



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

**Ronchigramas generados por la
refracción de una onda plana a
través de un axicón y un prisma
triangular**

Tesis Presentada al
Colegio de Física

como requisito para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Israel Julián Macías

asesorado por

Dr. Gilberto Silva Ortigoza

Puebla, Pue.
Noviembre, 2015

Título: Ronchigramas generados por la refracción de una onda plana a través de un axicón y un prisma triangular

Estudiante: Israel Julián Macías

COMITÉ

Dr. Cruz Meneses Fabián
Presidente

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez
Secretario

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez
Vocal

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Asesor

A mis padres

Roberto Julián Hilario y Olga Inés Macías Hernández por su cariño, apoyo y ejemplo que me han brindado día a día. Así como para mi madrina Julia Alicia Macías Hernández por su ternura y el cariño de madre que siempre me ha dado.

A mi esposa

Ana Isabel Cano Bruno por su comprensión, su atención, su paciencia y su amor en estos cuatro años.

A mi hija

Regina Isabel Julián Cano por darnos la dicha más grande a su mamá y a mí, por sus risas y travesuras en las que me ha hecho partícipe, y por todas sus enseñanzas.

A mis profesores

Por su amistad, tiempo y ayuda incondicional para avanzar día a día. Especialmente al profesor Eduardo D. Carreón Sánchez por su motivación en la preparatoria por estar siempre pendiente de mi progreso y por el gran aprecio que le tiene a mi familia, y al Dr. Gilberto Silva Ortigoza por la confianza que me ha brindado como amigo y por la oportunidad de trabajar con él.

Agradecimientos

Les doy las gracias a mis padres por todo el apoyo que me han brindado, especialmente en este año para poder finalizar mi carrera, así como también a mi esposa por su tiempo, cariño y apoyo para salir a delante .Agradezco de antemano todo la atención y tiempo que me brindo mi asesor para poder concluir mis estudios. Finalmente quiero agradecer el apoyo que me ha brindado mi compañera y amiga Erika Cervantes Juárez por toda su amistad, su tiempo y su valiosa ayuda para realizar este trabajo.

Índice general

1. Introducción	2
1.1. Antecedentes	2
1.1.1. Modelo Corpuscular	3
1.1.2. Modelo Ondulatorio	3
1.2. El Estudio de la Óptica	4
1.3. Relación entre Eikonal de Maxwell y Óptica Geométrica	4
1.4. Cáusticas	5
2. Leyes de la Óptica Geométrica, Ecuación Eikonal de Maxwell, Cáusticas y Envolventes	6
2.1. Óptica Geométrica	6
2.1.1. Postulados de la Óptica Geométrica	7
2.2. Ondas	9
2.2.1. Propagación de Ondas: frente de onda y rayos	10
2.3. Principio de Huygens	11
2.4. Reflexión y Refracción	12
2.4.1. Ley de Reflexión	12
2.4.2. Ley de Refracción	13

ÍNDICE GENERAL
ÍNDICE GENERAL

2.5. Ecuación Eikonal	15
2.6. Cáusticas	18
2.7. Envolventes	18
2.8. Cálculo exacto de la evolución de los rayos refractados y los frentes de onda de Huygens	19
2.9. Cálculo exacto de Cáusticas	22
3. Cáustica y ronchigramas generados por la refracción de una onda plana en: un axicón y un prisma triangular	25
3.1. Cáusticas generadas por la refracción de una onda plana a través de un axicón y un prisma triangular	27
3.1.1. Axicón	27
3.1.2. Cáustica asociada con los rayos refractados en un axicón	28
3.1.3. Cáustica asociada con los rayos refractados en un prisma triangular	33
3.2. Ronchigramas generados por la rejilla nula de Ronchi	36
3.2.1. Cálculo de la rejilla nula de Ronchi para un axicón	36
3.2.2. Generación de rejillas de franjas paralelas en una abertura circular	37
3.2.3. Cálculo de la rejilla nula de Ronchi para un prisma triangular	45
3.2.4. Generación de rejillas de franjas paralelas en una abertura rectangular	48
3.2.5. Ronchigrama generado por un axicón	54
3.2.6. Ronchigrama generado por un prisma triangular	59
4. Conclusión	64
5. Bibliografía	66

Objetivo

Objetivos particulares

1. Analizar la refracción de una onda plana a través de un axicón y un prisma triangular.
2. Determinar la cáustica asociada debido a la refracción de una onda plana a través de un axicón y explicar por qué no hay cáustica asociada debido a la refracción de una onda plana a través de un prisma triangular.
3. Determinar la rejilla nula, rejilla y ronchigramas debido a la refracción de una onda plana a través de un axicón y un prisma triangular.

Resumen

La finalidad de la presente tesis es estudiar la refracción de una onda plana a través de dos lentes: un axicón y un prisma triangular. A partir de la reflexión y refracción de una onda se determina la o las regiones de mayor enfocamiento de luz, denominadas cóusticas. Para producir cóusticas debido a la refracción de lentes tridimensionales, es necesario que dicha lente tenga simetría de revolución. Nuestro interés en considerar un axicón y un prisma triangular es porque el primero posee simetría de revolución mientras que el segundo tiene simetría de traslación, y con ello, demostrar que si hay cóustica asociada a la refracción debido al axicón, pero no sucede lo mismo con el prisma triangular. Para finalizar se realizarán los cálculos correspondientes para determinar la rejilla nula de Ronchi y los ronchigramas debido a una determinada rejilla, esta rejilla se localizará en el espacio imagen. El espacio de control y el espacio imagen están definidos como: la región del espacio donde se encuentra la fuente luminosa y la región donde se ha refractado los rayos de luz emitidos por la fuente luminosa.

Capítulo 1

Introducción

La Óptica, es la ciencia de la luz y de la visión. La percepción que tenemos del mundo, principalmente nos llega por la luz, y con ella podemos explorar el mundo macroscópico y microscópico, desde el universo hasta moléculas y átomos. La luz es la fuente de información más importante que tenemos, la luz nos permite apreciar la belleza de la naturaleza, de todo lo que nos rodea. Gracias a la invención de fuentes de luz artificial, se ha alargado el tiempo de actividad y ocio. El estudio de la luz realizado por los científicos durante varios siglos, ha favorecido el desarrollo de la humanidad. Se han inventado instrumentos como los microscopios y telescopios permitiendonos explorar desde lo más pequeño a lo más grande.

1.1. Antecedentes

Han existido diferentes enfoques para estudiar el comportamiento de la luz. En tiempo de la Grecia Antigua existieron dos puntos de vista con los cuales se propuso describir la naturaleza de la luz: la escuela atomista, sostenía que, los objetos emitían pequeñas partículas, que saliendo de ellos, venían a través de los ojos a nuestra alma, con sus formas, colores y cualidades. Por otro lado, la escuela pitagórica decía que, la visión se producía por medio de un flujo invisible, que salía de los ojos, en forma de tentáculos, con el cual tocaba y exploraba los objetos, poniendo de manifiesto su forma y color, algo similar como el sentido del tacto. Euclides (300 A.C.) se basó en este enfoque e introdujo varios conceptos: el de rayo, sobre el supuesto de

que lo emite el ojo, la propagación rectilínea de la luz, y ciertas condiciones geométricas de la visión, como tamaño de imágenes y ángulos, estableciendo la ley de la reflexión de la luz.

1.1.1. Modelo Corpuscular

A finales del siglo XVI comienza una gran actividad en el estudio de la Óptica. En 1621 el holandés Snell (1591-1626), descubre la ley de la refracción, que no se hizo pública hasta 1638, por Descartes. En 1657 el francés Pierre de Fermat (1601-1665), enuncia su principio de tiempo mínimo, según el cual, la luz al trasladarse entre dos puntos A y B, siempre sigue aquella trayectoria en la que emplea el tiempo más corto. Con él se explican las leyes de la reflexión y refracción. Durante el siglo XVII surge con fuerza la idea, de relacionar los fenómenos naturales con los conocimientos matemáticos, y así, se crearon modelos -idealizaciones de la realidad-, acerca de la naturaleza de la luz, para obtener matemáticamente de ellos, el comportamiento ya conocido experimentalmente.

Un modelo que demostró ser muy prometedor y que fue apoyado por numerosos científicos, Descartes(1596-1650) y Newton(1642-1727) entre ellos, es el corpuscular, se basaba en considerar a la luz como un haz de numerosas partículas muy pequeñas e incontables, que emanaban de los cuerpos luminosos, las cuales eran reflejadas por los objetos, y que al penetrar en nuestros ojos estimulaban la sensación de la visión, por sus acciones sobre la retina (capa de células situadas en el interior del ojo, que son sensibles a la luz y al color). El modelo explicaba bien la ley de la reflexión, sin embargo, para la refracción presentaba dificultades, como por ejemplo, tener que asignar una velocidad mayor a la luz en el vidrio, que en el aire, pero todavía tenía otro aspecto mucho más oscuro. Experimentalmente se observaba, que en la separación de dos medios distintos como el aire y el vidrio, la luz es en parte transmitida y en parte reflejada y esto no concuerda con el comportamiento de las partículas, ya que pueden ser reflejadas o transmitidas, pero no ambas cosas a la vez.

1.1.2. Modelo Ondulatorio

El descubrimiento de nuevos fenómenos luminosos, como las interferencias por Robert Hooke(1635-1703) y la difracción por el padre Grimaldi (1618-

1663) llevaron al propio Hooke y a Cristian Huygens(1629-1695), inspirados en el modelo de propagación de una perturbación por el agua, o en la transmisión de los sonidos, a considerar a la luz, como una serie de impulsos viajando en un medio misterioso, inmóvil e ideal, llamado éter. En el siglo XIX el inglés Thomas Young (1773-1829) y el francés Agustín Fresnel (1788-1827), establecieron unas bases muy sólidas, tanto teóricas como experimentales, para un modelo ondulatorio de la luz, explicando y demostrando con la teoría elaborada, experimentos cruciales como los de interferencia y difracción. La luz se consideró como un fenómeno vibratorio, periódico y transversal, que se propagaba por el éter, o por los medios materiales transparentes, como vidrio, agua, etc.

Al explicar la ley de la refracción con el modelo ondulatorio, encuentran una contradicción con la teoría corpuscular, y es que la luz, debería viajar con menor velocidad, en medios como el vidrio o el agua, que en el aire. En 1850, Fizeau y Foucault midieron la velocidad de la luz en el agua, encontrando un valor inferior al del aire, y dando al traste definitivamente con el modelo corpuscular. Sin embargo, aún estando bien establecido el modelo ondulatorio, existían todavía grandes dificultades para comprender el carácter transversal de las ondas luminosas y la hipótesis del éter, como medio material elástico, que servía de soporte para la propagación a las ondas luminosas.

1.2. El Estudio de la Óptica

En base a estos modelos, corpuscular y ondulatorio, se han construido cuatro enfoques para estudiar el comportamiento de la luz, llamados: Óptica Geométrica, Óptica Física y Óptica Cuántica. Cada uno de estos enfoques tiene sus propios antecedentes, y en base a sus postulados se ha logrado describir un buen número de fenómenos relacionados con la luz.

1.3. Relación entre Eikonal de Maxwell y Óptica Geométrica

La formulación de rayos, conocida como Óptica Geométrica, esta relacionada con la teoría electromagnética de Maxwell, sólo en el límite cuando la longitud de onda sea despreciable. Considerando tal límite, las ecuaciones

de Maxwell dan lugar, a una ecuación diferencial no lineal en derivadas parciales, denominada Ecuación Eikonal. Esta ecuación gobierna el proceso de formación de imágenes sin tomar en cuenta el caracter ondulatorio de la luz.

1.4. Cáusticas

Cuando la luz que incide en un espejo se refleja en otra superficie, es posible observar la curva que más brilla en la superficie, esta curva recibe el nombre de cáustica. Un ejemplo en el cual se puede visualizar estos fenómenos, es cuando los rayos de luz iluminan una taza de café en una tarde soleada, podemos observar la curva que mas brilla sobre la superficie del líquido, otro ejemplo donde podemos observar este fenómeno es en las piscinas, los rayos del sol que se refractan dentro de la piscina se intersectan generando curvas donde hay mayor concentración de luz, es decir, forman cáusticas. Una curva cáustica es la envolvente de rayos de luz reflejados (catacáustica) o refractados (diacáusticas) en una superficie dada, emitidos por alguna fuente. Los rayos de luz pueden estar a una distancia finita (como la llama de un fósforo) o prácticamente a una distancia infinita (como el Sol). Las cáusticas fueron introducidas en 1682 por el matemático alemán Ehrenfried walter von Tschirnhaus (1651-1708), quien trabajo en geometría diferencial y construyó espejos con un gran poder para quemar. Así mismo fueron estudiadas por Christian Huygens (1629-1695), Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), L Hopital (1661- 1704), Adolf Quételet (1796-1874), Joseph Louis Lagrange (1736-1813) entre otros.

Capítulo 2

Leyes de la Óptica Geométrica, Ecuación Eikonal de Maxwell, Cáusticas y Envolventes

El estudio de la Óptica Geométrica ha podido describir el comportamiento de la luz sin considerar el comportamiento ondulatorio de la luz, por otra parte, considerando que la longitud de onda de la luz es muy pequeña en comparación con las dimensiones del sistema óptico por el cual la luz se propaga hacen que las ecuaciones de Maxwell den origen a una ecuación, llamada ecuación eikonal, la cual gobierna la formación de imágenes. La relación que existe entre la Óptica Geométrica y las ecuaciones de Maxwell, es precisamente la Ecuación Eikonal. Mediante la Óptica Geométrica es posible estudiar las propiedades que poseen las curvas cáusticas que se forman por la intersección de rayos. Y se muestra como las cáusticas pertenecen a un grupo de curvas denominadas envolventes, estas curvas han sido estudiadas en el área de matemáticas debido al propio interés que se le ha dado a las envolventes.

2.1. Óptica Geométrica

La Óptica Geométrica estudia la formación de imágenes por reflexión y/o refracción en los llamados sistemas ópticos (dioptrios, espejos y lentes), sin

CAPÍTULO 2 LEYES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA, ECUACIÓN EIKONAL DE MAXWELL, CÁUSTICAS Y ENVOLVENTES

considerar el comportamiento ondulatorio-corpúscular de la luz. Debido a los postulados que se establecen, se puede considerar a la Óptica Geométrica como una forma de resolver aproximadamente el problema de la propagación de la luz.

La Óptica Geométrica se basa en los conceptos de rayo luminoso, utilizados para caracterizar la luz, y de índice de refracción que caracteriza los medios materiales por los que la luz se propaga. La Óptica Geométrica se desarrolla sobre un único postulado físico: El principio de Fermat.

Siempre que las dimensiones del sistema físico a través del cual se propaga la luz son mucho mayores que la longitud de onda, el proceso puede describirse simplemente mediante rayos que obedecen un conjunto de reglas geométricas, ya que las propiedades ondulatorias de la luz no se ponen de manifiesto tales como la velocidad de la onda v , su longitud de onda λ y su frecuencia ν .

2.1.1. Postulados de la Óptica Geométrica

- La luz se propaga en forma de rayos (líneas rectas). Los rayos son emitidos por fuentes luminosas y pueden ser observados cuando alcanzan un detector óptico.
- Un medio óptico se caracteriza por una cantidad $n \geq 1$, denominada índice de refracción, que es el cociente de la velocidad de la luz en el vacío c , entre la velocidad de la luz en el medio v :

$$n = \frac{c}{v}, \quad (2.1)$$

donde n depende de magnitudes tales como la temperatura que haya en el medio o la densidad del medio, además depende de la longitud de onda de la luz, incluso es posible que el índice pueda depender de la aplicación de campos eléctricos o magnéticos que permean dicho medio.

Teniendo en cuenta la Ec.(2.1) es posible obtener el tiempo t que tarda la luz en recorrer una distancia s , siendo:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{ns}{c} \quad (2.2)$$

**CAPÍTULO 2 LEYES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA,
ECUACIÓN EIKONAL DE MAXWELL, CÁUSTICAS Y
ENVOLVENTES**
2.1. ÓPTICA GEOMÉTRICA

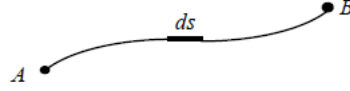


Figura 2.1: Trayectoria de la luz donde ds representa el diferencial de longitud.

esto quiere decir, que el tiempo t es proporcional al producto ns . La cantidad $L = ns$ se conoce como camino óptico.

- En un medio inhomogéneo, el índice de refracción $n(\vec{r})$ es una función de la posición determinada por el vector de posición $\vec{r} = (x, y, z)$. El camino óptico L a lo largo de una trayectoria luminosa entre dos puntos A y B (ver Fig.2.1) se obtiene mediante:

$$L = \int_A^B n(\vec{r}) ds, \quad (2.3)$$

donde ds es el elemento diferencial de longitud a lo largo de la trayectoria luminosa. Como en cada punto \vec{r} se cumplirá la Ec.(2.1), entonces:

$$n(\vec{r}) = \frac{c}{v(\vec{r})} \quad (2.4)$$

por lo que

$$L = \int_A^B n(\vec{r}) ds = \int_A^B \frac{c}{v(\vec{r})} ds = c \int_A^B \frac{ds}{v(\vec{r})} = c \int_A^B dt = ct \quad (2.5)$$

- Principio de Fermat: el camino óptico a lo largo de una trayectoria real de luz es estacionario, es decir, el trayecto seguido por la luz de un punto A a un punto B en un medio material heterogéneo de índice $n(x, y, z)$ corresponde a un valor estacionario del camino óptico en relación a las trayectorias posibles que unen A con B , matemáticamente esto se expresa de la siguiente manera:

$$\delta L = \delta \int_A^B n(\vec{r}) ds = 0. \quad (2.6)$$

Un extremal puede ser un mínimo, un máximo o un punto de inflexión. Sin embargo, normalmente suele ser un mínimo, en cuyo caso los rayos de luz se

**CAPÍTULO 2 LEYES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA,
ECUACIÓN EIKONAL DE MAXWELL, CÁUSTICAS Y
ENVOLVENTES**

2.2. ONDAS

propagan a lo largo de trayectorias de tiempo mínimo. Las leyes de la Óptica Geométrica son fenomenológicas, es decir, que no tienen una realidad física, sin embargo, hoy se sabe cómo se relacionan estas leyes con propiedades del medio de propagación.

2.2. Ondas

Una onda o movimiento ondulatorio es la propagación de una perturbación de alguna propiedad de un medio, por ejemplo, densidad, presión, campo eléctrico o campo magnético, las cuales se propagan en el tiempo y en el espacio. Las características del movimiento ondulatorio son las siguientes: transporta energía y cantidad de movimiento pero no materia, la onda se propaga con una cierta velocidad la cual depende del medio en el que se propaga.

Existen ondas estacionarias y ondas viajeras. Las ondas estacionarias son aquellas ondas en las cuales, ciertos puntos de la onda, llamados nodos, permanecen inmóviles. Por otro lado, las ondas viajeras son aquellas que se desplazan libremente por el espacio, estas se pueden clasificar en dos tipos de ondas, ondas longitudinales (ondas mecánicas) y ondas transversales (ondas electromagnéticas). La representación matemática de una onda viajera unidimensional que se propaga a una velocidad v esta dada por:

$$y(x, t) = f(x \pm vt) \tag{2.7}$$

donde, $+vt$ y $-vt$ describe el movimiento de la onda hacia la izquierda y derecha, respectivamente.

En Óptica hay un gran interés por las ondas en las que el movimiento ondulatorio de la perturbación es un movimiento armónico simple (m.a.s.), las cuales están descritas por funciones de seno y coseno ($f(x, t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)$, $g(x, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)$ o una combinación lineal de ambas $= A_1 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t) + A_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)$, donde A_1 y A_2 son constantes. Las magnitudes características de estas ondas se clasifican en dos: las que caracterizan al m.a.s y las que dependen del medio. Las características relacionadas al m.a.s son: el periodo T , frecuencia ν , frecuencia angular ω , fase ϕ y amplitud A . Por otro lado, las características que dependen del medio son: velocidad de propagación v , longitud de onda λ y número de ondas k . Los fenómenos relacionados con las ondas que se pueden observar son: Refracción, Reflexión, Difracción, Dispersión, Efecto Doppler, Atenuación, Pul-

**CAPÍTULO 2 LEYES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA,
ECUACIÓN EIKONAL DE MAXWELL, CÁUSTICAS Y
ENVOLVENTES**

2.2. ONDAS

saciones, Interferencia y Ondas Estacionarias. Las primeras seis tienen que ver con la propagación de las ondas, mientras que las tres restantes con la superposición de ondas.

2.2.1. Propagación de Ondas: frente de onda y rayos

Para describir la propagación de ondas son útiles los conceptos de frente de onda y de rayo.

Un frente de onda se define como el lugar geométrico de los puntos del medio de propagación que tienen el mismo estado de perturbación. Los frentes de onda en términos de la función que describe la onda, es el lugar geométrico de todos los puntos del medio que tienen la misma fase, donde la fase está dada por $\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t$ y el frente de onda queda determinado por la relación:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t = \text{constante}. \quad (2.8)$$

La forma geométrica del frente de ondas depende de la fuente de ondas y del medio de propagación. Si la fuente es puntual y el medio es isótropo y bidimensional entonces los frentes de ondas serán círculos concéntricos; si el medio es tridimensional, entonces los frentes de ondas serán esferas concéntricas, cuyo centro común es la fuente en ambos casos. Si la fuente posee forma lineal y el medio es bidimensional, los frentes de onda son planos que se propagan paralelamente al eje del cilindro, pero si el medio es tridimensional se generarán frentes de onda cilíndricos que se propagan a lo largo de los radios a partir del eje del cilindro. Si consideramos que la fuente está muy alejada de los frentes de onda, estos tendrán radios muy grandes y se pueden considerar como frentes de onda planos. De acuerdo a los frentes de onda, las ondas se denominan esféricas, cilíndricas y planas. Las ondas planas se pueden considerar monodimensionales, que se propagan en una dirección particular.

Las líneas perpendiculares a los sucesivos frentes de ondas se denominan rayos e indican la dirección de la propagación de la onda. En un medio homogéneo e isótropo los rayos son líneas rectas, pues no hay razón para que estos rayos se desvíen, sin embargo la dirección de la propagación puede cambiar al pasar de un medio a otro.

Para representar las ondas usualmente los frentes de onda se dibujan con separación de una longitud de onda. Dentro de un medio homogéneo e isótropo la velocidad de la onda es la misma en todos los puntos y en todas las direcciones, esto implica que la separación entre dos frentes de onda debe ser la

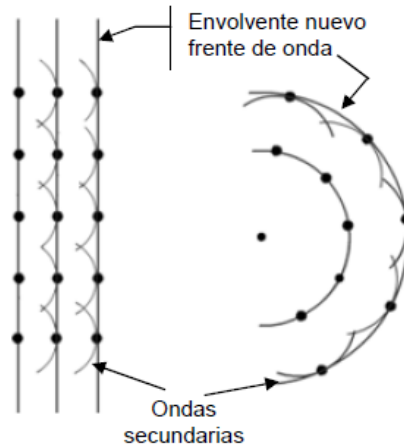


Figura 2.2: Representación gráfica del Principio de Huygens

misma y que el tiempo requerido para que la onda avance entre dos frentes de onda es el mismo en cualquier dirección de propagación en la cual se mida.

2.3. Principio de Huygens

Cuando el frente de onda avanza en el medio, el movimiento ondulatorio (ondas) se propaga alcanzando nuevos puntos de ese medio. Tomando en cuenta esta idea, Christian Huygens (1629-1695) visualizó una construcción geométrica para pasar de un frente de onda a otro.

El principio de Huygens establece lo siguiente: Todo punto de un frente de onda se convierte en punto de partida de una serie de ondas secundarias que se propagan con la misma velocidad y frecuencia que las ondas primarias.

Cuando el movimiento ondulatorio alcanza los puntos del siguiente frente de onda, cada punto de este nuevo frente de onda se convierte en una fuente de ondas secundarias que alcanzan a nuevos puntos del medio. El siguiente frente de onda será la superficie envolvente de todas las ondas secundarias, la repetición de este proceso conlleva a la propagación de la onda a través del medio, ver Fig.(2.2).

2.4. Reflexión y Refracción

La propagación de la luz en un medio transparente no sufre cambios, es decir, la dirección y la velocidad con la cual se propaga la luz no cambia. Sin embargo cuando la luz pasa de un medio a otro con características diferentes (índices de refracción distintos) se observa que parte de la luz se refleja y parte se transmite, estos fenómenos de la luz se conocen como reflexión y refracción de la luz, respectivamente.

Estos dos fenómenos siguen leyes muy concretas que se descubrieron experimentalmente, pero también se pueden deducir mediante el principio de Fermat. Para describir con detalle estas leyes es necesario definir cuatro conceptos básicos, (ver Fig.2.3):

- El **ángulo de incidencia** es el ángulo que forma un rayo que llega a una superficie de separación entre dos medios con la dirección normal a esta superficie, el cual se simboliza por θ_1 .
- El **ángulo de reflexión** es el ángulo que forma un rayo reflejado en una superficie de separación entre dos medios con la dirección normal a esta superficie, el cual denotaremos por θ'_1 .
- El **ángulo de refracción** es el ángulo que forma un rayo refractado en una superficie de separación entre dos medios con la dirección normal a esta superficie, el cual se simboliza por θ_2 .
- El **plano de incidencia** es el plano que queda definido por la dirección del rayo incidente y la dirección normal a la superficie de separación.

2.4.1. Ley de Reflexión

La mayor parte de los objetos resultan visibles a causa de la luz que reflejan hacia nuestros ojos. Existen dos tipos de reflexión, denominadas reflexión difusa y reflexión especular, ver fig.(2.4). La reflexión difusa es cuando la luz se refleja en todas direcciones, esto ocurre cuando las dimensiones de las rugosidades de la superficie reflejante sean grandes comparadas con la longitud de onda de la luz. Por otro lado, la reflexión especular sucede cuando un

CAPÍTULO 2 LEYES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA, ECUACIÓN EIKONAL DE MAXWELL, CÁUSTICAS Y ENVOLVENTES

2.4. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

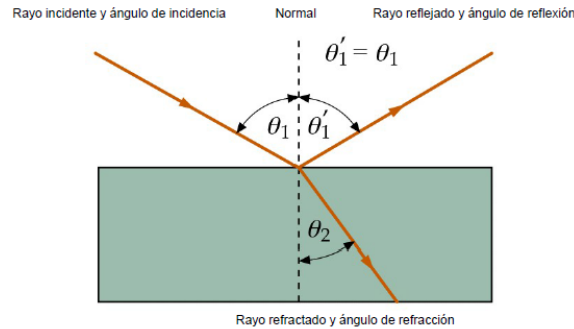


Figura 2.3: Descripción de los componentes que se utilizan para describir las leyes de Reflexión y Refracción.

estrecho haz de luz se refleja en una única dirección, este fenómeno sucede cuando las rugosidades de la superficie son pequeñas en comparación con la longitud de onda de la luz.

La **ley de Reflexión** establece que: el rayo incidente, el reflejado y la normal son vectores que se encuentran en el mismo plano, es decir, son vectores coplanarios. Además, el rayo reflejado forma un ángulo de reflexión que es igual al ángulo de incidencia, esto es:

$$\theta_1 = \theta'_1 \quad (2.9)$$

2.4.2. Ley de Refracción

Experimentalmente se observa que, cuando la luz pasa de un medio con un índice n_1 a otro medio con índice n_2 donde $n_1 < n_2$ (por ejemplo de aire a vidrio o de aire a agua), el rayo refractado se acerca más a la normal, mientras que cuando $n_1 > n_2$ (por ejemplo de vidrio a aire o agua a aire), el rayo refractado se aleja de la normal, ver Fig.(2.5).

La ley que describe este fenómeno se conoce como **Ley de Snell** o ley de Refracción. La cual afirma que: el rayo refractado se halla en el plano de incidencia, es decir, se encuentra en el plano generado por los vectores incidente \hat{i} y normal \hat{N} y que, la relación entre los ángulos de incidencia y de refracción cumple la ecuación:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (2.10)$$

**CAPÍTULO 2 LEYES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA,
ECUACIÓN EIKONAL DE MAXWELL, CÁUSTICAS Y
ENVOLVENTES**

2.4. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

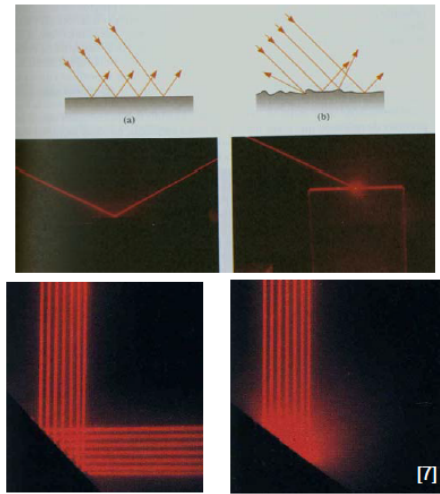


Figura 2.4: Reflexión especular y difusa. en el inciso (a) se aprecia la reflexión especular, mientras que en el inciso (b) se observa la reflexión difusa.

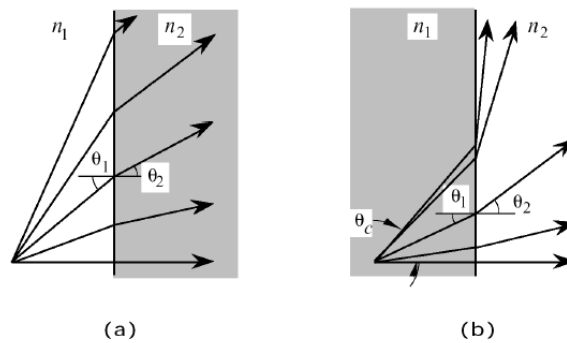


Figura 2.5: Refracción de la luz. En el inciso (a) se tiene que $n_1 < n_2$, y en el inciso (b) $n_1 > n_2$.

2.5. Ecuación Eikonal

Para obtener la Ecuación Eikonal, consideremos que la onda electromagnética se propaga en un medio isótropo. Las ecuaciones de Maxwell sin fuentes están dadas por las ecuaciones:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de Ampere}) \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{Ley de inducción de Faraday}) \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad (\text{Ausencia de cargas eléctricas aisladas}) \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{Ausencia de cargas magnéticas aisladas}) \quad (2.14)$$

puesto que es un medio isótropo, tenemos que se cumplen las relaciones constitutivas dadas por las ecuaciones

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (2.15)$$

las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, implican que tanto \vec{E} y \vec{B} obedecen la ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.16)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.17)$$

por lo que los campos vectoriales \vec{E} y \vec{B} admiten soluciones de ondas armónicas de la forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{X}) e^{-i\omega t} \quad (2.18)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0(\vec{X}) e^{-i\omega t} \quad (2.19)$$

donde ω denota la frecuencia de oscilación de los campos asociada con la onda electromagnética, \vec{E}_0 y \vec{H}_0 son las magnitudes vectoriales de los campos \vec{E} y \vec{H} respectivamente. Sustituyendo las relaciones constitutivas Ecs.(2.15) y las Ecs.(2.18), (2.19) en las ecuaciones de Maxwell, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\nabla \times \vec{H}_0 + ik_0 \epsilon \vec{E}_0 = \vec{0}, \quad \nabla \times \vec{E}_0 - ik_0 \epsilon \vec{H}_0 = \vec{0} \quad (2.20)$$

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E}_0 = 0, \quad \nabla \cdot \mu \vec{H}_0 = 0$$

**CAPÍTULO 2 LEYES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA,
ECUACIÓN EIKONAL DE MAXWELL, CÁUSTICAS Y
ENVOLVENTES**

2.5. ECUACIÓN EIKONAL

y para la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{E}_0 - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial t^2} = 0 \quad (2.21)$$

$$\nabla^2 \vec{B}_0 - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_0}{\partial t^2} = 0 \quad (2.22)$$

donde $k_0 = \omega/c$ es la magnitud del vector de onda en el vacío. Los campos vectoriales \vec{E}_0 y \vec{H}_0 satisfacen las Ecs.(2.15) debido a que el factor $e^{-i\omega t}$ es distinto de cero para cualquier valor de t . Si se considera un medio óptico homogéneo con índice de refracción $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ en el cual \vec{E}_0 y \vec{H}_0 están inmersos, entonces se tiene que las soluciones a las Ecs(2.16) y (2.17) son ondas planas, dadas por:

$$\vec{E}_0 = \hat{e} e^{ik_0 n(\hat{k} \cdot \vec{X})} = \hat{e} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{X})} \quad (2.23)$$

$$\vec{H}_0 = \hat{h} e^{ik_0 n(\hat{k} \cdot \vec{X})} = \hat{h} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{X})}$$

donde \hat{e} y \hat{h} son vectores unitarios constantes que dan la dirección de los campos \vec{E}_0 y \vec{H}_0 y \vec{k} es el vector de onda, definido como el producto de la magnitud del vector de onda y el índice de refracción del medio óptico, el cual apunta en la dirección del vector $\hat{k} = \vec{k}/k$. Se define $\vec{k} \cdot \vec{X}$ como la fase geométrica asociada a la onda plana, donde \vec{k} proporciona la dirección en la cual se propaga la onda, mientras que \vec{X} etiqueta la posición espacial de un punto de la onda plana.

Se desea determinar de forma más general la fase geométrica asociada a un sistema óptico arbitrario. Para ello se generalizará la fase geométrica de tal manera que las soluciones de las Ecs(2.16) y (2.17) estén dadas por

$$\vec{E} = \hat{e}(\vec{X}) e^{ik_0 \Phi(\vec{X})} \quad (2.24)$$

$$\vec{H} = \hat{h}(\vec{X}) e^{ik_0 \Phi(\vec{X})} \quad (2.25)$$

donde $\hat{e}(\vec{X})$ y $\hat{h}(\vec{X})$ son campos vectoriales y $\Phi(\vec{X})$ es una función escalar de valor real, definiendo la longitud de la trayectoria óptica asociada con la onda que proviene desde la posición espacial \vec{s} de la fuente de luz, hasta la posición \vec{X} de un observador.

**CAPÍTULO 2 LEYES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA,
ECUACIÓN EIKONAL DE MAXWELL, CÁUSTICAS Y
ENVOLVENTES**

2.5. ECUACIÓN EIKONAL

De las Ecs.(2.24)y (2.25) tenemos las siguientes identidades

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H}_0 &= (\nabla \times \hat{h} + ik_0 \nabla \Phi \times \hat{h}) e^{ik_0 \Phi(\vec{X})} \\ \nabla \cdot \mu \vec{H}_0 &= [\nabla \cdot (\mu \hat{h}) + ik_0 \mu \hat{h} \cdot \nabla \Phi] e^{ik_0 \Phi(\vec{X})} \\ \nabla \times \vec{E}_0 &= (\nabla \times \hat{e} + ik_0 \nabla \Phi \times \hat{e}) e^{ik_0 \Phi(\vec{X})} \\ \nabla \cdot \epsilon \vec{E}_0 &= [\nabla \cdot (\epsilon \hat{e}) + ik_0 \epsilon \hat{e} \cdot \nabla \Phi] e^{ik_0 \Phi(\vec{X})}\end{aligned}\tag{2.26}$$

Utilizando las Ecs(2.24) y (2.25) y las identidades Ecs(2.26), las Ecs(2.20) quedan de la forma

$$\begin{aligned}\nabla \Phi \times \hat{h} + \epsilon \hat{e} &= \frac{1}{i^* k_0} \nabla \times \hat{h} \quad \hat{e} \cdot \nabla \Phi = \frac{\nabla \cdot (\epsilon \hat{e})}{i^* k_0 \epsilon} \\ \nabla \Phi \times \hat{e} - \mu \hat{h} &= \frac{1}{i^* k_0} \nabla \times \hat{e} \quad \hat{h} \cdot \nabla \Phi = \frac{\nabla \cdot (\mu \hat{h})}{i^* k_0 \mu}\end{aligned}\tag{2.27}$$

donde i^* es el conjugado del número imaginario i . Si consideramos que $k_0 \rightarrow \infty$, las Ecs(2.27) se reducen a la forma

$$\nabla \Phi \times \hat{h} + \epsilon \hat{e} = 0\tag{2.28}$$

$$\hat{e} \cdot \nabla \Phi = 0\tag{2.29}$$

$$\nabla \Phi \times \hat{e} - \mu \hat{h} = 0\tag{2.30}$$

$$\hat{h} \cdot \nabla \Phi = 0\tag{2.31}$$

Ahora, despejemos \hat{e} de la Ec.(2.28) y sustituyamos en la Ec.(2.30)

$$-\frac{\nabla \Phi \times (\nabla \Phi \times \hat{h})}{\epsilon} - \mu \hat{h} = 0\tag{2.32}$$

usando la identidad $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$, la Ec.(2.32) queda como

$$\frac{1}{\epsilon} [(\hat{h} \cdot \nabla \Phi) \nabla \Phi - (\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) \hat{h}] + \mu \hat{h} = 0\tag{2.33}$$

para finalizar, utilicemos la Ec.(2.31), puesto que \hat{h} no es cero, hemos obtenido la llamada Ecuación Eikonal de Maxwell

$$(\nabla \Phi)^2 = n^2\tag{2.34}$$

donde $\sqrt{\epsilon \mu} = n$. La Ec.(2.34), es la ecuación fundamental de la Óptica Geométrica y la que gobierna la formación de imágenes sin tomar en cuenta el caracter ondulatorio de la luz.

2.6. Cáusticas

Anteriormente se mencionó, acerca de fenómenos en los cuales aparecen regiones donde hay un enfocamiento macroscópico de luz, estas regiones se denominan cáusticas. Cuando iluminamos objetos transparentes, parte de la luz se refleja y parte se transmite, por lo que, algunos rayos después de la reflexión y/o refracción se intersectan. La región cáustica es la envolvente de los rayos de luz reflejados o refractados. La formación de cáusticas depende de la posición de la fuente que emite luz, el tipo de la fuente, del medio en el cual se refleje o refracte y de la superficie donde lleguen los rayos reflejados o refractados. El estudio de las cáusticas es muy importante, ya que, nos da información sobre la formación de imágenes múltiples.

2.7. Envolventes

Supongamos que tenemos una familia de curvas que dependen de un parámetro, este parámetro se mantiene constante para una curva en particular, pero que cambia al pasar de una curva a otra. La envolvente de esta familia de curvas, es una curva tangente a cada una de las curvas de la familia. La curva envolvente se intersecta tangencialmente con cada una de las curvas de la familia.

Definición. Sea $\phi(x, y, z) = 0$ una familia de curvas planas dependientes de un cierto parámetro real α . La envolvente de la familia de curvas, si existe, es una nueva curva ϕ tal que cada uno de sus puntos es tangente a una de las curvas de la familia dada. La envolvente en caso de existir, es solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\phi(x, y, \alpha) &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) &= 0\end{aligned}\tag{2.35}$$

Las envolventes son de gran interés en Óptica Geométrica, debido a que las cáusticas son las envolventes de rayos reflejados y/o refractados emitidos de alguna fuente de luz. Un ejemplo de cáustica son las curvas luminosas que se ven en la superficie de una taza de leche y los patrones de luz que se forman en el fondo de una alberca (ver Fig.2.6). La cardioide es la catacáustica de un

**CAPÍTULO 2 LEYES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA,
ECUACIÓN EIKONAL DE MAXWELL, CÁUSTICAS Y
ENVOLVENTES**

**2.8. CÁLCULO EXACTO DE LA EVOLUCIÓN DE LOS RAYOS
REFRACTADOS Y LOS FRENTE DE ONDA DE HUYGENS**



Figura 2.6: Cardioide formada por los rayos de luz reflejados en una taza de leche

círculo con un punto radiante en su circunferencia, la nefroide es la catacáustica de una cardioide con un punto radiante en el vértice. Sin embargo, se tiene que no siempre la reflexión o refracción de la luz generará una cáustica, por ejemplo, los rayos reflejados desde el foco de una parábola no intersectan, por lo tanto no se genera ninguna envolvente, esto es, no habrá cáustica.

2.8. Cálculo exacto de la evolución de los rayos refractados y los frentes de onda de Huygens

Consideremos que tenemos dos medios ópticos con índices de refracción constantes n_1 y n_2 , los cuales están separados por una superficie arbitraria. En el medio de índice n_1 , localizamos una fuente de luz puntual en una posición arbitraria, tal que los rayos de luz experimentan una refracción al pasar la superficie. La longitud de camino óptico de un rayo de luz refractado es:

$$\Phi = n_1|\vec{r} - \vec{s}| + n_2|\vec{X} - \vec{r}|, \quad (2.36)$$

donde $\vec{r} = (x, y, f(x, y))$ parametriza la superficie que separa a los dos medios, \vec{s} es el vector de posición donde se localiza la fuente y $\vec{X} = (X, Y, Z)$ es el punto de observación donde se localiza un observador quien recibe un flujo de rayos de luz desde la fuente. El camino óptico se puede escribir de la forma

$$\Phi(\vec{X}, x, y) = n_2\vec{X} \cdot \hat{R} + k, \quad (2.37)$$

**CAPÍTULO 2 LEYES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA,
ECUACIÓN EIKONAL DE MAXWELL, CÁUSTICAS Y
ENVOLVENTES**

**2.8. CÁLCULO EXACTO DE LA EVOLUCIÓN DE LOS RAYOS
REFRACTADOS Y LOS FRENTE DE ONDA DE HUYGENS**

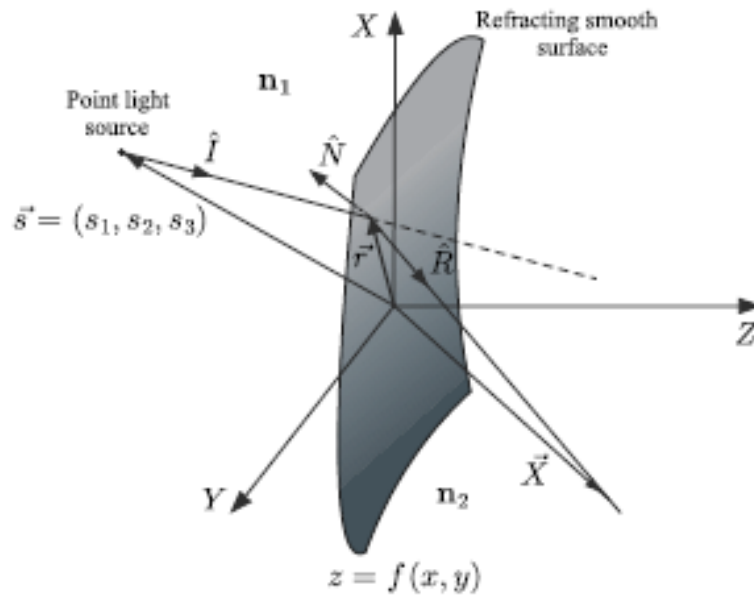


Figura 2.7: Trayectoria de la luz donde ds representa el diferencial de longitud.

**CAPÍTULO 2 LEYES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA,
ECUACIÓN EIKONAL DE MAXWELL, CÁUSTICAS Y
ENVOLVENTES**

**2.8. CÁLCULO EXACTO DE LA EVOLUCIÓN DE LOS RAYOS
REFRACTADOS Y LOS FRENTE DE ONDA DE HUYGENS**

donde la función k , está dada por

$$k = n_1 |\vec{r} - \vec{s}| - n_2 \vec{r} \cdot \hat{R}. \quad (2.38)$$

En Óptica Geométrica, la función k es conocida como la función de Stavroudis, la cual contiene toda la información acerca de las aberraciones introducidas a los frentes de onda por la superficie refractante, la función k está determinada por el sistema óptico bajo estudio, ya que esta función depende del medio óptico, la fuente puntual de luz y de la forma arbitraria de la superficie refractante. El vector $\hat{R} = (\vec{X} - \vec{r})/(|\vec{X} - \vec{r}|)$ da la dirección del rayo de luz refractado.

Considerando una fuente puntual de luz localizada en $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ y una superficie arbitraria dada por $z = f(x, y)$, entonces los rayos refractados en el punto $\vec{r} = (x, y, f(x, y))$ quedan descritos por

$$\vec{X} = \vec{r} + l\hat{R}, \quad (2.39)$$

donde l es la distancia a lo largo del rayo de luz refractado, y de acuerdo con la Ley de Snell, el vector unitario refractado está dado por

$$\hat{R} = \gamma \hat{I} + \Omega \hat{N} \quad (2.40)$$

donde γ y Ω están dados por las ecuaciones:

$$\gamma = \frac{n_1}{n_2} \quad (2.41)$$

$$\Omega = -\gamma(\hat{I} \cdot \hat{N}) + \sqrt{1 - \gamma^2[1 - (\hat{I} \cdot \hat{N})^2]}, \quad (2.42)$$

donde γ está asociado con la propiedad de enfoque y Ω con la distorsión de la dirección de los rayos de luz. \hat{N} es un vector unitario a la superficie refractada $\vec{r} = (x, y, f(x, y))$, \hat{I} denota la dirección del rayo incidente que va de la fuente de luz puntual hasta un punto sobre la superficie refractante. El \hat{I} está dado por

$$\hat{I} = \frac{\vec{r} - \vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|}. \quad (2.43)$$

Por otro lado, para obtener un vector perpendicular a la superficie refractante, definimos la función:

$$G(x, y, z) = f(x, y) - z \quad (2.44)$$

**CAPÍTULO 2 LEYES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA,
ECUACIÓN EIKONAL DE MAXWELL, CÁUSTICAS Y
ENVOLVENTES**

2.9. CÁLCULO EXACTO DE CÁUSTICAS

observese que, una de las superficies de nivel de esta función es precisamente la superficie refractante $z = f(x, y)$, por lo que, el vector unitario normal a la superficie refractante, está dado por

$$\hat{N} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \frac{(f_x, f_y, -1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \quad (2.45)$$

donde $f_x = \frac{\partial G}{\partial x}$ y $f_y = \frac{\partial G}{\partial y}$. Los frentes de onda o tren de frentes de onda, asociado con los rayos de luz refractados por una superficie suave arbitraria después de ser emitidos por una fuente puntual de luz, localizada en una posición arbitraria dada por el vector \vec{s} dentro del medio cuyo índice de refracción es n_1 , están dados por todos los puntos \vec{X} tal que $\Phi(\vec{X}, x, y) = C$, esto es:

$$\vec{X}(\vec{s}, x, y, C) = \vec{r}(x, y) + [C - \gamma|\vec{r}(x, y) - \vec{s}|]\hat{R}(x, y, \vec{s}) \quad (2.46)$$

para valores fijo de C esta ecuación describe los frentes de onda refractados, mientras que para valores fijos de x y y esta describe la evolución de los rayos refractados, ver Ref. [3].

2.9. Cálculo exacto de Cáusticas

Hemos demostrado que los frentes de onda de Huygens asociados con los rayos de luz refractados dados por la ec.(2.39), están descritos por la Ec.(2.46). Dada la posición de la fuente de luz \vec{s} , la Ec.(2.46) describe un mapeo entre dos subconjuntos del espacio R^3 , el cual se torna multivaluado donde el determinante Jacobiano es cero, esto es

$$J(x, y, C) = \det \left(\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(x, y, C)} \right) = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial y} \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial C} \right) = 0. \quad (2.47)$$

El conjunto crítico está definido por todos los puntos donde el Jacobiano se anula, es decir, es el conjunto de puntos en el dominio donde el mapeo no es localmente uno a uno, mientras que la imagen del conjunto crítico bajo el mapeo define el conjunto cáustico, es decir, la cáustica. Usando la Ec.(2.46) podemos ver que

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial x} = \vec{r}_x + [C - \gamma|\vec{r} - \vec{s}|]\hat{R}_x - \frac{\gamma(\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|} \cdot (\vec{r} - \vec{s})_x \hat{R} \quad (2.48)$$

**CAPÍTULO 2 LEYES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA,
ECUACIÓN EIKONAL DE MAXWELL, CÁUSTICAS Y
ENVOLVENTES**

2.9. CÁLCULO EXACTO DE CÁUSTICAS

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial y} = \vec{r}_y + [C - \gamma|\vec{r} - \vec{s}|]\hat{R}_y - \frac{\gamma(\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|} \cdot (\vec{r} - \vec{s})_y \hat{R} \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial C} = \hat{R} \quad (2.50)$$

Sustituyendo las Ecs.(2.48), (2.49) y (2.50) en la Ec.(2.47), y usando la identidad vectorial $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$ nos queda que

$$\begin{aligned} J(x, y, C) = & \vec{r}_x \cdot (\vec{r}_y \times \hat{R}) + [C - \gamma|\vec{r} - \vec{s}|][\vec{r}_x \cdot (\hat{R}_y \times \hat{R}) + \hat{R}_x \cdot (\vec{r}_y \times \hat{R})] \\ & + [C - \gamma|\vec{r} - \vec{s}|]^2 [\hat{R}_x \cdot (\hat{R}_y \times \hat{R})] \end{aligned} \quad (2.51)$$

Esta condición es equivalente a:

$$H_2[C - \gamma|\vec{r} - \vec{s}|]^2 + H_1[C - \gamma|\vec{r} - \vec{s}|] + H_0 = 0 \quad (2.52)$$

donde

$$H_2 = \hat{R} \cdot \left[\left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial x} \right) \times \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial y} \right) \right] \quad (2.53)$$

$$H_1 = \hat{R} \cdot \left[\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right) \times \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial x} \right) \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) \right] \quad (2.54)$$

$$H_0 = \hat{R} \cdot \left[\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right) \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) \right]. \quad (2.55)$$

Dada la Ec(2.52), se deben tomar en cuenta varios casos:

- 1) Si $H_2 \neq 0$ y $H_1 \neq 0$, la cáustica asociada tiene dos ramas.
- 2) Si $H_2 \neq 0$ y $H_1 = 0$, la cáustica asociada también está generada por dos ramas.
- 3) Si $H_2 = 0$ y $H_1 \neq 0$, la cáustica asociada tiene sólo una rama.
- 4) Si $H_2 = 0$ y $H_1 = 0$, no hay cáustica siempre y cuando $H_0 \neq 0$.

En nuestro trabajo consideramos sólo los casos: $H_2 \neq 0$ con $H_1 = 0$, y $H_2 = 0$ con $H_1 = 0$, esto es así porque, para el caso del axicón y del prisma triangular se cumplen las condiciones 3) y 4) respectivamente.

**CAPÍTULO 2 LEYES DE LA ÓPTICA GEOMÉTRICA,
ECUACIÓN EIKONAL DE MAXWELL, CÁUSTICAS Y
ENVOLVENTES**

2.9. CÁLCULO EXACTO DE CÁUSTICAS

Si $H_2 \neq 0$ de la Ec.(2.52) tenemos que el conjunto crítico asociado con el mapeo dado por la Ec.(2.46) está dado por

$$C_{\pm}(x, y) = \gamma|\vec{r} - \vec{s}| + \left(\frac{-H_1 \pm \sqrt{H_1^2 - 4H_2H_0}}{2H_2} \right) \quad (2.56)$$

Por lo que, el conjunto cáustico, asociado con el mapeo (2.46) puede escribirse de la siguiente forma

$$\vec{X}_{c\pm} = \vec{r} + \left(\frac{-H_1 \pm \sqrt{H_1^2 - 4H_2H_0}}{2H_2} \right) \hat{R} \quad (2.57)$$

Por otro lado, si $H_2 = 0$ de la Ec.(2.50) tenemos que el conjunto crítico asociado con el mapeo dado por la Ec.(2.46) está dado por

$$C(x, y) = \gamma|\vec{r} - \vec{s}| - \frac{H_0}{H_1} \quad (2.58)$$

así que, el conjunto cáustico asociado para este caso, se puede escribir de la siguiente forma

$$\vec{X}_C = \vec{r} - \frac{H_0}{H_1} \hat{R}. \quad (2.59)$$

Capítulo 3

Cáustica y ronchigramas generados por la refracción de una onda plana en: un axicón y un prisma triangular

Una vez que se ha desarrollado, en el capítulo anterior, todo el tratamiento para poder determinar el conjunto cáustico (la cáustica generada), será aplicado a dos casos: en primer lugar se considerará la refracción de una onda plana a través de un axicón, ver Fig(3.1a); también se considerará la refracción de una onda plana que se refracta en un prisma triangular, ver Fig(3.1b). Cuando la posición de la fuente puntual se encuentra en el infinito $|\vec{s}| \rightarrow \infty$, se puede considerar que el frente de onda que incide en la superficie refractora sea plano, ver Ref. [3]. Esto es así ya que

$$\hat{I}_{\vec{s} \rightarrow \infty} = \lim_{\vec{s} \rightarrow \infty} \frac{\vec{r} - \vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \lim_{\vec{s} \rightarrow \infty} \frac{\frac{\vec{r}}{|\vec{s}|} - \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}}{\sqrt{\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{|\vec{s}|} - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|} + \frac{\vec{s} \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|}}} = -\hat{s} \quad (3.1)$$

donde \hat{s} representa el vector unitario en la dirección en la cual está la fuente. Para nuestro caso, supondremos que la fuente puntual se encuentra sobre el eje z , en $z \rightarrow -\infty$. Puesto que el vector \hat{I} está dado por la ec.(2.43), la posición de la fuente en \hat{s} se puede cambiar por un punto $\vec{r}_0 = (x, y, 0)$ sobre el frente de onda plano. Como se está considerando que la fuente puntual

CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR

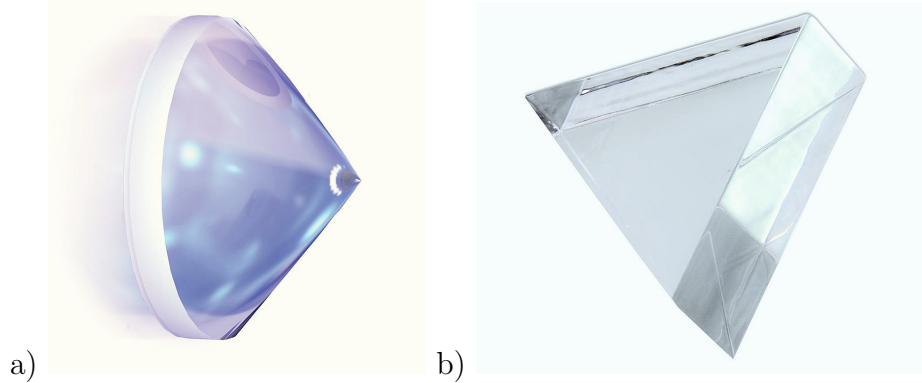


Figura 3.1: a).- Lente axicón Convergente. b).- Lente prisma triangular.

está sobre el eje z , ($z \rightarrow -\infty$) entonces el vector unitario de incidencia es $\hat{I} = \hat{z}$. Nuestro objetivo final es calcular la expresión analítica, y graficar los ronchigramas asociados de acuerdo con la rejilla nula. La rejilla nula será obtenida a partir de un patrón establecido. El patrón que se usará será una rejilla de franjas paralelas dentro de una abertura circular para el caso del axicón, y una rejilla de franjas paralelas dentro de una abertura rectangular para el caso del prisma triangular, estas rejillas se encontrarán sobre el plano $Z = Z_0$, este plano está localizado en la región de interferencia del espacio imagen, es decir, en la región donde se intersectan los rayos refractados. La rejilla nula de Ronchi será entonces el conjunto de puntos (x, y) sobre la cara plana del axicón y la cara plana del prisma triangular sobre el plano $x - y$, que generan las rejillas de franjas paralelas en la abertura circular y la abertura rectangular, según sea el caso. La motivación para realizar este trabajo reside en dos artículos: ver Ref. [1] y [2]. En el primero se realiza un estudio sobre la morfología de un frente de onda plano refractado a través de una lente axicón bidimensional y en el tercero se estudia la refracción de una onda plana a través de una lente axicón tridimensional, para determinar los ronchigramas asociados a la rejilla de Ronchi, por lo que. Así que en este trabajo se desarrolla más ampliamente el trabajo citado en la Ref. [1].

CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR

3.1. CÁUSTICAS GENERADAS POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA A TRAVÉS DE UN AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR

3.1. Cáusticas generadas por la refracción de una onda plana a través de un axicón y un prisma triangular

En esta sección se demostrará que los rayos refractados o equivalentemente, los frentes de ondas refractados por un axicón generan un conjunto cáustico. Sin embargo, en el caso del prisma triangular no es así, ya que la condición que se requiere para que se genere una cáustica es que la superficie tenga simetría de revolución, y como el prisma triangular no posee dicha simetría entonces no hay cáustica.

3.1.1. Axicón

En 1954 McLeod introdujo un nuevo sistema óptico denominado axicón como un dispositivo con simetría de revolución tal que la imagen que forma de un objeto puntual situado sobre su eje de simetría es un segmento de línea recta con longitud finita sobre dicho eje y no otro objeto puntual. El ejemplo más simple de un axicón es el que se muestra en la Fig(3.1a)). El axicón es una lente cónica plana que puede ser convexa (convergente) o cóncava (divergente), y que está caracterizada por su ángulo α , su índice de refracción n y su diámetro transversal a . Los axicones se pueden utilizar como expansores de haz y en sistemas telescópicos. Tienen una gran aplicación en Metrología y Alineación. Mediante un axicón se puede obtener distribuciones lineales de intensidad cuando iluminamos con un frente de onda plano y de intensidad constante. Para la obtención de distribuciones anulares de intensidad, de interés, por ejemplo, en el procesado de materiales y en fotomicrolitografía, mediante la combinación de una lente y un axicón. Otra importante aplicación es en el campo médico, ya que son utilizados para practicar cirugías de laser de corneas. Y finalmente, la gran importancia que tienen en el campo de la Física, es la generación de haces Bessel a partir de la iluminación de una onda plana sobre la cara plana del axicón, ver Fig(3.2).

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.1. CÁUSTICAS GENERADAS POR LA REFRACCIÓN DE UNA
ONDA PLANA A TRAVÉS DE UN AXICÓN Y UN PRISMA
TRIANGULAR**

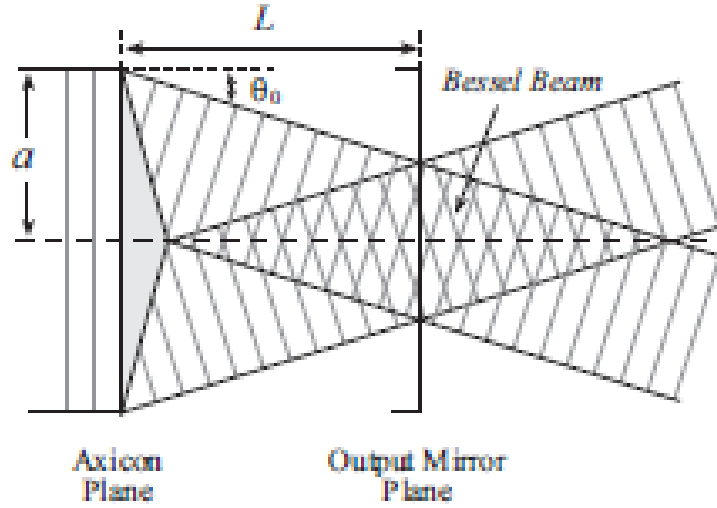


Figura 3.2: Los haces Bessel se producen en la región de interferencia de los rayos refractados.

3.1.2. Cáustica asociada con los rayos refractados en un axicón

Demostremos que la cáustica generada por la refracción a través de un Axicón es una línea recta situada sobre el eje del Axicón, para ello es necesario calcular todas las cantidades que se mencionaron en la sección 8 del capítulo 2. Las componentes del rayo refractado dado por la Ec.(2.39), están dadas por

$$X = x + lR_x \tag{3.2}$$

$$Y = y + lR_y \tag{3.3}$$

$$Z = f(x, y) + lR_z. \tag{3.4}$$

El vector $\vec{r} = (x, y, f(x, y))$ etiqueta cada punto sobre la superficie refractante, l es un parámetro y el vector $\hat{R} = (R_x, R_y, R_z)$ es el vector unitario refractado. Los vectores \vec{r} , $\vec{s} = \vec{r}_0$, \hat{I} , \hat{N} , \hat{R} y el valor de Ω para el caso del axicón están dados por

$$\vec{r} = \left(x, y, (a - \sqrt{x^2 + y^2}) \cot \alpha \right) \tag{3.5}$$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.1. CÁUSTICAS GENERADAS POR LA REFRACCIÓN DE UNA
ONDA PLANA A TRAVÉS DE UN AXICÓN Y UN PRISMA
TRIANGULAR**

$$\vec{r}_0 = (x, y, 0) \quad (3.6)$$

$$\hat{I} = (0, 0, 1) \quad (3.7)$$

$$\hat{N} = \left(\frac{x \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \alpha \right) \quad (3.8)$$

$$\Omega = -\gamma \sin \alpha + \sqrt{1 - \gamma^2 + \gamma^2 \sin^2 \alpha} \quad (3.9)$$

$$\hat{R} = \left(\frac{x \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Omega, \frac{y \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Omega, \gamma + \Omega \sin \alpha \right) \quad (3.10)$$

por lo que las componentes del rayo refractado \vec{X} , dadas por las Ecs.(3.2), (3.3) y (3.4) se pueden escribir como

$$X = \left(1 + \frac{l \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Omega \right) x \quad (3.11)$$

$$Y = \left(1 + \frac{l \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Omega \right) y \quad (3.12)$$

$$Z = a - \sqrt{x^2 + y^2} \cot \alpha + l(\gamma + \Omega \sin \alpha.) \quad (3.13)$$

Los rayos incidentes llegan a la cara plana del axicón, para después, ser refractados al pasar por la superficie cónica del axicón. Es importante poner atención en el rayo que incide en el centro de la circunferencia, la cual limita la cara plana del axicón, ver Fig(3.3(a)). Este rayo incidente al refractarse genera un cono de luz divergente que inicia en $Z = Z_1$. Así como en los rayos refractados que salen de los puntos (x, y) de la cara plana del Axicón, tal que $x^2 + y^2 = a^2$, ver Fig.(3.3(b)). Estos rayos refractados generan un cono de luz denominado cono de luz marginal, el cual converge en $Z = Z_3$, y después de este punto, se genera un cono de luz divergente. La formación de estos conos de luz son la razón por la cual se considera que las líneas paralelas estén dentro de una abertura circular.

- Los rayos refractados que salen del centro de la cara plana del axicón (rayos que pasan sobre el eje Z) están dados por

$$X(\rho = 0, \phi) = \frac{(Z - a \cot \alpha) \Omega \cos \alpha}{(\gamma + \Omega \sin \alpha)} \cos \phi \quad (3.14)$$

$$Y(\rho = 0, \phi) = \frac{(Z - a \cot \alpha) \Omega \cos \alpha}{(\gamma + \Omega \sin \alpha)} \sin \phi \quad (3.15)$$

$$Z = Z. \quad (3.16)$$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.1. CÁUSTICAS GENERADAS POR LA REFRACCIÓN DE UNA
ONDA PLANA A TRAVÉS DE UN AXICÓN Y UN PRISMA
TRIANGULAR**

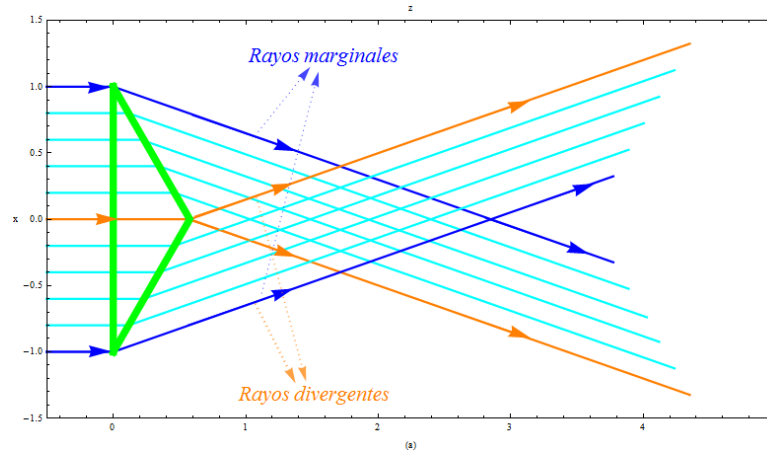


Figura 3.3: Los rayos anaranjados representan los rayos divergentes y los rayos en azul representan a los rayos marginales.

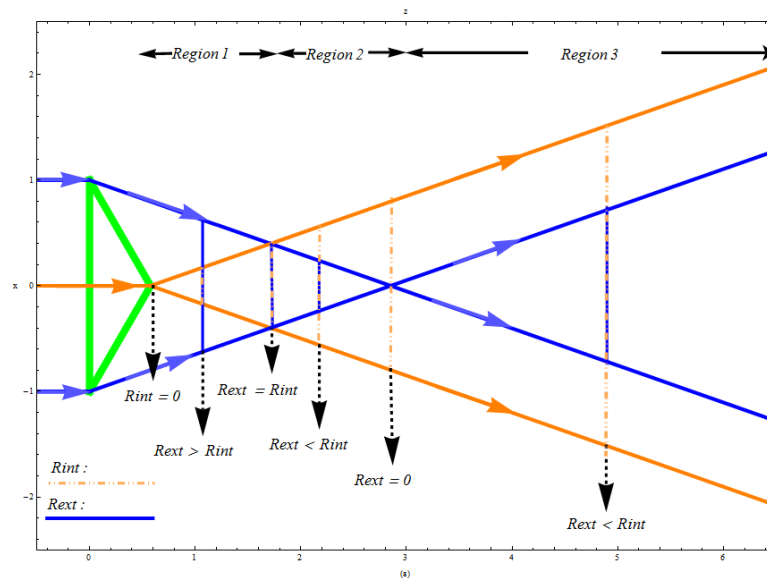


Figura 3.4: Relación entre los R_{ext} y R_{int} en diferentes planos $Z = Z_0$, con Z_0 un valor fijo. Las líneas azules representan los radios externos R_{ext} y las líneas punteadas anaranjadas representan los radios de internos R_{int} .

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.1. CÁUSTICAS GENERADAS POR LA REFRACCIÓN DE UNA
ONDA PLANA A TRAVÉS DE UN AXICÓN Y UN PRISMA
TRIANGULAR**

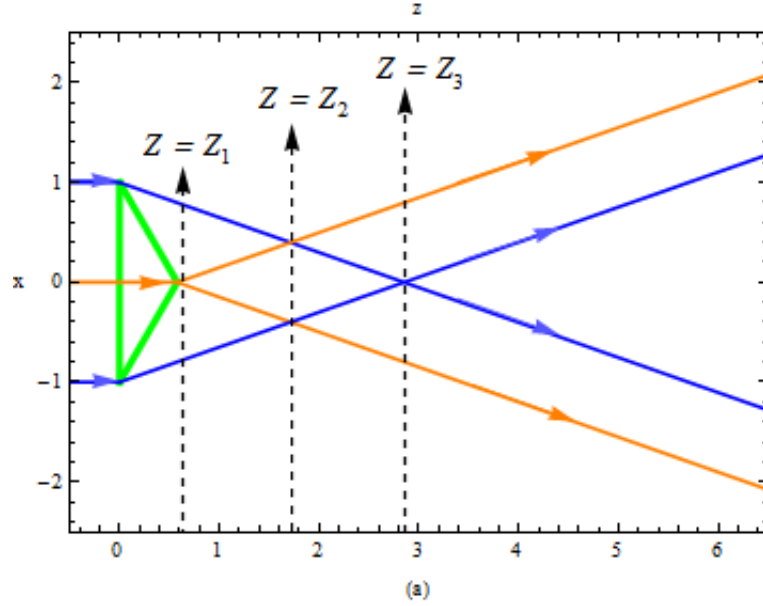


Figura 3.5: Valor de $Z = Z_1$, para el cual $R_{int} = 0$, valor para $Z = Z_1$ $R_{ext} = R_{int}$ y valor de $Z = Z_3$ para el cual $R_{ext} = 0$

En este caso, la intersección de las Ecs.(3.14) y (3.15) con el plano $Z = Z_0$ es una circunferencia con centro en el punto $(0, 0, Z_0)$ y de radio

$$R^{int} = \sqrt{\left(\frac{(Z_0 - a \cot \alpha)\Omega \cos \alpha}{(\gamma + \Omega \sin \alpha)}\right)^2} \quad (3.17)$$

- Por otro lado, los rayos refractados que salen de los puntos que generan el contorno de la cara plana del axicón, es decir, por todos los puntos (x, y) tal que, $x^2 + y^2 = a^2$, están dados por

$$X(\rho = a, \phi) = \left(a + \frac{Z\Omega \cos \alpha}{(\gamma + \Omega \sin \alpha)}\right) \cos \phi \quad (3.18)$$

$$Y(\rho = a, \phi) = \left(a + \frac{Z\Omega \cos \alpha}{(\gamma + \Omega \sin \alpha)}\right) \sin \phi \quad (3.19)$$

$$Z = Z. \quad (3.20)$$

La intersección de las Ecs.(3.18) y (3.19) con el plano $Z = Z_0$ es una circun-

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.1. CÁUSTICAS GENERADAS POR LA REFRACCIÓN DE UNA
ONDA PLANA A TRAVÉS DE UN AXICÓN Y UN PRISMA
TRIANGULAR**

ferencia con centro en el punto $(0, 0, Z_0)$ y de radio

$$R^{ext} = \sqrt{\left(a + \frac{Z_0 \Omega \cos \alpha}{\gamma + \Omega \sin \alpha}\right)^2}. \quad (3.21)$$

Un punto $(X, Y, Z_0) = (X_r, n, Z_0)$ de la circunferencia, centrada en el punto $(0, 0, Z_0)$ de radio R^{int} está dado por

$$(X_r, n, Z_0) = \left(\pm \sqrt{(R^{int})^2 - n^2}, n\right) = \left(\pm \sqrt{\left(\frac{(Z_0 - a \cot \alpha) \Omega \cos \alpha}{\gamma + \Omega \sin \alpha}\right)^2 - n^2}, n, Z_0\right). \quad (3.22)$$

Un punto $(X, Y, Z_0) = (X_r, n, Z_0)$ de la circunferencia centrada en el punto $(0, 0, Z_0)$ de radio R^{ext} , se puede escribir como

$$(X_r, n, Z_0) = \left(\pm \sqrt{(R^{ext})^2 - n^2}, n\right) = \left(\pm \sqrt{\left(a + \frac{Z_0 \Omega \cos \alpha}{\gamma + \Omega \sin \alpha}\right)^2 - n^2}, n, Z_0\right). \quad (3.23)$$

En la Fig.(3.4) podemos observar la relación que existe entre los radios R_{ext} y R_{int} en las diferentes regiones. En la región 1 y 2 $R_{ext} > R_{int}$, y en $Z = Z_1$ $R_{int} = 0$. En la región 2 y 3 se tiene que $R_{ext} < R_{int}$. de Ecs.(3.17) y la Ec.(3.21) se tiene que

$$Z_1 = a \cot \alpha \quad (3.24)$$

$$Z_3 = -\frac{a(\gamma + \Omega \sin \alpha)}{\Omega \cos \alpha}. \quad (3.25)$$

En la región 2 hay un valor para $Z = Z_2$ en donde el radio exterior R_{ext} es cero, ver Fig.(3.5), igualando las Ecs.(3.21) y (3.17)tenemos que Z_2 está dado por

$$Z_2 = \frac{a \tan \alpha [(\Omega \cos \alpha \cot \alpha)^2 - (\gamma + \Omega \sin \alpha)^2]}{2\Omega(\gamma \sin \alpha + \Omega)}. \quad (3.26)$$

Ahora calcularemos las cantidades H_2 , H_1 y H_0 de acuerdo a las Ecs.(2.53), (2.54) y (2.55)

$$H_2 = 0 \quad (3.27)$$

$$H_1 = \frac{\Omega(\Omega + \gamma \sin \alpha) \cot \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3.28)$$

$$H_0 = \gamma + \Omega \csc \alpha \quad (3.29)$$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.1. CÁUSTICAS GENERADAS POR LA REFRACCIÓN DE UNA
ONDA PLANA A TRAVÉS DE UN AXICÓN Y UN PRISMA
TRIANGULAR**

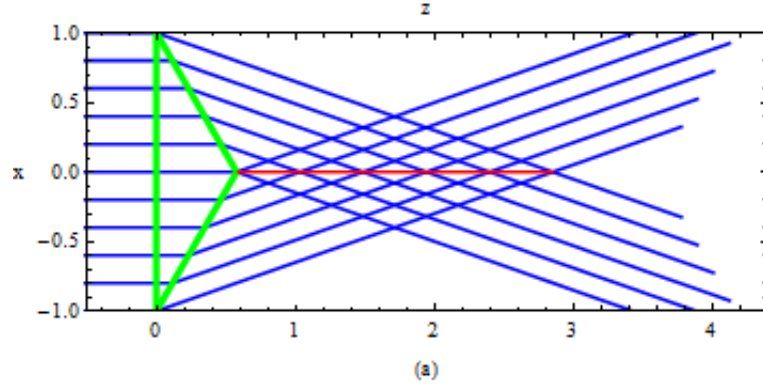


Figura 3.6: Cáustica (línea roja) generada por la refracción de una onda plana a través de un axicón

puesto que $H_2 = 0$ se tiene que el conjunto cáustico está dado por la Ec.(2.59)

$$X_C = 0 \quad (3.30)$$

$$Y_C = 0 \quad (3.31)$$

$$Z_C = (a - \sqrt{x^2 + y^2}) \cot \alpha + \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}[\Omega \gamma \cos \alpha + \tan \alpha]}{(-\Omega)(\Omega + \gamma \sin \alpha)}. \quad (3.32)$$

Por lo tanto, el conjunto cáustico asociado a una onda plana refractada en un axicón es una línea recta dada por la Ec.(3.32) que se localiza sobre el eje y , ver Fig(3.6)

3.1.3. Cáustica asociada con los rayos refractados en un prisma triangular

En este caso, podemos parametrizar la posición de un punto sobre la superficie del prisma triangular, por el vector de posición

$$\vec{r} = (x, y, (D - \sqrt{x^2}) \cot \alpha). \quad (3.33)$$

Los vectores $\vec{s} = \vec{r}_0, \hat{I}, \hat{N}, \hat{R}$ y Ω para el caso del prisma triangular se pueden expresar como

$$\vec{r}_0 = (x, y, 0) \quad (3.34)$$

$$\hat{I} = (0, 0, 1) \quad (3.35)$$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.1. CÁUSTICAS GENERADAS POR LA REFRACCIÓN DE UNA
ONDA PLANA A TRAVÉS DE UN AXICÓN Y UN PRISMA
TRIANGULAR**

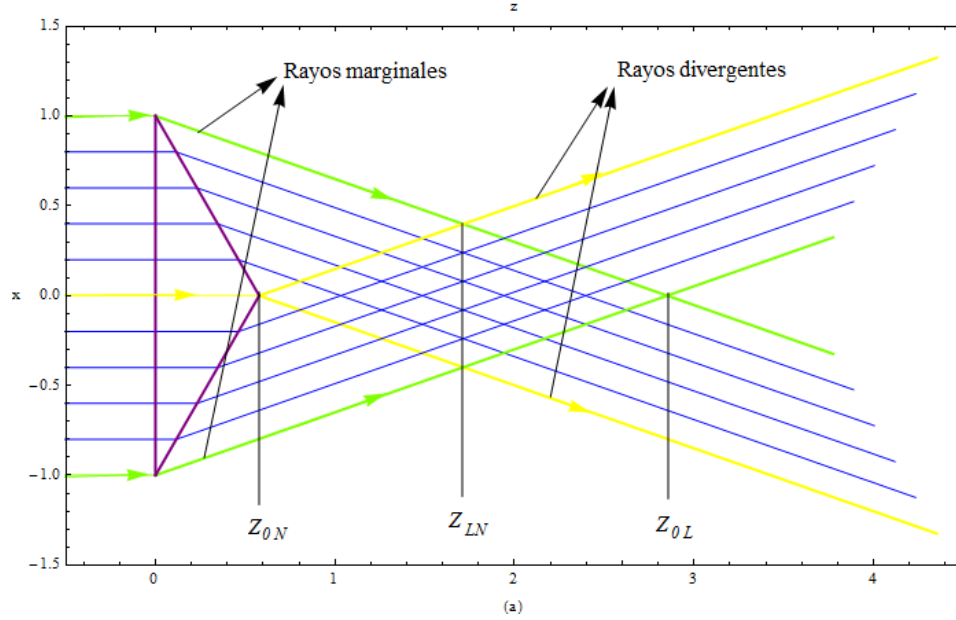


Figura 3.7: Valores de Z_{0N} , Z_{0L} y Z_{LN} para los cuales $Z_{0N} = 0$, $Z_{0L} = 0$ y $Z_{LN} = Z_L = Z_N$, Rayos marginales (líneas de color verde) y divergentes (líneas de color amarillo)

$$\hat{N} = \left(\frac{x \cos \alpha}{\sqrt{x^2}}, 0, \sin \alpha \right) \quad (3.36)$$

$$\Omega = -\gamma \sin \alpha + \sqrt{1 - \gamma^2 + \gamma^2 \sin^2 \alpha} \quad (3.37)$$

$$\hat{R} = \left(\frac{x \cos \alpha}{\sqrt{x^2}} \Omega, 0, \gamma + \Omega \sin \alpha \right) \quad (3.38)$$

por lo que las Ecs.(3.2), (3.3) y (3.4) se pueden escribir como

$$X = \left(1 + \frac{l \cos \alpha}{\sqrt{x^2}} \Omega \right) x \quad (3.39)$$

$$Y = y \quad (3.40)$$

$$Z = D - \sqrt{x^2} \cot \alpha + l(\gamma + \Omega \sin \alpha). \quad (3.41)$$

Debemos de tomar en cuenta los rayos refractados $\vec{X}(x = D, y, Z_0)$ y $\vec{X}(x = 0, y, Z_0)$ denominados rayos marginales y rayos divergentes respectivamente, ver Fig(3.7).

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.1. CÁUSTICAS GENERADAS POR LA REFRACCIÓN DE UNA
ONDA PLANA A TRAVÉS DE UN AXICÓN Y UN PRISMA
TRIANGULAR**

* Las componentes de los rayos refractos $\vec{X}(x = D, y, Z_0)$ están dadas por:

$$X(D, y, Z_0) = L \quad (3.42)$$

$$Y(D, y, Z_0) = y \quad (3.43)$$

$$Z(D, y, Z_0) = Z_0, \quad (3.44)$$

donde

$$L = \frac{D(\gamma + \Omega \sin \alpha) + Z_0 \Omega \cos \alpha}{\gamma + \Omega \sin \alpha}. \quad (3.45)$$

* Y las componentes de los rayos refractados $\vec{X}(x = 0, y, Z_0)$ están dados por:

$$X(0, y, Z_0) = N \quad (3.46)$$

$$Y(0, y, Z_0) = y \quad (3.47)$$

$$Z(0, y, Z_0) = Z_0, \quad (3.48)$$

donde

$$N = \frac{(Z_0 - D \cot \alpha) \Omega \cos \alpha}{\gamma + \Omega \sin \alpha}, \quad (3.49)$$

como podemos ver, L y N están en función sólo de Z_0 , esto es, $L = L(Z_0)$ y $N = N(Z_0)$, ya que γ , Ω y D son valores dados. Existe valores Z_{0L} , Z_{0N} y $Z_{L=N}$ dados por

$$Z_{0L} = \frac{-D(\gamma + \Omega \sin \alpha)}{\Omega \cos \alpha} \quad (3.50)$$

$$Z_{0N} = D \cot \alpha \quad (3.51)$$

$$Z_{(L=N)} = \frac{D[(\Omega \cot \alpha \cos \alpha)^2 - (\gamma + \Omega \sin \alpha)^2]}{2\Omega \cos \alpha(\gamma \sin \alpha + \Omega)} \sin \alpha \quad (3.52)$$

para los cuales $L(Z_{0L}) = 0$, $N(Z_{0N}) = 0$ y $L(Z_{L=N}) = N(Z_{L=N})$, ver Fig(3.7). Ahora calcularemos las cantidades H_2 , H_1 y H_0 de acuerdo a las Ecs.(2.53), (2.54) y (2.55)

$$H_2 = 0 \quad (3.53)$$

$$H_1 = 0 \quad (3.54)$$

$$H_0 = \frac{\Omega + \gamma \sin \alpha}{\sqrt{2}} \csc \alpha \quad (3.55)$$

puesto que $H_2 = 0$ y $H_1 = 0$, y considerando la Ec.(2.52), se tiene que no hay cáustica asociada debido a que $H_2 \neq 0$. En este caso, se tiene que no hay formación de cáustica.

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

3.2. Ronchigramas generados por la rejilla nula de Ronchi

Los ronchigramas que se van a determinar son imágenes que se obtienen a partir de determinados patrones que se localizan sobre la cara plana del axicón, la cual se localiza sobre el plano $x - y$; de manera similar colocaremos la cara plana del prisma triangular que es opuesta al ángulo α . Una vez que se ha iluminado a la superficie refractora con una onda de luz dada. Comúnmente se localiza una rejilla de franjas paralelas dentro de una abertura rectangular sobre la superficie refractante, al ser iluminada esta rejilla se formará una imagen generada por los rayos de luz refractados que salen de cada punto de cada franja que se encuentra dentro de la abertura rectangular. En nuestro caso haremos algo diferente, nosotros deseamos calcular la forma de la rejilla que se debe de poner en la superficie refractora de tal manera que la imagen que se forme sea ahora la rejilla de franjas paralelas dentro de una abertura determinada. A esta rejilla que se ubica en la superficie refractora se le conoce como rejilla nula de Ronchi. La abertura en la que se van a encontrar las franjas paralelas van a depender de la forma de nuestra superficie refractante. En el caso del axicón consideraremos una abertura circular, mientras que en el caso del prisma triangular, la abertura a considerar será de forma rectangular.

3.2.1. Cálculo de la rejilla nula de Ronchi para un axicón

Nuestro objetivo es determinar el conjunto (x, y) de tal manera que

$$X(x, y) = X_r \tag{3.56}$$

$$Y(x, y) = n \tag{3.57}$$

donde $-m \leq n \leq m$ y $-l \leq X_r \leq l$. Nosotros imponemos que el conjunto de puntos (X_r, n) formen líneas paralelas dentro del plano $Z = Z_0$ y paralelas al plano $y - z$, en una abertura circular, Ver Fig.(3.8). Más adelante se justifica el por qué se considera una abertura circular. Si consideramos un valor fijo para la componente Z , por ejemplo $Z = Z_0$, de la Ec.(3.4) el parametro l queda determinado de la siguiente manera

$$l = \frac{Z_0 - f(x, y)}{R_z} \tag{3.58}$$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

sustituyendo la Ec.(3.58) en (3.2), (3.3) y (3.4), las componentes de un punto que etiqueta un rayo refractado \vec{X} se pueden escribir como

$$X = x + \left(\frac{Z_0 - f(x, y)}{R_z} \right) R_x \quad (3.59)$$

$$Y = y + \left(\frac{Z_0 - f(x, y)}{R_z} \right) R_y \quad (3.60)$$

$$Z = Z_0. \quad (3.61)$$

Sustituyendo las Ec(3.5), (3.9) y (3.10) en (3.59), (3.60), y (3.61) tenemos que

$$X = \left(1 + \frac{[Z_0 - (a - \sqrt{x^2 + y^2}) \cot \alpha] \Omega \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2} (\gamma + \Omega \sin \alpha)} \right) x \quad (3.62)$$

$$Y = \left(1 + \frac{[Z_0 - (a - \sqrt{x^2 + y^2}) \cot \alpha] \Omega \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2} (\gamma + \Omega \sin \alpha)} \right) y \quad (3.63)$$

$$Z = Z_0 \quad (3.64)$$

para un valor dado $Z = Z_0$, las Ecs.(3.62) y (3.63) establecen un mapeo entre los conjuntos (X, Y) y (x, y) , de la forma: $X = X(x, y)$ y $Y = Y(x, y)$, donde X y Y son las componentes del rayo refractado en la dirección x y y respectivamente. De la misma manera, es posible determinar a x y y en función de X y Y , es decir, $x = x(X, Y)$ y $y = y(X, Y)$.

3.2.2. Generación de rejillas de franjas paralelas en una abertura circular

Dada una circunferencia de radio R , un punto sobre la circunferencia está representado en coordenadas cartesianas por $(X, Y) = (\pm\sqrt{R^2 - Y^2}, Y)$. Si nos fijamos en una línea paralela al eje x , Ver Fig.(3.8), cuyos puntos extremos están dados por

$$\vec{r}_i = -\sqrt{R^2 - n^2} \hat{x} + n \hat{y}, \quad (3.65)$$

$$\vec{r}_f = \sqrt{R^2 - n^2} \hat{x} + n \hat{y}. \quad (3.66)$$

Por lo tanto, la forma paramétrica de este segmento de línea recta está dada por

$$\vec{r}_n = \vec{r}_i + \sigma(\vec{r}_f - \vec{r}_i), \quad (3.67)$$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

donde $0 \leq \sigma \leq 1$. Sustituyendo las Ecs.(3.65) y (3.66) en (3.68), se tiene que el vector \vec{r}_n se puede escribir como

$$\vec{r}_n = (2\sigma - 1)\sqrt{R^2 - n^2}\hat{x} + n\hat{y}. \quad (3.68)$$

La magnitud del vector \vec{r}_n está dada por

$$|\vec{r}_n| = \sqrt{(2\sigma - 1)^2(R^2 - n^2) + n^2}. \quad (3.69)$$

Regresando a nuestro problema, sustituyendo las Ecs.(3.56) y (3.57) en (3.62) y (3.63) tenemos que

$$X_r = \left(1 + \frac{[Z_0 - (a - \sqrt{x^2 + y^2}) \cot \alpha] \Omega \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}(\gamma + \Omega \sin \alpha)}\right) x \quad (3.70)$$

$$n = \left(1 + \frac{[Z_0 - (a - \sqrt{x^2 + y^2}) \cot \alpha] \Omega \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}(\gamma + \Omega \sin \alpha)}\right) y. \quad (3.71)$$

Para determinar el conjunto (x, y) que cumple con las Ecs.(3.70) y (3.71),

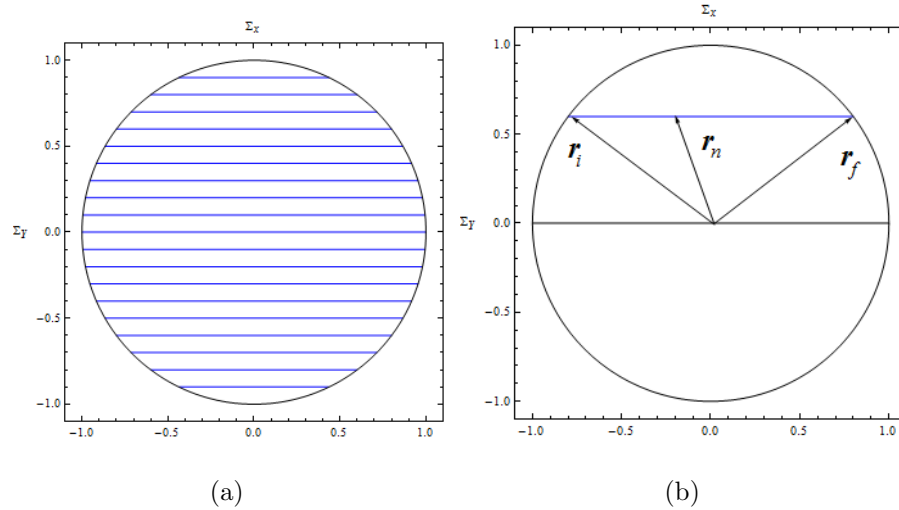


Figura 3.8: (a) Patrón de imagen generada por rejillas paralelas, dentro del plano $Z = Z_0$ y paralelas al plano $y - z$, dentro de una abertura circular. (b) Vector de posición \vec{r}_n de un punto sobre la rejilla dentro de la abertura circular.

es necesario considerar dos casos: en el primer caso consideraremos $n = 0$ y en el segundo caso $n \neq 0$.

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

- Consideremos $n = 0$, por lo que, las Ecs.(3.124) y (3.125) se pueden escribir como

$$X_r = \left(1 + \frac{[Z_0 - (a - \sqrt{x^2 + y^2}) \cot \alpha] \Omega \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}(\gamma + \Omega \sin \alpha)} \right) x \quad (3.72)$$

$$0 = \left(1 + \frac{[Z_0 - (a - \sqrt{x^2 + y^2}) \cot \alpha] \Omega \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}(\gamma + \Omega \sin \alpha)} \right) y. \quad (3.73)$$

De manera inmediata se observa que la Ec.(3.73) se cumple cuando uno de los dos factores es cero, esto quiere decir que nuevamente se tienen dos casos, en los cuales la Ec.(3.73) se cumple. El primer caso se tiene cuando

$$1 + \frac{[Z_0 - (a - \sqrt{x^2 + y^2}) \cot \alpha] \Omega \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}(\gamma + \Omega \sin \alpha)} = 0, \quad (3.74)$$

mientras que el segundo caso se obtiene para

$$y = 0. \quad (3.75)$$

- * Primer caso: esto ocurre cuando se cumple la Ec.(3.74), la cual se puede escribir como

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (3.76)$$

donde

$$R = \frac{(a \cot \alpha - Z_0) \Omega \cos \alpha}{\gamma + \Omega(\sin \alpha + \cot \alpha \cos \alpha)} \quad (3.77)$$

La Ec.(3.76) describe una circunferencia con centro en el punto $(0, 0, Z_0)$, de radio R dado por la Ec.(3.77). Por otro lado, al sustituir la Ec.(3.74) en (3.72), se obtiene que $X_r = 0$. Por lo tanto, si consideramos la Ec.(3.74), tenemos que la imagen (x, y) del punto $(X_r, n) = (0, 0)$ es una circunferencia con centro en el punto $(0, 0, Z_0)$, dada por la Ec.(3.76). Esto quiere decir que todos los rayos que inciden sobre los puntos $(R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$ de la cara plana del axicón (R es el radio de la circunferencia y $0 \leq \theta \leq 2\pi$), llegan al punto $(0, 0, Z_0)$ después de ser refractados.

- * Segundo caso: la otra condición para que la Ec.(3.73) se cumpla está dada por la Ec.(3.75). la imagen (x, y) del conjunto $(X_r, 0)$ es $(x, 0)$, donde

$$x \in [-a, a]. \quad (3.78)$$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI

Por lo tanto, la imagen (x, y) de los puntos $(X_r, n) = (X_r, 0)$, donde $-l \leq X_r \leq l$ es un segmento de recta donde $y = 0$ y x está dado por la Ec.(3.78). Así que, hemos encontrado que los rayos que inciden sobre los puntos $(x, 0)$ de la cara plana del axicón, donde x está dada por la Ec.(3.78) se mapean en el conjunto $(X_r, 0)$ después de ser refractados.

- Si consideramos que $n \neq 0$, es necesario emplear coordenadas polares: $x = \rho \cos \phi$ y $y = \rho \sin \phi$, para simplificar los cálculos. Por lo que, las Ecs. (3.124) y (3.125) tiene la forma

$$X_r = \left(1 + \frac{[Z_0 - (a - \rho) \cot \alpha] \Omega \cos \alpha}{\rho(\gamma + \Omega \sin \alpha)} \right) \rho \cos \phi \quad (3.79)$$

$$n = \left(1 + \frac{[Z_0 - (a - \rho) \cot \alpha] \Omega \cos \alpha}{\rho(\gamma + \Omega \sin \alpha)} \right) \rho \sin \phi. \quad (3.80)$$

Para continuar, ahora escribiremos

$$X_r = \rho_r \cos \phi_r \quad (3.81)$$

$$n = \rho_r \sin \phi_r. \quad (3.82)$$

Comparando las Ecs.(3.79) y (3.80) con las Ecs. (3.81) y (3.82) se encuentra que

$$\phi = \phi_r, \quad \text{o} \quad \phi = \phi_r + \pi \quad (3.83)$$

$$\rho = \rho_{r\pm}. \quad (3.84)$$

De las Ecs.(3.81) y (3.82) se tienen las siguientes identidades

$$\frac{n}{X_r} = \frac{\sin \phi_r}{\cos \phi_r} \rightarrow \tan \phi_r = \frac{n}{X_r} \quad (3.85)$$

$$\sin \phi_r = \frac{n}{\sqrt{X_r^2 + n^2}} \quad (3.86)$$

$$\cos \phi_r = \frac{X_r}{\sqrt{X_r^2 + n^2}} \quad (3.87)$$

por lo tanto, hemos encontrado la dependencia explicita de $\sin \phi_r$ y $\cos \phi_r$ en función de X_r y n . Dado los valores X_r y n , es posible despejar a ρ de las Ecs.(3.79) y (3.80). En este caso, denotaremos a ρ por ρ_r , por lo que

$$\rho \equiv \rho_{r\pm} = \frac{[\pm \sqrt{X_r^2 + n^2}(\gamma + \Omega \sin \alpha) - \Omega \cos \alpha(Z_0 - a \cot \alpha)] \sin \alpha}{\Omega + \gamma \sin \alpha}. \quad (3.88)$$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

La Ec.(3.88) nos dice que para la variable ρ_r existen dos valores, ρ_{r+} y ρ_{r-}

$$\rho_{r+} = \frac{[\sqrt{X_{r+}^2 + n^2}(\gamma + \Omega \sin \alpha) - \Omega \cos \alpha(Z_0 - a \cot \alpha)] \sin \alpha}{\Omega + \gamma \sin \alpha} \quad (3.89)$$

$$\rho_{r-} = \frac{[-\sqrt{X_{r-}^2 + n^2}(\gamma + \Omega \sin \alpha) - \Omega \cos \alpha(Z_0 - a \cot \alpha)] \sin \alpha}{\Omega + \gamma \sin \alpha} \quad (3.90)$$

en este caso, podemos ver que en las Ecs.(3.89) y (3.90), el valor X_r no es el mismo, esto es así porque tienen diferente rango de definición. Este rango de definición está dado por condiciones geométricas, que daremos más adelante. Por otro lado, como la función tan es de periodo π , por lo que, de la Ec.(3.91) se tiene que

$$\tan \phi = \tan \phi_r, \quad \text{o} \quad \tan \phi = \tan(\phi_r + \pi), \quad (3.91)$$

en términos de las funciones sin y cos se cumple que

$$\sin(\phi_r + \pi) = -\sin \phi_r \quad (3.92)$$

$$\cos(\phi_r + \pi) = -\cos \phi_r. \quad (3.93)$$

Debido a que existen dos valores para ρ_r dados por la Ecs.(3.89) y (3.90), el conjunto solución (ρ_r, ϕ_r) de las Ecs.(3.79) y (3.80) está generado por dos conjuntos, el primero está dado por las ecuaciones

$$X_{r+} = \rho_{r+} \cos \phi_r \quad (3.94)$$

$$n = \rho_{r+} \sin \phi_r, \quad (3.95)$$

mientras que, el segundo conjunto está dado por las ecuaciones

$$X_{r-} = \rho_{r-} \cos(\phi_r + \pi) = -\rho_{r-} \cos \phi_r \quad (3.96)$$

$$n = \rho_{r-} \sin(\phi_r + \pi) = -\rho_{r-} \sin \phi_r. \quad (3.97)$$

Recordemos que para cualquier punto (x, y) descrito en coordenadas polares ρ y ϕ , se tiene que $0 \leq \rho$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$. En las Ecs. (3.94) y (3.95) ρ_{r+} es positivo, mientras que en las Ecs. (3.96) y (3.97) se tiene que ρ_{r-} es negativo, por lo que es necesario tomar en cuenta la periodicidad de la función tan, dada por la Ec.(3.91), esto permite que $0 \leq -\rho_{r-}$. Una vez que hemos obtenido la dependencia explícita de las variables ρ_r y ϕ_r , nos enfocaremos ahora en determinar el rango de la variable X_{r+} y X_{r-} , para la cual $X(\rho_{r\pm}, \phi_r) = X_{r\pm}$ y $Y(\rho_{r\pm}, \phi_r) = n$, tienen significado físico, es decir, $(X_{r\pm}, n)$ debe ser un

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

punto por el cual debe pasar por lo menos un rayo refractado. Nuestro sistema óptico por el cual la luz se refracta es un Axicón. En este caso, vamos a considerar que incide una onda plana por la cara plana del Axicón. De la Ec.(3.22) se tiene que

$$X_{r-} \equiv X_r^{int} \epsilon \left[-\sqrt{\left(\frac{(Z_0 - a \cot \alpha)\Omega \cos \alpha}{(\gamma + \Omega \sin \alpha)}\right)^2 - n^2}, \sqrt{\left(\frac{(Z_0 - a \cot \alpha)\Omega \cos \alpha}{(\gamma + \Omega \sin \alpha)}\right)^2 - n^2} \right], \quad (3.98)$$

y de la Ec.(3.23) vemos que

$$X_{r+} \equiv X_r^{ext} \epsilon \left[-\sqrt{\left(a + \frac{Z_0 \Omega \cos \alpha}{(\gamma + \Omega \sin \alpha)}\right)^2 - n^2}, \sqrt{\left(a + \frac{Z_0 \Omega \cos \alpha}{(\gamma + \Omega \sin \alpha)}\right)^2 - n^2} \right] \quad (3.99)$$

Por lo tanto, hemos encontrado el rango de definición de las variables X^{ext} y X^{int} , el cual es el mismo para las variables X_{r+} y X_{r-} respectivamente. Resulta ser que $X_{r+} = X^{ext}$, por lo que, X_{r+} esta asociada con el radio del cono de luz marginal. Mientras que, $X_{r-} = X^{int}$, por lo tanto, X_{r-} está relacionada con el radio del cono de luz divergente. En resumen, para $n \neq 0$ tenemos dos valores para ρ_r : ρ_{r+} y ρ_{r-} , y dos valores para X_r : $X_{r+} = X_{r+}$ y $X_{r-} = X_{r-}$. El conjunto (x_r, y_r) tal que $X(x_r, y_r) = X_r$ y $Y(x_r, y_r) = n$, está dado por

$$(x_r, y_r) = (\rho_r \cos \phi_r, \rho_r \sin \phi_r) \quad (3.100)$$

el cual está formado por dos conjuntos, en el primero se toma en cuenta los valores ρ_{r+} y X_{r+} , mientras que el segundo está formado por los valores ρ_{r-} y X_{r-} . De esta manera, para el primer conjunto, la Ec.(3.100) se pueden escribir como

$$(x_{r+}, y_{r+}) = (\rho_{r+} \cos \phi_r, \rho_{r+} \sin \phi_r) \quad (3.101)$$

sustituyendo las Ecs.(3.86), (3.87) y (3.89) en la Ec.(3.101) tenemos que

$$x_{r+} = \frac{[\sqrt{X_{r+}^2 + n^2}(\gamma + \Omega \sin \alpha) - \Omega \cos \alpha(Z_0 - a \cot \alpha)] \sin \alpha}{\Omega + \gamma \sin \alpha} \frac{X_{r+}}{\sqrt{X_{r+}^2 + n^2}} \quad (3.102)$$

$$y_{r+} = \frac{[\sqrt{X_{r+}^2 + n^2}(\gamma + \Omega \sin \alpha) - \Omega \cos \alpha(Z_0 - a \cot \alpha)] \sin \alpha}{\Omega + \gamma \sin \alpha} \frac{n}{\sqrt{X_{r+}^2 + n^2}} \quad (3.103)$$

donde X_{r+} está dado por la Ec.(3.99).

Mientras que para el segundo conjunto la Ec.(3.100) se puede escribir como

$$(x_{r-}, y_{r-}) = (-\rho_{r-} \cos \phi_r, -\rho_{r-} \sin \phi_r) \quad (3.104)$$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

sustituyendo las Ecs.(3.86), (3.87) y (3.90) en la Ec.(3.104) tenemos que

$$x_{r-} = - \frac{[-\sqrt{X_{r-}^2 + n^2}(\gamma + \Omega \sin \alpha) - \Omega \cos \alpha(Z_0 - a \cot \alpha)] \sin \alpha}{\Omega + \gamma \sin \alpha} \frac{X_{r-}}{\sqrt{X_{r-}^2 + n^2}} \quad (3.105)$$

$$y_{r-} = - \frac{[-\sqrt{X_{r-}^2 + n^2}(\gamma + \Omega \sin \alpha) - \Omega \cos \alpha(Z_0 - a \cot \alpha)] \sin \alpha}{\Omega + \gamma \sin \alpha} \frac{n}{\sqrt{X_{r-}^2 + n^2}} \quad (3.106)$$

donde X_{r-} está dado por la Ec.(3.98).

Como ejemplo, consideremos dos casos: $n = 0$ y $n = ,05$.

- Sea $n = 0$. Para $\alpha = \pi/3$, $a = 1$, $\gamma = 1,517$ y $Z_0 = 1,5$, el patrón de imagen de la rejilla es una recta dada por los puntos $(X_{r+}, 0)$, donde $-0,696177 \leq X_{r+} \leq 0,696177$ según la Ec.(3.99), ver Fig.(3.9). La imagen del patrón de imagen está formada por dos imágenes. La primer imagen está generada por el conjunto $(R \cos \phi, R \sin \phi)$ dado por la Ec.(3.76), con $R = ,4043$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$, el cual describe una circunferencia en el plano $x-y$ centrada en el origen de radio R , ver Fig.(3.9), y la segunda imagen está generada por una recta dada por las Ecs.(3.75) y (3.78), ver Fig.(3.9). Por lo que, la imagen del patrón de imagen es la unión de estos dos conjuntos.

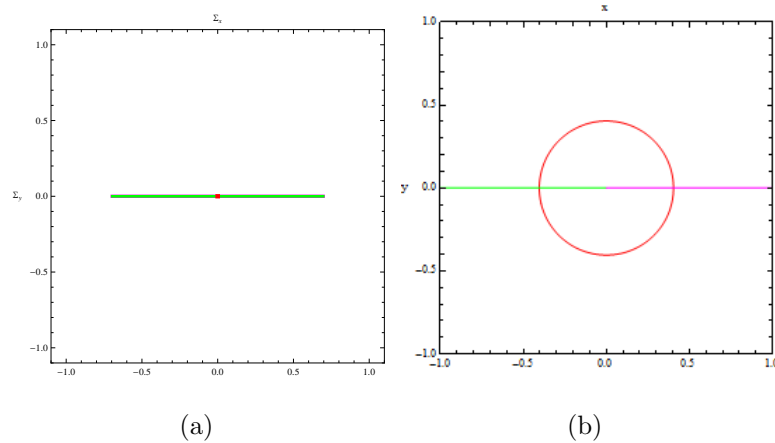


Figura 3.9: (a).- Patrón de imagen generado por la rejilla $Y = n = 0$, en el plano $Z = Z_0$. (b).-Imágen generada en la cara plana del Axicón,(conjuntos de puntos (x, y) sobre el plano $x - y$), tal que $X_r(x, y) = X_{r+}$ y $Y(x, y) = 0$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

- Sea $n = .05$. El patrón de imagen de la rejilla se observar en la Fig.(3.10) Para $\alpha = \pi/3$, $a = 1$, $\gamma = 1,517$ y $Z_0 = 1,5$, la imagen del patrón de imagen está formada por dos imágenes. La primer imagen está generada por el conjunto $(\rho_{r+} \cos \phi_r, \rho_{r+} \sin \phi_r)$ dadas por las Ecs.(3.102) y (3.103), donde $-0,694379 \leq X_{r+} \leq 0,694379$, dado por la Ec.(3.99) ver Fig.(3.10), y la segunda imagen está generada por los puntos de la forma $(-\rho_{r-} \cos \phi_r, -\rho_{r-} \sin \phi_r)$ dadas por las Ecs.(3.105) y (3.106), donde $-0,319803 \leq X_{r+} \leq 0,319803$, dado por la Ec.(3.98), ver Fig.(3.10). Por lo que, la imagen del patrón de imagen es la unión de estos dos conjuntos, ver Fig.(3.10)

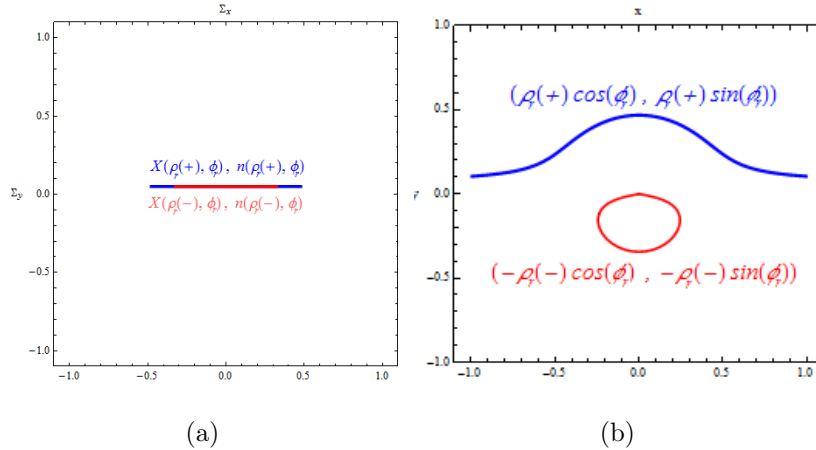


Figura 3.10: (a).- Patrón de imagen generado por la rejilla $Y = n = ,05$, en el plano $Z = Z_0$. (b).-Imagen generada en la cara plana del Axicón, (conjunto de puntos $(\rho_r \cos \phi_r, \rho_r \sin \phi_r)$ sobre el plano $x - y$), tal que $X_r(\rho_r, \phi_r) = X_{r+}$ y $Y(\rho_r, \phi_r) = ,05$, con $Z_0 = 1,5$

En las Fig.(3.11) y (3.12) se puede observar las imágenes denominadas rejillas nulas, las cuales están dadas por las Ecs(3.102) y (3.103), y (3.105) y (3.106) en el plano $x - y$, de tal manera que se genere las rejillas (patrón de la rejilla) establecidas por las Ecs(3.56) y (3.57) a distintos planos $\Sigma_x - \Sigma_y$, es decir a diferentes valores de Z_0 . En las Fig.(3.11a) y En las Fig.(3.11b) se tiene la rejilla (patrón de la rejilla) en el plano $\Sigma_x - \Sigma_y$, donde $Z_0 = 1,5$ y la rejilla nula correspondiente, la cual se encuentra en el plano $x - y$, en la cara plana del axicón. La rejilla está formada por franjas paralelas, cada franja está formada por dos líneas de color diferente. La línea negra de la rejilla está justamente sobre el eje x . Las líneas continuas y punteadas de color rojo, verde, rosa forman un círculo correspondiente al cono de luz

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

divergente, mientras que las líneas continuas de color azul, amarillo café, magenta y cyan forman un círculo que corresponde al cono de luz marginal. Conforme se desplaza la pantalla de la rejilla, es decir, cada vez que la rejilla se encuentra a un plano Z_0 diferente, se tiene que los radios de los círculos correspondientes a los conos de luz divergente y marginal van cambiando. En la Fig.(3.11a) podemos observar que el círculo correspondiente al cono de luz divergente es más pequeño que el círculo correspondiente al cono de luz marginal. En la Fig.(3.11c) se observa que ambos círculos son del mismo tamaño. En la Fig.(3.11e) lo contrario que en la Fig.(3.11a), estos es, el círculo correspondiente al cono de luz divergente es más grande que el círculo correspondiente al cono de luz marginal. En la Fig.(3.12a) sólo existen las líneas que forman la rejilla correspondiente al cono de luz divergente, ya que, en este plano $Z_0 = 2,8504$ el círculo correspondiente al cono de luz marginal es un punto. Finalmente, en la Fig.(3.12c) tenemos sólo el círculo correspondiente al cono de luz divergente, la región dentro de este círculo está en blanco debido a que no pasa ningún rayo refractado de los rayos que forman el cono de luz marginal. Por otro lado, las Fig.(3.11b), (3.11d), (3.11e), (3.12b) y (3.12d) son las imágenes de las rejillas nulas de cada rejilla.

3.2.3. Cálculo de la rejilla nula de Ronchi para un prisma triangular

Nuestro objetivo consiste en determinar los conjuntos (x, y) y (\tilde{x}, \tilde{y}) :

(i) El primer conjunto (x, y) debe de satisfacer las ecuaciones

$$X(x, y) = X_r \tag{3.107}$$

$$Y(x, y) = n. \tag{3.108}$$

Nosotros imponemos que el conjunto de puntos (X_r, n) formen líneas dentro del plano $Z = Z_0$ y paralelas al eje x , en una abertura rectangular, ver Fig.(3.13a).

(ii) Mientras que el segundo conjunto (\tilde{x}, \tilde{y}) será tal que

$$X(\tilde{x}, \tilde{y}) = m \tag{3.109}$$

$$Y(\tilde{x}, \tilde{y}) = Y_r, \tag{3.110}$$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

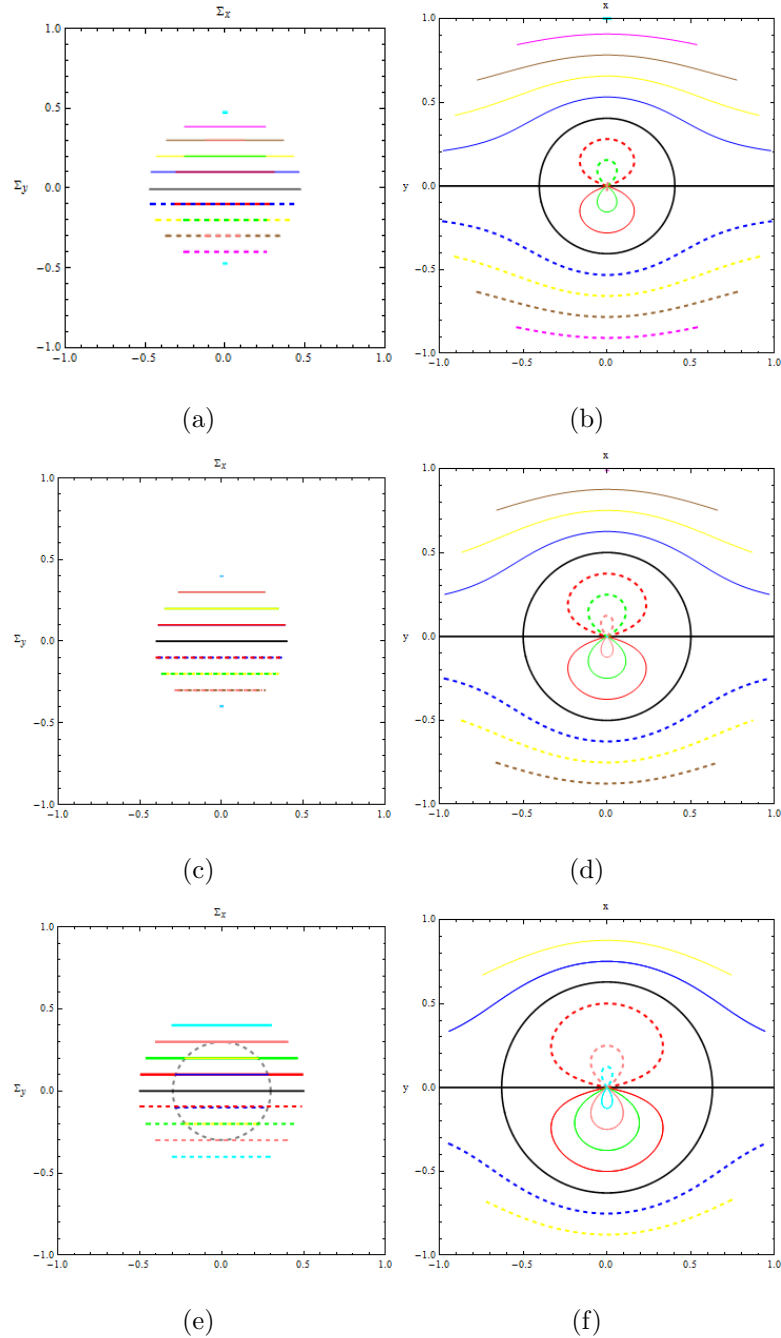


Figura 3.11: Los pares de imágenes ((a) y (b)) corresponden a las imágenes de la rejilla y la rejilla nula para $Z_0 = 1,5$. Así como ((c) y (d)) corresponden a las imágenes de la rejilla y la rejilla nula para $Z_0 = 1,7138$, mientras que ((e) y (f)) corresponden a las imágenes de la rejilla y la rejilla nula para $Z_0 = 2$.

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
 POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
 AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
 RONCHI

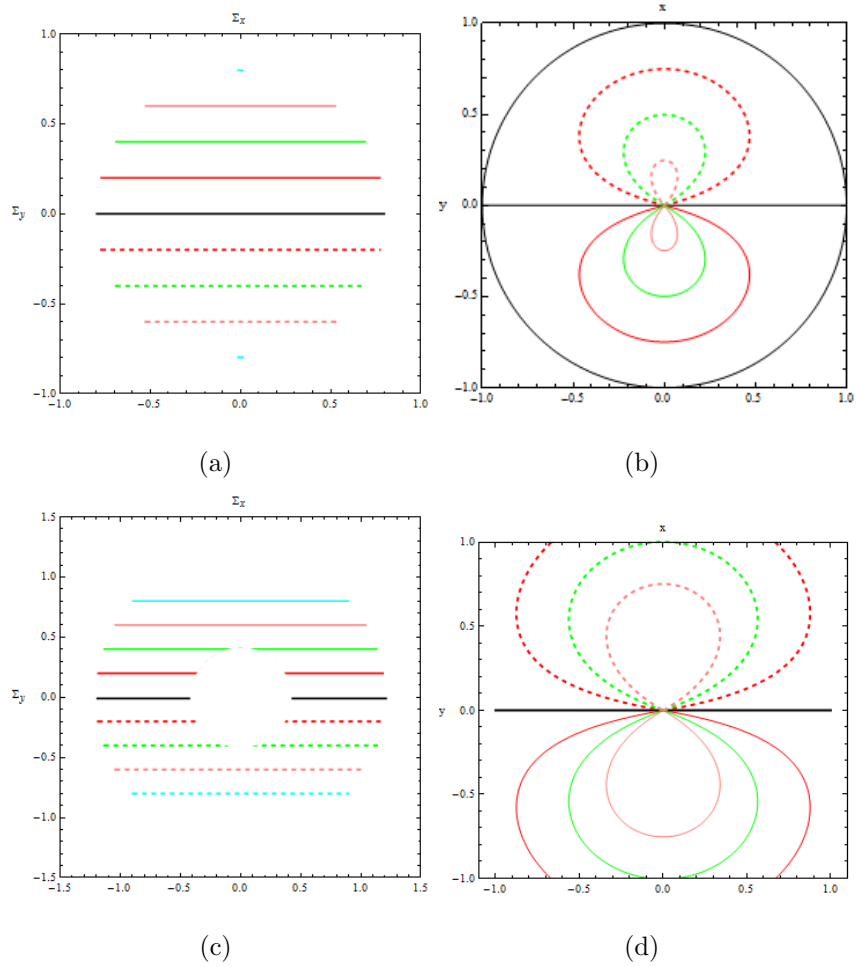


Figura 3.12: Los pares de imágenes ((a) y (b)) corresponden a las imágenes de la rejilla y la rejilla nula para $Z_0 = 2,8504$. Así como ((c) y (d)) corresponden a las imágenes de la rejilla y la rejilla nula para $Z_0 = 4$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

donde imponemos que el conjunto de puntos (m, Y_r) formen líneas dentro del plano $Z = Z_0$ y paralelas al eje y , en una abertura rectangular, Ver Fig.(3.14a). Nos interesa que la abertura sea rectangular porque la cara del prisma que se encuentra sobre el plano $x - y$ es un cuadrado, y si del lado de los rayos refractados ponemos una pantalla, podremos ver sobre esta un patrón iluminado en forma de rectángulo.

Sustituyendo las Ec(3.33), (3.37) y (3.38) en (3.59), (3.60), y (3.61) tenemos que

$$X = \left(1 + \frac{[Z_0 - (D - \sqrt{x^2}) \cot \alpha] \Omega \cos \alpha}{\sqrt{x^2}(\gamma + \Omega \sin \alpha)} \right) x \quad (3.111)$$

$$Y = y \quad (3.112)$$

$$Z = Z_0 \quad (3.113)$$

para un valor dado $Z = Z_0$, las Ecs.(3.111) y (3.112) establecen un mapeo entre los conjuntos (X, Y) y (x, y) , de la forma: $X = X(x, y)$ y $Y = Y(x, y)$, donde X y Y son las componentes del rayo refractado en la dirección x y y respectivamente. De la misma manera, es posible determinar a x y y en función de X y Y , es decir, $x = x(X, Y)$ y $y = y(X, Y)$.

3.2.4. Generación de rejillas de franjas paralelas en una abertura rectangular

Dado un cuadrado de lado L , un punto sobre el rectángulo está representado en coordenadas cartesianas por (X, Y) .

+ Si nos fijamos en una línea paralela al eje x , Ver Fig.(3.13b), cuyos puntos extremos están dados por

$$\vec{r}_i = -X\hat{x} + n\hat{y}, \quad (3.114)$$

$$\vec{r}_f = X\hat{x} + n\hat{y}. \quad (3.115)$$

Por lo tanto, la forma paramétrica de este segmento de línea recta está dada por

$$\vec{r}_n = \vec{r}_i + \sigma(\vec{r}_f - \vec{r}_i), \quad (3.116)$$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI

donde $0 \leq \sigma \leq 1$. Sutituyendo las Ecs.(3.114) y (3.115) en (3.116), se tiene que el vector \vec{r}_n se puede escribir como

$$\vec{r}_n = (2\sigma - 1)X\hat{x} + n\hat{y}. \quad (3.117)$$

La magnitud del vector \vec{r}_n está dada por

$$|\vec{r}_n| = \sqrt{(2\sigma - 1)^2 X^2 + n^2}. \quad (3.118)$$

donde $-X_r \leq X \leq X_r$.

+ Por otro lado, si nos fijamos en una línea paralela al eje y , Ver Fig.(3.14b), cuyos puntos extremos están dados por

$$\vec{r}_i = m\hat{x} - Y\hat{y}, \quad (3.119)$$

$$\vec{r}_f = m\hat{x} + Y\hat{y}. \quad (3.120)$$

Por lo tanto, la forma paramétrica de este segmento de línea recta está dada por

$$\vec{r}_n = \vec{r}_i + \sigma(\vec{r}_f - \vec{r}_i), \quad (3.121)$$

donde $0 \leq \sigma \leq 1$. Sutituyendo las Ecs.(3.119) y (3.120) en (3.121), se tiene que el vector \vec{r}_n se puede escribir como

$$\vec{r}_n = m\hat{x} + (2\sigma - 1)Y\hat{y}. \quad (3.122)$$

La magnitud del vector \vec{r}_n está dada por

$$|\vec{r}_n| = \sqrt{m^2 + (2\sigma - 1)^2 Y^2}. \quad (3.123)$$

Regresando a nuestro problema planteado en (i), sustituyendo las Ecs.(3.107) y (3.108) en (3.62) y (3.63) tenemos que

$$X_r = \left(1 + \frac{[Z_0 - (D - \sqrt{x^2}) \cot \alpha] \Omega \cos \alpha}{\sqrt{x^2}(\gamma + \Omega \sin \alpha)}\right) x \quad (3.124)$$

$$n = y. \quad (3.125)$$

Nuestro objetivo es determinar el conjunto (x, y) que cumplen con las Ecs.(3.124) y (3.125). En este caso se puede ver que las Ecs.(3.124) y (3.125) están desacopladas, ya que se pueden escribir en la forma $X_r = X_r(x)$ y $n = y$. Debido a que en la Ec.(3.124) aparece el término $\sqrt{x^2}$ se requiere estudiar los casos: $0 \leq x$ y $x < 0$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI

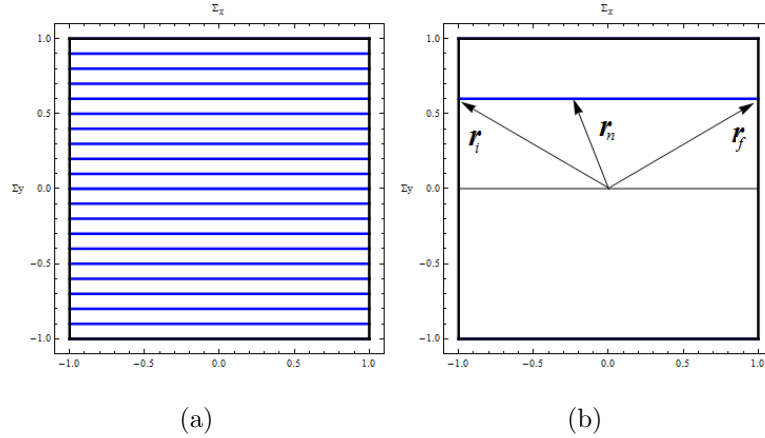


Figura 3.13: (a).- Patrón de imagen generada por una rejilla de franjas paralelas, dentro del plano $Z = Z_0$ y paralelas al plano $y - z$, dentro de una abertura rectangular. (b).- Vector de posición \vec{r}_n de un punto sobre una franja dentro de una abertura rectangular.

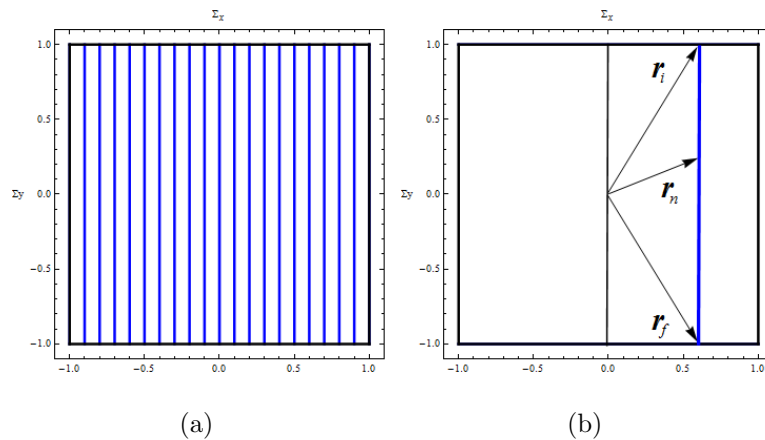


Figura 3.14: (a).- Patrón de imagen generada por una rejilla de franjas paralelas, dentro del plano $Z = Z_0$ y paralelas al plano $x - z$, dentro de una abertura rectangular. (b).- Vector de posición \vec{r}_n de un punto sobre una franja dentro de una abertura rectangular.

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI

- Primer caso: Si $0 \leq x$, entonces $\sqrt{x^2} = x$, despejando x de la Ec.(3.124) se tiene que

$$x_+ = \left[\frac{X_r(\gamma + \Omega \sin \alpha) + (D \cot \alpha - Z_0)\Omega \cos \alpha}{\gamma \sin \alpha + \Omega} \right] \sin \alpha. \quad (3.126)$$

- Segundo caso: Si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$, despejando x de la Ec.(3.124) se tiene que

$$x_- = \left[\frac{X_r(\gamma + \Omega \sin \alpha) + (Z_0 - D \cot \alpha)\Omega \cos \alpha}{\gamma \sin \alpha + \Omega} \right] \sin \alpha. \quad (3.127)$$

En ambas Ecs.(3.126) y (3.127) aparece la variable X_r , pero, como no tiene el mismo rango de definición, denotaremos a X_r de la Ec.(3.126) como X_{r+} , y a X_r de la Ec.(3.127) como X_{r-} . Para determinar el rango de definición de las variables X_{r+} y X_{r-} debemos de tomar en cuenta los rayos refractados $\vec{X}(x = D, y, Z_0)$ y $\vec{X}(x = 0, y, Z_0)$ denominados rayos marginales y rayos divergentes respectivamente, ver Fig(3.7). El conjunto solución (x, y) tal que $X(x, y) = X_r$ y $Y(x, y) = n$, están dados por los conjuntos:

$$(x_+, y) = \left(\left[\frac{X_{r+}(\gamma + \Omega \sin \alpha) + (D - Z_0)\Omega \cos \alpha}{\gamma \sin \alpha + \Omega} \right] \sin \alpha, n \right) \quad (3.128)$$

$$(x_-, y) = \left(\left[\frac{X_{r-}(\gamma + \Omega \sin \alpha) + (Z_0 - D)\Omega \cos \alpha}{\gamma \sin \alpha + \Omega} \right] \sin \alpha, n \right), \quad (3.129)$$

donde el intervalo de definición de las variables X_{r+} y X_{r-} son los siguientes:

$$X_{r+} \in [-N, L] \quad (3.130)$$

$$X_{r-} \in [-L, N], \quad (3.131)$$

donde L y N están dados por las Ecs.(3.45) y (3.49) respectivamente. Estos intervalos de definición son así, ya que X_{r+} está acotada por el rayo divergente negativo y el rayo marginal positivo, mientras que X_{r-} está acotada por el rayo marginal negativo y el rayo divergente positivo, ver Fig(3.15). Retomando el problema planteado en (ii), al sustituir las Ecs.(3.109) y (3.110) en (3.62) y (3.63) tenemos que

$$m = \left(1 + \frac{[Z_0 - (D - \sqrt{x^2}) \cot \alpha] \Omega \cos \alpha}{\sqrt{x^2}(\gamma + \Omega \sin \alpha)} \right) x \quad (3.132)$$

$$Y_r = y. \quad (3.133)$$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

De la misma manera, deseamos determinar el conjunto (\tilde{x}, \tilde{y}) que cumplen con las Ecs.(3.132) y (3.133). Se puede ver que las Ecs.(3.132) y (3.133) están desacopladas, ya que se pueden escribir en la forma $m = m(x)$ y $Y_r = y$. Debido a que en la Ec.(3.132) aparece el término $\sqrt{x^2}$ se requiere estudiar los casos: $0 \leq x$ y $x < 0$

- Primer caso: Si $0 \leq x$, entonces $\sqrt{x^2} = x$, despejando x de la Ec.(3.132) se tiene que

$$\tilde{x}_+ = \left[\frac{m(\gamma + \Omega \sin \alpha) + (D \cot \alpha - Z_0)\Omega \cos \alpha}{\gamma \sin \alpha + \Omega} \right] \sin \alpha. \quad (3.134)$$

- Segundo caso: Si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$, despejando x de la Ec.(3.132) se tiene que

$$\tilde{x}_- = \left[\frac{m(\gamma + \Omega \sin \alpha) + (Z_0 - D \cot \alpha)\Omega \cos \alpha}{\gamma \sin \alpha + \Omega} \right] \sin \alpha. \quad (3.135)$$

El conjunto solución (\tilde{x}, \tilde{y}) tal que $X(\tilde{x}, \tilde{y}) = m$ y $Y(\tilde{x}, \tilde{y}) = Y_r$, están dados por los conjuntos:

$$(\tilde{x}_+, \tilde{y}) = \left(\left[\frac{m(\gamma + \Omega \sin \alpha) + (D - Z_0)\Omega \cos \alpha}{\gamma \sin \alpha + \Omega} \right] \sin \alpha, Y_{r+} \right) \quad (3.136)$$

$$(\tilde{x}_-, \tilde{y}) = \left(\left[\frac{m(\gamma + \Omega \sin \alpha) + (Z_0 - D)\Omega \cos \alpha}{\gamma \sin \alpha + \Omega} \right] \sin \alpha, Y_{r-} \right), \quad (3.137)$$

donde Y_{r+} y Y_{r-} están definidas en el intervalo $[-1, 1]$. La diferencia que existe entre los intervalos de definición de las variables X_{r+} , X_{r-} y Y_{r+} , Y_{r-} es que las dos primeras están acotadas por los rayos marginales y divergentes, como se comentó anteriormente. Mientras que las dos últimas solo están acotadas por el largo del lado de la cara del prisma que se encuentra sobre el eje y .

El par de Ecs.(3.128), (3.129) y (3.136), (3.137) representan la imagen que debe de aparecer en la cara sobre el plano $x - y$ del prisma triangular, para que las Ecs.(3.62), (3.63) y (3.64) generen rectas a Y constante y X constante respectivamente, sobre el plano $Z = Z_0$. Es decir, $X(x_{\pm}, y) = X_r$, $Y(x_{\pm}, y) = n$, describen las rectas a Y constante.

Para el caso del Prisma Triangular considerando rectas paralelas al eje y , en las Fig(3.16) y (3.17) se puede observar rejillas de acuerdo al par de

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
 POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
 AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
 RONCHI

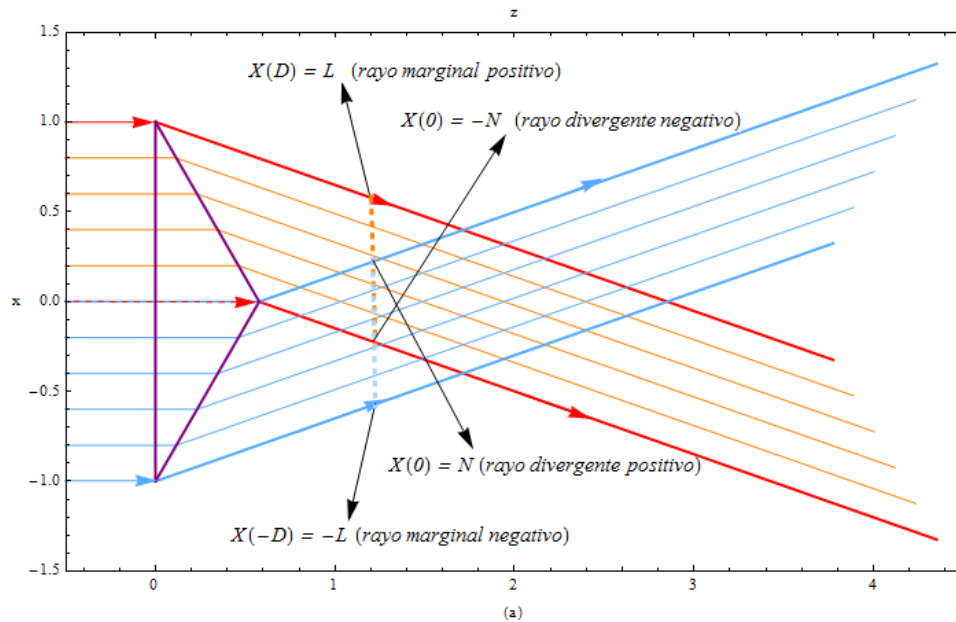


Figura 3.15: Los rayos incidentes de color naranja corresponde a x_+ y los rayos incidentes de color azul corresponden a x_- , así es que las variables X_{r+} y X_{r-} están dentro de los intervalos $[-N, L]$ y $[-L, N]$ respectivamente.

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

Ecs(3.124) y (3.125), mientras que las rejillas nulas quedan descritas por las Ecs(3.128) y (3.129) respectivamente. En este caso, los rayos refractados generan dos cuñas de luz, una marginal y otra divergente, en lugar de conos de luz como es el caso del Axicón. Esto se puede ver considerando la Fig(3.15), imaginemos que la Fig(3.15). se mueve perpendicularmente al plano $x - y$, esto nos permite observar la generación de cuñas de luz. En el segundo caso, considerando rectas paralelas al eje x , en las Fig(3.18) y (3.19) se observa las rejillas descritas por las Ecs(3.109) y (3.110) y las rejillas nulas dadas por las Ecs(3.134) y (3.135).

3.2.5. Ronchigrama generado por un axicón

Para determinar el vector del rayo refractado $\vec{X} = (X, Y, Z'_0)$ sobre un plano en $Z'_0 > Z_0$, el cual sea la imagen del punto (X_r, n, Z_0) , es necesario sustituir los valores $\rho \rightarrow \rho_{r\pm}$ y $\phi \rightarrow \phi_r$ en las Ecs.(3.62), (3.63) y (3.64). Después de manipular algebraicamente, las Ecs.(3.62), (3.63) y (3.64) se escriben de la forma

$$X = \left[\rho_{r\pm} \left(1 + \frac{\Omega \cos \alpha \cot \alpha}{\gamma + \Omega \sin \alpha} \right) + \frac{\Omega \cos \alpha (Z'_0 - a \cot \alpha)}{\gamma + \Omega \sin \alpha} \right] \cos \phi_r \quad (3.138)$$

$$Y = \left[\rho_{r\pm} \left(1 + \frac{\Omega \cos \alpha \cot \alpha}{\gamma + \Omega \sin \alpha} \right) + \frac{\Omega \cos \alpha (Z'_0 - a \cot \alpha)}{\gamma + \Omega \sin \alpha} \right] \sin \phi_r \quad (3.139)$$

$$Z = Z'_0. \quad (3.140)$$

Debido a que hay dos valores a ρ_r y ϕ_r , cada rayo refractado \vec{X} dado por (X, Y, Z) tendrá dos imágenes en el plano $Z = Z'_0$: $(X(\rho_{r+}, \phi_r), Y(\rho_{r+}, \phi_r), Z(\rho_{r+}, \phi_r))$ y $(X(\rho_{r-}, \phi_r + \phi), Y(\rho_{r-}, \phi_r + \phi), Z(\rho_{r-}, \phi_r + \phi))$.

Con todo lo desarrollado anteriormente, hemos arribado a nuestro objetivo final, el cual es determinar la imagen generada a partir de la rejilla nula dada. En la Fig(3.20) se tiene el conjunto completo de imágenes, es decir, se tiene la rejilla nula determinada a partir de la rejilla, la rejilla y los ronchigramas que son las imágenes generadas a partir de la rejilla nula a diferentes planos de Z . En este caso se determinó la rejilla nula a partir de la rejilla localizada en el plano $Z_0 = 1,5$, los ronchigramas están localizados en diferentes planos de $Z = 1,7138, 2, 2,8504, 4$. Es importante notar que, si la rejilla se rota un ángulo θ , la rejilla nula, la rejilla y los ronchigramas no sufriran cambios, debido a que el Axicón es una superficie con simetría de revolución.

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

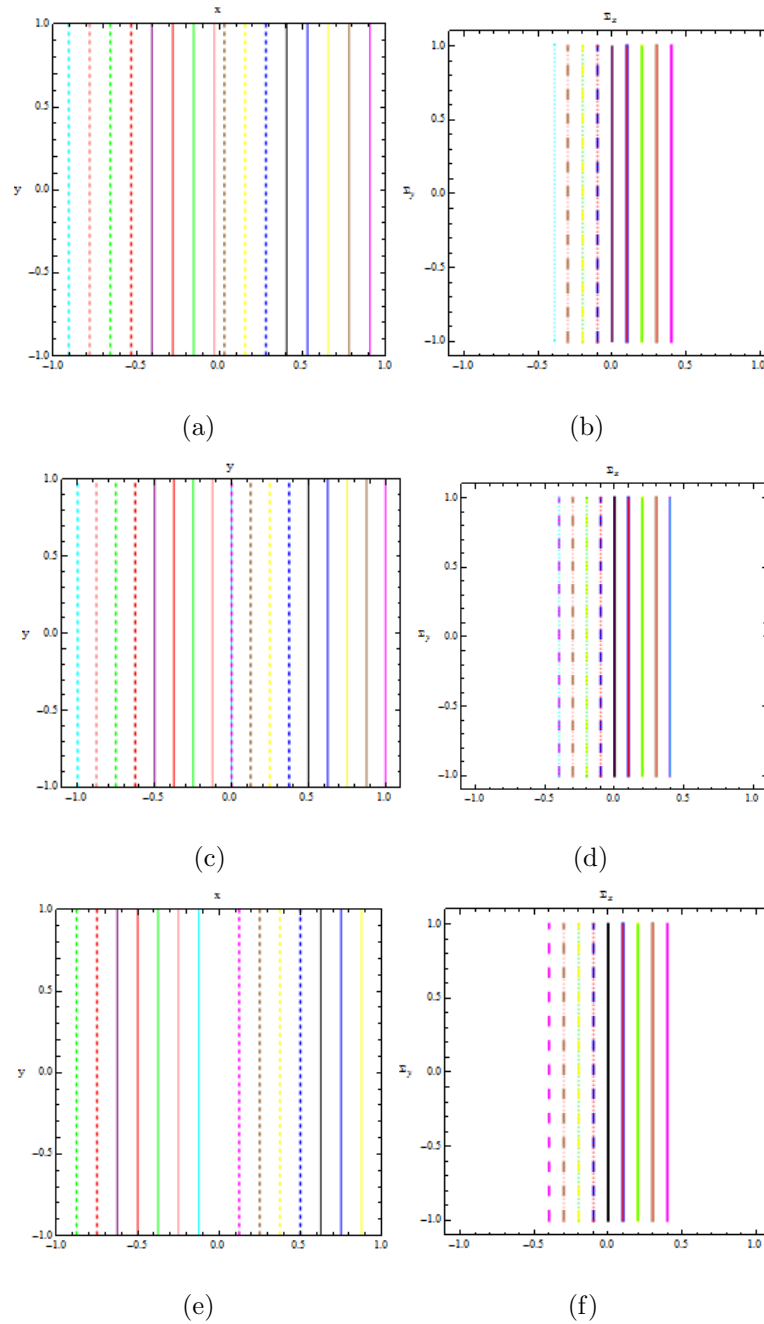


Figura 3.16: (a).- Rejilla Nula para $Z_0 = 1,5$ y (b).- Rejilla en $Z_0 = 1,5$. (c).- Rejilla Nula para $Z_0 = 1,7138$ y (d).- Rejilla en $Z_0 = 1,71389$. (e).- Rejilla Nula para $Z_0 = 2$ y (f).- Rejilla en $Z_0 = 2$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
 POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
 AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
 RONCHI

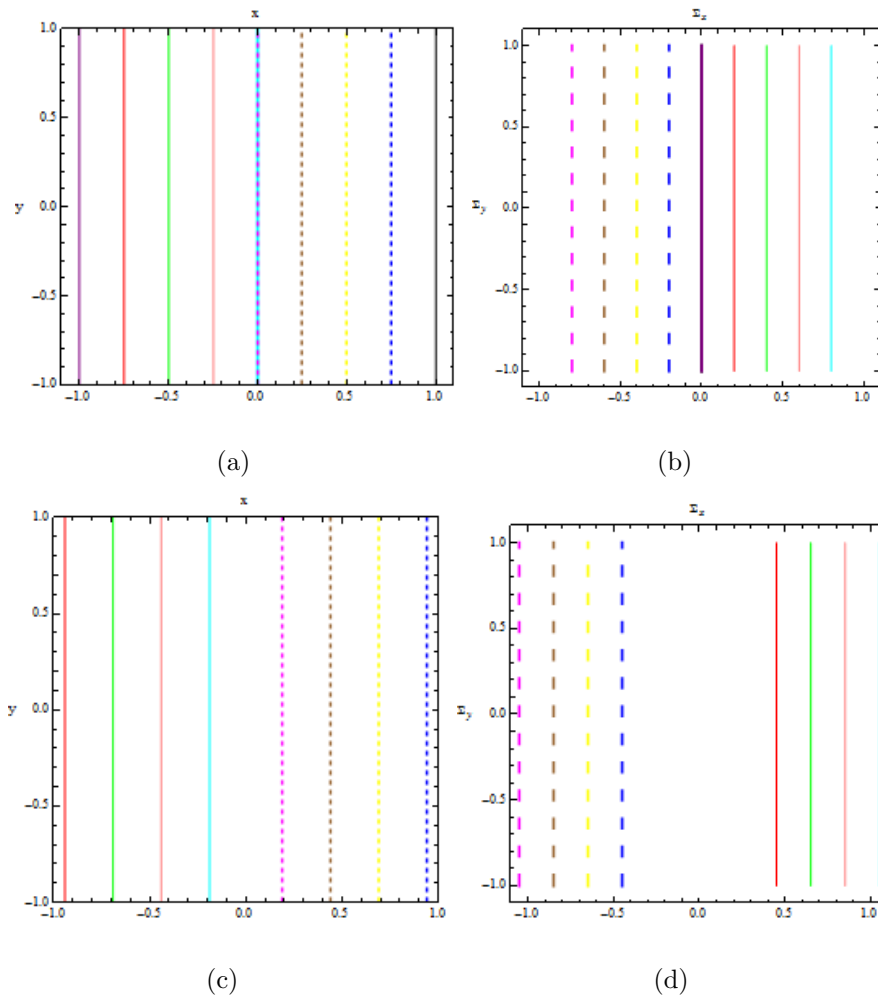


Figura 3.17: (a).- Rejilla Nula para $Z_0 = 2,8504$ y (b).- Rejilla en $Z_0 = 2,8504$.
 (a).- Rejilla Nula para $Z_0 = 4$ y (b).- Rejilla en $Z_0 = 4$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

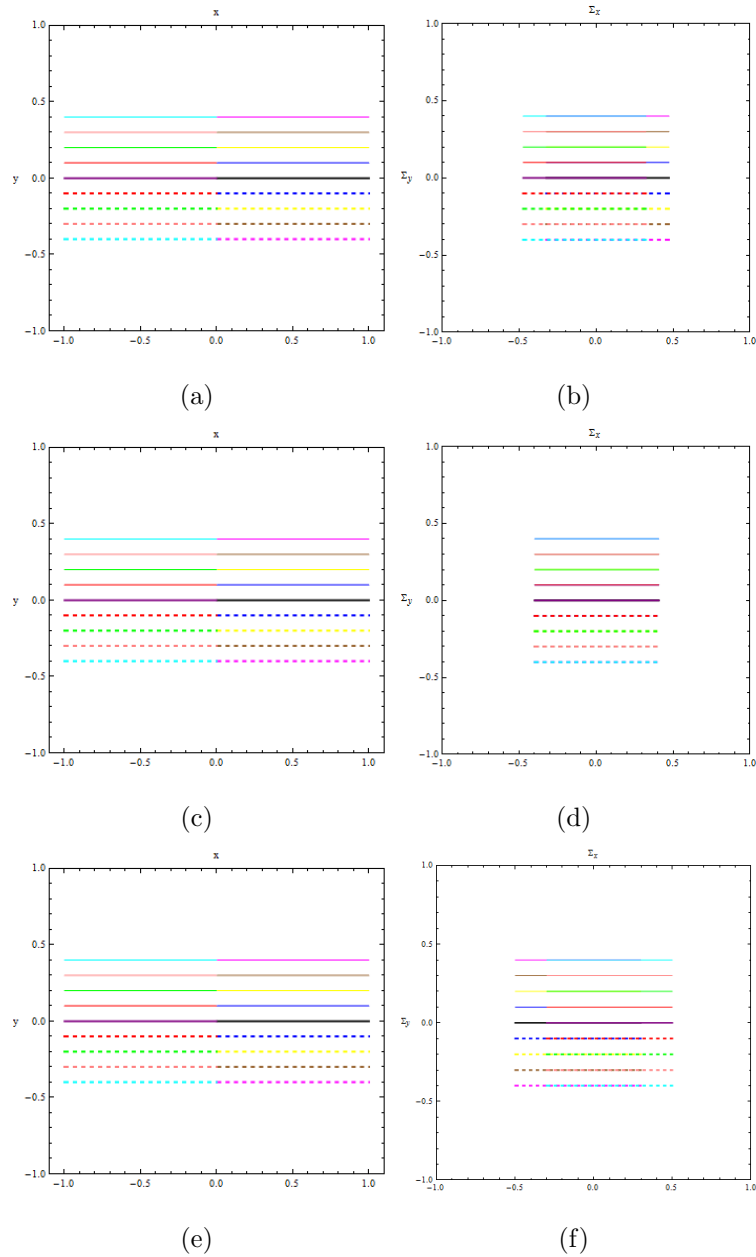


Figura 3.18: (a).- Rejilla Nula para $Z_0 = 1,5$ y (b).- Rejilla en $Z_0 = 1,5$. (c).- Rejilla Nula para $Z_0 = 1,7138$ y (d).- Rejilla en $Z_0 = 1,71389$. (e).- Rejilla Nula para $Z_0 = 2$ y (f).- Rejilla en $Z_0 = 2$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
 POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
 AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
 RONCHI

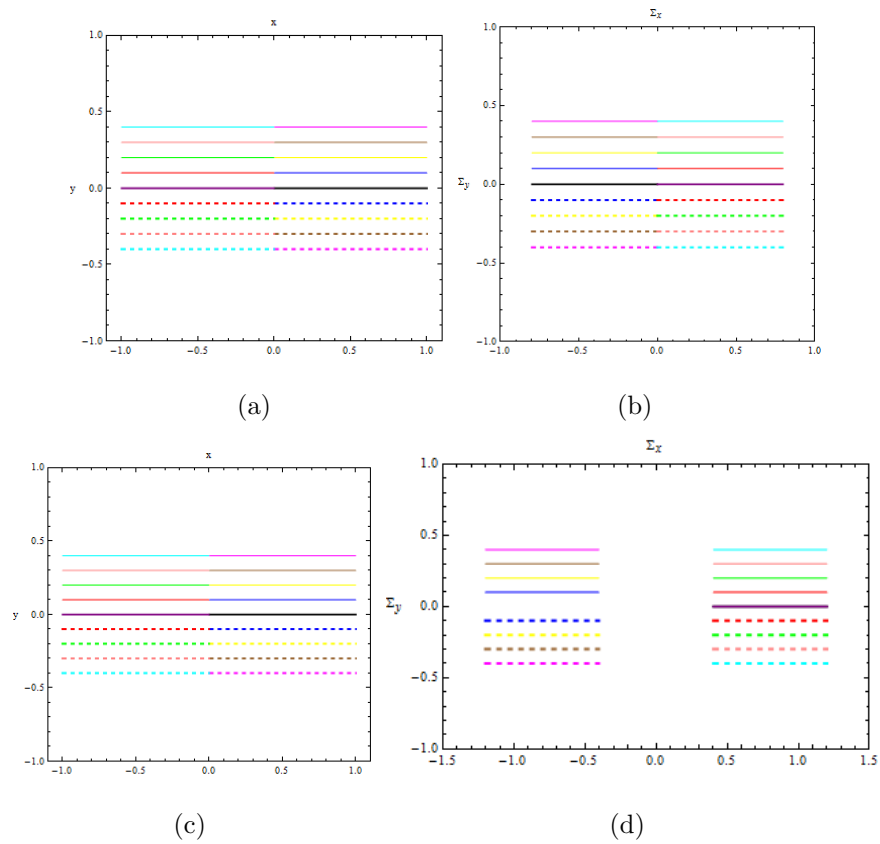


Figura 3.19: (a).- Rejilla Nula para $Z_0 = 2,8504$ y (b).- Rejilla en $Z_0 = 2,8504$.
 (a).- Rejilla Nula para $Z_0 = 4$ y (b).- Rejilla en $Z_0 = 4$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI

3.2.6. Ronchigrama generado por un prisma triangular

Para determinar el vector del rayo refractado $\vec{X} = (X, Y, Z'_0)$ sobre un plano en $Z'_0 > Z_0$, el cual sea la imagen del punto (X_r, n, Z_0) , es necesario sustituir los valores $x \rightarrow x_{\pm}$, en ambos casos, tanto para las rejillas de franjas paralelas a Y constante como para la rejilla de franjas paralelas a X constante.

- i) Considerando rectas a Y constante, las componentes del vector refractado $\vec{X} = (X, Y, Z'_0)$ están dadas por

$$X = \left[x_{\pm} \left(1 + \frac{\Omega \cos \alpha \cot \alpha}{\gamma + \Omega \sin \alpha} \right) + \frac{\Omega \cos \alpha (Z'_0 - D \cot \alpha)}{\gamma + \Omega \sin \alpha} \right] \quad (3.141)$$

$$Y = n \quad (3.142)$$

$$Z = Z'_0. \quad (3.143)$$

Y puesto que hay dos valores para x , cada rayo refractado \vec{X} dado por (X, Y, Z) tendrá dos imágenes en el plano $Z = Z'_0$:

$$(X, Y, Z)_+ = (X(x_+, n), n, Z'_0) \quad (3.144)$$

$$(X, Y, Z)_- = (X(x_-, n), n, Z'_0), \quad (3.145)$$

donde $x_+ = x_+(X_{r+})$ y $x_- = x_-(X_{r-})$.

- ii) Por otro lado, al considerar rectas a X constante, las componentes del vector refractado $\vec{X} = (X, Y, Z'_0)$ están dadas por

$$X = \left[\tilde{x}_{\pm} \left(1 + \frac{\Omega \cos \alpha \cot \alpha}{\gamma + \Omega \sin \alpha} \right) + \frac{\Omega \cos \alpha (Z'_0 - D \cot \alpha)}{\gamma + \Omega \sin \alpha} \right] \quad (3.146)$$

$$Y = Y_{r_{\pm}} \quad (3.147)$$

$$Z = Z'_0. \quad (3.148)$$

Y puesto que hay dos valores para \tilde{x} , cada rayo refractado \vec{X} dado por (X, Y, Z) tendrá dos imágenes en el plano $Z = Z'_0$:

$$(X, Y, Z)_+ = (X(\tilde{x}_+, m), Y_{r+}, Z'_0) \quad (3.149)$$

$$(X, Y, Z)_- = (X(\tilde{x}_-, m), Y_{r-}, Z'_0) \quad (3.150)$$

donde $\tilde{x}_{\pm} = \tilde{x}_{\pm}(m)$.

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

**3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI**

En el caso del prisma triangular, se tienen dos conjuntos completos de imágenes, el primero es considerando la rejilla de franjas paralelas al eje y y en el segundo caso las franjas son paralelas al eje x . En principio sólo se iba a considerar la rejilla de franjas paralelas al eje y , sin embargo decidimos agregar el otro caso debido a que es más interesante. En la Fig(3.21) se tiene el conjunto completo de imágenes, considerando la rejilla de franjas de rectas paralelas al eje x se tiene la rejilla nula determinada a partir de la rejilla, la rejilla y los ronchigramas que son las imágenes generadas a partir de la rejilla nula a diferentes planos de Z . En este caso se determinó la rejilla nula a partir de la rejilla localizada en el plano $Z_0 = 1,5$, los ronchigramas están localizados en diferentes planos de $Z = 1,7138, 2, 2,8504, 4$. En el segundo caso, en la Fig(3.21) se tiene el conjunto completo de imágenes, considerando la rejilla de franjas de rectas paralelas al eje y donde se tomaron los mismos valores para Z_0 y Z .

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
 POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
 AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
 RONCHI

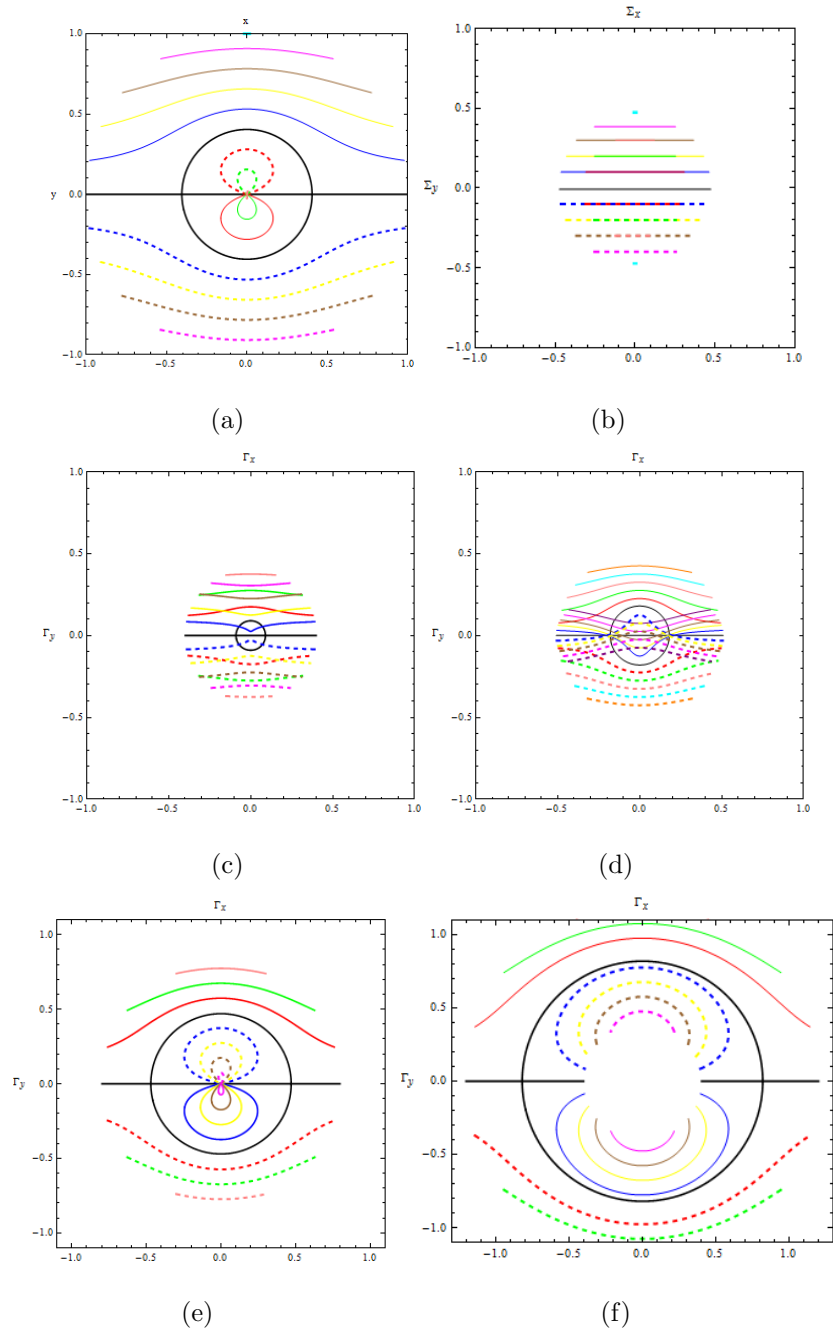


Figura 3.20: (a).- Rejilla Nula para $Z_0 = 1,5$. (b).- Rejilla en $Z_0 = 1,5$. (c).- Ronchigrama generado en $Z = 1,7138$. (d).- Ronchigrama generado en $Z = 2$. (e).- Ronchigrama generado en $Z = 2,8504$. (f).- Ronchigrama generado en $Z = 4$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
RONCHI

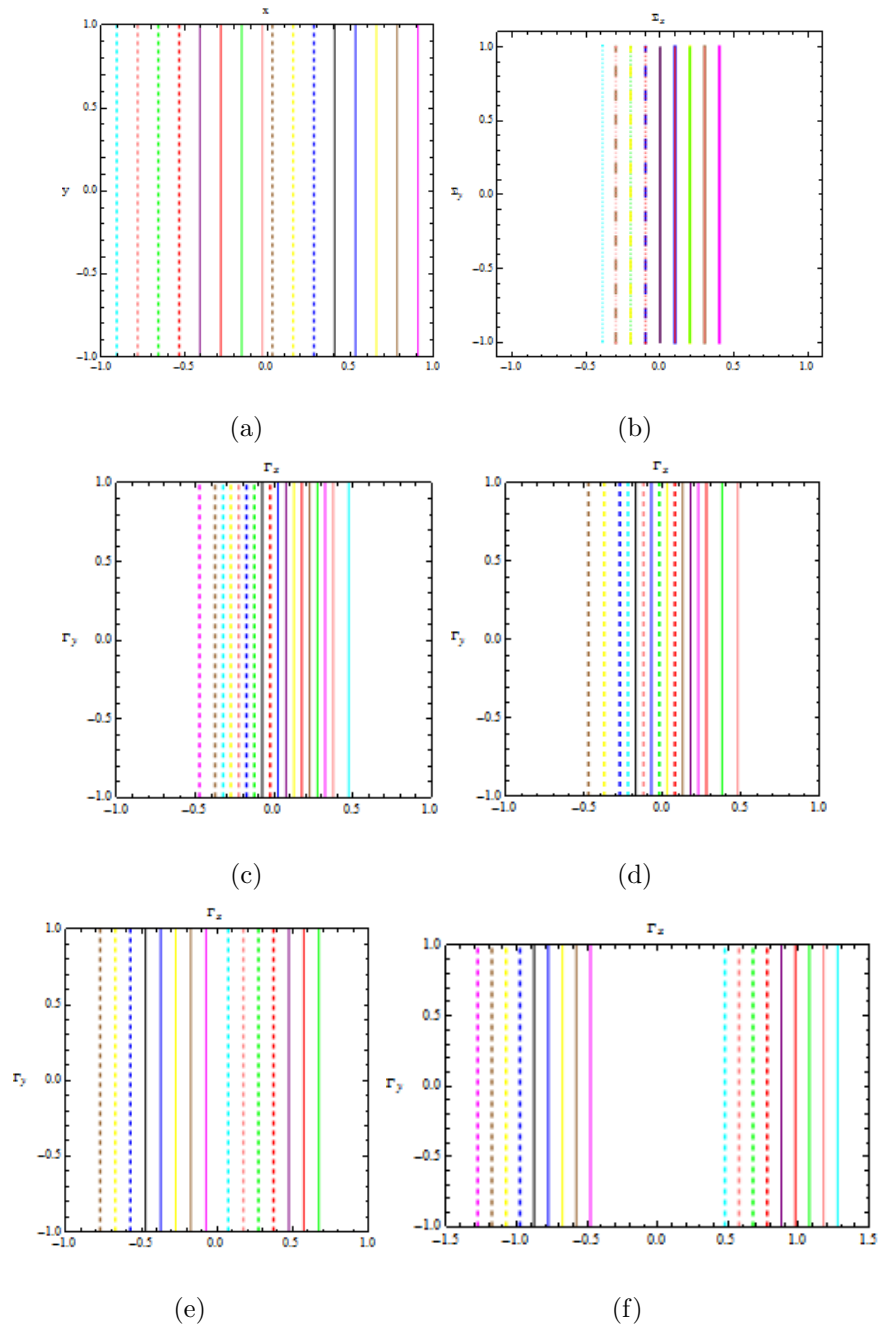


Figura 3.21: (a).- Rejilla Nula para $Z_0 = 1,5$. (b).- Rejilla en $Z_0 = 1,5$. (c).- Ronchigrama generado en $Z = 1,7138$. (d).- Ronchigrama generado en $Z = 2$. (e).- Ronchigrama generado en $Z = 2,8504$. (f).- Ronchigrama generado en $Z = 4$

**CAPÍTULO 3 CÁUSTICA Y RONCHIGRAMAS GENERADOS
 POR LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA EN: UN
 AXICÓN Y UN PRISMA TRIANGULAR**

3.2. RONCHIGRAMAS GENERADOS POR LA REJILLA NULA DE
 RONCHI

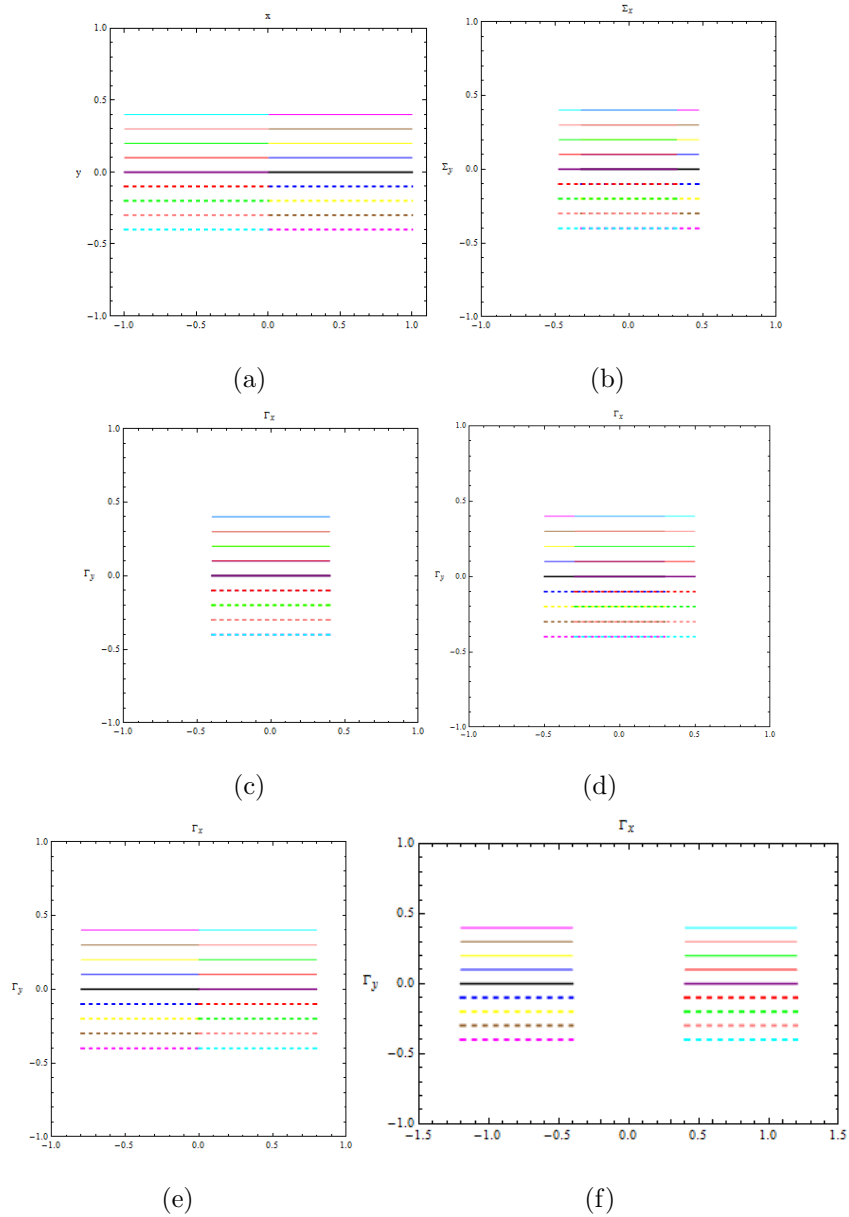


Figura 3.22: (a).- Rejilla Nula para $Z_0 = 1,5$. (b).- Rejilla en $Z_0 = 1,5$. (c).- Ronchigrama generado en $Z = 1,7138$. (d).- Ronchigrama generado en $Z = 2$. (e).- Ronchigrama generado en $Z = 2,8504$. (f).- Ronchigrama generado en $Z = 4$

Capítulo 4

Conclusión

En este trabajo se ha presentado el estudio de la refracción de una onda plana a través de dos lentes las cuales están formadas esencialmente por una rotación y una traslación de un triángulo isóceles, con 2α uno de sus ángulos. El axicón es generado a partir de una rotación teniendo como eje de simetría el vértice cuyo ángulo es 2α ; y de un prisma triangular, el cual se puede generar a partir de una traslación con respecto al plano en el cual se encuentra el triángulo. A partir de dicho estudio se obtuvo de forma explícita la evolución de los rayos de luz refractados en un axicón y un prisma triangular. Mostramos que sólo hay cáustica asociada debido a la refracción en el axicón, mientras que en el prisma triangular no hay cáustica asociada, ya que, no posee simetría de revolución. Finalmente, se obtiene la rejilla nula de Ronchi y los ronchigramas para determinada rejilla. En el caso del axicón, se obtiene que a cada franja paralela en la rejilla le corresponden dos imágenes en la rejilla nula, dando así, una correspondencia dos a uno, así encontramos que al rotar la rejilla sobre el plano Z_0 en el cual se localiza, la rejilla nula y los ronchigramas generados no sufren ningún cambio, es decir, se obtienen las mismas imágenes de la rejilla nula y los ronchigramas al considerar la rejilla antes de la rotación. En el caso del prisma triangular no sucede lo mismo, consideramos inicialmente una rejilla generada por franjas paralelas al eje y , resulta que tanto la rejilla nula y los ronchigramas son líneas paralelas al eje y , y a cada línea de la rejilla le correspondía su rejilla nula y ronchigrama generada por una línea paralela al eje y , Después, dicha rejilla se rotó 90 grados, es decir, ahora la rejilla estaba generada por franjas paralelas al eje x , y como resultado obtuvimos que para cada línea de la rejilla le correspondían

CAPÍTULO 4 CONCLUSIÓN

dos líneas en la rejilla nula y dos líneas en el ronchigrama.

Capítulo 5

Bibliografía

- [1] Salvador Alejandro Juárez-Reyes, Magdalena Marciano-Melchor, Mariana Marcelino-Aranda, Paula Ortega-Vidals, Edwin Román-Hernández, Gilberto Silva-Ortigoza, Ramón Silva-Ortigoza, Román Suárez-Xique, Gerardo Francisco Torres del Castillo and Mercedes Velázquez-Quesada *Wavefronts, caustic, ronchigram, and null ronchigrating of a plane wave refracted by an axicon lens*, J. Opt. Soc. Am/Vol. 31, No. 2/February 2014
- [2] Gabriel Martínez-Niconoff, Gilberto Silva-Ortigoza, Román Suárez-Xique, *Morphology of wave fronts and caustics associated with a circular wave refracted by an arbitrary curve: The two-dimensional axicon*, PHYSICAL REVIEW A 90, 053803(2014)
- [3] Román Suárez Xique, *Difracción asociada con frentes de onda singulares*. Tesis de maestría presentada al Instituto de Física de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.