

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.



LA RIGIDEZ CUASI-ISOMÉTRICA DE \mathbb{Z} .

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

CATALINA VACA VACA.

DIRECTOR DE TESIS: DR. JESÚS HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ.

A quien lea, dicho esto, le abro a usted la puerta de esta hoja. Y me aparto, con una reverencia cortés, para dejarle entrar en este texto.

Agradecimientos

Primero le agradezco a mi asesor el Dr. Jesús Hernández Hernández por su infinita paciencia y dedicación, no sólo en este trabajo sino en todo lo que hace, le agradezco todo el apoyo, lo que me enseñó y lo mucho que aprendí bajo su tutela.

Después le agradezco a mi mamá, Catalina Vaca García por estar siempre para ser la guía y el apoyo, por haberme dado todo lo que me dió y por amarme siempre.

Agradezco también a mi padre, mis hermanos, a Aida, Solerino y Alghieri por hacer en la medida de lo posible todo cuanto han hecho y por el cariño.

A mis amigos que son muchos y saben quienes son, de quienes no escribo sus nombres para no correr el riesgo de olvidar a ninguno, por toda la ayuda y la diversión, gracias. También agradezco a Jesús G. Sandoval por ser como es.

A Marina Loenkina por la enorme lección que reza: *“quieres, no quieres, puedes, no puedes, ¡hacer ! Su deseo al corazón poner, muy duro trabaja y sí, después sólo muy grande, muy perfecto resultado tener puedes”*.

A cada uno de los maestros que he tenido a lo largo de la vida y en especial en la carrera, al jurado de esta tesis y en general a la vida que me ha dado tanto.

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	5
2.1. Introducción	5
2.2. Acciones de Grupos	5
2.3. Grafos de Cayley	10
2.3.1. Introducción	10
2.4. Grupos como espacios métricos	15
2.5. Acciones de grupos en grafos de Cayley	16
3. Cuasi-isometrías y geodésicas	19
3.1. Introducción	19
3.2. Encajes y equivalencias	19
3.2.1. Encajes isométricos	19
3.2.2. Encajes bi-Lipschitz	22
3.2.3. Encajes cuasi-isométricos	27
3.3. Espacios geodésicos y cuasi-geodésicos	38
3.4. Lema de Schwarz-Milnor	39
3.5. Virtualmente \mathbb{Z} entonces cuasi-isométrico a \mathbb{Z}	45
4. Espacio de fines	47
4.1. Introducción	47
4.2. Espacio de fines	47
4.3. Dos fines, si y solo si, virtualmente \mathbb{Z}	59
4.4. Cuasi-isométrico a \mathbb{Z} entonces virtualmente \mathbb{Z}	68
5. Conclusión.	71

Capítulo 1

Introducción

A statement that holds for all finitely generated groups has to be either trivial or wrong.

atribuida a Mikhail Gromov.

En este trabajo se presenta una introducción a la teoría geométrica de grupos y se resuelve un problema clásico de rigidez cuasi-isométrica.

Un primer intento por entender, formalizar y escribir geometría fue el de Euclides, quien alrededor del 300 a.C. escribió de manera axiomática sus Elementos. En su primer libro comienza con cinco axiomas, luego desarrolla una teoría de triángulos y cuadriláteros, dentro de la cual estudia los ángulos de dichos polígonos. El segundo libro de Euclides es sobre álgebra geométrica, en este trata la ley de cosenos. Para el sexto libro estudia semejanza y proporciones. Y en el libro 12 trata la medición de figuras. Es así como Euclides escribe uno de los primeros tratados geométricos y en particular el primero desarrollado de forma axiomática. En estos libros Euclides estudia algunos invariantes geométricos, ángulos, áreas, semejanzas, congruencias, etc. Sin embargo por muchos siglos el estudio de la geometría seguirá siendo de manera similar.

Hasta que alrededor del siglo XVI con el surgimiento del álgebra moderna se construyen nuevos modelos geométricos, entre ellos el de la geometría analítica (que es un modelo euclidiano por cumplir con los 5 postulados de Euclides). La geometría analítica sustituye las construcciones con regla y compas, por funciones y el antiguo dibujo por un plano cartesiano. La conmensurabilidad y congruencia en este sistema se solucionan utilizando la norma para medir segmentos y los grados para medir ángulos.

Dentro de este modelo es posible trazar líneas, circunferencias e intersectar objetos de esta geometría, permitiendo lograr las mismas construcciones de la geometría euclidiana, pero a partir de ecuaciones, puntos ordenados en el espacio y con la ventaja de una métrica.

Posteriormente, como resultado de muchos años de dificultades y dudas alrededor del quinto postulado de Euclides, János Boljai y Nikolái Lobachevsky comienzan a sospechar, y más tarde se dan cuenta, que no existe una única geometría, que a partir de las negaciones del quinto postulado de Euclides es posible desarrollar dos nuevas geometrías, la geometría hiperbólica y la geometría elíptica.

A finales del siglo XIX Felix Klein presentó el Programa de Erlangen en el que explica la importancia del concepto de grupo para la clasificación de las geometrías. Klein propone una nueva visión de la geometría en la que establece que:

”Dado un espacio geométrico y algún grupo de transformaciones, una geometría es el estudio de aquellas propiedades del espacio geométrico dado que permanecen invariantes bajo las transformaciones de este grupo. En otras palabras, toda geometría es la teoría de invariantes de un grupo de transformaciones dado.”

La teoría geométrica de grupos surge como una continuación del programa de Erlangen. Esta, tiene como objetivo estudiar las interacciones algebraicas y geométricas de los grupos. Un pionero de esta área es Max Dehn quien durante el siglo XX utiliza ideas geométricas y topológicas para estudiar grupos discretos. Usualmente la teoría geométrica de grupos toma un objeto algebraico (grupo) y lo relaciona con objeto geométrico (en el caso de esta tesis, un grafo), para posteriormente estudiar las propiedades tanto algebraicas como geométricas del objeto y las relaciones entre ellas. A continuación, se estudian los invariantes geométricos del objeto que se obtuvo en la asignación anterior, lo cual permite trasladar términos geométricos como geodésicas, curvas, volumen y otros a la teoría de grupos. A posteriori, se compara el comportamiento de estos invariantes con el comportamiento algebraico del grupo y las relaciones que se obtienen entre estos.

Este trabajo presenta un primer ejemplo relativamente simple de estas técnicas de la teoría geométrica de grupos. Primero se recuerdan algunos preliminares de la teoría de grupos y grafos. Posteriormente, se trata a los grupos finitamente generados, se les asocia con un grafo de Cayley que resultará un espacio métrico con la métrica de las palabras. Luego se estudian algunas transformaciones geométricas a través de isometrías, encajes bi-Lipchitz y cuasi-isometrías. De estos se obtiene una relación entre la cuasi-densidad (una propiedad geométrica) y los subgrupos de índice finito (una propiedad algebraica). Más tarde, el teorema fundamental de la teoría geométrica de grupos, también llamado el Lema Schwarz-Milnor, resulta ser un vínculo entre el índice finito y las cuasi-isometrías, que da pie a los problemas de rigidez cuasi-isométrica, que tratan equivalencias entre cuasi-isometrías y subgrupos de índice finito con alguna propiedad. Después de varios ejemplos particulares será natural preguntarse, para el caso específico de \mathbb{Z} (un grupo cíclico infinito) qué grupos son cuasi-isométricos a \mathbb{Z} y cuándo un grupo contiene una copia isomorfa a \mathbb{Z} de índice finito. La relación entre estas dos preguntas es lo que llamaremos la rigidez cuasi-isométrica de \mathbb{Z} . Dada por el siguiente teorema:

Teorema 3.2.35 Todo grupo finitamente generado G es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} , si y sólo si, es virtualmente \mathbb{Z} .

Donde se exhibe que son equivalentes ser virtualmente \mathbb{Z} (contener una copia isomorfa de índice finito de \mathbb{Z}), una propiedad algebraica y ser cuasi-isométrico a \mathbb{Z} , una propiedad geométrica.

Para mostrar la suficiencia de este teorema, primero se definen geodésicas, cuasi-geodésicas y se estudia el comportamiento de algunas acciones de grupos (conjuntos de transformaciones geométricas con ciertas propiedades). Con todos estos pertrechos se logra dar una demostración para el poderoso Lema de Schwarz-Milnor, mismo que a partir de una buena acción (cocompacta y propiamente discontinua) permite determinar un conjunto de generadores para un grupo y un conjunto de cuasi-isometrías para un espacio métrico. Como corolario se obtiene que todo subgrupo de un grupo finitamente generado es cuasi-isométrico al grupo ambiente, y por tanto que un grupo finitamente generado que es virtualmente \mathbb{Z} , es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} .

Para la necesidad; si un grupo finitamente generado es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} , entonces es virtualmente \mathbb{Z} , se estudia el espacio de fines de un espacio métrico. Este espacio de fines, permite determinar el número de formas de ir al infinito. En \mathbb{Z} hay dos; caminar a la derecha, o bien caminar a la izquierda. Aquí la pregunta será si siempre que un grupo es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} existen sólo dos maneras de ir al infinito.

Como respuesta se obtiene que toda cuasi-isometría induce un homeomorfismo entre los respectivos espacios de fines. Y por consiguiente, si un grupo es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} , tiene dos fines. Finalmente se demuestra que si un espacio métrico tiene dos fines entonces es virtualmente \mathbb{Z} .

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Introducción

Groups, as men, will be known by their actions

Guillermo Moreno.

Para 1870 Felix Klein ya había desarrollado una versión nueva de la geometría, desde el punto de vista de la teoría de grupos. Durante el periodo comprendido entre 1880 y 1920, como resultado del trabajo de Arthur Cayley, Walther von Dyck, Max Dehn, Jakob Nielsen, Otto Schreier y Egbert van Kampen, se estudió a los grupos a través de presentaciones. Esto daría origen a la teoría combinatoria de grupos de la cual se desprende la teoría geométrica de grupos.

En este capítulo, primero se estudian las acciones de grupo, que son en cierto sentido equivalentes a representaciones de grupo. Estas acciones posteriormente permitirán estudiar como es que se comporta un cierto conjunto de transformaciones de algún objeto.

En 1878 Arthur Cayley (1821-1895) un matemático británico, quien diera la definición moderna de grupo, introdujo el concepto de grafo de Cayley para grupos finitos. Más tarde, entre 1909 y 1910, Dehn introdujo de nuevo este concepto, y llamó “*Gruppenbild*” (*Gruppen* que es grupos y *Bild* que significa pintura, dibujo, diagrama, ilustración) a estos grafos. En este texto, se dan algunos conceptos básicos de la teoría de grafos. Luego, se presenta a los grafos de Cayley, como la herramienta que permite relacionar a los grupos, que son objetos algebraicos, con un objeto geométrico. Más aún, a estos grafos se les puede dotar de una métrica, la métrica usual de grafos, misma que va a coincidir con la métrica de las palabras del grupo. Y finalmente, se ve cómo es que son las acciones de grupo en grafos de Cayley.

2.2. Acciones de Grupos

Para empezar, se recuerda que es un grupo finitamente generado, dado que este es el tipo de grupos que se va a estudiar.

Definición 2.2.1. Sea G un grupo, $S \subseteq G$, entonces $\langle S \rangle$ el **generado de S en G** es el mínimo subgrupo de G que contiene a S . Si $\langle S \rangle = G$ se dice que S es un **conjunto generador para G** y si además S es finito, entonces G es **finitamente generado**.

Klein le hizo corresponder a cada geometría un grupo de simetría, que es un grupo de transformaciones de algún cierto objeto bajo las cuales este es invariante. Siendo así como Klein nota que las transformaciones geométricas tienen una estructura de grupo. Las acciones de grupo son una extensión de la noción de los grupos de simetría, en la que cada elemento de un grupo actúa como una transformación biyectiva en algún conjunto dado.

Definición 2.2.2. La acción de un grupo G en un conjunto X es una función:

$$\begin{aligned}\varphi: G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x\end{aligned}$$

tal que para cualesquiera $g, h \in G$, y para todo $x \in X$ sucede que $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ y $e \cdot x = x$.

Observación 2.2.3. En particular si:

$$\begin{aligned}\varphi: G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x\end{aligned}$$

Está es una acción por translación izquierda. Mientras que:

$$\begin{aligned}\varphi: G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto x \cdot g\end{aligned}$$

Es una acción por translación derecha.

Otra noción importante para el estudio de transformaciones es la siguiente.

Definición 2.2.4. Si G es un grupo. Una representación de grupo φ para G , es un homomorfismo de G al grupo de automorfismos de X , algún conjunto. Es decir, una función

$$\begin{aligned}\varphi: G &\longrightarrow \text{Aut}(X) \\ g &\longmapsto \varphi_g\end{aligned}$$

Tal que para cualesquiera $g, h \in G$ se cumple que:

$$\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h).$$

Obsérvese que si se define a $\varphi_g := g \cdot x$, entonces es equivalente tener un representación de grupo y una acción por translación izquierda.

Ejemplo 2.2.5. Sean $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{[0], [1]\}$ y $X = \mathbb{Z}$ es posible definir una acción de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en \mathbb{Z} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\varphi: (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ ([0], z) &\longmapsto [0] \cdot z = z \\ ([1], z) &\longmapsto [1] \cdot z = -z\end{aligned}$$

En efecto, para cualesquiera $i, i' \in \mathbb{Z}_2$ y todo $z \in \mathbb{Z}$ ocurre uno de los siguientes casos.

Si $i = i' = [0]$, entonces:

$$(ii') \cdot z = ([0] + [0]) \cdot z = [0 + 0] \cdot z = [0] \cdot z = z = [0] \cdot z = [0] \cdot ([0] \cdot z) = i \cdot (i' \cdot z).$$

Si $i = i' = 1$, entonces:

$$(ii') \cdot z = ([1] + [1]) \cdot z = [1 + 1] \cdot z = [0] \cdot z = z = [0] \cdot z = [0] \cdot ([0] \cdot z) = i \cdot (i' \cdot z).$$

Si $i = 1$ y $i' = 0$, entonces:

$$(ii') \cdot z = ([1] + [0]) \cdot z = [1 + 0] \cdot z = [1] \cdot z = -z = [0] \cdot (-z) = [0] \cdot ([1] \cdot z) = i \cdot (i' \cdot z).$$

Si $i = 0$ y $i' = 1$, entonces:

$$(ii') \cdot z = ([0] + [1]) \cdot z = [0 + 1] \cdot z = [1] \cdot z = -z = [1] \cdot (z) = [1] \cdot ([0] \cdot z) = i \cdot (i' \cdot z).$$

Y además, de la definición de la función se tiene que para todo $z \in \mathbb{Z}$, se cumple que $[0] \cdot z = z$.

Ejemplo 2.2.6. Otro ejemplo es la acción por translación izquierda de \mathbb{Z} en \mathbb{R} definida como:

$$\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(z, r) \longmapsto z \cdot r = z + r$$

Dado que para cualesquiera $z, z' \in \mathbb{Z}$ y cualquier $r \in \mathbb{R}$ sucede que:

$$(z + z') \cdot r = z + z' + r = z \cdot (z' + r) = z \cdot (z' \cdot r),$$

y también $0 \cdot r = 0 + r = r$.

Ejemplo 2.2.7. Considérese a $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ el grupo de permutaciones de 3 elementos. A continuación, es posible definir la acción de S_3 en un conjunto $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ de la siguiente manera:

$$\varphi: S_3 \times S \longrightarrow S$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}, s_1 \right) \longmapsto s_x$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}, s_2 \right) \longmapsto s_y$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}, s_3 \right) \longmapsto s_z$$

A continuación se dan algunas nociones que permiten estudiar la dinámica de las acciones de grupos. Una acción de grupo puede desensamblar en órbitas, que forman un espacio de órbitas como sigue:

Definición 2.2.8. Si G es un grupo que actúa sobre un conjunto X . La **órbita** de un elemento $x \in X$ con respecto a la acción de G , es el conjunto:

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

El **espacio de órbitas**, también llamado el **cociente** de X debido a la acción de G , es el conjunto:

$$G \backslash X := \{G \cdot x \mid x \in X\}.$$

A posteriori, dado un elemento en un conjunto se estudian los elementos del grupo que fijan a dicho elemento bajo la acción, y también a los elementos del conjunto que quedan fijos bajo la acción del grupo.

Definición 2.2.9. Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto X . El **grupo estabilizador** de un elemento $x \in X$ con respecto a la acción de G , está dado por:

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

Obsérvese que G_x es en efecto un grupo (un subgrupo de G).

El **conjunto de puntos fijos** bajo $g \in G$ (es decir, el conjunto de elementos de X que permanecen invariantes bajo la acción de G), se define como:

$$X^g := \{x \in X \mid g \cdot x = x\},$$

de manera más general, si $H \subset G$, entonces se escribe:

$$X^H := \bigcap_{h \in H} X^h.$$

La acción de G en X tendrá un **punto fijo global** si $X^G \neq \emptyset$.

Ejemplo 2.2.10. Considérese la acción del ejemplo 2.2.5, en éste, la órbita de cualesquier $z \in \mathbb{Z}$ es:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cdot z = \{g \cdot z \mid g \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\} = \{[0] \cdot z, [1] \cdot z\} = \{z, -z\}.$$

El espacio de órbitas es:

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\} = \{\{z, -z\} \mid z \in \mathbb{Z}\}.$$

Para cualquier $z \in \mathbb{Z}$ el estabilizador es el grupo trivial.

El conjunto de puntos fijos bajo $[0]$ está dado por:

$$\mathbb{Z}^{[0]} = \{z \in \mathbb{Z} \mid [0] \cdot z = z\} = \mathbb{Z},$$

y bajo $[1]$ se tiene:

$$\mathbb{Z}^{[1]} = \{z \in \mathbb{Z} \mid [1] \cdot z = z\} = \emptyset,$$

por lo que el conjunto de puntos fijos globales es vacío.

Ejemplo 2.2.11. Para el ejemplo 2.2.6. La órbita de algún $r \in \mathbb{R}$ es de la forma:

$$\mathbb{Z} \cdot r = \{z \cdot r \mid z \in \mathbb{Z}\} = \{z + r \mid z \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2 + r, -1 + r, 0 + r, 1 + r, 2 + r, \dots\}.$$

El espacio de órbitas es:

$$\mathbb{Z} \backslash \mathbb{R} = \{\mathbb{Z} \cdot r \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

Dado $r \in \mathbb{R}$, el grupo estabilizador de r es el grupo trivial.

El conjunto de puntos fijos de $0 \in \mathbb{R}$, mientras que el conjunto de puntos fijo para algún $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ es vacío, y por lo tanto el conjunto de puntos fijos globales es también vacío.

Ejemplo 2.2.12. En el ejemplo 2.2.9, para $i \in \{1, 2, 3\}$ las órbitas son de la forma:

$$S_3 \cdot s_i = \{s_1, s_2, s_3\},$$

El espacio de órbitas está dado como:

$$S_3 \setminus S = \{\{s_1, s_2, s_3\}\}.$$

Para los grupos estabilizadores de los elementos de S son:

$$S_{3s_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_{3s_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_{3s_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Algunos ejemplos de conjuntos de puntos fijos para $a := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $c := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ son $S^a = \{s_1, s_2, s_3\}$, $S^b = \{s_1\}$ y $S^c = \emptyset$.

En especial, serán de interés las acciones bajo las cuales ningún elemento del grupo fija a ningún elemento de conjunto (acciones libres).

Definición 2.2.13. Sea G un grupo y X un conjunto, la **acción** de G en X es **libre** si para toda $g \in G \setminus \{e\}$ y cualquiera $x \in X$ se tiene que $g \cdot x \neq x$. Es decir, una acción es libre, si y sólo si, cualquier elemento no trivial del grupo actúa sin fijar elementos del conjunto.

Ejemplo 2.2.14. Considérese la acción por translación izquierda de un grupo G en sí mismo.

$$\varphi: G \times G \longrightarrow G$$

$$(g, h) \longmapsto g \cdot h := gh$$

Supóngase que esta acción no es libre, de modo que existe un elemento g_0 no trivial cuya acción fija a elementos del G , es decir para $g \in G$:

$$g_0 \cdot g = g_0g = g.$$

Por consiguiente:

$$g_0g = g,$$

$$g_0gg^{-1} = g^{-1}g,$$

$$g_0 = e.$$

Lo cual es una contradicción, puesto que g_0 es un elemento no trivial del grupo. Por lo tanto la acción por translación izquierda de un grupo en sí mismo es siempre libre.

2.3. Grafos de Cayley

2.3.1. Introducción

El famoso artículo del matemático alemán Leonhard Euler (1707-1783) sobre los siete puentes de Königsberg escrito en 1736, es considerado el primer artículo y el que daría origen a la teoría de grafos como una nueva área de las matemáticas. Sin embargo, las técnicas modernas para el dibujo de grafos (como vértices y aristas), no surgirían hasta finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX. Por ejemplo, en 1857 William Rowan Hamilton (1805-1865) con el propósito de estudiar las de un icosaedro inventa un tablero de juego como el de la figura 2.1.

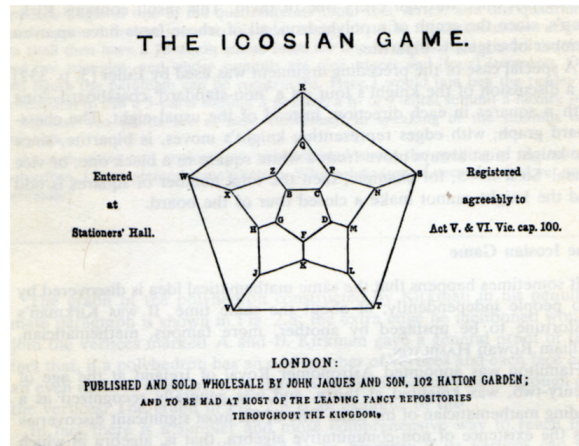


Figura 2.1: Icosain Game de Hamilton, 1857.

También en 1857 Arthur Cayley presenta la figura 2.2 en un artículo titulado *On the Theory of Analytical Forms Called Trees*. Cayley sentía una fuerte pasión por la botánica, en 1881 en uno de sus artículos escribe:

“In a tree of N knots, selecting any knot at pleasure as a root, the tree may be regarded as springing from this root, and it is then called a root-tree.”

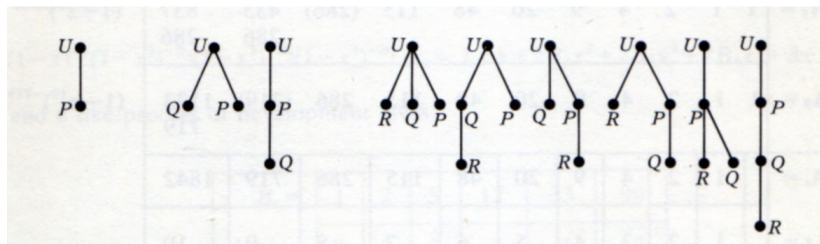


Figura 2.2: Imagen de *On the Theory of Analytical Forms Called Trees* de Cayley, 1857.

En esta sección se estudian algunos conceptos básicos de la teoría de grafos, con la intención de explicar a los grafos de Cayley. Mismos que serán los objetos geométricos que se asocian a los grupos.

Definición 2.3.1. Un **grafo simplicial** es un par $\mathcal{G} = (V, E)$ de conjuntos, donde E es un conjunto de subconjuntos de exactamente dos elementos distintos de V , es decir:

$$E \subseteq [V]^2 = \{e \mid e \in \mathcal{P}(V) : |e| = 2\}.$$

Los elementos del conjunto V se llaman **vértices** y los elementos de E se llaman **aristas**.

Definición 2.3.2. Dado un grafo (V, E) . Dos **vértices** $v, v' \in V$ son **adyacentes** si están unidos por una arista, es decir, si existe $\{v, v'\} \in E$.

El **grado de un vértice** es el número de vértices adyacentes a este.

A continuación, se verán un par de ejemplos que ilustran estas definiciones.

Ejemplo 2.3.3. Sea \mathcal{G} un grafo con vértices $V = \{a, b, c, d\}$ y aristas $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\}$.

Los vértices a y b son adyacentes, ya que la arista $\{a, b\} \in E$. El grado del vértice a es dos, dado que es un vértice adyacente a los vértices b y c .

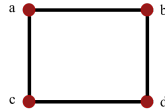


Figura 2.3: Grafo con vértices V y aristas E .

Ejemplo 2.3.4. Sea \mathcal{G}' el grafo con vértices $V' = \{a, b, c, d, f, g, h\}$ y cuyo conjunto de aristas esta dado como $E' = \{\{a, c\}, \{b, c\}, \{b, g\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{c, g\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, g\}\}$. Los vértices c y g son adyacentes, mientras que c y h no lo son, y tampoco c y g . El vértice c tiene grado cinco, el vértice h tiene grado cero y el vértice a tiene grado uno.

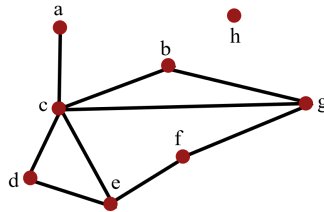


Figura 2.4: Grafo con vértices V' y aristas E'

Ejemplo 2.3.5. Defínase a \mathcal{G}'' como el grafo con vértices $V'' = \{a, b, c, d, e\}$ y cuyo conjunto de aristas es $E'' = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}\}$. Los vértices a y b son adyacentes, dado que $\{a, b\} \in E''$. Mientras que b y c no son adyacentes, puesto que $\{b, c\} \notin E''$. El vértice b tiene grado tres, a tiene grado dos y d, c y e tienen grado uno.

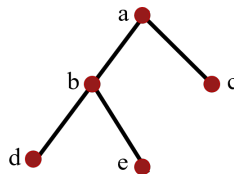


Figura 2.5: Grafo con vértices $V'' = \{a, b, c, d, e\}$ y aristas $E'' = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}\}$.

Las siguientes definiciones son terminos geométricos necesarias para estudiar las propiedades de conectividad en grafos y serán de gran utilidad más adelante.

Definición 2.3.6. Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo. Para $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Un **camino de longitud n en \mathcal{G}** es una sucesión v_0, \dots, v_n de vértices diferentes $v_0, \dots, v_n \in V$, con la propiedad de que $\{v_j, v_{j+1}\} \in E$ para toda $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$; si $n \leq \infty$, entonces se dice que **el camino conecta los vértices v_0 y v_n** .

El grafo \mathcal{G} es un **grafo conexo** si cualesquiera dos de sus vértices pueden conectarse por un camino finito.

Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Un **ciclo de longitud n en \mathcal{G}** es una sucesión v_0, \dots, v_{n-1} de vértices diferentes $v_0, \dots, v_{n-1} \in V$, en la que $\{v_0, v_{n-1}\} \in E$, y además, para toda $j \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ se cumple que $\{v_j, v_{j+1}\} \in E$.

Ejemplo 2.3.7. Considérese a \mathcal{G} el grafo del ejemplo 2.3.3. El camino a, b, d conecta al vértice a con el vértice b y es de longitud dos. Este grafo conexo y a, b, c, d es un ciclo de longitud cuatro en \mathcal{G} .

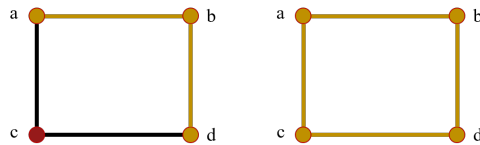


Figura 2.6: Camino a, b, d y ciclo a, b, c, d .

Ejemplo 2.3.8. En \mathcal{G}' el grafo del ejemplo 2.3.4. Tanto el camino a, c, d, e, f, g de longitud cinco, como el camino a, c, g de longitud dos, unen a los vértices a con g (Figura 2.7). Para los vértices a y c , el camino de longitud uno que los conecta es a, c . No existe un camino que una a los vértices d y h , por lo que \mathcal{G}' no es conexo (Figura 2.8).

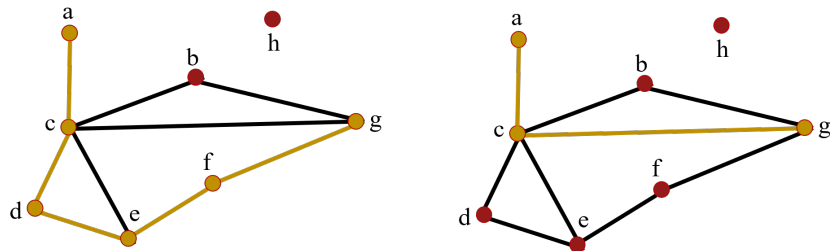


Figura 2.7: Caminos a, c, d, e, f, g y a, c, g que unen los vértices a y g .

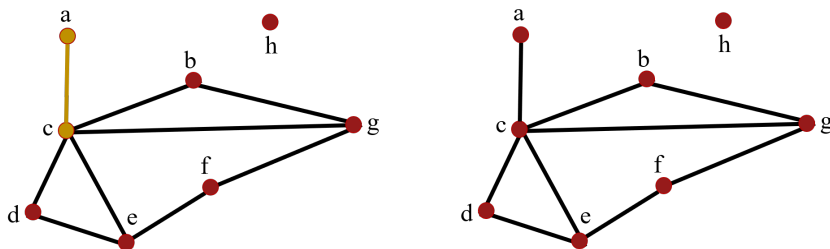


Figura 2.8: Camino a, c entre a y c . No existen aristas que permitan unir a h con ningún vértice.

La sucesión c, d, e, f, g, b es un ciclo de longitud seis en \mathcal{G}' . Y c, b, g es un ciclo de longitud tres (Figura 2.9).

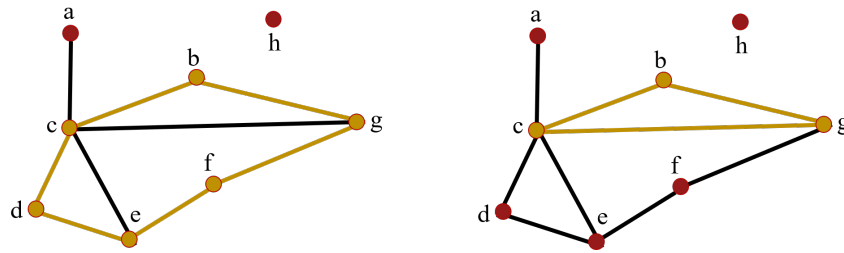


Figura 2.9: Ciclos c, d, e, f, g, b y c, b, g .

Ejemplo 2.3.9. El grafo \mathcal{G}'' del ejemplo 2.3.5 es un grafo conexo, sin ciclos.

Si se observa el siguiente par de grafos (Figura 2.10), es posible preguntarse acerca de la relación que tienen estos grafos, dado que el conjunto de vértices y aristas es muy similar.

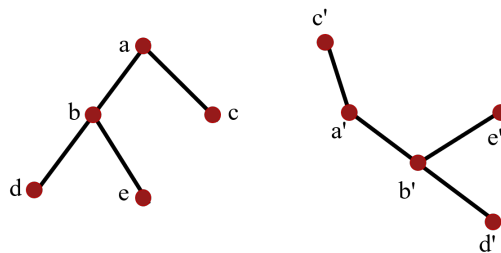


Figura 2.10: Un par de grafos que se parecen.

La siguiente definición nos permite establecer una relación entre ellos.

Definición 2.3.10. Dados $\mathcal{G} = (V, E)$ y $\mathcal{G}' = (V', E')$ dos grafos, estos serán **grafos isomorfos**, si existe un **isomorfismo de grafos** entre ellos, es decir, si existe una biyección $f: V \rightarrow V'$ tal que para todo $v, w \in E$ se cumple que $\{v, w\} \in E$, si y sólo si $\{f(v), f(w)\} \in E'$.

Ejemplo 2.3.11. Para los grafos de la figura 2.10, la función tal que $f(a) = a', f(b) = b', f(c) = c', f(d) = d', f(e) = e'$ definida entre sus vértices es un isomorfismo de grafos.

Dado un conjunto generador para un grupo, es posible organizar su estructura a través de un grafo:

Definición 2.3.12. Sea G un grupo y $S \subset G$ un conjunto generador de G . Entonces el **grafo de Cayley de G con respecto al conjunto generador S** es el grafo $Cay(G, S)$ donde el conjunto de vértices es G y el conjunto de aristas es:

$$\{\{g, g \cdot s\} | g \in G, s \in (S \cup S^{-1}) - \{e\}\},$$

es decir, existe una arista entre dos vértices g, h , si y sólo si $g^{-1}h$ es un elemento no trivial de $S \cup S^{-1}$.

Ejemplo 2.3.13. En $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$ (Figura 2.11) el conjunto de vértices es \mathbb{Z} , y entre 2 y 3 existe una arista ya que $\{2, 2 + 1\} = \{2, 3\}$. Mientras que en $Cay(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ (Figura 2.12) no existe una arista entre 2 y 3, sin embargo si existe una arista entre 0 y 3, de la forma $\{0, 0 + 3\}$.

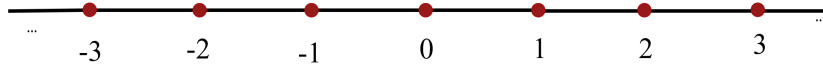


Figura 2.11: $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$

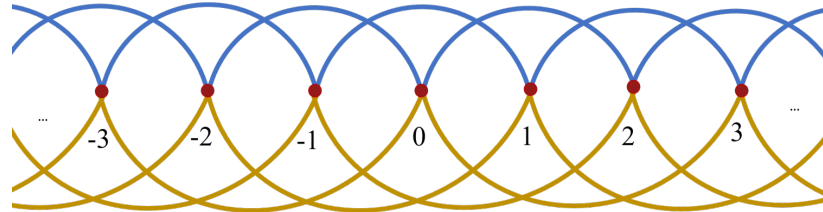


Figura 2.12: $Cay(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$.

Ejemplo 2.3.14. La figura 2.13 muestra los grafos de Cayley de grupos del tipo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con conjunto generador $\{[1]\}$.

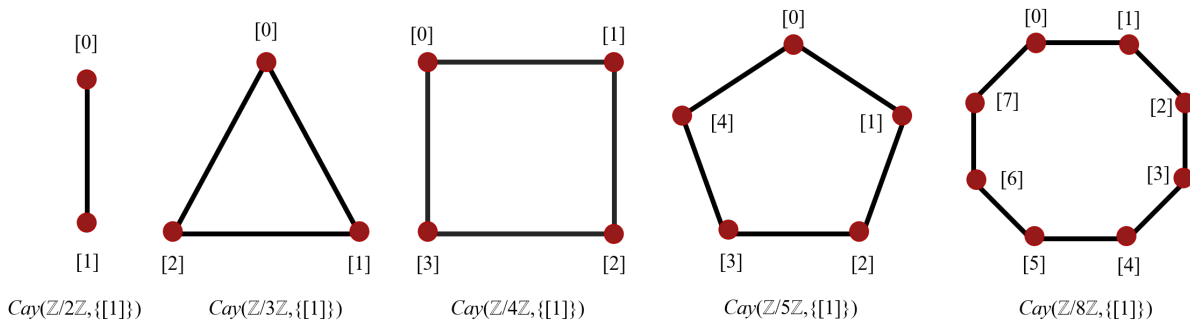


Figura 2.13: Grafos de Cayley de grupos $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con generador $\{[1]\}$ para $n \in \{2, 3, 4, 5, 7\}$.

Ejemplo 2.3.15. Sea S_3 el grupo de permutaciones de tres elementos y sean $S = \{(12), (123)\}$, $S' = \{(12), (23)\}$ conjuntos generadores para S_3 , la figura 2.15 muestra sus respectivos grafos de Cayley.

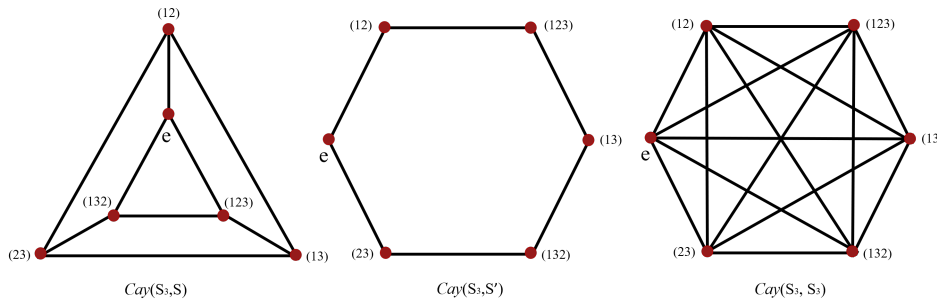


Figura 2.14: Grafos de Cayley de S_3

Ejemplo 2.3.16. El grupo libre en dos generadores F_2 , es aquel grupo cuyos elementos son secuencias de elementos de $\{a, b\}$ y sus inversos, y cuya operación binaria es la concatenación de dichas secuencias. Y cuyo grafo de Cayley se muestra en la figura 2.15.

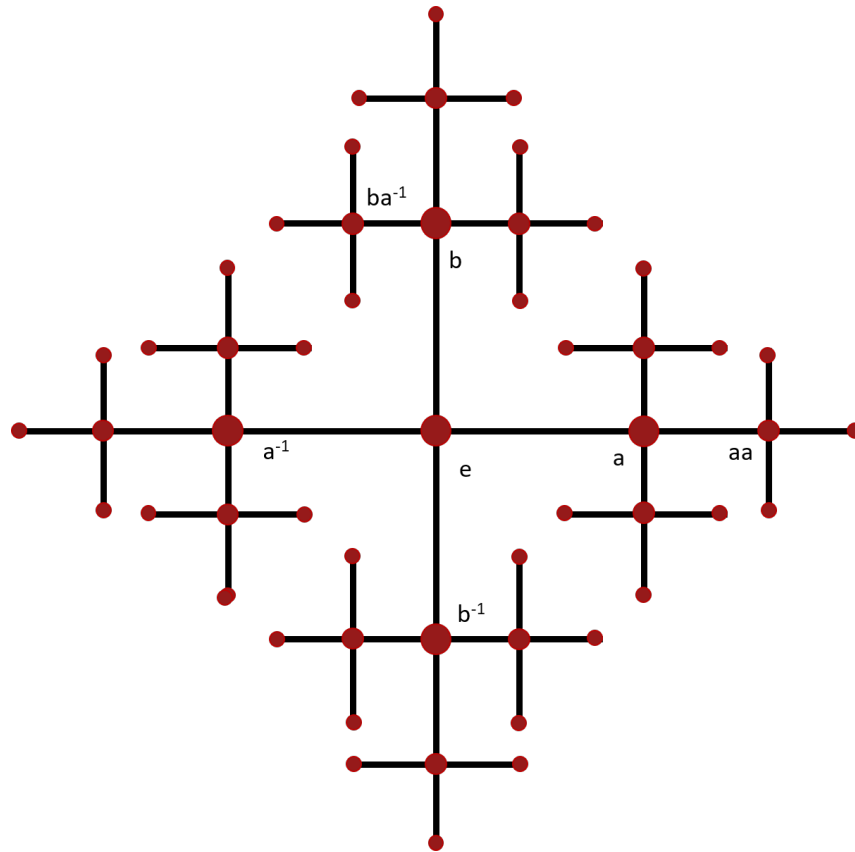


Figura 2.15: $Cay(F_2, \{a, b\})$

2.4. Grupos como espacios métricos

Hasta aquí, se ha logrado relacionar a los grupos con un objeto geométrico, por lo que ahora es de interés dotar con alguna estructura topológica más rica a estos objetos geométricos. Dado el concepto de camino dentro de un grafo, es posible establecer una noción de distancia.

Definición 2.4.1. Dado $\mathcal{G} = (E, V)$ un grafo, la **distancia** $d_{\mathcal{G}}(v, v')$ **entre** $v, v' \in V$ **dos vértices** es el longitud del camino más corto en \mathcal{G} que conecta v con v' .

Esta distancia induce una métrica sobre un grafo, si y sólo si, el grafo es conexo. En el caso de los grafos de Cayley (que son siempre conexos) coincide con la métrica de las palabras de un grupo respecto a un generador definida como:

Definición 2.4.2. Sea G un grupo y $S \subset G$ un conjunto generador de G . **La métrica de las palabras** d_s **en** G **con respecto a** S es la métrica en G asociada con el grafo $Cay(G, S)$, en otras palabras para cualesquiera $g, h \in G$ se tiene que:

$$d_s(g, h) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists s_1, s_2, \dots, s_n \in S \cup S^{-1} \quad g^{-1} \cdot h = s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_n\}$$

2.5. Acciones de grupos en grafos de Cayley

Una vez relacionado un grupo con un grafo, se estudiarán los invariantes geométricos de dicho grafo a través de acciones de grupo.

Definición 2.5.1. Sea G un grupo y (E, V) un grafo, la acción de G en (E, V) por isomorfismos $\gamma: G \rightarrow \text{Aut}((E, V))$ es una **acción libre sobre el grafo** (E, V) , si para toda $g \in G$ sucede que para cualquier vértice $v \in V$ pasa que $\gamma(g)(v) \neq v$ y además, para cualquier arista $\{v, v'\} \in E$ se cumple que $\{\gamma(g)(v), \gamma(g)(v')\} \neq \{v, v'\}$.

Teorema 2.5.2. Sea G un grupo finitamente generado por un conjunto S . La acción por translación izquierda de G en $\text{Cay}(G, S)$ es libre, si y sólo si, S no contiene elementos de orden dos.

Demostración. De manera equivalente se puede demostrar que la acción por translación izquierda de G en $\text{Cay}(G, S)$ no es libre, si y sólo si, S contiene elementos de orden dos.

\Rightarrow] Supóngase que la acción por translación izquierda de G en $\text{Cay}(G, S)$ no es libre. La acción por izquierda siempre es libre sobre los vértices (ejemplo 2.2.14), así resta fijarse en la acción sobre las aristas. Dada una arista $\{v, v'\}$ se cumple que $v' = vs$ con $s \in S \cup S^{-1} \setminus \{e\}$. Así se tiene que $g \cdot \{v, v'\} = \{g \cdot v, g \cdot v'\}$. Luego, como la acción no es libre existe $g \in G$ tal que fija aristas, por lo que ocurren los siguientes casos:

- Sucede que $\{g \cdot v, g \cdot v'\} = \{v, v'\}$, con $g \cdot v = gv = v$ y $g \cdot v' = gv' = v'$, por lo tanto $g = e$.
- Sucede que $\{g \cdot v, g \cdot v'\} = \{v', v\}$, con $g \cdot v = v'$ y $g \cdot v' = v$, por consiguiente:

$$v = g \cdot v' = g \cdot (vs) = gvs' = (gv) \cdot s = (g \cdot v) \cdot s = v' \cdot s = (vs) \cdot s = vss = vs^2.$$

Por lo tanto $s^2 = e$, pero como $s \neq e$ entonces S tiene un elemento de orden 2.

\Leftarrow] Supóngase que S contiene un elemento de orden dos, entonces $s \cdot \{e, s\} = \{s, s^2\} = \{s, e\}$, es decir, la acción de s en $\{e, s\}$ lo fija por lo que la acción no es libre. □

Ejemplo 2.5.3. Considérese a $C = \{x \in \mathbb{C} \mid x = i^n \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$, este grupo es libremente generado por i y es de la forma $C = \{1, i, -1, -i\}$. El grafo $\text{Cay}(C, \{i\})$ es:

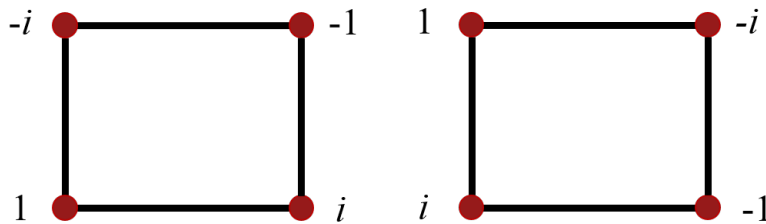
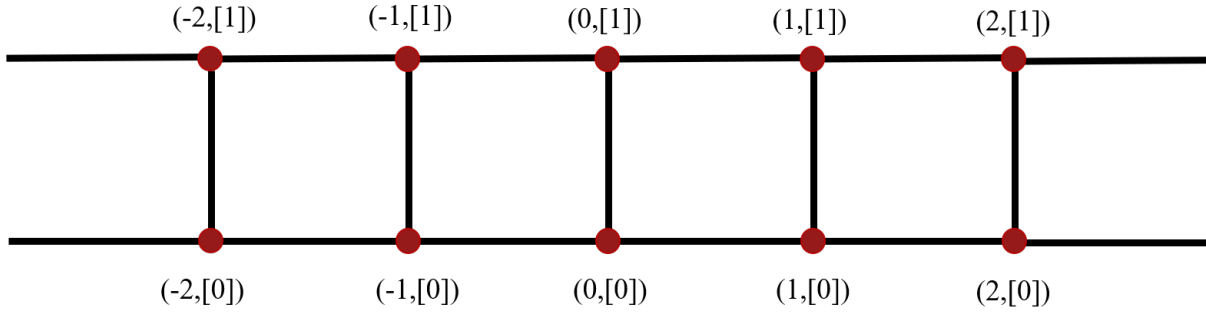


Figura 2.16: Acción por translación izquierda de C en $\text{Cay}(C, \{i\})$

Ejemplo 2.5.4. Un ejemplo de acción no libre, es la acción por translación izquierda de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sobre $\text{Cay}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{(0, [1]), (1, [0])\})$:

Figura 2.17: $Cay(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{(0, [1]), (1, [0])\})$.

Note que:

$$(0, [1]) \cdot \{(0, [0]), (0, [1])\} = \{(0, [1]) \cdot (0, [0]), (0, [1]) \cdot (0, [1])\} = \\ \{(0 + 0, [1 + 0]) \cdot (0 + 0, [1 + 1])\} = \{(0, [1]), (0, [0])\}.$$

Más aún, para cualquier $z \in \mathbb{Z}$:

$$(0, [1]) \cdot \{(z, [0]), (z, [1])\} = \{(z, [1]), (z, [0])\} = \{(z, [0]), (z, [1])\},$$

por lo que $\{(z, [0]), (z, [1])\}$ queda fijo bajo la acción.

Una vez dotados de estructura topológica (métrica) estos grafos, serán de especial interés los siguientes tipos de acciones:

Definición 2.5.5. Sea G un grupo y (X, τ_x) un espacio topológico. Una acción de G en X es **propia** si para todo $K \subset X$ compacto el conjunto $\{g \in G \mid (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\}$ es finito.

Definición 2.5.6. Sea G un grupo y (X, τ_x) un espacio topológico. Una acción de G en X es **cocompacta**, si existe un $K \subset X$ compacto tal que:

$$G \cdot K := \bigcup_{g \in G} g \cdot K = X$$

Ejemplo 2.5.7. Considérese la acción por translación izquierda de \mathbb{Z} sobre \mathbb{R} definida como en el ejemplo 2.2.6. Si K es un subconjunto compacto de \mathbb{R} en particular es cerrado y acotado, por lo que existe un intervalo $I := (r - \mu, r + \mu)$ con $r \in K$ y $\mu \in \mathbb{Z}^+$ tal que $K \subseteq I$. Luego, si $z \in (-\mu, \mu) \cap \mathbb{Z}$, entonces:

$$(z \cdot I) \cap I \neq \emptyset,$$

$$(z + r - \mu, z + r + \mu) \cap (r - \mu, r + \mu) \neq \emptyset.$$

Por otro lado si $z \in \mathbb{Z} \setminus (-\mu, \mu)$, entonces:

$$(z \cdot I) \cap I = \emptyset,$$

$$(z + r - \mu, z + r + \mu) \cap (r - \mu, r + \mu) = \emptyset.$$

Por consiguiente:

$$|\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}| \leq 2\mu + 1,$$

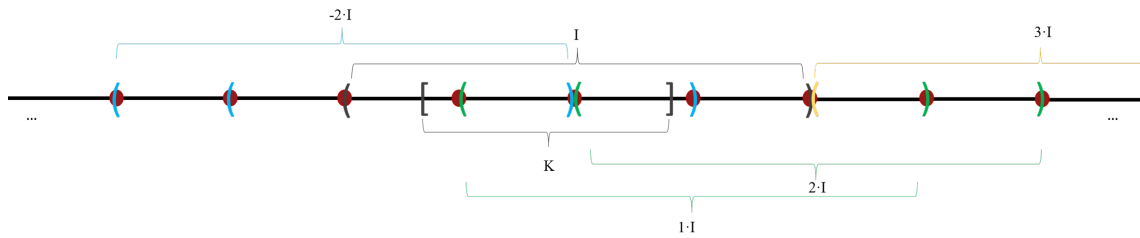


Figura 2.18: \mathbb{Z} translaciones de I .

de donde se sigue que la acción de \mathbb{Z} sobre \mathbb{R} que es propiamente discontinua. Además, note que el intervalo $[-1, 1]$ es un subconjunto compacto de \mathbb{R} tal que:

$$\mathbb{Z} \cdot [-1, 1] = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} z \cdot [-1, 1] = \mathbb{R},$$

así pues, ésta acción es también cocompacta.

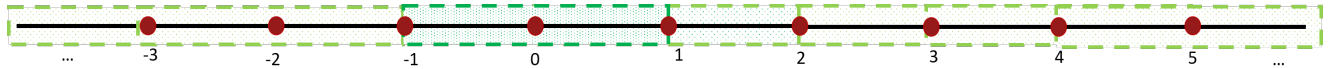


Figura 2.19: \mathbb{Z} de $[-1, 1]$ cubren a todo \mathbb{R} .

Capítulo 3

Cuasi-isometrías y geodésicas

3.1. Introducción

Y le explicó que la belleza de una recta es inalcanzable, porque en ella están disueltas todas las curvas, todas las trampas, en nombre de un orden clemente y justo. Es algo que las carreteras pueden hacer le dijo, pero que en cambio no existe en la vida. Porque el corazón de los hombres no corre recto, y no hay orden, tal vez, en su caminar. Luego dejó de hablar, y permaneció largo rato en silencio, preguntándose de dónde le vendrían aquellas palabras.

Alessandro Baricco
Esta historia

En las secciones anteriores se relacionó a los grupos finitamente generados, por algún conjunto S (objetos algebraicos), con sus respectivos grafos de Cayley $Cay(G, S)$ (objetos geométricos). Más aún, a estos grafos se los dotó con la métrica de las palabras que coincide con la métrica de grafos, pero depende de S . En este capítulo se estudian las transformaciones entre objetos geométricos. Se comienza con las isometrías, éstas se generalizan y se estudian los encajes bi-Lipschitz y cuasi-isometrías.

3.2. Encajes y equivalencias

3.2.1. Encajes isométricos

Como hace Euclides y más tarde Hilbert con la geometría neutral, es natural estudiar movimientos rígidos, es decir, transformaciones que preservan distancia. En este caso la definición de encaje isométrico es más general, puesto que no solamente estudia automorfismos/endomorfismos, si no transformaciones entre espacios métricos distintos.

Definición 3.2.1. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos, una función $f: X \rightarrow Y$ entre ellos es un **encaje isométrico** si para cualesquiera $x, x' \in X$:

$$d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x')).$$

La función f es una **isometría**, si es un encaje isométrico para el cual existe otro encaje isométrico $g: Y \rightarrow X$ tal que:

$$f \circ g = id_Y \quad g \circ f = id_X$$

Estos encajes son transformaciones que preservan distancia. Son inyectivos y continuos con la topología inducida por la métrica.

A continuación, se ilustra con algunos ejemplos sencillos que en efecto, estas transformaciones son movimientos rígidos en grafos de Cayley y en \mathbb{R}^2 , a saber, translaciones, rotaciones o reflexiones.

En este primer ejemplo se muestra una translación, que es también un ejemplo de una acción por translación izquierda de \mathbb{Z} en sí mismo.

Ejemplo 3.2.2. Considérese a \mathbb{Z} como un grupo aditivo y a z_0 un elemento fijo pero arbitrario de este. La función:

$$\begin{aligned} f: Cay(\mathbb{Z}, \{1\}) &\longrightarrow Cay(\mathbb{Z}, \{1\}) \\ z &\longmapsto z_0 + z \end{aligned}$$

Es un encaje isométrico, puesto que para cualesquiera vértices $z, z' \in Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$:

$$d_{\{1\}}(z, z') = d_{\{1\}}(f(z), f(z')) = d_{\{1\}}(z_0 + z, z_0 + z').$$

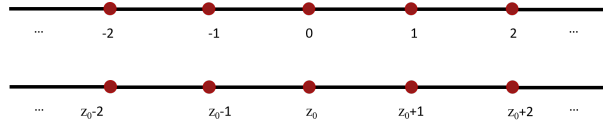


Figura 3.1: $f: Cay(\mathbb{Z}, \{1\}) \longrightarrow Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$

Más aún, f es un isometría, dado que existe una función g :

$$\begin{aligned} g: Cay(\mathbb{Z}, \{1\}) &\longrightarrow Cay(\mathbb{Z}, \{1\}) \\ z &\longmapsto -z_0 + z \end{aligned}$$

y se cumple que $f \circ g = id_{Cay(\mathbb{Z}, \{1\})}$ y $f \circ g = id_{Cay(\mathbb{Z}, \{2,3\})}$.

Obsérvese que un encaje isométrico es una isometría, si y sólo si, es biyectivo. Además las isometrías son funciones continuas.

En el siguiente ejemplo se exhibe una reflexión, entre los semiplanos superior e inferior.

Ejemplo 3.2.3. Los conjuntos

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\},$$

$$H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}.$$

Dotados con la métrica heredada de \mathbb{R}^2 son dos espacios métricos distintos. La función:

$$\begin{aligned} f : H_1 &\longrightarrow H_2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, -y) \end{aligned}$$

Cumple lo siguiente para cualesquiera $(x, y), (x', y') \in H_1$:

$$d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = d((x, -y), (x', -y')) = d(f(x, y), f(x', y')).$$

Con lo que se verifica que f es un encaje isométrico. Además, existe un encaje isométrico inverso g de la forma:

$$\begin{aligned} g : H_2 &\longrightarrow H_1 \\ (x, y) &\longmapsto (x, -y) \end{aligned}$$

Por lo que, $g \circ f = id_{H_1}$ y $f \circ g = id_{H_2}$. Y así se cumple que f es una isometría.

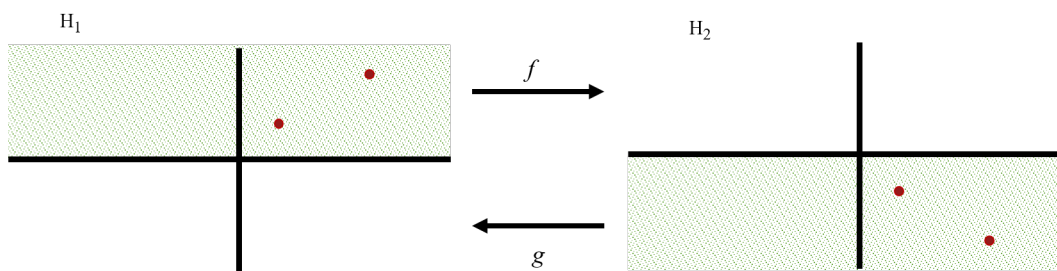


Figura 3.2: Encajes isométricos f y g .

Ejemplo 3.2.4. Considérese a los conjuntos

$$Z_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y \geq 0\},$$

$$Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y \leq 0\}.$$

A estos puede dotarseles con la métrica heredada del grafo de $Cay\{\mathbb{Z}^2, \{(1, 0), (0, 1)\}\}$. Llámese $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$, de modo que para cualesquiera $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z}^2$:

$$d_S((x, y), (x', y')) = (|x - x'| - 1) + (|y - y'| - 1).$$

La función:

$$\begin{aligned} f : Z_1 &\longrightarrow Z_2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, -y) \end{aligned}$$

Es una isometría, ya que para cualesquiera $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z}^2$:

$$d_S((x, y), (x', y')) = (|x - x'| - 1) + (|y - y'| - 1) = d_S((x, -y), (x', -y')) = d_S(f(x, y), f(x', y')).$$

De la misma manera se define a:

$$\begin{aligned} g : Z_2 &\longrightarrow Z_1 \\ (x, y) &\longmapsto (x, -y) \end{aligned}$$

En consecuencia se satisface que $f \circ g = id_{Z_2} = g \circ f$. Por lo que f es una isometría.

3.2.2. Encajes bi-Lipschitz

Una noción más general que las isometrías son los encajes bi-Lipschitz, llamados así en honor a Rudolf Lipschitz, un matemático alemán que vivió de 1832 a 1903, quien fue asesor doctoral de Felix Klein. En 1864 Lipschitz define condiciones de la forma:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Posteriormente, en 1876 trabaja condiciones del mismo tipo en espacios \mathbb{R}^n para trabajar con coeficientes y soluciones de ecuaciones diferenciales. Más tarde, para tratar con problemas de contractibilidad y continuidad se utilizan condiciones de la forma:

$$\frac{1}{K}|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

En esta sección, se estudian transformaciones de este tipo, con la intención de tener una noción de similitud geométrica más laxa que las isometrías. Las condiciones Lipschitz admiten un error multiplicativo, que permite observar la formas a gran escala y no todos los detalles locales. De manera intuitiva, los encajes bi-Lipschitz posibilitan reconocer objetos geométricos parecidos salvo por una diferencia de tamaño.

Particularmente, la motivación para estudiar encajes bi-Lipschitz será, como se vió anteriormente, que los grafos de Cayley dependen siempre de la métrica inducida por un conjunto generador. Un primer ejemplo de que estos grafos no son iguales, ni isométricos, a pesar de representar al mismo grupo son los grafos $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$ y $Cay(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$.

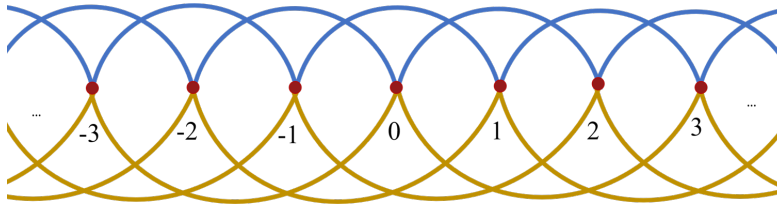


Figura 3.3: $Cay(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$

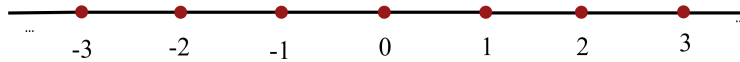


Figura 3.4: $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$

En este sentido, las equivalencias bi-Lipschitz serán de interés, ya que permitirán relacionar los grafos de Cayley de un mismo grupo generado por distintos conjuntos finitos.

Definición 3.2.5. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una función $f : X \rightarrow Y$ entre ellos, es un **encaje bi-Lipschitz**, si existe una constante $c \in \mathbb{R}^+$, tal que para cualesquiera $x, x' \in X$:

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x').$$

La función f es una **equivalencia bi-Lipschitz**, si es un encaje bi-Lipschitz para el cual existe una **bi-Lipschitz-inversa**, es decir, si existe un encaje bi-Lipschitz $g : Y \rightarrow X$ tal que:

$$f \circ g = id_Y \quad g \circ f = id_X$$

Luego, dos espacios métricos serán **bi-Lipschitz equivalentes** si existe una equivalencia bi-Lipschitz entre ellos.

Los encajes bi-Lipschitz son inyectivos, además toda equivalencia bi-Lipschitz es un homeomorfismo con respecto a la topología inducida por la métrica. Y más aún, un encaje bi-Lipschitz es una equivalencia bi-Lipschitz, si y sólo si, es biyectivo.

El siguiente ejemplo muestra como los encaje bi-Lipschitz permiten preservar formas, salvo una diferencia de escala en estas. En particular, se hace evidente como en el plano las transformaciones bi-Lipschitz convierten bolas, en bolas de distinto tamaño.

Ejemplo 3.2.6. Si $a > 1$ es una constante fija, la siguiente función $f: \overline{B((0,0),1)} \rightarrow \overline{B((0,0),a)}$ es una equivalencia bi-Lipschitz entre $\overline{B((0,0),1)}$ y $\overline{B((0,0),a)}$ vistas como subespacios métricos de \mathbb{R}^2 .

$$f: \overline{B((0,0),1)} \rightarrow \overline{B((0,0),a)}$$

$$(x, y) \mapsto (ax, ay)$$

Para cualesquiera $(x, y), (x', y') \in \overline{B((0,0),1)}$:

$$d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

y por otro lado:

$$d((f(x, y), f(x', y'))) = \sqrt{(ax - ax')^2 + (ay - ay')^2} = a\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

De donde, para $c := a + 1$:

$$\frac{1}{a+1} \cdot \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \leq a\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \leq (a+1) \cdot (a\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}),$$

$$\frac{1}{c} \cdot d((x, y), (x', y')) \leq d((f(x, y), f(x', y'))) \leq c \cdot d((x, y), (x', y')).$$

Por lo que en efecto f es un encaje bi-Lipschitz y es posible definir otra función g que sea la bi-Lipschitz-inversa de la siguiente forma:

$$g: \overline{B((0,0),a)} \rightarrow \overline{B((0,0),1)}$$

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)$$

Ésta cumple que:

$$d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

$$d((g(x, y), g(x', y'))) = \sqrt{\left(\frac{x}{a} - \frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a} - \frac{y'}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Así, para $c' := a + 1$:

$$\frac{1}{a+1} \cdot \sqrt{((x - x')^2 + (y - y')^2)} \leq \frac{1}{a}\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \leq a+1 \cdot \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

$$\frac{1}{c'} \cdot d((x, y), (x', y')) \leq d((g(x, y), g(x', y'))) \leq c' \cdot d((x, y), (x', y')).$$

Finalmente note que para toda $(x, y) \in \overline{B((0, 0), 1)}$ y toda $(x', y') \in \overline{B((0, 0), a)}$:

$$f \circ g((x, y)) = f\left(\left(\frac{1}{a}x, \frac{1}{a}y\right)\right) = \left(\frac{a}{a}x, \frac{a}{a}y\right) = (x, y),$$

$$g \circ f((x', y')) = g((ax', ay')) = \left(\frac{a}{a}x', \frac{a}{a}y'\right) = (x', y').$$

En conclusión f es un encaje bi-Lipschitz, ya que $f \circ g = id_{\overline{B((0,0),a)}}$ y $g \circ f = id_{\overline{B((0,0),1)}}$.

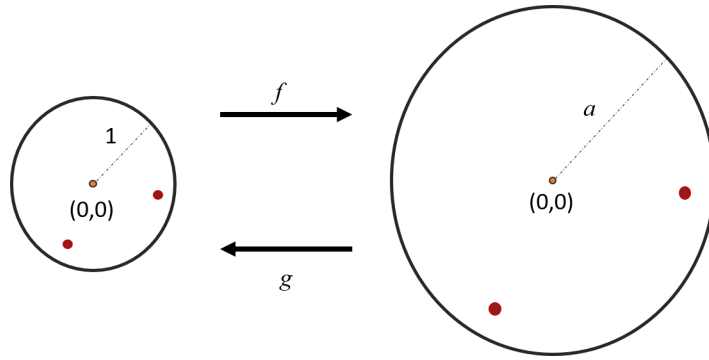


Figura 3.5: Encajes bi-Lipschitz f y g .

Ejemplo 3.2.7. Toda contracción o expansión es una equivalencia bi-Lipschitz.

Anteriormente, se relacionó a los grupos finitamente generados con sus grafos de Cayley que eran espacios métricos, lo cual permite determinar cuando un grupo es bi-Lipschitz equivalente a un espacio métrico. Obsérvese que la definición de los encajes bi-Lipschitz entre un grupo y un espacio métrico dependerán del conjunto generador S del grupo.

Definición 3.2.8. Un grupo G finitamente generado es **bi-Lipschitz equivalente a un espacio métrico** (X, d) , si para algún conjunto generador S de G , el espacio métrico (G, d_S) es bi-Lipschitz equivalente a (X, d) .

En el siguiente ejemplo se evidencia que $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$ y $Cay(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ a pesar de ser grafos de Cayley del mismo grupo, no son isométricos. Pero si son bi-Lipschitz equivalentes.

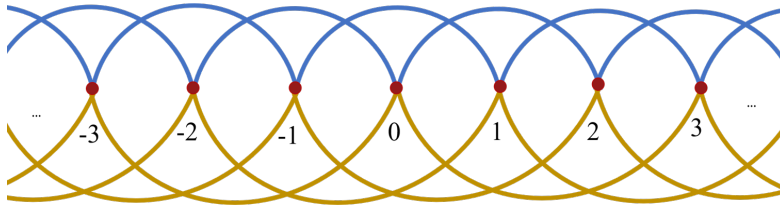


Figura 3.6: $Cay(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$.

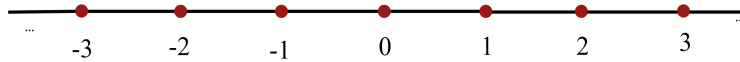


Figura 3.7: $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$.

Ejemplo 3.2.9. Los grafos $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$ y $Cay(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ no son isométricos, puesto que:

$$1 = d_{\{1\}}(0, 1) \neq d_{\{2,3\}}(0, 1) = 2.$$

La distancia en $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$ está dada de la siguiente manera:

$$d_{\{1\}}(z, z') = |z - z'|,$$

mientras que la distancia en $Cay(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ está dada como:

$$d_{\{2,3\}}(z, z') = \begin{cases} \frac{|z - z'|}{3} & \text{si } |z - z'| \equiv 0 \pmod{3} \\ \left(\frac{|z - z'| - 1}{3}\right) + 2 & \text{si } |z - z'| \equiv 1 \pmod{3} \\ \left(\frac{|z - z'| - 2}{3}\right) + 1 & \text{si } |z - z'| \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \quad (3.1)$$

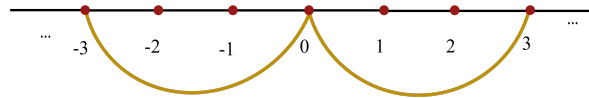


Figura 3.8: Como $|-3 + 3| = 0$ entonces $d_{\{2,3\}}(-3, 3) = 3$.

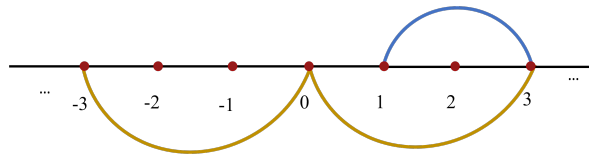


Figura 3.9: Puesto que $|-3 - 1| = 4 \equiv 1 \pmod{3}$, entonces $d_{\{2,3\}}(-3, 1) = \frac{4 - 1}{3} + 2 = 3$

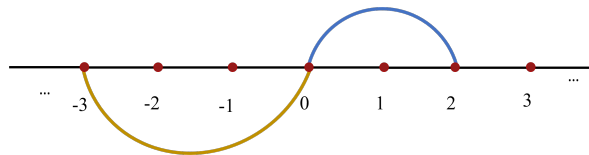


Figura 3.10: Dado que $|-3 - 2| = 5 \equiv 2 \pmod{3}$, entonces $d_{\{2,3\}}(-3, 2) = \frac{5 - 2}{3} + 1 = 2$

Si $id_{\mathbb{Z}}: Cay(\mathbb{Z}, \{1\}) \rightarrow Cay(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ es la función identidad, esta es una equivalencia bi-Lipschitz para una constante $c := 3$, esto se debe a que para cualesquiera $z, z' \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot |z - z'| &\leq \frac{|z - z'|}{3} \leq 3 \cdot |z - z'|, \\ \frac{1}{3} \cdot |z - z'| &\leq \left(\frac{|z - z'| - 1}{3} \right) + 2 \leq 3 \cdot |z - z'|, \\ \frac{1}{3} \cdot |z - z'| &\leq \left(\frac{|z - z'| - 2}{3} \right) + 1 \leq 3 \cdot |z - z'|. \end{aligned}$$

De manera análoga $id_{\mathbb{Z}}: Cay(\mathbb{Z}, \{2, 3\}) \rightarrow Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$, es la bi-Lipschitz inversa, en vista de que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \frac{|z - z'|}{3} &\leq |z - z'| \leq 3 \cdot \frac{|z - z'|}{3}, \\ \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{|z - z'| - 1}{3} \right) + 2 &\leq |z - z'| \leq 3 \cdot \left(\frac{|z - z'| - 1}{3} \right) + 2, \\ \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{|z - z'| - 2}{3} \right) + 1 &\leq |z - z'| \leq 3 \cdot \left(\frac{|z - z'| - 2}{3} \right) + 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$ y $Cay(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ son bi-Lipschitz equivalentes.

El resultado de este ejemplo se puede generalizar, para obtener que la identidad siempre es una equivalencia bi-Lipschitz entre los grafos de Cayley de un mismo grupo.

Proposición 3.2.10. Sean G un grupo finitamente generado, y S, S' conjuntos generadores finitos de G .

- 1) El morfismo identidad id_G es una equivalencia bi-Lipschitz entre (G, d_S) y $(G, d_{S'})$.
- 2) En particular, todo espacio métrico (X, d) que es bi-Lipschitz equivalente a (G, d_S) , es también bi-Lipschitz equivalente a $(G, d_{S'})$ (con los mismos morfismos).

Demostración. 1) En vista de que S es finito, es posible definir a:

$$c := \max\{d_{S'}(e, s) \mid s \in S \cup \bar{S}\},$$

que es también finito. Luego, dados $g, h \in G$ y $n := d_S(g, h)$. Para algunos $s_1, \dots, s_n \in S \cup \bar{S}$ es posible escribir $g^{-1}h = s_1 \cdots s_n$. Por construcción $d_{S'}$ es invariante bajo translaciones izquierdas, por tanto:

$$d_{S'}(g, h) = d_{S'}(e, g^{-1}h) = d_{S'}(g, gs_1 \cdots s_n).$$

A continuación, por la desigualdad del triángulo:

$$\begin{aligned} d_{S'}(g, h) &= d_{S'}(g, gs_1 \cdots s_n) \leq d_{S'}(g, gs_1) + d_{S'}(gs_1, gs_1s_2 \cdots s_n), \\ &\leq d_{S'}(g, gs_1) + d_{S'}(gs_1, gs_1s_2) + d_{S'}(gs_1s_2, gs_1s_2 \cdots s_n), \\ &\leq d_{S'}(g, gs_1) + d_{S'}(gs_1, gs_1s_2) + \cdots + d_{S'}(gs_1 \cdots s_{n-1}, gs_1 \cdots s_n), \\ &= d_{S'}(e, s_1) + d_{S'}(e, s_2) + \cdots + d_{S'}(e, s_n), \\ &\leq c \cdot n, \\ &= c \cdot d_S(g, h). \end{aligned}$$

De manera similar intercambiando S por S' se obtiene el otro lado de la desigualdad, lo que implica que $id_G: (G, d_S) \rightarrow (G, d_{S'})$ es una equivalencia bi-Lipschitz.

2) Si X es bi-Lipschitz equivalente a (G, d_S) , existe una f equivalencia bi-Lipschitz, entonces f compuesta con $id_G: (G, d_S) \rightarrow (G, d_{S'})$ será una equivalencia bi-Lipschitz entre (X, d) y $(G, d_{S'})$. \square

Las equivalencias bi-Lipschitz permiten relacionar los grafos de Cayley de un mismo grupo dotados con métricas de las palabras que dependen de conjuntos generadores finitos distintos. Una pregunta interesante es, si los grafos de Cayley de grupos dotados con métricas de las palabras que dependen de conjuntos generadores infinitos distintos son bi-Lipschitz equivalentes o si hay alguna noción más laxa que permita relacionarlos. La respuesta a esta interrogante es compleja. En la siguiente sección se abordará una idea más general de equivalencia, que además permitirá estudiar nociones de gran escala en grafos de Cayley de grupos distintos.

3.2.3. Encajes cuasi-isométricos

Las cuasi-isometrías no solamente admiten un error multiplicativo, sino que admiten, además un error aditivo, esto permite preservar menos estructura local. Una motivación inicial surge de preguntarse, qué tipo de equivalencia hay entre \mathbb{Z} y \mathbb{R} , y qué relaciones hay entre grafos de Cayley de grupos y otros espacios métricos.

Antes de definir qué es un cuasi-isometría, es preciso definir cuándo dos funciones están a distancia finita, una definición auxiliar.

Definición 3.2.11. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una función $f: X \rightarrow Y$ está a **distancia finita** de otra función $g: X \rightarrow Y$, si existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que para toda $x \in X$:

$$d_Y(f(x), g(x)) < c.$$

Definición 3.2.12. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos, una función $f: X \rightarrow Y$ es un **encaje cuasi-isométrico**, si existen $c \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tales que para cualesquiera $x, x' \in X$:

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x') + b.$$

Se dice que f es una **cuasi-isometría** si es un encaje cuasi-isométrico para el cual existe una **cuasi-inversa**, es decir, si existe un encaje cuasi-isométrico $g: Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f$ está a distancia finita de id_Y y $f \circ g$ está a distancia finita de id_X . Luego dos espacios métricos serán **cuasi-isométricos** si existe una cuasi-isometría entre ellos; esto se denotará como $X \sim_{QI} Y$.

Notación 3.2.13. Si $f: X \rightarrow Y$ es un encaje cuasi-isométrico tal que:

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x') + b.$$

Se dirá que f es un encaje (c, b) -cuasi-isométrico, y si es una cuasi-isometría se dirá que es una (c, b) -cuasi-isometría.

Obsérvese que los encajes cuasi-isométricos no son necesariamente inyectivos, ni suprayectivos, ni continuos. Y también, que todo encaje isométrico y todo encaje bi-Lipschitz son encajes cuasi-isométricos.

Definición 3.2.14. Un grupo G finitamente generado es **cuasi-isométrico a un espacio métrico** (X, d) , si para algún conjunto generador S de G , el espacio métrico (G, d_S) es cuasi-isométrico equivalente a (X, d) . Y esto se denota $X \sim_{QI} Y$

Proposición 3.2.15. Sean G un grupo finitamente generado, y S, S' conjuntos generadores finitos de G .

- 1) El morfismo identidad id_G es una cuasi-isometría entre (G, d_S) y $(G, d_{S'})$.
- 2) En particular, todo espacio métrico (X, d) que es cuasi-isométrico a (G, d_S) , es también cuasi-isométrico a $(G, d_{S'})$ (con los mismos morfismos).

La demostración de esta proposición es idéntica a la demostración de la proposición 3.2.10.

Los siguientes son algunos ejemplos de grupos cuasi-isométricos.

Ejemplo 3.2.16. Los grupos \mathbb{Z} y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ son cuasi-isométricos. En efecto, si $S = \{1\}$ y $S' := \{(1, [0]), (0, [1])\}$ son respectivamente conjuntos generadores. La función:

$$f : \text{Cay}(\mathbb{Z}, S) \longrightarrow \text{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, S')$$

$$z \longmapsto (z, [0])$$

cumple para cualesquiera $z, z' \in \mathbb{Z}$:

$$d_S(z, z') = |z - z'| \quad \text{y} \quad d_{S'}(f(z), f(z')) = d_{S'}((z, [0]), (z', [0])) = |z - z'|.$$

Luego, para $c := 1$ y $b := 0$

$$\frac{1}{c} \cdot d_S(z, z') - b \leq d_{S'}(f(z), f(z')) \leq c \cdot d_S(z, z') + b,$$

la función f es un encaje cuasi-isométrico. Obsérvese que dada:

$$g : \text{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, S') \longrightarrow \text{Cay}(\mathbb{Z}, S)$$

$$(z, [0]) \longmapsto z$$

$$(z, [1]) \longmapsto z$$

Si $(z, [i]), (z', [i']) \in \text{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, S')$ con $i \in \{0, 1\}$ tal que:

$$d_{S'}((z, [i]), (z', [i'])) = |z - z'|,$$

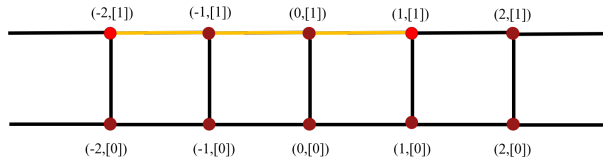


Figura 3.11: Distancia entre dos puntos $(z, [i])$ y $(z', [i'])$

y si $(z, [i]), (z', [i']) \in \text{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, S')$ con $i, i' \in \{0, 1\}$ tal que $i \neq i'$:

$$d_{S'}((z, [i]), (z', [i'])) = |z - z'| + 1.$$

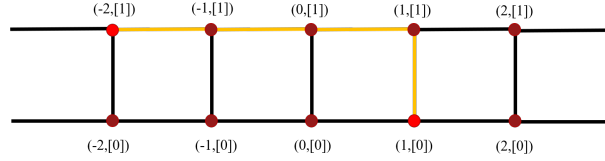


Figura 3.12: Distancia entre dos puntos $(z, [i])$ y $(z', [i'])$ con $i \neq i'$

Además, $(z, [i]), (z', [i']) \in \text{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, S')$:

$$d_S(g((z, [i])), g((z', [i']))) = d_S(z, z') = |z - z'|$$

Entonces para $c' = 2$ y $b' = 0$:

$$\frac{1}{2} \cdot (|z - z'| + 1) - 0 \leq |z - z'| \leq 2 \cdot |z - z'| + 0,$$

$$\frac{1}{2} \cdot d_{S'}((z, [i]), (z', [i'])) - b \leq d_S(g((z, [i])), g((z', [i']))) \leq 2 \cdot d_{S'}((z, [i]), (z', [i'])) + b.$$

La función g es un encaje cuasi-isométrico, y por último resta verificar que una es cuasi-inversa de la otra. Para cualesquiera $z \in \text{Cay}(\mathbb{Z}, S)$ y $(z, [i]) \in \text{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, S')$

$$f \circ g((z, [i])) = f(g((z, [i]))) = f(z) = (z, [0]).$$

Luego:

$$d_{S'}(f \circ g((z, [0])), id_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}((z, [i]))) = d_{S'}((z, [0]), (z, [i])) \leq 1,$$

La composición $f \circ g$ está a distancia finita de $id_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$. Y también:

$$g \circ f(z) = f((z, [0])) = z$$

Por lo tanto f es una cuasi-isometría, así $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \sim_{QI} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Observe que f y g son en particular encajes bi-Lipschitz, pero no son una bi-Lipschitz inversa de la otra. Sin embargo existen funciones tales que \mathbb{Z} y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, son equivalentes bi-Lipschitz.

Las cuasi-isometrías no son necesariamente biyecciones, y permiten relacionar en el sentido de la geometría a gran escala objetos que “se ven igual de lejos”. En el siguiente ejemplo se muestra que \mathbb{Z} y \mathbb{R} que no son biyectivos, son cuasi-isométricos. De manera intuitiva tanto el grafo de Cayley de \mathbb{Z} , tanto como \mathbb{R} , se ven como una línea recta. Y lo mismo sucede con los grafos de \mathbb{Z} y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, que al alejarse lo suficiente lucen como una recta.

Ejemplo 3.2.17. La identidad es un $(2, 1)$ -encaje cuasi-isométrico entre $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$ y (\mathbb{R}, d) con la métrica euclídeana, dado que:

$$\frac{1}{2} \cdot d_{\{1\}}(x, x') - 1 \leq d(id_{\mathbb{Z}}(x), id_{\mathbb{Z}}(x')) \leq 2 \cdot d_{\{1\}}(x, x') + 1,$$

$$\frac{1}{2} \cdot |x - x'| - 1 \leq |x - x'| \leq 2 \cdot |x - x'| + 1.$$

La cuasi-inversa de $id_{\mathbb{Z}}$ es una función:

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \longmapsto \lfloor x \rfloor$$

Esta es también una $(2, 1)$ -cuasi-isometría, ya que:

$$\frac{1}{2} \cdot d(x, x') - 1 \leq d_{\{1\}}(g(x), g(x')) \leq 2 \cdot d(x, x') + 1,$$

$$\frac{1}{2} \cdot |x - x'| - 1 \leq |\lfloor x \rfloor - \lfloor x' \rfloor| \leq 2 \cdot |x - x'| + 1.$$

Dado que todo $x \in \mathbb{Z}$:

$$g \circ id_{\mathbb{Z}}(x) = g(id_{\mathbb{Z}}(x)) = g(x) = \lfloor x \rfloor = x.$$

Y para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$id_{\mathbb{Z}} \circ g(x) = id_{\mathbb{Z}}(g(x)) = id_{\mathbb{Z}}(\lfloor x \rfloor) = \lfloor x \rfloor.$$

Se tiene que:

$$d(g \circ id_{\mathbb{Z}}(x), id_{\mathbb{Z}}(x)) = 0 \quad d_{\{1\}}(id_{\mathbb{Z}} \circ g(x), id_{\mathbb{R}}(x)) < 1,$$

por lo tanto g está a distancia finita de la identidad y $id_{\mathbb{Z}}$ es en efecto una cuasi-isometría.

Una primera pregunta resultado de los ejemplos anteriores es, cuándo un grupo es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} . Adicionalmente, surge la pregunta, ¿hay alguna propiedad algebraica que se relacione con esto? Como se verá más adelante son estas preguntas las que motivan el problema de la rigidez cuasi-isométrica de \mathbb{Z} .

Las siguientes proposiciones tratan propiedades inherentes de las cuasi-isometría que serán de utilidad en el futuro.

Proposición 3.2.18. Sean $f: Y \longrightarrow Z$ y $g: X \longrightarrow Y$ dos encajes cuasi-isométricos, entonces $f \circ g$ es un encaje cuasi-isométrico.

Demostración. Dado que f y g son encajes cuasi-isométricos se tiene que existen $c_1 \in \mathbb{R}^+$ y $b_1 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tales que para cualesquiera $x, x' \in X$:

$$\frac{1}{c_1} \cdot d_X(x, x') - b_1 \leq d_Y(g(x), g(x')) \leq c_1 \cdot d_X(x, x') + b_1.$$

Y también que existen $c_2 \in \mathbb{R}^+$ y $b_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tales que para cualesquiera $y, y' \in Y$:

$$\frac{1}{c_2} \cdot d_Y(y, y') - b_2 \leq d_Z(f(y), f(y')) \leq c_2 \cdot d_Y(y, y') + b_2.$$

Si $x, x' \in X$ tales que $g(x) = y$ y $g(x') = y'$ para algunos $y, y' \in Y$, entonces, dado que f es encaje cuasi-isométrico:

$$\frac{1}{c_2} \cdot d_Y(g(x), g(x')) - b_2 \leq d_Z(f(g(x)), f(g(x'))) \leq c_2 \cdot d_Y(g(x), g(x')) + b_2.$$

Por otro lado, como g es encaje cuasi-isométrico se tienen las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{c_1} \cdot d_X(x, x') - b_1 \leq d_Y(g(x), g(x')),$$

$$\frac{1}{c_1 c_2} \cdot d_X(x, x') - \frac{b_1}{c_2} \leq \frac{1}{c_2} \cdot d_Y(g(x), g(x')),$$

$$\frac{1}{c_1 c_2} \cdot d_X(x, x') - \frac{b_1}{c_2} - b_2 \leq \frac{1}{c_2} \cdot d_Y(g(x), g(x')) - b_2.$$

También:

$$d_Y(g(x), g(x')) \leq c_1 \cdot d_X(x, x') + b_1,$$

$$c_2 \cdot d_Y(g(x), g(x')) \leq c_2 c_1 \cdot d_X(x, x') + c_2 b_1,$$

$$c_2 \cdot d_Y(g(x), g(x')) + b_2 \leq c_2 c_1 \cdot d_X(x, x') + c_2 b_1 + b_2.$$

Por las desigualdades anteriores y dado que f es cuasi-isometría:

$$\frac{1}{c_1 c_2} \cdot d_X(x, x') - \frac{b_1}{c_2} - b_2 \leq \frac{1}{c_2} \cdot d_Y(g(x), g(x')) - b_2 \leq d_Z(f(g(x)), f(g(x'))),$$

y

$$d_Z(f(g(x)), f(g(x')))) \leq c_2 \cdot d_Y(g(x), g(x')) + b_2 \leq c_2 c_1 \cdot d_X(x, x') + c_2 b_1 + b_2,$$

entonces:

$$\frac{1}{c_1 c_2} \cdot d_X(x, x') - \frac{b_1}{c_2} - b_2 \leq d_Z(f(g(x)), f(g(x')))) \leq c_2 c_1 \cdot d_X(x, x') + c_2 b_1 + b_2,$$

$$\frac{1}{c_1 c_2} \cdot d_X(x, x') - c_2 b_1 - b_2 \leq d_Z(f(g(x)), f(g(x')))) \leq c_2 c_1 \cdot d_X(x, x') + c_2 b_1 + b_2.$$

Así, se tiene que existen $c := \frac{1}{c_1 c_2} \in \mathbb{R}^+$ y $b := c_2 b_1 + b_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tales que:

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b \leq d_Z(f(g(x)), f(g(x')))) \leq c \cdot d_X(x, x') + b.$$

Por lo que $f \circ g$ es un encaje cuasi-isométrico. □

Teorema 3.2.19. Sean $f: Y \rightarrow Z$ y $g: X \rightarrow Y$ dos cuasi-isometrías, entonces $f \circ g$ es un cuasi-isometría.

Demostración. De la proposición anterior se sigue que $f \circ g$ es un encaje cuasi-isométrico. Además si f' y g' son las cuasi-inversas de f y g respectivamente, también se sigue que $f' \circ g'$ es un encaje cuasi-isométrico. Dado que $f \circ g$ y $f' \circ g'$ están a distancia finita de las identidades, las composiciones también lo están y por tanto $f' \circ g'$ es la cuasi-inversa de $f \circ g$. □

Las siguientes proposiciones relacionan la distancia finita con las cuasi-isometrías.

Proposición 3.2.20. Cualquier función $g: X \rightarrow Y$ a distancia finita de un encaje cuasi-isométrico $f: X \rightarrow Y$ es un encaje cuasi-isométrico.

Demostración. Sea $f: X \rightarrow Y$ un (c, b) -encaje cuasi-isométrico a distancia finita de $g: X \rightarrow Y$ tal que existe $a \in \mathbb{R}^+$, de modo que para toda $x \in X$:

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq a$$

Por la desigualdad del triángulo se tiene para cualesquiera $x, x' \in X$:

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), g(x)) + d_Y(g(x), g(x')) + d_Y(g(x'), f(x')).$$

Como f es una cuasi-isometría y está a distancia finita de g :

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq 2a + d_Y(g(x), g(x')),$$

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b - 2a \leq d_Y(g(x), g(x')).$$

De manera similar, por la desigualdad del triángulo:

$$d_Y(g(x), g(x')) \leq d_Y(g(x), f(x)) + d_Y(f(x), f(x')) + d_Y(f(x'), g(x')).$$

Entonces, dado que f es una cuasi-isometría y está a distancia finita de g :

$$d_Y(g(x), g(x')) \leq d_Y(f(x), f(x')) + 2a \leq c \cdot d_X(x, x') + b + 2a$$

De lo anterior se tiene:

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b - 2a \leq d_Y(g(x), g(x')) \leq c \cdot d_X(x, x') + b + 2a$$

Es decir, g es un encaje $(c, b + 2a)$ -cuasi-isométrico. □

Proposición 3.2.21. Cualquier función $g: X \rightarrow Y$ a distancia finita de una cuasi-isometría $f: X \rightarrow Y$ es un cuasi-isometría.

Demostración. Como se vió anteriormente $g: X \rightarrow Y$, es un encaje cuasi-isométrico. Solo resta ver que este tiene una cuasi-inversa. Dado que $f: X \rightarrow Y$ es un cuasi-isometría, ésta tiene una cuasi-inversa $h: Y \rightarrow X$ tal que:

$$d_Y(f \circ h(y), id_Y(y)) \leq c,$$

$$d_Y(h \circ f(x), id_X(x)) \leq c$$

Por la desigualdad del triángulo para toda $y \in Y$:

$$d_Y(g \circ h(y), id_Y(y)) \leq d_Y(g \circ h(y), f \circ h(y)) + d_Y(f \circ h(y), id_Y(y)).$$

Por consiguiente, dado que h es cuasi-inversa de g , y además f y g están a distancia finita para alguna constante c' , entonces:

$$d_Y(g \circ h(y), id_Y(y)) \leq c' + c.$$

Análogamente como:

$$d_X(h \circ g(x), id_X(x)) \leq d_X(h \circ g(x), h \circ f(x)) + d_X(h \circ f(x), id_X(x)),$$

entonces:

$$d_X(h \circ g(x), id_X(x)) \leq c' + c.$$

Así pues, h es una cuasi-inversa de f , por lo cual g es una cuasi-isometría. □

Proposición 3.2.22. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ espacios métricos y $f, f': X \rightarrow Y$ funciones a distancia finita una de la otras. Si $g: Z \rightarrow X$ es función, entonces $f \circ g$ y $f' \circ g$ están a distancia finita una de la otra.

Demostración. En vista de que f y f' están a distancia finita, existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que para toda $x \in X$:

$$d_Y(f(x), f'(x)) \leq c.$$

Como g es función, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $g(y) = x$. En consecuencia:

$$d_Y(f(g(y)), f'(g(y))) = d_Y(f(x), f'(x)) \leq c.$$

Así, $f \circ g$ y $f' \circ g$ están a distancia finita una de la otra. \square

Proposición 3.2.23. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ espacios métricos y $f, f': X \rightarrow Y$ funciones a distancia finita una de la otra. Si $g: Y \rightarrow Z$ es un encaje cuasi-isométrico, entonces $g \circ f$ y $g \circ f'$ están a distancia finita.

Demostración. Dado que f y f' son funciones, entonces para toda $x \in X$, existe $y, y' \in Y$ tal que $f(x) = y$ y $f'(x) = y'$, por lo que:

$$d_X(g \circ f(x), g \circ f'(x)) = d_X(g(y), g(y')).$$

A continuación, como g es una cuasi-isometría, existen $c \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, de modo que:

$$d_X(g \circ f(x), g \circ f'(x)) = d_X(g(y), g(y')) \leq c \cdot d_Y(y, y') + b.$$

En vista de que f y f' están a distancia finita, existe $a \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$d_X(g \circ f(x), g \circ f'(x)) \leq c \cdot d_Y(y, y') + b = c \cdot d_Y(f(x), f'(x)) + b \leq ca + b.$$

Por lo tanto, existe una constante $k := ca + b$ de forma que $g \circ f$ y $g \circ f'$ están a distancia finita. \square

La categoría QMet' , es aquella en la que $\text{Ob}_{\text{QMet}'}$ son espacios métricos, los $\text{Mor}_{\text{QMet}'}$ son encajes cuasi-isométricos y la ley de composición es la composición usual de funciones.

Definición 3.2.24. La relación \sim entre $f, g \in \text{Mor}_{\text{QMet}'}$ denotará que f está a distancia finita de g , con notación $f \sim g$.

Proposición 3.2.25. La relación \sim es un relación de equivalencia en $\text{Mor}_{\text{QMet}'}$.

Demostración. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos y $f, g, h: X \rightarrow Y$

1) $f \sim f$ (Reflexividad)

Para $c = 1$ y toda $x \in X$:

$$0 = d_Y(f(x), f(x)) \leq c = 1,$$

por lo que f está a distancia finita de f , así $f \sim f$.

2) Si $f \sim g$ entonces $g \sim f$ (Simetría)

Como $f \sim g$, entonces existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que para toda $x \in X$:

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq c,$$

dado que d_Y es métrica tenemos que:

$$d_Y(f(x), g(x)) = d_Y(g(x), f(x)) \leq c$$

por lo tanto $g \sim f$.

3) Si $f \sim g$ y $g \sim h$ entonces $f \sim h$ (Transitividad)

Si $f \sim g$ y $g \sim h$, existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ de modo que para toda $x \in X$:

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq c_1 \quad \text{y} \quad d_Y(g(x), h(x)) \leq c_2,$$

entonces para $c_1 + c_2$ se cumple que:

$$d_Y(f(x), h(x)) \leq d_Y(g(x), h(x)) + d_Y(f(x), g(x)) \leq c_1 + c_2.$$

Así, $f \sim h$. □

Observación 3.2.26. En vista de que estar a distancia finita es una relación de equivalencia, es posible definir una nueva categoría cociente, cuyos objetos son espacios métricos y donde los morfismos entre dos espacios métricos, son la colección de las clases de equivalencia \sim de encajes cuasi-isométricos, es decir:

$$\text{Mor}_{\text{QMet}} := \text{Mor}_{\text{QMet}'} / \text{distancia finita.}$$

Donde la ley de composición está dada como:

$$\begin{aligned} \text{Mor}_{\text{QMet}}(Y, Z) \times \text{Mor}_{\text{QMet}}(X, Y) &\longrightarrow \text{Mor}_{\text{QMet}}(X, Z) \\ ([f], [g]) &\longmapsto [f \circ g] \end{aligned}$$

Definición 3.2.27. Sea (X, d) un espacio métrico, el **grupo de cuasi-isometrías de X** se define como:

$$\mathcal{QI}(X) := \text{Aut}_{\text{QMet}}(X),$$

esto es, el grupo de cuasi-isometrías de X en X módulo distancia finita.

Otra forma de entender la noción de cuasi-isometría, es a partir de una noción de densidad. Esta idea de densidad será la cuasi-densidad, que de manera intuitiva dice que la imagen de un encaje cuasi-isométrico es densa.

Definición 3.2.28. Dados dos espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) , una función $f: X \rightarrow Y$ entre ellos tiene **imagen cuasi-densa** si existe una constante $c \in \mathbb{R}^+$ tal que para cualesquiera $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que:

$$d_Y(f(x), y) \leq c.$$

La siguiente es una caracterización de las cuasi-isometrías en terminos de cuasi-densidad.

Teorema 3.2.29. Una función $f: X \rightarrow Y$ entre dos espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) es una cuasi-isometría, si y sólo si, f es un encaje cuasi-isométrico con imagen cuasi-densa.

Demostración. \Rightarrow] Si $f: X \rightarrow Y$ es una cuasi-isometría, entonces ésta tiene una cuasi-inversa $g: Y \rightarrow X$. Por consiguiente, existe una constante $c \in \mathbb{R}^+$ de modo que $f \circ g$ está a distancia finia de id_Y , es decir, para toda $y \in Y$:

$$d_Y(f \circ g(y), y) \leq c.$$

En particular, para toda $y \in Y$, existe $x = g(y)$ tal que:

$$d_Y(f(x), y) \leq c,$$

la función f tiene imagen cuasi-densa.

\Leftarrow] Supóngase que $f: X \rightarrow Y$ es un encaje (c, b) -cuasi-isométrico con imagen cuasi-densa, por definición se cumple que para toda $x, x' \in X$:

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, x') - b \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x') + b$$

y también que existe $a \in \mathbb{R}^+$ tal que para toda $y \in Y$:

$$d_Y(f(x), y) \leq a.$$

Para demostrar que f es una cuasi-isometría es necesario encontrar (construir) una cuasi-inversa para dicha función.

Por el axioma de elección, podemos definir una función selectora:

$$\begin{aligned} g: Y &\rightarrow X \\ y &\mapsto x_y \end{aligned}$$

tal que satisfaga que para toda $y \in Y$:

$$d_Y(f(x_y), y) \leq a.$$

Por otro lado, se tiene que para cualesquiera $y, y' \in Y$:

$$d_X(f(y), f(y')) = d_X(x_y, x_{y'}),$$

dado que f es una cuasi-isometría:

$$d_X(g(y), g(y')) = d_X(x_y, x_{y'}) \leq c \cdot d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) + cb,$$

por la desigualdad del triángulo:

$$\begin{aligned} c \cdot d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) + cb &\leq c \cdot (d_Y(f(x_y), y) + d_Y(y, f(x_{y'}))) + cb, \\ c \cdot d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) + cb &\leq c \cdot (d_Y(f(x_y), y) + d_Y(y, y') + d_Y(y', f(x_{y'}))) + cb. \end{aligned}$$

Entonces, por construcción y elección de g :

$$c \cdot d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) + cb \leq c(d_Y(y, y') + 2a) + cb.$$

De manera similar:

$$\begin{aligned} d_X(g(y), g(y')) = d_X(x_y, x_{y'}) &\geq \frac{1}{c} \cdot d_Y(f(x_y), f(x_{y'})) - \frac{b}{c}, \\ &\geq \frac{1}{c} (d_Y(y, y') - d_Y(f(x_y), y) - d_Y(y', f(x_{y'}))) - \frac{b}{c}, \\ &\geq \frac{1}{c} (d_Y(y, y') - 2a) - \frac{b}{c}. \end{aligned}$$

Por lo tanto g es un encaje cuasi-isométrico.

Además, dada la construcción de g se cumple para toda $y \in Y$:

$$d_Y(f \circ g(y), id_Y(y)) = d_Y(f(x_y), y) \leq a.$$

Para la otra composición. Puesto que f es un encaje cuasi-isométrico, entonces para toda $x \in X$:

$$d_X(g \circ f(x), id_X(x)) = d_X(x_{f(x)}, x) \leq c \cdot d_Y(f(x_{f(x)}), f(x)) + cb \leq ca + cb.$$

Por consiguiente g es el encaje cuasi-inverso de f , por lo cual f es una cuasi-isometría. \square

Una vez más, podemos llevar estos conceptos a la teoría de grupos.

Definición 3.2.30. Si G es un grupo finitamente generado por un conjunto S . Un **subgrupo** H de G es **cuasi-denso** en G si existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que para cualquier $g \in G$, existe $h \in H$ de modo que:

$$d_s(g, h) \leq c.$$

Notación 3.2.31. Dado G un grupo finitamente generado por un conjunto S . Si e es la identidad y g un elemento de G , se denotará como:

$$\|g\| := d_s(e, g),$$

donde d_s es la métrica de las palabras asociada a S .

De modo intuitivo, el cociente de grupos con respecto a un subgrupo de índice finito, es como “doblar” al grupo con respecto al subgrupo, de manera que el número de pliegues es finito. Si se piensa en \mathbb{Z} por ejemplo el cocientado con $2\mathbb{Z}$ la idea se ve así:

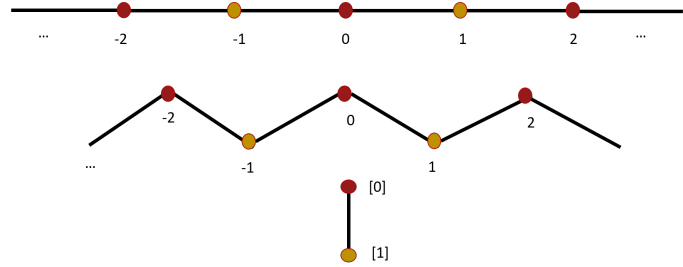


Figura 3.13: Idea del índice finito, \mathbb{Z} cocientado con $2\mathbb{Z}$.

Note que lo que queda en los pliegues (las clases de equivalencia resultado del cociente) es cuasi-denso al desdoblar. Esta idea se formaliza en el siguiente teorema. Y además nos permite relacionar el concepto de índice finito, con la cuasi-densidad que a su vez está íntimamente relacionada con las cuasi-isometrías.

Teorema 3.2.32. Si G es grupo finitamente generado. Entonces H es un subgrupo de índice finito en G , si y sólo si, H es cuasi-denso en G .

Demostración. \Rightarrow] Si G es un grupo finitamente generado por un conjunto S y H es un subgrupo de índice finito en G , entonces:

$$G/H = \{g_0H, g_1H, g_2H, \dots, g_kH\},$$

donde g_0, \dots, g_k son un conjunto de representantes para las clases laterales de dicho cociente. Como G es finitamente generado puede dotársele con la métrica de las palabras respecto a S . Luego, defínanse:

$$n_0 := \|g_0\|, n_1 := \|g_1\|, \dots, n_{k-1} := \|g_{k-1}\|, n_k := \|g_k\|,$$

y también defínase a $\mu := \max\{n_0, n_1, \dots, n_k\}$.

Dado $g \in G$, este elemento pertenece a alguna clase lateral $g_i H$ para alguna $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. De tal forma que $g = g_i h$ para algún $h \in H$. De donde se sigue que:

$$d_s(g, h) = d_s(g_i h, h) = d_s(g_i, e) = \|g_i\| = n_i \leq \mu$$

Por lo tanto, existe μ de modo que para cualesquiera $g \in G$, existe un $h \in H$ (puesto que g esta dentro de una clase lateral y se escribe de la forma $g_i h$), tal que $d_s(g, h) \leq \mu$. Lo que significa que H es cuasi-denso en G .

\Leftarrow] Si H es cuasi-denso en G , entonces existe una constante μ tal que para todo $g \in G$, existe $h \in H$ de modo que $d_s(g, h) \leq \mu$. Note que la bola $B := B(e, \mu)$ contiene una cantidad finita de elementos.

Luego, las translaciones de H respecto a B son:

$$H \cdot B = \{H \cdot b \mid b \in B\},$$

que es un conjunto finito. Para cualquier $g_0 \in G$, existe $h_0 \in H$, que cumple $d_s(g_0, h_0^{-1} g_0) \leq \mu$, equivalentemente se tiene que, $d_s(e, h_0^{-1} g_0) \leq \mu$, es decir, $g_0 \in B(g_0, h_0)$, si y sólo si $h_0^{-1} g_0 \in B$. Llámese $b_0 := h_0^{-1} g_0$ y note que:

$$H \cdot b_0 = H \cdot h_0^{-1} g_0 = H \cdot g_0.$$

Así, dado que $e \in H$, entonces $g_0 \in H \cdot g_0 = H \cdot b_0$ una B translación de H , de donde $g_0 \in H \cdot B$. Por lo que las B translaciones de H cubre a G . De lo anterior se tiene que como B es un conjunto finito, entonces el conjunto de translaciones de H respecto de B es finito (ya que tiene a los más tantas clases laterales, como elementos tiene B) e igual al conjunto de clases laterales de H en G cuyos representantes son elementos de B , por lo que H es de índice finito en G . \square

Ejemplo 3.2.33. El grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ con grafo de Cayley como en el ejemplo 3.2.16 tiene como subgrupo a $\mathbb{Z} \times [0]$ (con $Cay(\mathbb{Z} \times [0], \{(1, [0])\})$) que es cuasi-denso en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e isomorfo a \mathbb{Z} .

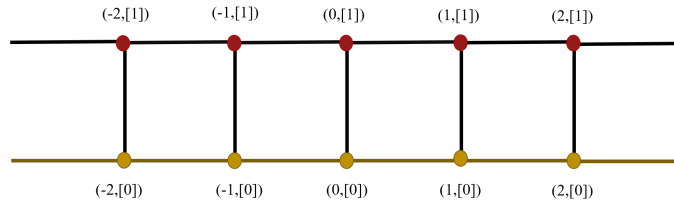


Figura 3.14: Para todo $(z, [i]) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ con $i \in \{0, 1\}$, existe $(z, [0])$ tal que $d_s((z, [i]), (z, [0])) \leq 1$

En especial, es posible preguntarse por los grupos que tienen un subgrupo de índice finito isomorfo a \mathbb{Z} , esta propiedad se definirá como:

Definición 3.2.34. Un grupo finitamente generado G , es **virtualmente \mathbb{Z}** , si contiene un subgrupo de índice finito isomorfo a \mathbb{Z} .

Todo la teoría expuesta anteriormente motiva el siguiente resultado:

Teorema 3.2.35. La rigidez cuasi-isométrica de \mathbb{Z} .

Todo grupo finitamente generado G , es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} , si y sólo si, es virtualmente \mathbb{Z} .

La rigidez cuasi-isométrica de \mathbb{Z} relaciona, ser cuasi-isométrico a \mathbb{Z} , que es una propiedad geométrica, con ser virtualmente \mathbb{Z} , que es una propiedad algebraica. De aquí en adelante se desarrollará la teoría necesaria para demostrar este teorema, y así dar respuesta a las preguntas antes planteadas.

3.3. Espacios geodésicos y cuasi-geodésicos

Para ver que, si un grupo finitamente generado es virtualmente \mathbb{Z} , entonces cuasi-isométrico a \mathbb{Z} , se demostrará el Lema de Schawrz-Milnor, para enunciarlo, es necesario definir antes espacios métricos adecuados, en particular, serán necesarios espacios conexos por caminos (salvo algún error). Con esta intención es que definiremos los espacios geodésicos y cuasi-geodésicos.

Definición 3.3.1. Sea (X, d_x) un espacio métrico y sea $L \in \mathbb{R}^+$. Un **segmento geodésico** en X es un encaje isométrico $\gamma: [0, L] \rightarrow X$, donde $[0, L]$ está dotado con la métrica euclideana. Se dirá que $\gamma(0)$ es el **punto inicial** y $\gamma(L)$ es el **punto final del segmento geodésico**.

Un espacio métrico (X, d_x) es un **espacio geodésico**, si para cualesquiera dos puntos $x, x' \in X$ existe un segmento geodésico entre ellos tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(L) = x'$.

Ejemplo 3.3.2. Para toda $n \in \mathbb{N}$ el espacio euclideo (\mathbb{R}^n, d_e) es geodésico. En efecto, para cualesquiera $x, x' \in \mathbb{R}^n$ el segmento de recta $\gamma: [0, d_e(x, x')] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido como $\gamma(t) = x(d_e(x, x') - t) + x't$ es una geodésica entre x y x' .

Y una vez más se definirá la cuasi-generalización.

Definición 3.3.3. Sean (X, d_x) un espacio métrico, $c \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Una **(c,b)-cuasi-geodésica** en X es un encaje (c,b)-cuasi-isométrico $\gamma: I \rightarrow X$, donde $I = [t, t']$ está dotado con la métrica euclideana. Se dirá que $\gamma(t)$ es el **punto inicial** y $\gamma(t')$ es el **punto final de la (c,b)-cuasi-geodésica**.

Un espacio métrico (X, d_x) es **(c,b)-cuasi-geodésico** si para cualesquiera dos puntos de él existe una (c,b)-cuasi-geodésica entre ellos.

Ejemplo 3.3.4. El espacio $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, d_e)$ no es geodésico, sin embargo es $(1, \epsilon)$ -cuasi-geodésico. Puesto que para los pares de puntos colineales con el origen no es posible formar la recta (geodésica) que los une; por lo tanto hay que “rodear” con un camino de tamaño ϵ al origen.

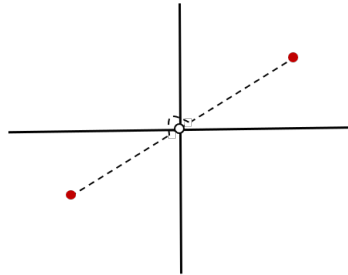


Figura 3.15: $(1, \epsilon)$ -cuasi-geodésica en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Ejemplo 3.3.5. Todo grafo de Cayley es $(1, 1)$ -cuasi-geodésico. A continuación se muestra un posible método para construir cuasi-geodésicas en dichos grafos.

Dado $Cay(G, S)$ el grafo de Cayley de G con generador S . Como el grafo éste es conexo, para cualesquiera v, v' vértices del grafo existe un camino de longitud mínima s_0, \dots, s_k tal que los une.

Defínase la función $\gamma: [0, k] \rightarrow Cay(G, S)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\gamma &: \longrightarrow \text{Cay}(G, S) \\
I_1 &:= [0, 1) \longmapsto s_0 \\
I_2 &:= [1, 2) \longmapsto s_1 \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
I_k &:= [k-1, k) \longmapsto s_{k-1} \\
I_{k+1} &:= k \longmapsto s_k
\end{aligned}$$

Si se toman dos $t, t' \in [0, k]$ cualesquiera, entonces ocurre uno de los siguientes casos:

- Si $t, t' \in I_n$ con $n \in \{0, \dots, k+1\}$, en este caso $d(t, t') < 1$ mientras que $d_s(\gamma(t), \gamma(t')) = 0$. Así:

$$d(t, t') - 1 < d_s(\gamma(t), \gamma(t')) < d(t, t') + 1.$$

- Si $t \in I_n$ y $t' \in I_m$ con $n \neq m$ y $n, m \in \{0, \dots, k+1\}$, entonces $d(t, t') < s - m$. Mientras que:

$$d_s(\gamma(t), \gamma(t')) = d_s(s_{n-1}, s_{m-1}) = d_s(e, s_{n-1}^{-1} s_{m-1}) = s - m.$$

Por lo tanto:

$$d(t, t') - 1 < d_s(\gamma(t), \gamma(t')) < d(t, t') + 1.$$

Así tenemos que γ es una $(1, 1)$ -cuasi-geodésica.

3.4. Lema de Schwarz-Milnor

El Lema de Schwarz-Milnor, también conocido como el “lema fundamental de la teoría geométrica de grupos”, recibe su nombre dado que es una poderosa herramienta que permite relacionar la geometría de los grupos, con la geometría de espacios asociándoles una topología y otras propiedades geométricas.

Dada una “buena” acción de grupo (cocompacta y propiamente discontinua), sobre un “buen” espacio (propio y geodésico), la fuerza del Lema de Schwarz-Milnor reside en que permite determinar un generador para el grupo y un conjunto de cuasi-isometrías, de modo que permite obtener tanto información algebraica de un grupo, como información geométrica de un espacio.

Este resultado ya era conocido por los matemáticos soviéticos Vadim Arsenyevich Efremovich (1903-1989) y Albert Solomonovich Schwarz (1934) desde principios de los años cincuentas, fue redescubierto por Milnor en 1968 y posteriormente Pierre de la Harpe lo llama “la observación fundamental de la teoría geométrica de grupos” en su libro “Topics in Geometric Group Theory”.

Teorema 3.4.1. Lema de Schwarz-Milnor

Sea G un grupo que actúa por isometrías en un espacio métrico (X, d) . Si existen constantes $c, b \in \mathbb{R}^+$ tales que X es un espacio (c, b) -cuasi-geodésico y existe un subconjunto $B \subset X$ con las siguientes propiedades:

- El diámetro de B es finito.
- Las G -traslaciones de B cubren a X , es decir $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$.
- El conjunto $S := \{g \in G \mid g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$ es un conjunto finito, donde:

$$B' := N_{2b}(B) = \{x \in X \mid \exists y \in B : d(x, y) \leq 2b\}.$$

Entonces se cumple que:

1. El grupo G está generado por S ; en particular G es finitamente generado.
2. Para toda $x \in X$ la función:

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es una cuasi-isometría (con respecto a la métrica de las palabras d_s en G).

Demostración. Primero, es necesario demostrar que *el conjunto S genera a G* , es decir, que para todo $g \in G$ sucede que $g \in \langle S \rangle_G$, equivalentemente que existen $s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$, tales que $g = s_1 \dots s_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Dados $g \in G$, un conjunto B como en las hipótesis y $x \in B$. Como X es (c,b)-cuasi-geodésico, existe una (c,b)-cuasi-geodésica $\gamma: [0, L] \longrightarrow X$ que empieza en x y termina en $g \cdot x$ (Figura 3.16).

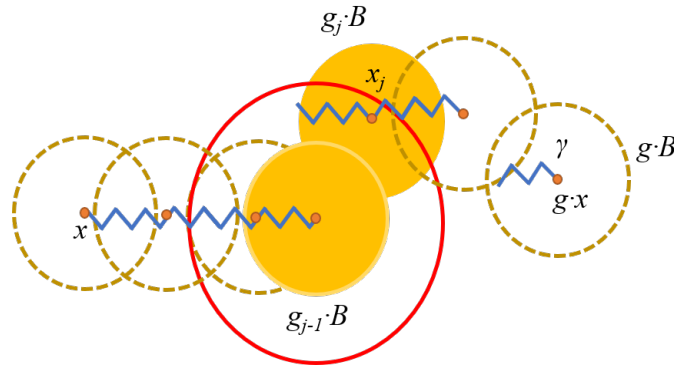


Figura 3.16: Cubierta de una geodésica por translaciones de B .

Ahora, elíjanse algunos puntos sobre la geodésica γ . Sea $n := \lceil L \cdot c/b \rceil = \min\{k \in \mathbb{N} \mid L \cdot c/b \leq k\}$. Note que para todo $j \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$\begin{aligned} j &\leq L \cdot \frac{c}{b}, \\ j \cdot \frac{b}{c} &\leq L \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}, \\ j \cdot \frac{b}{c} &\leq L. \end{aligned}$$

Luego, para cada $j \in \{0, \dots, n-1\}$ defínanse:

$$t_j := j \cdot \frac{b}{c} \quad \text{y} \quad t_n = L,$$

de modo que $t_j \in [0, L]$, y defínase también a:

$$x_j := \gamma(t_j).$$

Nótese que $x_0 := \gamma(0) = x$, que $x_n := \gamma(L) = g \cdot x$ y que para toda $j \in \{0, \dots, n-1\}$ se cumple que $x_j \in \gamma([0, L])$.

Dado que las translaciones de B cubren a X , existen elementos del grupo $g_j \in G$ tales que $x_j \in g_j \cdot B$, es decir, elementos del grupo g_j tales que la translacion de B por g_j contiene a x_j . En particular, se puede elegir a $g_0 := e$ y a $g_n := g$.

Afirmación 3.4.2. Para toda $j \in \{0, \dots, n\}$ el elemento del grupo $s_j := g_{j-1}^{-1} \cdot g_j$ está en S .

Demostración. Por la construcción anterior, para toda $j \in \{0, \dots, n\}$ se tiene que:

$$x_j := \gamma(t_j) \in \gamma([0, L]),$$

como γ es una (c,b)-cuasi-geodésica,

$$d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) \leq c \cdot |t_j - t_{j-1}| + b.$$

Además, nótese que $t_{j-1} = (j-1) \cdot \frac{b}{c}$ y $t_j = j \cdot \frac{b}{c}$, por lo que $|t_{j-1} - t_j| = \left| j \cdot \frac{b}{c} - \frac{b}{c} - j \cdot \frac{b}{c} \right| = \left| \frac{b}{c} \right| = \frac{b}{c}$.

Entonces:

$$d(x_j, x_{j-1}) = d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) \leq c \cdot |t_j - t_{j-1}| + b \leq c \cdot \frac{b}{c} + b \leq 2b,$$

$$d(x_j, x_{j-1}) \leq 2b.$$

Así, para cada $x_j \in X$ se tiene $x_{j-1} \in g_{j-1} \cdot B$ con $d(x_j, x_{j-1}) \leq 2b$, es decir, $x_j \in N_{2b}(g_{j-1} \cdot B)$.

Por otro lado, se puede observar que los conjuntos $N_{2b}(g_{j-1} \cdot B)$ y $g_{j-1} \cdot N_{2b}(B)$ son iguales.

En efecto, si $x' \in N_{2b}(g_{j-1} \cdot B)$, de manera equivalente existe $y' \in g_{j-1}B$ tal que:

$$d(x', y') \leq 2b,$$

esto, si y sólo si, existe $y \in B$ tal que $y' = g_{j-1}y$ de modo que:

$$d(x', y') = d(x', g_{j-1} \cdot y) \leq 2b,$$

si y sólo si, existen $x \in X$ y $y \in B$ de la forma $x' = g_{j-1}x$, $y' = g_{j-1}y$ tales que:

$$d(g_{j-1}x, g_{j-1} \cdot y) \leq 2b,$$

que equivale a que existan $x \in X$, $y \in B$ tal que $y' = g_{j-1}y$ de forma que :

$$d(x, y) \leq 2b,$$

que es justo que $x' \in g_{j-1} \cdot N_{2b}(B)$.

Por lo tanto $x_j \in N_{2b}(g_{j-1} \cdot B) = g_{j-1} \cdot N_{2b}(B) = g_{j-1} \cdot B'$. Ahora, como por definición de g_j se tiene que $x_j \in g_j \cdot B \subset g_j \cdot B'$, entonces:

$$x_j \in g_{j-1} \cdot B' \cap g_j \cdot B' \neq \emptyset,$$

de donde multiplicando por g_{j-1}^{-1} se obtiene que:

$$g_{j-1}^{-1}x_j \in B' \cap g_{j-1}^{-1}g_j \cdot B' \neq \emptyset.$$

Entonces, por definición de S se sigue que $s_j = g_{j-1}^{-1} \cdot g_j \in S$. □

En particular (dado que se eligió una $g \in G$ cualquiera):

$$\begin{aligned} g &= g_n = g_{n-1} \cdot g_{n-1}^{-1} \cdot g_n = g_{n-1} \cdot s_n = g_{n-2} \cdot g_{n-2}^{-1} \cdot g_{n-1} \cdot s_n = g_{n-2} \cdot s_{n-1} \cdot s_n \\ &= g_{n-3} \cdot g_{n-3}^{-1} \cdot g_{n-2} \cdot s_{n-1} \cdot s_n = g_{n-3} \cdot s_{n-2} \cdot s_{n-1} \cdot s_n = \cdots = g_0 \cdot s_1 \cdots s_n = s_1 \cdots s_n, \end{aligned}$$

está en el grupo generado por S . Por lo tanto S genera a G .

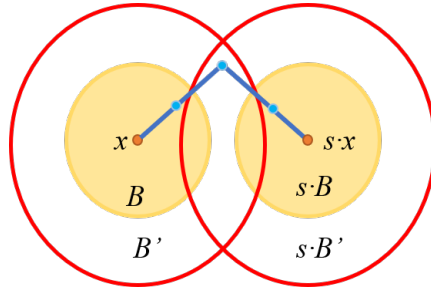


Figura 3.17: Si $s \in S$, entonces $d(x, s \cdot x) \leq 2 \cdot (\text{diam}(B) + 2b)$

A continuación, se demuestra que *el grupo G es cuasi-isométrico a X* .

Sea $x \in X$. Para demostrar que la función:

$$\begin{aligned} \varphi: G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es una cuasi-isometría, basta ver que es un encaje cuasi-isométrico con imagen cuasi-densa.

Dado que las G -translaciones de B cubren a X , para cualquier x arbitraria se puede encontrar un conjunto de diámetro finito de la forma $g' \cdot B$ y renombrarlo como B_0 , encontrar una (c,b) -cuasi-geodésica de x a $g \cdot x$ y realizar la misma construcción anterior con respecto a B_0 . Por lo que sin pérdida de generalidad se puede asumir que x está en B y remitirse a la situación anterior.

Para facilitar la lectura, se recuerda que φ tiene imagen cuasi-densa, si existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que para toda $x' \in X$ se cumple que hay un $g \in G$, de modo que $d(\varphi(g), x') \leq k$.

Dado $x' \in X$ y que las translaciones de B cubren a X , existe un $g \in G$ tal que $x' \in g \cdot B$. Como $x \in B$ (lo que implica que $g \cdot x \in g \cdot B$) entonces:

$$d(\varphi(g), x') = d(g \cdot x, x') \leq \text{diam}(g \cdot B) = \text{diam}(B).$$

De las hipótesis el diámetro de B es finito, por lo tanto φ tiene imagen cuasi-densa.

Ahora, véase que φ es un encaje cuasi-isométrico, es decir, existen $p, q \in \mathbb{R}^+$ tales que para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$ se cumple que:

$$\frac{1}{p} \cdot d_s(g_1, g_2) - q \leq d(\varphi(g_1), \varphi(g_2)) \leq p \cdot d_s(g_1, g_2) + q.$$

Pero como G está dotado con la métrica de las palabras y actúa por isometrías en X para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$, entonces $d_s(e, g_1^{-1}g_2) = d_s(g_1, g_2)$ y además:

$$d(\varphi(e), \varphi(g_1^{-1}g_2)) = d(e \cdot x, g_1^{-1}g_2 \cdot x) = d(g_1 \cdot x, g_1g_1^{-1}g_2 \cdot x) = d(g_1 \cdot x, g_2 \cdot x) = d(\varphi(g_1), \varphi(g_2)),$$

de modo que es suficiente ver que existen $p, q \in \mathbb{R}^+$ tales que para toda $g \in G$ sucede que:

$$\frac{1}{p} \cdot d_s(e, g) - q \leq d(\varphi(e), \varphi(g)) \leq p \cdot d_s(e, g) + q$$

Dado $g \in G$ se puede dar una cota inferior para $d(\varphi(e), \varphi(g))$ en terminos de $d_s(e, g)$:
Considérese a $\gamma: [0, L] \rightarrow X$ una (c,b)-cuasi-isometría que comienza en $\gamma(0) = x$ y termina en $\gamma(L) = g \cdot x$ como anteriormente, así:

$$d(\varphi(e), \varphi(g)) = d(x, g \cdot x) = d(\gamma(0), \gamma(L)).$$

Como γ es un encaje (c,b)-cuasi-isométrico:

$$d(\gamma(0), \gamma(L)) \geq \frac{1}{c} \cdot d(0, L) - b = \frac{1}{c} \cdot L - b,$$

obsérvese que:

$$t_n = L \geq (n-1) \cdot \frac{b}{c} = t_{n-1},$$

entonces:

$$\begin{aligned} d(\varphi(e), \varphi(g)) &= d(x, g \cdot x) = d(\gamma(0), \gamma(L)) \geq \frac{1}{c} \cdot L - b, \\ &\geq \frac{1}{c} \cdot (n-1) \cdot \frac{b}{c} - b, \\ &= \frac{b \cdot n}{c^2} - \frac{b}{c^2} - b, \\ &\geq \frac{b}{c^2} \cdot d_S(e, g) - \frac{b}{c^2} - b, \end{aligned}$$

Por otro lado, para obtener una cota superior para $d(\varphi(e), \varphi(g))$ en terminos de $d_S(e, g)$. Supóngase que $d_S(e, g) = n$, entonces g puede escribirse en terminos de elementos de $S \cup S^{-1}$ como $g = s_1s_2 \cdots s_n$, así:

$$\begin{aligned} d(\varphi(e), \varphi(g)) &= d(x, g \cdot x) = d(x, s_1s_2 \cdots s_n \cdot x), \quad \text{luego por la desigualdad del triángulo} \\ &\leq d(x, s_1 \cdot x) + d(x, s_1s_2 \cdots s_n \cdot x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq d(x, s_1 \cdot x) + d(s_1 \cdot x, s_1 s_2 \cdot x) + d(s_1 s_2 \cdot x, s_1 s_2 \cdots s_n \cdot x), \\ &\leq d(x, s_1 \cdot x) + d(s_1 \cdot x, s_1 s_2 \cdot x) + \cdots + d(s_1 \cdots s_{n-1} \cdot x, s_1 \cdots s_n \cdot x), \end{aligned}$$

Como la acción de G es por isometrías y además para toda $j \in \{1, \dots, n-1\}$, se tiene que $s_j \cdot B' \cap B' \neq \emptyset$ (Figura 3.17):

$$\begin{aligned} d(\varphi(e), \varphi(g)) &= d(x, s_1 \cdot x) + d(s_1 \cdot x, s_1 s_2 \cdot x) + \cdots + d(s_1 \cdots s_{n-1} \cdot x, s_1 \cdots s_n \cdot x), \\ &= d(x, s_1 \cdot x) + d(x, s_2 \cdot x) + \cdots + d(x, s_1, s_n \cdot x), \\ &\leq 2n \cdot (\text{diam}(B) + 2b) \\ &= 2 \cdot (\text{diam}(B) + 2b) \cdot d_S(e, g) \end{aligned}$$

Por lo tanto, existen $p = \max\{2 \cdot (\text{diam}(B) + 2b), \frac{b}{c^2}\}$ y $q = b + \frac{b}{c^2}$ tales que φ es un encaje cuasi-isométrico. □

A continuación se enuncia una versión topológica del Lema de Schwarz-Milnor, cuya demostración se ve simplificada por la versión anterior.

Teorema 3.4.3. Versión topológica del Lema de Schwarz-Milnor

Sea G un grupo que actúa por isometrías en un espacio métrico (X, d) propio, geodésico y no vacío. Más aún supóngase que la acción de G es propia y cocompacta. Entonces G es finitamente generado y para toda $x \in X$ la función:

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es una cuasi-isometría.

Demostración. Para utilizar el Lema de Schwarz-Milnor en su versión anterior nótese que X es un espacio geodésico, en particular es cuasi-geodésico.

Como la acción de G en X es cocompacta, existe un conjunto compacto K tal que:

$$G \cdot K := \bigcup_{g \in G} g \cdot K = X.$$

Especialmente, dado que X es un espacio métrico K es acotado y por tanto de diámetro finito. Si se define $B := K$, entonces las translaciones de B cubren a X , y $B' := N_{2b(B)}$ tiene diámetro finito. Como X es propio toda bola cerrada es compacta en particular B' es compacto, luego como la acción de en G es propia el conjunto $\{g \in G | g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$ es finito. Así basta con aplicar la primera versión del Lema de Schwarz-Milnor para obtener que G es finitamente generado por $S := \{g \in G | g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$ y

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es una cuasi-isometría. □

3.5. Virtualmente \mathbb{Z} entonces cuasi-isométrico a \mathbb{Z}

Un corolario del Lema de Schwarz-Milnor es el siguiente.

Corolario 3.5.1. Si H es un subgrupo de índice finito en G un grupo finitamente generado, entonces H es finitamente generado y cuasi-isométrico a G .

Demostración. Sea G un grupo finitamente generado por S y sea H un subgrupo de índice finito en G . Note que $\text{Cay}(G, S)$ es $(1, 1)$ -cuasi-geodésico. Ahora considérese la acción por translación izquierda de H en G que es un acción por isometrías; de modo que se puede demostrar que satisfacen las condiciones del Lema de Schwarz-Milnor. Sea B el conjunto conformado por un sistema de representantes del cociente G/H , éste es finito (dado que H es de índice finito en G) y por tanto de diámetro finito. Luego se tiene que $H \cdot B = G$ y podemos definir el conjunto $B' = N_2(B)$, el cual también es finito. A continuación, nótese que $\{h \in H \mid h \cdot B' \cap B' \neq \emptyset\}$ es finito puesto que la acción de H en G libre y éste está determinado por un número finito de intersecciones de conjuntos finitos. Entonces H es finitamente generado y la inclusión $H \hookrightarrow G$ es una cuasi-isometría. \square

En particular si G es un grupo finitamente generado y H es un subgrupo de índice finito en G isomorfo a \mathbb{Z} , entonces G es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} , y por lo tanto se tiene el subsiguiente teorema.

Teorema 3.5.2. Si G un grupo finitamente generado es virtualmente \mathbb{Z} , entonces es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} .

Capítulo 4

Espacio de fines

4.1. Introducción

La idea intuitiva detrás de las cuasi-isometrías, en el sentido de la geometría a gran escala, consiste en reconocer objetos geométricos que vistos desde suficientemente lejos se ven igual. Especialmente, se han estudiado objetos cuasi-isométricos a \mathbb{Z} , que intuitivamente al ser vistos suficientemente lejos se ven como una línea. Ahora, para demostrar que; si un grupo finitamente generado es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} , entonces es virtualmente \mathbb{Z} , se necesita un puente que permita llevar las cuasi-isometrías a un lugar donde se les pueda relacionar con estructuras de grupos. Este puente será el espacio de fines, concepto que captura y formaliza la idea de las “direcciones para ir al infinito”, por ejemplo en una línea, se puede caminar infinitamente yendo siempre a la derecha o yendo siempre a la izquierda, por lo que hay dos “rumbos” para ir al infinito.

El espacio de fines permite asociar, a un espacio métrico, un espacios topológicos, de tal manera que todos los objetos cuasi-isométricos pertenecientes a un espacio métrico tengan espacios de fines asociados homeomorfos. En especial, se verá que los objetos cuasi-isométricos a \mathbb{Z} tienen dos fines, lo que será de gran ayuda para demostrar la implicación que resta de la rigidez cuasi-isométrica de \mathbb{Z} .

4.2. Espacio de fines

Para definir el espacio de fines asociado a un espacio métrico, es esencial definir clases de equivalencia de rayos que van al infinito.

Definición 4.2.1. Dado (X, d) un espacio métrico geodésico. Un **rayo propio** en X es una función continua $r: [0, \infty) \rightarrow X$ tal que para cualquier $B \subset X$ acotado la preimagen $r^{-1}(B) \subset [0, \infty)$ es un conjunto acotado.

Definición 4.2.2. Dados dos rayos propios $r, r': [0, \infty) \rightarrow X$, estos **representan el mismo fin** de X si para todo conjunto acotado $B \subset X$ existe un $t \in [0, \infty)$ tal que $r([t, \infty))$ y $r'([t, \infty))$ están en la misma componente conexa por caminos de $X \setminus B$.

Proposición 4.2.3. Representar el mismo fin es una relación de equivalencia.

Definición 4.2.4. Si r es un rayo propio, entonces $end(r)$ denotará **el conjunto de todos los rayos propios que representan el mismo fin** que r .

Se llamará **espacio de fines** al conjunto:

$$Ends(X) := \{end(r) : r: [0, \infty) \rightarrow X \text{ es un rayo propio en } X.\}$$

Subsiguientemente se exhiben algunos ejemplos de espacios de con uno, dos o una infinidad de fines.

Ejemplo 4.2.5. Si $r: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $r': [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ son dos rayos propios cualesquiera. Para todo B un subconjunto acotado de \mathbb{R}^3 , se tiene que existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $r^{-1}(B) \subset [0, t_1]$ y $r'^{-1}(B) \subset [0, t_2]$. Si $k = \max\{t_1, t_2\}$, entonces $r(t, \infty)$ y $r'(t, \infty)$ están en la misma componente conexa por caminos de $\mathbb{R}^3 \setminus B$. Por consiguiente, r y r' representan el mismo fin, de modo que \mathbb{R}^3 tiene un único fin. (Figura 4.1).

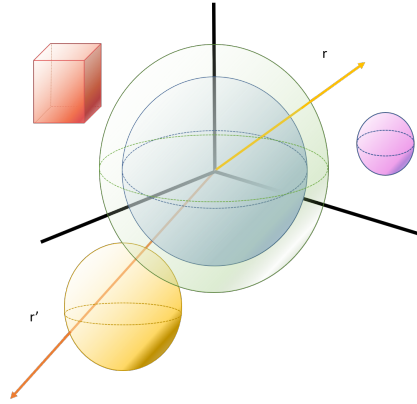


Figura 4.1: Para cualquier compacto en \mathbb{R}^3 existe un punto apartir del cual los rayos r y r' , están en la misma componente conexa por caminos de \mathbb{R}^3 sin dicho compacto.

En general para cualquier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, el espacio euclideo \mathbb{R}^n tiene un único fin.

Ejemplo 4.2.6. En las siguientes figuras se indican los fines del espacio con circulos rojos, los fines de \mathbb{R} que son dos.



Figura 4.2: $Ends(\mathbb{R})$

Mientras que los fines de $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ son cuatro.

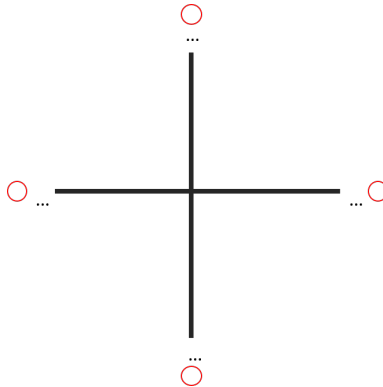


Figura 4.3: $Ends(\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R})$

Como ya se vió anteriormente, a todo grupo finitamente generado se le puede asociar un grafo de Cayley que es un espacio métrico, por lo que tiene sentido definir el espacio de fines de un grupo, como el espacio de fines de su grafo de Cayley dotado de la métrica de grafos usual, que coincide con la métrica de las palabras del grupo para algún conjunto generador.

De aquí en adelante $Cay(G, S)$ denotará no al grafo de Cayley de G respecto a S , sino a la realización geométrica del grafo mismo, que es un espacio métrico propio y geodésico. La construcción de dichas realizaciones puede consultar de en [8] pág.157-160.

Definición 4.2.7. Si G es un grupo finitamente generado. El **espacio $Ends(G)$ de fines un grupo G** , (o bien los **fines del grupo G**), se define como $Ends(Cay(G, S))$, donde S es algún subconjunto generador de G .

Ejemplo 4.2.8. El grupo \mathbb{Z} tiene dos fines.

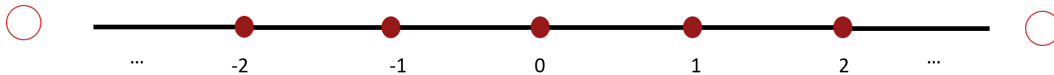


Figura 4.4: El grupo \mathbb{Z} tiene dos fines.

Ejemplo 4.2.9. El grupo F_2 tiene una infinidad de fines.

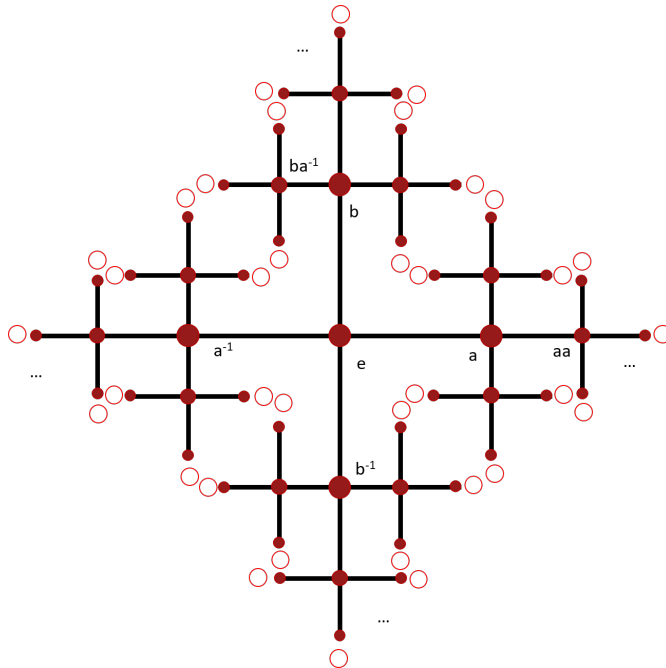


Figura 4.5: El grupo F_2 tiene una infinidad de fines.

Obsérvese que si G es un grupo finitamente generado y finito, entonces su grafo de Cayley tiene una cantidad finita de vértices, y resulta imposible construir rayos propios en éste, por lo que el espacio de fines de un grupo finito es vacío, es decir, un grupo finito tiene cero fines.

A los espacios de fines se los dota de una topología, en terminos de convergencia, definiendo cuando una sucesión de fines en un espacio X converge a un punto de en $Ends(X)$. Dada $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Ends(X)$ y $x \in Ends(x)$, se dirá que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge a** x , si existen una colección de rayos propios $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y un rayo propio r en X que presentan a $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Ends(X)$ y $x \in Ends(x)$ respectivamente tales que: Para todo $B \subset X$ acotado, existe $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [0, \infty)$ tal que para cada n suficientemente grande $r_n[t_n, \infty)$ y $r[t_n, \infty)$ están en la misma componente conexa por caminos de $X \setminus B$. El siguiente lema da información acerca de estos espacios. Primero se da una equivalencia para cuando dos rayos representan el mismo fin, luego se exhibe que toda clase de equivalencia de rayos tiene representante geodésico en el conjunto de rayos que emanan de un punto fijo, y finalmente se muestra un sistema fundamental de vecindades para los espacios de fines.

Definición 4.2.10. Sea (X, d) un espacio métrico, un k -camino que conecta dos puntos x y x' es una sucesión finita de puntos $x = x_1, x_2, \dots, x_n = x'$ en X tales que $d(x_i, x_{i-1}) \leq k$ para $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Lema 4.2.11. Sea X un espacio propio y geodésico; y $k \in \mathbb{R}^+$. Además sean r_1 y r_2 dos rayos propios en X . Si el conjunto $\mathcal{G}_{x_0}(X)$ denota todos los rayos geodésicos que emanan de $x_0 \in X$, entonces:

- 1) $end(r_1) = end(r_2)$, si y sólo si, para toda $R > 0$, existe $T > 0$ tal que para todo $t > T$, $r_1(t)$ puede conectarse por un k -camino con $r_2(t)$ en $X \setminus B(x_0, R)$.
- 2) El morfismo natural $\mathcal{G}_{x_0}(X) \rightarrow Ends(X)$ es sobreyectivo.
- 3) Para $n \in \mathbb{N}$ fija pero arbitraria, y $r \in \mathcal{G}_{x_0}(X)$ un rayo cualquiera. Si $\widetilde{V}_n \subset \mathcal{G}_{x_0}(X)$ es el conjunto de rayos propios r' tales que $r(n, \infty)$ y $r'(n, \infty)$ están en la misma componente conexa por caminos de $X \setminus B(x_0, n)$. Entonces los conjuntos $V_n = \{end(r') \mid r' \in \widetilde{V}_n\}$ forma un sistema fundamental de vecindades para $end(r)$ en $Ends(X)$.

Demostración. 1) \Rightarrow] Sean r_1 y r_2 dos rayos propios en X tales que $end(r_1) = end(r_2)$ y sea $R > 0$. Considérese la cerradura de la bola $B(x_0, R)$ que es un compacto dado que X es propio. De donde se sigue que existe $T \in [0, \infty)$ tal que $r_1[T, \infty)$ y $r_2[T, \infty)$ están en la misma componente conexa por caminos de $X \setminus B(x_0, R)$, más aún están en la misma componente conexa por caminos de $X \setminus B(x_0, R)$. Por lo que para toda $t > T$ se tiene que $r_1(t)$ y $r_2(t)$ están en la misma componente conexa por caminos de $X \setminus B(x_0, R)$.

Así, existe un camino $\lambda : [0, a] \rightarrow X$ con $a \in \mathbb{R}^+$ determinado por una función continua, entonces dado que $[0, a]$ es un conjunto compacto y λ continua, $\lambda[0, a]$ es un subconjunto compacto de X . Esto implica, que existe una cubierta abierta finita de cardinalidad k para $\lambda[0, a]$ de bolas de radio $k/2$ con centro en puntos de $\lambda[0, a]$, tales que $B(\lambda(0), k/2)$ y $B(\lambda(1), k/2)$ pertenecen a la cubierta. Luego, defínase a x_i con $i \in \{1, \dots, k\}$ los centros de dichas bolas, estos forman un k -camino, que une $\lambda(0)$ y $\lambda(a)$ en $X \setminus B(x_0, R)$.

1) \Leftarrow] En la siguiente demostración se usa la contrarrecíproco. Sea $k \in \mathbb{R}^+$ fijo como en las hipótesis y sean r_1 y r_2 dos rayos propios en X tales que $end(r_1) \neq end(r_2)$, entonces existe $A \subset X$ acotado de manera que para algún $t' \in [0, \infty)$, se tiene que $r_1(t', \infty)$ y $r_2(t', \infty)$ están en diferentes componentes conexas por caminos de $X \setminus A$, por lo que A separa en componentes conexas por caminos a X . Luego, defínase a $B(x_0, R)$ tal que $A \subset B(x_0, R)$ con $R > 2k$, entonces para algún $T \in [t', \infty)$ se cumple que $r_1(T, \infty)$ y $r_2(T, \infty)$ están en componentes conexas por caminos distintas de $X \setminus B(x_0, R)$. Note que $B(x_0, R)$ también separa en componentes conexas por caminos a X , de manera que para cualesquiera dos puntos x_1, x_2 que se encuentran en las mismas componentes conexas por caminos que $r_1(T, \infty)$ y $r_2(T, \infty)$ respectivamente, se tiene que:

$$d(x_1, x_2) \geq 4k$$

En consecuencia, para todo $t > T$ es imposible construir un k -camino que una a $r_1(t)$ con $r_2(t)$, puesto que siempre existen dos puntos en $X \setminus B(x_0, R)$ a distancia mayor que k .

2) Llámese η al morfismo natural:

$$\begin{aligned} \eta: \mathcal{G}_{x_0}(X) &\longrightarrow \text{Ends}(X) \\ r &\longmapsto \text{end}(r) \end{aligned}$$

Sea $\text{end}(r) \in \text{Ends}(X)$, a continuación se va a construir un rayo propio que emana de x_0 y cuyo fin coincide con $\text{end}(r)$. Dado $r: [0, \infty) \rightarrow X$ un representante de clase de rayos propios $\text{end}(r)$. Defínase como $c'_n: [0, d_n] \rightarrow X$ a los segmentos geodésicos cuyo punto inicial es $c'_n(0) = x_0$ y cuyo punto final es $c'_n(d_n) = r(d_n)$. A continuación considérese la extensión de estos segmentos $c_n(t): [0, \infty) \rightarrow X$ de manera constante, es decir:

$$c_n(t) = \begin{cases} c'_n(t) & \text{si } t \in [0, d_n] \\ c'_n(d_n) & \text{si } t \in (d_n, \infty) \end{cases} \quad (4.1)$$

Como X es propio, por el teorema de Arzelà-Ascoli, se tiene que existe una subsucesión de c_n tal que converge a un rayo geodésico $c: [0, \infty) \rightarrow X$ de modo que $\text{end}(c) = \text{end}(r)$. Entonces, para cualquier $\text{end}(r) \in \text{Ends}(X)$, existe un rayo geodésico (propio) c tal que $\eta(c) = \text{end}(c) = \text{end}(r)$. Por lo tanto η es suprayectiva.

3) Toda base para una topología es un sistema fundamental de vecindades, por lo que es suficiente con demostrar que:

- Para todo $\text{end}(r') \in \text{Ends}(X)$, existe V_n tal que $\text{end}(r') \in V_n$.
- Para cualesquiera V_{n_1}, V_{n_2} y para todo $\text{end}(r) \in V_{n_1} \cap V_{n_2}$, existe V_{n_0} tal que $\text{end}(r) \in V_{n_0} \subseteq V_{n_1} \cap V_{n_2}$.

Dado $\text{end}(r') \in \text{Ends}(X)$ por 2) existe un rayo propio r que emana de x_0 tal que $\text{end}(r') = \text{end}(r)$. Por definición, existe alguna $n \in \mathbb{N}$, a partir del cual $r'(n, \infty)$ y $r(n, \infty)$ están en la misma componente conexa por caminos de $X \setminus B(x_0, n)$, de forma que r' y r son elementos de:

$$\widetilde{V}_n = \{r' \mid r'(n, \infty) \text{ y } r(n, \infty) \text{ están en la misma componente conexa por caminos de } X \setminus B(x_0, n)\}.$$

Y por consiguiente, se cumple que $\text{end}(r') \in V_n = \{\text{end}(r') \mid r' \in \widetilde{V}_n\}$.

Por otro lado, dados V_{n_1}, V_{n_2} por definición existen dos rayos propios r_1 y r_2 que emanan de x_0 de modo que:

$$\widetilde{V}_{n_1} = \{r' \mid r_1(n, \infty) \text{ y } r'(n, \infty) \text{ están en la misma componente conexa por caminos de } X \setminus B(x_0, n)\}$$

$$\widetilde{V}_{n_2} = \{r' \mid r_2(n, \infty) \text{ y } r'(n, \infty) \text{ están en la misma componente conexa por caminos de } X \setminus B(x_0, n)\}$$

Por consiguiente se tienen dos casos.

1) Si $r_1(n, \infty)$ y $r_2(n, \infty)$ están en la misma componente conexa por caminos de $X \setminus B(x_0, n)$, entonces:

$$\widetilde{V}_{n_1} \cap \widetilde{V}_{n_2} = \widetilde{V}_{n_1} = \widetilde{V}_{n_2},$$

y esto implica que:

$$V_{n_1} \cap V_{n_2} = V_{n_1} = V_{n_2},$$

- 2) Si $r_1(n, \infty)$ y $r_2(n, \infty)$ están en componentes conexas por caminos de $X \setminus B(x_0, n)$ distintas, por consiguiente:

$$\widetilde{V}_{n_1} \cap \widetilde{V}_{n_2} = \emptyset,$$

por lo que:

$$V_{n_1} \cap V_{n_2} = \emptyset.$$

De lo anterior, se tiene que para todo $end(r) \in V_{n_1} \cap V_{n_2}$, existe V_{n_1} tal que $end(r) \in V_{n_1} = V_{n_1} \cap V_{n_2}$. \square

Ejemplo 4.2.12. Considérese a $\mathcal{C} := Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$. Posteriormente elíjanse $n = 1$, $x_0 := 0$ y $r_0: (0, \infty] \rightarrow \mathbb{Z}$ un rayo geodésico con punto inicial 0. Si r_i con $i \in \mathbb{Z}$ son rayos propios geodésicos que emanan de i y que cumplen que $end(r_i) = end(r_0)$, y además, r'_i son rayos propios geodésicos que emanan de i y que cumplen que $end(r'_i) \neq end(r_0)$, entonces:

$$\widetilde{V}_1 = \{r' \mid r_0(1, \infty) \text{ y } r'(1, \infty) \text{ están en la misma componente conexa por caminos de } \mathcal{C} \setminus B(0, 1)\},$$

por lo que $\{r' \mid r' = r_i, i \geq 1\} \subset \widetilde{V}_1$. En la figura 4.6 r_1, r_2 (los rayos verdes) pertenecen a \widetilde{V}_1 . Mientras que los rayos azules no pertenecen a dicho conjunto.

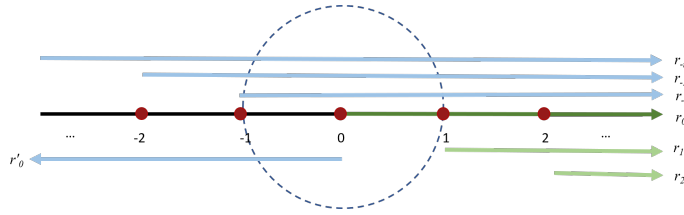


Figura 4.6: Los rayos r_0, r_1, r_2 (verdes) pertenecen a \widetilde{V}_1 , y $r_{-1}, r_{-2}, r_{-n}, r'_0$ (azules) no pertenecen a \widetilde{V}_1 .

Por consiguiente:

$$V_1 = \{end(r') \mid r' \in \widetilde{V}_1\} = \{end(r_0)\}.$$

Ejemplo 4.2.13. Sea F_2 el grupo libremente generado por dos elementos y $\mathcal{C} := Cay(F_2, \{a, b\})$. Si $n = 1$ y r_1 es un rayo propio geodésico que emana de $x_0 := e$, entonces:

$$\widetilde{V}_1 = \{r' \mid r_1(1, \infty) \text{ y } r'(1, \infty) \text{ están en la misma componente conexa por caminos de } \mathcal{C} \setminus B(x_0, 1)\}.$$

En la figura 4.7 este conjunto son todos los rayos verdes. Luego, el conjunto:

$$V_1 = \{end(r') \mid r' \in \widetilde{V}_1\} = \{e_0, e_1, \dots\},$$

es el conjunto de fines de cada uno de los rayos verdes (Figura 4.7).

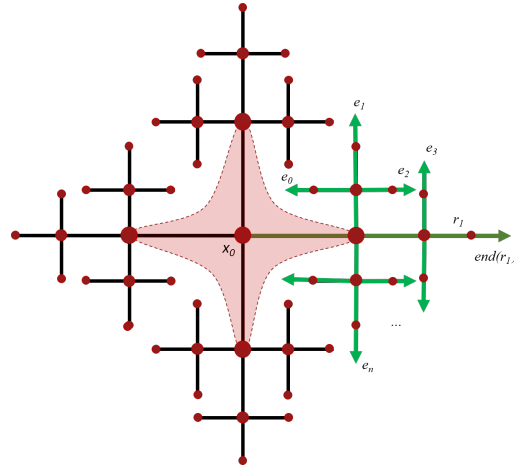


Figura 4.7: Conjunto V_1

Ahora bien, si $n = 2$, y los rayos propios r_1, r_2 son tales que $r_1(2, \infty)$ y $r_2(2, \infty)$ están componentes conexas por caminos distintos de $X \setminus B(x_0, 2)$. El conjunto \widetilde{V}_{2_1} será el conjunto de rayos verdes en la figura 4.8, definido como:

$$\widetilde{V}_{2_1} = \{r' \mid r_1(2, \infty) \text{ y } r'(2, \infty) \text{ están en la misma componente conexa por caminos de } \mathcal{C} \setminus B(x_0, 2)\}.$$

Y \widetilde{V}_{2_2} será el conjunto de rayos rosas, dicho conjunto es:

$$\widetilde{V}_{2_2} = \{r' \mid r_2(2, \infty) \text{ y } r'(2, \infty) \text{ están en la misma componente conexa por caminos de } \mathcal{C} \setminus B(x_0, 2)\}.$$

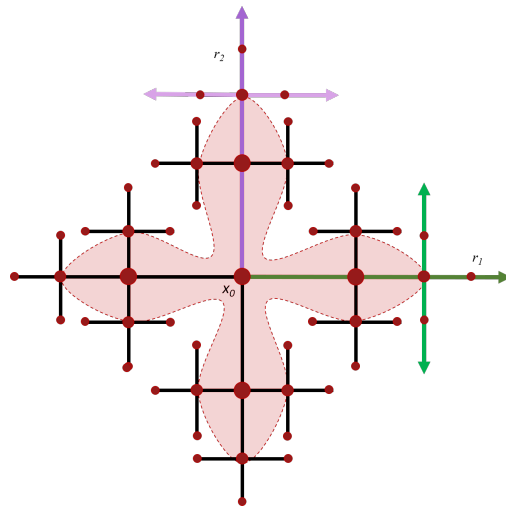


Figura 4.8: Conjunto \widetilde{V}_{2_1} y \widetilde{V}_{2_2}

Obsérvese que si $r_1(2, \infty)$ y $r_2(2, \infty)$ están componentes conexas por caminos distintos de $X \setminus B(x_0, 2)$, entonces $V_{2_1} \cap V_{2_2}$ es vacía.

La siguiente proposición relaciona la distancia finita con los rayos propios.

Proposición 4.2.14. Sea X es un espacio propio y geodésico. Si dos rayos propios r y r' están a distancia finita, entonces $end(r) = end(r')$.

Demostración. Sea x_0 un punto arbitrario pero fijo de X . Si r y r' están a distancia finita, entonces existe $\kappa \in \mathbb{R}^+$, tal que para todo $t \in [0, \infty)$:

$$d(r(t), r'(t)) < \kappa,$$

en particular la distancia entre $r(0)$ y $r'(0)$ es menor que κ . Luego, dado un $R \in \mathbb{R}^+$ cualquiera, defínase:

$$\lambda = \max\{d(r(0), B(x_0, R)), d(r'(0), B(x_0, R))\}.$$

Ulteriormente, si $T = \kappa + \lambda + 2R$, entonces para toda $t > T$, la distancia entre $r(t)$ y $r'(t)$ es menor que κ , por tanto existe un k' -camino, $r(t) = x_1, \dots, x_{k'} = r'(t)$ con $k' < k$. Este k' -camino es tal que $\{x_1, \dots, x_{k'}\} \cap B(x_0, R) = \emptyset$, por tanto $r(t)$ y $r'(t)$ están en la misma componente conexa por caminos de $X \setminus B(x_0, R)$. De donde finalmente se tiene que $end(r) = end(r')$. \square

A continuación, se demuestra que toda cuasi-isometría induce un homeomorfismo en el espacio de fines de un espacio métrico, es decir, existe un funtor entre la categoría QMet y Ends la categoría de espacios de fines, de tal manera que este funtor manda cuasi-isometrías en homeomorfismos de espacios de fines.

Proposición 4.2.15. Si X_1 y X_2 son dos espacios propios y geodésicos, toda cuasi-isometría $f: X_1 \rightarrow X_2$ induce un homeomorfismo $f_\epsilon: Ends(X_1) \rightarrow Ends(X_2)$.

Más aún, el morfismo:

$$QI(X_1) \rightarrow Homeo(Ends(X_1))$$

$$f \mapsto f_\epsilon$$

es un homomorfismo.

Demostración. Sean $f: X_1 \rightarrow X_2$ una cuasi-isometría y $r: [0, \infty] \rightarrow X_1$ tal que $r(0) = x_0$ un rayo geodésico. Es posible construir un rayo $f_*(r): [0, \infty] \rightarrow X_2$ concatenando segmentos $[f \circ r(n), f \circ r(n+1)]$ tales que $n \in \mathbb{N}$.

Si se toma a $r(1)$ y $r(2)$, dado que r es un rayo geodésico $d(1, 2) = d(r(1), r(2))$ y como f es una cuasi-isometría existen $c, b \in \mathbb{R}^+$ tales que:

$$\frac{1}{c} \cdot d(r(1), r(2)) - b \leq d(f \circ r(1), f \circ r(2)) \leq c \cdot d(r(1), r(2)) + b.$$

De manera análoga, para $r(2)$ y $r(3)$ se tiene que $d(2, 3) = d(r(2), r(3))$ y:

$$\frac{1}{c} \cdot d(r(2), r(3)) - b \leq d(f \circ r(2), f \circ r(3)) \leq c \cdot d(r(2), r(3)) + b$$

Como X_2 es geodésico existen $\lambda_1: [a_1, b_1] \rightarrow X_2$ tal que $\lambda_1(a_1) = f \circ r(1)$ y $\lambda_1(b_1) = f \circ r(2)$ y también $\lambda_2: [a_2, b_2] \rightarrow X_2$, tal que: $\lambda_2(a_2) = f \circ r(2)$ y $\lambda_2(b_2) = f \circ r(3)$ es posible concatenar estos segmentos y obtener $\gamma_1: [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow X_2$ donde:

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \lambda_1(t) & \text{si } t \in [a_1, b_1] \\ \lambda_2(t - a_2 - b_1) & \text{si } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases} \quad (4.2)$$

Análogamente es posible concatenar λ_3 con γ_1 . Así de manera inductiva hasta obtener el rayo $f_*(r): [0, \infty) \rightarrow X_2$, la concatenación de los segmentos $[f \circ r(n), f \circ r(n+1)]$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

A continuación se demostrará que $f_*(r)$ es un rayo propio. Sea B un subconjunto acotado de X_2 , entonces:

$$r^{-1}f^{-1}(B) = r^{-1}\{x \in X_1 \mid f(x) \in B\}.$$

En virtud de que B es acotado existe $M \in \mathbb{R}^+$, tal que para cualesquiera $b, b' \in B$ sucede que $d(b, b') \leq M$ y dado que f es una cuasi-isometría, para cualesquiera $x, x' \in X_1$:

$$\frac{1}{c} \cdot d(x, x') - b \leq d(f(x), f(x')) \leq c \cdot d(x, x') + b,$$

entonces para toda $x, x' \in f_*^{-1}(B)$:

$$\frac{1}{c} \cdot d(x, x') - b \leq d(b, f(b')) \leq M,$$

$$d(x, x') \leq c \cdot d(b, f(b')) + cb \leq c \cdot (M + b) = K.$$

Por lo tanto $f_*^{-1}(B)$ es acotado. Luego, como r es un rayo propio, entonces el conjunto dado como $r^{-1}f_*^{-1}(B) = \{t \in [0, \infty) \mid r(t) \in f_*^{-1}(B)\}$ es acotado. Más aún, dado que $f_*r: [0, \infty) \rightarrow X_2$ es una concatenación de segmentos geodésicos, $(f_*r)^{-1}(B)$ está contenida en una vecindad cerrada que es subconjunto de $r^{-1}f_*^{-1}(B)$ por lo que es un conjunto acotado, lo que implica que $f_*(r)$ es un rayo propio.

Por otra parte, si r y r' son dos rayos propios en X_1 tales que $\text{end}(r) = \text{end}(r')$, por el Lema 4.2.11 1), se tiene que para todo $(R + k) > 0$, existe $T > 0$ tal que para toda $t > T$, existe un k -camino x_1, \dots, x_k que une a $r(t)$ con $r'(t)$ en $X_1 \setminus B(x_0, R + k)$. En vista de que f es una cuasi-isometría para cualesquiera x_i, x_{i+1} con $i \in \{1, \dots, k\}$:

$$d(f(x_i), f(x_{i+1})) \leq c \cdot d(x_i, x_{i+1}) + b \leq ck + b,$$

por consiguiente $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ es un $(ck + b)$ -camino que une a $f \circ r(t)$ y $f \circ r'(t)$.

Así, para todo $R > 0$, existe $T > 0$ tal que para toda $t > T$, existen $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ un $(ck + b)$ -camino en $X_1 \setminus B(x_0, R)$ que une a $f_*r(t)$ con $f_*r'(t)$, es decir, $\text{end}(f_*r) = \text{end}(f_*r')$.

Esto asegura que f_ϵ está bien definida. Si $\text{end}(r) = \text{end}(r')$, entonces $f_\epsilon(r) = \text{end}(f_*r) = \text{end}(f_*r') = f_\epsilon(r')$.

Obsérvese que la f_ϵ es también continua, puesto que si $\text{end}(r_1) \in \text{Ends}(X_1)$, por el lema 4.2.11.3), existe un conjunto V_n^2 tal que:

$$f_\epsilon(\text{end}(r_1)) = \text{end}(f_*r_1) \in V_n^2 = \{\text{end}(r') \in \text{Ends}(X_2) \mid r' \in \widetilde{V}_n^2\},$$

donde para f_*r_1 un rayo propio que emana de $f(x_0)$ y está en X_2 :

$$\widetilde{V}_n^2 = \{r' \mid f_*r_1(n, \infty), r'(n, \infty) \text{ están en la misma componente conexa por caminos de } X \setminus B(f(x_0), n)\}.$$

Luego, note que:

$$\begin{aligned} f_\epsilon^{-1}(V_n^2) &= \{\text{end}(r) \in \text{Ends}(X_1) \mid f_\epsilon(\text{end}(r)) \in V_n^2\}, \\ &= \{\text{end}(r) \in \text{Ends}(X_1) \mid \text{end}(f_*r) \in V_n^2\}, \end{aligned}$$

Note que si $\text{end}(r) \in f_\epsilon^{-1}(V_n^2)$, entonces $\text{end}(f_*r)$ está en V_n^2 , por lo que $f_*r_1(n, \infty), f_*r(n, \infty)$ están en la misma componente conexa por caminos de $X \setminus B(f(x_0), n)$, luego dado que la imagen de todo

k -camino bajo f es un $ck + b$ -camino, $r(n', \infty)$ y $r_1(n', \infty)$ están en la misma componente conexa de $X \setminus B(x_0, n')$, por lo que $end(r_1), end(r) \in f_\epsilon^{-1}(V_n^2)$ lo que implica que

$$f_\epsilon^{-1}(V_n^2) = V_{n'}^1 = \{end(r') \in Ends(X_1) \mid r' \in \widetilde{V}_{n'}^1\},$$

donde:

$$\widetilde{V}_{n'}^1 = \{r' \mid r_1(n', \infty), r'(n', \infty) \text{ están en la misma componente conexa por caminos de } X \setminus B(x_0, n')\}.$$

Entonces $end(r_1) \in V_{n'}^1$, de donde se sigue que f_ϵ es una función continua.

En vista de que $f: X_1 \rightarrow X_2$ es una cuasi-isometría, existe $g: X_2 \rightarrow X_1$ la cuasi-inversa de f . Esta g induce de manera similar una función continua:

$$\begin{aligned} g_\epsilon: Ends(X_2) &\rightarrow Ends(X_1) \\ end(r) &\mapsto end(g_*r) \end{aligned}$$

De modo que para todo $end(r) \in Ends(X_1)$:

$$g_\epsilon \circ f_\epsilon(end(r)) = g_\epsilon(f_\epsilon(end(r))) = g_\epsilon((end(f_*r))) = end(g_* \circ f_*r) = end((g \circ f)_*r).$$

Luego dado $f \circ g$ es la composición de una cuasi-isometría y su cuasi-inversa (por tanto una cuasi-isometría), esta composición está a distancia finita de la identidad y por la proposición 4.2.14, entonces:

$$g_\epsilon \circ f_\epsilon(end(r)) = end((g \circ f)_*r) = end(r).$$

Por lo tanto $g_\epsilon \circ f_\epsilon = id_{Ends(X_1)}$, y de manera completamente análoga, se tiene que $f_\epsilon \circ g_\epsilon = id_{Ends(X_2)}$. Y por consiguiente, f_ϵ es un homeomorfismo entre $Ends(X_1)$ y $Ends(X_2)$.

Más aún, si f y g son dos cuasi-isometrías de X_1 , la composición $f \circ g$ es también una cuasi-isometría de X_1 . Por tanto $f_\epsilon \circ g_\epsilon = (f \circ g)_\epsilon$, y en efecto, $\mathcal{QI}(X_1) \rightarrow Homeo(Ends(X_1))$ es un homomorfismo. \square

Como se vió en los ejemplos 4.2.5, 4.2.8 y 4.2.9 existen grupos con uno, dos o una infinidad de fines, una pregunta natural es, si existe un grupo finitamente generado cuyo número de fines sea algún natural mayor a 2, la respuesta a esta interrogante la da el matemático alemán Heinz Hopf (1894-1971) en un texto titulado “*Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen*” entre 1943 y 1944 con el siguiente teorema.

Teorema 4.2.16. Si G es grupo finitamente generado, entonces G tiene 0, 1, 2 o un infinidad de fines.

Demostración. Para esta demostración se procederá por contrarrecíproca. Dado G un grupo finitamente generado por un conjunto S , y $\mathcal{C} := Cay(G, S)$ que denota al grafo de Cayley de G respecto a S . Supóngase que G tiene una cantidad finita de fines e_1, e_2, \dots, e_n para algún $n \in \mathbb{N}$ mayor a dos.

Si es γ la acción por translación izquierda de G en sí mismo; dicha acción será entonces una acción por isometrías en \mathcal{C} , que induce un homomorfismo de G a los homeomorfismos del espacio de fines de \mathcal{C} .

$$\begin{aligned} \gamma: G &\rightarrow Isom(G) &\rightarrow Homeo(Ends(\mathcal{C})) \\ g &\mapsto f_g: G \rightarrow G &\mapsto f_{\epsilon_g}: Ends(\mathcal{C}) \rightarrow Ends(\mathcal{C}) \\ g_0 &\mapsto g \cdot g_0 &end(r) \mapsto end(g \cdot r) \end{aligned}$$

Como $Ends(G)$ es un conjunto finito, el número de biyecciones de $Ends(G)$ en si mismo es finito, más aún dado que todo homeomorfismo es en particular una biyección, entonces $Homeo(Ends(\mathcal{C}))$ es finito. Por lo tanto $Im(\gamma) = \{f_{e_g} \in Homeo(Ends(\mathcal{C})) : \exists g \in G : \gamma(g) = f_{e_g}\}$ que es un subconjunto de $Homeo(Ends(\mathcal{C}))$, es un conjunto finito.

Del Segundo Teorema de Isomorfismos se sabe que $G/ker(\gamma) \cong Im(\gamma)$, por tanto $H := ker(\gamma)$ es de índice finito en G .

Considérense tres fines distintos e_1, e_2, e_3 . Y sean $r_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{C}, r_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{C}$ y $r'_3 : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{C}$ tres rayos propios geodésicos que emanan del vértice identidad 1, tales que $end(r_1) = e_1, end(r_2) = e_2$ y $end(r'_3) = e_3$.

Por otro lado, como H es de índice finito en G , entonces es cuasi-denso en G (Teorema 3.2.32), existe una constante μ , de modo que para toda $n \in \mathbb{N}$, existe un $h_n \in H$ tal que:

$$d_s(h_n, r'_3(n)) \leq \mu.$$

Así, a partir de estos puntos se puede definir un rayo $r_3 : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{C}$ con $end(r_3) = e_3$ (Figura 4.9), de tal manera que $r_3(n) = h_n$ y tal que:

$$d_s(1, r_3(n)) \geq n.$$

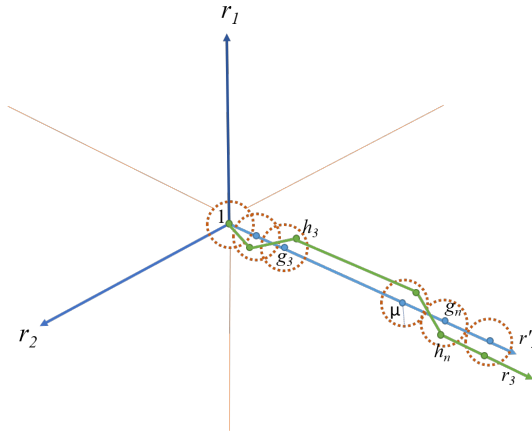


Figura 4.9: Rayos r'_3 y r_3

A continuación, para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ llámense $\gamma_n := r_3(n)$, y fíjese una constante positiva ρ tal que $r_1(\rho, \infty), r_2(\rho, \infty)$ y $r_3(\rho, \infty)$ estén en diferentes componentes conexas por caminos de $\mathcal{C} \setminus B(1, \rho)$ (Figura 4.10).

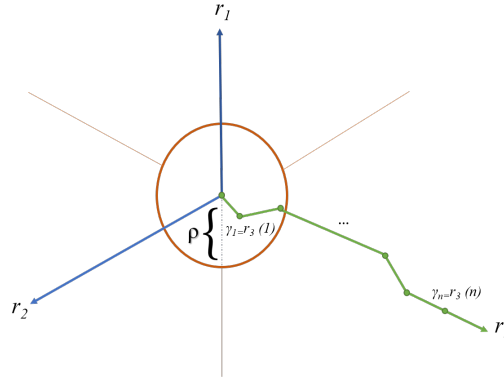


Figura 4.10: $r_1(\rho, \infty), r_2(\rho, \infty)$ y $r_3(\rho, \infty)$ están en diferentes componentes conexas por caminos de $\mathcal{C} \setminus B(1, \rho)$

Si $t, t' > 2\rho$, entonces:

$$d_s(r_1(t), r_2(t')) \geq 2\rho,$$

esto debido a que la distancia de $r_1(t)$ y $r_2(t')$ a la bola $B(1, 2\rho)$ es a lo menos ρ y todo camino entre estos puntos debe pasar a través de $B(1, \rho)$.

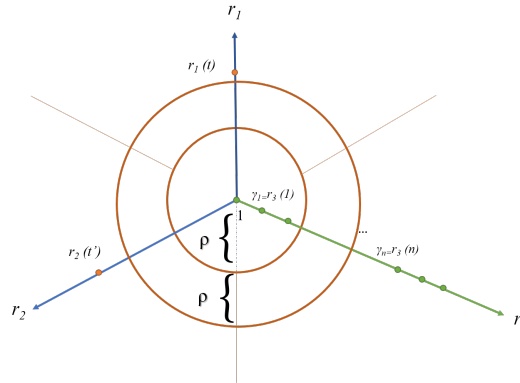


Figura 4.11: Si $t, t' > 2\rho$, entonces $d_s(r_1(t), r_2(t')) \geq 2\rho$

En de vista que para cualquier n se tiene que $\gamma_n \in H$, entonces $end(\gamma_n \cdot r_1) = end(r_1)$ y $end(\gamma_n \cdot r_2) = end(r_2)$. Dada $n > 3\rho$, se tiene que $\gamma_n \cdot r_1(0)$ y $\gamma_n \cdot r_2(0)$, están en diferentes componentes conexas por caminos que $r_1(\rho, \infty)$ y $r_2(\rho, \infty)$ (Figura 4.12). Como $B(1, \rho)$ separa en componentes conexas por caminos, entonces $\gamma_n \cdot r_1$ y $\gamma_n \cdot r_2$ pasan por $B(1, \rho)$. Por lo que para algunos $t, t' > 2\rho$ sucede que:

$$d_s(\gamma_n \cdot r_1(t), \gamma_n \cdot r_2(t')) \leq 2\rho,$$

así, como γ_n actúa por isometrías, sucede que:

$$d_s(r_1(t), r_2(t')) \leq 2\rho.$$

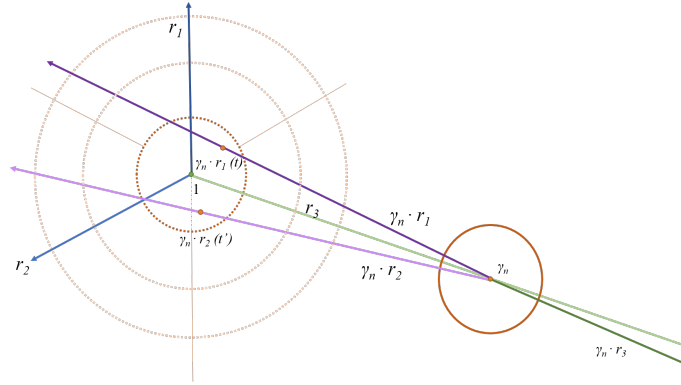


Figura 4.12: Los puntos $r_1(t), r_2(t')$ están en $B(1, \rho)$.

Lo cual es una contradicción y por lo tanto G no tiene una cantinidad finita de fines mayor a 2. □

Si un grupo finitamente generado tiene una infinidad de fines, es más que numerable, este teorema se debe a John Robert Stallings(1935-2008) sin embargo la prueba de esto rebaza los alcances de esta tesis.

4.3. Dos fines, si y solo si, virtualmente \mathbb{Z}

Una vez establecido el teorema 3.5.2, es posible preguntarse cómo se ven estos grupos, si un grupo finitamente generado no tiene fines este es finito, si tiene un fin, por ahora, la pregunta es un misterio. Y si se piensa en los ejemplos con dos fines que se han revisado, se tienen \mathbb{Z} , $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y \mathbb{R} , que cumplen con ser cuasi-isométricos a \mathbb{Z} , de donde se intuye el siguiente teorema, que también se debe a Stallings.

Teorema 4.3.1. Si G es un grupo finitamente generado con dos fines, entonces es virtualmente \mathbb{Z} .

Demostración. Sea G un grupo finitamente generado por un conjunto S y sea $\mathcal{C} := \text{Cay}(G, S)$ el grafo de Cayley de G con respecto a S .

Para fijar notación los fines de G se llamarán e_1 y e_2 .

Note que $\text{Homeo}(\text{Ends}(\mathcal{C}))$ es un grupo, y dado que $\text{Ends}(\mathcal{C})$ tiene únicamente dos fines, entonces existen dos homeomorfismos en $\text{Homeo}(\text{Ends}(\mathcal{C})) = \{Id, \sigma\}$ donde:

$$\begin{array}{ll} Id: \text{Ends}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ends}(\mathcal{C}) & \sigma: \text{Ends}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ends}(\mathcal{C}) \\ e_1 \longmapsto e_1 & e_1 \longmapsto e_2 \\ e_2 \longmapsto e_2 & e_2 \longmapsto e_1 \end{array}$$

De donde se sigue que $\text{Homeo}(\text{Ends}(\mathcal{C}))$ es un grupo finito.

Ahora, considerando a γ la acción por translación izquierda de G en sí mismo, una acción por isometrías en \mathcal{C} , es posible inducir un homomorfismo de G a los homeomorfismos del espacio de fines de \mathcal{C} .

$$\begin{array}{lll} \gamma: G \longrightarrow \text{Isom}(G) & \longrightarrow & \text{Homeo}(\text{Ends}(\mathcal{C})) \\ g \longmapsto f_g: G \longrightarrow G & \longmapsto & f_{e_g}: \text{Ends}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ends}(\mathcal{C}) \\ g_0 \longmapsto g \cdot g_0 & & \text{end}(r) \longmapsto \text{end}(g \cdot r) \end{array}$$

Puesto que $Im(\gamma) = \{f_{e_g} \in Homeo(Ends(\mathcal{C})) : \exists g \in G : \gamma(g) = f_{e_g}\}$ es un subconjunto de $Homeo(Ends(\mathcal{C}))$, entonces esta imagen es un conjunto finito. Luego como consecuencia del Segundo Teorema de Isomorfismos $G/ker(\gamma) \cong Im(\gamma)$, por lo tanto $ker(\gamma)$ es de índice finito en G .

Llámesese $H := ker(\gamma)$ y note que:

$$\begin{aligned} H &:= ker(\gamma) = \{g \in G \mid f_{e_g} = Id_{Homeo(Ends(\mathcal{C}))}\} \\ &= \{g \in G \mid \forall end(r) \in Ends(\mathcal{C}) \quad f_{e_g}(end(r)) = end(r)\} \\ &= \{g \in G \mid \forall end(r) \in Ends(\mathcal{C}) \quad end(g \cdot r) = end(r)\} \end{aligned}$$

Más aún, en vista de que H es de índice finito se tiene que es cuasi-denso respecto a d_S (Teorema 3.2.32), por lo que existe $\mu \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo vértice $v \in v(\mathcal{C})$, existe $h \in H$ tal que $d_s(v, h) \leq \mu$.

Por otro lado como G tiene dos fines, entonces existe un compacto $K \subseteq \mathcal{C}$ tal que para todo $r_1 \in e_1$ y $r_2 \in e_2$, existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que si $r_1(N, \infty) \subseteq \mathcal{C} \setminus K$ y $r_2(N, \infty) \subseteq \mathcal{C} \setminus K$, entonces $r_1(N, \infty) \subset C_1$ y $r_2(N, \infty) \subset C_2$ donde C_1 y C_2 son dos componentes conexas por caminos distintas de $\mathcal{C} \setminus K$.

Sea $B(1, \rho)$ la bola con centro en 1 (la identidad de grupo) y radio ρ un entero tal que $K \subseteq B(1, \rho)$ y $\mu < \rho$.

Dado que G es un grupo finitamente generado e infinito existe algún vértice $w \in V(\mathcal{C})$ tal que $4\rho < d_s(1, w)$ (Figura 4.13).

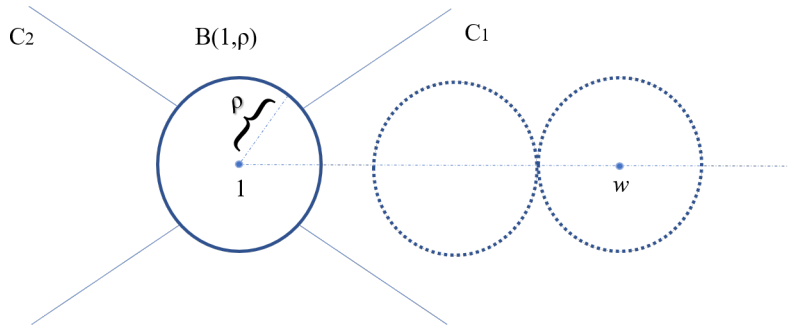


Figura 4.13: Vértice w a distancia mayor que 4ρ de 1.

Luego, como H es de índice finito en G existe $h \in H$ tal que $d_s(h, w) < \mu$ (Véase la Figura 4.14). Así tenemos que:

$$4\rho < d_s(1, w) \leq d_s(1, h) + d_s(h, w) < d_s(1, h) + \mu < d_s(1, h) + \rho,$$

$$4\rho < d_s(1, h) + \rho,$$

$$3\rho < d_s(1, h).$$

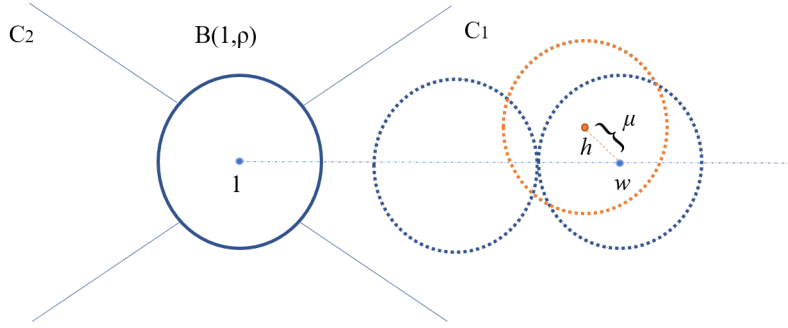


Figura 4.14: Vértice h a distancia mayor que 3ρ de 1 .

Por lo tanto $B(1, \rho) \cap B(h, \rho) = \emptyset$.

Sea $r: [0, \infty) \rightarrow \mathcal{C}$ un rayo geodésico que empieza en h , tal que $r[0, \infty) \cap B(1, \rho) = \emptyset$ y $\text{end}(r) = e_1$. Note que $r[0, \infty) \subset C_1$, pues $B(1, \rho)$ separa en dos componentes conexas por caminos a \mathcal{C} y $\text{end}(r) = e_1$ (Figura 4.15).

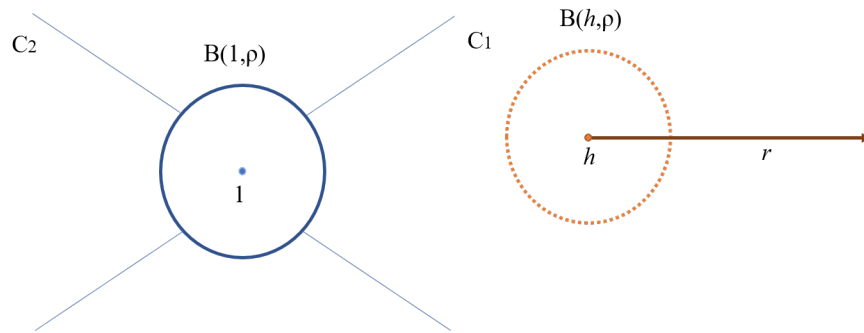
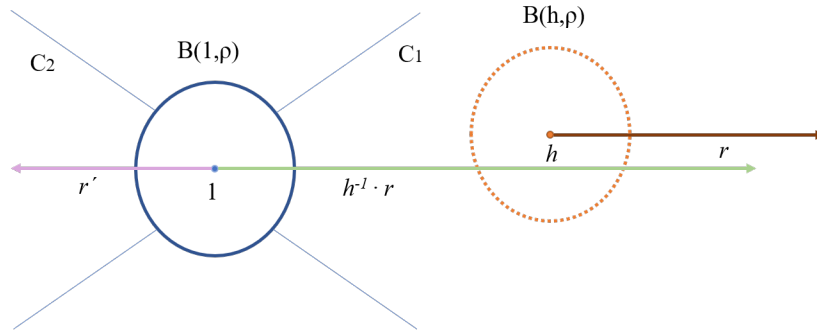


Figura 4.15: Rayo r tal que $B(1, \rho) \cap r[0, \infty) = \emptyset$.

A continuación, se demuestra que h tiene orden infinito. Para esto se hará inducción sobre la proposición: $\|h^n\| > 3\rho$. De esto se obtendrá que para toda $n \in \mathbb{N}$, 1 y h^n están en componentes conexas por caminos distintas y como corolario que $\|h^n\| > \|h^{n-1}\| > 3\rho$.

Lema 4.3.2. Sea r como anteriormente, entonces 1 y $r(\rho, \infty)$ están en componentes conexas por caminos distintas de $\mathcal{C} \setminus B(h, \rho)$, en particular $1 \neq h^2$.

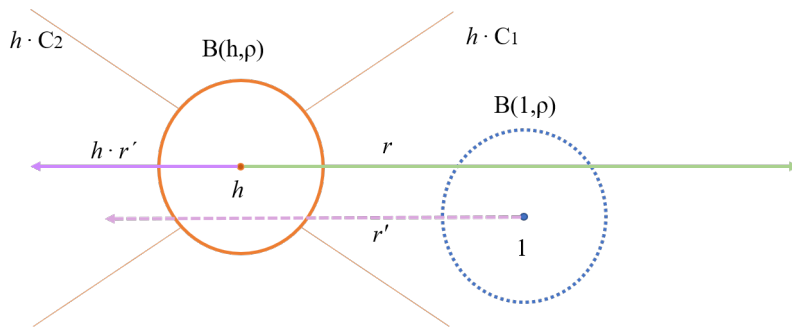
Demostración. Sea $r': [0, \infty) \rightarrow \mathcal{C}$ un rayo geodésico que empieza en 1 , tal que $\text{end}(r') \neq \text{end}(r)$ y $r'[0, \infty) \cap B(h, \rho) = \emptyset$. Dado que $h \in H$, se tiene que $h^{-1} \cdot r$ es un rayo geodésico que empieza en 1 y tal que $\text{end}(r) = \text{end}(h^{-1} \cdot r)$ (Figura 4.16).

Figura 4.16: Rayos r , r' y $h^{-1} \cdot r$.

Supóngase que $1 \in h \cdot C_1$.

Como la acción de h en G es por isometrías y $B(1, \rho)$ separa a \mathcal{C} en dos componente conexas por caminos, entonces $h \cdot B(1, \rho) = B(h, \rho)$ va a separar a $h \cdot \mathcal{C}$ en $h \cdot C_1$ y $h \cdot C_2$ dos componente conexas por caminos.

Tras la acción de h , se tiene que $h \cdot r'$ es un rayo geodésico que empieza en h , que $h \cdot h^{-1} \cdot r = r$ es un rayo geodésico que empieza en h , también que $h \cdot r'(\rho, \infty) \subseteq h \cdot C_2$ y que $end(r') = end(h \cdot r')$ (Figura 4.17).

Figura 4.17: La acción de h sobre la figura 4.16.

De esto último, se sigue que para todo K_0 subconjunto compacto de $h \cdot \mathcal{C} = \mathcal{C}$, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $h \cdot r'[M, \infty) \subset h \cdot \mathcal{C} \setminus K_0$ y $r'[M, \infty) \subset \mathcal{C} \setminus K_0$ están en la misma componente conexas, esto por la definición de que $h \cdot r'$ y r' representen el mismo fin.

En particular, existe un $t_0 \in (\rho, \infty)$ tal que $r'(t_0, \infty)$ y $h \cdot r'(t_0, \infty)$ esten en la misma componente conexas por caminos de $h \cdot \mathcal{C} \setminus B(h, \rho)$.

Dado que $h \cdot r'(\rho, \infty) \subseteq h \cdot C_2$ entonces $r'(t_0, \infty) \subseteq h \cdot C_2$. En virtud de que $r'(0) = 1 \in h \cdot C_1$, como $r'(t_0) \in h \cdot C_2$ y $B(h, \rho)$ separan a $h \cdot \mathcal{C}$ en dos componentes conexas por caminos, entonces existe un $t_1 \in [0, \infty)$ tal que $r'(t_1) \in B(h, \rho)$, es decir $r'[0, \infty) \cap B(h, \rho) \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción de que $r'[0, \infty) \cap B(h, \rho) = \emptyset$. Así $1 \notin h \cdot C_1$ y $h \cdot r(\rho, \infty) \in h \cdot C_1$.

Por lo tanto 1 y $r(\rho, \infty)$ están en componentes conexas por caminos distintas de $\mathcal{C} \setminus B(h, \rho)$. □

Corolario 4.3.3. Los vértices 1 y h^2 están en componentes conexas por caminos distintas de $\mathcal{C} \setminus B(h, \rho)$.

Demostración. Llámense $\mathcal{G}_h(\mathcal{C})$ al conjunto de rayos propios que emanan de h .

Por otro lado; se tenía que $B(1, \rho) \cap r[0, \infty) = \emptyset$ y como h actúa por isometrías, entonces $B(h, \rho) \cap h \cdot$

$r[0, \infty) = \emptyset$. Además, por definición de h , se tiene que $end(r) = end(h \cdot r)$, entonces para ρ , existe $T \in \mathbb{R}^+$, tal que para toda $t > T$, existe $r(t) = x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k = h \cdot r(t)$ un k -camino en $\mathcal{C} \setminus B(h, \rho)$ (Figura 4.18). Dado que $r[\rho, \infty)$ está en $h \cdot C_1$ (lema anterior), en particular $r(t) \in h \cdot C_1$. Luego puesto que $B(h, \rho)$ divide en dos componentes conexas por caminos y $B(h, \rho) \cap h \cdot r[0, \infty) = \emptyset$, entonces $h \cdot r(t)$ y $h \cdot r(0) = h^2$ están en $h \cdot C_1$. Del lema anterior se tiene que $1 \in h \cdot C_2$. Por lo tanto 1 y h^2 están en componentes conexas por caminos distintas.

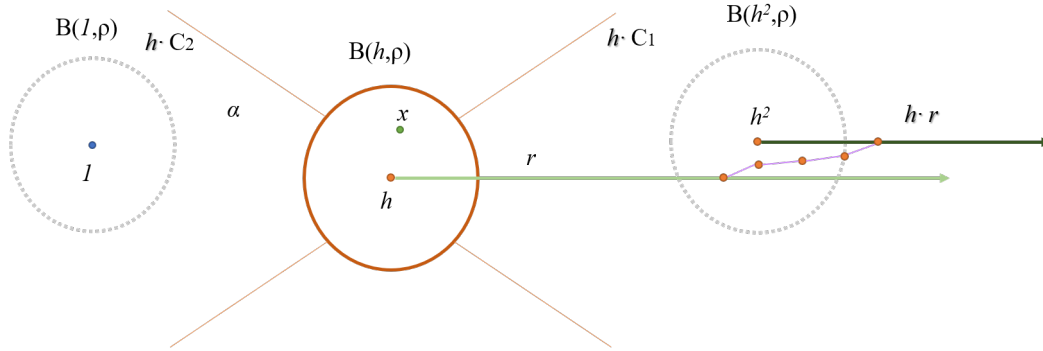


Figura 4.18: El vértice h^2 y $r[0, \infty)$ están en la misma componente conexa por caminos.

□

Corolario 4.3.4. Sea h como anteriormente, entonces $\|h\| < \|h^2\|$, en particular $h^3 \neq 1$.

Demostración. Como \mathcal{C} es geodésico existe $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathcal{C}$ una geodésica que empieza en 1 y termina en h^2 . Además, dado que $B(h, \rho)$ separa a \mathcal{C} en dos componentes, entonces $\alpha[0, L]$ pasa por $B(h, \rho)$, por lo tanto existe $x \in B(h, \rho) \cap \alpha[0, L]$, de modo que $d_s(h, x) = \zeta \leq \rho$ (Véase la figura 4.19).

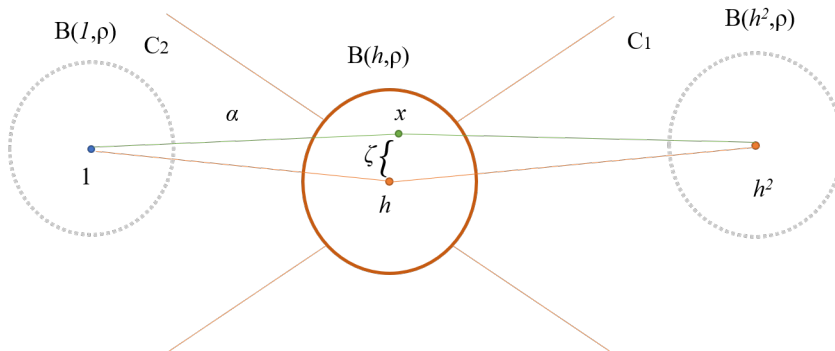


Figura 4.19: Geodésica α

Además por la desigualdad del triángulo, existe $y \in \alpha[0, L]$ dentro de $B(h, \rho)$, tal que $d_s(x, y) = \rho - \zeta$ y $d_s(x, y) < d_s(1, x)$ (Figura 4.20). Llámese z al vértice en $\alpha[0, L]$ tal que $d_s(z, 1) = \rho$. Sean $\kappa = d_s(z, y)$ y $\epsilon_0 = d_s(1, h) - 2\rho$ (Figura 4.20); observe que:

$$d_s(1, h) \leq d_s(1, x) + d_s(x, h) \quad \text{por la desigualdad del triángulo}$$

$$2\rho + \epsilon_0 \leq \rho + \kappa + \rho - \zeta + \zeta \quad \text{sustituyendo a } d_s(1, x) = \rho + \kappa + \rho - \zeta \text{ y a } d_s(1, h) = 2\rho + \epsilon_0$$

$$2\rho + \epsilon_0 \leq 2\rho + \kappa$$

$$\epsilon_0 \leq \kappa$$

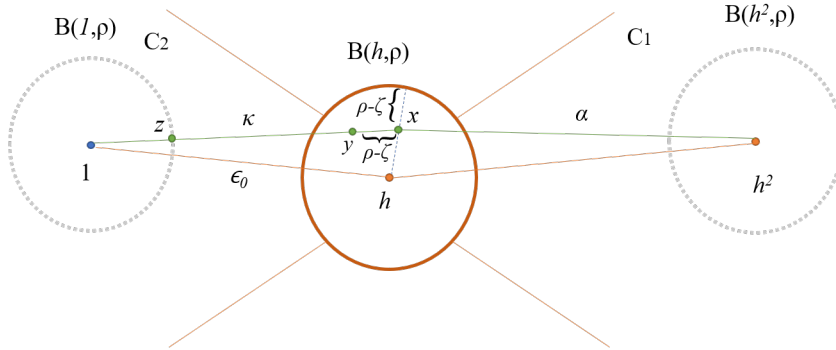


Figura 4.20: Geodésica α , punto y a distancia $\rho - \zeta$ del punto x y z .

De manera análoga, existe $y' \in \alpha[0, L]$ dentro de $B(h, \rho)$ tal que $d_s(y', x) = \rho - \zeta$ y $d_s(1, y') > d_s(x, 1)$. Sean z' al vértice en $\alpha[0, L]$ tal que $d_s(z', h^2) = \rho$ y $\kappa' = d_s(z', y')$ (Figura 4.21), entonces:

$$d_S(1, h) = d_s(h, h^2) \leq d_s(h, x) + d_s(x, h^2) \quad \text{por la desigualdad del triángulo}$$

$$2\rho + \epsilon_0 \leq \rho + \kappa' + \rho - \zeta + \zeta \quad \text{sustituyendo a } d_s(1, x) = \rho + \kappa + \rho - \zeta$$

$$2\rho + \epsilon_0 \leq 2\rho + \kappa'$$

$$\epsilon_0 \leq \kappa'$$

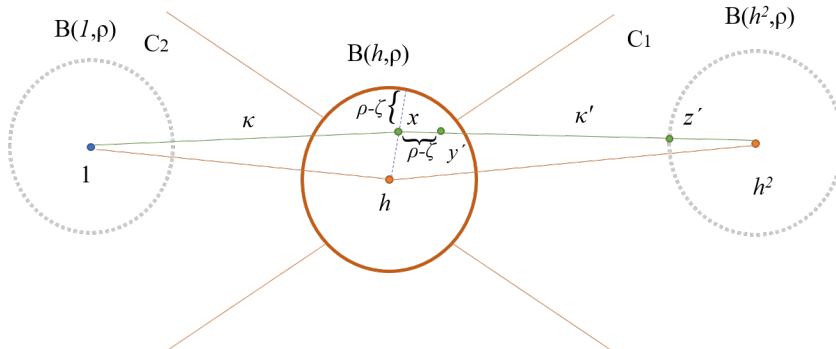


Figura 4.21: Geodésica α , punto y' a distancia $\rho - \zeta$ del punto x y z' .

Por lo tanto $\|h^2\| \geq 2\rho + \kappa + \kappa' > 2\rho + \epsilon_0 = \|h\|$, así $0 < \|h\| < \|h^2\|$. Obsérvese que si $h^3 = 1$, entonces $h^2 = h^{-1}$, por lo que $\|h^{-1}\| = \|h\| = \|h^2\|$. De la contrarrecíproca de este hecho, se tiene que como $0 < \|h\| < \|h^2\|$, entonces $h^3 \neq 1$, es decir, h no tiene orden tres. \square

Lema 4.3.5. Si $\|h^{n-1}\| > 3\rho$, entonces 1 y h^n están en diferentes componentes conexas por caminos de $\mathcal{C} \setminus B(h^{n-1}, \rho)$.

Demostración. Dado que $\|h^{n-1}\| > 3\rho$, entonces $d_s(1, h^{n-1}) > 3\rho$; por lo que $B(1, \rho) \cap B(h^{n-1}, \rho) = \emptyset$. Sean r' como en el lema 4.3.2 y r_{n-1} un rayo geodésico que empieza en h^{n-1} tal que $r_{n-1}(0, \infty) \cap B(1, \rho) = \emptyset$, $end(r') \neq end(r_{n-1})$ y $r_{n-1}: [0, \infty) \subseteq C_1$ (Figura 4.22).

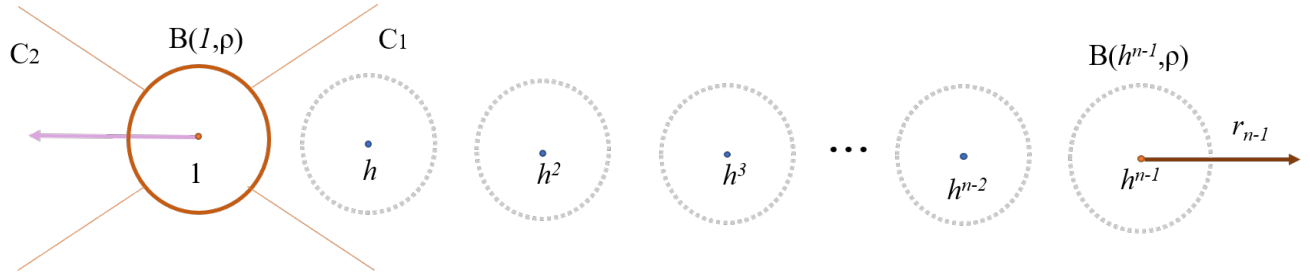


Figura 4.22: Rayos r' y r_{n-1}

Considérese también a $(h^{n-1})^{-1} \cdot r_{n-1}: [0, \infty) \rightarrow \mathcal{C}$, el cual es rayo geodésico que empieza en 1 y tal que $end(r_{n-1}) = end((h^{n-1})^{-1} \cdot r_{n-1})$ (Figura 4.23).

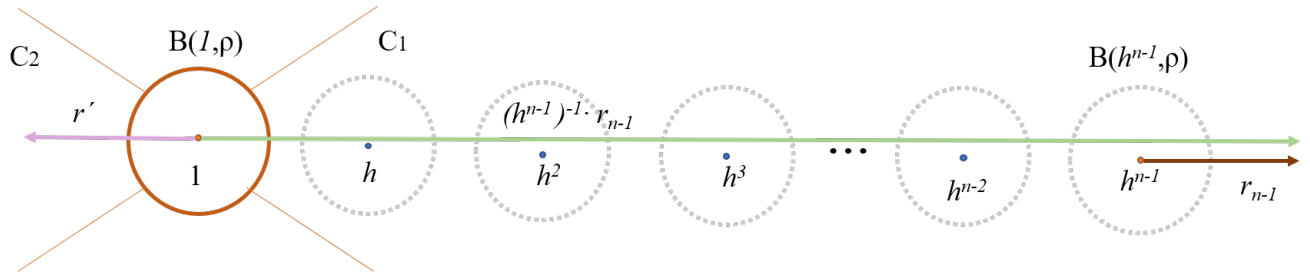


Figura 4.23: Rayos r', r_{n-1} y $(h^{n-1})^{-1} \cdot r_{n-1}$.

Ya que la acción de h^{n-1} en \mathcal{C} es por isometrías, entonces $B(h^{n-1}, \rho)$ separa en dos componentes conexas por caminos $h^{n-1} \cdot C_1$ y $h^{n-1} \cdot C_2$ a $\mathcal{C} \setminus B(h^{n-1}, \rho)$. Además $h^{n-1} \cdot r_{n-1}[0, \infty) \subseteq h^{n-1} \cdot C_1$

Supóngase que bajo la acción de h^{n-1} sobre \mathcal{C} , $1 \in h^{n-1} \cdot C_1$.

En vista de que $h \in H$, sucede que $end(h^{n-1} \cdot r') = end(r') \neq end(r_{n-1}) = end((h^{n-1})^{-1} \cdot r_{n-1})$ y también que $h^{n-1} \cdot r'(\rho, \infty) \subseteq h^{n-1} \cdot C_2$ (Figura 4.24).

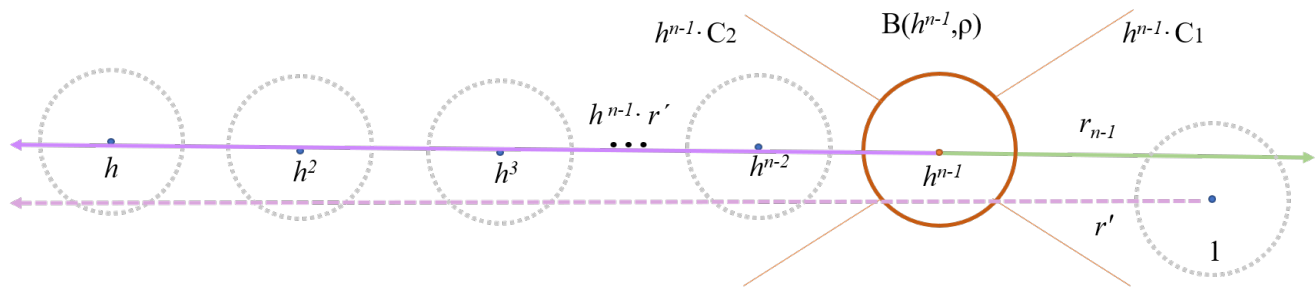


Figura 4.24: La acción de h^{n-1} sobre la figura 4.23.

Como $h^{n-1} \cdot r'$ y r' representan el mismo fin, por definición para todo K' subconjunto compacto de

$h^{n-1} \cdot \mathcal{C}$, existe $M' \in \mathbb{R}^+$ tal que $h^{n-1} \cdot r'[M, \infty) \subset h^{n-1} \cdot \mathcal{C} \setminus K'$ y $r'[M', \infty) \subset h^{n-1} \cdot \mathcal{C} \setminus K'$ están en la misma componente conexa, es decir en $h^{n-1} \cdot C_2$.

Dado que $r'(0) = 1 \in h^{n-1} \cdot C_1$, entonces existe $t_{n-1} \in (\rho, \infty)$ tal que $r'(t_{n-1}, \infty)$ y $h^{n-1} \cdot r'(t_{n-1}, \infty)$ están en la misma componente conexa por caminos de $h^{n-1} \cdot \mathcal{C} / B(h^{n-1}, \rho)$.

Ahora, en tanto que $r'(t_{n-1}) \in h^{n-1} \cdot C_2$ y que $B(h^{n-1}, \rho)$ separan a $h^{n-1} \cdot \mathcal{C}$ en dos componentes conexas por caminos, entonces existe un $t_n \in [0, \infty)$ tal que $r'(t_n) \in B(h^{n-1}, \rho)$, es decir $r'[0, \infty) \cap B(h^{n-1}, \rho) \neq \emptyset$. Esto es una contradicción ya que $r'[0, \infty) \cap B(h^{n-1}, \rho) = \emptyset$. Por lo que $1 \in h^{n-1} \cdot C_2$ y $h^{n-1} \cdot r(\rho, \infty) \in h^{n-1} \cdot C_1$. Por consiguiente, debido a que $h \cdot r_{n-1}(0) = h \cdot h^{n-1} = h^n \in h^{n-1} \cdot C_1$ sucede que 1 y h^n están en componentes conexas por caminos distintas de $\mathcal{C} \setminus B(h^{n-1}, \rho)$.

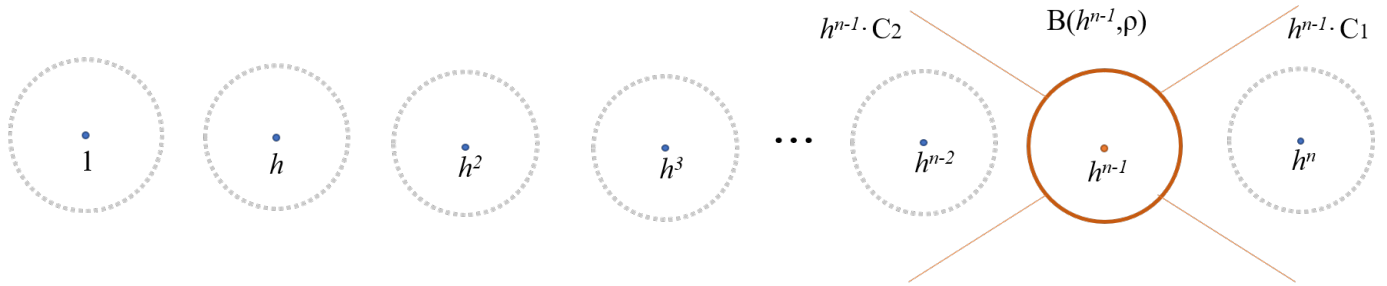


Figura 4.25: Los vértices 1 y h^n están en componentes conexas por caminos distintas.

□

Corolario 4.3.6. Si $\|h^{n-1}\| > 3\rho$, entonces $\|h^n\| > \|h^{n-1}\| > 3\rho$.

Demostración. La demostración de este corolario es análoga a la demostración del Corolario 4.3.4 (Véase la Figura 4.26).

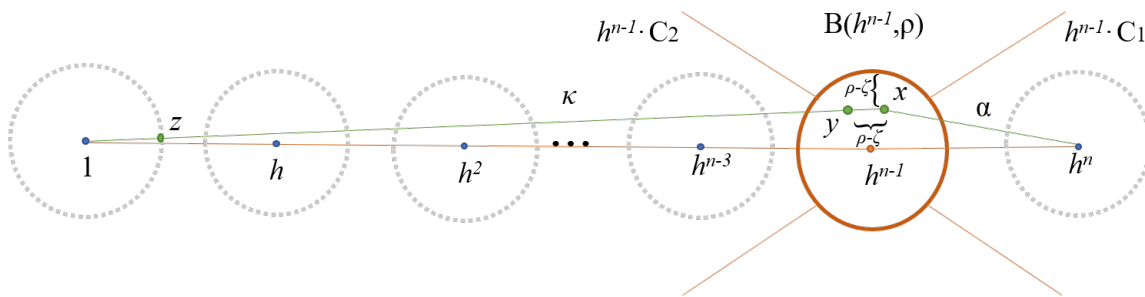


Figura 4.26: Geodésica α , punto y a distancia $\rho - \zeta$ del punto x y punto z

□

Como consecuencia de todo lo anterior para cualquier $n \in \mathbb{N}$ sucede que:
 $\|h^n\| > \|h^{n-1}\| > \|h^{n-2}\| > \dots > \|h\| > 3\rho > 0$, en particular $\|h^n\| \neq 0$, así h es de orden infinito.

Es fácil ver que $\langle h \rangle$ es isomorfo \mathbb{Z} puesto que:

$$\begin{aligned} \theta: \langle h \rangle &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ 1 &\longmapsto 0 \\ h^z &\longmapsto z \end{aligned}$$

Es un homomorfismo de grupos biyectivo, es decir un isomorfismo.

A continuación, resta demostrar que $\langle h \rangle$ es de índice finito en G . Para esto es suficiente demostrar que $\langle h \rangle$ es cuasi-denso en G .

Dentro de las bolas con centro en elementos de $\langle h \rangle$ y radio ρ hay un número finito de puntos. En seguida, se demostrará que “entre” dichas bolas hay también un número finito de puntos.

Defínanse para toda $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos de puntos entre las bolas $B(h^n, \rho)$ y $B(h^{n+1}, \rho)$ de la siguiente forma:

$$M_n = (h^n \cdot C_1 \cap h^{n+1} \cdot C_2) \setminus (B(h^n, \rho) \cup B(h^{n+1}, \rho)).$$

Como cada $B(h^n, \rho)$ está contenida en el interior de $h^n \cdot C_1$, entonces cada M_n debe tener únicamente una sola componente conexa por caminos.

Supóngase que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una cantidad infinita de puntos en M_n , digamos $p_0, p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots$. Luego, constrúyase un rayo $\hat{r}: [0, \infty) \longrightarrow M_n$, de la siguiente manera (Figura 4.27):

$$\begin{aligned} \hat{r}: [0, \infty) &\longrightarrow M_n \\ [0, 1) &\longmapsto p_0 \\ [1, 2) &\longmapsto p_1 \\ [2, 3) &\longmapsto p_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

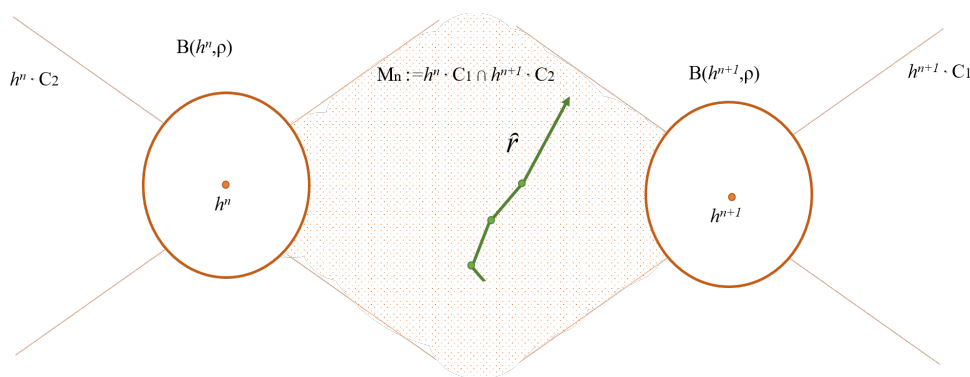


Figura 4.27: Rayo \hat{r} contenido en M_n

Así, si $B \subset M_n$ es un conjunto acotado, entonces este contendrá una cantidad finita de puntos, por lo que $\hat{r}^{-1}(B) = \{t \in [0, \infty) : \hat{r}(t) \in B\}$ será una unión finita de intervalos acotados, y por tanto un subconjunto acotado de $[0, \infty)$. De donde se tiene que \hat{r} es un rayo propio.

Ahora, considérense un rayo propio r_1 que emana de h^{n+1} tal que $\text{end}(r_1) = e_1$ y $r_1(\rho, \infty) \subset h^{n+1} \cdot C_1$ (Figura 4.28). Ulteriormente, se tiene que $r_1 \cap h^{n+1} \cdot C_1 \neq \emptyset$ y $\hat{r} \cap h^{n+1} \cdot C_1 = \emptyset$, entonces para toda $t \in [0, \infty)$ pasa que $r_1(t)$ y $\hat{r}(t)$ están en diferentes componentes conexas por caminos de $\mathcal{C} \setminus B(h^{n+1}, \rho)$, por lo tanto $\text{end}(r_1) \neq \text{end}(\hat{r})$.

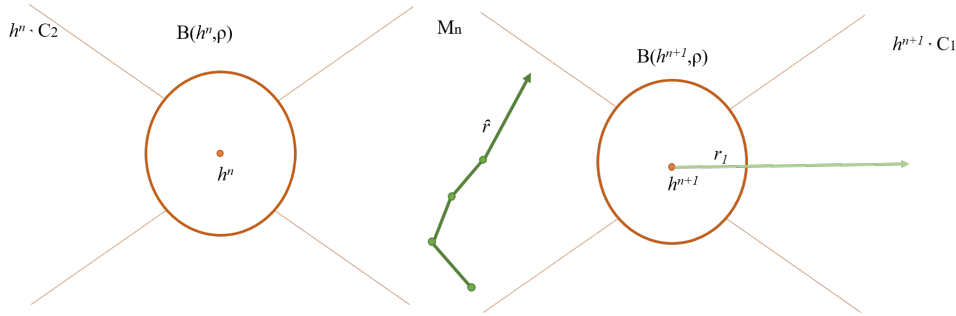


Figura 4.28: $r_1 \cap h^{n+1} \cdot C_1 \neq \emptyset$ y $\hat{r} \cap h^{n+1} \cdot C_1 = \emptyset$

Por otro lado, si se toma un rayo propio r_2 que emana de h^n y tal que $r_2(\rho, \infty) \subset h^n \cdot C_2$ (Figura 4.29), entonces sucede que $r_2 \cap h^n \cdot C_2 \neq \emptyset$ y $\hat{r} \cap h^n \cdot C_2 = \emptyset$, por lo que $\text{end}(r_2) \neq \text{end}(\hat{r})$.

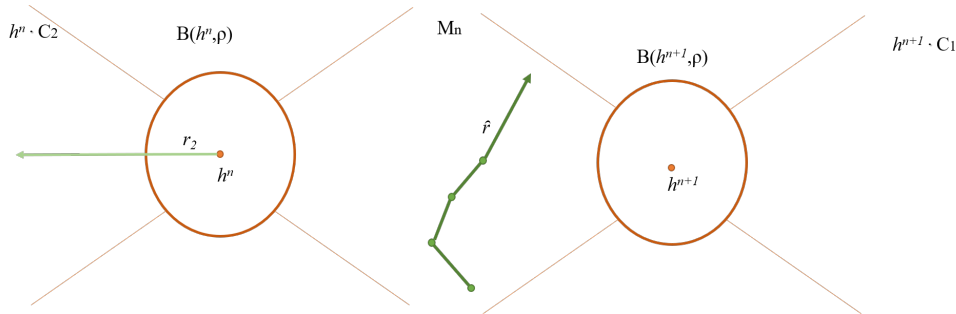


Figura 4.29: $r_2 \cap h^n \cdot C_2 \neq \emptyset$ y $\hat{r} \cap h^n \cdot C_2 = \emptyset$

De lo anterior se sabe que $\text{end}(r_1) \neq \text{end}(\hat{r})$ y $\text{end}(r_2) \neq \text{end}(\hat{r})$, lo cual es una contradicción, dado que \mathcal{C} tiene únicamente dos fines, por lo tanto M_n es un conjunto finito de puntos. Así, si se define $k_n := |M_n|$, dado que H actúa por isometría en \mathcal{C} , se tiene que para toda $i, j \in \mathbb{N}$, sucede que $k_i = k_j$. Luego, llámese $\mu := k_n$. Como el número de puntos dentro de las bolas es finito y también el número de puntos entre estas, entonces para toda $g \in G$, existe $h \in \langle h \rangle$ tal que $d_s(g, h) \leq \mu + \rho$. Por lo tanto $h \in \langle h \rangle$ es cuasi-denso en G , de donde se tiene que $h \in \langle h \rangle$ es de índice finito en G . □

4.4. Cuasi-isométrico a \mathbb{Z} entonces virtualmente \mathbb{Z}

Si G un grupo finitamente generado es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} , entonces por la proposición 4.2.15, hay un homeomorfismo entre $\text{Ends}(G)$ y $\text{Ends}(\mathbb{Z})$, luego como \mathbb{Z} tiene dos fines, entonces G también tiene dos fines y por el teorema 4.3.1, entonces G es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} . Por lo tanto se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.4.1. Si G un grupo finitamente generado es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} , entonces es virtualmente \mathbb{Z} .

Capítulo 5

Conclusión.

En general la idea en los problemas de rigidez es la siguiente:

Definición 5.0.1. Un grupo G_1 es **virtualmente isomorfo** a otro grupo G_2 , si existen subgrupos de índice finito $H_i < G_i$ y subgrupos normales $F_i \triangleleft G_i$ con $i \in \{1, 2\}$ tales que los cocientes H_1/F_1 y H_2/F_2 son isomorfos.

Un grupo G es **virtualmente P**, si es virtualmente isomorfo a un grupo con la propiedad P (con P una propiedad para grupos o algún grupo).

En especial, si P es una propiedad de grupos, un grupo es virtualmente P, si contiene un subgrupo de índice finito con la propiedad P.

Como consecuencia del Lema de Schwarz-Milnor cuasi-isométrico implica virtualmente isomorfo, sin embargo el converso no siempre es verdad. Cuando el converso, virtualmente implica cuasi-isométrico se cumple, entonces se dice que un grupo es cuasi-isométricamente rígido. Particularmente en esta tesis se revisó el caso de los grupos finitamente generados virtualmente \mathbb{Z} , es decir, los grupos finitamente generados G virtualmente isomorfos a \mathbb{Z} , donde H_1 es un subgrupo de índice finito isomorfo a \mathbb{Z} , $H_2 = \mathbb{Z}$ y $F_1 = F_2 = \{e\}$. En este caso, como el converso es cierto, es decir, que un grupo G finitamente generado cuasi-isométrico a \mathbb{Z} es virtualmente \mathbb{Z} (virtualmente cíclico infinito), se tiene que G es cuasi-isométricamente rígido a \mathbb{Z} .

Ahora bien, a lo largo de este texto, se desarrolló la teoría necesaria para demostrar la suficiencia y la necesidad de la rigidez cuasi-isométrica de \mathbb{Z} (Teorema 3.2.35), que dice, que todo grupo finitamente generado G , es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} , si y sólo si, es virtualmente \mathbb{Z} . Esto establece una equivalencia entre ser virtualmente \mathbb{Z} , que es una propiedad algebraica, y ser cuasi-isométrico a \mathbb{Z} , que es una propiedad geométrica. En particular, se vió que en el caso de los grupos finitamente generados, el número de fines de un espacio métrico es invariante bajo cuasi-isometrías. El camino que se siguió para demostrar este primer caso de rigidez en resumen fue así: que todo grupo finitamente virtualmente \mathbb{Z} , es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} (Teorema 3.5.2), es consecuencia del Lema de Schwarz-Milnor (3.4.1) y del corolario 3.5.1, que dice que todo subgrupo de índice finito es cuasi-isométrico al grupo ambiente, en especial si un grupo finitamente generado tiene un subgrupo de índice finito isomorfo a \mathbb{Z} (es virtualmente \mathbb{Z}), este es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} . En el otro sentido, para ver que todo grupo finitamente generado que es cuasi-isométrico a \mathbb{Z} , es virtualmente \mathbb{Z} . Primero se definió y estudió el espacio de fines de un espacio métrico (en particular un grupo con la métrica de las palabras asociado a su grafo de Cayley). Luego, se obtuvo que toda cuasi-isomería induce un homeomorfismo en el espacio de fines de un grupo (Proposición 4.3.1), esto aunado al teorema 4.2.16, que establece que un grupo finitamente generado tiene 0,1,2 o una infinidad de fines, deja como resultado que todo grupo finitamente

generado con dos fines es virtualmente \mathbb{Z} , así todo grupo finitamente generado cuasi-isométrico a \mathbb{Z} tiene dos fines y por tanto es virtualmente \mathbb{Z} .

Con este primer caso en mente, tiene sentido preguntarse por la rigidez cuasi-isométrica para otros tipos de grupos finitamente generados, por ejemplo cíclicos, abelianos, libres, etc. Una buena lista de ejemplos, no ejemplos y problemas abiertos de rigidez cuasi-isométrica para grupos finitamente generados pueden consultarse en [6] pág.10-11. Mientras que la rigidez cuasi-isométrica de grupos no finitamente generados es un problema es abierto, por ejemplo:

Dados $a, b \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$. Si d_a y d_b son métricas en \mathbb{Z} con respecto a los conjunto generadores infinitos $A = \{a^i\}_{i=0}^{\infty}$ y $B = \{b^i\}_{i=0}^{\infty}$ respectivamente, es un problema abierto si (\mathbb{Z}, d_a) y (\mathbb{Z}, d_b) , son cuasi-isométricos.

Bibliografía

- [1] M. R. Bridson, A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [2] W. J. Cook. *In Pursuit of the Traveling Salesman*. Princeton University Press, 2012.
- [3] P. de la Harpe, *Topics in Geometric Group Theory*. The University of Chicago Press, 2000.
- [4] R. Diestel *Graph theory*. Springer Berlin Heidelberg Imprint Springer, 2017.
- [5] J. B. Fraleigh, V. J. Katz, *A first course in Abstract Algebra*. Addison-Wesley, 2003.
- [6] M. Kapovich *Lectures on quasi-isometric rigidity*. IAS/Park City Mathematics Series, Volume XX, XXXX, American Mathematical Society, 2013.
- [7] E. Kruja, J. Marks, A. Blair, R. Waters, *A Short Note on the History of Graph Drawing*. Mitsubish Electric Research Laboratories, 2001.
- [8] C. Löh, *An Introduction to Geometric Group Theory*. Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 2011.
- [9] C. Löh, *An Introduction to Geometric Group Theory*. Univeritext, Springer, 2017.
- [10] A. Nicol. *What is a Cayley Graph?*, sin año.