método de Monte Carlo se obtenga que la función de distribución sea la misma que la verosimilitud (cuya forma esta dada por la minimización de χ^2). El método de la cadena de Markov calcula la distribución de un punto anterior a partir de uno anterior (utilizando el algoritmo de Metropolis-Hastings que tiene forma del Teorema de Bayes) a manera que se minimice la χ^2 . A continuación, se hace un contraste de los datos OHD con el modelo de materia estudiado, encontrando el valor óptimo en la intersección de la cruz de la gráfica h vs z_{ini} (Ver Figura 3.11):

Los datos usados son los mismos 52 puntos de $H(z)$ usados en [42] para el modelo de expansión Cardassian (Ver Tabla 3.3 al final del capítulo), estos puntos son mediciones hechas en galaxias distantes y quedan libres de sesgos de modelo al hacer su análisis. Usando el programa en “python” de García-Aspeitia en el cual se modela la cosmología de Gravedad Unimodular, se encuentran valores para h y para z_{ini} aceptados y mostrados en la figura anterior. El valor más aceptado es de $z_{ini} = 11.93$, pero existe una región de $z_{ini} \in [11.7, 12.2]$ que regresa valores aceptados de h , del cual el valor medido por Planck es $h = 0.678$ [6]. En la Tabla 3.2 se muestran los valores de los parámetros obtenidos en una corrida del programa, donde se tiene 200 pasos y 2000 cadenas.

Con los datos obtenidos, se puede decir que los modelos que mejor se ajustan son los de valores acotados $[-0.19, 0.82]$ (Ver Figura 3.12). Se toma válido tanto para valores de b como de b' que modelan A aceptadas para la Edad del Universo. Es notable que todos los valores válidos para A son acotados aún más por estos valores de z_{ini} obtenidas de las mediciones. Las características

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR
3.10. COMPROBACIÓN DE MODELO CON DATOS DE CRONÓMETRO CÓSMICO

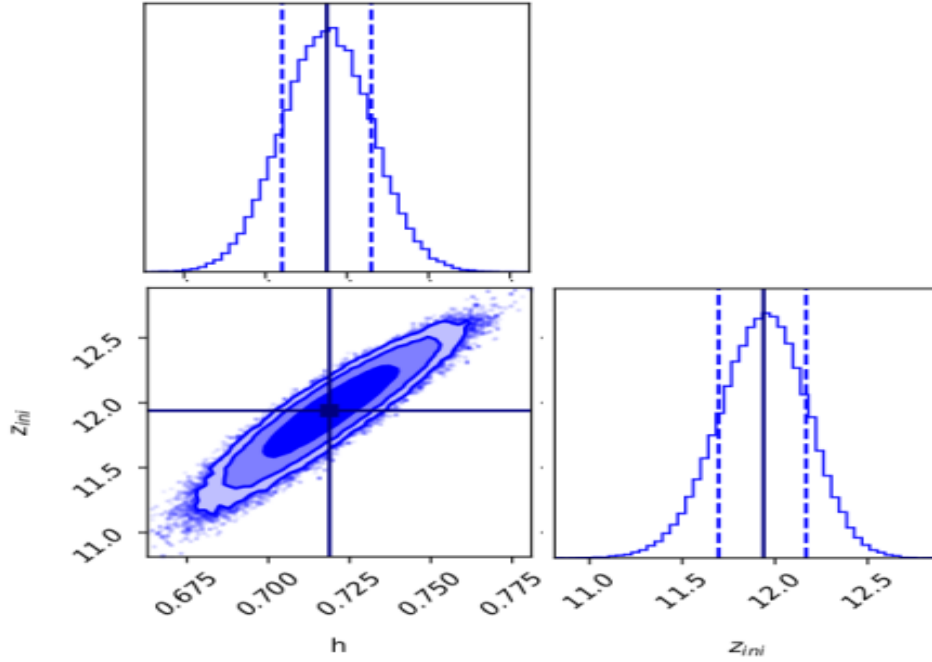


Figura 3.11: Datos obtenidos de Cronómetros Cósmicos

h	0.71834	$+0.01396$ -0.01372
Ω_{0m}	0.49776	$+0.3404$ -0.33787
z_{ini}	11.93318	$+0.23202$ -0.23963
χ^2_{min}	17.54609	

Tabla 3.2: Valores de los parámetros obtenidos por el método de Markov Monte Carlo

finales que se pueden resaltar de estos modelos son que predicen una Edad del Universo bastante cercana a la medida para valores de b y b' cercanas a cero. El modelo de Gravedad Unimodular ya predice una energía oscura emergente pero, para valores negativos de b se hace una aparición suavizada y de igual forma para valores positivos siendo ahora este el caso que modela una energía oscura que no emerge, sino más bien disminuye su valor. Debido a la etapa de desaceleración del Universo cercana a la Época de Recombinación, es preferible los valores negativos de b ante los positivos; más no se descarta la posibilidad de valores positivos.

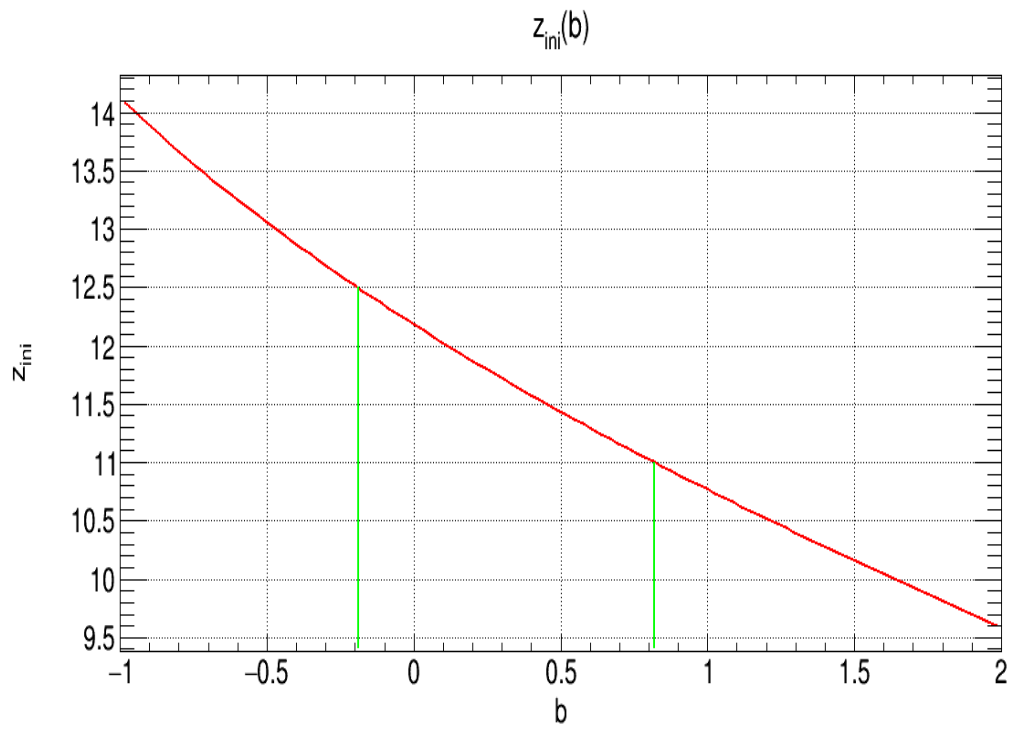


Figura 3.12: $z_{ini}(b)$ comportamiento para valores aceptados de b y z_{ini}

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR

3.10. COMPROBACIÓN DE MODELO CON DATOS DE CRONÓMETRO CÓSMICO

z	$H(z) (kms^{-1}Mpc^{-1})$	$\sigma_H (kms^{-1}Mpc^{-1})$
0	73.24	1.74
0.07	69	19.6
0.1	69	12
0.12	68.6	26.2
0.17	83	8
0.1791	75	4
0.1993	75	5
0.2	72.9	29.6
0.24	79.69	2.65
0.27	77	14
0.28	88.8	36.6
0.3	81.7	6.22
0.31	78.17	4.74
0.35	82.7	8.4
0.3519	83	14
0.36	79.93	3.39
0.38	81.5	1.9
0.3802	83	13.5
0.4	95	17
0.4004	77	10.2
0.4247	87.1	11.2
0.43	86.45	3.68
0.44	82.6	7.8
0.4497	92.8	12.9
0.47	89	34
0.4783	80.9	9
0.48	97	62
0.51	90.4	1.9
0.52	94.35	2.65
0.56	93.33	2.32
0.57	92.9	7.8
0.59	98.48	3.19
0.5929	104	13
0.6	87.9	6.1
0.61	97.3	2.1
0.64	98.82	2.99
0.6797	92	8
0.73	97.3	7
0.7812	105	12
0.8754	125	17
0.88	90	40
0.9	117	23
1.037	154	20
1.3	168	17
1.363	160	33.6
1.43	177	18
1.53	140	14
1.75	202	40
1.965	186.5	50.4
2.33	224	8
2.34	222	7
2.36	226	8

Tabla 3.3: Datos OHD de $H(z)$ mostrados en [42] donde se especifican las referencias y el método de observación.

Conclusiones

Durante esta tesis se explicaron y discutieron las teorías de Relatividad General y de Cosmología, pasando por sus antecedentes, las herramientas necesarias para su construcción, las ecuaciones que las describen, sus aplicaciones en el caso de Relatividad General, así como la evolución del Universo, datos observables y problemas en el caso de Cosmología; se trabajó con el modelo de Gravedad Unimodular, presentando la inspiración del modelo una vez presentadas sus bases en los dos capítulos anteriores, desarrollando este por el camino de [38] y, posteriormente, desarrollando la cosmología con la guía de [6]. Se discute la importancia de esta teoría y de sus partes, entre ellas las del parámetro “jerk”, del cual se termina por encontrar su expresión general. Una vez hallada la forma general del “jerk”, se propuso recuperar la ecuación de continuidad de la Relatividad General, con el fin de encontrar una expresión como vía a solucionar la forma del “jerk”. La idea a tratar era encontrar diversas soluciones a este parámetro, y de ahí analizar la cosmología que estas implican, o determinar si la solución hallada en el artículo de García-Aspeitia era única. Al mismo tiempo, se observó que las ecuaciones resultantes eran dependientes de las especies de densidad ρ_i y del factor de proporcionalidad de las especies de densidad ω_i ; por esto mismo, se toman inicialmente tres casos: solo considerando materia (al ser dominante), considerando una combinación lineal de materia y radiación y, finalmente, considerando una combinación lineal de materia, radiación y alguna especie desconocida que se toma como potencial. Así, se igualó la ecuación de continuidad de Gravedad Unimodular con la de Relatividad General, encontrando la expresión del “jerk” mostrando que, para el caso de solo materia, el parámetro tiene dependencia con la densidad de radiación; esto último acorde con el resultado encontrado en el artículo antes mencionado. Una vez hecho esto, se sustituyó en la ecuación de Friedmann de Gravedad Unimodular y se predispuso a recuperar el modelo estándar de cosmología, haciendo que se encuentre la parte de la ecuación correspondiente a la energía oscura emergente y con la forma $\rho_{0\Lambda_1} = \rho_{0r}/4(a_0^{-4} - 1)$. Esto no significa que la densidad correspondiente a la energía oscura deba ser la de radiación, pero sí que hereda sus valores al desarrollar el término de ajuste de la teoría. El valor en el que emerge esta especie de energía oscura coincide con el encontrado por García-Aspeitia de $a_0 = 0.07$, que se encuentra al recuperar el valor observado del parámetro cosmológico de energía oscura de Λ CDM, i.e, $\Omega_\Lambda = 0.685$. Este modelo de energía oscura corresponde con una constante cosmológica emergente.

Para los siguientes modelos, se siguió el mismo algoritmo de encontrar la forma del “jerk” al considerar las diferentes especies, seguido de sustituir en la ecuación de Friedmann y encontrar la relación de densidad de energía oscura correspondiente. Para el segundo caso, que toma una combinación lineal de materia y radiación, se encuentra que el parámetro de densidad de energía oscura es la misma constante hallada al considerar solo materia, i.e. $\rho_{0\Lambda_1}$, más la densidad de Gravedad Unimodular definida por $\rho_{UG} = \rho_m + \rho_r + \rho_{0\Lambda_1}$ ajustada por el factor de proporcionalidad de densidad de este segundo modelo $\omega_2 = b/3$. Se hace una corrección de a_0 al recuperar el valor del parámetro de densidad de energía oscura medido en el modelo estándar, y se sustituye en todos los términos dependientes de este. Se observa la relación entre las variables b, z, Ω_Λ y se determina que para valores negativos de b se modela una energía oscura emergente de manera suave, y para valores de b cercanos a 0 se halla que $z_{ini} \approx 12$. Solo se estudió cuando los valores de b son constantes, pero se discute sobre una familia entera de soluciones dadas por $b = b(z)$ de manera que puedan tomar distintos valores tanto en $b > 0$ como de $b < 0$, siguiendo la superficie trazada por la

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR

3.10. COMPROBACIÓN DE MODELO CON DATOS DE CRONÓMETRO CÓSMICO

gráfica de $b - z - \Omega_\Lambda$, ayudando a no restringirse a una posible única solución que reproduzca cómo emerge la energía oscura en época de reionización. Finalmente, se acotan los valores de b entre $[-1, 2]$ y entre $[-1, 1]$ para a_0 con y sin corrección, respectivamente, al calcular valores aceptados (en este estudio) de la Edad del Universo; se hallan los mejores ajustes. En la siguiente exploración se incluye una densidad potencial ρ_p , considerada lo suficientemente pequeña para no afectar a las otras densidades en la ecuación, pero sí contribuyendo su factor de proporcionalidad ω_p a la ω del modelo, tal como lo hace el de radiación. La razón de ser un valor insignificantes surge de las observaciones y del deseo de obtener una energía oscura surgida naturalmente de las ecuaciones y datos observados, de modo que debe ser lo suficientemente pequeño como para ser desconocido. Al proceder a realizar un ajuste de z_{ini} , se encuentra que este tendrá la misma forma que el encontrado para la segunda exploración, renombrando $b' = b + 3c\omega_p$. Por lo que, para esta interacción, es interesante ver el comportamiento de estas tres variables a modo que reproduzcan los valores de el valor de ajuste A de la Edad del Universo; para esto, se pueden considerar valores fijos de A o todos al usar la función de ajuste. Se encuentran resultados bastante resaltantes, que evolucionan para diversos valores de c, ω_p (con b restringida a valores que reproducen la edad del Universo) y que hacen pensar en la creación de funciones cíclicas o de cualquier comportamiento regido por la función de ajuste.

Se logra encontrar un comportamiento predecible para las ecuaciones que caracterizan estas tres interacciones, por lo que es fácil crear una forma general de combinaciones lineales $c_i\omega_i$ para las diversas expresiones analizadas de “jerk”, ecuación de Friedmann, parámetro de densidad de energía oscura y z_{ini} corregido; todo regulado por la Edad del Universo y la ecuación de ajuste encontrada. De aquí, se propone un avance a futuro, con campos escalares dependientes del tiempo; primero para uno solo y luego para una combinación de campos dependientes del tiempo y valores constantes, haciendo de esta forma todo dependiente de una única variable: el tiempo, o el “redshift” z en observaciones. De esto último, incluyendo el análisis de la ecuación de ajuste y la posibilidad de una función $b(z)$, se hacen infinitas las posibles funciones para definir el comportamiento de la energía oscura. El dilema, referente a esto, es encontrar una interpretación física de las expresiones matemáticas encontradas, así como de un mejor soporte al modelo (observaciones y más teoría, principalmente). Finalmente, se realiza un análisis numérico por el método de Markov-Monte Carlo de los datos del parámetro $H(z)$ obtenidos de los “OHD” y de los propuestos por el modelo de materia, obteniendo valores mediante cadenas de Markov con el uso del algoritmo de Metropolis. Se confirma el valor predicho de z_{ini} y, con el intervalo de confianza, se logra acotar aún más los valores de los parámetros b y b' para el modelo de radiación y para el modelo que incluye un potencial y el modelo general.

Apéndice A

Relatividad General

A.1. Construcción del Tensor de Riemann

El siguiente procedimiento sigue el método estándar encontrado en la literatura, como de [7] a [9] y de [11] a [17], donde se puede observar su desarrollo mejor detallado. El tensor Riemann se construye con la diferencia, al intercambiar índices, de realizar una segunda derivada covariante a un vector, denotado como:

$$(A^\eta e_\eta)_{,\mu\nu} - (A^\eta e_\eta)_{,\nu\mu} = R_{\sigma\mu\nu}^\lambda A^\sigma e_\lambda, \quad (\text{A.1})$$

siendo $A = A^\eta e_\eta$ un vector, y los índices μ, ν las direcciones clave para medir el cambio en una superficie curva [12]. Si no existe torsión, se puede realizar la derivada covariante del vector, tal que coincide $\delta_\nu(A^\eta e_\eta) = (A^\eta e_\eta)_{,\nu} = \nabla_\nu(A^\eta e_\eta)$. Por la regla de Leibniz $(A^\eta e_{\eta a})_{,\nu} = \nabla_\nu(A^\eta e_\eta) = (\nabla_\nu A^\eta) e_\eta + A^\eta (\nabla_\nu e_\eta)$. La derivada covariante sobre la base opera como (1.1), mientras que el componente contravariante del vector será operado como $\nabla_\nu = \partial_\nu$ (aplicable solo en este caso, dado que la información del vector es contenida en la base). Luego, se procede a realizar la segunda derivada:

$$(A^\eta e_\eta)_{,\nu\mu} = A^\eta_{,\nu\mu} e_\eta + A^\eta e_{\eta,\nu\mu} + A^\eta_{,\nu} e_{\eta,\mu} + A^\eta_{,\mu} e_{\eta,\nu}, \quad (\text{A.2})$$

de donde, se prosigue a realizar el lado izquierdo de (A.1):

$$(A^\eta e_\eta)_{,\mu\nu} - (A^\eta e_\eta)_{,\nu\mu} = (A^\eta_{,\mu\nu} - A^\eta_{,\nu\mu}) e_\eta + A^\eta (e_{\eta,\mu\nu} - e_{\eta,\nu\mu}); \quad (\text{A.3})$$

donde el primer término se hace cero dado a lo discutido arriba y a que es continuo, por lo que se reescribe:

$$(A^\eta e_\eta)_{,\mu\nu} - (A^\eta e_\eta)_{,\nu\mu} = A^\eta (e_{\eta,\mu\nu} - e_{\eta,\nu\mu}). \quad (\text{A.4})$$

Por esto, solo es necesario conservar la base (dado que esta posee toda la información del vector; aunque de usar la componente contravariante del vector, entonces este debe poseer toda la información del vector y se operaría como la forma usual de la derivada covariante de un vector). Así, se puede reescribir (A.1) como:

$$e_{\eta,\mu\nu} - e_{\eta,\nu\mu} = R_{\eta\mu\nu}^\lambda e_\lambda; \quad (\text{A.5})$$

que opera como (1.1), por lo que se puede denotar como:

$$(\partial_{\mu\nu} - \partial_{\nu\mu}) e_\eta = R_{\eta\mu\nu}^\lambda e_\lambda. \quad (\text{A.6})$$

Entonces, usando (1.1), se prosigue a realizar la segunda derivada de la base:

$$e_{\eta,\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\eta\mu}^\lambda e_\lambda + \Gamma_{\eta\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho e_\rho; \quad (\text{A.7})$$

APÉNDICE A. RELATIVIDAD GENERAL
A.1. CONSTRUCCIÓN DEL TENSOR DE RIEMANN

o bien:

$$e_{\eta,\mu\nu} = (\partial_\nu \Gamma_{\eta\mu}^\lambda + \Gamma_{\eta\mu}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda) e_\lambda. \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, se realiza la diferencia de (A.6):

$$(\partial_{\mu\nu} - \partial_{\nu\mu}) e_\eta = (\partial_\nu \Gamma_{\eta\mu}^\lambda - \partial_\mu \Gamma_{\eta\nu}^\lambda + \Gamma_{\eta\mu}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda - \Gamma_{\eta\nu}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda) e_\lambda; \quad (\text{A.9})$$

aplicable para toda base, siendo así que el tensor de Riemman es:

$$R_{\eta\mu\nu}^\lambda = \partial_\nu \Gamma_{\eta\mu}^\lambda - \partial_\mu \Gamma_{\eta\nu}^\lambda + \Gamma_{\eta\mu}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda - \Gamma_{\eta\nu}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda. \quad (\text{A.10})$$

Apéndice B

Cosmología

B.1. Construcción del Tensor de Riemann y del escalar de Ricci a partir del elemento de línea FLRW

Del elemento de línea, se ve que:

$$e_0 \cdot e_0 = g_{00} = -1, \quad e_i \cdot e_j = g_{ij} = \delta_j^i a^2(t) \quad \text{y} \quad e_0 \cdot e_j = g_{0j} = 0; \quad (\text{B.1})$$

donde, al realizar sus parciales (1.1), se obtienen los símbolos de Christoffel. Primero respecto a ∂_0 , se tiene para los primeros dos términos de (B.1):

$$\partial_0(e_0 \cdot e_0) = 0 \quad \text{y} \quad \partial_0(e_i \cdot e_j) = \delta_j^i \partial_0(a^2(t)), \quad (\text{B.2})$$

de donde, al usar la regla de Leibniz y (1.1), se obtiene:

$$2(\Gamma_{00}^0 e_0 + \Gamma_{00}^i e_i) \cdot e_0 = 0 \quad \text{y} \quad 2(\Gamma_{i0}^0 e_0 + \Gamma_{i0}^k e_k) \cdot e_j = \delta_i^j 2a(t)\dot{a}(t); \quad (\text{B.3})$$

y sustituyendo (B.1):

$$\Gamma_{00}^0 g_{00} = 0 \quad \text{y} \quad \Gamma_{i0}^k g_{kj} = \delta_j^i a(t)\dot{a}(t). \quad (\text{B.4})$$

Finalmente, sustituyendo lo que vale la métrica, aparece la expresión de la conexión o símbolos de Christoffel para estos primeros índices:

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad \Gamma_{i0}^k = \delta_i^k \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (\text{B.5})$$

Ahora, respecto a las coordenadas espaciales ∂_k , para los primeros dos términos de (B.1):

$$\partial_k(e_0 \cdot e_0) = 0, \quad \partial_k(e_i \cdot e_j) = 0; \quad (\text{B.6})$$

que, una vez usada (1.1):

$$2(\Gamma_{0k}^0 e_0 + \Gamma_{0k}^i e_i) \cdot e_0 = 0, \quad 2(\Gamma_{ik}^0 e_0 + \Gamma_{ik}^i e_i) \cdot e_j = 0, \quad (\text{B.7})$$

donde se sustituye (B.1), obteniendo estos símbolos de Christoffel para estos segundos índices:

$$\Gamma_{0k}^0 = 0, \quad \Gamma_{ik}^i = 0. \quad (\text{B.8})$$

Ahora, el último término de (B.1):

$$\partial_0(e_0 \cdot e_j) = 0, \quad \partial_k(e_0 \cdot e_j) = 0; \quad (\text{B.9})$$

APÉNDICE B. COSMOLOGÍA

B.1. CONSTRUCCIÓN DEL TENSOR DE RIEMANN Y DEL ESCALAR DE RICCI A PARTIR DEL ELEMENTO DE LÍNEA FLRW

aplicando la regla de Leibniz, (1.1) y desarrollando la parcial:

$$(\Gamma_{00}^0 e_0 + \Gamma_{00}^i e_i) \cdot e_j + (\Gamma_{j0}^0 e_0 + \Gamma_{j0}^i e_i) \cdot e_0 = 0, \quad (\Gamma_{0k}^0 e_0 + \Gamma_{0k}^i e_i) \cdot e_j + (\Gamma_{jk}^0 e_0 + \Gamma_{jk}^i e_i) \cdot e_0 = 0; \quad (\text{B.10})$$

sustituyendo (B.1):

$$\Gamma_{00}^i g_{ij} + \Gamma_{j0}^0 g_{00} = 0, \quad \Gamma_{0k}^i g_{ij} + \Gamma_{jk}^0 g_{00} = 0; \quad (\text{B.11})$$

o bien

$$\Gamma_{00}^i \delta_j^i a^2(t) - \Gamma_{j0}^0 = 0, \quad \Gamma_{0k}^i \delta_j^i a^2(t) - \Gamma_{jk}^0 = 0; \quad (\text{B.12})$$

finalmente, se identifica (B.8) en la primer expresión; se sustituye y se obtiene:

$$\Gamma_{00}^i = 0, \quad \Gamma_{jk}^0 = \delta_{jk} a(t) \dot{a}(t). \quad (\text{B.13})$$

Entonces, de los términos distintos de cero obtenidos en (B.5) y en (B.13), la conexión es:

$$\Gamma_{j0}^i = \delta_j^i \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad \Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij} a(t) \dot{a}(t). \quad (\text{B.14})$$

Ahora, calculando el tensor de Riemann usando (A.1), siendo ahora $A_\eta = e_\eta$ sin afectar lo ya calculado por (A.6). Se toman los únicos dos casos posibles dada la métrica (B.1): $\mu = 0, \nu = i$ y $\mu = i, \nu = j$. Primero el caso $\mu = 0, \nu = i$, donde se tienen tres casos para $\eta = 0, i, j$ (recordando que los índices griegos se usan para las cuatro componentes del espacio-tiempo, y los índices latinos para las componentes espaciales únicamente); así, sustituyendo los índices en (A.1):

$$(\partial_0 \partial_i - \partial_i \partial_0) e_0, \quad (\partial_0 \partial_i - \partial_i \partial_0) e_i, \quad (\partial_0 \partial_i - \partial_i \partial_0) e_j, \quad (\text{B.15})$$

los tres casos a la vez; se desarrolla usando el como se definió el símbolo de Christoffel (1.1) de manera explícita:

$$\begin{aligned} & \partial_0(\Gamma_{0i}^0 e_0 + \Gamma_{0i}^k e_k) - \partial_i(\Gamma_{00}^0 e_0 + \Gamma_{00}^k e_k), \\ & \partial_0(\Gamma_{ii}^0 e_0 + \Gamma_{ii}^k e_k) - \partial_i(\Gamma_{i0}^0 e_0 + \Gamma_{i0}^k e_k), \\ & \partial_0(\Gamma_{ji}^0 e_0 + \Gamma_{ji}^k e_k) - \partial_i(\Gamma_{j0}^0 e_0 + \Gamma_{j0}^k e_k); \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

se sustituye (B.14):

$$\partial_0 \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} e_i \right), \quad \partial_0 [a(t) \dot{a}(t) e_0] - \partial_i \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} e_i \right), \quad \delta_j^i \partial_0 [a(t) \dot{a}(t) e_0] - \partial_i \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} e_j \right); \quad (\text{B.17})$$

se hace uso de la regla de Leibniz y de (1.1):

$$\begin{aligned} & \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} e_i - \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} e_i + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} (\Gamma_{i0}^0 e_0 + \Gamma_{i0}^k e_k), \\ & (\dot{a}^2(t) e_0 + a(t) \ddot{a}(t) e_0 + a(t) \dot{a} [\Gamma_{00}^0 e_0 + \Gamma_{00}^k e_k]) - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} (\Gamma_{ii}^0 e_0 + \Gamma_{ii}^k e_k), \\ & \delta_j^i (\dot{a}^2(t) e_0 + a(t) \ddot{a}(t) e_0 + a(t) \dot{a} [\Gamma_{00}^0 e_0 + \Gamma_{00}^k e_k]) - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} (\Gamma_{ji}^0 e_0 + \Gamma_{ji}^k e_k); \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

se sustituye (B.14) y se simplifica

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} e_i = R_{00i}^i e_i, \quad (a(t) \ddot{a}(t)) e_0 = R_{i0i}^0 e_0, \quad \delta_j^i (a(t) \ddot{a}(t)) e_0 = R_{j0i}^0 e_0;$$

para todo e_η . Entonces:

$$R_{00i}^i = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \quad R_{i0i}^0 = a(t) \ddot{a}(t), \quad R_{j0i}^0 = \delta_j^i a(t) \ddot{a}(t). \quad (\text{B.19})$$

APÉNDICE B. COSMOLOGÍA

B.1. CONSTRUCCIÓN DEL TENSOR DE RIEMANN Y DEL ESCALAR DE RICCI A PARTIR DEL ELEMENTO DE LÍNEA FLRW

Ahora, el caso $\mu = i, \nu = j$, donde se tienen cuatro casos para $\eta = 0, i, j, k$. De la misma manera, se calculan los cuatro casos a la vez, se sustituye en (A.1):

$$(\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i) e_0, (\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i) e_i, (\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i) e_j, (\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i) e_k; \quad (\text{B.20})$$

se sustituye la forma explícita de (1.1):

$$\begin{aligned} & \partial_i(\Gamma_{0j}^0 e_0 + \Gamma_{0j}^k e_k) - \partial_j(\Gamma_{0i}^0 e_0 + \Gamma_{0i}^k e_k), \\ & \partial_i(\Gamma_{ij}^0 e_0 + \Gamma_{ij}^k e_k) - \partial_j(\Gamma_{ii}^0 e_0 + \Gamma_{ii}^k e_k), \\ & \partial_i(\Gamma_{jj}^0 e_0 + \Gamma_{jj}^k e_k) - \partial_j(\Gamma_{ji}^0 e_0 + \Gamma_{ji}^k e_k), \\ & \partial_i(\Gamma_{kj}^0 e_0 + \Gamma_{kj}^l e_l) - \partial_j(\Gamma_{ki}^0 e_0 + \Gamma_{ki}^l e_l); \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

se sustituye (B.14):

$$\begin{aligned} & \partial_i \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} e_j \right) - \partial_j \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} e_i \right), \\ & \delta_j^i \partial_i [a(t) \dot{a}(t) e_0] - \partial_j [a(t) \dot{a}(t) e_0], \\ & \partial_i [a(t) \dot{a}(t) e_0] - \delta_j^i \partial_j [a(t) \dot{a}(t) e_0], \\ & \delta_j^k \partial_i [a(t) \dot{a}(t) e_0] - \delta_i^k \partial_j [a(t) \dot{a}(t) e_0]; \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

se usa la regla de Leibniz y (1.1):

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} (\Gamma_{ji}^0 e_0 + \Gamma_{ji}^k e_k - \Gamma_{ij}^0 e_0 - \Gamma_{ij}^k e_k), \\ & 0, \\ & 0, \\ & a(t) \dot{a}(t) (\delta_{kj} [\Gamma_{0i}^0 e_0 + \Gamma_{0i}^l e_l] - \delta_{ki} [\Gamma_{0j}^0 e_0 + \Gamma_{0j}^l e_l]); \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

se sustituye (B.14):

$$0, 0, 0, a(t) \dot{a}(t) \left(\delta_{kj} \delta_i^l \left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} e_l \right] - \delta_{ki} \delta_j^l \left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} e_l \right] \right); \quad (\text{B.24})$$

se simplifica:

$$0 = R_{0ij}^0 e_0, 0 = R_{ijj}^0 e_0, 0 = R_{jij}^0 e_0, \dot{a}^2(t) (\delta_{kj} \delta_i^l - \delta_{ki} \delta_j^l) e_l = R_{kij}^l e_l, \quad (\text{B.25})$$

para todo e_η . Así:

$$0 = R_{0ij}^i, 0 = R_{iij}^0, 0 = R_{jij}^0, \dot{a}^2(t) (\delta_{kj} \delta_i^l - \delta_{ki} \delta_j^l) = \dot{a}^2(t) (\epsilon_{klm} \epsilon_{jim}) = R_{kij}^l. \quad (\text{B.26})$$

Los únicos términos que no se hacen cero, de los casos vistos (B.19) y (B.26), son:

$$R_{00i}^i = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, R_{i0j}^0 = \delta_{ij} [a(t) \ddot{a}(t)], R_{ikj}^l = \dot{a}^2(t) (\epsilon_{ilm} \epsilon_{jkm}). \quad (\text{B.27})$$

Ahora, se construye el tensor de Ricci, recordando que es una contracción de índices repetidos del Tensor de Riemann (1.4). También recordando las propiedades del tensor de Levi-Civita (enunciadas en la sección de Herramientas Tensoriales de la Relatividad General) y que la suma en índices cuenta para tres coordenadas espaciales, entonces:

$$R_{00} = -R_{0i0}^i = -3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, R_{ij} = R_{i0j}^0 + R_{ikj}^k = \delta_{ij} [a(t) \ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t)]. \quad (\text{B.28})$$

APÉNDICE B. COSMOLOGÍA

B.1. CONSTRUCCIÓN DEL TENSOR DE RIEMANN Y DEL ESCALAR DE RICCI A PARTIR DEL ELEMENTO DE LÍNEA FLRW

Para construir el escalar de Ricci, se debe hacer una contracción con la métrica $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$; por lo que es necesario calcular antes la métrica contravariante a (B.1):

$$e^0 \cdot e^0 = g^{00} = -1, \quad e^i \cdot e^j = g^{ij} = \delta^{ij} \frac{1}{a^2(t)}, \quad e^0 \cdot e^j = g^{0j} = 0. \quad (\text{B.29})$$

Entonces, el escalar de Ricci es:

$$R = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij}; \quad (\text{B.30})$$

sustituyendo (B.28) y (B.29):

$$R = 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \delta^{ij} \frac{1}{a^2(t)} \delta_{ij} [a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t)]; \quad (\text{B.31})$$

que cuenta para tres índices espaciales:

$$R = 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{1}{a^2(t)} [3a(t)\ddot{a}(t) + 6\dot{a}^2(t)]; \quad (\text{B.32})$$

que se simplifica:

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right]. \quad (\text{B.33})$$

Los resultados importantes de este apéndice son (B.28) y (B.33).

Apéndice C

Cosmología de Gravedad Unimodular

C.1. Análisis de índices del Tensor de Energía-Momento para FLRW

Partiendo de (3.17), se analizan los índices. Los únicos, dada la forma diagonal de la métrica, son los temporales y espaciales de índices repetidos. Primero se analiza $\mu = 0, \nu = 0$, que se sustituyen en (3.17):

$$\begin{aligned} R_{00} - g_{00}3 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] - 8\pi G [pg_{00} + (p + \rho)u_0u_0] \\ = - \left(\frac{3}{2} \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 2\pi G [3p - \rho] \right) g_{00}; \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

se sustituyen (B.1) y (B.28):

$$\begin{aligned} -3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 3 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] - 8\pi G [-p + (p + \rho)] \\ = + \left(\frac{3}{2} \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 2\pi G [3p - \rho] \right); \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

se simplifica:

$$3 \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 - 8\pi G \rho = \frac{3}{2} \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 2\pi G [3p - \rho]; \quad (\text{C.3})$$

se multiplica por 2/3:

$$2 \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 - \frac{16}{3} \pi G \rho = \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + \frac{4}{3} \pi G [3p - \rho]; \quad (\text{C.4})$$

se despeja $(\dot{a}/a)^2$:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{4}{3} \pi G [3p - \rho + 4\rho]; \quad (\text{C.5})$$

y se simplifica:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 4\pi G [p + \rho]. \quad (\text{C.6})$$

APÉNDICE C. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR
C.2. DERIVADA CONTRAVARIANTE DE LA ECUACIÓN DE CAMPO

Ahora, se analiza $\mu = \nu = i$ de (3.17). Sustituyendo índices:

$$\begin{aligned} R_{ii} - g_{ii} 3 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] - 8\pi G [pg_{ii} + (p + \rho)u_i u_i] \\ = - \left(\frac{3}{2} \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 2\pi G [3p - \rho] \right) g_{ii}; \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

se sustituyen (B.1) y (B.28):

$$\begin{aligned} [a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t)] - 3a^2(t) \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] - 8\pi G [pa^2(t)] = \\ - \left(\frac{3}{2} \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 2\pi G [3p - \rho] \right) a^2(t); \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

se divide todo por $-a^2$:

$$\begin{aligned} - \frac{[a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t)]}{a^2(t)} + 3 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 8\pi G [p] = \\ \frac{3}{2} \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 2\pi G [3p - \rho]; \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

se simplifica el lado izquierdo:

$$2 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{3}{2} \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 2\pi G [3p - 4p - \rho]; \quad (\text{C.10})$$

se multiplica por dos, se simplifica el lado derecho:

$$4 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 2 \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = 3 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] - 4\pi G [p + \rho]; \quad (\text{C.11})$$

se despeja $(\dot{a}/a)^2$:

$$- \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = - \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - 4\pi G [p + \rho]; \quad (\text{C.12})$$

y se cancelan signos:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 4\pi G [p + \rho]. \quad (\text{C.13})$$

De (C.6) y (C.13) se ve que es la misma ecuación $\forall \mu = \nu$.

C.2. Derivada contravariante de la ecuación de campo

Partiendo de (3.16), se realiza su derivada contravariante:

$$\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - 8\pi G T_{\mu\nu} = - \left(\frac{1}{4} R + 2\pi G T \right) g_{\mu\nu} \right); \quad (\text{C.14})$$

reescrita al distribuir términos:

$$\begin{aligned} \nabla^\mu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} [\nabla^\mu g_{\mu\nu}] R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [\nabla^\mu R] - 8\pi G [\nabla^\mu T_{\mu\nu}] = \\ - \left(\frac{1}{4} R + 2\pi G T \right) [\nabla^\mu g_{\mu\nu}] - \nabla^\mu \left(\frac{1}{4} R + 2\pi G T \right) g_{\mu\nu}; \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

APÉNDICE C. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR
C.3. DESARROLLO DE LA DERIVADA CONTRAVARIANTE EN FLRW

se sustituye la identidad de Bianchi (1.8), considerando también que $\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0$:

$$\frac{1}{2}\nabla_\nu R - \frac{1}{2}\nabla_\nu R - 8\pi G[\nabla^\mu T_{\mu\nu}] = -\nabla_\nu\left(\frac{1}{4}R + 2\pi GT\right); \quad (\text{C.16})$$

simplificando:

$$8\pi G\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\nabla_\nu R + 2\pi[\nabla_\nu GT]. \quad (\text{C.17})$$

Así, reescrita, se halla que:

$$\frac{1}{4}\nabla_\nu(R + 8\pi GT) = 8\pi G\nabla^\mu T_{\mu\nu}. \quad (\text{C.18})$$

C.3. Desarrollo de la derivada contravariante en FLRW

Partiendo de (3.21), se sustituye (1.10):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\nabla_\nu \left(6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 8\pi G[3p - \rho] \right) = \\ 8\pi G(\delta^\mu [pg_{\mu\nu} + (p + \rho)u_\mu u_\nu] - g^{\mu\gamma}\Gamma_{\mu\mu}^\sigma [pg_{\sigma\nu} + (p + \rho)u_\sigma u_\nu] \\ - g^{\mu\gamma}\Gamma_{\nu\mu}^\delta [pg_{\mu\delta} + (p + \rho)u_\mu u_\delta]); \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

se escribe de manera explícita el índice μ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\nabla_\nu \left(6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 8\pi G[3p - \rho] \right) = \\ 8\pi G(\delta^0 [pg_{0\nu} + (p + \rho)u_0 u_\nu] - g^{0\gamma}\Gamma_{00}^\sigma [pg_{\sigma\nu} + (p + \rho)u_\sigma u_\nu] - g^{0\gamma}\Gamma_{\nu 0}^\delta [pg_{0\delta} + (p + \rho)u_0 u_\delta]) \\ + 8\pi G(\delta^i [pg_{i\nu} + (p + \rho)u_i u_\nu] - g^{i\gamma}\Gamma_{ii}^\sigma [pg_{\sigma\nu} + (p + \rho)u_\sigma u_\nu] - g^{i\gamma}\Gamma_{\nu i}^\delta [pg_{i\delta} + (p + \rho)u_i u_\delta]); \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

solo sobreviven los índices que sean iguales en la métrica (y por definición, que no sean todos los índices iguales en la conexión):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\nabla_\nu \left(6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 8\pi G[3p - \rho] \right) = \\ 8\pi G(\delta^0 [pg_{00} + (p + \rho)u_0 u_0] - g^{00}\Gamma_{\nu 0}^0 [pg_{00} + (p + \rho)u_0 u_0]) \\ + 8\pi G(\delta^i [pg_{ii} + (p + \rho)u_i u_i] - g^{ii}\Gamma_{ii}^\sigma [pg_{\sigma\sigma} + (p + \rho)u_\sigma u_\sigma] - g^{ii}\Gamma_{\nu i}^i [pg_{i\delta} + (p + \rho)u_i u_i]); \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

sustituyendo (B.1), (B.29) y la normalización de la cuadrivelocidad (tal que $u_0 = 1$ y $u_i = 0$ de un sistema comóvil), así como respetando las únicas conexiones que sobreviven (B.14):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\nabla_\nu \left(6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 8\pi G[3p - \rho] \right) = \\ 8\pi G(\delta^0 [\rho]) + 8\pi G \left(\delta^i [pa^2(t)] - \frac{1}{a^2(t)}\Gamma_{ii}^\sigma [pg_{\sigma\sigma} + (p + \rho)u_\sigma u_\sigma] - \frac{1}{a^2(t)}\Gamma_{\nu i}^i [pa^2(t)] \right); \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

la presión es constante y debido a (B.14), solo sobrevive los índices griegos que sean igual a cero de las conexiones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\nabla_\nu \left(6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 8\pi G[3p - \rho] \right) = \\ -8\pi G\dot{\rho} - 8\pi G \left(\frac{1}{a^2(t)}\Gamma_{ii}^0 [pg_{00} + (p + \rho)u_0 u_0] + \frac{1}{a^2(t)}\Gamma_{0i}^i [pa^2(t)] \right); \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

APÉNDICE C. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR
C.4. DESARROLLO DERIVADA PARCIAL RESPECTO AL TIEMPO

sustituyendo (B.1), el valor de las velocidades y (B.14) en suma con las tres coordenadas espaciales:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\nabla_\nu \left(6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 8\pi G[3p - \rho] \right) = \\ -8\pi G\dot{\rho} - 8\pi G \left(\frac{1}{a^2(t)} 3a(t)\dot{a}(t)[\rho] + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}p \right); \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

que se simplifica como:

$$\frac{1}{4}\nabla_\nu \left(6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 8\pi G[3p - \rho] \right) = -8\pi G \left(\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}[\rho + p] \right); \quad (\text{C.25})$$

por lo que se tiene:

$$\nabla_\nu \left(6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 8\pi G[3p - \rho] \right) = -32\pi G \left(\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}[\rho + p] \right). \quad (\text{C.26})$$

C.4. Desarrollo derivada parcial respecto al tiempo

Partiendo de (3.22), i.e., el resultado (C.26); con la consideración hecha de ser el resultado funciones escalares, siendo ahora la derivada covariante una parcial, se sustituye así la derivada covariante por parcial respecto al tiempo, dado que las funciones escalares solo dependen del tiempo (siendo así que la parcial respecto al tiempo es la única que sobrevive):

$$\delta_0 \left(6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] + 8\pi G[3p - \rho] \right) = -32\pi G \left(\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}[\rho + p] \right); \quad (\text{C.27})$$

del lado derecho, se hace la sustitución $\omega = p/\rho$ y se desarrolla la derivada:

$$\begin{aligned} 6 \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\ddot{a}(t)\dot{a}(t)}{a^2(t)} + 2 \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right) \left(\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right]^2 \right) \right] + 8\pi G[3\omega - 1]\dot{\rho} = \\ -32\pi G \left(\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}[\rho + p] \right); \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

se divide todo por $-32\pi G$ con el fin de dejar libre el lado izquierdo, y se simplifica el lado izquierdo:

$$\frac{3}{16\pi G} \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right) \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \right] - 2 \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^3 \right] + \frac{1}{4}[3\omega - 1]\dot{\rho} = -\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}[\rho + p]; \quad (\text{C.29})$$

sustituyendo $\dot{a}(t)/a(t) = H$ y $\ddot{a}(t)/a(t) = \dot{H} + H^2$:

$$\frac{3}{16\pi G} \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + H \left[\dot{H} + H^2 \right] - 2H^3 + \frac{4\pi G}{3}[3\omega - 1]\dot{\rho} \right] = -\dot{\rho} - 3H[\rho + p]. \quad (\text{C.30})$$

C.5. Ecuación de continuidad

Sustituyendo (3.19) en (3.23), i.e., en (C.30):

$$\frac{3}{16\pi G} \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + H \left[-4\pi G[p + \rho] + H^2 \right] - 2H^3 + \frac{4\pi G}{3}[3\omega - 1]\dot{\rho} \right] = -\dot{\rho} - 3H[\rho + p]; \quad (\text{C.31})$$

distribuyendo H y simplificando el lado izquierdo:

$$\frac{3}{16\pi G} \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - H^3 - 4\pi G[p + \rho]H + \frac{4\pi G}{3}[3\omega - 1]\dot{\rho} \right] = -\dot{\rho} - 3H[\rho + p]; \quad (\text{C.32})$$

se acomodan los términos de la izquierda, teniendo en mente la definición $\ddot{a}/a = jH^3$, haciendo así que se aislen los términos dependientes de H^3 :

$$\frac{3}{16\pi G} \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - H^3 \right] - \frac{3}{4}[p + \rho]H + \frac{1}{4}[3\omega - 1]\dot{\rho} = -\dot{\rho} - 3H[\rho + p]; \quad (\text{C.33})$$

usando $\ddot{a}(t)/a(t) = jH^3$, el parámetro “Jerk”, se obtiene al despejar los términos con H^3 :

$$\frac{3}{16\pi G} H^3 [j - 1] = \frac{3}{4}[p + \rho]H - \frac{1}{4}[3\omega - 1]\dot{\rho} - \dot{\rho} - 3H[\rho + p]; \quad (\text{C.34})$$

donde el lado derecho se simplifica:

$$\frac{3}{16\pi G} H^3 [j - 1] = -\frac{9}{4}[p + \rho]H - \frac{3}{4}[\omega + 1]\dot{\rho}; \quad (\text{C.35})$$

se cancela el factor común $3/4$ y se sustituye $\omega = p/\rho$:

$$-\frac{1}{4\pi G} H^3 [j - 1] = 3[\omega + 1]\rho H + [\omega + 1]\dot{\rho}; \quad (\text{C.36})$$

que simplificada, resulta:

$$-\frac{1}{4\pi G} \frac{H^3[j - 1]}{[\omega + 1]} = 3\rho H + \dot{\rho}, \quad (\text{C.37})$$

o bien reescrita de otra forma, la ecuación de continuidad:

$$-\frac{H^3[j - 1]}{4\pi G(1 + \omega)} = \dot{\rho} + 3\rho H. \quad (\text{C.38})$$

C.6. Integración de la variación de H^2 para obtener la ecuación de Friedmann

Tomando como base (3.28), se realiza del lado izquierdo la integral respecto a H^2 , renombrada al ser integrada como H_{UG}^2 , y del lado derecho respecto al tiempo:

$$H_{UG}^2 = \frac{8\pi G\rho[\omega + 1]}{3} + \int \frac{2H^3[j - 1]}{3} dt; \quad (\text{C.39})$$

siendo así, la integral que requiere trabajo la que mantiene el término j . Debido a que el único término que depende implícitamente del tiempo es H , la integral debe depender de esta; de manera explícita, depende de a , así que usando la regla de la cadena, se escoge un término a beneficio de realizar este cambio de variable en la integral:

$$H_{UG}^2 = \frac{8\pi G\rho[\omega + 1]}{3} + \frac{2}{3} \int H^3[j - 1] \frac{da(t)}{da(t)} dt; \quad (\text{C.40})$$

así, la integral se transforma respecto al factor de escala:

$$H_{UG}^2 = \frac{8\pi G\rho[\omega + 1]}{3} + \frac{2}{3} \int H^3[j - 1] \frac{dt}{da} da; \quad (\text{C.41})$$

APÉNDICE C. COSMOLOGÍA DE GRAVEDAD UNIMODULAR
C.6. INTEGRACIÓN DE LA VARIACIÓN DE H^2 PARA OBTENER LA ECUACIÓN DE
FRIEDMANN

por la regla de la derivada de la función inversa, se reescribe:

$$H_{UG}^2 = \frac{8\pi G\rho[\omega + 1]}{3} + \frac{2}{3} \int H^3[j - 1] \frac{1}{\frac{da}{dt}} da; \quad (C.42)$$

esto con el fin de desaparecer un H , ya que las mediciones que se obtienen son de H^2 y no de alguna otra potencia, por lo que:

$$\frac{8\pi G\rho[\omega + 1]}{3} + \frac{2}{3} \int H^2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) [j - 1] \frac{1}{\dot{a}} da; \quad (C.43)$$

lo que conduce a la ecuación de Friedmann:

$$H_{UG}^2 = \frac{8\pi G\rho[\omega + 1]}{3} + \frac{2}{3} \int \frac{H^2[j - 1]}{a} da. \quad (C.44)$$

Esta integral resultante será dependiente de la forma de j .

Bibliografía

- [1] Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M. Garnavich, Ron L. Gilliland, Craig J. Hogan, Saurabh Jha, Robert P. Kirshner, and et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009–1038, Sep 1998.
- [2] Steven Weinberg. The Cosmological Constant Problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23, 1989.
- [3] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, 15(11):1753–1935, Nov 2006.
- [4] Miguel A. García-Aspeitia, A. Hernández-Almada, Juan Magaña, and V. Motta. The Universe acceleration from the Unimodular gravity view point: Background and linear perturbations. *Phys. Dark Univ.*, 32:100840, 2021.
- [5] Caixia Gao, Robert H. Brandenberger, Yifu Cai, and Pisin Chen. Cosmological perturbations in unimodular gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(09):021–021, Sep 2014.
- [6] Miguel A. García-Aspeitia, C. Martínez-Robles, A. Hernández-Almada, Juan Magaña, and V. Motta. Cosmic acceleration in unimodular gravity. *Physical Review D*, 99(12), Jun 2019.
- [7] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley & Sons, Inc., United States of America, 1972.
- [8] Sean M. Carroll. *Space Time and Geometry. An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, United Kingdom, 2019.
- [9] Bernard F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, New York, United States, 2nd edition, 2009.
- [10] A. P. French. *Special Relativity. The M.I.T. Introductory Physics Series*. W. W. Norton & Company Inc., United States of America, 1968.
- [11] Wolfgang Rindler. *Relativity. Special, General and Cosmological*. Oxford University Press, New York, United States, 2nd edition, 2006.
- [12] Matthias Blau. *Lecture Notes on General Relativity*. Institut für Theoretische Physik, Universität Bern, Bern, Switzerland, 2020.
- [13] Øyvind Grøn and Sigbjørn Hervik. *Einstein's General Theory of Relativity. With Modern Applications in Cosmology*. Springer, New York, United States, 2007.
- [14] L. P. Hughson and K. P. Tod. *An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, Great Britain, 1990.

- [15] James B. Hartle. *Gravity. An Introduction to Einstein's General Relativity*. Addison Wesley, San Francisco, United States, 2003.
- [16] Ray d'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, New York, United States, 1992.
- [17] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and company, San Francisco, United States, 1973.
- [18] Arthur S. Eddington. *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge University Press, Great Britain, 2nd edition, 1930.
- [19] John A. Wheeler and Kenneth Ford. *Geons, Black Holes and Quantum Foam: A Life in Physics*. W. W. Norton and Company, New York, United States, 2000.
- [20] Scott Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, United States of America, 2003.
- [21] Jorge Pinochet. El límite de chandrasekhar para principiantes. *Revista Mexicana de Física E*, 17:125, 07 2020.
- [22] Alexia Lopez. Discovery of a giant arc in distant space adds to challenges to basic assumptions about the universe. *Reunión de Sociedad Astronómica Estadounidense*, 238, Jun 2021.
- [23] M. J. Reid, D. W. Pesce, and A. G. Riess. An improved distance to ngc 4258 and its implications for the Hubble constant. *The Astrophysical Journal*, 886(2):L27, Nov 2019.
- [24] Planck Collaboration. Planck 2018 results - viii. gravitational lensing. *A&A*, 641:A8, 2020.
- [25] LIGO Collaboration. A gravitational-wave standard siren measurement of the Hubble constant. *Nature*, 551(7678):85–88, Oct 2017.
- [26] Wendy L. Freedman. Measurements of the Hubble constant: Tensions in perspective, 2021. 2106.15656.
- [27] Rocío Navarro-Martínez and José A. Pastor-González. *Ecuación de Campo. Introducción a la Cosmología*. PhD thesis, Universidad de Murcia, Jul 2017.
- [28] Ericsson López, Mario Llerena, and Franklin Aldás. Cinemática de un fluido ideal en un universo anisótropo axisimétrico espacialmente plano. *Revista Politécnica*, 37(1):102–107, Mar 2016.
- [29] Yuri N. Skiba. *Introducción a la Dinámica de Fluidos*. Centro de Ciencias de la Atmósfera, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2008.
- [30] Andrew R. Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, England, United Kingdom, 2nd edition, 2003.
- [31] DES Collaboration, T. M. C. Abbott, M. Aguena, A. Alarcon, et al. Dark energy survey year 3 results: Cosmological constraints from galaxy clustering and weak lensing, 2021.
- [32] A. Porredon, M. Crocce, J. Elvin-Poole, et al. Dark energy survey year 3 results: Cosmological constraints from galaxy clustering and galaxy-galaxy lensing using the maglim lens sample, 2021.
- [33] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, and et al. Planck 2018 results. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, Sep 2020.

- [34] Alfred L Tiley, S Gillman, L Cortese, A M Swinbank, U Dudzevičiūtė, C M Harrison, I Smail, D Obreschkow, S M Croom, R M Sharples, and A Puglisi. The KMOS galaxy evolution survey (KGES): the angular momentum of star-forming galaxies over the last ≈ 10 Gyr. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 506(1):323–342, 06 2021.
- [35] N Laporte, R A Meyer, R S Ellis, B E Robertson, J Chisholm, and G W Roberts-Borsani. Probing cosmic dawn: Ages and star formation histories of candidate $z \geq 9$ galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 505(3):3336–3346, 06 2021.
- [36] Steve K. Choi, Matthew Hasselfield, Shuay-Pwu Patty Ho, Brian Koopman, Marius Lungu, Maximilian H. Abitbol, Graeme E. Addison, Peter A. R. Ade, Simone Aiola, David Alonso, and et al. The atacama cosmology telescope: a measurement of the cosmic microwave background power spectra at 98 and 150 ghz. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(12):045–045, Dec 2020.
- [37] George F R Ellis, Henk van Elst, Jeff Murugan, and Jean-Philippe Uzan. On the trace-free einstein equations as a viable alternative to general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 28(22):225007, Oct 2011.
- [38] David R. Finkelstein, Andrei A. Galiatdinov, and James E. Baugh. Unimodular relativity and cosmological constant. *Journal of Mathematical Physics*, 42(1):340–346, Jan 2001.
- [39] Alejandro Perez and Daniel Sudarsky. Dark energy from quantum gravity discreteness. *Physical Review Letters*, 122(22), Jun 2019.
- [40] Thibaut Josset, Alejandro Perez, and Daniel Sudarsky. Dark Energy from Violation of Energy Conservation. *Phys. Rev. Lett.*, 118(2):021102, 2017.
- [41] Marcelo M. Disconzi, Thomas W. Kephart, and Robert J. Scherrer. New approach to cosmological bulk viscosity. *Physical Review D*, 91(4), Feb 2015.
- [42] Juan Magaña, Mario H. Amante, Miguel A. Garcia-Aspeitia, and V. Motta. The cardassian expansion revisited: constraints from updated Hubble parameter measurements and type Ia supernova data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 476(1):1036–1049, Feb 2018.
- [43] Mario A. Herrera-Amante and Miguel A. Garcia-Aspeitia. *Estudio teórico y observacional de la energía oscura*. PhD thesis, Universidad Autónoma de Zacatecas, Jul 2020.