BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN EL REGISTRO GRÁFICO EN ESTUDIANTES DE MATEMÁTICAS Y ACTUARÍA

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

IRAÍS LAINES FLORES

DIRECTORA DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

PUEBLA, PUE. NOVIEMBRE 2024

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi querida familia: Irasema Laines, Armida Laines y Belén Flores. Ustedes siempre han sido mis pilares y un ejemplo a seguir. Gracias por creer en mí incondicionalmente, por su apoyo constante y por alentarme a ser mejor cada día. Gracias por enseñarme el verdadero valor del esfuerzo, la perseverancia y la dedicación. Sin su amor y apoyo, no habría podido llegar tan lejos. Un agradecimiento especial a David Castillo quien ha sido mi compañero de vida y de estudio por más de cinco años, gracias por tu apoyo emocional, psicológico y académico, tu amor y comprensión han sido claves para mi desarrollo personal. Agradezco a Caos por llegar a mi vida en el momento más oportuno, y por siempre ser una compañía en las noches de estudio.

También quiero agradecer a todos mis familiares cercanos especialmente a Raúl Lainez y Delia Maciel que me han estado incondicionalmente para brindarme su apoyo. Gracias a todos mis compañeros y amigos de universidad, me llevo conmigo valiosos aprendizajes e innumerables momentos que atesoraré por siempre.

Agradezco profundamente a mi asesora la Dra. Lidia Hernández por darme la oportunidad de trabajar a su lado, por sus palabras de aliento, consejos y comprensión.

Por último, agradezco a todos los profesores que me trasmitieron sus conocimientos y me ayudaron a alcanzar mis metas. Su dedicación ha dejado una huella imborrable en mi vida.

Índice

Resumen 7
Capítulo 1 8
Planteamiento del problema 8
1.1 Planteamiento del problema 8
1.2 Objetivo 8
1.3 Justificación 9
1.4 Antecedentes 9
Capítulo 2 13
Marco Teórico 13
2.1 Teoría APOE 13
2.2 Totalidad del infinito 15
2.3 Descomposición genética 16
2.4 Ciclo de investigación 17
2.5 Ciclo de enseñanza ACE 19
2.6 Límite de una función 19
2.7 Teoría de registros de representaciones semióticas 20
Capítulo 3 23
Metodología 23
3.1 Análisis teórico 23
3.2 Diseño e implementación de los instrumentos de investigación 25
3.2.1 Cuestionario 26
3.3 Colección y análisis de datos 31
Capítulo 4 32
Análisis de resultados 32
4.1 Análisis del cuestionario 32
4.2 Análisis de la entrevista clínica 58
Capítulo 5 69
Conclusiones 69
Bibliografía 72

Índice de Figuras

FIGURA 1 CICLO DE INVESTIGACIÓN DE LA TEORÍA APOE. 18
FIGURA 2 PREGUNTA 7 28
FIGURA 3 PREGUNTA 8 30
FIGURA 4 RESPUESTA DE E20 33
FIGURA 5 RESPUESTA DE E54 33
FIGURA 6 RESPUESTA DE E22 33
FIGURA 7 RESPUESTA DE E35 33
FIGURA 8 RESPUESTA DE E49 34
FIGURA 9 RESPUESTA DE E4 34
FIGURA 10 RESPUESTA DE E22 35
FIGURA 11 RESPUESTA DE E9 35
FIGURA 12 RESPUESTA DE E30 36
FIGURA 13 RESPUESTA DE E6 36
FIGURA 14 RESPUESTA DE E5 37
FIGURA 15 RESPUESTA DE E31 38
FIGURA 16 RESPUESTA DE E24 38
FIGURA 17 RESPUESTA E19 39
FIGURA 18 RESPUESTA DE E15 40
FIGURA 19 RESPUESTA E39 41
FIGURA 20 RESPUESTA DE E37 41
FIGURA 21 RESPUESTA DE E6 42
FIGURA 22 RESPUESTA DE E10 42
FIGURA 23 PREGUNTA 7 42
FIGURA 24 RESPUESTA DE E25 43
FIGURA 25 RESPUESTA DE E21 44
FIGURA 26 RESPUESTA DE E45 44
FIGURA 27 RESPUESTA DE E51 45
FIGURA 28 RESPUESTA DE E34 46
FIGURA 29 RESPUESTA DE E26 48
FIGURA 30 RESPUESTA E43 48
FIGURA 31 RESPUESTA DE E15 49
FIGURA 32 RESPUESTA DE E42 50
FIGURA 33 RESPUESTA DE E34 51
FIGURA 34 RESPUESTA DE E34 54
FIGURA 35 PREGUNTA 8 55
FIGURA 36 RESPUESTA DE E8 55
FIGURA 37 RESPUESTA DE E27 56
FIGURA 38 RESPUESTA DE E13 56
FIGURA 39 RESPUESTA DE E27 57
FIGURA 40 RESPUESTA DE E37 57
FIGURA 41 RESPUESTA DE E24 57
FIGURA 42 RESPUESTA DE E20 59
FIGURA 43 REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA EJERCICIO 5 DE E20. 61
FIGURA 44 SEGUNDA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE E20 61
FIGURA 45 TERCERA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE E20. 63
FIGURA 46 PREGUNTA 7 63

FIGURA 47 RESPUESTA 7 A) DE E20. 64
FIGURA 48 RESPUESTA 7 B) DE E20. 65
FIGURA 49 RESPUESTA 7 C) DE E20. 65

Resumen

En esta investigación se analizaron las estructuras mentales de un grupo de estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP cuando se enfrentan a actividades relacionadas con el límite de una función en el registro gráfico. Usamos la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) porque, aunque inicialmente fue diseñada para el estudio de conceptos en niveles educativos superiores, su aplicación se ha ampliado y hoy en día es útil en diversos niveles educativos. También se utilizó la Teoría de representaciones semióticas de Duval la cual nos ayudó a conocer las trasformaciones semióticas que realiza el estudiante entre las diversas representaciones.

Uno de los resultados obtenidos fue la falta de familiaridad con el registro gráfico, ya que se observó cómo un gran número de estudiantes participantes lograron realizar de manera satisfactoria ejercicios en el registro algebraico y analítico, pero al momento de enfrentarse al registro gráfico no lograron coordinar una estructura mental denominada Proceso coordinado de aproximaciones en el dominio y en el rango, el cual es una estructura muy importante para la comprensión del límite.

Palabras clave: límite, registro gráfico, teoría APOE, cálculo, representaciones semióticas.

Capítulo 1

Planteamiento del problema

1.1 Planteamiento del problema

En investigaciones previas se ha detectado cierta dificultad por parte de los estudiantes en la comprensión del concepto de límite de una función, abordado desde una perspectiva informal o utilizando la definición $\varepsilon-\delta$, (Morante, 2020). Este concepto suele enseñarse, mayoritariamente, en el registro algebraico, si bien esto permite que el estudiante comience a construir la concepción del concepto de límite de una función, para Duval (2006), lo que primero importa no es la elección del mejor sistema de representación sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar las diferentes maneras de representar los contenidos matemáticos. Para este caso, por ejemplo, pasar de su representación gráfica a una representación analítica o viceversa. Aunque las investigaciones muestran que el concepto de límite suele introducirse como la idea de aproximación, esta situación no suele verse en la representación gráfica.

Por lo anterior, con esta investigación pretendemos dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál es la comprensión de un grupo de estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP del concepto de límite en el registro gráfico desde el punto de vista de la teoría APOE?

1.2 Objetivo

Analizar la comprensión de un grupo de estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP del concepto de límite en el registro gráfico, desde el punto de vista de la teoría APOE.

1.3 Justificación

Para la presente investigación se empleará la teoría APOE, dado que es una teoría cognitiva que se basa en la epistemología de Piaget y que fue creada específicamente para estudiar los conceptos matemáticos de nivel superior, aunque en la actualidad se utiliza para distintos niveles de educación. Así, siguiendo recomendaciones de investigaciones previas, (Morante, 2020, Analco, 2019, Hernández, et al., 2023), consideramos que sus herramientas teóricas nos permitirán comprender cómo la mayoría de los estudiantes construyen el concepto de límite en el registro gráfico.

Un ejemplo de estas investigaciones es la de Analco (2019) en la cual nos menciona que en el registro gráfico solo el 37.5% relacionó ambas variables a partir de coordinar los Procesos en el dominio y en el rango, ya que, al ver la gráfica, casi todos respondieron en términos de intervalos o encontrando la regla de correspondencia o viendo la continuidad de la función.

Duval (1998) señala que la formación de conceptos implica una coordinación de sistemas de representaciones, lo cual se logra mediante la articulación entre diferentes registros. En este estudio, nos enfocaremos en el registro gráfico, ya que diversas investigaciones, como la de Hitt (2003) indican que la enseñanza del concepto de límite a menudo se restringe a un enfoque puramente algebraico o a definiciones rigurosas, por lo que, es fundamental adoptar métodos alternativos en los que las tablas y gráficas de funciones desempeñen un papel más relevante.

1.4 Antecedentes

La enseñanza del concepto de límite ha sido objeto de varias investigaciones, a continuación, citaremos alguna de ellas, las cuales nos ayudarán a identificar la importancia del uso del registro gráfico para la enseñanza-aprendizaje de este concepto.

Blazquez et al. (2009) nos mencionan que, para interpretar el concepto de límite, es necesario imaginar las variables en movimiento a lo largo de los ejes de coordenadas, por ello, la concepción métrica del límite, es decir, una definición formal, puede ser difícil de comprender, por lo que los libros de textos a menudo utilizan definiciones intuitivas y representaciones gráficas y numéricas para facilitar su entendimiento. Aunque algunos autores prefieren una definición rigurosa pero libre de formalismos, estos autores suelen utilizar los cuatro registros (verbal, gráfico, simbólico y numérico). Uno de los autores que se puede mencionar es Spivak (1981), él recurre al registro gráfico para explicar el concepto de forma intuitiva donde se puede observar cierto dinamismo.

Los tratamientos utilizados en la mayoría de los libros de textos (Spivak, 1981, Stewart, 2012, Thomas, 2018) son: un enfoque intuitivo inicial donde se introduce el concepto de límite de una función utilizando gráficas, tablas y ejemplos prácticos. La definición informal del límite de una función, presenta el límite como el valor al que se acerca una función cuando la variable independiente se aproxima a un número específico, después se utiliza la definición formal del límite de una función al igual que aplicaciones prácticas enfatizando la importancia del concepto de límite en contextos aplicados, por último, se incluyen ejercicios variados tanto teóricos como prácticos.

La interpretación del concepto de límite no solo depende de los libros de textos utilizados por el alumno, ya que el profesor, al ser una guía para la construcción del conocimiento, debe utilizar múltiples métodos para la enseñanza de este concepto. Por ello, se han realizado diversas investigaciones donde se analiza cómo es la enseñanza de este concepto, por ejemplo:

Aquere et al. (2006) mencionan que, generalmente, la enseñanza del cálculo en la universidad d se realiza mediante métodos convencionales, donde se exige al estudiante un simple

"dominio" repetitivo y algorítmico de los conceptos. En particular, el estudio de los límites se basa en definiciones rigurosas y en ejercicios que, aunque aumentan en complejidad, siguen un patrón de pensamiento similar, convirtiéndose en una actividad monótona. Sin embargo, la formación no debe limitarse a la automatización de técnicas operativas; también debe incluir la integración de diversos sistemas de representación.

Blazquez et al. (2009) suponen que una creencia común entre el profesorado universitario es que el concepto de límite es uniforme y constante entre todos los autores. No obstante, al analizar diferentes enfoques, observaron que la variabilidad en la subjetividad, el simbolismo y las representaciones gráficas implica aprendizajes diversos.

Un ejemplo donde se mencionan los aprendizajes diversos obtenidos por los estudiantes se presenta en la investigación realizada por Analco y Hernández (2019), donde mencionan que el registro gráfico es donde menos se evidenció la concepción dinámica, ya que, construyeron la concepción Acción y la de Proceso en el dominio, pero tuvieron dificultades para construir el Proceso en el rango. Mientras que, en la concepción métrica, casi todos los participantes respondieron en términos de la variable x y no en términos de la distancia x en el punto de interés. Observando las diferentes representaciones semióticas, se percataron que, el registro gráfico favoreció la determinación de la no existencia del límite cuando las aproximaciones en el rango no coincidían, mientras que el registro numérico les favoreció para percibir el comportamiento de las variables. Esto contrasta con los resultados de Pons (2014), donde los estudiantes encontraron más útil el registro gráfico para vincular ambas variables.

Pons (2014) reportó que los estudiantes acceden a la concepción dinámica en el modo gráfico, progresa en el numérico y se consolida en el algebraico. Es así como se debe reflexionar

sobre uno de los comentarios de Blázquez y Ortega (2006) donde destacan que el registro gráfico es el más comprendido y preferido por los alumnos.

Por lo que, es importante plantear algunos puntos de vista sobre el registro gráfico, viéndolo de manera general, la geometría. Para ello hacemos mención del siguiente autor.

Duval (2016), menciona que la geometría es una disciplina que exige una actividad cognitiva integral, involucrando movimiento, lenguaje y percepción visual. Su enseñanza es compleja y, a pesar de que los objetivos pueden ser modestos, los resultados a menudo son insatisfactorios. Para comprender una figura geométrica, es fundamental diferenciar entre magnitud, que depende de la escala, y las formas en sí, que son independientes de dicha escala. La relación con las figuras se centra en la identificación de formas, no en la magnitud. Esto subraya la necesidad de una educación que promueva una comprensión profunda y efectiva de los conceptos geométricos. En resumen, una enseñanza adecuada es crucial para mejorar el aprendizaje en este campo.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este capítulo presentamos la base teórica para nuestra investigación. Es importante recordar que se busca conocer cómo los estudiantes conciben el concepto de límite de una función en el registro gráfico, para ello se utilizará la teoría APOE. Por lo que a continuación se describen los principales aspectos de esta teoría y algunos conceptos de la teoría de registros de representación semiótica, que se utilizarán para analizar las respuestas de los estudiantes en diferentes registros.

2.1 Teoría APOE

La teoría APOE toma el nombre de sus siglas que significan, Acción, Proceso, Objeto y Esquema, es una propuesta constructivista para comprender cómo los individuos aprenden conceptos matemáticos. Fue creada por Dubinsky y desarrollada por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) del cual fue el líder.

Esta teoría se centra en la abstracción reflexiva como mecanismo clave para el desarrollo cognitivo. Piaget definió la abstracción reflexiva como un mecanismo mental, es decir, como la capacidad de reflexionar sobre Acciones y Procesos para transformarlos en Objetos estáticos, sobre los cuales se pueden aplicar nuevas operaciones (Arnon et al., 2014).

Dubinsky en los años 80, adaptó estas ideas al contexto de la educación superior, proponiendo que los individuos transitan por cuatro estructuras mentales (***Acción, Proceso, Objeto y Esquema***) para aprender un concepto matemático y mediante los siguientes mecanismos mentales: ***Interiorización, Coordinación, Reversión, Encapsulación y Desencapsulación***, para

poder construir las estructuras mentales necesarias. A continuación, se explican las estructuras y mecanismos mentales como se presenta en Arnon et al. (2014).

Acción: Cuando un individuo tiene una concepción en Acción de un concepto, significa que su entendimiento se limita a realizar transformaciones externas dirigidas de manera específica. Esto implica que el sujeto no puede imaginar libremente diferentes formas de abordar el concepto ni puede omitir pasos en el proceso de comprensión. Es como seguir un conjunto de instrucciones paso a paso sin poder visualizar o entender el concepto más allá de esas instrucciones externas.

Proceso: Cuando un individuo ha ***interiorizado*** las ***Acciones*** en un ***Proceso***, significa que puede reflexionar sobre las ***Acciones*** previas y recrearlas mentalmente sin necesidad de depender de estímulos externos. En este estado, el individuo entiende las ***Acciones*** internamente y puede ***revertir*** las ***Acciones interiorizadas*** que originaron ese ***Proceso***. Es decir, puede retroceder y comprender cómo las ***Acciones*** originales condujeron al estado mental actual sin necesidad de referencias externas.

Objeto: La construcción se logra mediante el mecanismo de ***Encapsulación***, es decir, el individuo aplica una serie de ***Acciones*** sobre un ***Proceso*** (ente dinámico) y lo trasforma en un ente estático. Este ente estático es ahora un ***Objeto*** cognitivo sobre el cual el individuo puede aplicar nuevas ***Acciones***.

Esquema: Un esquema se forma como un conjunto organizado de elementos como ***Acciones, Procesos, Objetos*** y otros esquemas interconectados entre sí. Estos elementos no son estáticos, sino dinámicos, ya que se reconstruyen constantemente a medida que el individuo se involucra en actividades matemáticas específicas.

Las estructuras mentales antes mencionadas se relacionan con los siguientes mecanismos mentales:

Interiorización: mecanismo por el que una actividad realizada externamente se transfiere al mundo interno del individuo, el sujeto ya no necesita apoyos externos para controlarla. A través de este mecanismo, el individuo desarrolla la habilidad de visualizar y recrear mentalmente la actividad que solía depender de representaciones externas físicas. Esta capacidad le permite al individuo no solo imaginar la ejecución de los pasos necesarios, sino también omitir algunos pasos e incluso revertirlos si es necesario.

Coordinación: mecanismo por el que se coordinan dos o más Procesos al igual que Acciones, para poder generar nuevos ***Procesos***. Este ***Proceso*** resultante puede ser ***encapsulado*** como un ***Objeto***.

Reversión: se refiere a restituir el mecanismo que dio origen a el ***Proceso*** en un ***Objeto***. De manera que, al ser el ***Proceso*** una estructura dinámica, esta puede convertirse en algo estático, adquiriendo así la forma de una estructura ***Objeto***.

Encapsulación: cuando se percibe el ***Proceso*** como una totalidad, el individuo ***encapsula*** el ***Proceso*** en un ***Objeto*** cognitivo. En general, implica convertir una estructura dinámica, el ***Proceso***, a una estructura estática, el ***Objeto***.

Desencapsulación: Cuando el individuo ha ***encapsulado*** el ***Proceso*** en un ***Objeto***, puede ***desencapsular*** este ***Objeto*** para regresar a el ***Proceso*** que lo originó, es decir, cuando el ***Objeto*** es reintegrado al ***Proceso***, se llama ***desencapsulación***.

Esta teoría sostiene que los esquemas matemáticos se construyen de manera continua y adaptativa, integrando nuevas experiencias y contextos para fortalecer la comprensión de conceptos matemáticos complejos.

2.2 Totalidad del infinito

Hernández et al. (2023) reportan que, para el caso particular del infinito, Dubinsky et al. (2013) observaron que para que el individuo logre el paso del infinito potencial al actual es necesario que conciba el Proceso de infinito como algo terminado; luego, mediante el mecanismo de encapsulación, debe construir el Objeto sobre el cual puede realizar Acciones. Así, estas autoras propusieron la estructura de Totalidad, que permite ver el Proceso de infinito como un todo, como una entidad estática sobre la que, no necesariamente, es posible aplicar Acciones. Es por esto por lo que, en el contexto del infinito, la estructura de Totalidad se ubica entre el Proceso y el Objeto. El mecanismo mediante el cual un individuo transita de la estructura Proceso del infinito a la Totalidad fue denominado completez por Roa-Fuentes (2012), y se usó para demostrar la Totalidad en Villabona et al. (2022). El infinito está inmerso en el concepto de límite; para ver el Proceso infinito como terminado, el sujeto necesita considerar el límite como Objeto, como el Objeto que trasciende el Proceso (Villabona y Roa-Fuentes, 2016). «En los Procesos infinitos que son analizados a través de una situación al límite, la comprensión que tenga el individuo sobre este concepto hace la diferencia entre ver un Proceso infinito como inacabado o verlo como un todo» (Villabona et al., 2022, p. 193)

2.3 Descomposición genética

Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras mentales y mecanismos que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico (Arnon et al., 2014). Este modelo comienza como una hipótesis basada en la experiencia de los investigadores en la enseñanza y el aprendizaje del concepto, apoyándose en la Teoría APOE, conocimientos matemáticos previos, investigaciones anteriores y la evolución histórica del tema. Es importante aclarar que hasta que se valide experimentalmente, se considera una hipótesis preliminar. La descomposición genética describe las Acciones necesarias de un

individuo sobre Objetos mentales previamente construidos, explicando cómo estas Acciones se convierten en Procesos internos. Estos Procesos se encapsulan en Objetos mentales que forman parte de Esquemas más amplios, estructurando la comprensión del concepto.

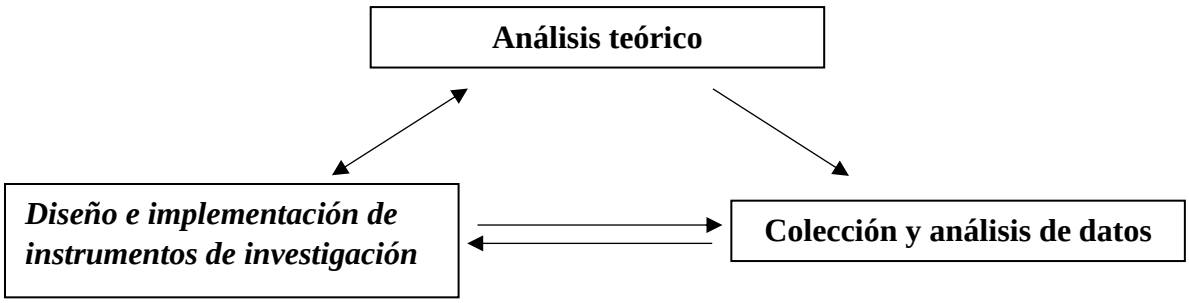
Es crucial entender que un concepto matemático puede estar compuesto por diversas Acciones, Procesos y Objetos, todos interrelacionados y organizados en esquemas mentales. La descomposición genética también aborda las diferencias en el desarrollo de las construcciones mentales entre estudiantes, proporcionando una base para el diseño de tratamientos instructivos. La implementación de estos tratamientos permite recopilar datos a través de instrumentos escritos y entrevistas. El análisis de estos datos busca refinar la descomposición genética preliminar para describir de manera precisa la construcción del concepto.

La teoría APOE reconoce las diferentes formas de aprendizaje que pueden seguir los estudiantes, haciendo notar que las estructuras mentales pueden pasar de Procesos hacia Acciones o desde Objetos hacia Procesos y viceversa. Cada estudiante puede tener diferencias en su desarrollo cognitivo, la descomposición genética predice las construcciones mentales deducidas del análisis de datos recopilados en diseños experimentales. Es decir, proporciona un marco unificador que describe las estructuras necesarias para comprender un concepto matemático de un sujeto genérico (Dubinsky, 1991).

2.4 Ciclo de investigación

En la teoría APOE el ciclo de investigación está formado por tres componentes: el ***análisis teórico***, el ***diseño e implementación de instrumentos de investigación*** y la ***colección y análisis de datos***.

Figura 1
Ciclo de investigación de la Teoría APOE.



Nota: Adaptación de Arnon et al. (2014)

Los tres componentes del ciclo de investigación se dependen entre sí, el ***análisis teórico*** es una base para el diseño e implementación de las actividades y con estas poder analizar las construcciones mentales de los estudiantes.

El ***análisis teórico*** es el primer componente del ciclo de investigación, este consiste en recabar información de libros o investigaciones relacionadas con el tema, lo que conlleva a una descomposición genética.

El ***diseño e implementación de instrumentos de investigación*** se fundamenta en la descomposición genética, un enfoque que permite al estudiante construir conocimientos a través de un proceso gradual y estructurado. En este modelo, el estudiante primero genera Acciones, que luego interioriza como Procesos. A continuación, estos Procesos se encapsulan en un Objeto, y, finalmente, se coordinan múltiples Procesos para generar nuevos conceptos. A lo largo de este ciclo, diversas estrategias pedagógicas pueden facilitar el aprendizaje y la comprensión profunda del concepto en cuestión.

Por último, la ***colección y análisis de datos***, es de suma importancia ya que da evidencia del análisis teórico realizado. En algunos casos se responden las siguientes preguntas:

1. ¿Los estudiantes hicieron las construcciones mentales que requería el análisis teórico?

2. ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el contenido matemático?

Si la respuesta a la primera pregunta es negativa, se reconsidera y revisa la instrucción. Si la respuesta a la primera pregunta es positiva, pero la segunda es negativa, se revisa y se ajusta el análisis teórico. Este ciclo se repite hasta que ambas respuestas sean afirmativas y que los estudiantes hayan comprendido adecuadamente los conceptos matemáticos.

En otros casos se revisan los resultados obtenidos algún cuestionario aplicado, y se analizan las estructuras mentales que tuvo que realizar el estudiante para responderlo.

Finalmente, se proporcionan conclusiones con sugerencias pedagógicas y directrices para futuras investigaciones y su implementación.

2.5 Ciclo de enseñanza ACE

La Teoría APOE sugiere el ciclo de enseñanza ACE (Actividades, Discusión en clase, Ejercicios) el cual es un modelo pedagógico, que está diseñado para favorecer el aprendizaje significativo mediante la interacción de los tres componentes claves. Este ciclo facilita el aprendizaje al integrar aspectos cognitivos y prácticos de la enseñanza, ayudando a que los estudiantes no solo comprendan los contenidos, sino que también desarrollen habilidades para aplicar los conocimientos adquiridos.

2.6 Límite de una función

La definición formal del límite de una función es la siguiente: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, sí para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que, $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces, $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Esta definición se asocia con una concepción métrica, se identifica por ser formal, utilizando la definición $\varepsilon - \delta$. Se deriva de coordinar un Proceso en el dominio donde $|x - x_0|$ se aproxima a cero, y un Proceso en el rango en el cual $|f(x) - L|$ se aproxima a cero (Analco y Hernández, 2020). Para llegar a construir esta concepción el estudiante debe de tener una buena abstracción, es por ello que se estudia en nivel superior.

Para la concepción dinámica tenemos que:

El límite de una función $f(x)$ es L cuando x se aproxima a x_0 de tal manera que el valor de $f(x)$ es cada vez más cercano a L.

El estudiante da muestra haber construido la concepción dinámica del límite de una función cuando logra construir el Proceso en el dominio y el Proceso en el rango y coordinarlos. Es decir, ve al límite como la aproximación de los valores de la función cuando sus imágenes se aproximan a un número. Esta concepción es informal y suele estudiarse en el nivel medio superior y superior (Hernández et al., 2023, p. 121).

2.7 Teoría de registros de representaciones semióticas

Esta teoría fue creada por el psicólogo Raymond Duval, la cual resalta la necesidad de usar diferentes representaciones para la enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos. (Duval, 2006) esta Teoría estudia cómo los estudiantes comprenden los conceptos matemáticos a través del uso de representaciones semióticas, ya que, al ser las matemáticas una actividad semiótica, los objetos matemáticos no son tangibles, es por ello que solo accedemos a ellos a través de representaciones semióticas.

Para Duval (2017) una representación semiótica es cualquier forma de símbolo utilizado para representar un objeto o concepto matemático. Estas representaciones incluyen expresiones algebraicas, gráficos, diagramas y palabras, que permiten a los estudiantes representar, manipular

y comunicar ideas matemáticas. Todas las representaciones semióticas tienen dos características: La primera es que tienen una organización interna, por ejemplo, la organización interna de una representación gráfica no es la de una figura geométrica o un esquema, aunque todas estas son representaciones visuales. La diferencia es en cómo se disponen los elementos dentro de cada tipo de representación y el propósito que tienen. una representación gráfica es de organizar su contenido según criterios visuales que buscan destacar la información relevante de manera clara y comprensible. La segunda es que siempre hay varias formas de distinguir las unidades de significado y los niveles de organización.

Para Duval (2006) es importante aclarar que existe diferencia entre los conceptos de registro de representaciones semióticas y representación. Una representación es como se presenta el concepto en un registro. Algunos ejemplos de registros de representaciones semióticas son: representación numérica, gráfica, algebraica, el lenguaje natural, figuras geométricas, etc. Estas representaciones semióticas son matemáticamente esenciales, al igual que sus posibles trasformaciones semióticas, que pueden ser las siguientes:

- ***Tratamiento:*** es una transformación que se realiza en la misma representación semiótica que la inicial.
- ***Conversión:*** es una trasformación entre distintos registros, para este caso es necesario tener conocimiento de ambos registros semióticos.
- ***Congruencia y No Congruencia:*** La congruencia se refiere a la facilidad con la que una Conversión entre registros mantiene la información explícita. Si una conversión oculta o transforma significativamente la información, se considera no congruente, lo que genera desafíos adicionales para los estudiantes.

- ***Visualización y Significado Cognitivo:*** la visualización es una herramienta para comprender conceptos abstractos y cómo el significado cognitivo depende de la capacidad del estudiante para coordinar registros.
- ***Monorregistro o Multirregistro*:** Los estudiantes pueden operar en un solo registro (monorregistro) o en varios (multirregistro).
- ***Funciones Epistémicas de la Representación:*** Se distinguen entre la función de comunicación (expresar ideas) y la función cognitiva (favorecer la comprensión).

Cada tipo de representación semiótica proporciona medios de tratamientos específicos los cuales no son equivalentes a los de otros tipos de representaciones. El poder realizar trasformaciones de manera satisfactoria, al igual que reconocer qué registro es más adecuado dependiendo de la situación y el poder justificar por qué utilizó alguna representación en el concepto matemático da evidencia de haber consolidado el concepto.

Por último, el estudio semiótico y cognitivo en la teoría de registros de representaciones semióticas es para conocer los registros semióticos utilizados y las trasformaciones aplicadas.

Duval (2006) presenta al objeto matemático como el invariante de una multiplicidad de posibles representaciones.

Capítulo 3
Metodología

La investigación es de tipo cualitativa y se ajusta al ciclo de investigación de la Teoría APOE.

3.1 Análisis teórico

Para el ***análisis teórico*** de esta investigación se decidió utilizar la descomposición genética de Hernández et al. (2023).

La descomposición genética de Hernández, et, al. (2023), tuvo como principal objetivo refinar la descomposición genética de Cottrill (1996), en su concepción dinámica, donde se ven incorporados los registros semióticos.

Primero se enlistan las estructuras mentales previas que necesita el estudiante para construir el concepto de límite de una función real.

Estructuras previas

- Un esquema de números reales que abarque las ideas relacionadas con los distintos conjuntos numéricos, en especial el número racional (tanto en su forma fraccionaria como decimal), así como las propiedades de orden en los números reales.
- Una comprensión del concepto de función real en sus diversas representaciones semióticas, lo que significa que el estudiante es capaz de identificar la imagen de un elemento arbitrario del dominio y visualizar el rango de la función en cualquier tipo de representación semiótica.
- Una concepción de infinito como Proceso (Dubinsky et al. 2005).

Acciones

Dado un elemento del dominio cercano al valor $x=a$, el estudiante llevará a cabo la Acción de asociar este valor con su imagen bajo la función f en cada uno de los registros semióticos correspondientes. En el ***registro numérico***, hará la Acción de analizar una tabla que muestre pares ordenados de números, donde una sucesión corresponde al dominio de la función y la otra a las imágenes correspondientes. En el ***registro algebraico***, realizará la Acción de sustituir elementos del dominio de la función, cada vez más cercanos a $x=a$, en una expresión matemática para determinar su imagen. En el ***registro gráfico***, desempeñará la Acción de ubicar las imágenes en el eje y para distintos valores en el eje x que pertenecen al dominio de la función y que están cada vez más próximos a $x=a$. Finalmente, en el ***registro verbal***, realizará la Acción de describir las acciones realizadas en los otros registros.

Dos estructuras de Proceso, una en el dominio y otra en el rango

Al repetir las Acciones de asociar un valor en el dominio cercano a $x=a$ con su imagen correspondiente, tanto a la izquierda como a la derecha de $x=a$, utilizando diversas funciones representadas en distintos registros de representación, y reflexionar sobre la proximidad de los valores en el dominio a $x=a$, y de los valores en el rango a un valor específico $y=L$, cuando sea posible, el estudiante interioriza estas Acciones en dos Procesos de aproximación infinita: uno en el dominio y otro en el rango, en cada uno de los registros de representación mencionados.

Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real

Cuando el estudiante coordina los dos Procesos descritos anteriormente, utilizando diferentes funciones en cada uno de los registros de representación, ya sea que el límite exista o no, desarrolla un nuevo Proceso que le permite apreciar y representar de diversas maneras las aproximaciones conjuntas: de x acercándose al valor a y de $f(x)$ acercándose, o no, a un valor específico L. Al reflexionar sobre los resultados de estos Procesos en cada registro de

representación y coordinarlos en pares (***numérico-gráfico, numérico-verbal, numérico-algebraico, gráfico-verbal, gráfico-simbólico, algebraico-verbal***), el estudiante construye nuevos Procesos que también se coordinan entre sí. Este Proceso coordinado se considera un Proceso de comprensión dinámica del límite, evidenciado cuando el estudiante puede concluir que, a medida que x se aproxima infinitamente a $x=a$, la función se aproxima al valor $f(x)=L$, independientemente de las representaciones utilizadas.

Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite

Siempre que el límite L de una función f exista en x, el estudiante podrá demostrar que el Proceso coordinado de aproximación infinita ha concluido y afirmar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en cualquier registro semiótico en el que se presente esta situación. Si el límite de la función no existe porque no coinciden, el estudiante podrá determinarlos y argumentar que éste no existe, dado que ambos límites, como aproximaciones infinitas terminadas, son diferentes.

Objeto de la concepción dinámica del límite

Mediante acciones sobre el límite dinámico que demuestran la totalidad del infinito, el estudiante interioriza la concepción dinámica del límite y es capaz de llevar a cabo nuevas Acciones con él, como aplicar sus propiedades.

3.2 Diseño e implementación de los instrumentos de investigación

Se diseñó un cuestionario de ocho reactivos, para conocer la comprensión de los estudiantes al enfrentarse a actividades relacionadas con el concepto de límite. En el cuestionario se consideraron los siguientes aspectos: la definición y el cálculo de límites, la aplicación de la definición formal y las estructuras mentales del límite en el registro gráfico, el cual se aplicó en una sesión de 60 minutos.

Se aplicó una entrevista clínica semiestructurada a uno de los estudiantes que respondió el cuestionario, con la intención de recabar mayor información sobre la comprensión del concepto de límite en el registro gráfico.

3.2.1 Cuestionario

Pregunta 1

Sea *f* una función real cualquiera y $x_0 \in \mathbb{R}$. ¿Qué significa para ti la expresión $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$?

a) Explica con tus propias palabras.

b) Escribe la definición de límite de f en x_0 que recuerdes.

c) Escribe la definición formal de límite de f en x_0 que involucra a δ y ε.

Esta pregunta se realiza para identificar como el estudiante recuerdan la definición de límite tratando de identificar indicios de la concepción dinámica o métrica.

Para la pregunta 1 a) el estudiante podría dar muestra del Proceso que resulta de coordinar los dos Procesos, el Proceso en el dominio donde x se aproxima a x_0, y el Proceso en el rango en el cual $f(x)$ se aproxima a L.

Pregunta 2

Proporciona un ejemplo de una función real *g* que cumpla que el límite de *g* en $x_0 = 0$ sea $L = 2$.

Pregunta 3

Proporciona un ejemplo de una función real *h* que cumpla que el límite de *h* en $x_0 = 0$ no exista.

Estas dos preguntas buscan identificar si el estudiante hace una conversión del registro verbal al registro analítico, numérico o algún otro registro.

Pregunta 4

Demuestra que $\lim_{x \to 3} 5x + 3 = 18$ utilizando la definición formal de límite.

Se realiza esta pregunta para identificar si el estudiante conoce y puede aplicar la definición formal de límite, desencapsula el Objeto de la concepción métrica del límite (Swinyard y Larsen, 2012) para hacer la demostración.

Pregunta 5 (Stewart, 2012, p.97)

Traza la gráfica de una función que cumpla con todas las condiciones dadas:

a) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -2$

c) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$

d) $f(0) = -1$

e) $f(3) = 1$

A continuación, se describen las estructuras mentales que se espera que muestre el estudiante al realizar el ejercicio. Los Procesos se enumeran progresivamente y los subíndices indican el inciso del ejercicio, por ejemplo, P_{1a} significa, Proceso uno del inciso a).

$P_{1a,}\, P_{1b,} P_{1c}$, se construyen a partir de revertir el Proceso límite de una función que está representada en el registro analítico, ya sea en su concepción dinámica o en su concepción métrica, de tal forma que pueda hablar de los Procesos dominio y rango que le permitan ver que, por ejemplo, en a), cuando x se aproxima a cero, por la derecha y por la izquierda, los valores de la función se aproximan a 1. Posteriormente, el estudiante realiza la conversión de las aproximaciones en el dominio y en el rango del registro analítico al registro gráfico, y así, en los Procesos $P_{2a,}\, P_{2b,} P_{2c}$ dará evidencia de los Procesos de aproximación en el dominio y en el rango

en el registro gráfico. Por último, en el Proceso P_3 el estudiante coordina $P_{2a,}\, P_{2b,} P_{2c}$, con el Proceso función que le permite ubicar las imágenes de la función para los valores 0 y 3, de los incisos d) y e), respectivamente, en el registro gráfico, y darse cuenta de que la función no puede tener dos valores diferentes para un mismo valor de x.

Pregunta 6 (Stewart, 2012, p.107)

Calcula los límites que siguen.

a) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

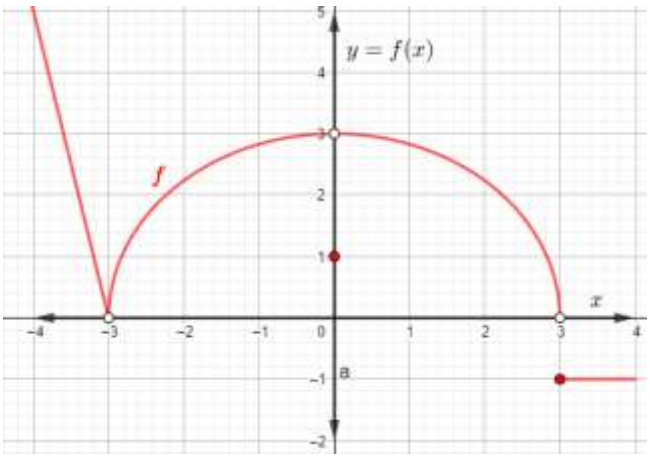
b) $\lim_{h \to 0} \frac{(-5+h)^2-25}{h}$

El estudiante dará evidencia de poder hacer Acciones sobre el concepto de límite en el registro analítico.

Pregunta 7 (Morante 2020)

Considera la gráfica de la función f de la imagen y determina los límites siguientes. Justifica cada una de tus respuestas.

Figura 2
Pregunta 7



a) $\lim_{x \to -3} f(x)$

b) $\lim_{x \to 0} f(x)$

c) $\lim_{x \to 3} f(x)$

Para determinar los límites representados en los incisos a), b) y c), el estudiante debe hacer una conversión del registro analítico al registro gráfico del objeto matemático representado en cada inciso, los cuales son límites de una función, representada por su gráfica, cuando tiende a ciertos valores dados. Para resolver el inciso a), deberá revertir el Proceso coordinado del límite en la concepción dinámica que le permitirá entender que, cuando x se aproxima a -3 por la derecha y por la izquierda, los valores de la función se aproximan a cero. Lo anterior implica usar los Procesos de aproximación en el dominio y en el rango en el registro gráfico. El estudiante, además, deberá hacer uso de la estructura Totalidad del infinito para poder concluir que el límite de la función, cuando x tiende a -3 es cero, aunque la función no esté definida en ese valor de x . Si el estudiante observa las aproximaciones en el dominio y en el rango, pero concluye que el límite no existe, entonces dará evidencia de no haber construido la Totalidad del infinito, es decir, de no ver las aproximaciones infinitas en el rango como terminadas cuando se aproxima infinitamente a -3.

Para determinar que el límite del inciso b) es 3, el estudiante deberá usar las mismas estructuras y mecanismos del inciso a). Los estudiantes que respondan que el límite no existe, darán evidencia de no haber construido la Totalidad del infinito, ya que evidenciarán que no lograron concebir al Proceso coordinado como terminado para concluir que $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$. Si responden que el límite es 1, darán evidencia de concebir al límite como la Acción de evaluar la función en el valor al que tiende (en este caso en 0).

Para determinar que el límite no existe en el inciso c), el estudiante deberá revertir el Proceso coordinado del límite, representado en el registro analítico. Después, deberá hacer una conversión y construir un Proceso en el registro gráfico que le permita entender que cuando se

aproxima a 3 por la derecha y por la izquierda, los valores de la función se aproximan, respectivamente, a dos valores diferentes. Este Proceso revertido deberá coordinarlo con el Proceso unicidad del límite o con el teorema que establece que, el límite existe en un punto, si y solo si los límites laterales en ese punto existen y son iguales, para concluir que el límite no existe.

Pregunta 8 (Morante, 2020)

Utiliza la representación gráfica de la función f que se da a continuación para responder lo que se pide.

Figura 3
Pregunta 8

a) Calcula $f(2.4), f(2.5)\ y\ f(2.6)$

b) Determina o calcula el límite L de f en $\mathrm{a} = 2.5$

c) Demuestra o justifica tu respuesta al inciso b)

i. Utilizando la definición formal.

ii. Con cualquier método de tu preferencia.

Esta pregunta se realizó para identificar en el inciso a) si el estudiante logra realizar Acciones de evaluar la función y de ubicar los valores que toma esta cuando x tiene un valor determinado en el registro gráfico.

Para el inciso b) el estudiante debe de identificar que el límite no existe, para esto él debe de convertir del registro analítico al registro gráfico, y usar el Proceso coordinado para darse cuenta que, cuando x tiende a 2.5 por la derecha, la función se aproxima a un valor distinto que cuando x tiende a 2.5 por la izquierda.

En el inciso c) el estudiante debe utilizar la definición formal de límite que se pidió en la pregunta uno, para demostrar que el límite no existe, y así dar evidencia de que ha construido el Proceso de prueba de que un candidato es el límite de una función, en la concepción métrica (Morante, 2020), en este caso que el límite no existe. Por último, si justifica su respuesta diciendo que el límite no existe, ya que los límites laterales son distintos, dará evidencia del Proceso del inciso b), en el registro gráfico.

3.3 Colección y análisis de datos

En esta investigación participaron 55 estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP que cursaban la materia de Cálculo Diferencial en el periodo primavera 2024, estos estudiantes son de la licenciatura en Actuaría, Matemáticas y Matemáticas Aplicadas, y estaban a punto de culminar el curso.

Se analizaron las respuestas de cada estudiante, seleccionando a cinco de ellos para realizar una entrevista clínica semiestructurada, y poder recabar más información sobre las estructuras mentales utilizadas, de estas entrevistas clínicas se eligió al estudiante E20 para el análisis de esta investigación, ya que, aportó mayor información acerca de las dificultades que podría tener un estudiante en el registro gráfico.

Capítulo 4

Análisis de resultados

Para presentar los resultados se etiqueta a los estudiantes con la letra "E" seguida del número correspondiente, es decir, E1, E2, etc.

En este capítulo se presenta el análisis de los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario, seleccionando a cinco de ellos para realizar una entrevista clínica semi estructurada, y poder recabar más información sobre las estructuras mentales utilizadas, de estas entrevistas clínicas se eligió al estudiante E20, ya que, aportó mayor información acerca de las dificultades que podría tener un estudiante en el registro gráfico.

4.1 Análisis del cuestionario

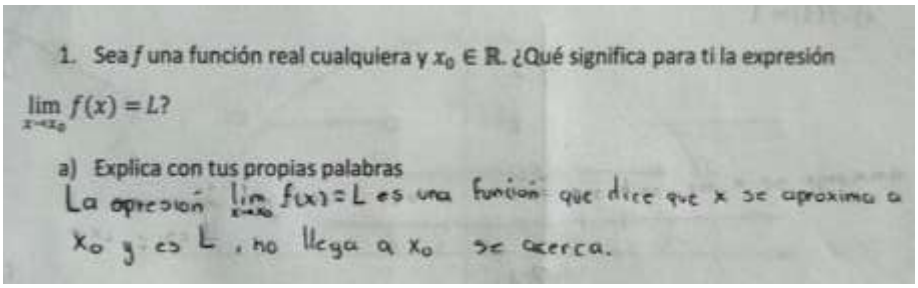
Pregunta 1

Sea *f* una función real cualquiera y $x_0 \in \mathbb{R}$. ¿Qué significa para ti la expresión $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$?

a) Explica con tus propias palabras

El 34.54% de los estudiantes exhibió una explicación correcta, dando muestra del Proceso que resulta de coordinar los dos Procesos, el Proceso en el dominio donde x se aproxima a x_0, y otro en el rango en el cual $f(x)$ se aproxima a L, como lo menciona E55 *"Que para los valores cercanos a x_0 la función los envía a valores cercanos de L"*. El resto del grupo solo dio muestra del primer Proceso, es decir el Proceso de aproximación en el dominio, como se muestra en Figura 4.

Figura 4
Respuesta de E20


1. Sea f una función real cualquiera y $x_0 \in \mathbb{R}$. ¿Qué significa para ti la expresión $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$?

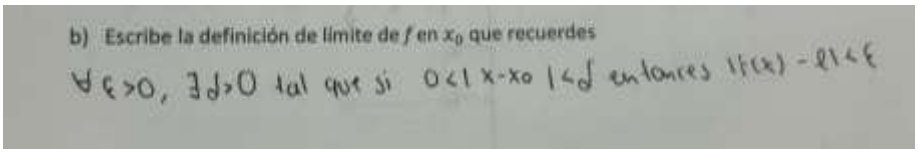
a) Explica con tus propias palabras

La opresión $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ es una función que dice que x se aproxima a x_0 y es L, no llega a x_0 se acerca.

b) Escribe la definición de límite de f en x_0 que recuerdes

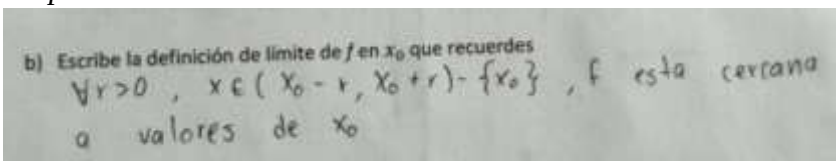
El 78.19% de los estudiantes escribió la definición formal de límite de f en x_0 que involucra a δ y ε. Por ejemplo, la respuesta de E54 que se muestra en la Figura 5, mientras que 21.81% escribió una definición parcial como la de E22 que se puede ver en la Figura 6.

Figura 5
Respuesta de E54


b) Escribe la definición de límite de f en x_0 que recuerdes

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

Figura 6
Respuesta de E22

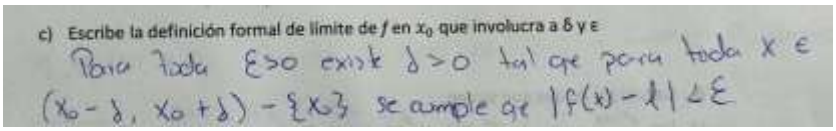

b) Escribe la definición de límite de f en x_0 que recuerdes

$\forall r > 0$, $x \in (x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\}$, f esta cercana a valores de x_0

c) Escribe la definición formal de límite de f en x_0 que involucra a δ y ε.

100% del grupo enunció de manera correcta la definición, utilizando, en su mayoría, los símbolos correspondientes, podemos ver el ejemplo de E35 en la Figura 7.

Figura 7
Respuesta de E35


c) Escribe la definición formal de límite de f en x_0 que involucra a δ y ε

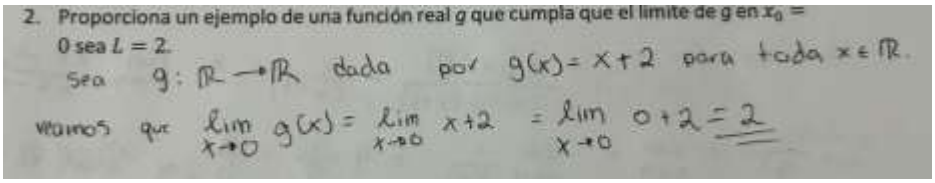
Para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ se cumple que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

Pregunta 2

Proporciona un ejemplo de una función real g que cumpla que el límite de g en $x_0 = 0$ sea $L = 2$.

Todos los estudiantes contestaron correctamente dando la mayoría, como ejemplo, la función constante $g(x) = 2$. Seis estudiantes sustituyeron el valor x_0 en la función propuesta, dando evidencia de una conversión del registro verbal al registro numérico, esto se puede ver en la Figura 8, 2 estudiantes sí justificaron la sustitución de x_0 en la función, diciendo que la función es continua, como se muestra en la Figura 9, por último, 4 estudiantes lo justificaron haciendo una demostración formal, vea la Figura 10, haciendo una conversión del registro verbal al registro analítico.

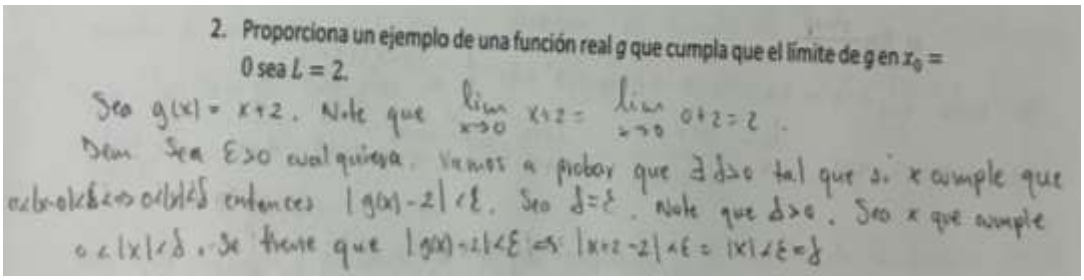
Figura 8
Respuesta de E49


2. Proporciona un ejemplo de una función real g que cumpla que el límite de g en $x_0 =$ 0 sea $L = 2$.

Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x + 2$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Veamos que $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x+2 = \lim_{x \to 0} 0+2 = \underline{\underline{2}}$

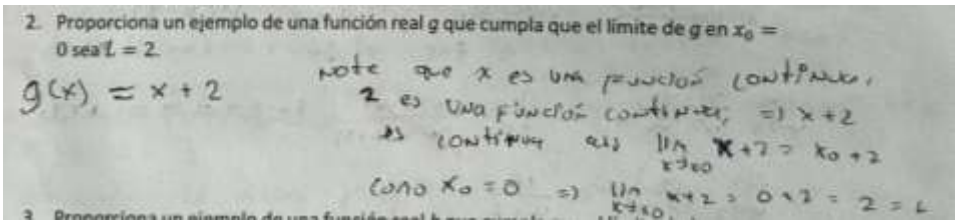
Figura 9
Respuesta de E4


2. Proporciona un ejemplo de una función real g que cumpla que el límite de g en $x_0 =$ 0 sea $L = 2$.

Sea $g(x) = x+2$. Note que $\lim_{x \to 0} x+2 = \lim_{x \to 0} 0+2 = 2$.

Dem Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Vamos a probar que $\exists\, \delta > 0$ tal que si x cumple que $0 < |x-0| < \delta \Leftrightarrow 0 < |x| < \delta$ entonces $|g(x) - 2| < \varepsilon$. Sea $\delta = \varepsilon$. Note que $\delta > 0$. Sea x que cumple $0 < |x| < \delta$. Se tiene que $|g(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x+2-2| < \varepsilon = |x| < \varepsilon = \delta$

Figura 10
Respuesta de E22



Pregunta 3

Proporciona un ejemplo de una función real *h* que cumpla que el límite de *h* en $x_0 = 0$ no exista.

El 94.54% de los estudiantes proporcionó una función que cumplía con las condiciones dadas, la mayoría dio como respuesta la función $h(x) = \frac{1}{x}$. Un conjunto de 23 estudiantes justificó su respuesta, 20 utilizaron el Teorema que establece que, el límite existe en un punto, si y solo si los límites laterales en ese punto existen y son iguales, dando evidencia de realizar la conversión del registro verbal al registro analítico, como lo vemos en la Figura 11, en particular, E30 realizó la conversión al registro gráfico, mientras que los otros tres estudiantes hacen notar que $\lim_{x\to x_0} h(x) = \infty$, por lo tanto el límite no existe, un ejemplo claro es E30 en la Figura 12.

Figura 11
Respuesta de E9

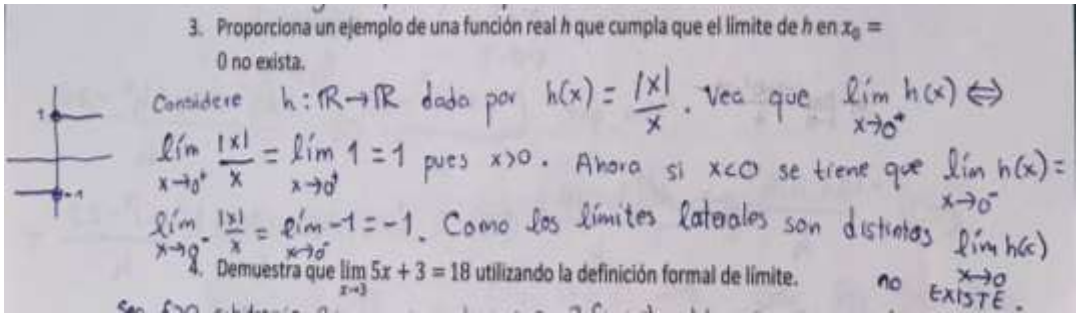
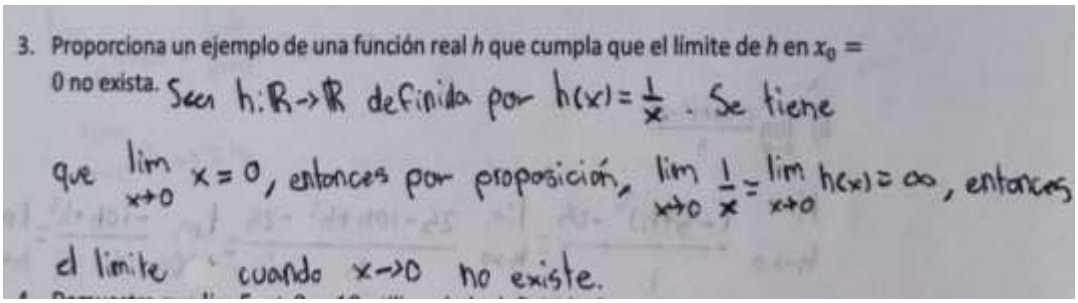


Figura 12

Respuesta de E30



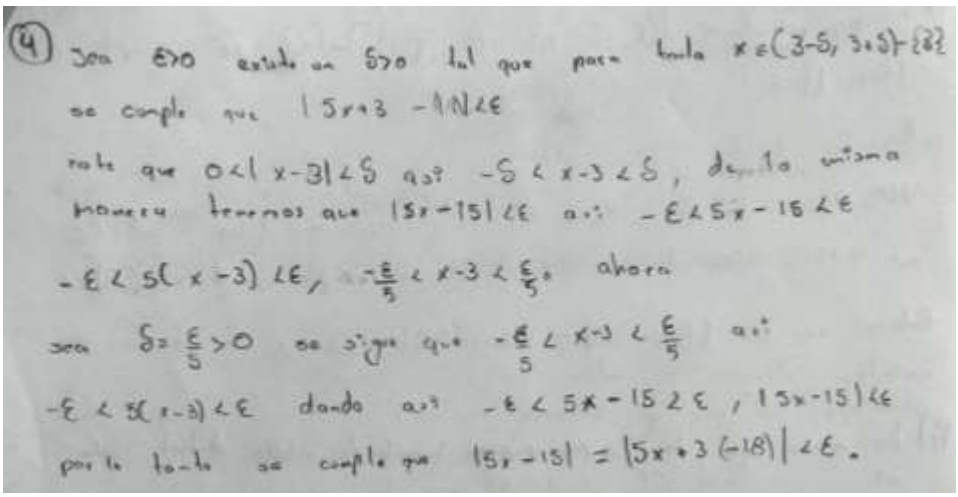
3. Proporciona un ejemplo de una función real h que cumpla que el límite de h en $x_0 = 0$ no exista. Sea $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{1}{x}$. Se tiene que $\lim_{x \to 0} x = 0$, entonces por proposición, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} h(x) = \infty$, entonces el límite cuando $x \to 0$ no existe.

Pregunta 4

El 72.72% de los estudiantes contestaron de manera satisfactoria, dando evidencia de conocer la definición y poder aplicarla, revirtiendo el Proceso de la concepción métrica del límite, un ejemplo de ellos es E6 (Figura 13), mientras que el resto de los estudiantes no proporcionaron el valor de δ, ellos escribieron la definición de límite adaptándola al problema, sin realizar la demostración, mostrando que conocen la definición pero no logran revertir el Proceso de la concepción métrica del límite, como lo vemos en la figura 14.

Figura 13

Respuesta de E6



(4) Sea $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda $x \in (3-\delta, 3+\delta) - \{3\}$ se cumple que $|5x+3 - 18| < \varepsilon$

note que $0 < |x-3| < \delta$ así $-\delta < x-3 < \delta$, de la misma manera tenemos que $|5x-15| < \varepsilon$ así $-\varepsilon < 5x-15 < \varepsilon$

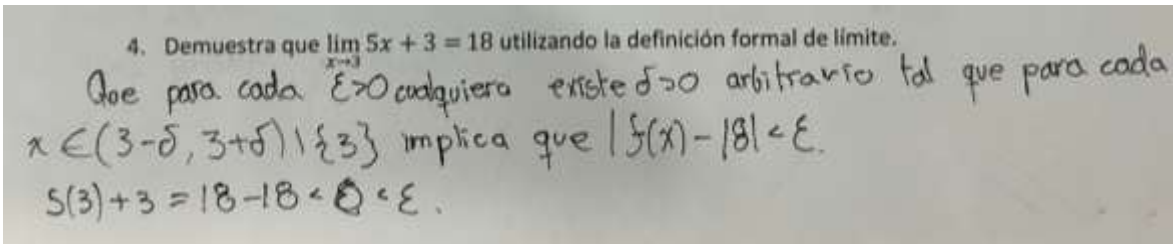
$-\varepsilon < 5(x-3) < \varepsilon$, $-\frac{\varepsilon}{5} < x-3 < \frac{\varepsilon}{5}$. ahora

sea $\delta = \frac{\varepsilon}{5} > 0$ se sigue que $-\frac{\varepsilon}{5} < x-3 < \frac{\varepsilon}{5}$ así

$-\varepsilon < 5(x-3) < \varepsilon$ dando así $-\varepsilon < 5x-15 < \varepsilon$, $|5x-15| < \varepsilon$

por lo tanto se cumple que $|5x-15| = |5x+3(-18)| < \varepsilon$.

Figura 14
Respuesta de E5


4. Demuestra que $\lim_{x\to 3} 5x + 3 = 18$ utilizando la definición formal de límite.

Que para cada $\varepsilon>0$ cualquiera existe $\delta>0$ arbitrario tal que para cada $x\in(3-\delta, 3+\delta)\setminus\{3\}$ implica que $|f(x)-18|<\varepsilon$.

$5(3)+3=18-18<0<\varepsilon$.

Pregunta 5

Traza la gráfica de una función que cumpla con todas las condiciones dadas:

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

b) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -2$

c) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$

d) $f(0) = -1$

e) $f(3) = 1$

El 50.9% pudo realizar la gráfica correctamente, un ejemplo de ello es la respuesta de E31 en la Figura 15, ocho estudiantes requirieron incrementar condiciones a la función para hacer una representación gráfica, por ejemplo, la respuesta de E25 en la Figura 16. En el intervalo (0,3) él decide agregar estas dos condiciones: $f(1) = 1$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$, para conseguir una representación gráfica. Estos estudiantes dan muestra del Proceso P_3, coordinando los Procesos de aproximación en el dominio y en el rango en el registro gráfico con el Proceso función.

Figura 15
Respuesta de E31

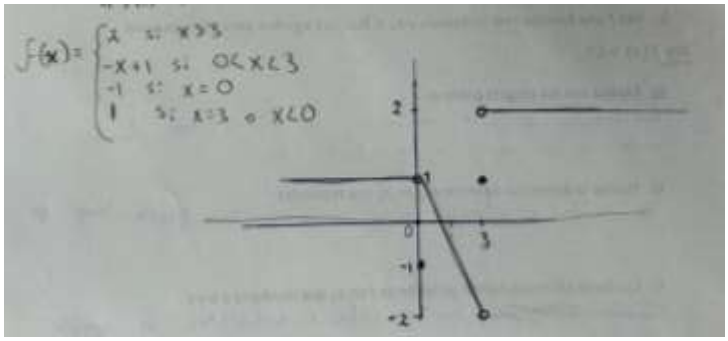
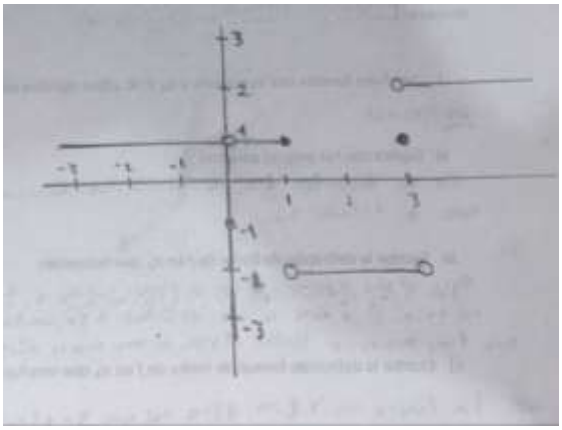


Figura 16
Respuesta de E24



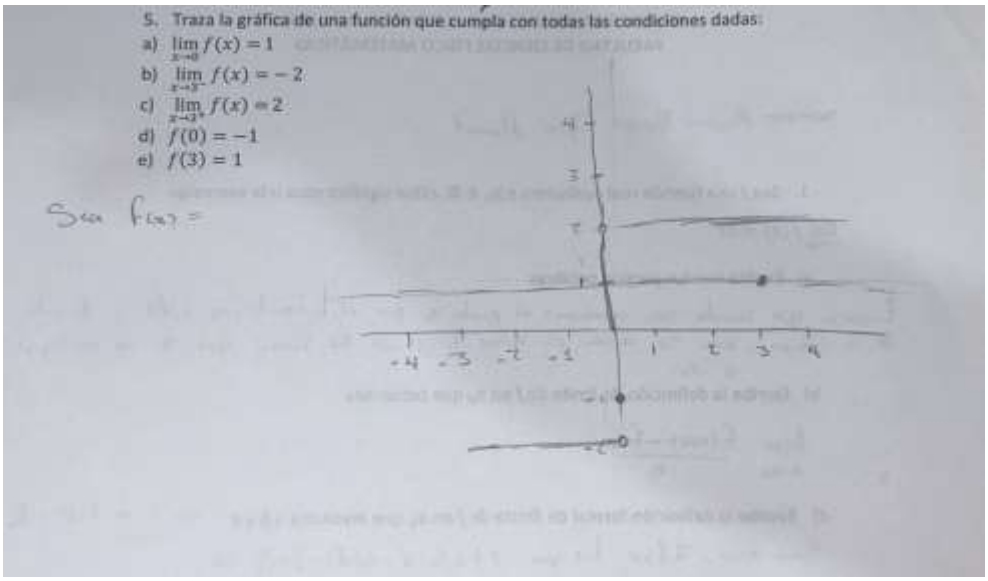
El 49.1% restante tuvo errores en su gráfica, los cuales fueron:

- 3 estudiantes de manera concreta confunden el 3^- con el -3^-, por ejemplo, E3 en el inciso b) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -2$, lo graficó como si $x \to -3^-$, es decir, sí toma los valores por la izquierda, pero al momento de ubicar en el eje horizontal toma al 3 como -3, y lo representa en el tercer cuadrante.

- 15 no mostraron el concepto de función como Proceso, es decir, que para un valor de x no puede haber dos valores de $f(x)$, esta situación se evidenció de dos maneras:

- 6 de ellos no indicaron en la representación gráfica dónde la función no está definida, por ejemplo, E36 coloca que la función está definida en los puntos (3,-2), (3,2), (3,1), tomando en consideración los incisos b), c) y e) respectivamente.
- 9 sobreponen dos o más “líneas” en el eje horizontal, dando más de un valor a la función para un intervalo de valores de x, esto lo observamos en la Figura 17.

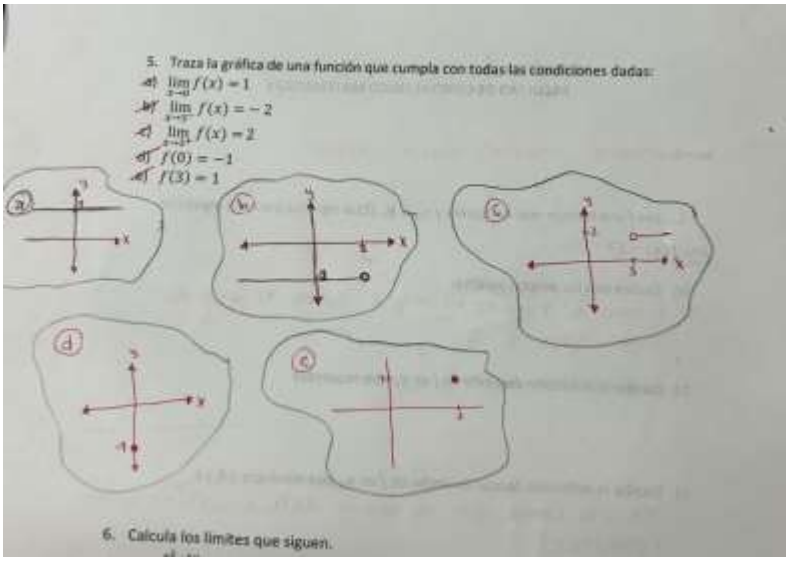
Figura 17
Respuesta E19



El 9%, es decir, cinco estudiantes, realizaron cinco gráficas, una por cada inciso, esto era una posibilidad, ya que pueden mal interpretar la instrucción, como se muestra en la Figura 18.

Estos estudiantes evidencian la dificultad para coordinar los Procesos en el dominio y en el rango en el registro gráfico.

Figura 18
Respuesta de E15



- Por último, a 4 estudiantes les faltó graficar algún inciso.

Pregunta 6

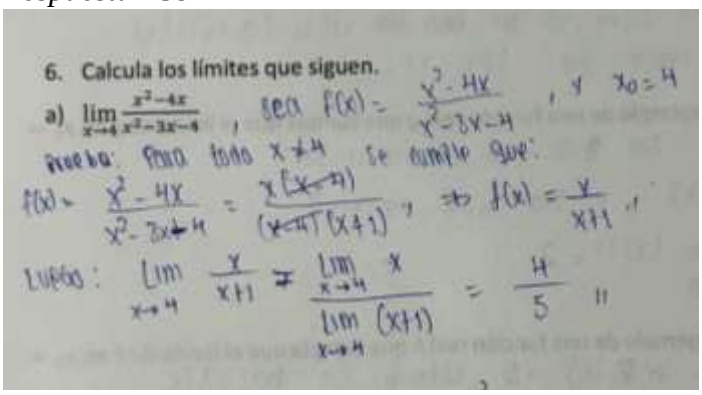
Calcula los límites que siguen.

a) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

El 72.73% de los estudiantes logró calcular el límite correctamente, realizando Acciones sobre el concepto de límite, véase un ejemplo en la Figura 19. El 27.27%, es decir catorce estudiantes, no calcularon de manera correcta el límite, doce tuvieron errores algebraicos, ya que, no realizaron la factorización de la función, evaluaron el valor de x_0 en la función original, o en la función mal factorizada, obteniendo que el límite no existe o que el límite es igual a cero, por ejemplo, el estudiante E37, en la Figura 20 y dos de ellos no realizaron el ejercicio.

Figura 19

Respuesta E39



6. Calcula los límites que siguen.

a) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$, sea $f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$, y $x_0 = 4$

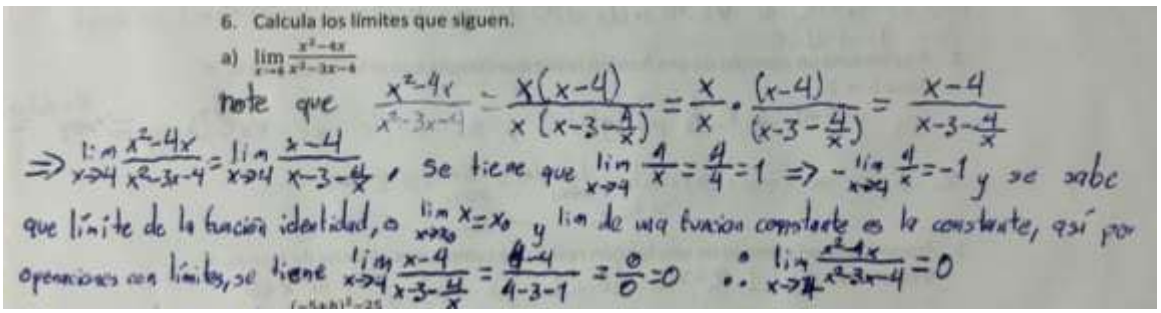
Prueba: Para todo $x \neq 4$ se cumple que:

$f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4} = \frac{x(x-4)}{(x-4)(x+1)}$, $\Rightarrow f(x) = \frac{x}{x+1}$,,

Luego: $\lim_{x\to 4} \frac{x}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 4} x}{\lim_{x\to 4}(x+1)} = \frac{4}{5}$,,

Figura 20

Respuesta de E37



6. Calcula los límites que siguen.

a) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

note que $\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4} = \frac{x(x-4)}{x(x-3-\frac{4}{x})} = \frac{x}{x} \cdot \frac{(x-4)}{(x-3-\frac{4}{x})} = \frac{x-4}{x-3-\frac{4}{x}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x-3-\frac{4}{x}}$, se tiene que $\lim_{x\to 4} \frac{4}{x} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow -\lim_{x\to 4} \frac{4}{x} = -1$ y se sabe que límite de la función identidad, o $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ y lim de una función constante es la constante, así por operaciones con límites, se tiene $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x-3-\frac{4}{x}} = \frac{4-4}{4-3-1} = \frac{0}{0} = 0$ $\therefore \lim_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4} = 0$

b) $\lim_{h\to 0} \frac{(-5+h)^2-25}{h}$

El 81.82% proporcionó una respuesta correcta, realizando Acciones sobre el concepto de límite, como se puede ver en la Figura 21. Los 10 estudiantes que tuvieron una respuesta errónea, se clasifican de la siguiente manera: tres de ellos no realizaron el ejercicio y los siete estudiantes restantes no desarrollaron el binomio al cuadrado, por lo que solo sustituyeron el valor x_0 en la ecuación, como en la Figura 22.

Figura 21
Respuesta de E6

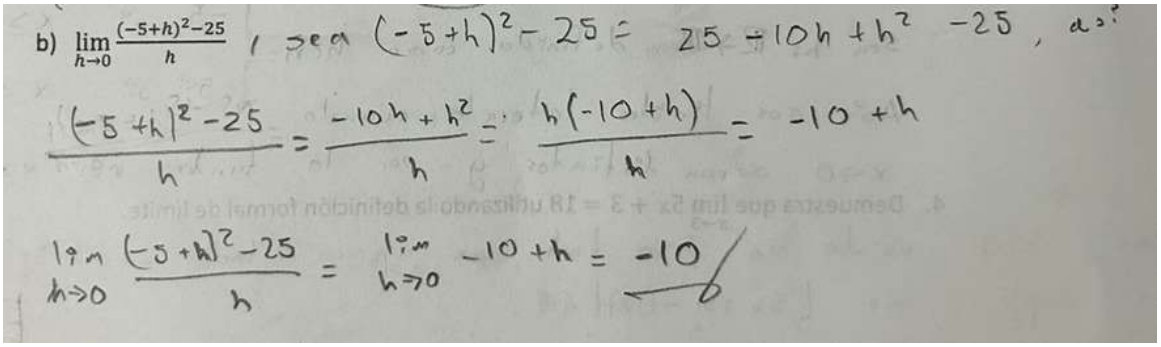
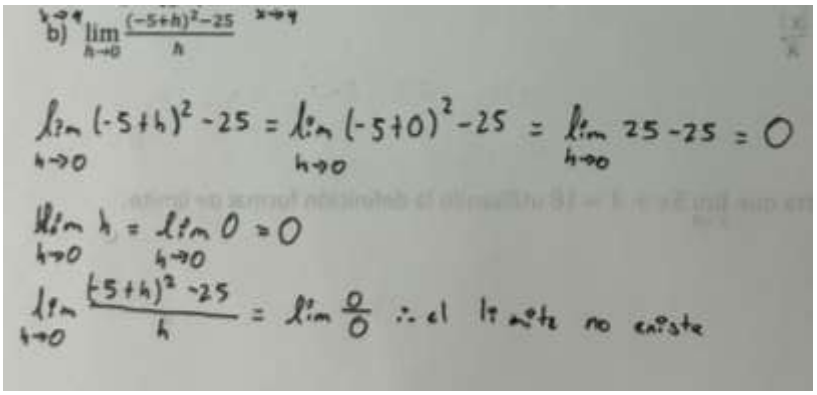


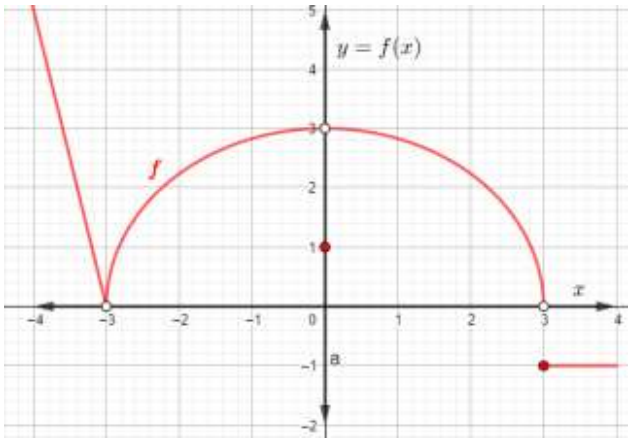
Figura 22
Respuesta de E10



Pregunta 7

Considera la gráfica de la función f de la imagen y determina los límites siguientes. Justifica cada una de tus respuestas.

Figura 23
Pregunta 7



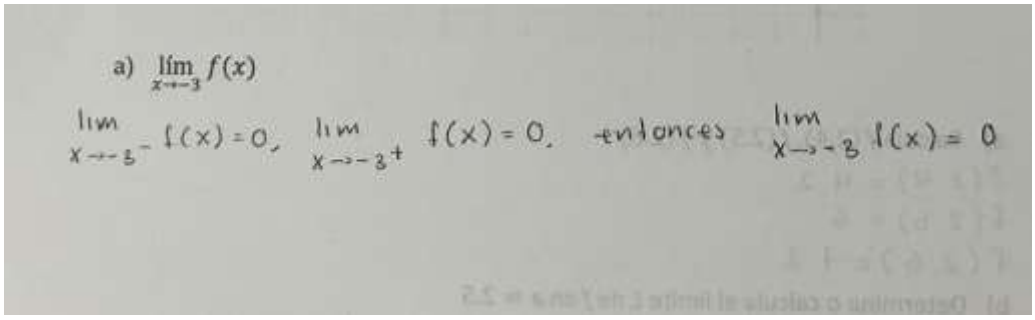
a) $\lim_{x \to -3} f(x)$

El 61.81% proporcionó la respuesta correcta es decir $\lim_{x \to -3} f(x) = 0$. Para justificar su respuesta recurren a las siguientes opciones:

- 23 estudiantes ocupan la propiedad de límites laterales, haciendo notar que, el límite por la derecha y el límite por la izquierda son iguales. En estos casos suponemos que los estudiantes revirtieron el Proceso coordinado del límite en la concepción dinámica, luego, hicieron una conversión del registro analítico al registro gráfico e hicieron uso de la estructura Totalidad del infinito, para afirmar que el límite de la función dada, cuando x tiende a 3 es cero, vemos un ejemplo Figura 24.

Figura 24

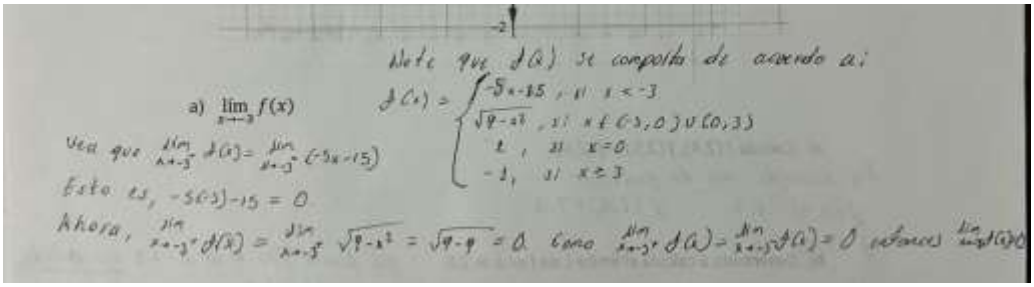
Respuesta de E25



- Tres de ellos justifican su respuesta, al parecer, por lo que ven en la gráfica, por ejemplo, E47 *"Se nota que la función tiende al valor cero cuando x se aproxima al -3"*, se puede interpretar que realizaron los Procesos de aproximación en el dominio y en el rango en el registro gráfico, y para ello pudieron hacer la conversión del registro analítico al registro gráfico del objeto matemático en su concepción dinámica.

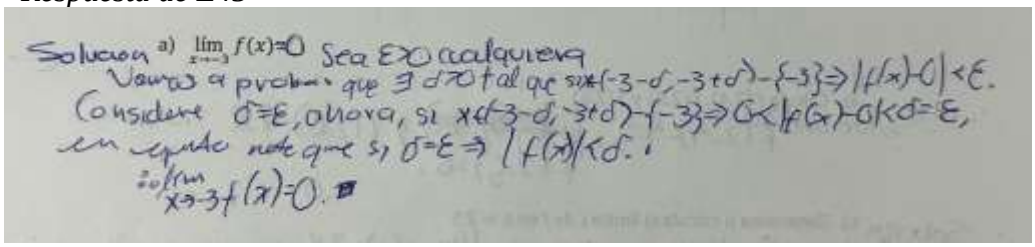
- Cuatro presentan una dependencia del registro algebraico, obteniendo la expresión algebraica de la función que está en la representación gráfica y sustituyendo en ella el valor de -3 para obtener el límite de la función, por ejemplo, Figura 25.

Figura 25
Respuesta de E21



- Dos intentan demostrar el valor del límite propuesto utilizando la definición formal de límite, un ejemplo claro está en la Figura 26.

Figura 26
Respuesta de E45



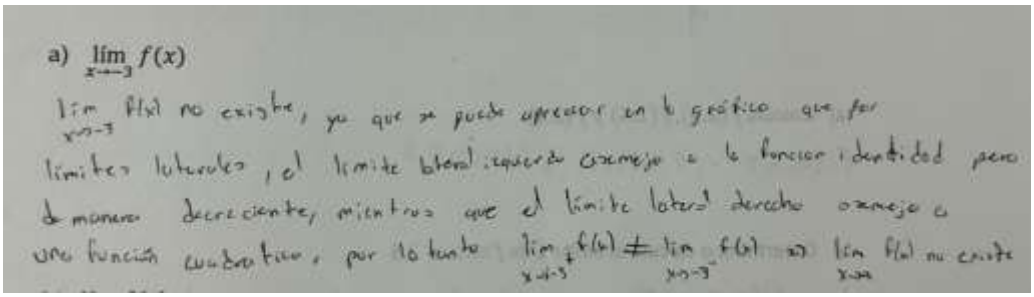
- El estudiante E36 justifica su respuesta afirmando que como $f(-3) = 0$ entonces $\lim_{x \to -3} f(x) = 0$ que es erróneo, ya que en la representación gráfica la función no está definida en $x = -3$, , por lo que no logra hacer la conversión del registro analítico al registro gráfico y dando muestra que concibe al límite como la Acción de evaluar la función en el valor al que tiende. También, podemos agregar que este estudiante no da muestra de los Procesos dominio y rango.

- Solo un estudiante no realizó una justificación.

Respecto a los 14 estudiantes que tuvieron una respuesta incorrecta tenemos las siguientes categorías.

- 11 estudiantes indican que el límite no existe
    - Ocho explican que los límites laterales son distintos, por lo tanto, el límite no existe, se percibe que su confusión está en la gráfica cuando $x < -3$ es una línea recta mientras que cuando $x > -3$ la gráfica es una curva, por lo que estos estudiantes no utilizaron ni coordinaron los Procesos de aproximación en el dominio y en el rango en el registro gráfico, la Figura 27 nos da un ejemplo de ello.

Figura 27
Respuesta de E51



    - El estudiante E18 dice *"Dado que $y = f(x)$, la función no está definida en ese punto, por lo tanto, el $\lim_{x\to-3} f(x)$ no existe"*, esto indica que el estudiante no es capaz de realizar la conversión del registro analítico al registro gráfico. Además, revela que concibe el límite únicamente como la Acción de evaluar la función en el punto al que se aproxima.
    - E55 señala que *"No existe porque hay discontinuidad y la gráfica no muestra su imagen"*, se cree que asoció la proposición de que si una función es continua entonces su límite existe, y al mencionar que la "gráfica no muestra su

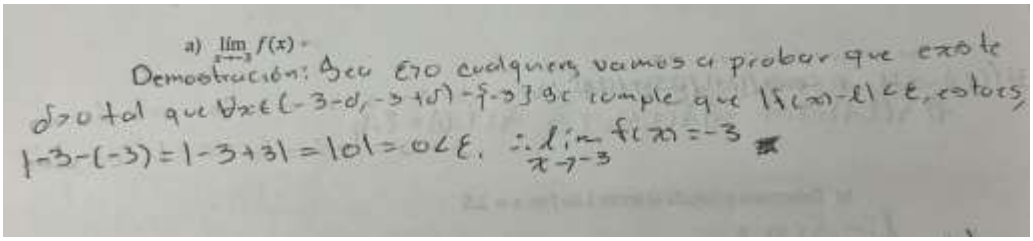
imagen” parece que ve al límite como el valor que toma la función cuando se evalúa en ese punto, en este caso -3.

- Un estudiante solo afirmó que el límite no existe, pero no dio ninguna justificación.

- E20 escribió que $\lim_{x \to -3} f(x) = -\infty$ y su justificación fue la siguiente: *“bueno por la función de $x_0 = -3$ por su comportamiento pienso que su imagen es el símbolo $-\infty$, aunque también podría ser 3 por la curva”*, en esta justificación notamos que no tiene una sola respuesta, tiene dos, el límite puede ser $-\infty$ o 3. A este estudiante se le realizó una entrevista, a lo que respondió que, creía que el límite era $-\infty$ ya que la función va en esa dirección, señalando en la gráfica que, respecto a el eje x, la función sigue tomando valores hasta el $-\infty$, realizando solo el Proceso en el dominio. Cuando se le preguntó por qué creía que el límite es 3, ella señaló la curva, haciendo notar que va en dirección a ese punto.

- E34 intentó hacer una demostración con la definición formal de límite, utilizando lo que quería demostrar, es decir, da por hecho en su demostración que el límite es -3, y concluye lo mismo. En la Figura 28 podemos observar cómo realizó su demostración.

Figura 28
Respuesta de E34


a) $\lim_{x \to -3} f(x) =$
Demostración: Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera vamos a probar que existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (-3-\delta, -3+\delta) - \{-3\}$ se cumple que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, entonces
$|-3-(-3)| = |-3+3| = |0| = 0 < \varepsilon$. $\therefore \lim_{x \to -3} f(x) = -3$

- E32 comienza intentando realizar una demostración formal, pero la deja a un lado, para intentar dar una justificación con los valores que toma la función tanto por izquierda como por derecha, sin poder coordinar los Procesos de aproximación en el dominio y en el rango de la función en el registro gráfico.

b) $\lim_{x \to 0} f(x)$

El 65.45% de los estudiantes afirman que el $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$ lo cual es correcto, los comentarios de este inciso se dividen en dos categorías.

1. Los estudiantes que tuvieron el inciso anterior correcto y este correcto, haciendo notar que los estudiantes que tuvieron el inciso anterior correcto también tuvieron este.

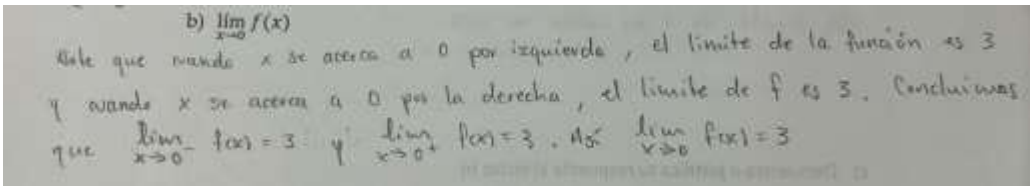
2. Los que tuvieron incorrecto el inciso anterior, es importante destacar que 2 tuvieron este inciso correcto, posteriormente se mencionan sus justificaciones.

Comenzaremos con la categoría uno.

- 22 estudiantes realizan su justificación utilizando límites laterales, por lo que hicieron la conversión del registro analítico al registro gráfico del objeto matemático, al igual que lograron revertir el Proceso coordinado de límite, utilizando los Procesos de aproximación en el dominio y en el rango en el registro gráfico y la estructura Totalidad del infinito, cabe recalcar que son los mismos estudiantes, a excepción de uno, que justificaron con límites laterales el inciso anterior, veamos un ejemplo de una justificación textual en la Figura 29.

Figura 29

Respuesta de E26



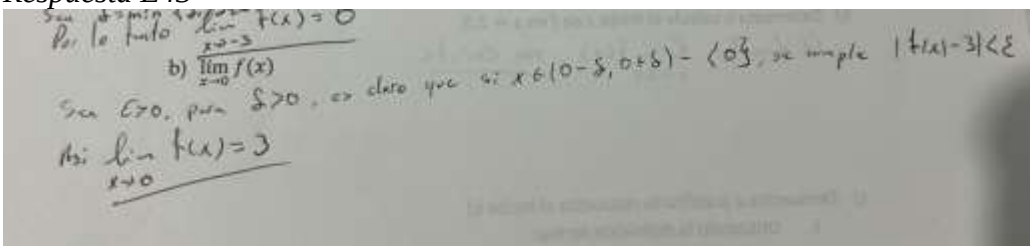
- Dos estudiantes comentan su respuesta, al parecer, por lo que ven en la gráfica, por ejemplo, E35 escribió *"$\lim_{x\to 0} f(x) = 3,\ f(0) = 1$ pero cuando x tiende a 0, y tiende al 3",* pareciera que ha podido construir la estructura Totalidad del infinito, ya que concluye que el límite de la función, cuando tiende a 0 es 3, aunque la función no está definida en ese valor, es decir, no concibe al límite como la Acción de evaluar la función en el valor al que tiende, y logra coordinar los Procesos en el dominio y en el rango.

- Los mismos cuatro estudiantes que en el inciso anterior justificaron su respuesta utilizando una expresión algebraica de la función, utilizaron esa misma expresión para encontrar el valor del límite, sustituyendo el valor de $x_0 = 0$ en la expresión propuesta, sin tomar en cuenta que $f(0) = 1$, ya que en la expresión algebraica se puede observar que toman a la gráfica en (-3,3) como continua.

- Tres estudiantes intentan justificar su respuesta utilizando la definición formal de límite, en la Figura 30, vemos cómo utilizan la definición.

Figura 30

Respuesta E43



- El estudiante E36 justifica su respuesta, *"note* $f(0) = 3$, *luego "*$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 3$*"*, resaltando que concibe al límite como el valor que toma la función en el valor al que tiende.

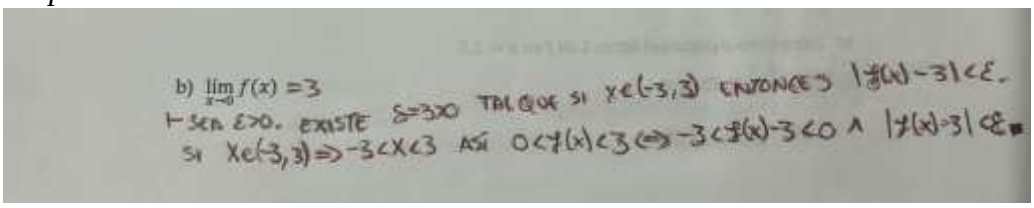
- E41 escribió para justificar su respuesta "$\lim_{x \to 0} f(x) = 3$ *aunque el punto sea 1 las líneas van a 3",* este comentario nos hace notar que, ha logrado revertir el Proceso coordinado del límite y tiene clara la estructura Totalidad del infinito, al igual que sí logra realizar la conversión del registro analítico al registro gráfico.

- Por último, un estudiante, el mismo que el inciso anterior, no justifica su respuesta.

Para la categoría 2:

- Uno de ellos no realizó el reactivo.
- Dos de ellos sí lo tuvieron correcto, pero con diferente justificación
    - E15 intenta realizar una demostración formal, véase en Figura 31

Figura 31
Respuesta de E15



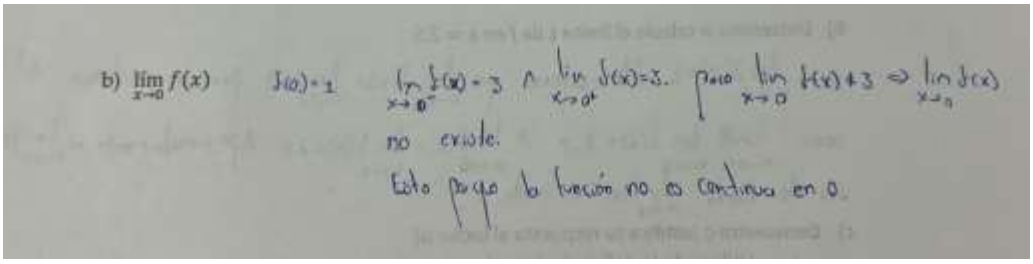
    - E19 justifica su respuesta utilizando límites laterales, dando evidencia de poder revertir el Proceso coordinado del límite.

- Ocho de ellos afirman que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, todos justificando su respuesta en que $f(0) = 1$, ya que en la representación gráfica esto es cierto, por lo que ellos conciben al límite como la Acción de evaluar la función en el valor al que tiende, un claro ejemplo

es la respuesta de E38 *"$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, pues cuando x se aproxima al 0 $f(x)$ se va al 1"*, E55 *"1 porque ambos lados de la gráfica se acercan a ese punto",* también da la noción de no usar los Procesos de aproximación en el dominio y en el rango en el registro gráfico ya que 1 es el valor que toma la función cuando x vale 0, pero la función "se acerca" al 3

- Dos estudiantes al parecer dicen que el límite no existe, pero su justificación no es clara o no es correcta.
    - E3 no dio una respuesta clara, solo escribió que *"$f(0) = 1$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$ así, $\lim_{x\to 0} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$".*
    - En la Figura 32 vemos cómo E42 realiza su justificación, haciendo notar que, aunque encuentra los límites laterales correctamente es decir logra revertir el Proceso coordinado de límite concluyendo que no existe, apoyándose de que la función no es continua en cero.

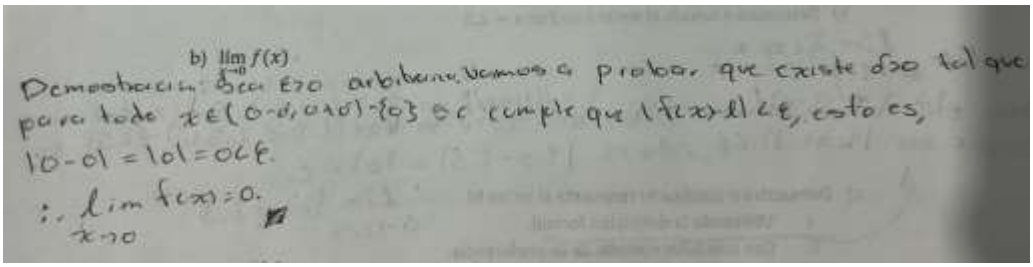
Figura 32
Respuesta de E42



- Por último, en la Figura 33 vemos cómo el estudiante realiza una demostración con la definición formal de límite, la cual es incorrecta. En la entrevista que se le realizó él señala que no tomó en consideración la gráfica, solo aplicó la definición formal de límite, y como en la notación de $\lim_{x\to 0} f(x)$ el resalta que como $x \to 0$, tomó a $x = 0$, lo sustituyó en $|f(x) - l|$, tomando a $f(x) = 0$, y a $l = 0$, l siendo el límite.

Los mismos siete estudiantes que no realizaron el inciso anterior tampoco realizaron este.

Figura 33
Respuesta de E34



c) $\lim_{x\to 3} f(x)$

El 63.63% de los estudiantes tuvieron una respuesta correcta, los comentarios de este inciso se dividirán en tres categorías:

- Los estudiantes que tuvieron los dos incisos anteriores correctos y este también correcto, haciendo notar que solo tres de esta categoría tuvieron mal este inciso.
- Los que tuvieron incorrectos los dos incisos anteriores
- Los que tuvieron el primer inciso incorrecto, y el segundo correcto.

Categoría 1:

- Treinta y un estudiantes respondieron de manera correcta, los cuales justificaron sus respuestas de la siguiente manera
    - Veintiocho lograron revertir el Proceso coordinado del límite representado en el registro analítico y realizar la conversión para construir un Proceso al registro gráfico, justificando su respuesta con límites laterales y coordinando este Proceso con el Proceso de unicidad del límite para concluir que el límite no existe.

- Tres estudiantes utilizaron la expresión algebraica que propusieron para los reactivos anteriores, encontrando dos límites distintos, ya que plantean una función para la curva, y otra para la línea horizontal, por lo que concluyen que el límite no existe.

- Tres estudiantes dicen que $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$, uno de ellos no justifica su respuesta, luego, E46 menciona que *"Se nota que sus imágenes de f tienden a 0 cuando sus valores de entrada se acercan a cero"*, por lo que, si logra realizar el Proceso coordinado en el dominio y en rango, pero solo lo aplica en el límite lateral izquierdo, olvidando el límite lateral derecho. Por último, E36 justifica su respuesta *"se tiene* $f(3) = 0$, *luego* $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0$ *",* con esto da evidencia de que concibe al límite como la Acción de evaluar la función en el valor al que tiende,

- Cinco estudiantes dieron una respuesta correcta, utilizando la propiedad de unicidad del límite, concluyendo que como sus límites laterales son distintos entonces el límite no existe. Dando evidencia de poder coordinar el Proceso en dominio y en el rango.

- Cuatro estudiantes dicen que $\lim_{x \to 3} f(x) = -1$, cada uno, dando diferentes justificaciones,

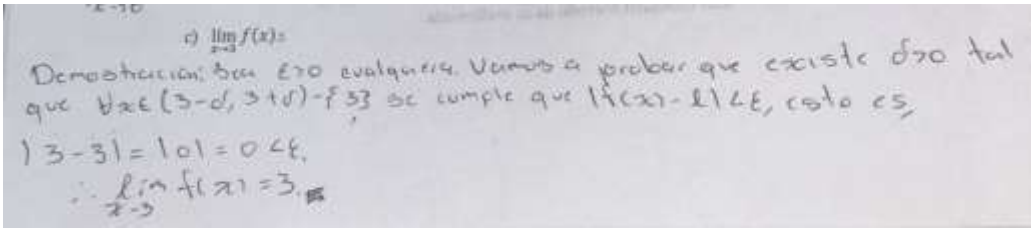
  - E55 menciona que *"-1 por que por ambos lados de la gráfica se acerca a ese punto".* Al parecer, el estudiante asume que, la función toma valores cercanos a -1 de ambos lados, aunque los valores de la función no están definidos entre 0 y -1 del eje y, la función tomará el valor de -1 como referencia para decir que la función se acerca a este.

- E46 justifica su respuesta diciendo *"*$\lim_{x\to 3} f(x) = -1$, *pero el límite general no está definido porque el límite es distinto por la derecha y por la izquierda",* aunque este estudiante utiliza el teorema que establece que, el límite existe en un punto, si y solo si los límites laterales en ese punto existen y son iguales, no logra concluir que el límite no existe, ya que esta idea se contrapone con que él concibe al límite como la Acción de evaluar la función en el valor al que tiende.
- E51 dice, *"El* $\lim_{x\to 3} f(x) = -1$, *ya que, como se puede ver en la gráfica, como la gráfica es constante y continua en ese punto",* pareciera que considera el valor del límite a partir de cuando $f(3) = -1$ y por eso dice que la función es constante y continua, por lo que no pudo revertir el Proceso coordinado de límite.
- E20 comenta que *"Pienso que es -1 por el punto cerrado que esa es su imagen, pero va para los números* $\mathbb{R}_+$ *a partir del número 3",* este estudiante logra realizar el Proceso coordinado al resaltar que las imágenes de la función toman valores positivos a partir de $x = 3$ por la izquierda, pero prioriza la Acción de evaluar la función en el valor al que tiende.

- En la Figura 34 vemos cómo intenta justificar su respuesta realizando una demostración, utilizando que $\lim_{x\to 3} f(x) = 3$, y concluyendo lo mismo.

Figura 34

Respuesta de E34



- El estudiante E32 no da una respuesta de cuál es el límite, pero da el siguiente comentario, primero hace notar que $f(3) = -1$, después intenta realizar una demostración utilizando la definición formal de límite, la cual deja a un lado y comienza a justificar de manera textual *"la curva decrece y termina en el punto 3 del eje x, donde 3 no está definido, note que es continuo es este punto y está para valores cercanos por la izquierda",* se observa cómo logra realizar el Proceso en el dominio, continuando con lo siguiente *"para valores cercanos por la derecha el punto -1 en el eje y está definido, toma valores positivos, podría decirse que ya tiende a ∞, es decir, da valores muy grandes, por lo tanto* $x > 0$*."*, vemos cómo comienza a realizar el Proceso en el rango, pero al momento de coordinarlo con el Proceso en el dominio no lo logra, ya que concluye que tiende a ∞, sin tomar en cuenta el rango.

Categoría 3:

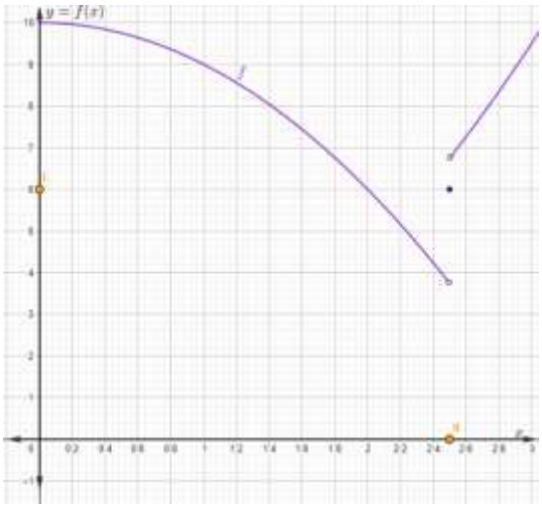
- Los dos estudiantes tuvieron este reactivo correcto, justificado con límites laterales, es decir, lograron revertir el proceso coordinado del límite.

Los mismos siete estudiantes de los incisos anteriores no realizaron este inciso.

Pregunta 8

Utiliza la representación gráfica de la función *f* que se da a continuación para responder lo que se pide.

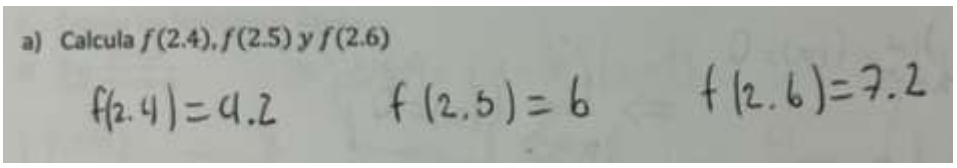
Figura 35
Pregunta 8



a) Calcula $f(2.4), f(2.5)\ y\ f(2.6)$

El 74.54% de los estudiantes realizaron Acciones de evaluar la función y de ubicar los valores que toma esta cuando x tiene un valor determinado en el registro gráfico, muestra de esto es la Figura 36.

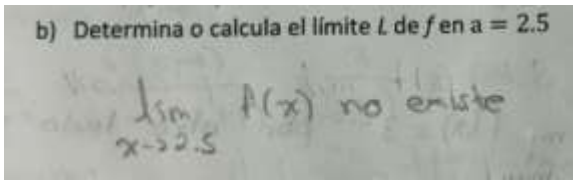
Figura 36
Respuesta de E8



b) Determina o calcula el límite L de f en $a = 2.5$

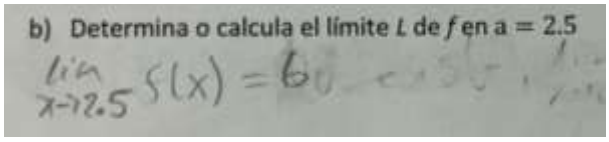
El 74.54% determinó de manera correcta que el límite de la función dada que no existe, como se puede ver en la Figura 37, no hay una explicación de su respuesta, pues la justificación se solicitó en el inciso siguiente.

Figura 37
Respuesta de E27



Mientras que el resto de los estudiantes no dieron una respuesta correcta, por ejemplo, en la Figura 38 se observa como E27 afirma que el límite es seis, es decir, el valor de $f(2.5)$, por lo que se considera que él ve al límite como la Acción de evaluar.

Figura 38
Respuesta de E13



c) Demuestra o justifica tu respuesta al inciso b)

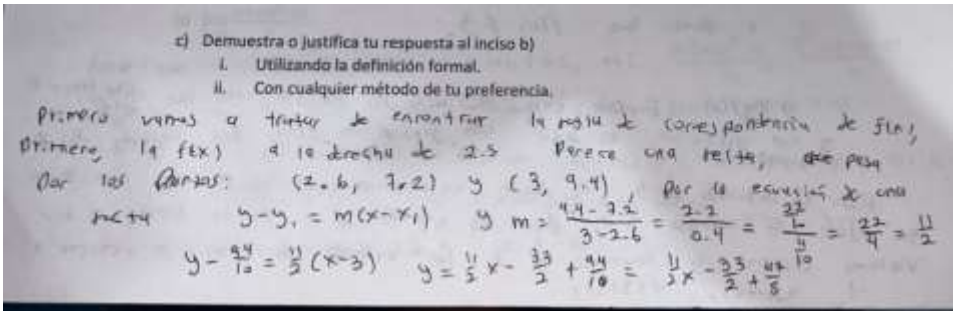
i. Utilizando la definición formal.

Ninguno de los estudiantes logró responder esta pregunta, no lograron proponer un δ sin tener la expresión algebraica de la función, como lo menciona E1 *"Según yo, sin la regla de correspondencia de f no es posible demostrar el límite con ε y δ"*. Dando evidencia de no haber construido el Proceso de prueba de que un candidato es el límite de una función, en la concepción métrica (Morante, 2020), en este caso que el límite no existe.

Diecinueve estudiantes lo intentaron, pero no llegaron a concluir la demostración:

- Once de ellos escribieron la definición de límite adaptándola al problema, sin realizar la demostración,
- Dos de ellos intentaron encontrar una expresión algebraica para la función, para después intentar realizar la demostración formal, como se ve en la Figura 39.

Figura 39
Respuesta de E27

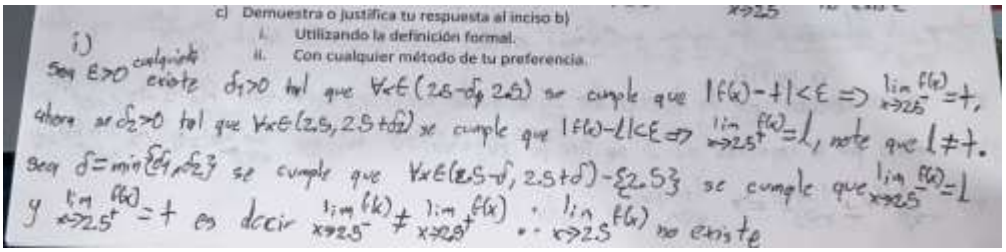

c) Demuestra o justifica tu respuesta al inciso b)
i. Utilizando la definición formal.
ii. Con cualquier método de tu preferencia.

Primero vamos a tratar de encontrar la regla de correspondencia de f(x), primero la f(x) a la derecha de 2.5 parece una recta, que pasa por los puntos: (2.6, 7.2) y (3, 9.4), por la ecuación de una recta $y-y_1 = m(x-x_1)$ y $m = \frac{9.4-7.2}{3-2.6} = \frac{2.2}{0.4} = \frac{\frac{22}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$

$y - \frac{94}{10} = \frac{11}{2}(x-3)$ $y = \frac{11}{2}x - \frac{33}{2} + \frac{94}{10} = \frac{11}{2}x - \frac{33}{2} + \frac{47}{5}$

- Seis estudiantes proponen a δ_1 y δ_2, y concluyen que los límites laterales son distintos, un ejemplo de esto es la respuesta de E37 en la Figura 40.

Figura 40
Respuesta de E37


c) Demuestra o justifica tu respuesta al inciso b)
i. Utilizando la definición formal.
ii. Con cualquier método de tu preferencia.

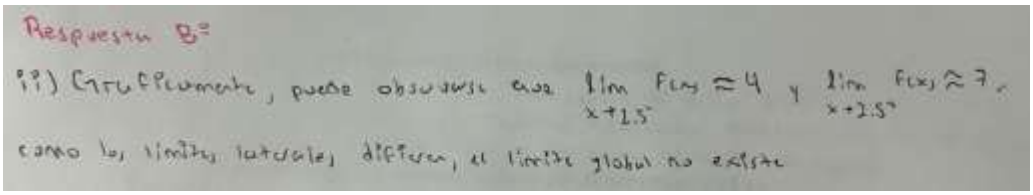
i) Sea $\varepsilon>0$ cualquiera existe $\delta_1>0$ tal que $\forall x \in (2.5-\delta_1, 2.5)$ se cumple que $|f(x)-t|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 2.5^-} f(x)=t$, ahora se $\delta_2>0$ tal que $\forall x \in (2.5, 2.5+\delta_2)$ se cumple que $|f(x)-l|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 2.5^+} f(x)=l$, note que $l \neq t$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se cumple que $\forall x \in (2.5-\delta, 2.5+\delta)-\{2.5\}$ se cumple que $\lim_{x\to 2.5^-} f(x)=l$ y $\lim_{x\to 2.5^+} f(x)=t$ es decir $\lim_{x\to 2.5^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2.5^+} f(x)$ $\therefore$ $\lim_{x\to 2.5} f(x)$ no existe

ii. Con cualquier método de tu preferencia.

El 69.09% de los estudiantes justificaron su respuesta usando el Proceso de aproximación en el dominio y en el rango de la concepción dinámica en el registro gráfico, como lo muestra la Figura 41.

De los 20 estudiantes que pudieron responder la pregunta anterior 7 no respondieron esta, pareciera que el no poder realizar una justificación utilizando la definición formal de límite les impidió continuar con este inciso, y así, no encontrar otra justificación.

Figura 41
Respuesta de E24


Respuesta 8°

ii) Gráficamente, puede observarse que $\lim_{x\to 2.5^-} f(x) \approx 4$ y $\lim_{x\to 2.5^+} f(x) \approx 7$, como los límites laterales difieren, el límite global no existe

4.2 Análisis de la entrevista clínica

Se llevó a cabo una entrevista clínica con el estudiante E20 donde se abordaron las preguntas 1 a), 5 y 7 incluyendo sus respectivos incisos. La razón por la cual se seleccionan estas tres preguntas fue la siguiente:

Para la pregunta 1 a) el estudiante debía dar muestra del Proceso que resulta de coordinar los dos Procesos, el Proceso en el dominio donde x se aproxima a x_0, y el Proceso en el rango en el cual $f(x)$ se aproxima a L. El objetivo de analizar esta pregunta fue obtener evidencia de si el estudiante recuerda la definición de límite tratando de identificar indicios de la concepción dinámica o métrica del límite de una función.

Por otro lado, las preguntas 5 y 7 fueron seleccionadas porque abordan el tema de nuestro interés: el registro gráfico, donde podemos analizar las estructuras mentales que utiliza el estudiante. También se presentó un índice bajo de respuestas correctas en los resultados previos, lo que indica que son áreas en las cuales el estudiante podría tener dificultades y que, por lo tanto, requieren mayor atención en la entrevista clínica.

Durante la entrevista para la pregunta 1 a) se le pide que explique con sus propias palabras lo siguiente:

Sea f una función real cualquiera y $x_0 \in \mathbb{R}$. ¿Qué significa para ti la expresión $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$?

A lo que E20 *responde "pues yo por lo que entiendo de la función digamos que hay un límite que va del valor x, pero este como tal se acerca a x_0 pero nunca llega a x_0, tiene como una proximidad, entonces, cuando este llega a ese valor su función se va a llamar o su imagen le decimos que se llama L*".

Con esta respuesta se observa cómo realiza el Proceso en el dominio, pero no menciona el Proceso en el rango, por lo que aún no puede construir el Proceso coordinado en la concepción dinámica. También al decir que *"x se acerca a x_0 pero nunca llega a x_0",* se cree que no concibe al límite como la Acción de evaluar la función en el valor al que tiende en el registro analítico, esto lo niega cuando menciona "*cuando este llega a ese valor su función se va a llamar o su imagen le decimos que se llama L"*.

Pasando a la pregunta 5, la cual pide:

Traza la gráfica de una función que cumpla con todas las condiciones dadas:

a) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

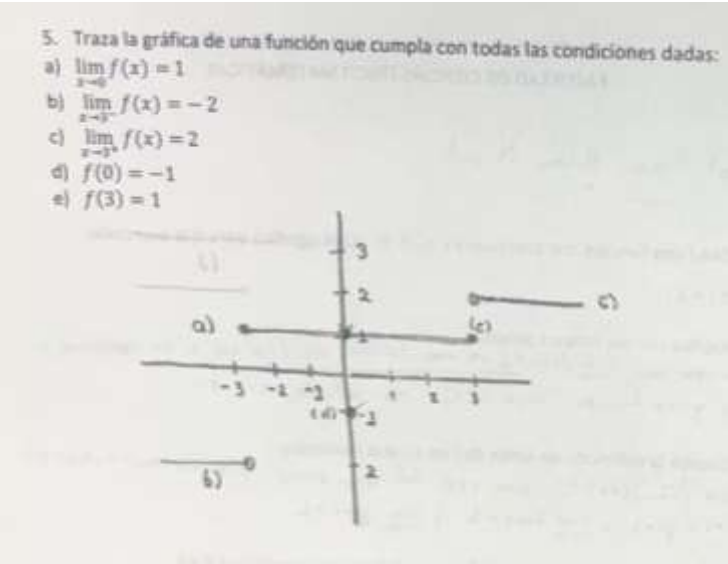
b) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -2$

c) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$

d) $f(0) = -1$

e) $f(3) = 1$

Figura 42
Respuesta de E20



Lo primero que se le pidió fue que explicara cómo realizó la gráfica, y con ello poder conocer las estructuras mentales utilizadas.

En consecutivas ocasiones, al momento de seguir explicando lo que había hecho para realizar la gráfica, da evidencia de ver al límite como la Acción de evaluar, tanto en el registro analítico como en el registro gráfico, por ejemplo:

"*…cuando el límite de x va al 3 por la derecha su imagen sería el 2 positivo que sería acá"*

"…el límite de x cuando tiende a cero de f de x es igual a uno, pues su imagen es el uno"

Mientras explicaba lo que hizo fue mostrando confusiones, la primera fue respecto a los incisos a) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ y d) $f(0) = -1$ se le preguntó ¿por qué en su gráfica la función toca tanto al punto (0,1) y (0,-1)?

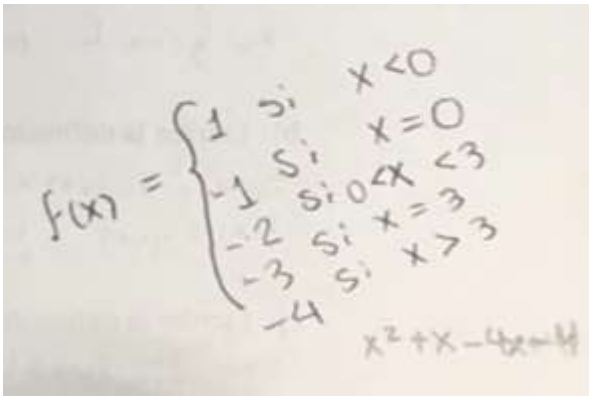
A lo que respondió que *"Es que yo también pensaría que ahí no es continua, porque bueno, si estoy diciendo que el* $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ *. Digamos que ahí sí, yo diría el límite sí existe en esa, porque tanto como el lateral derecho y el izquierdo, pues es continua, pero cuando está en el cero y es -1 ¿Qué será?, ahí no le sabría"*

En esta respuesta se observa como E20 no sabe si la función es continua, y no coordina el Proceso de aproximación en el dominio y en el rango con el Proceso en la función, en el registro gráfico.

Al darse cuenta que la gráfica es incorrecta decide realizar otra, pero antes utiliza las condiciones del ejercicio para obtener una expresión algebraica de la función.

"Siento que me hubiera imaginado mejor, para interpretarlo, como una por partes o algo así y hubiera puesto como valores. Siento que eso me faltó, por ejemplo, digo que, si $x < 0$*, así que debía ponerlo como* $x = 0$ *para ver su comportamiento de la gráfica…"*

Figura 43
Representación algebraica ejercicio 5 de E20.

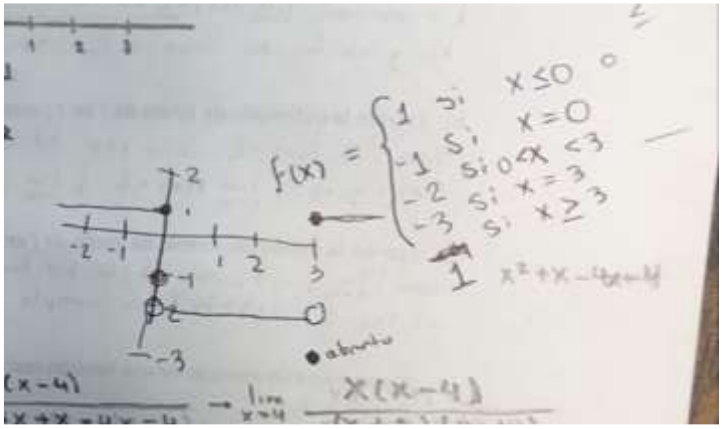


Cuando comienza a graficar correctamente basándose en su representación algebraica, menciona, *"si $f(x) = 1$ si $x = 0$ estaría acá, entonces supongo es abierto"* y representa a $f(0)$ con un hueco a la altura de $y = 1$.

Por último, decide hacer un cambio a su representación algebraica:

Primero tenía $f(x) = 1$ *si* $x < 0$ el cual lo cambia por $f(x) = 1$ *si* $x \leq 0$, se cree que lo hace como consecuencia de no poder coordinar el Proceso de aproximación en el dominio y en el rango con el Proceso de función, en el registro analítico, pues recordemos que la primera condición dice que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Figura 44
Segunda representación gráfica de E20



.

Se le pregunta ¿por qué realiza ese cambio?, después de analizar la gráfica, la representación algebraica que hizo y lo que se le pide, decide hacer otra gráfica.

Mientras la realiza comenta que *"el* $\lim_{x\to 3} f(x)$ *no existe, porque sus laterales son diferentes"* y ubica los dos huecos en la gráfica, dando muestra del Proceso coordinado en el registro gráfico.

Después continúa con el inciso a) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, en donde da evidencia de ver al límite como la Acción de evaluar la función en $x = 0$ y piensa representarlo con un punto cerrado.

"El $\lim_{x\to 0} f(x)$ *su imagen es 1, entonces, este sí sería global, lo pongo con cerradito".*

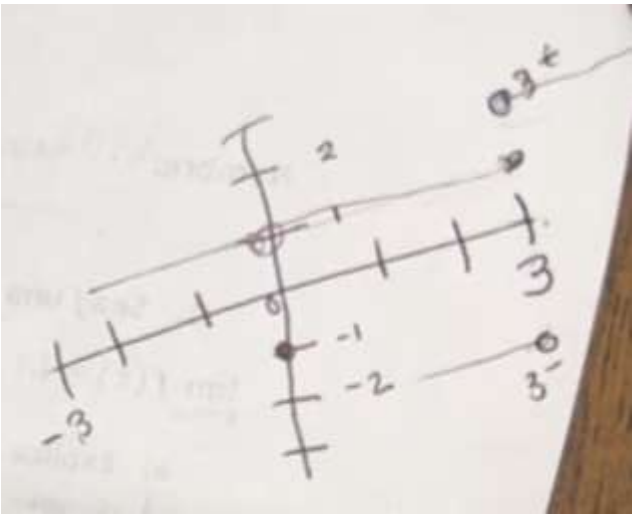
Acto seguido destaca que en el inciso d) $f(0) = -1$, a lo que comenta:

"Por la definición digo que, cuando $x \to 0$ *o sea se acerca, pero no llega al 0 y cuando dice que* $f(0)$*, entonces sí llega, pero su imagen es el -1 y acá antes de llegar su imagen sería el 1 entonces supongo que cuando está por llegar al 0 su imagen está en el 1"*

Ubica las coordenadas en la gráfica correctamente, es decir, coloca un punto en (0,-1) y un agujero en (0,1). Dando evidencia de coordinar las condiciones a) y d), lo que se puede interpretar como coordinó la Acción de evaluar la función con el Proceso coordinado del límite, en el registro gráfico.

Se le pide que termine de graficar, ya que solo había puesto puntos y agujeros en el registro gráfico.

Figura 45
Tercera representación gráfica de E20.

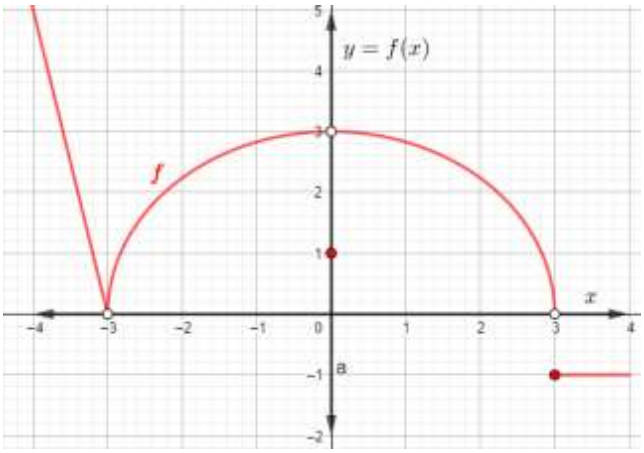


Como podemos ver en la Figura 45 no logra realizar la gráfica correctamente, ya que no logra coordinar los Procesos de aproximación en el dominio y en el rango con el Proceso función, en el registro gráfico, el cual le permite ubicar las imágenes de función y darse cuenta que la función no puede tener dos valores diferentes para un mismo valor de x.

Continuando con la entrevista, se le pidió explicara su respuesta de la pregunta 7.

Considera la gráfica de la función f de la imagen y determina los límites siguientes. Justifica cada una de tus respuestas.

Figura 46
Pregunta 7



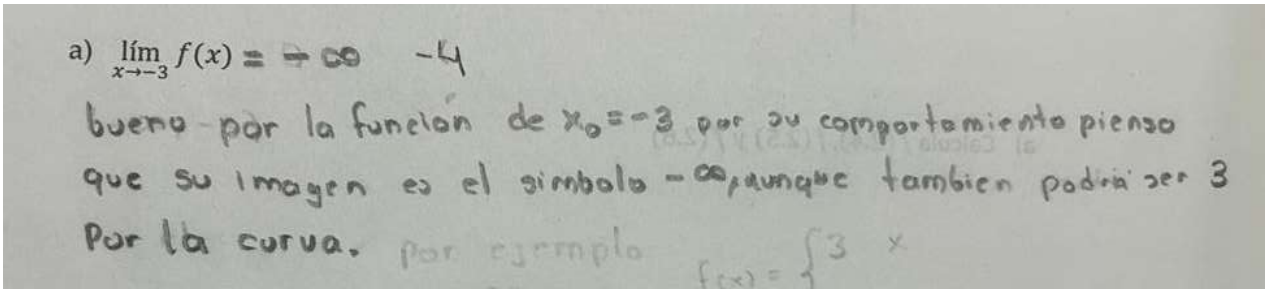
a) $\lim_{x \to -3} f(x)$

b) $\lim_{x \to 0} f(x)$

c) $\lim_{x \to -3} f(x)$

Para el inciso a) respondió:

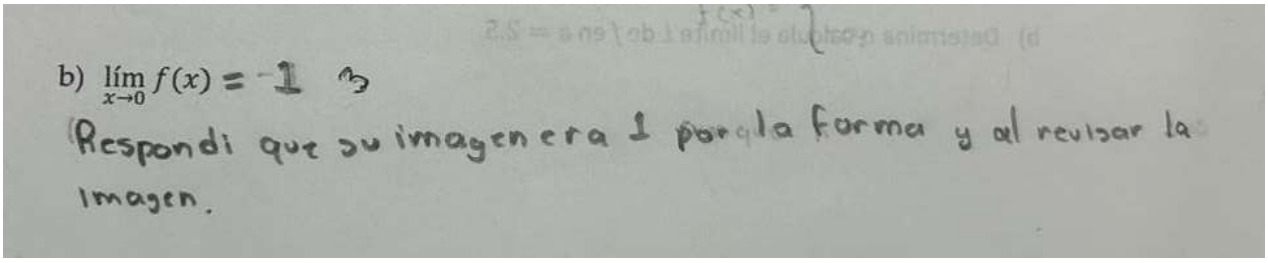
Figura 47
Respuesta 7 a) de E20.


a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \cancel{+\infty}$ -4
bueno por la funcion de $x_0 = -3$ por su comportamiento pienso que su imagen es el simbolo $-\infty$, aunque tambien podria ser 3 Por la curva. por ejemplo $f(x) = \begin{cases} 3 & x \end{cases}$

Rectifica su respuesta diciendo que el $\lim_{x \to -3} f(x) = -4$, tomando como referencia que es una línea recta y que en el dominio solo se puede observar que el valor que toma es -4.

"Yo siento que sería -4 porque acá (se refiere a el punto (-4,5) que es el último punto que se puede observar en la gráfica que toma la función) como que va a llegar a este puntito, pero no sé si se sigue para arriba, pero creo que ahí llegan como tal, en ese punto"

En este comentario se tiene evidencia de que solo está considerando el Proceso en el dominio, en el registro gráfico, afirmando que el límite es -4 (eje x), olvidando por completo el Proceso en el rango.


b) $\lim_{x \to 0} f(x) = \cancel{-1}$ 3
Respondi que su imagen era 1 por la forma y al revisar la imagen.

Para el inciso b):

Figura 48
Respuesta 7 b) de E20.

En la figura 4.41 al decir que el límite de la función es 1, da evidencia de ver al límite como la Acción de evaluar la función, en el registro gráfico.

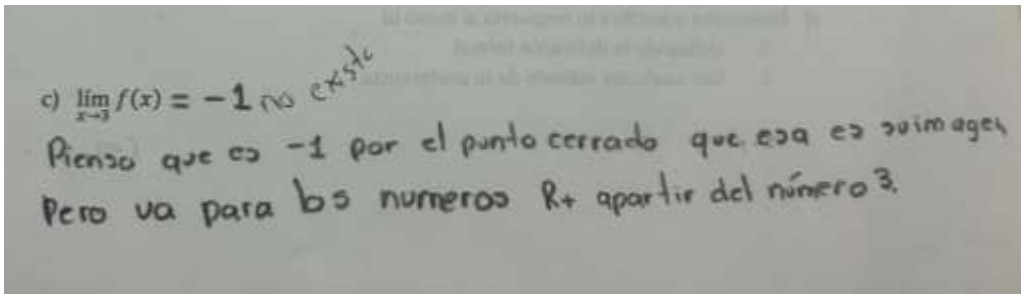
Se le preguntó ¿Por qué cree que el límite es 1?, al no poder responder se le comienza a guiar preguntándole, ¿qué valores toma la función cuando $x = -0.9$? ¿Cuándo $x = 0.999$?, responde correctamente, y se vuele a preguntar ¿Cuál es el límite?

"Ahora me doy cuenta, creo que el $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$*, porque cuando tengo un punto en el 0, pues yo diría su imagen sería el 1, porque en la gráfica tiene el circulito lleno, entonces su imagen es el 1, pero ahora no sé si el 1 sí era la imagen, o solo pusieron un punto ahí para confundirme, y que en el cero la imagen llegaría hasta el 3"*

A pesar de dar la respuesta correcta, continúa viendo a el límite como la Acción de evaluar la función, interpretando que el punto (0,1) fue un error y debería de estar en (0,3).

En el inciso c):

Figura 49
Respuesta 7 c) de E20.



Comienza a analizar qué hizo para llegar a ese resultado:

Primero ve cuál es el límite lateral derecho, concluyendo que es -1, después hace notar que hay otro punto:

"pero también hay otro punto que toca el 3 (en el dominio) pero se va para allá (señalando la curva) y su imagen digamos que es el 3(en el rango)"

Se le pregunta a cuál 3 se refiere ya que había apuntado (0,3) y rectifica diciendo que al 3 en el dominio:

"El punto está acá (se refiere a el agujero (3,0)), está en el cero, pero cuando sube (señala la curva) toma los valores de este (señalando el agujero (0,3)) entonces yo sentiría que $\lim_{x\to 3} f(x) =$ 3*, supondría porque está acá el puntito (señalando a (3,0))".*

Podemos observar cómo confunde al dominio con el rango, ya que afirma que el límite es 3, pero el 3 en el dominio, también el traslado que hace al momento de señalar la curva da evidencia de no poder coordinar el Proceso en el dominio con el Proceso en el rango, en el registro gráfico, por lo que se le vuelve a preguntar qué hizo para concluir esta respuesta.

Comienza explicando que el límite lateral derecho es -1, el cual no representa un problema ya que al ser una línea recta y su imagen la misma que el límite le da seguridad.

"Siempre me guío por los puntos, entonces sentí que en el 3 su imagen es el menos 1, es decir que va allá (señalando la línea recta), pero estoy viendo que hay 2 puntos que lo tocan (refiriéndose a x=3), supongo que este sería el lateral derecho"

Continúa calculando el límite, olvidándose del límite lateral izquierdo.

"Si me hubieran pedido, el $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ *supongo que sería el -1, pero como me están pidiendo el* $\lim_{x\to 3} f(x)$ *sería su imagen que estaría acá en este mismo punto (señalando a (3,0)), ¿sería el 0 o el 3?, mmmmm, esta curva si esta engañosa".*

Con esto tenemos evidencia de que ha construido el Proceso en el dominio, pero no el Proceso en el rango, ya que, aunque sí logra ubicar los puntos en el registro gráfico, no puede construir un Proceso en el rango, lo que ocasiona no poder coordinar ambos Procesos.

Al no poder justificar su respuesta del inciso c), decide regresar a el inciso a).

Recordemos que en el inciso a) concluyó que $\lim_{x\to -3} f(x) = -4$, pero ahora comenta.

"Creo que igual (refiriéndose a el inciso a) y c)) el inciso a) lo tome solo por la izquierda, pero sería tomar el global, y el del -3 (refiriéndose a $\lim_{x\to -3^+} f(x)$*) supongo que también sería su imagen en 3 (señalando a (0,3))"*

Nuevamente se guía por la curva, en el registro gráfico sin tomar en cuenta las aproximaciones en el rango.

Comienza a decir cuáles son los límites de todos los incisos, y señalando la forma de la curva y cuál sería el límite, concluye que es el 3, es decir, señala el punto (0,3). Aunque esta vez sí menciona un valor que pertenece a el rango, para el inciso a) y c) es incorrecta la respuesta, solo se está guiando de la curva y como su valor máximo es casi el 3.

Se le pide que vuelva a analizar lo que comentó, a lo que responde:

"¿Podrían ser sus imágenes? Es que ahora que me doy cuenta solo estoy agarrando la curva y estoy haciendo como si solo fuera para el lateral derecho (refiriéndose al inciso a)) entonces su límite o su imagen sería el 0"

A pesar de dar una respuesta correcta la justificación no lo es, ya que ve al límite como la Acción de evaluar, por lo que se le comienzan a mostrar las aproximaciones en el dominio y en el rango, así E20 hace Acciones de relacionar valores en el dominio y en el rango, del registro gráfico:

"... Si $x = -2.9$ *entonces* $y = 0.6$*, ..., es que entonces si siento que su imagen es el 0, ..., ahora cuando* $x = -3.0001$ *entonces* y *ya se va acercado a el 0, ..., entonces yo digo que cuando ya se va a acercando al -3, cuando ya se para en el -3 su imagen ya es el 0"*

A pesar de realizar algunas aproximaciones y ver un agujero en (3,0) se sigue refiriendo a el límite como una imagen, por lo que se vuelve a preguntar ¿cuál es el $\lim_{x\to -3} f(x)$?

"Mmmm el $\lim_{x \to -3} f(x)$ *es, ..., ay si nos estamos tardando…a ver ¿cómo? ¿me puedes ayudar…?"*

Se le pregunta sobre el inicio 1 a), el cual se preguntó al inicio de la entrevista, con la intención de generar una reflexión sobre algunas Acciones y que evidencie el Proceso que le permita entender al límite en su concepción dinámica.

"Dice, por ejemplo, si yo digo que hay una x*, cuando esa* x *se acerca a el* x_0*, que sería en este momento -3 su imagen llega a ser el 0, lo estoy suponiendo, entonces ¿Qué es lo que me quieres preguntar?"*

Se le vuelve a plantear la pregunta, y su respuesta inmediata es $\lim_{x \to -3} f(x) = 0$, se le pregunta ¿por qué?

"Porque, bueno yo, ..., ay ahora que me doy cuenta, es cuando se aproxima, es que, si hago la definición de límite, estoy diciendo que se aproxima, no llega al -3, entonces sus aproximaciones se estarían acercando al 0, sería como…, mmm, ya te entendí, pero no sé cómo explicarlo, es que siento que sus imágenes cambian conforme se va acercando, siento que es un valor cercano al 0, pero, ¿cómo le podría poner?"

Aquí podemos ver como E20 no logra construir la Totalidad del infinito, en el registro gráfico, es decir, no ve las aproximaciones infinitas en el rango como terminadas cuando se aproxima infinitamente a -3.

Por último, se volvió a revisar el inciso c) donde se le guio para que obtuviera la respuesta, comenzado por calcular los límites laterales y recordándole que si los límites laterales son distintos entonces el límite no existe.

Capítulo 5

Conclusiones

Tomando como referencia la descomposición genética de Hernández et al. (2023) se analizaron las estructuras mentales que los estudiantes utilizaron para contestar actividades relacionadas con el límite de una función en el registro gráfico. Cabe hacer mención que dicha descomposición describe la concepción dinámica del límite y en los pocos casos que se requirió de la concepción métrica se cita el trabajo de Swinyard y Larsen (2012).

Todos los estudiantes que participaron pudieron enunciar de manera correcta la definición formal de límite, pero cuando tuvieron que utilizarla para resolver otras actividades, más de la mitad de los estudiantes dieron una respuesta incorrecta, o intentaron utilizarla cuando no era posible, dando evidencia de no revertir el Proceso de la concepción métrica del límite, como se define en el trabajo de Swinyard y Larsen (2012).

Como resultado de esta investigación se concluye que más de la mitad de los estudiantes participantes pueden realizar Acciones de demostrar que cierto número es el límite de una función, pero no las ha interiorizado. Aquere et al. (2006) señala que el estudio del concepto de límite suele centrarse en definiciones rigurosas y en ejercicios que, aunque incrementan su complejidad, mantienen un patrón de pensamiento repetitivo. Esta metodología, al depender predominantemente del registro analítico o algebraico, convierte el aprendizaje en una actividad monótona y limita la comprensión del concepto de límite.

Duval (1997) menciona que no es suficiente dominar cada registro por separado; el verdadero desafío radica en la capacidad de convertir información de un registro a otro, ya que requiere un enfoque metacognitivo y una comprensión profunda de los conceptos, no solo de sus representaciones.

Es por ello que podemos ver una diferencia de hasta el 20% de asertividad entre los ejercicios que implicaban la conversión de algún registro al registro gráfico utilizando la concepción dinámica, con los ejercicios que implicaban el registro algebraico, simbólico y verbal, que en su mayoría se utiliza tanto una concepción métrica o dinámica siendo estos últimos los de mayor asertividad. Por ejemplo, cuando se les solicitó realizar la demostración de que cierto número era el límite de la función (ejercicio 4), el 72.72% logró desencapsular el Objeto de la concepción métrica del límite.

En los problemas que implicaban el registro gráfico pudimos notar cómo los estudiantes presentaban dificultades para la ubicación de coordenadas, para pasar del registro analítico al registro gráfico y mostraron una dependencia del registro algebraico.

Muchos de los estudiantes dieron evidencia de no tener construido el Proceso en el rango a pesar de sí tener construido el Proceso en el dominio, lo que les impidió la coordinación de ambos. De manera similar, los estudiantes que participaron en la investigación de Analco y Hernández (2020) mostraron una menor evidencia de la concepción dinámica en el registro gráfico. Aunque lograron construir las concepciones de Acción y Proceso en el dominio, enfrentaron dificultades para desarrollar el Proceso en el rango, lo que evidencia una comprensión parcial del concepto de límite en su representación gráfica.

También se obtuvo evidencia de cómo algunos estudiantes perciben al límite como la Acción de evaluar la función en el valor al que tiende, el cual fue uno de los errores más recurrentes, y se concluye que esto imposibilitó el uso de la estructura Totalidad del infinito o la coordinación de los Procesos en el dominio y en el rango.

En Pons (2014) observamos cómo a los estudiantes se les facilitó el registro gráfico, mientras que en esta investigación notoriamente el registro gráfico presentó un obstáculo para muchos estudiantes.

Estos resultados confirman los de otros autores, como Blazquez (2009) y Hitt (2003), que han recomendado el uso de diferentes registros, incluyendo al registro gráfico. Sin embargo, estos estudios se han realizado en el nivel medio superior o en carreras de ingeniería, mientras que en el estudio que aquí se reporta se demuestra que esto es necesario también en carreras de ciencias exactas, en este caso de matemáticas y actuaría.

Por lo tanto, se recomienda un mayor uso del registro gráfico para la construcción del concepto del límite también en estas carreras, a través de actividades como las que aquí se presentaron o las actividades de Morante (2020) o Pons (2014).

Bibliografía

Aquere, R., Engler, R., Vrancken, E., Müller, D., Hecklein, B., Gregorini, J., & Henzenn, P. (2006). Una propuesta didáctica para la enseñanza de límite. *Sociedad Argentina de Educación Matemática*, 217-225.

Analco, S. (2019). Comprensión del concepto de límites de una función en estudiantes de Actuaría, Física y Matemáticas [Tesis de licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla].

Analco, S., & Hernández, M. (2020). Comprensión del concepto de límites de una función en estudiantes de Actuaría, Física y Matemáticas. En G. Macías & A. Herrera (Eds.), *Matemáticas y sus aplicaciones*, 15(3), 51-73.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa, F., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer.

Blázquez, G., Gatica, S., & Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *La Gaceta de la RSME*, 12(1), 145-168.

Blázquez, G., Ortega, T., Gatica, S., & Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Relime*, 9(2), 189-209.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 167-192. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90015-2

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Kluwer.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics, 58*(3), 335-359.

Duval, R. (1995). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizaje intelectual*. Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*(1), 143-168.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking: The Registers of Semiotic Representations*. Springer.

Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2018). *Cálculo Diferencial e Integral* (14ª ed.). Pearson.

Hernández, M., Trigueros, M., Ruiz, H., & Juárez, M. (2023). La concepción dinámica del límite de una función desde APOE y los registros semióticos. *Enseñanza de las Ciencias, 41*(2), 117-135.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual* (pp. 91-111).

Morante, J. D. (2020). *Una secuencia didáctica para la construcción de la definición formal del límite de una función basada en teoría APOE* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla].

Pons, J. T. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto límite de una función en un punto* [Tesis doctoral, Universidad de Alicante].

Roa-Fuentes, S. (2012). *El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas* [Tesis doctoral, Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN].

Spivak, M. (1981). *Calculus* (2ª ed.). Editorial Reverté.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (7ª ed.). Cengage Learning Editores.

Swinyard, C., & Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 465-493.

Villabona, D., Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2022). Concepciones dinámicas y estáticas del infinito: Procesos continuos y sus totalidades. *Enseñanza de las Ciencias*, *40*(1), 179-197. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3277

Villabona Millán, D. P., & Roa-Fuentes, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: Un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación Matemática*, *28*(2), 119-150. https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v28n2/1665-5826-ed-28-02-00119.pdf