



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

Generación de enredamiento cuántico por interacción con el  
medio ambiente

Tesis presentada al

**Posgrado en Ciencias  
(Física Aplicada)**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Maestría en Ciencias  
(Física Aplicada)**

por

Benjamín David Mendoza Zárate

asesorado por

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar

Puebla, Pue.  
Septiembre 2015





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

Generación de enredamiento cuántico por interacción con el  
medio ambiente

Tesis presentada al

**Posgrado en Ciencias  
(Física Aplicada)**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Maestría en Ciencias  
(Física Aplicada)**

por

Benjamín David Mendoza Zárate

asesorado por

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar

Puebla, Pue.  
Septiembre 2015



**Título:** Generación de enredamiento cuántico por interacción con el medio ambiente

**Estudiante:** BENJAMÍN DAVID MENDOZA ZÁRATE

COMITÉ

---

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco  
Presidente

---

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez  
Secretario

---

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero  
Vocal

---

Dr. Justiniano Lorenzo Díaz Cruz  
Suplente

---

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar  
Asesor



# Resumen

La ciencia se caracteriza por establecer medidas precisas de sus variables dinámicas y de sus conceptos fundamentales. Sin embargo, en mecánica cuántica la medición es uno de los conceptos que más dificultades ha tenido para una formulación precisa. Esto ha generado un sinnúmero de predicciones y debates, siendo la más famosa, quizás, la predicción de la paradoja del gato de Schrödinger, donde este tiene una superposición de estados cuánticos. De hecho, en mecánica cuántica se reconocen dos tipos de evoluciones, una evolución completamente determinista descrita por la ecuación de Schrödinger (y generada por el tipo de energía a que está sometido el sistema) y otra evolución, completamente aleatoria y probabilística, generada por la medición de un observable físico.

La paradoja del gato de Schrödinger se basa en establecer que la mecánica cuántica predice la superposición de estados físicos (incluso para sistemas microscópicos), sin embargo dicha superposición no se observa en el mundo macroscópico. La pregunta de por qué no se observa esta superposición de estados se empezó a resolver hasta mediados de los años ochenta del siglo pasado, fue cuando se empezó a proponer modelos que explicaban la no supervivencia de tales estados por su interacción con el medio ambiente [1].

Uno de los modelos más usados en este tipo de estudios es la interacción de un modo del campo electromagnético con un medio ambiente modelado, este último, como un número infinito de modos del campo electromagnético [2, 3, 4]. Usando este modelo se ha podido predecir el decaimiento rápido de una superposición de estados coherentes hacia una mezcla estadística de estados.

El modelo que nosotros usaremos será el de las ecuaciones maestras. En este modelo de ecuaciones maestras se parte del Hamiltoniano de interacción y se deduce una ecuación diferencial para la matriz de densidad del sistema.

Actualmente hay un gran interés en el estudio de estos sistemas cuánticos, principalmente para ver cómo evolucionan los estados enredados cuando interactúan con un medio ambiente [5, 6].

En este proyecto de tesis se estudia la evolución de dos modos del campo electromagnético acoplado a un número infinito de modos del campo electromagnético. Este es un modelo de gran interés en óptica cuántica y computación cuántica, ya que involucra la generación de estados enredados. Nuestro interés se centrará en estudiar este modelo para temperaturas diferentes de cero y encontrar su evolución en el tiempo.

En el capítulo 1 y 2 vemos los elementos necesarios para la comprensión de nuestro problema. Se da un repaso de los postulados de la mecánica cuántica. Presentamos el operador de densidad con el propósito de hacer una reformulación de los postulados de la mecánica cuántica en términos de dicho operador. En términos generales, decimos que es el entrelazamiento cuántico y el papel que juega el operador de densidad en este concepto. Para que no quede todo en conceptos meramente teóricos, presentamos una cavidad que soporta cierto modo de campo electromagnético. Hacemos mención de qué son los estados coherentes y estados de número desplazado puesto que estos estados aparecen en el tratado de nuestro problema. Para darse una idea de como evoluciona un sistema de una manera gráfica, damos a conocer las funciones de cuasiprobabilidad detallando solamente en la función  $Q$ .

En el capítulo 3 vemos la deducción de la ecuación maestra para un modo de campo electromagnético que interactúa con su medio ambiente. Aprovechando lo ya realizado en el capítulo 3, en el capítulo 4

## II

hacemos la deducción de la ecuación maestra para dos modos de campo electromagnético interactuando con un medio ambiente en común y vemos la diferencia que existe con aquella ecuación maestra asociada a dos modos de campo electromagnético que interactúan cada uno con su propio medio ambiente. Así mismo, logramos hallar su solución usando el método de superoperadores. Dicha solución representa la evolución del sistema.

En el capítulo 5 presentamos las conclusiones haciendo mención que el objetivo de hallar la evolución de nuestro trabajo se alcanzó, que es encontrar la evolución en el tiempo de nuestros modos de campo electromagnético que interactúan con un mismo ambiente y decir que tal sistema evoluciona a un estado enredado. El siguiente paso es decir que tan enredado está el sistema, lo cual conlleva a plantear una medida de enredamiento en un trabajo futuro.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>1. Fundamentos de mecánica cuántica</b>	<b>1</b>
1.1. Postulados de la mecánica cuántica . . . . .	1
1.2. Operador de densidad . . . . .	2
1.2.1. Postulados de la mecánica cuántica . . . . .	4
1.3. Entrelazamiento cuántico . . . . .	4
1.4. Breve descripción de una cavidad cuántica electrodinámica (CQED) . . . . .	6
<b>2. Estados coherentes, estados de número desplazados y funciones de cuasiprobabilidad</b>	<b>7</b>
2.1. Estados coherentes . . . . .	7
2.1.1. Estados $ \alpha\rangle$ , $ - \alpha\rangle$ y estados gatos de Schrödinger . . . . .	8
2.1.2. Generación de estados coherentes . . . . .	9
2.2. Estados de número desplazados . . . . .	10
2.3. Funciones de Cuasiprobabilidad . . . . .	11
<b>3. Interacción de un sólo modo del campo electromagnético con su medio ambiente</b>	<b>13</b>
3.1. Ecuación de Schrödinger en su forma integral . . . . .	13
3.2. Ecuación maestra para el oscilador armónico amortiguado . . . . .	16
<b>4. Interacción de dos modos del campo electromagnético con un medio ambiente en común</b>	<b>21</b>
4.1. Ecuación maestra para dos modos de campo electromagnético que interaccionan con su medio ambiente . . . . .	21
4.2. Ecuación maestra de dos modos de campo electromagnético cada uno con su propio medio ambiente . . . . .	23
4.3. Solución de la ecuación maestra . . . . .	23
<b>5. Conclusiones</b>	<b>29</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>31</b>



# Capítulo 1

## Fundamentos de mecánica cuántica

En mecánica cuántica, el vector de estado (función de onda) contiene la máxima cantidad de información de un sistema y juntamente con las leyes de la mecánica cuántica permiten predecir la dinámica de la evolución. Típicamente, la información consiste de números cuánticos asociados con el conjunto de observables que conmutan. Si tenemos dos posibles estados cuánticos entonces también lo es su superposición donde los coeficientes representan amplitudes de probabilidad. Si tenemos dos estados que son ortogonales entonces se debe cumplir que la suma del cuadrado de sus amplitudes debe ser igual a uno. Lo anterior resume los postulados de la mecánica cuántica, pero podemos formular todo esto ahora en términos de un objeto más general, esto es, cuando un sistema se describe por un estado global; una manera conveniente de representar este estado es con el operador de densidad. En las siguientes secciones recordaremos la mecánica cuántica en dos distintas formulaciones: una donde el objeto principal es la función de onda, y otra donde lo es el operador de densidad. También, hacemos mención de qué es el entrelazamiento cuántico enfatizando en su estructura matemática. Para dar una idea intuitiva del sistema que vamos a tratar, presentamos una cavidad que es capaz de encerrar un modo de campo electromagnético.

### 1.1. Postulados de la mecánica cuántica

Los postulados de la mecánica cuántica son los siguientes:

**Postulado I:** Las propiedades de un sistema cuántico se definen completamente al especificar su vector de estado  $|\psi\rangle$ , el cual fija la representación matemática del estado físico del sistema. El vector de estado es un elemento del espacio complejo de Hilbert  $\mathcal{H}$  llamado espacio de estados. Será conveniente elegir  $|\psi\rangle$  normalizado, esto es, tenga norma unitaria:  $\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1$ .

**Postulado II:** Si  $|\psi\rangle$  es un vector de estado de algún sistema y si  $|\chi\rangle$  representa otro estado físico, existe una amplitud de probabilidad  $a(\psi \rightarrow \chi)$  de encontrar  $|\psi\rangle$  en el estado  $|\chi\rangle$ , la cual está dado por el producto escalar sobre  $\mathcal{H}$ :  $a(\psi \rightarrow \chi) = \langle\chi|\psi\rangle$ . La probabilidad  $p(\psi \rightarrow \chi)$  para que el estado  $|\psi\rangle$  pase al estado  $|\chi\rangle$  se obtiene al tomar el módulo al cuadrado  $|\langle\chi|\psi\rangle|^2$  de esta amplitud:

$$p(\psi \rightarrow \chi) = |a(\psi \rightarrow \chi)|^2 = |\langle\chi|\psi\rangle|^2. \quad (1.1)$$

Este postulado normalmente es llamado el postulado de Born.

**Postulado III:** Con cada propiedad física  $\mathcal{A}$ , (energía, posición, momento, momento angular, ...), existe un operador hermitiano asociado  $A$  el cual actúa en el espacio de estados  $\mathcal{H}$ :  $A$  establece una representación matemática de  $\mathcal{A}$ . Establezcamos la propiedad física  $\mathcal{A}$  representada por un operador hermitiano  $A$  cuyos eigenvalores  $a_n$  son no degenerados:  $A|n\rangle = a_n|n\rangle$ . Podemos escribir la descomposición espectral

$$A = \sum_n |n\rangle a_n \langle n|. \quad (1.2)$$

**Postulado IV:** La evolución temporal del vector de estado  $|\psi(t)\rangle$  de un sistema cuántico es gobernada por la ecuación

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H(t)|\psi(t)\rangle. \quad (1.3)$$

El operador hermitiano  $H(t)$  es nombrado el Hamiltoniano.

## 1.2. Operador de densidad

Existe frecuentemente situaciones en la que el vector de estado no se conoce con precisión. Hay casos, por ejemplo, donde el sistema de interés está interaccionando con algún otro sistema, posiblemente un sistema enorme, i. e., un reservorio, con el cual está entrelazado. Sería posible escribir el vector de estado por las multicomponentes del sistema de partículas con, los eigenestados, por decir algo, la componente  $z$  del espín denotado por  $|\uparrow\rangle$  para el espín up y  $|\downarrow\rangle$  para el espín down, un posible estado del sistema combinado es

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2], \quad (1.4)$$

el tan nombrado estado-singlete (el momento angular total es cero), otra forma conocida son los llamados estados de Bell. La ecuación 1.4 es un ejemplo de estado entrelazado. Un estado entrelazado no puede ser factorizado, en ninguna base, en un producto de estados de dos sistemas, i. e.,

$$|\psi\rangle \neq |spin\ 1\rangle |spin\ 2\rangle. \quad (1.5)$$

Los estados cuánticos descritos por vectores de estado son llamados estados puros. Estados que no son descritos por vectores de estado son llamados estados mixtos. Los estados mixtos se describen por el operador de densidad

$$\hat{\rho} = \sum_i |\psi_i\rangle p_i \langle\psi_i| = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|, \quad (1.6)$$

donde la suma es sobre un ensamble (en el sentido de la mecánica estadística) donde  $p_i$  es la probabilidad de que el sistema esté en el  $i$ -ésimo estado del ensamble  $|\psi_i\rangle$ , donde  $\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1$ . La probabilidad satisface las relaciones

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_i p_i = 1, \quad \sum_i p_i^2 \leq 1. \quad (1.7)$$

Un caso especial donde todos los  $p_i$  desaparecen excepto, por decir algo, el  $j$ -ésimo elemento,  $p_i = \delta_{ij}$ , obtenemos

$$\hat{\rho} = |\psi_j\rangle \langle\psi_j|, \quad (1.8)$$

el operador de densidad para el estado puro  $|\psi_j\rangle$ . Note que el operador de densidad para este caso es simplemente el operador de proyección hacia el estado  $|\psi_j\rangle$ , y para el caso más general de la ecuación 1.6, el operador de densidad es una suma de los operadores de proyección sobre el ensamble, pesado con cada una de las probabilidades de cada miembro del ensamble.

Ahora introducimos una base completa y ortonormal,  $\{|\phi_n\rangle\}$ , ( $\sum_n |\phi_n\rangle \langle\phi_n| = \hat{I}$ ), eigenestados de algún observable. Entonces el  $i$ -ésimo miembro del ensamble lo podemos escribir

$$|\psi_i\rangle = \sum_n |\phi_n\rangle \langle\phi_n|\psi_i\rangle = \sum_n c_n^{(i)} |\phi_n\rangle, \quad (1.9)$$

donde  $c_n^{(i)} = \langle\phi_n|\psi_i\rangle$ . El elemento de matriz de  $\hat{\rho}$  entre los eigenestados  $n$  y  $n'$  es

$$\langle\phi_n|\hat{\rho}|\phi_{n'}\rangle = \sum_i \langle\phi_n|\psi_i\rangle p_i \langle\psi_i|\phi_{n'}\rangle = \sum_i p_i c_n^{(i)} c_{n'}^{(i)*}, \quad (1.10)$$

la cantidad  $\langle\phi_n|\hat{\rho}|\phi_{n'}\rangle$  forma el elemento de la matriz densidad. Al tomar la traza de esta matriz tenemos

$$\begin{aligned} Tr\hat{\rho} &= \sum_n \langle\phi_n|\hat{\rho}|\phi_n\rangle = \sum_i \sum_n \langle\phi_n|\psi_i\rangle p_i \langle\psi_i|\phi_n\rangle \\ &= \sum_i \sum_n p_i \langle\psi_i|\phi_n\rangle \langle\phi_n|\psi_i\rangle = \sum_i p_i = 1, \end{aligned} \quad (1.11)$$

## 1.2 Operador de densidad

---

ya que  $\hat{\rho}$  es hermitiana (como es evidente a partir de su construcción de la ecuación 1.6), el elemento diagonal  $\langle \phi_n | \hat{\rho} | \phi_n \rangle$  tiene que ser real y se sigue de la ecuación 1.11 que

$$0 \leq \langle \phi_n | \hat{\rho} | \phi_n \rangle \leq 1. \quad (1.12)$$

Consideremos el cuadrado del operador de densidad:  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \cdot \hat{\rho}$ . Para un estado puro donde  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$  se sigue que

$$\hat{\rho}^2 = |\psi\rangle\langle\psi| |\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \hat{\rho}, \quad (1.13)$$

y así

$$Tr \hat{\rho}^2 = Tr \hat{\rho} = 1. \quad (1.14)$$

Para una mezcla estadística

$$\hat{\rho}^2 = \sum_i \sum_j p_i p_j |\psi_i\rangle\langle\psi_i| |\psi_j\rangle\langle\psi_j|. \quad (1.15)$$

Tomando la traza tenemos

$$\begin{aligned} Tr \hat{\rho}^2 &= \sum_n \langle \phi_n | \hat{\rho}^2 | \phi_n \rangle \\ &= \sum_n \sum_i \sum_j p_i p_j \langle \phi_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \phi_n \rangle \\ &= \sum_i \sum_j p_i p_j |\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2 \\ &\leq \left[ \sum_i p_i \right]^2 = 1. \end{aligned} \quad (1.16)$$

dándose la igualdad sólo si  $|\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2 = 1$  para cada par de estados  $|\psi_i\rangle$  y  $|\psi_j\rangle$ . Esto es posible solo si todos los  $|\psi_i\rangle$  son colineales en el espacio de Hilbert, i. e., equivalentes hasta un factor de fase global. Así tenemos un criterio para un estado puro y una mezcla estadística de estados:

$$\begin{aligned} Tr \hat{\rho}^2 &= 1, & \text{para un estado puro} \\ Tr \hat{\rho}^2 &< 1, & \text{para una mezcla estadística.} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Para garantizar este punto, tratemos con el siguiente ejemplo. Considere una superposición de, por decir algo, el estado vacío y un fotón

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle), \quad (1.18)$$

donde  $\phi$  es alguna fase. El operador de densidad asociado con este estado está dado por

$$\hat{\rho}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} [|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + e^{i\phi}|1\rangle\langle 0| + e^{-i\phi}|0\rangle\langle 1|]. \quad (1.19)$$

Por otro lado, el operador de densidad para una mezcla de estados igualmente poblados del vacío y un fotón es

$$\hat{\rho}_M = \frac{1}{2} [|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|], \quad (1.20)$$

los dos operadores de densidad difieren por la presencia de elementos fuera de la diagonal, o términos de coherencia, tales términos están ausentes para una mezcla estadística. La ausencia de términos de coherencia es lo que hace la distinción entre un estado que exhibe un completo comportamiento mecánico-cuántico y el otro no. Es fácil comprobar que  $Tr \hat{\rho}_M^2 = 1/2$ .

Para uno de los estados del ensamble  $|\psi_i\rangle$ , que por sí mismo es puro, el valor de expectación de algún operador  $\hat{O}$  es dado por

$$\langle \hat{O} \rangle_i = \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle. \quad (1.21)$$

Para la mezcla estadística, el promedio del ensamble es dado por

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle, \quad (1.22)$$

los cual simplemente es el promedio del valor de expectación mecanico-cuántico pesado con la probabilidades  $p_i$ . Formalmente podemos escribir

$$\langle \hat{O} \rangle = Tr(\hat{\rho}\hat{O}), \quad (1.23)$$

ya que

$$\begin{aligned} Tr(\hat{\rho}\hat{O}) &= \sum_n \langle \phi_n | \hat{\rho}\hat{O} | \phi_n \rangle \\ &= \sum_i \sum_n p_i \langle \phi_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \hat{O} | \phi_n \rangle \\ &= \sum_i \sum_n p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \psi_i \rangle \\ &= \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle. \end{aligned} \quad (1.24)$$

### 1.2.1. Postulados de la mecánica cuántica

Como ya se ha mencionado, el operador de densidad contiene la máxima información del sistema; algo que se podría resaltar es que el operador de densidad representa algo más general de lo que es la función de onda de la mecánica cuántica ordinaria. En consecuencia, los postulados de la mecánica cuántica pueden quedar en términos del operador de densidad [7],

**Postulado I:** El estado de un sistema cuántico se representa matemáticamente por un operador  $\rho$  que actúa en un espacio de Hilbert de estados  $\mathcal{H}$ ;  $\rho$  es operador positivo con traza unidad.

**Postulado II:** La probabilidad  $p_\chi$  de definir el sistema cuántico en el estado  $|\chi\rangle$  es dada por

$$p_\chi = Tr[\rho |\chi\rangle\langle\chi|] = Tr[\rho\mathcal{P}_\chi], \quad (1.25)$$

donde  $\mathcal{P}_\chi \equiv |\chi\rangle\langle\chi|$ .

**Postulado III:** El colapso de la función de onda es dado por

$$\rho \rightarrow \frac{\mathcal{P}_n \rho \mathcal{P}_n}{Tr \rho \mathcal{P}_n}, \quad (1.26)$$

cuando el resultado de la medición de una propiedad física  $A$  está en el eigenvalor  $a_n$ .

**Postulado IV:** La evolución del sistema es dado por

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H(t), \rho(t)]. \quad (1.27)$$

## 1.3. Entrelazamiento cuántico

En esta sección definimos el entrelazamiento por su estructura matemática y hablamos de ello por la definición operacional del entrelazamiento. Mostramos algunas cuestiones importantes de la descripción matemática del entrelazamiento en términos del operador de densidad. La pregunta: ¿qué es el entrelazamiento? es una de las más difíciles y sutiles preguntas que podamos hacer, es un pensamiento inocente a tratar. Entonces, lo que proponemos como respuesta a esta pregunta es simplemente una caracterización del entrelazamiento a través de su estructura matemática y sus características operacionales en términos de propiedades no locales.

El entrelazamiento se puede definir operacionalmente y matemáticamente. La definición operacional del entrelazamiento usa el concepto de Operaciones Locales y Comunicación Clásica (del acrónimo en inglés, Local Operations and Classical Communication, LOCC, Bennett, et al.; 1996). LOCC es una restricción para usar solamente alguna operación local y comunicaciones clásicas; es decir, no es permitido

### 1.3 Entrelazamiento cuántico

intercambiar cualquier sistema cuántico ni realizar cualquier operacional no local (Bennett, et al.; 1996). en este caso, el entrelazamiento se concibe como la fuente que permite vencer la restricción de LOCC. Manteniendo esta idea, las correlaciones clásicas son aquellas generadas por operaciones LOCC y las cuánticas son aquellas que no son simuladas clásicamente (ver Plenio & Virmani, 2007). La definición operacional del entrelazamiento es basta porque nos permite entender el entrelazamiento como un recurso físico y da las bases para definir algunas medidas de entrelazamiento, como la entropía del entrelazamiento. Formalmente, matemáticamente, rigurozamente hablando, podemos definir el entrelazamiento como estados cuánticos que no pueden escribirse como el producto de dos funciones de onda, esto es, para dos estados cuánticos tenemos, por ejemplo:

$$|\psi\rangle_{12} = |\phi_0\rangle_1(c_1|\xi_0\rangle_2 + c_2|\xi_1\rangle_2) \rightarrow \text{un-entangled} \quad (1.28)$$

$$|\phi\rangle_{12} = c(|\phi_0\rangle_1|\xi_0\rangle_2 + |\phi_1\rangle_1|\xi_1\rangle_2) \rightarrow \text{entangled}, \quad (1.29)$$

donde  $|\phi_0\rangle, |\xi_0\rangle, |\phi_1\rangle, |\xi_1\rangle$  son estados base, y  $c_1, c_2$  y  $c$  son constantes de normalización. El subíndice 1 se refiere al sistema 1 y el 2 al sistema 2. Podemos considerar, también, que el sistema 1 y el sistema 2 son situados muy lejos en dos diferentes lugares. Usualmente, en teoría de información cuántica, esto se establece como; El sistema 1 pertenece a Alice y el sistema 2 pertenece a Bob. Físicamente podemos decir que la ecuación 1.28 considera que cada sistema cuántico tiene su propio estado, mientras que en la ecuación 1.29 cada sistema no tiene su propio estado, sino que comparte (aunque ellos esten muy lejos) un estado global. Sin embargo, es posible asignar un operador de densidad a cada sistema, esto se puede ver más claramente si observamos el operador de densidad de los estados dados por la ecuación 1.29:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |\phi\rangle_{12} \langle\phi| \\ &= |c|^2 \{ |\phi_0\rangle_{11} \langle\phi_0| |\xi_0\rangle_{22} \langle\xi_0| + |\phi_0\rangle_{11} \langle\phi_1| |\xi_0\rangle_{22} \langle\xi_1| + \\ &\quad |\phi_1\rangle_{11} \langle\phi_0| |\xi_1\rangle_{22} \langle\xi_0| + |\phi_1\rangle_{11} \langle\phi_1| |\xi_1\rangle_{22} \langle\xi_1| \}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ahora, con el fin de obtener el operador de densidad para un sistema, podemos tomar la traza parcial sobre uno de los sistemas del operador de densidad en la ecuación 1.30, por ejemplo, al tomar la traza sobre el sistema 2 y obtener el operador de densidad para uno de ellos, como se sigue:

$$\hat{\rho} = \text{Tr}_2\{\hat{\rho}_{12}\} = |c|^2 \{ |\phi_0\rangle_{11} \langle\phi_0| + |\phi_1\rangle_{11} \langle\phi_1| \}. \quad (1.31)$$

La ecuación 1.31 es un estado mezcla. Esto significa que aunque el sistema 1 y 2 no tiene su propia función, como se establece en la ecuación 1.29, aun es posible asignar un operador de densidad para cada sistema. En otras palabras, y contrario a la ecuación 1.28, un estado entrelazado parece en cada parte estar en un estado mezcla Bennett (et al.; 1996).

De hecho, cualquier sistema de dos estados entrelazados podría escribirse en términos de la forma Schmidt:

$$|\varphi\rangle = \sum_{i=1} \sqrt{\lambda_i} |e_i\rangle \otimes |h_i\rangle, \quad (1.32)$$

donde,  $|e_i\rangle$  y  $|h_i\rangle$  son vectores ortogonales en el espacio de Hilbert de cada sistema, con dimensiones  $m$  y  $n$ , respectivamente. De aquí, la matriz de densidad de cada sistema podría escribirse como, para una prueba ver (Hughton, et al.; 1993),

$$\hat{\rho}_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i |e_i\rangle \langle e_i|, \quad \hat{\rho}_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i |h_i\rangle \langle h_i|. \quad (1.33)$$

Del otro lado, si  $\hat{\rho}_x$  corresponde a un producto de estados, i. e., no entrelazamiento, entonces

$$\hat{\rho}_x^2 = \hat{\rho}_x, \quad (1.34)$$

donde  $x = 1, 2$ . Esto quiere decir, para dos sistemas en un estado entrelazado no satisface la ecuación 1.34. Podemos comprobar esto al usar las ecuaciones 1.28 y 1.30, para una prueba ver (Popescu & Rohrlich, 1998).

Muchos fenómenos que intrigan provienen de las peculiaridades de la ecuación 1.29. por ejemplo, en mecánica clásica no es posible influenciar el resultado de una medición en un sistema al actuar en otro sistema que no interactúe mas con el sistema formado, sin embargo, los estados entrelazados hacen esto posible por las propiedades cuánticas del sistema. Esto es la no-localidad, característica de un sistema cuántico.

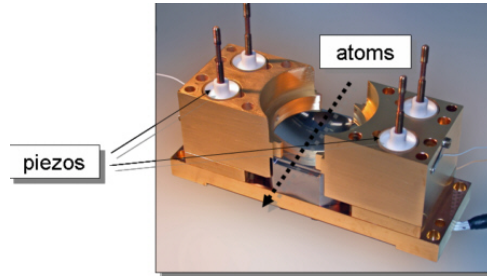


Figura 1.1: Una cavidad con el espejo superior removido

#### 1.4. Breve descripción de una cavidad cuántica electrodinámica (CQED)

Aparte de los elementos teóricos dados arriba, es necesario conocer algunos instrumentos ópticos que se utilizan para confinar modos de campo electromagnético.

Una cavidad óptica o resonador óptico es un dispositivo en el que algunos rayos luminosos son susceptibles de permanecer confinados gracias a espejos sobre los que se reflejan [22]. Estas cavidades son indispensables en los láseres para que su luz pase varias veces por su medio amplificador. A veces se utilizan en los interferómetros y en osciladores ópticos paramétricos.

Una imagen de la cavidad C [23] con el espejo superior removido se muestra en la Fig. 1.1. La distancia entre sus vértices es  $L = 27.57$  mm. Sus superficies son toroidales (con radios de curvatura 39.4 y 40.6 mm en dos planos ortogonales). Los dos modos que soporta son cercanos a 51.099 GHz (con polarización lineal ortogonal) están separados por 1.2 MHz. Los espejos están eléctricamente aislados. El espacio de 1 cm entre los filos de los espejos está parcialmente cerrado por dos anillos que mejoran homogéneamente el campo estático en C. Los 4 piezo-electric actuators se emplean para trasladar uno de los espejos y tunear la cavidad (en el rango de  $\pm 5$  MHz) con pocos hertz de precisión. Los espejos tienen diámetro  $D_0 = 50$  mm. 4.1),

## Capítulo 2

# Estados coherentes, estados de número desplazados y funciones de cuasiprobabilidad

En este capítulo veremos cual es la relación de los estados coherentes con los estados de número desplazado. Empezaremos con las características principales que definen a un estado coherente. Consecuentemente, veremos que los estados de número desplazado se pueden ver como un caso general de los estados coherentes. También se analizan las funciones de cuasiprobabilidad que nos permiten determinar la evolución de un sistema físico, y en este sentido nos da una información similar al operador de densidad.

### 2.1. Estados coherentes

Se definen como los eigenestados del operador de aniquilación [13]

$$\hat{a} | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle, \quad (2.1)$$

los estados de número  $| n \rangle$  definen un conjunto completo de manera que el estado coherente  $| \alpha \rangle$  se puede poner como una combinación lineal de estos

$$| \alpha \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n | n \rangle, \quad (2.2)$$

al aplicar el operador de aniquilación a la ecuación 2.2 y considerar 2.1 y usando el hecho de que un estado coherente está normalizado, uno puede obtener una expresión explícita del estado coherente en término de los estados de número

$$| \alpha \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} |\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} | n \rangle. \quad (2.3)$$

El operador de campo eléctrico es [14]

$$\hat{E}_x(\vec{r}, t) = i \left( \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\hat{a} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}], \quad (2.4)$$

que al calcular su valor de expectación obtenemos

$$\langle \alpha | \hat{E}_x(\vec{r}, t) | \alpha \rangle = i \left( \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\alpha e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \alpha^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}], \quad (2.5)$$

al escribir  $\alpha$  en coordenadas polares,  $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$ , obtenemos

$$\langle \alpha | \hat{E}_x(\vec{r}, t) | \alpha \rangle = 2 |\alpha| \left( \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \theta), \quad (2.6)$$

lo cual se asemeja a un campo clásico. Es oportuno presentar el valor de expectación de el campo eléctrico en los estados de número

$$\langle n | \hat{E}_x(\vec{r}, t) | n \rangle = 0. \quad (2.7)$$

Como podemos ver, existe una gran diferencia en el valor de espectación de una observable cuando se involucra un estado semiclásico ( $|\alpha\rangle$ ) ó un estado cuántico ( $|n\rangle$ ). Tanto estados coherentes como estados de número son estados cuánticos.

Si tenemos al sistema en el estado coherente  $|\alpha\rangle$ , el número promedio de fotones es

$$\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2, \quad (2.8)$$

mientras que en un estado de número  $|n\rangle$  tenemos

$$\langle n | \hat{n} | n \rangle = n. \quad (2.9)$$

Otra manera de definir los estados coherentes es como estados desplazados del vacío, que a su vez involucra un mecanismo para generar estados coherentes. El operador de desplazamiento se define como

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}), \quad (2.10)$$

y los estados coherentes son dados por

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle. \quad (2.11)$$

El operador de desplazamiento tiene las siguientes propiedades

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha), \quad (2.12)$$

que evidentemente conlleva a

$$\hat{D}(\alpha) \hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{D}(\alpha) = 1, \quad (2.13)$$

y por último

$$\hat{D}(\alpha) \hat{D}(\beta) = \exp[i\text{Im}(\alpha\beta^*)] \hat{D}(\alpha + \beta). \quad (2.14)$$

### 2.1.1. Estados $|\alpha\rangle$ , $|\alpha\rangle$ y estados gatos de Schrödinger

Los estados  $|\alpha\rangle$  y  $|\alpha\rangle$  son estados que se encuentran separados en el espacio fase por un ángulo de 180 grados. Es importante mencionarlos ya que conforman estados superpuestos

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}(|\alpha\rangle + e^{i\Phi} |\alpha\rangle), \quad (2.15)$$

donde  $\mathcal{N}$  es un factor de normalización dado por

$$\mathcal{N} = [2 + 2\exp(-2\alpha^2) \cos \Phi]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.16)$$

Para valores grandes de  $|\alpha|$ , los estados  $|\alpha\rangle$  y  $|\alpha\rangle$  son macroscópicamente distinguibles y superposiciones de la forma de la ecuación 2.15 se refieren frecuentemente como estados gato de Schrödinger.

Para ver algo concreto acerca de los estados  $|\alpha\rangle$  y  $|\alpha\rangle$ , veamos el valor promedio del campo electromagnético en estos estados. Según ecuación 2.6,

$$|\alpha\rangle : \quad \langle \alpha | \hat{E}_x(\vec{r}, t) | \alpha \rangle = 2 |\alpha| \left( \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \theta), \quad (2.17)$$

$$|\alpha\rangle : \quad \langle \alpha | \hat{E}_x(\vec{r}, t) | \alpha \rangle = 2 |\alpha| \left( \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \theta). \quad (2.18)$$

Podemos observar que la diferencia entre estos estados se ve reflejada en el signo de  $\theta$ .

2.1.2. Generación de estados coherentes

Un estado coherente se puede generar por corrientes clásicas que oscilan. Sea el vector potencial electromagnético cuántico  $\hat{A}(\vec{r}, t)$  para el campo que interactúa con una corriente clásica descrita por la densidad de corriente  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ . De acuerdo a la teoría electromagnética clásica, la energía de interacción  $\hat{V}(t)$  está dada por

$$\hat{V}(t) = \int d^3\vec{r} \vec{j}(\vec{r}, t) \hat{A}(\vec{r}, t), \quad (2.19)$$

Para un sólo modo de campo,  $\hat{A}(\vec{r}, t)$  está dado, en la imagen de interacción, por

$$\hat{A}(\vec{r}, t) = \vec{e} \left( \frac{\hbar}{2\omega_0 \varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\hat{a} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \hat{a}^\dagger e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}], \quad (2.20)$$

donde  $\hat{a}$  significa  $\hat{a}(0)$ . Sustituyendo esto dentro de la ecuación 2.19, tenemos

$$\hat{V}(t) = - \left( \frac{\hbar}{2\omega_0 \varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\hat{a} \vec{e} \cdot \vec{J}(\vec{k}, t) e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger \vec{e} \cdot \vec{J}^*(\vec{k}, t) e^{i\omega t}], \quad (2.21)$$

donde

$$\vec{J}(\vec{k}, t) = \int d^3\vec{r} \vec{j}(\vec{r}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (2.22)$$

Del hecho de que  $\hat{V}(t)$  depende del tiempo, el operador de evolución asociado está en un producto de ordenamiento temporal [15]. Pero para intervalos de tiempo infinitesimal a partir de  $t$  a  $t + \delta t$ , el operador de evolución es

$$\begin{aligned} \hat{U}(t + \delta t, t) &\cong \exp[-i\hat{V}(t)\delta t/\hbar] \\ &= \exp\{-\delta t[u(t)\hat{a} - u^*(t)\hat{a}^\dagger]\} \\ &= \hat{D}[u(t)\delta t], \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde

$$u(t) = - \left( \frac{\hbar}{2\omega_0 \varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \vec{e} \cdot \vec{J}(\vec{k}, t) e^{-i\omega t}. \quad (2.24)$$

Para un intervalo de tiempo finito, por decir de 0 a  $T$ , el operador de evolución puede ser escrito como

$$\hat{U}(T, 0) = \lim_{\delta t \rightarrow \infty} \hat{T} \prod_{l=0}^{T/\delta t} \hat{D}[u(t_l)\delta t], \quad (2.25)$$

donde  $\hat{T}$  es el operador de ordenamiento temporal y donde  $t_l = l\delta t$ . La ecuación 2.25 se convierte, al usar la ecuación 2.14,

$$\begin{aligned} \hat{U}(T, 0) &= \lim_{\delta t \rightarrow \infty} e^{i\Phi} \hat{D} \left[ \sum_{l=0}^{T/\delta t} u(t_l)\delta t \right] \\ &= e^{i\Phi} \hat{D}[\alpha(T)], \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde

$$\alpha(T) = \lim_{\delta t \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{T/\delta t} u(t_l)\delta t = \int_0^T u(t') dt', \quad (2.27)$$

y donde  $\Phi$  es una fase global acumulada. Con el estado inicial del vacío, el estado al tiempo  $T$  es simplemente el estado coherente  $|\alpha(T)\rangle$  con  $\alpha(T)$  dado por la ecuación 2.27, mas aparte una fase global irrelevante.

## 2.2. Estados de número desplazados

Los estados de número desplazado se definen por

$$|\alpha, n\rangle = \hat{D}(\alpha) |n\rangle, \quad (2.28)$$

donde  $\hat{D}(\alpha)$  es dado por 2.10. Para  $n = 0$ , el estado de número se reduce al bien conocido estado coherente. Algunas propiedades de los estados de número desplazado pueden derivarse usando la transformación de los operadores de creación y aniquilación bajo la transformación [12]

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha)\hat{a}\hat{D}^\dagger(\alpha) &= \hat{a} - \alpha, \\ \hat{D}(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}^\dagger(\alpha) &= \hat{a}^\dagger - \alpha^*. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Existe una relación simple entre los estados de número desplazado  $|\alpha, n\rangle$  y el hamiltoniano del oscilador armónico. Al aplicar el operador de desplazamiento a la ecuación de eigenvalor

$$\hat{H}_0 |n\rangle = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega |n\rangle, \quad (2.30)$$

obtenemos

$$\hat{H}_d |\alpha, n\rangle = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega |\alpha, n\rangle, \quad (2.31)$$

donde

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}), \quad (2.32)$$

$$\hat{H}_d = \hat{D}(\alpha)\hat{H}_0\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger - \alpha^*)(\hat{a} - \alpha) + \frac{1}{2}. \quad (2.33)$$

En el estado de número desplazado se observa que es un eigenestado del hamiltoniano desplazado del oscilador armónico.

El promedio de fotones cuando el sistema se encuentra en el estado  $|\alpha, n\rangle$  es

$$\langle n, \alpha | \hat{n} | n, \alpha \rangle = n + |\alpha|^2, \quad (2.34)$$

lo cual dice que el promedio de fotones en este estado es la suma del promedio de fotones en el estado coherentes (ecuación 2.8) y el promedio de fotones en el estado de número (ecuación 2.9).

La distribución de números de fotones de los estados de número desplazado  $P_{dn}(l)$  se puede obtener a partir de

$$P_{dn}(l) = |\langle l | \alpha, n \rangle|^2 = |\langle l | \hat{D}(\alpha) | n \rangle|^2, \quad (2.35)$$

donde ahora  $\alpha$  es un número complejo. De esta ecuación, se ve que la distribución de fotones es simétrica en  $n$  y  $l$ . Los elementos de matriz de  $\hat{D}(\alpha)$ , cuando  $l \geq n$ ,

$$\langle l | \hat{D}(\alpha) | n \rangle = \left(\frac{n!}{l!}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha^{l-n} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \times \mathcal{L}_n^{(l-n)}(|\alpha|^2), \quad (2.36)$$

<sup>1</sup>más explícitamente

$$P_{dn}(l) = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2(l-n)}}{n!l!} \times \left| \sum_{k=0}^n \frac{n!l!(-1)^k |\alpha|^{2(n-k)}}{k!(n-k)!(l-k)!} \right|^2. \quad (2.37)$$

---

<sup>1</sup> $\mathcal{L}_n^{(l-n)}(|\alpha|^2)$  son los polinomios asociados de Laguerre con argumento  $|\alpha|^2$

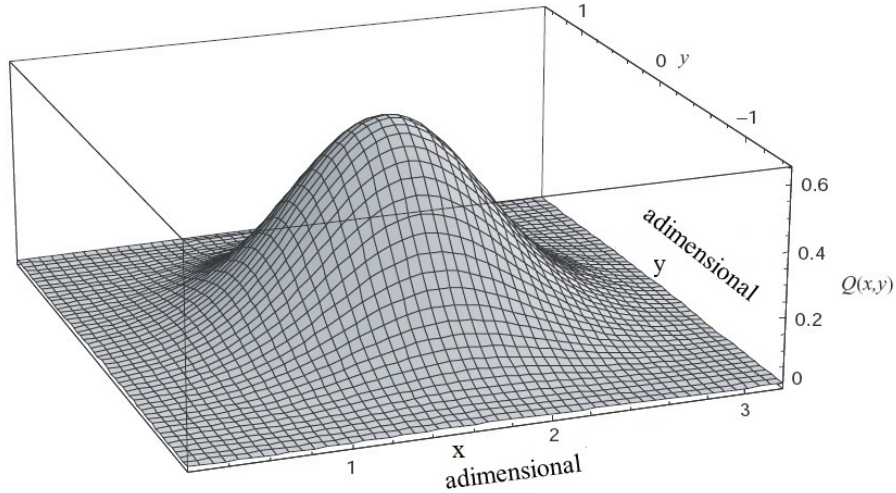


Figura 2.1: Función Q para un estado coherente con  $\bar{n} = 10$ .

### 2.3. Funciones de Cuasiprobabilidad

Las funciones de cuasiprobabilidad se usan para visualizar la evolución de un sistema. Esto conlleva a interpretaciones físicas, como decir si el sistema es cuántico o semi-clásico. Existen 3 funciones importantes de cuasiprobabilidad; la función de Glauber-Sudarshan [13, 16] o también llamada la función P, la función de Wigner [17], y la función Husimi [18] también llamada la función Q. Nosotros nos centraremos más en el uso de la función Q. Cabe mencionar que la función de Wigner es mayormente usada en la literatura.

La función Q, en terminos simples, la podemos definir como el valor esperado del operador de densidad dividido por  $\pi$ .

$$Q(\alpha) = \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle / \pi. \quad (2.38)$$

El operador de densidad es un operador positivo, por lo tanto la función Q siempre es positiva. En este sentido, esta función tiene el carácter de distribución de probabilidad.

**Nota:** Debido a que la visualización de  $\hat{\rho}(t)$  no es posible, entonces se grafica  $\langle \alpha | \hat{\rho}(t) | \alpha \rangle / \pi$ . En este sentido, la función  $\langle \alpha | \hat{\rho}(t) | \alpha \rangle / \pi$  da y representa la evolución del sistema físico. Es, pues, una manera de visualizar la evolución temporal del sistema.

Presentamos la función Q para 3 estados interesantes; los coherentes (Fig. 2.1), los de número (Fig. 2.2) y de número desplazado (Fig. 2.3). Sus expresiones calculadas son:

estados coherentes,  $\hat{\rho} = |\beta\rangle\langle\beta|$ , ensanwichamos con  $|\alpha\rangle$

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle \langle \beta | \alpha \rangle \\ &= \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \exp(-|\alpha - \beta|^2), \end{aligned} \quad (2.39)$$

estados de número,  $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$ , ensanwichamos con  $|\alpha\rangle$

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | n \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (2.40)$$

estados de número desplazado,  $\hat{\rho} = |\beta, n\rangle\langle\beta, n|$ , ensanwichamos con  $|\alpha\rangle$

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= |\langle \alpha | \beta, n \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-|\beta - \alpha|^2} \frac{|\beta - \alpha|^{2n}}{n!}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Observamos que la función Q para los estados coherentes es una montaña bien definida, esto nos dice que el sistema es semi-clásico. Para los estados de número vemos que la función Q oscila lo cual nos diría, en principio, que el sistema es cuántico. Para los estados de número la función Q es prácticamente la misma que para los estados de número.

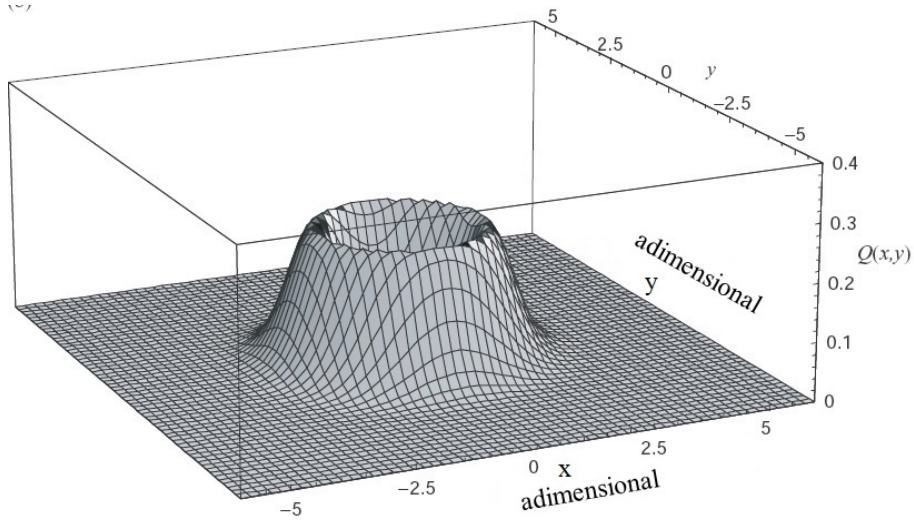


Figura 2.2: Función  $Q$  para un estado de número con  $n=10$ .

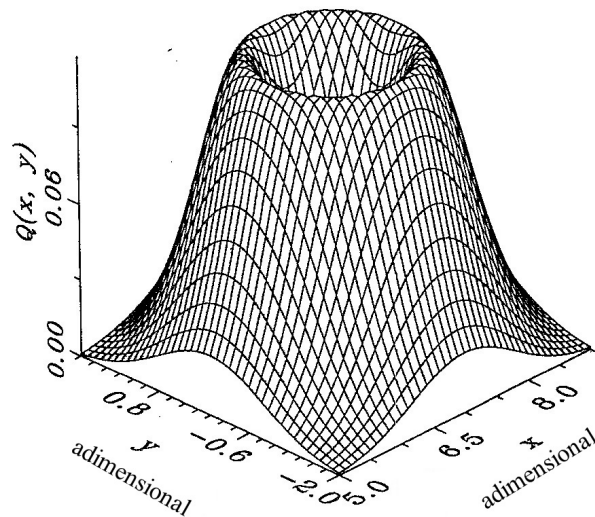


Figura 2.3: Función  $Q$  para un estado de número desplazado  $|7, 1\rangle$ .

## Capítulo 3

# Interacción de un sólo modo del campo electromagnético con su medio ambiente

En este capítulo se deducirá la ecuación maestra para solamente un modo de campo electromagnético. Consideramos al medio ambiente como un número infinito de modos del campo electromagnético. Veremos que al Hamiltoniano asociado (la energía del sistema) se le podrá identificar dos partes importantes, una libre y otra de interacción, de las cuales sólo la última será de relevancia por el hecho de que esta contiene la evolución de nuestro sistema de interés, un modo del campo electromagnético interaccionando con su medio ambiente.

### 3.1. Ecuación de Schrödinger en su forma integral

El método de la ecuación maestra que nosotros discutimos es esencialmente una versión de la imagen de Schrödinger de la teoría de Senitzky. Es provechoso estudiar los cálculos de Senitzky en la imagen de Heisenberg como se seguirá mas adelante [20]. En ambas filosofías es modelar las interacciones del medio ambiente por el acoplamiento de un sistema amortiguado  $S$  a un reservorio  $R$ , comenzando con un Hamiltoniano en la forma general

$$H = H_S + H_R + H_{SR}, \quad (3.1)$$

donde  $H_S$  y  $H_R$  son hamiltonianos para los sistemas  $S$  y  $R$ , respectivamente, y  $H_{SR}$  es un Hamiltoniano de interacción. El reservorio es solamente de un interés indirecto, y sus propiedades necesitan ser identificadas en términos muy generales; por ejemplo, para una temperatura y una densidad de estados de energía. Para una ilustrativa propuesta daremos a  $H_S$  y  $H_{SR}$  en una forma mas explícita una vez que lleguemos a cálculos más concretos.

La derivación dada aquí es aquella ya tratada por Luisell [8] y Haken [9]. Estamos buscando información acerca del sistema  $S$  sin requerir detalles de la información acerca del sistema completo  $S \oplus R$ . Sea  $\chi(t)$  el operador de densidad para  $S \oplus R$  y definamos el operador de densidad  $\rho(t)$  por

$$\rho(t) \equiv tr_R [\chi(t)], \quad (3.2)$$

donde la traza se toma sobre todos los estados del reservorio. Claramente, si  $\hat{O}$  es un operador en el espacio de Hilbert de  $S$  podemos calcular su valor promedio en la imagen de Schrödinger si tenemos sólo conocimiento de  $\rho(t)$ , y no del sistema completo de  $\chi(t)$ :

$$\langle \hat{O} \rangle = tr_{S \oplus R} [\hat{O} \chi(t)] = tr_R \left\{ \left[ \hat{O} \chi(t) \right] \right\} = tr_S [\hat{O} \rho(t)]. \quad (3.3)$$

Nuestro objetivo es obtener una ecuación para  $\rho(t)$  con las propiedades de  $R$  entrando sólo como parámetros.

La ecuación de Schrödinger para el operador de densidad  $\chi$ , dado en la ecuación 1.6 del capítulo 1, es

$$\dot{\chi} = \frac{1}{i\hbar} [H, \chi], \quad (3.4)$$

donde  $H$  está dado por 3.1. Transformamos 3.4 a la imagen de interacción, separando de esta manera la parte rápida generada por  $H_S + H_R$  de la parte lenta generada por la interacción  $H_{SR}$ . Definamos

$$\tilde{\chi}(t) = e^{(i/\hbar)(H_S+H_R)t} \chi(t) e^{-(i/\hbar)(H_S+H_R)t}, \quad (3.5)$$

de 3.1 y 3.4 tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\chi}} &= \frac{i}{\hbar} (H_S + H_R) \tilde{\chi} - \frac{i}{\hbar} \tilde{\chi} (H_S + H_R) + e^{(i/\hbar)(H_S+H_R)t} \dot{\chi} e^{-(i/\hbar)(H_S+H_R)t} \\ &= \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\chi}], \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $\tilde{H}_{SR}(t)$  tiene estricta dependencia temporal:

$$\tilde{H}_{SR}(t) = e^{(i/\hbar)(H_S+H_R)t} H_{SR} e^{-(i/\hbar)(H_S+H_R)t}. \quad (3.7)$$

Ahora integramos 3.6, quedando

$$\tilde{\chi}(t) = \chi(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')], \quad (3.8)$$

y sustituimos  $\tilde{\chi}(t)$  dentro del conmutador en 3.6;

$$\dot{\tilde{\chi}} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}_{SR}(t), \chi(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')]]. \quad (3.9)$$

Esta ecuación es exacta. La ecuación 3.4 ha sido simplemente presentada por medio de la ecuación 3.9 en una forma conveniente la cual nos ayuda simplemente a identificar razonablemente alguna aproximación.

Asumiremos que la interacción comienza en  $t = 0$  y que no existe correlación entre S y R en el tiempo inicial. Entonces  $\chi(0) = \tilde{\chi}(0)$  factoriza como

$$\chi(0) = \rho(0) R_0, \quad (3.10)$$

donde  $R_0$  es un operador de densidad del reservorio. Entonces notando que

$$tr_R [\tilde{\chi}(t)] = e^{(i/\hbar)H_S t} \rho(t) e^{-(i/\hbar)H_S t} \equiv \tilde{\rho}(t), \quad (3.11)$$

después de hacer la traza sobre el reservorio, 3.9 da la ecuación maestra

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' tr_R \left\{ [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')]] \right\}, \quad (3.12)$$

donde, por simplicidad, hemos eliminado el término  $(1/i\hbar) tr_R \{ [\tilde{H}_{SR}(t), \chi(0)] \}$  con el supuesto de

$$tr_R [\tilde{H}_{SR}(t) R_0] = 0. \quad (3.13)$$

Esto es garantizado si los operadores del reservorio que se acoplan a  $S$  tienen valor medio cero en el estado  $R_0$ , una condición la cual puede ser siempre arreglada por simplicidad al incluir que  $tr_R(H_{SR}R_0)$  en el Hamiltoniano.

Hemos establecido que  $\tilde{\chi}$  factoriza en  $t = 0$ . Tiempo después la correlación entre S y R se incrementará debido al acoplamiento entre el sistema y el reservorio. Hemos asumido, sin embargo, que este acoplamiento es muy débil, y en todo tiempo  $\chi(t)$  podría solamente mostrar desviaciones de orden  $H_{SR}$  desde un estado no correlacionado. Además,  $R$  es un sistema muy grande cuyos estados podrían ser inafectados virtualmente por acoplarse a  $S$  (por supuesto, esperamos que los estados de  $S$  sean significativamente afectados por  $R$ , queremos que sean amortiguados). Por lo tanto, escribimos

$$\tilde{\chi}(t) = \tilde{\rho}(t) R_0 + O(H_{SR}), \quad (3.14)$$

### 3.1 Ecuación de Schrödinger en su forma integral

Ahora podemos hacer nuestra mayor aproximación, una aproximación llamada de Born. Despreciando términos más altos que el segundo orden en  $H_{SR}$ , escribimos 3.12 como

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' tr_R \left\{ \left[ \tilde{H}_{SR}(t), \left[ \tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t') R_0 \right] \right] \right\}. \quad (3.15)$$

La ecuación 3.15 sigue siendo complicada. En particular, no es Markoviana ya que la evolución futura de  $\tilde{\rho}(t)$  depende de su historial pasado a través de la integración sobre  $\tilde{\rho}(t')$  (comportamientos futuros de un sistema Markoviano depende solamente de sus estados presentes). Nuestra segunda mayor aproximación, la aproximación de Markov, reemplaza  $\tilde{\rho}(t')$  por  $\tilde{\rho}(t)$  en el lado derecho de la ecuación 3.15 para obtener la ecuación maestra en la aproximación de Born-Markov:

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' tr_R \left\{ \left[ \tilde{H}_{SR}(t), \left[ \tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t) R_0 \right] \right] \right\}. \quad (3.16)$$

Comportamientos Markovianos son razonables en una base física. Potencialmente,  $S$  puede depender de su historial pasado porque sus estados más recientes vienen a ser impresos como cambios de los estados del reservorio a través de la interacción de  $H_{SR}$ ; estados más recientes son reflejados sobre las futuras evoluciones de  $S$  conforme interactúa con los cambios del reservorio. Si, sin embargo, el reservorio es un sistema grande que mantiene su equilibrio térmico, no esperamos que preserve el menor cambio debido a su interacción con  $S$  durante mucho tiempo; no lo suficiente para afectar significativamente las futuras evoluciones de  $S$ . Viene a ser una cuestión de tiempos de correlación del reservorio contra las escalas de tiempo para cambios significantes de  $S$ . Al estudiar la integral de 3.15 con esta idea en mente podemos hacer la resaltante suposición de la aproximación de Markov más explícita.

Hagamos nuestro modelo un poco más específico al escribir

$$H_{SR} = \hbar \sum_i s_i \Gamma_i, \quad (3.17)$$

donde los  $s_i$  son operadores en el espacio de Hilbert de  $S$  y los  $\Gamma_i$  son operadores del reservorio, operadores en el espacio de Hilbert de  $R$ . Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{SR}(t) &= \hbar \sum_i e^{(i/\hbar)(H_S+H_R)t} s_i \Gamma_i e^{-(i/\hbar)(H_S+H_R)t} \\ &= \hbar \sum_i \left( e^{(i/\hbar)H_S t} s_i e^{-(i/\hbar)H_S t} \right) \left( e^{(i/\hbar)H_R t} \Gamma_i e^{-(i/\hbar)H_R t} \right) \\ &= \hbar \sum_i \tilde{s}_i(t) \tilde{\Gamma}_i(t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

La ecuación maestra en la aproximación de Born, ecuación 3.15, es ahora

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) &= -\sum_{i,j} \int_0^t dt' tr_R \left\{ \left[ \tilde{s}_i(t) \tilde{\Gamma}_i(t), \left[ \tilde{s}_j(t') \tilde{\Gamma}_j(t'), \tilde{\rho}(t') R_0 \right] \right] \right\} \\ &= -\sum_{i,j} \int_0^t dt' \left\{ \tilde{s}_i(t) \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}(t') tr_R \left[ \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') R_0 \right] \right. \\ &\quad \left. \tilde{s}_i(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_j(t') tr_R \left[ \tilde{\Gamma}_i(t) R_0 \tilde{\Gamma}_j(t') \right] - \tilde{s}_i(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_i(t) \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \tilde{\Gamma}_j(t') R_0 \tilde{\Gamma}_i(t) \right] + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_j(t') \tilde{s}_i(t) tr_R \left[ R_0 \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \right] \right\} \\ &= -\sum_{i,j} \int_0^t dt' \left\{ \left[ \tilde{s}_i(t) \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_i(t) \right] \langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R \right. \\ &\quad \left. + \left[ \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_j(t') \tilde{s}_i(t) - \tilde{s}_i(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_j(t') \right] \langle \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R \right\}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde hemos usado la propiedad cíclica de la traza-  $tr(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = tr(\hat{C}\hat{A}\hat{B}) = tr(\hat{B}\hat{C}\hat{A})$ - y escrito

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R &= tr_R \left[ R_0 \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \right] \\ \langle \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R &= tr_R \left[ R_0 \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Las propiedades del reservorio entran en 3.19 a través de dos funciones de correlación dadas en 3.20. Podemos justificar el reemplazamiento de  $\tilde{\rho}(t')$  por  $\tilde{\rho}(t)$  si estas funciones de correlación decaen muy rápidamente sobre los tiempos de escala sobre los cuales  $\tilde{\rho}(t)$  varía. Idealmente, podríamos tomar

$$\langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R \propto \delta(t - t'). \quad (3.21)$$

La aproximación de Markov descanza, como se sugirió antes, sobre la existencia de dos escalas de tiempo ampliamente separadas: una escala de tiempo lenta para el dinamismo del sistema  $S$  y una escala de tiempo rápida que caracteriza el decaimiento de las funciones de correlación del reservorio. Veremos explícitamente a las funciones de correlación del reservorio y la separación de las escalas de tiempo en nuestro primer ejemplo.

### 3.2. Ecuación maestra para el oscilador armónico amortiguado

Adoptemos ahora un modelo explícito. Para el Hamiltoniano del sistema compuesto  $S \oplus R$  escribimos

$$\begin{aligned} H_S &\equiv \hbar\omega_0 a^\dagger a \\ H_R &\equiv \sum_j \hbar\omega_j r_j^\dagger r_j \\ H_{SR} &\equiv \sum_j \hbar \left( \kappa_j^* a r_j^\dagger + \kappa_j a^\dagger r_j \right) = \hbar (a\Gamma^\dagger + a^\dagger\Gamma). \end{aligned} \quad (3.22)$$

El sistema  $S$  es un oscilador armónico con frecuencia  $\omega_0$  y operadores de creación y aniquilación  $a^\dagger$  y  $a$ , respectivamente; el reservorio  $R$  se modela como una colección infinita de osciladores armónicos con frecuencia  $\omega_j$  y operadores correspondientes de creación y aniquilación  $r_j^\dagger$  y  $r_j$ , respectivamente; el oscilador  $a$  se acopla al  $j$ -ésimo oscilador del reservorio via una constante de acoplamiento  $\kappa_j$  en la aproximación de onda rotante. En términos físicos, la ecuación 3.22 diría que el modo de nuestro sistema (descrito por  $a$ ) pierde un fotón ganándolo el  $j$ -ésimo modo del reservorio y viceversa. Tomamos el reservorio estar en equilibrio térmico a temperatura  $T$  con operador de densidad

$$R_0 = \prod_j e^{-\hbar\omega_j r_j^\dagger r_j / k_B T} \left( 1 - e^{-\hbar\omega_j / k_B T} \right), \quad (3.23)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. No es necesario ser tan específico acerca del modelo del reservorio. Sin embargo, para una claridad pedagógica, el modelo del oscilador es físicamente razonable en muchas circunstancias. Los osciladores del reservorio podrían ser muchos de los modos de la radiación del vacío dentro del cual un modo de una cavidad óptica decae a través de sus espejos, o dentro del cual un átomo excitado decae via emisión espontánea; alternatively, podrían representar modos fonones en un sólido.

La identificación con 3.19 se hace al establecer

$$\Gamma_1 = \Gamma^\dagger \equiv \sum_j \kappa_j^* r_j, \quad \Gamma_2 = \Gamma \equiv \sum_j \kappa_j r_j, \quad (3.24)$$

y entonces de 3.18 y 3.22 los operadores en la imagen de interacción son

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1(t) &= e^{i\omega_0 a^\dagger a t} a e^{-i\omega_0 a^\dagger a t} = a e^{-i\omega_0 t}, \\ \tilde{s}_2(t) &= e^{i\omega_0 a^\dagger a t} a^\dagger e^{-i\omega_0 a^\dagger a t} = a^\dagger e^{-i\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.2 Ecuación maestra para el oscilador armónico amortiguado

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_1(t) &= \tilde{\Gamma}^\dagger(t) = \exp\left(i \sum_n \omega_n r_n^\dagger r_n t\right) \sum_j k_j^* r_j^\dagger \exp\left(-i \sum_m \omega_m r_m^\dagger r_m t\right) \\
&= \sum_j \kappa_j^* r_j^\dagger e^{i\omega_j t}, \\
\tilde{\Gamma}_2(t) &= \tilde{\Gamma}(t) = \tilde{\Gamma}^\dagger(t) = \exp\left(i \sum_n \omega_n r_n^\dagger r_n t\right) \sum_j k_j r_j \exp\left(-i \sum_m \omega_m r_m^\dagger r_m t\right) \\
&= \sum_j k_j r_j e^{-i\omega_j t},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

donde en 3.25 usamos el hecho de que los operadores de diferentes osciladores del reservorio conmutan. para mostrar que  $e^{i\omega_0 a^\dagger a t} a e^{-i\omega_0 a^\dagger a t} = a e^{-i\omega_0 t}$ , observe que el lado izquierdo es simplemente una solución formal a la ecuación de movimiento  $\dot{a} = -i\omega_0 [a, a^\dagger a] = -i\omega_0 a$ . Note que, de 3.23 y 3.26,  $\langle \tilde{\Gamma}_1(t) \rangle_R = \langle \tilde{\Gamma}_2(t) \rangle_R = 0$  como se requiere por suposición 3.13.

Ahora, de la suma en 3.19 corre sobre  $i = 1, 2$  y  $j = 1, 2$ , el integrando involucra dieciseis términos. Escribimos

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= - \int_0^t dt' \left\{ [aa\tilde{\rho}(t') - a\tilde{\rho}(t')a] e^{-i\omega_0(t+t')} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + h.c. \right. \\
&\quad + [a^\dagger a^\dagger \tilde{\rho}(t') - a^\dagger \tilde{\rho}(t') a^\dagger] e^{i\omega_0(t+t')} \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R + h.c. \\
&\quad + [aa^\dagger \tilde{\rho}(t') - a^\dagger \tilde{\rho}(t') a] e^{-i\omega_0(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R + h.c. \\
&\quad \left. + [a^\dagger a \tilde{\rho}(t') - a\tilde{\rho}(t') a^\dagger] e^{i\omega_0(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + h.c. \right\},
\end{aligned} \tag{3.27}$$

donde las funciones de correlación reservorio explícitamente son

$$\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = \sum_{j,k} \kappa_j^* \kappa_k^* e^{i\omega_j t} e^{i\omega_k t'} \text{tr}_R \left( R_0 r_j^\dagger r_k^\dagger \right) = 0, \tag{3.28}$$

$$\langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R = \sum_{j,k} \kappa_j \kappa_k e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_k t'} \text{tr}_R \left( R_0 r_j r_k \right) = 0, \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R &= \sum_{j,k} \kappa_j^* \kappa_k e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_k t'} \text{tr}_R \left( R_0 r_j^\dagger r_k \right) \\
&= \sum_j |k_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \bar{n}(\omega_j, T),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \sum_{j,k} \kappa_j \kappa_k^* e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_k t'} \text{tr}_R \left( R_0 r_j r_k^\dagger \right) \\
&= \sum_j |k_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')} [\bar{n}(\omega_j, T) + 1],
\end{aligned} \tag{3.31}$$

con

$$\bar{n}(\omega_j, T) = \text{tr}_R \left( R_0 r_j^\dagger r_j \right) = \frac{e^{-\hbar\omega_j/k_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega_j/k_B T}}, \tag{3.32}$$

las funciones de correlación 3.30 y 3.31 involucran una sumatoria sobre los osciladores del reservorio. Cambiamos esta suma a una integración al introducir una densidad de estados  $g(\omega)$  tal que  $g(\omega)d\omega$  da el número de osciladores con frecuencias en el intervalo  $\omega$  a  $\omega + d\omega$ . Al hacer un cambio de variable

$$\tau = t - t', \tag{3.33}$$

3.27 puede ser presentado

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} &= - \int_0^t d\tau \left\{ [aa^\dagger \tilde{\rho}(t-\tau) - a^\dagger \tilde{\rho}(t-\tau)a] e^{-i\omega_0 \tau} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t-\tau) \rangle_R + h.c. \right. \\
&\quad \left. [a^\dagger a \tilde{\rho}(t-\tau) - a\tilde{\rho}(t-\tau)a^\dagger] e^{i\omega_0 \tau} \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t-\tau) \rangle_R + h.c. \right\},
\end{aligned} \tag{3.34}$$

donde las funciones de correlación diferentes de cero son

$$\langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t)\tilde{\Gamma}(t-\tau) \rangle_R = \int_0^\infty d\omega e^{i\omega\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T), \quad (3.35)$$

$$\langle \tilde{\Gamma}(t)\tilde{\Gamma}^\dagger(t-\tau) \rangle_R = \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 [\bar{n}(\omega, T) + 1], \quad (3.36)$$

con

$$\bar{n}(\omega, T) = \frac{e^{-\hbar\omega/k_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}}. \quad (3.37)$$

En realidad es más sencillo evaluar primero la integral temporal, sin realizar la integral de frecuencias para obtener una forma explícita para las funciones de correlación reservorio. Esto es posible ya que ahora estamos satisfaciendo el hecho de que la integración  $\tau$  está dominada por tiempos que son más cortos que los tiempos de escala para la evolución de  $\tilde{\rho}$ . Con  $\tilde{\rho}(t-\tau)$  remplazado por  $\tilde{\rho}(t)$  (aproximación de Markov), 3.34 se transforma en

$$\dot{\tilde{\rho}} = \alpha (a\tilde{\rho}a^\dagger - a^\dagger a\tilde{\rho}) + \beta (a\tilde{\rho}a^\dagger + a^\dagger \tilde{\rho}a - a^\dagger a\tilde{\rho} - \tilde{\rho}a a^\dagger) + h.c., \quad (3.38)$$

con

$$\alpha \equiv \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2, \quad (3.39)$$

$$\beta \equiv \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T), \quad (3.40)$$

Entonces, del hecho de que  $t$  es del orden de  $t_s$  y la integración sobre  $\tau$  es dominada por tiempos mucho mas cortos del orden de  $t_R$ , podemos extender la integración sobre  $\tau$  al infinito y evaluar  $\alpha$  y  $\beta$  usando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d\tau e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} = \pi\delta(\omega - \omega_0) + i\frac{P}{\omega_0 - \omega}, \quad (3.41)$$

donde  $P$  indica el valor principal de Cauchy. Encontramos

$$\alpha = \pi g(\omega_0) |\kappa(\omega_0)|^2 + i\Delta, \quad (3.42)$$

$$\beta = \pi g(\omega_0) |\kappa(\omega_0)|^2 \bar{n}(\omega_0) + i\Delta', \quad (3.43)$$

con

$$\Delta \equiv P \int_0^\infty d\omega \frac{g(\omega_0) |\kappa(\omega_0)|^2}{\omega_0 - \omega}, \quad (3.44)$$

$$\Delta' \equiv P \int_0^\infty d\omega \frac{g(\omega_0) |\kappa(\omega_0)|^2}{\omega_0 - \omega} \bar{n}(\omega, T). \quad (3.45)$$

**Nota:** para obtener 3.41, hemos hecho

$$\int_0^t d\tau e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} = \frac{\sin(\omega - \omega_0)t}{\omega - \omega_0} - i\frac{1 - \cos(\omega - \omega_0)t}{\omega - \omega_0}.$$

Finalmente, nuestra ecuación maestra para el oscilador armónico amortiguado, después de definir

$$\gamma \equiv 2\pi g(\omega_0) |\kappa(\omega_0)|^2, \quad (3.46)$$

$$\bar{n} \equiv \bar{n}(\omega_0, T), \quad (3.47)$$

de las ecuaciones 3.38,3.42 y 3.43, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}} = & -i\Delta [a^\dagger a, \tilde{\rho}] + \frac{\gamma}{2}(2a\tilde{\rho}a^\dagger - a^\dagger a\tilde{\rho} - \tilde{\rho}a^\dagger a) \\ & + \gamma\bar{n}(a\tilde{\rho}a^\dagger + a^\dagger \tilde{\rho}a - a^\dagger a\tilde{\rho} - \tilde{\rho}a a^\dagger), \end{aligned} \quad (3.48)$$

### 3.2 Ecuación maestra para el oscilador armónico amortiguado

Aquí  $\tilde{\rho}$  aun está en la imagen de interacción. Transformando de vuelta a la imagen de Schrödinger usamos 3.11 para obtener

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [H_s, \rho] + e^{-(i/\hbar)H_s t} \dot{\tilde{\rho}} e^{(i/\hbar)H_s t}. \quad (3.49)$$

Con  $H_s = \hbar\omega_0 a^\dagger a$ , sustituimos para  $\dot{\tilde{\rho}}$  y usamos 3.11 y 3.25 para escribir, por ejemplo,

$$\begin{aligned} e^{-i\omega_0 a^\dagger a t} a \tilde{\rho} a^\dagger e^{i\omega_0 a^\dagger a t} &= e^{-i\omega_0 a^\dagger a t} a \left( e^{i\omega_0 a^\dagger a t} \rho e^{-i\omega_0 a^\dagger a t} \right) a^\dagger e^{i\omega_0 a^\dagger a t} \\ &= \left( e^{-i\omega_0 a^\dagger a t} a e^{i\omega_0 a^\dagger a t} \right) \rho \left( e^{-i\omega_0 a^\dagger a t} a^\dagger e^{i\omega_0 a^\dagger a t} \right) \\ &= a \rho a^\dagger, \end{aligned} \quad (3.50)$$

Cada término puede ser tratado similarmente. Finalmente, llegamos a la ecuación maestra para el oscilador amortiguado

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -i\omega'_0 [a^\dagger a, \rho] + \frac{\gamma}{2} (2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) \\ &\quad + \gamma\bar{n}(a\rho a^\dagger + a^\dagger \rho a - a^\dagger a\rho - \rho a a^\dagger), \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde

$$\omega'_0 \equiv \omega_0 + \Delta. \quad (3.52)$$

Una alternativa, mas compacta, la ecuación maestra 3.51 puede ser escrita en la forma

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -i\omega'_0 [a^\dagger a, \rho] + \frac{\gamma}{2} ([a, \rho a^\dagger] + [a\rho, a^\dagger]) \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} ([a\rho, a^\dagger] + [a^\dagger, \rho a]), \end{aligned} \quad (3.53)$$

En ambas formas, los términos de amortiguamiento están agrupados de acuerdo a si son proporcional a  $\bar{n}$  o no. Este es un agrupamiento natural desde el punto de vista de la representación del espacio fase comunmente usado en Óptica Cuántica. Hoy en día, es más usual agrupar los términos en la forma Lindblad de la ecuación maestra [10], al escribir

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -i\omega'_0 [a^\dagger a, \rho] + \frac{\gamma}{2} (\bar{n} + 1) (2a\rho a^\dagger + a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} \bar{n} (2a^\dagger \rho a - a a^\dagger \rho - \rho a a^\dagger). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Una forma conveniente de presentar la ecuación maestra es como en [5], siendo esta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa(N_r + 1)(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) + \kappa N_r (2a^\dagger \rho a - a a^\dagger \rho - \rho a a^\dagger), \quad (3.55)$$

donde  $\kappa$  es el ancho de decaimiento,  $N_r$  el número promedio de fotones del reservorio,  $a$  y  $a^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación, respectivamente. En esta forma se puede aplicar el método de super operadores para su solución.

La ecuación maestra representa la ecuación que gobierna la dinámica de la evolución del sistema físico. En este caso, la ecuación 3.55 representa la dinámica de la evolución del modo del campo electromagnético y su solución nos indica como evoluciona el modo del campo por su interacción con el medio ambiente. Para ver como se soluciona esta ecuación maestra ver referencia [5].



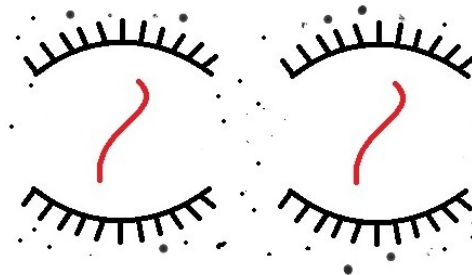
## Capítulo 4

# Interacción de dos modos del campo electromagnético con un medio ambiente en común

En este capítulo damos los elementos para la deducción de la ecuación maestra que describe a nuestro estado, dos modos de campo electromagnético que interacciona con su medio ambiente. Discutimos las diferencias que hay entre nuestro sistema y aquel que se encuentra en [21] a nivel de ecuación maestra. Damos solución a la ecuación maestra de nuestro sistema por el método de superoperadores, la cual da la dinámica de la evolución en el tiempo de nuestro estado (dos estados coherentes) y resaltamos que tal estado evoluciona a un estado enredado.

### 4.1. Ecuación maestra para dos modos de campo electromagnético que interactúan con su medio ambiente

En este capítulo deduciremos la ecuación maestra que gobierna la dinámica de dos modos del campo electromagnético que interactúan con un mismo medio ambiente pero no interactúan entre sí. El modelo que estamos estudiando involucra dos modos de campo electromagnético (Fig. 4.1), lo cual



**Figura 4.1:** Dos modos (lazos rojos) interactuando con su medio ambiente (puntos fuera de los espejos). La interacción de los dos modos con el reservorio se da a través de los espejos.

implica, en analogía a 3.22, que los Hamiltonianos involucrados son

$$H_S = \underbrace{\hbar\omega_0 a^\dagger a}_{H_{s_1}} + \underbrace{\hbar\omega_0 b^\dagger b}_{H_{s_2}}, \quad (4.1)$$

$$H_R = \sum_j \hbar\omega_j r_j^\dagger r_j, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} H_{SR} &= \sum_l \hbar[\kappa_l^* a r_l^\dagger + \kappa_l a^\dagger r_l] + \sum_{l'} \hbar[\kappa_{l'}^* b r_{l'}^\dagger + \kappa_{l'} b^\dagger r_{l'}] \\ &= \sum_l \hbar[\kappa_l^* (a + b) r_l^\dagger + \kappa_l (a^\dagger + b^\dagger) r_l], \end{aligned} \quad (4.3)$$

en donde  $H_{s_1}$  y  $H_{s_2}$  son los Hamiltonianos asociados a cada modo de campo electromagnético. Se puede observar que cada modo queda bien identificado por sus correspondientes operadores de creación y aniquilación; para un modo tenemos  $a^\dagger$  y  $a$ , para el otro  $b^\dagger$  y  $b$ . Podemos observar que se comparte un mismo reservorio, representado por 4.2, lo cual nos induce a pensar que la interacción que se da, representada por 4.3, es semejante a la que se muestra en la tercera expresión de 3.22.

En analogía con 3.24, podemos establecer

$$s_1 = a, s_2 = a^\dagger, s_3 = b, s_4 = b^\dagger, \quad (4.4)$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_3 = \Gamma^\dagger \equiv \sum_j \kappa_j r_j, \quad (4.5)$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_4 = \Gamma \equiv \sum_j \kappa_j^* r_j^\dagger, \quad (4.6)$$

entonces, de 3.18 y 3.22

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}(H_{s_1}+H_{s_2}+H_R)t} s_1 e^{-\frac{i}{\hbar}(H_{s_1}+H_{s_2}+H_R)t} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}(H_{s_1}+H_{s_2}+H_R)t} a e^{-\frac{i}{\hbar}(H_{s_1}+H_{s_2}+H_R)t} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}H_{s_1}t} a e^{-\frac{i}{\hbar}H_{s_1}t} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\hbar\omega_0 a^\dagger a t} a e^{-\frac{i}{\hbar}\hbar\omega_0 a^\dagger a t} \\ &= a e^{-i\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

haciendo un proceso semejante, obtenemos

$$\tilde{s}_2(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_{s_1}t} a^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}H_{s_1}t} = a^\dagger e^{i\omega_0 t}, \quad (4.8)$$

$$\tilde{s}_3(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_{s_2}t} b e^{-\frac{i}{\hbar}H_{s_2}t} = b e^{-i\omega_0 t}, \quad (4.9)$$

$$\tilde{s}_4(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_{s_2}t} b^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}H_{s_2}t} = b^\dagger e^{i\omega_0 t}, \quad (4.10)$$

y para los operadores del reservorio

$$\tilde{\Gamma}_1(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_R t} \Gamma_1 e^{-\frac{i}{\hbar}H_R t} = \sum_j \kappa_j^* r_j^\dagger e^{i\omega_j t} = \tilde{\Gamma}_3(t), \quad (4.11)$$

$$\tilde{\Gamma}_2(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_R t} \Gamma_2 e^{-\frac{i}{\hbar}H_R t} = \sum_j \kappa_j r_j e^{-i\omega_j t} = \tilde{\Gamma}_4(t). \quad (4.12)$$

Ahora, haciendo un proceso muy parecido para la obtención de 3.38, llegamos a la expresión para la ecuación maestra de dos modos de campo electromagnético, siendo esta

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \alpha [(a + b) \tilde{\rho}(a^\dagger + b^\dagger) - (a^\dagger + b^\dagger)(a + b) \tilde{\rho}] + \\ &\quad \beta [(a + b) \tilde{\rho}(a^\dagger + b^\dagger) + (a^\dagger + b^\dagger) \tilde{\rho}(a + b) - \\ &\quad (a^\dagger + b^\dagger)(a + b) \tilde{\rho} - \tilde{\rho}(a + b)(a^\dagger + b^\dagger)] + h.c., \end{aligned} \quad (4.13)$$

## 4.2 Ecuación maestra de dos modos de campo electromagnético cada uno con su propio medio ambiente

recordemos que 3.38 es

$$\dot{\rho} = \alpha (a\tilde{\rho}a^\dagger - a^\dagger a\tilde{\rho}) + \beta (a\tilde{\rho}a^\dagger + a^\dagger \tilde{\rho}a - a^\dagger a\tilde{\rho} - \tilde{\rho}aa^\dagger) + h.c.,$$

que comparando con 4.13 vemos que a 3.38 le hacemos el cambio de  $a$  por  $a+b$ . Para obtener una solución analítica de esta ecuación usaremos el método de superoperadores.

## 4.2. Ecuación maestra de dos modos de campo electromagnético cada uno con su propio medio ambiente

Los hamiltonianos que caracterizan a dos sistemas que interactúan con su propio medio ambiente cada uno son

$$H_S = \underbrace{\hbar\omega_0 a^\dagger a}_{H_{s_1}} + \underbrace{\hbar\omega_0 b^\dagger b}_{H_{s_2}}, \quad (4.14)$$

$$H_R = \underbrace{\sum_i \hbar\omega_i r_i^\dagger r_i}_{R_1} + \underbrace{\sum_j \hbar\omega_j v_j^\dagger v_j}_{R_2}, \quad (4.15)$$

$$H_{SR} = \sum_l \hbar[\kappa_l^* a r_l^\dagger + \kappa_l a^\dagger r_l] + \sum_{l'} \hbar[\kappa_{l'}^* b v_{l'}^\dagger + \kappa_{l'} b^\dagger v_{l'}]. \quad (4.16)$$

La ecuación maestra para dos modos de campo electromagnético interactuando cada uno con su medio ambiente, ver [21], es dada por

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & G(2a^\dagger \rho a - a a^\dagger \rho - \rho a a^\dagger + 2b^\dagger \rho b - b b^\dagger \rho - \rho b b^\dagger) \\ & + L(2a \rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a + 2b \rho b^\dagger - b^\dagger b \rho - \rho b^\dagger b), \end{aligned} \quad (4.17)$$

que al usar los métodos de Óptica Cuántica para solucionar la ecuación anterior, se puede hallar la evolución en el tiempo.

Es oportuno hacer la comparación de las ecuaciones maestras 4.13 y 4.17; en 4.13 no podemos hacer una reagrupación de términos tipo 4.17, i.e., en 4.17 podemos distinguir términos que contienen productos de operadores de un solo modo con el operador de densidad en una parte de la suma y productos de operadores asociados al otro modo con el operador de densidad en otra; En 4.13 lo que se observa son términos mezclados de operadores que representan a un modo con operadores que representan al otro modo en un producto con el operador de densidad  $\rho$ . Esto nos da indicios de enredamiento en evoluciones futuras para nuestro sistema.

## 4.3. Solución de la ecuación maestra

Para abordar la solución de 4.13, es conveniente presentar a la ecuación maestra como se muestra en 3.55,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa(N_r + 1)(2a \rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a) + \kappa N_r (2a^\dagger \rho a - a a^\dagger \rho - \rho a a^\dagger),$$

como estamos trabajando con dos modos de campo electromagnético, recordemos que hacemos la sustitución  $a$  por  $a+b$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & \kappa(N_r + 1)[2(a+b)\rho(a+b)^\dagger - (a+b)^\dagger(a+b)\rho - \rho(a+b)^\dagger(a+b)] \\ & + \kappa N_r [2(a+b)^\dagger \rho(a+b) - (a+b)(a+b)^\dagger \rho - \rho(a+b)(a+b)^\dagger]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

---

## Interacción de dos modos del campo electromagnético con un medio ambiente en común

---

En lo siguiente, usamos el método de superoperadores para dar solución a la ecuación maestra anterior. Definamos los siguiente superoperadores

$$J_1^{ab} \rho = 2\gamma(a+b)\rho(a^\dagger + b^\dagger), \quad (4.19)$$

$$J_2^{ab} \rho = 2\beta(a^\dagger + b^\dagger)\rho(a+b), \quad (4.20)$$

$$L^{ab} \rho = -(\gamma + \beta)[(a^\dagger + b^\dagger)(a+b)\rho + \rho(a^\dagger + b^\dagger)(a+b)]. \quad (4.21)$$

donde  $\gamma = \kappa(N_r + 1)$  y  $\beta = \kappa N_r$ . Con las definiciones anteriores, la ecuación 4.18 puede ser re-escrita

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = (J_1^{ab} + J_2^{ab} + L^{ab} - 2\beta) \rho(t), \quad (4.22)$$

cuya solución es

$$\rho(t) = e^{-2\beta t} e^{(J_1^{ab} + J_2^{ab} + L^{ab})t} \rho(0). \quad (4.23)$$

Lo que resta es aplicar los operadores que aparecen dentro de la exponencial al sistema inicial, situación que no es trivial. Para poder hacer esta aplicación del operador sobre el estado, necesitamos factorizar este operador exponencial [11]. El proceso de factorización considera el lema de Baker-Hausdorf el cual toma muy en cuenta las siguientes relaciones de conmutación

$$[J_2^{ab}, J_1^{ab}] \rho = \frac{4\beta}{\beta + \gamma} L \rho - 4\beta \gamma \rho, \quad (4.24)$$

$$[J_1^{ab}, L] \rho = -2(\beta + \gamma) J_1^{ab} \rho, \quad (4.25)$$

$$[J_2^{ab}, L] \rho = 2(\beta + \gamma) J_2^{ab} \rho. \quad (4.26)$$

Al usar el método de factorización uno espera

$$\rho(t) = e^{-2\beta t} e^{f_3(t)} e^{f_2(t) J_2^{ab}} e^{f_0(t) L^{ab}} e^{f_1(t) J_1^{ab}} \rho(0), \quad (4.27)$$

Al diferenciar la ecuación anterior y comparandola con 4.22 obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{df_0}{dt} + \frac{4\beta\gamma}{\beta + \gamma} f_2 = 1, \quad (4.28)$$

$$\frac{df_1}{dt} e^{2(\beta+\gamma)f_0} = 1, \quad (4.29)$$

$$\frac{df_2}{dt} + 2\frac{df_0}{dt} f_2(\gamma + \beta) + 4\beta\gamma f_2^2 = 1, \quad (4.30)$$

$$\frac{df_3}{dt} - 4\beta\gamma f_2 = 0. \quad (4.31)$$

Al imponer las condiciones  $\rho(t=0) = \rho(0)$  en 4.27, i.e.  $f_m(0) = 0$  para  $m = 0, 1, 2, 3$

$$f_0 = \frac{\gamma - \beta}{\gamma + \beta} t + \frac{1}{\gamma + \beta} \ln \left( \frac{\beta e^{2t(\beta-\gamma)} - \gamma}{\beta - \gamma} \right), \quad (4.32)$$

$$f_1 = f_2 = \frac{1}{2} \frac{e^{2t(\beta-\gamma)} - 1}{\beta e^{2t(\beta-\gamma)} - \gamma}, \quad (4.33)$$

$$f_3 = 2\beta t - \ln \left( \frac{\beta e^{2t(\beta-\gamma)} - \gamma}{\beta - \gamma} \right). \quad (4.34)$$

Ya sabemos quienes son las  $f'$ s, lo que resta es aplicar el operador exponencial especificando el estado. En este caso, el sistema es

$$\rho(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|. \quad (4.35)$$


---

### 4.3 Solución de la ecuación maestra

Tal sistema representa los dos modos de campo electromagnético en dos cavidades separadas;  $|\alpha\rangle$  en una cavidad y  $|\beta\rangle$  en otra.

Apliquemos el primer operador exponencial (de derecha a izquierda) sobre el sistema, obteniendo

$$e^{f_1(t)J_1^{ab}} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| = e^{f_1 2\gamma(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\beta^* + \beta\alpha^*)} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|. \quad (4.36)$$

La forma de aplicar el segundo operador equivale a

$$e^{f_0 L^{ab}} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| = e^{-(\gamma+\beta)f_0(a^\dagger+b^\dagger)(a+b)} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| e^{-(\gamma+\beta)f_0(a^\dagger+b^\dagger)(a+b)}. \quad (4.37)$$

Podemos desarrollar un poco más este operador en relación al argumento de su exponencial, siendo esto

$$e^{-(\gamma+\beta)f_0(a^\dagger+b^\dagger)(a+b)} = e^{-(\gamma+\beta)f_0(a^\dagger b + b^\dagger a)} e^{-(\gamma+\beta)f_0 a^\dagger a} e^{-(\gamma+\beta)f_0 b^\dagger b}. \quad (4.38)$$

Es necesario factorizar el primer término (de izquierda a derecha) del lado derecho de la igualdad

$$\begin{aligned} e^{-(\gamma+\beta)f_0(a^\dagger b + b^\dagger a)} &= e^{f\lambda a^\dagger b} e^{g\lambda b^\dagger a} e^{h\lambda^2[a^\dagger b, b^\dagger a]} \\ &= e^{f\lambda a^\dagger b} e^{g\lambda b^\dagger a} e^{h\lambda^2 a^\dagger a} e^{-h\lambda^2 b^\dagger b}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

con  $\lambda = -(\gamma + \beta)f_0$ . Las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones, con parámetro  $\epsilon$ , a determinar por el método de factorización. El método consiste en plantear la siguiente igualdad

$$e^{\epsilon\lambda(a^\dagger b + b^\dagger a)} = e^{f\lambda a^\dagger b} e^{g\lambda b^\dagger a} e^{h\lambda^2 a^\dagger a} e^{-h\lambda^2 b^\dagger b}, \quad (4.40)$$

y considerar las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [a^\dagger b, b^\dagger a] &= a^\dagger a - b^\dagger b, \\ [a^\dagger b, [a^\dagger b, b^\dagger a]] &= -2a^\dagger b, \\ [b^\dagger, [a^\dagger b, b^\dagger a]] &= 2b^\dagger a, \end{aligned} \quad (4.41)$$

que al diferenciar ambos lados de la igualdad 4.40 y comparar (usando el lema de Baker-Hausdorf), uno obtiene

$$\frac{df}{d\epsilon} - (\lambda f)^2 \frac{dg}{d\epsilon} - 2\lambda^2 f(1 + \lambda^2 fg) \frac{dh}{d\epsilon} = 1, \quad (4.42)$$

$$\frac{dg}{d\epsilon} + 2\lambda^2 g \frac{dh}{d\epsilon} = 1, \quad (4.43)$$

$$f \frac{dg}{d\epsilon} + (1 + 2\lambda^2 fg) \frac{dh}{d\epsilon} = 0. \quad (4.44)$$

resolviendo el sistema acoplado de ecuaciones diferenciales, se tiene

$$f = \frac{\text{Tanh}\lambda(\epsilon - c_1)}{\lambda}, \quad (4.45)$$

$$g = c_2 \text{Cosh}^2[\lambda(\epsilon - c_1)] + \frac{\text{Cosh}[\lambda(\epsilon - c_1)] \text{Tanh}[\lambda(\epsilon - c_1)]}{\lambda}, \quad (4.46)$$

$$h = c_3 - \frac{\ln\{\text{Cosh}[\lambda(\epsilon - c_1)]\}}{\lambda^2}, \quad (4.47)$$

con

$$\lambda = -(\gamma + \beta)f_0. \quad (4.48)$$

Sustituyendo 4.39 en 4.38, teniendo en mente que ya hemos hallado las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$ , tenemos

$$\begin{aligned} e^{-(\gamma+\beta)f_0(a^\dagger+b^\dagger)(a+b)} &= e^{f\lambda a^\dagger b} e^{g\lambda b^\dagger a} e^{h\lambda^2 a^\dagger a} e^{-h\lambda^2 b^\dagger b} e^{\lambda a^\dagger a} e^{\lambda b^\dagger b} \\ &= e^{f\lambda a^\dagger b} e^{g\lambda b^\dagger a} e^{(h\lambda^2 + \lambda)a^\dagger a} e^{(-h\lambda^2 + \lambda)b^\dagger b}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 & e^{f_0 L^{ab}} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| = \\
 & e^{f\lambda a^\dagger b} e^{g\lambda b^\dagger a} e^{(h\lambda^2+\lambda)a^\dagger a} e^{(-h\lambda^2+\lambda)b^\dagger b} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| e^{(-h\lambda^2+\lambda)b^\dagger b} e^{(h\lambda^2+\lambda)a^\dagger a} e^{g\lambda a^\dagger b} e^{f\lambda b^\dagger a}.
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Veamos que resulta de de aplicar los operadores exponenciales que contienen como argumento a  $a^\dagger a$  y a  $b^\dagger b$ , i.e.,

$$\begin{aligned}
 & e^{(h\lambda^2+\lambda)a^\dagger a} e^{(-h\lambda^2+\lambda)b^\dagger b} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta| e^{(-h\lambda^2+\lambda)b^\dagger b} e^{(h\lambda^2+\lambda)a^\dagger a} \\
 & = e^{(h\lambda^2+\lambda)a^\dagger a} |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{(h\lambda^2+\lambda)a^\dagger a} \otimes e^{(-h\lambda^2+\lambda)b^\dagger b} |\beta\rangle\langle\beta| e^{(-h\lambda^2+\lambda)b^\dagger b} \\
 & = e^{-\frac{|\alpha|}{2}} e^{\frac{|\tilde{\alpha}|}{2}} |\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}| e^{-\frac{|\alpha|}{2}} e^{\frac{|\tilde{\alpha}|}{2}} \otimes e^{-\frac{|\beta|}{2}} e^{\frac{|\tilde{\beta}|}{2}} |\tilde{\beta}\rangle\langle\tilde{\beta}| e^{-\frac{|\beta|}{2}} e^{\frac{|\tilde{\beta}|}{2}} \\
 & = \underbrace{e^{-|\alpha|} e^{|\tilde{\alpha}|} e^{-|\beta|} e^{|\tilde{\beta}|}}_{c_1} |\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}| \otimes |\tilde{\beta}\rangle\langle\tilde{\beta}|,
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

con

$$\tilde{\beta} \equiv \beta e^{-h\lambda^2+\lambda}, \tag{4.52}$$

$$\tilde{\alpha} \equiv \alpha e^{h\lambda^2+\lambda}, \tag{4.53}$$

Ahora, apliquemos los operadores  $e^{g\lambda b^\dagger a}$  y  $e^{g\lambda a^\dagger b}$

$$\begin{aligned}
 & e^{g\lambda b^\dagger a} |\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}| \otimes |\tilde{\beta}\rangle\langle\tilde{\beta}| e^{g\lambda a^\dagger b} \\
 & = e^{g\lambda b^\dagger \tilde{\alpha}} |\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}| \otimes |\tilde{\beta}\rangle\langle\tilde{\beta}| e^{g\lambda \tilde{\alpha}^* b},
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

hemos aplicado sólo lo correspondiente al operador  $a$  y  $a^\dagger$  que aparecen en el argumento de la exponencial; falta aplicar lo correspondiente a  $b$  y  $b^\dagger$ , para esto es necesario expandir en serie de Taylor al operador exponencial,

$$\begin{aligned}
 & e^{g\lambda b^\dagger \tilde{\alpha}} |\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}| \otimes |\tilde{\beta}\rangle\langle\tilde{\beta}| e^{g\lambda \tilde{\alpha}^* b} \\
 & = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(g\lambda \tilde{\alpha})^n}{n!} \frac{(g\lambda \tilde{\alpha}^*)^m}{m!}}_{c_2} |\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}| \otimes b^{\dagger n} |\tilde{\beta}\rangle\langle\tilde{\beta}| b^m,
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

fijémonos en  $b^{\dagger n} |\tilde{\beta}\rangle\langle\tilde{\beta}| b^m$ , lo cual da como resultado

$$b^{\dagger n} |\tilde{\beta}\rangle\langle\tilde{\beta}| b^m = \underbrace{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} \sqrt{i!} \sqrt{j!} \tilde{\beta}^{n-i} \tilde{\beta}^{*m-j}}_{c_3} | \tilde{\beta}, i \rangle \langle \tilde{\beta}, j |. \tag{4.56}$$

Omitiendo por ahora las  $c_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , el estado que principalmente resta por analizar es  $|\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}| \otimes | \tilde{\beta}, i \rangle \langle \tilde{\beta}, j |$ , al cual ensanguichamos con  $e^{f\lambda a^\dagger b}$  y  $e^{f\lambda b^\dagger a}$ , y para poder aplicar estos operadores, una vez más, es necesario ponerlos en serie de Taylor,

$$e^{f\lambda a^\dagger b} |\tilde{\alpha}\rangle\langle\tilde{\alpha}| \otimes | \tilde{\beta}, i \rangle \langle \tilde{\beta}, j | e^{f\lambda b^\dagger a}$$

### 4.3 Solución de la ecuación maestra

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(f\lambda b)^p}{p!} a^\dagger{}^p |\tilde{\alpha}\rangle \langle \tilde{\alpha}| \otimes |\tilde{\beta}, i\rangle \langle \tilde{\beta}, j| \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(f\lambda b^\dagger)^q}{q!} a^q \\
&= \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q \frac{(f\lambda)^p}{p!} \frac{(f\lambda)^q}{q!} \binom{p}{k} \binom{q}{l} \sqrt{k!} \sqrt{l!} \tilde{\alpha}^{p-k} \tilde{\alpha}^{*q-l}}_{c_4} \\
&\quad |\tilde{\alpha}, k\rangle \langle \tilde{\alpha}, l| \otimes b^p |\tilde{\beta}, i\rangle \langle \tilde{\beta}, j| b^{\dagger q}, \tag{4.57}
\end{aligned}$$

fijémonos en  $b^p |\tilde{\beta}, i\rangle \langle \tilde{\beta}, j| b^{\dagger q}$ . Ahora de [12], uno tiene

$$\begin{aligned}
b^p |\tilde{\beta}, i\rangle \langle \tilde{\beta}, j| b^{\dagger q} &= b^p D(\tilde{\beta}) |i\rangle \langle j| D^\dagger(\tilde{\beta}) b^{\dagger q} \\
&= D(\tilde{\beta}) (b + \tilde{\beta})^p |i\rangle \langle j| (b^\dagger + \tilde{\beta}^*)^q D^\dagger(\tilde{\beta}) \\
&= \underbrace{\sum_{r=0}^p \sum_{s=0}^q \binom{p}{r} \binom{q}{s} \tilde{\beta}^{p-r} \tilde{\beta}^{*q-s}}_{c_5} \\
&\quad \underbrace{\sqrt{i(i-1)\cdots(i-(r-s))} \sqrt{j(j-1)\cdots(j-(s-1))}}_{c_6} \\
&\quad D(\tilde{\beta}) |i-r\rangle \langle j-s| D^\dagger(\tilde{\beta}). \tag{4.58}
\end{aligned}$$

Volviendo a 4.57 y omitiendo, por ahora, a  $c_4$  y  $c_5$ , el estado que falta por analizar es  $D(\tilde{\alpha}) |k\rangle \langle l| D^\dagger(\tilde{\alpha}) \otimes D(\tilde{\beta}) |i-r\rangle \langle j-s| D^\dagger(\tilde{\beta})$ ; apliquémosle  $e^{f_2 j_2^{ab}}$ , lo cual implica desarrollar en serie de Taylor,

$$\begin{aligned}
&e^{f_2 j_2^{ab}} D(\tilde{\alpha}) |k\rangle \langle l| D^\dagger(\tilde{\alpha}) \otimes D(\tilde{\beta}) |i-r\rangle \langle j-s| D^\dagger(\tilde{\beta}) \\
&= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(f_2 j_2^{ab})^v}{v!} D(\tilde{\alpha}) |k\rangle \langle l| D^\dagger(\tilde{\alpha}) \otimes D(\tilde{\beta}) |i-r\rangle \langle j-s| D^\dagger(\tilde{\beta}), \tag{4.59}
\end{aligned}$$

analicemos  $(f_2 j_2^{ab})^v D(\tilde{\alpha}) |k\rangle \langle l| D^\dagger(\tilde{\alpha}) \otimes D(\tilde{\beta}) |i-r\rangle \langle j-s| D^\dagger(\tilde{\beta})$

$$\begin{aligned}
&(f_2 j_2^{ab})^v D(\tilde{\alpha}) |k\rangle \langle l| D^\dagger(\tilde{\alpha}) \otimes D(\tilde{\beta}) |i-r\rangle \langle j-s| D^\dagger(\tilde{\beta}) \\
&= (2\beta f_2)^v (a^\dagger + b^\dagger)^v D(\tilde{\alpha}) |k\rangle \langle l| D^\dagger(\tilde{\alpha}) \otimes D(\tilde{\beta}) |i-r\rangle \langle j-s| D^\dagger(\tilde{\beta}) (a+b)^v \\
&= \underbrace{(2\beta f_2)^v \sum_{w_1=0}^v \sum_{w_2=0}^v \binom{v}{w_1} \binom{v}{w_2}}_{c_6} \\
&\quad a^{\dagger v-w_1} D(\tilde{\alpha}) |k\rangle \langle l| D^\dagger(\tilde{\alpha}) a^{v-w_2} \otimes b^{\dagger w_1} D(\tilde{\beta}) |i-r\rangle \langle j-s| D^\dagger(\tilde{\beta}) b^{w_2}, \tag{4.60}
\end{aligned}$$

enfoquémonos, por ahora, sólo en el estado

$$\begin{aligned}
&a^{\dagger v-w_1} D(\tilde{\alpha}) |k\rangle \langle l| D^\dagger(\tilde{\alpha}) a^{v-w_2} \otimes b^{\dagger w_1} D(\tilde{\beta}) |i-r\rangle \langle j-s| D^\dagger(\tilde{\beta}) b^{w_2} \\
&= D(\tilde{\alpha}) (a^\dagger + \tilde{\alpha}^*)^{v-w_1} |k\rangle \langle l| (a + \tilde{\alpha})^{v-w_2} D^\dagger(\tilde{\alpha}) \\
&\quad \otimes D(\tilde{\beta}) (b^\dagger + \tilde{\beta}^*)^{w_1} |i-r\rangle \langle j-s| (b + \tilde{\beta})^{w_2} D^\dagger(\tilde{\beta}) \\
&= \underbrace{\sum_{q_1=0}^{v-w_1} \sum_{q_2=0}^{v-w_2} \sum_{p_1=0}^{w_1} \sum_{p_2=0}^{w_2} \binom{v-w_1}{q_1} \binom{v-w_2}{q_2} \binom{w_1}{p_1} \binom{w_2}{p_2}}_{c_7} \\
&\quad \underbrace{\tilde{\alpha}^{*v-w_1-q_1} \tilde{\alpha}^{v-w_2-q_2} \tilde{\beta}^{*w_1-p_1} \tilde{\beta}^{w_2-p_2}}_{c_8} \\
&\quad D(\tilde{\alpha}) a^{\dagger q_1} |k\rangle \langle l| a^{q_2} D^\dagger(\tilde{\alpha}) \otimes D(\tilde{\beta}) b^{\dagger p_1} |i-r\rangle \langle j-s| b^{p_2} D^\dagger(\tilde{\beta}), \tag{4.61}
\end{aligned}$$

analicemos  $D(\tilde{\alpha})a^{\dagger q_1} | k \rangle \langle l | a^{q_2} D^\dagger(\tilde{\alpha}) \otimes D(\tilde{\beta})b^{\dagger p_1} | i-r \rangle \langle j-s | b^{p_2} D^\dagger(\tilde{\beta})$

$$\begin{aligned}
 & D(\tilde{\alpha})a^{\dagger q_1} | k \rangle \langle l | a^{q_2} D^\dagger(\tilde{\alpha}) \otimes D(\tilde{\beta})b^{\dagger p_1} | i-r \rangle \langle j-s | b^{p_2} D^\dagger(\tilde{\beta}) \\
 = & \frac{\sqrt{(k+1)(k+2)\cdots(k+q_1)}\sqrt{(l+1)(l+2)\cdots(l+q_1)}}{\sqrt{(i-r+1)(i-r+2)\cdots(i-r+p_1)}\sqrt{(j-s+1)(j-s+2)\cdots(j-s+p_2)}} \\
 & D(\tilde{\alpha}) | k+q_1 \rangle \langle l+q_2 | D^\dagger(\tilde{\alpha}) \otimes D(\tilde{\beta}) | i-r+p_1 \rangle \langle j-s+p_2 | D^\dagger(\tilde{\beta}), \tag{4.62}
 \end{aligned}$$

que al involucrar todas las  $c_i$ , con  $i = 1 \rightarrow 7$ , tenemos la evolución del sistema

$$\begin{aligned}
 \rho(t) = & e^{-2\beta t} e^{f_3(t)} e^{f_1(t)\delta_1(|\alpha|^2+|\beta|^2+\alpha\beta^*+\beta\alpha^*)} e^{-|\alpha|^2} e^{|\tilde{\alpha}|^2} e^{-|\beta|^2} e^{|\tilde{\beta}|^2} \\
 & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(g\lambda\tilde{\alpha})^n (g\lambda\tilde{\alpha}^*)^m}{n! m!} \\
 & \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} \binom{m}{j} \sqrt{i!} \sqrt{j!} \tilde{\beta}^{n-i} \tilde{\beta}^{*m-j} \\
 & \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(f\lambda)^p (f\lambda)^q}{p! q!} \\
 & \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q \binom{p}{k} \binom{q}{l} \sqrt{k!} \sqrt{l!} \tilde{\alpha}^{p-k} \tilde{\alpha}^{*q-l} \\
 & \sum_{r=0}^p \sum_{s=0}^q \binom{p}{r} \binom{q}{s} \\
 & \frac{\sqrt{i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \cdots (i-(r-1))}}{\sqrt{j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdots (j-(s-1))}} \tilde{\beta}^{p-r} \tilde{\beta}^{*q-s} \\
 & \sum_{w_1=0}^v \sum_{w_2=0}^v (2\beta)^v \binom{v}{w_1} \binom{v}{w_2} \\
 & \sum_{q_1=0}^{v-w_1} \sum_{q_2=0}^{v-w_2} \sum_{p_1=0}^{w_1} \sum_{p_2=0}^{w_2} \binom{v-w_1}{q_1} \binom{v-w_2}{q_2} \binom{w_1}{p_1} \binom{w_2}{p_2} \\
 & \tilde{\alpha}^{*v-w_1-q_1} \tilde{\alpha}^{v-w_2-q_2} \tilde{\beta}^{*w_1-p_1} \tilde{\beta}^{w_2-p_2} \\
 & \frac{\sqrt{(k+1) \cdot (k+2) \cdots (k+q_1)}\sqrt{(l+1) \cdot (l+2) \cdots (l+q_2)}}{\sqrt{(i-r+1) \cdot (i-r+2) \cdots (i-r+p_1)}} \\
 & \frac{\sqrt{(j-s+1) \cdot (j-s+2) \cdots (j-s+p_2)}}{\sqrt{(j-s+1) \cdot (j-s+2) \cdots (j-s+p_2)}} \\
 & D(\tilde{\alpha}) | k+q_1 \rangle \langle l+q_2 | D^\dagger(\tilde{\alpha}) \otimes D(\tilde{\beta}) | i-r+p_1 \rangle \langle j-s+p_2 | D^\dagger(\tilde{\beta}), \tag{4.63}
 \end{aligned}$$

donde podemos identificar los estados de número desplazado. Ahora, no podemos llevar este estado a una forma factorizada como se muestra en 4.35, lo cual indicaría que el sistema está enredado.

# Capítulo 5

## Conclusiones

El operador de densidad es un equivalente a la función de onda. Digamos que es una forma de representar un sistema cuántico de manera más general.

Los estados de número desplazado son eigenestados del hamiltoniano del oscilador armónico desplazado.

Puesto que el operador de densidad es un objeto abstracto en el espacio de Hilbert, la función  $Q$  da una idea intuitiva de qué está pasando con el sistema que dependiendo de su forma, refiriéndonos a su gráfica, nos da indicios de si un sistema es cuántico ó semiclásico.

La ecuación maestra representa la dinámica de la evolución de nuestro sistema físico; su solución representa la evolución de nuestro estado inicial.

En esta trabajo de tesis, deducimos la ecuación maestra que describe la evolución de dos modos del campo electromagnético cuando interactúan con un mismo medio ambiente. Este caso es diferente al caso reportado en la literatura científica, resumido en el capítulo 4, cuando cada modo interactúa con su propio medio ambiente. Después de deducir la ecuación maestra, nos dimos a la tarea de resolverla. Esto lo hicimos usando el método de superoperadores. Teniendo la solución, la aplicamos a un estado inicial que consistía en dos estados coherentes desenredados. Obtuvimos el operador de densidad final y éste consistió de una mezcla de operadores de densidad representando estados de número desplazados. Como los operadores de densidad finales no se pueden factorizar como el producto de dos operadores de densidad, esto indica que los sistemas quedan en un estado enredado.

Por lo expuesto en el párrafo anterior podemos concluir como resultado final de esta tesis que a partir de que dos sistemas cuánticos independientes interactúan con un medio ambiente en común, estos dos sistemas evolucionan a un estado global, o comunmente llamado estado enredado.

Debido a la complejidad del estado final de la evolución del sistema de dos modos que interactúan con un mismo medio ambiente, no es fácil calcular alguna medida de enredamiento que nos de el grado de enredamiento final. Debido a esto, estamos en el proceso de cálculo de su función  $Q$ ; pero esto llevará varios meses de cálculo. Sin embargo, gracias a la definición matemática, del hecho que no podemos factorizar el sistema, concluimos que nuestro estado evoluciona a un estado enredado.

En el trabajo futuro que se realizará, se planea definir una medida de enredamiento en términos de la función  $Q$ . Para ello, se cuantificará la diferencia entre una función  $Q$  para estados coherentes desenredados y la función  $Q$  para estados coherentes maximamente enredados.

La propuesta que se plantea comienza con un estado desenredado como el siguiente

$$\hat{\rho}^{des}(0) = |\alpha\rangle_{11}\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle_{22}\langle\beta| \quad (5.1)$$

cuya función  $Q$ , en analogía a la ecuación 2.38, se puede definir como

$$\begin{aligned} Q_{1,2}^{des}(\xi, \chi) &= {}_1\langle \xi | {}_2\langle \chi | \hat{\rho}^{des}(0) | \xi \rangle_1 | \chi \rangle_2 \\ &= |{}_1\langle \xi | \alpha \rangle_1|^2 |{}_2\langle \chi | \beta \rangle_2|^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Consideremos, también, un estado enredado

$$|\psi\rangle = c(|\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 + |-\alpha\rangle_1 |-\beta\rangle_2) \quad (5.3)$$

siendo  $c$  un factor de normalización; entonces, su operador de densidad es

$$\hat{\rho}^{enr} = |\psi\rangle\langle\psi| = |c|^2 (|\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2 + |-\alpha\rangle_1 |-\beta\rangle_2) \otimes ({}_1\langle\alpha| {}_2\langle\beta| + {}_1\langle-\alpha| {}_2\langle-\beta|) \quad (5.4)$$

al reagrupar, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{enr} &= |c|^2 (|\alpha\rangle_{11}\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle_{22}\langle\beta| + |\alpha\rangle_{11}\langle-\alpha| \otimes |\beta\rangle_{22}\langle-\beta| + \\ &\quad |-\alpha\rangle_{11}\langle\alpha| \otimes |-\beta\rangle_{22}\langle\beta| + |-\alpha\rangle_{11}\langle-\alpha| \otimes |-\beta\rangle_{22}\langle-\beta|) \end{aligned} \quad (5.5)$$

de igual manera podemos definir su función  $Q$

$$Q_{1,2}^{enr}(\xi, \chi) = {}_1\langle \xi | {}_2\langle \chi | \hat{\rho}^{enr} | \xi \rangle_1 | \chi \rangle_2 \quad (5.6)$$

El siguiente paso es definir una medida del grado de enredamiento en términos de las ecuaciones 5.6 y 5.2. En [24] definen una medida del grado de enredamiento llamada medida geométrica de enredamiento, la cual presentamos a continuación,

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \min \|\phi - \chi\|^2 \quad (5.7)$$

que en palabras es la distancia que existe entre un estado enredado y su estado desenredado más próximo. El estado  $\phi$  es un estado máximamente enredado. En analogía a lo anterior, puesto que la función  $Q$  en principio es más fácil de calcular, se propone una medida de enredamiento de la forma

$$|Q_{1,2}^{enr}(\xi, \chi) - Q_{1,2}^{des}(\xi, \chi)|^2 \quad (5.8)$$

donde  $Q_{1,2}^{enr}(\xi, \chi)$  y  $Q_{1,2}^{des}(\xi, \chi)$  son dadas en 5.6 y 5.2, respectivamente.

# Bibliografía

- [1] W. H. Zurek, Decoherence and the transition from quantum to classical, *Physics Today* 44 (10) 36-44 (1991)
- [2] W. H. Louisell, *Quantum statistical properties of radiation*. Wiley (1973)
- [3] H. Carmichael, *An Open System Approach to Quantum Optics*. Springer-Verlag (1993)
- [4] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer (2008).
- [5] L. M. Arévalo Aguilar and H. Moya-Cessa, *Quantum Semiclass. Opt.* 10, 671 (1998).
- [6] J. P. Paz, et al. *Phys. Rev. Lett.* 100, 220401 (2008).
- [7] Le Bellac M., *Quantum physics* (CUP, 2006), Cambridge, pag 171. Addison-Wesley P.C.
- [8] W. H. Louisell: *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Wiley, New York, 1973) pp. 331-347.
- [9] H. Hanken: *Handbuch der Physik*, Vol. XXV/2c, ed. by L. Genzel (Springer-Verlag, Berlin, 1970) pp. 51-56.
- [10] G. Lindblad: *Commun. Math. Phys.* 48, 119 (1976)
- [11] P C García Quijas and L M Arévalo Aguilar, *Factorizing the time evolution Operator*, *Phys. Scr.* 75 (2007) 185-195
- [12] F. A. M. de Olyvera, M. S. Kim, and P. L. Knight; *Physical Review A*, Volume 41, Number 5, 1 march 1990, Propieties of displaced states.
- [13] Roy J. Glauber, *Phys. Rev.*, 131, 2766 (1963), *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*
- [14] J. R. Klauder, *J. Math. Phys.*, 4 (1963), 1055.
- [15] See L. W. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2nd edition (Cambridge: Cambridge University Press, 1996), p. 178.
- [16] E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.*, 10 (1963), 277.
- [17] E. P. Wigner, *Phys. Rev.*, 40 (1932), 794
- [18] Y. Kano, *J. Math. Phys.*, 6 (1965), 1913; C. L. Mehta and E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev.*, 138 (1965), B274; R. J. Glauber, in *Quantum Optics and Electronics*, edited by C. Dewitt, A. Blandin and C. Cohen-Tannoudji (New York: Gordon and Breach, 1965), p. 65.
- [19] E. Schrödinger's original articles on the so-called "cat paradox", originally published in *Naturwissenschaften* in 1935, can be found, in an English translation, in *Quantum Theory of Measurement*, edited by J. A. Wheeler and W. H. Zurek (Princeton: Princeton University Press, 1983), pp. 152-167.
- [20] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1, Master Equations and Fokker-Planck Equations*.
- [21] Phoenix S. Y. Poon and C. K. Law, *Quantum entanglement of symmetrically decohered two-mode squeezed states in an absorbing and amplifying environment*, *Physical Review A* 76, 012333 (2007)

- [22] [https://es.wikipedia.org/wiki/Cavidad\\_%C3%B3ptica](https://es.wikipedia.org/wiki/Cavidad_%C3%B3ptica)
- [23] S. Kuhr, S. Gleyzes, C. Guerlin, J. Bernu, U. B. Hoff, S. Deléglise, S. Osnaghi, M. Brune, and J.-M. Raimond, S. Haroche, E. Jacques, P. Bosland, and B. Visentin. Ultrahigh finesse Fabry-Pérot superconducting resonator. *APPLIED PHYSICS LETTERS* 90, 164101(2007)
- [24] Abner Shimony, Department of Philosophy and Physics, Boston University, Boston, Massachusetts 02215

