



**Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.
Posgrado en Física Aplicada.**

**Simulación dinámica de vuelo para aviones de transporte
en el plano vertical.**

**Tesis presentada para obtener el título de:
Maestría en Ciencias Física Aplicada.**

Presenta:

Ing. Jorge Luis Gordillo Domínguez.

Asesores:

Dr. Sci. (Phys. Math.) Vladimir V. Alexandrov k.

Dr. W. Fermín Guerrero Sánchez.

Puebla, Puebla a 08 de diciembre de 2015

Índice general

Resumen	7
Introducción	9
1. Marco teórico y planteamiento del problema	11
1.1. Simuladores de vuelo	11
1.2. Modelo matemático de vuelo en el plano vertical	16
1.3. Teorema de Tikhonov	18
1.4. Normalización y aplicación del teorema de Tikhonov para el modelo matemático de vuelo de avión de carga	22
1.5. Principio de Máximo de Pontryagin	29
1.6. Sistema sensorial del cuerpo del piloto	32
1.7. Planteamiento del problema	38
2. Planteamiento matemático y algoritmo de simulación dinámica de vuelo en el plano vertical	40
2.1. Esquema cinemático de la plataforma de Stewart y el rango de movimiento del ángulo de inclinación y de altura del centro geométrico	40
2.1.1. Esquema cinemático de la plataforma de Stewart	41
2.1.2. Rango de movimientos del centro geométrico en el plano vertical y ángulo de inclinación de la PS	44
2.2. Planteamiento físico y matemático de simulación dinámica para vuelo lento .	47
2.2.1. Planteamiento físico del problema de simulación dinámica	48
2.2.2. Definición del vector sobrecarga en el plano vertical para la posición del piloto	53
2.2.3. Planteamiento matemático del vector sobrecarga para movimientos lentos en el plano vertical	59

2.3. Algoritmo de simulación para el ángulo de orientación de sobrecarga en el plano vertical para vuelo lento	63
3. Algoritmo de simulación de la componente rápida de sobrecarga	75
3.1. Descripción de los movimientos rápidos del vector sobrecarga en el plano vertical	76
3.1.1. Análisis de la trayectoria de vuelo en el plano vertical para movimientos rápidos de la aeronave	76
3.1.2. Descripción de la región de desplazamientos disponibles de la plataforma de Stewart para movimientos rápidos verticales	79
3.2. Planteamiento matemático de simulación dinámica de $ \vec{n} $ para movimientos rápidos.	79
3.3. Algoritmo de simulación dinámica para movimientos rápidos y regreso a la posición de inicio en tiempo óptimo.	86
3.3.1. Algoritmo de simulación para movimientos rápidos	86
3.3.2. Algoritmo de retorno a la posición de inicio	87
Conclusiones	99
Trabajo a futuro	101
Anexo A.	102
Anexo B.	105
Anexo C.	112
Anexo D.	115
Bibliografía	121
Nomenclatura	125

Índice de figuras

1.1. Entrenador de vuelo de Sanders, [6].	12
1.2. Simulador de vuelo para investigación y desarrollo de la TU Delft, Delft, Holanda.	13
1.3. Esquema funcional de un simulador de vuelo [5].	14
1.4. Esquema geométrico de la PS.	15
1.5. Violación y realización de las condiciones 4 y 5 del teorema de Tikhonov.	21
1.6. Intervalo de tiempo para los valores máximos de las variables de fase [30].	24
1.7. Ubicación del sistema vestibular [23].	32
1.8. Estructura del oído interno [26].	33
1.9. Desplazamiento de las células ciliadas.	34
1.10. Sensación de inclinación hacia atrás [18].	36
1.11. Relación de cambios en aceleración angular adquirida por los canales semicirculares [18].	36
1.12. Tablero de los principales instrumentos de una aeronave.	37
2.1. Diagrama geométrico de la Plataforma de Stewart.	41
2.2. Esquema cinemático de la PS en 3D.	42
2.3. Esquema cinemático de la PS en el plano vertical.	42
2.4. Representación del cambio de altura del centro geométrico de la plataforma móvil.	43
2.5. Representación del cambio de inclinación de la plataforma móvil.	43
2.6. Rango de movimiento plataforma móvil.	45
2.7. Espacio de trabajo de la PS reducido para primera aproximación.	46
2.8. Fokker 50	48
2.9. Altitud del <i>c.m.</i> durante la trayectoria de vuelo.	49
2.10. Velocidad absoluta del <i>c.m.</i> durante la simulación de vuelo.	49
2.11. Módulo de la aceleración absoluta del <i>c.m.</i> para el vuelo simulado.	50
2.12. Intervalo de tiempo que alberga los movimientos lentos de la trayectoria de vuelo.	51

2.13. Descripción del vector gravitoinercial del <i>c.m.</i> del avión.	52
2.14. Relación del vector gravitoinercial y sobrecarga para la posición del piloto.	54
2.15. Orientación del vector sobrecarga y gravitoinercial para un giro a la derecha.	57
2.16. Giro por ángulo χ_p	58
2.17. Giro por ángulo κ_p	59
2.18. Orientación del vector de sobrecarga durante el descenso.	60
2.19. Valor absoluto del vector sobrecarga en la posición del <i>c.m.</i> del avión.	61
2.20. Valor absoluto del vector sobrecarga en la posición del piloto.	62
2.21. Ángulo de orientación del vector sobrecarga en la posición del <i>c.m.</i>	62
2.22. Ángulo de orientación del vector sobrecarga en la posición del piloto.	63
2.23. Configuración del sistema de referencia de la PS y los elementos de simulación dinámica de vuelo.	64
2.24. Esquema del cambio de longitud (ΔL) de los actuadores.	65
2.25. Esquema cinemático para longitudes efectivas de los actuadores lineales.	68
2.26. Ángulo de inclinación de la plataforma móvil en el plano vertical.	71
2.27. Datos de salida del sensor MotionNode para el ángulo de inclinación de la PS de INAOE.	72
2.28. Características geométricas del sensor MotionNode.	74
3.1. Comportamiento de la componente z de la aceleración durante el aterrizaje de la aeronave.	77
3.2. Comportamiento de κ_s en la situación de movimientos rápidos.	77
3.3. Valores del ángulo de ataque y velocidad angular de ataque.	78
3.4. Sistema de coordenadas para describir el movimiento angular relativo [5].	80
3.5. Determinación de la aceleración del punto N relativa al <i>c.m.</i>	81
3.6. Región de trabajo para el algoritmo de movimientos rápidos y retorno a la posición de inicio.	85
3.7. Situación normal para el algoritmo de movimiento rápido y regreso al punto de inicio.	87
3.8. Ejemplo de actuación del algoritmo para movimiento rápido y regreso al punto de inicio como una situación extrema.	88
3.9. Trayectorias optimales de la región \mathbf{G} , gobernadas por u_1^*	92
3.10. Algoritmo de movimiento rápido, $\Delta \ddot{h}$ especificado en g_0	94
3.11. Comparación entre la simulación dinámica de vuelo rápido y el movimiento real de la PS.	95
3.12. Diagrama a bloques para la señal de salida del algoritmo de control.	96
3.13. Región para el movimiento rápido del centro geométrico de la PS.	97

3.14. Composición de los algoritmos de simulación para una región de la trayectoria de vuelo.	97
3.15. Archivo de datos de vuelo.	105
3.16. Extracción de las variables de vuelo.	106
3.17. Componentes del vector sobrecarga.	106
3.18. Algoritmo de simulación para movimiento lento.	107
3.19. Algoritmo de simulación para movimientos rápidos.	107
3.20. Cálculo de trayectorias, línea de <i>switcheo</i> y restricciones cinemáticas.	108
3.21. Algunas trayectorias disponibles, dentro de la región \mathbf{G}	109
3.22. Situación de simulación continua por movimiento en línea vertical.	110
3.23. Situación de simulación de movimientos rápidos que alcanzan los límites geométricos del conjunto \mathbf{G}	110
3.24. Simulación de movimiento rápido y regreso a punto de inicio.	111
3.25. Familia de parábolas (3.44).	116
3.26. Familia de parábolas de (3.47)	117
3.27. Primera opción de trayectoria para alcanzar el origen.	118
3.28. Segunda opción de trayectoria para alcanzar el origen.	118
3.29. Conjunto de trayectorias optimales.	119

Resumen

Los simuladores de vuelo, basados en el uso de una plataforma de Stewart, funcionan al accionar los actuadores de ésta de tal manera que generen movimientos que permitan transmitir sensaciones de fuerza y aceleración al piloto que se está entrenando. Es complicado encontrar en la literatura aquellos algoritmos que dicten cómo se van a mover dichos actuadores, relacionando el esquema cinemático de la plataforma de Stewart y las ecuaciones de movimiento de la aeronave simulada. Dicha relación yace en determinar el rango geométrico de movimiento de la plataforma de Stewart, así como los elementos presentes en la trayectoria de vuelo de un avión, y unirlos de tal manera que nos indiquen las posiciones que debe alcanzar la plataforma para representar la actitud de la aeronave durante el vuelo simulado.

En el presente documento, en el Capítulo 1, se dará una introducción de los elementos principales involucrados en una simulación de vuelo, donde destaca el sistema de movimiento y la presentación de un modelo matemático de vuelo controlable en el plano vertical para una aeronave de transporte, con ayuda de la implementación del teorema de Tikhonov se va a presentar un sistema simplificado del vuelo de un avión en el plano vertical e se presentarán dos diferentes situaciones de movimiento durante la trayectoria de vuelo, una lenta y una rápida. A partir de esta identificación, se propondrán dos algoritmos de simulación dinámica para su representación a través del movimiento de la plataforma de Stewart. En el Capítulo 2, se planteará el algoritmo de simulación dinámica para la componente lenta de la trayectoria de vuelo, este algoritmo estará centrado en la inclinación del vector sobrecarga, κ , el cual se va a construir con ayuda de las ecuaciones de movimiento de la aeronave. Durante el Capítulo 3, se presentará el algoritmo de simulación que resuelva las situaciones para movimientos rápidos dado por el decremento del vector sobrecarga, en donde se presentará la aplicación del principio de máximo de Pontryagin, que ayudará en la construcción de los algoritmos para el retorno optimal a una posición de inicio de la simulación, y así completar la simulación dinámica de vuelo en el plano vertical para un avión de transporte.

Los dos algoritmos de simulación dinámica permitirán, a la plataforma de Stewart, generar movimientos coordinados que ayuden a la generación de estímulos adecuados para el correcto entrenamiento de pilotos. Además, se mostrará la aplicación del algoritmo de simulación

dinámica en la plataforma de Stewart propiedad de INAOE, en la cual se generó una breve simulación que representa situaciones de movimiento lento. La respuesta proporcionada por la plataforma se muestra al final del capítulo 2.

Introducción

Los sistemas de simulación de vuelo, comúnmente conocidos como simuladores de vuelo, son dispositivos integradores de aplicaciones de *software* y *hardware* que permiten, a un grupo de personas especializadas, crear escenarios y situaciones lo más semejantes posibles a la realidad, que representen el comportamiento en vuelo de una aeronave determinada.

La simulación dinámica de vuelo está basada en el uso de un simulador de vuelo como generador de estímulos adecuados que representen las experiencias de un vuelo real. Alrededor del mundo el desarrollo de este tipo de simuladores ha sido muy importante pues son utilizados para el correcto entrenamiento y capacitación de pilotos, generalmente militares y comerciales.

En un vuelo real de entrenamiento, el piloto no es el único dentro del avión, un grupo de personas evaluadoras e instructoras deben ir a bordo para indicar y evaluar las ejecuciones durante el vuelo, pero esto representa riesgos y altos costos, por lo tanto, el simulador de vuelo permite evaluar las habilidades del piloto, es usado para reducir actividades en vuelo relacionadas con el entrenamiento e investigación, ayudando en el ahorro de recursos como combustible, minimizando costos de operación y tiempos de vuelo, así como la contaminación al medio ambiente, todo esto de forma segura para generar simulaciones de situaciones normales, anormales y de emergencia para el entrenamiento de pilotos, generalmente militares y de aviación comercial. Esto es muy importante, pues en la vida real pueden presentarse situaciones de emergencia de distintos tipos, tales como atmosféricos (perturbaciones en la atmósfera, tormentas, etc.), o que la aeronave presente fallas en sus sistemas (propulsión, eléctrico, neumático, hidráulico). Existen otras situaciones en las que, por motivo de alguna adversidad, el piloto tenga que realizar una maniobra delicada y tendrá que hacer uso de sus habilidades para sobreponerse a éstas, como un aterrizaje forzoso o muy complicado, por ejemplo en pistas localizadas en terrenos montañosos en los que el ángulo de deslizamiento, al aterrizar, debe ser un poco más grande que el normal, que está entre 2.7° y 3° , para garantizar un aterrizaje seguro. Bajo este tipo de situaciones adversas de entrenamiento, el piloto obtiene la experiencia y las habilidades necesarias para desempeñar los vuelos que se le requieran. El uso de simuladores de vuelo es una parte esencial en el entrenamiento de

pilotos y es regulado por autoridades especializadas, como la DGAC (Dirección General de Aeronáutica Civil) en México.

En la actualidad, México no cuenta con un desarrollo tan amplio en materia de simuladores de vuelo, pues se requiere de la creación de diversos modelos matemáticos eficientes y eficaces que relacionen cada una de las situaciones normales y de emergencia que pueda presentar la aeronave durante un vuelo real, así como de representar fielmente a la aeronave simulada, es decir, contener toda la información de ésta, como los coeficientes aerodinámicos, sistemas de control de vuelo, modelo matemático de motores, etc.

En esta tesis se presentará una manera de construir algoritmos de simulación dinámica, tomando en cuenta el modelo matemático de vuelo de un avión de carga en el plano vertical, y el uso de una plataforma de Stewart como generador de movimiento para su aplicación en un simulador de vuelo.

Capítulo 1

Marco teórico y planteamiento del problema

Se define como simulación de vuelo a la representación dinámica del comportamiento de un vehículo de manera tal que permita al operador interactuar con la simulación. Las dinámicas son modeladas matemáticamente por las leyes de Newton y Euler, mientras que la inmersión del operador ocurre mediante estímulos sensoriales [41]. La simulación de vuelo puede imitar cualquier vehículo tripulado, desde aeronaves de ala fija (aviones pequeños) subsónicos e hipersónicos, hasta vehículos de ala rotativa (helicópteros).

1.1. Simuladores de vuelo

Un simulador de vuelo es considerado como un aparato físico que se utiliza para reproducir en tierra el comportamiento de una aeronave en vuelo mediante simulaciones de vuelo, que tiene como objetivo hacer creer al piloto que está experimentando situaciones de vuelo continuas. Existen algunos ejemplos de dispositivos de entrenamiento de vuelo presentados a inicios del Siglo XX, pero el diseño y construcción de éstos permitía únicamente generar los efectos de los controles de una aeronave. Alrededor de 1910, se presentó el entrenador Sanders, el cual ya contenía una cabina de avión que podía dirigirse en la dirección del viento y, si el viento era lo suficientemente fuerte, la cabina podía moverse en respuesta al movimiento de los controles movidos por el piloto. En esos mismos años, otras personas como Walters y Antionette, desarrollaron dispositivos similares agregando movimiento a la cabina, pero el movimiento era realizado por los instructores, como se muestra en la Figura 1.1.



Figura 1.1: Entrenador de vuelo de Sanders, [6].

Durante la Primera Guerra Mundial, el uso de entrenadores de vuelo se volvió muy importante, pues ahora ya se contaba con espacio para dos personas, una de ellas era el instructor, quien realizaba y enseñaba las operaciones de maniobra al piloto aprendiz, de tal manera que obtuviera la experiencia necesaria y pudiera realizar vuelos en un avión real por sí mismo. Después de la Primera Guerra Mundial, el crecimiento tecnológico de aeronaves se expandió rápidamente y, como consecuencia, era necesaria la introducción de mejoras a los entrenadores o simuladores de vuelo. Los simuladores de vuelo de hoy en día tienen sus orígenes en aquel construido por el llamado “padre de la simulación de vuelo”, Edwin A. Link., en 1929 [24], quien desarrolló un simulador que ya tenía un sistema de movimiento primitivo, pero no contaba con elementos visuales como pantallas o espejos, pero permitía a los pilotos experimentar el ambiente de la cabina de una aeronave así como su comportamiento dinámico y el *performance*[6].

En la mayoría de simuladores de vuelo de la actualidad, se cuenta con un sistema de movimientos de seis *gdl*, descritos en la Tabla 1.1. Los simuladores de vuelo han sido muy relevantes en la historia de la aviación, pues principalmente son usados para el entrenamiento de pilotos. Los simuladores permiten, por ejemplo, a los pilotos militares ensayar misiones complejas y practicar sus habilidades de pilotaje que puedan ser inaceptables y peligrosas en un escenario real. Además, con los simuladores de vuelo es posible programar situaciones anormales situaciones de emergencia de la aeronave simulada, en un ambiente que mantenga fuera de riesgo al piloto.

<i>gdl</i>	Tipo de movimiento
1	Traslación, a lo largo del eje x , <i>surge</i> .
2	Traslación, a lo largo del eje y , <i>sway</i> .
3	Traslación, a lo largo del eje z , <i>heave</i> .
4	Rotación, alrededor del eje x , <i>roll</i> .
5	Rotación, alrededor del eje y , <i>pitch</i> .
6	Rotación, alrededor del eje z , <i>yaw</i> .

Cuadro 1.1: Movimientos disponibles en un simulador de vuelo.

En los simuladores de vuelo, se tienen movimientos en seis grados de libertad (*gdl*), descritos en la Tabla 1.1.

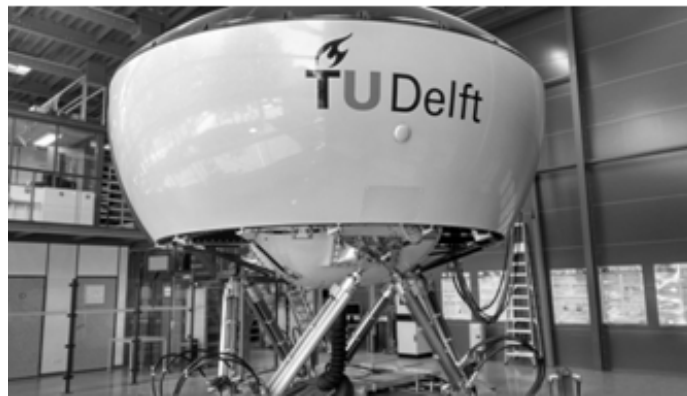


Figura 1.2: Simulador de vuelo para investigación y desarrollo de la TU Delft, Delft, Holanda.

Actualmente, los simuladores de vuelo modernos son indispensables en temas de aeronáutica, teoría de control, fisiología, matemáticas, física, software, entre otras, pues además de dar servicio para el entrenamiento y capacitación de pilotos, son usados para investigación y desarrollo de nuevos instrumentos de vuelo, aplicaciones de software, e implementación de nuevos algoritmos orientados a un mejor desempeño del ambiente de simulación como el Simulador para Investigación Simona (SRS, por sus siglas en inglés) del Instituto Internacional de Investigación, Movimiento y Navegación de la Universidad Tecnológica de Delft, ver Figura 1.2, y los trabajos realizados por [19, 20, 10, 40].

A grandes rasgos, un simulador de vuelo se compone por diversos módulos en los cuales se desarrollan aplicaciones por parte de especialistas, tales como ingenieros, físicos, matemáticos programadores, etc. En el Anexo A se detalla la organización general de un simulador de vuelo. Un esquema funcional para la construcción de un simulador se presenta en [5], y también en [11, 6].

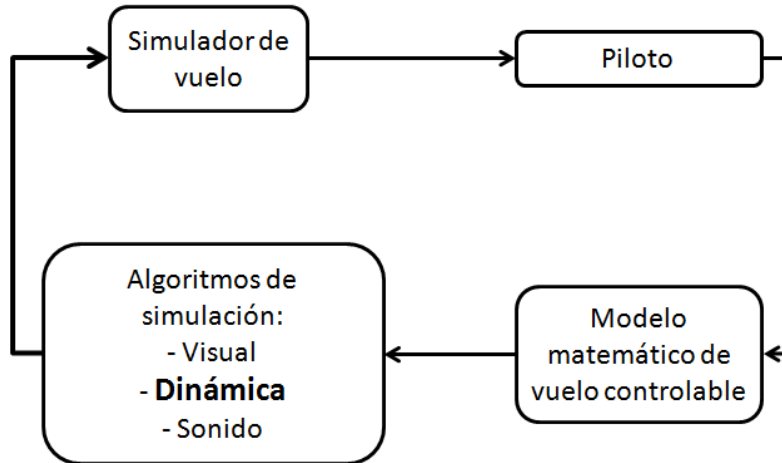


Figura 1.3: Esquema funcional de un simulador de vuelo [5].

Cada bloque del diagrama presentado en la Figura 1.3 corresponde a una serie de elementos que cumplen una función específica en el simulador de vuelo. A continuación se hace una breve descripción del contenido de cada uno de los bloques:

- “Simulador de Vuelo”: representa a todo el conjunto mecánico, eléctrico y electrónico, es decir, la parte tangible de un simulador de vuelo.
- “Piloto”: es la persona en entrenamiento que se encuentra en el simulador, y es la que genera la mayoría de las órdenes de control.
- “Modelo matemático de vuelo controlable”: representa el tipo de aeronave que se va a simular. Llámese modelo a toda representación, física o analítica, de la estructura o dinámica de un sistema o proceso [41]. Además, debe contener el modelo aerodinámico que normalmente es una base de datos que contiene los coeficientes aerodinámicos característicos de cada aeronave; se debe implementar modelo de motores que considere la dinámica del sistema de propulsión que provee la fuerza de empuje al vehículo, así como los efectos producidos por el tren de aterrizaje.
- “Algoritmos de simulación”: contiene a los algoritmos que van a controlar los eventos dentro del simulador de vuelo, como las proyecciones del ambiente de vuelo (a través de pantallas), que corresponde al lugar de despegue o aterrizaje, los efectos de sonidos que debe estar coordinados con las circunstancias que corresponden a las acciones del piloto y al ambiente visual, adicionalmente, se cuenta con un modelo de cargas dinámicas, como el realizado en [14], que provee al piloto de todas aquellas sensaciones causadas por la activación o desactivación de los controles de vuelo, tales como el timón, pedales,

diversas palancas y controles en el tablero dentro de la cabina. Además, y resaltado en negritas en la figura anterior, se requiere de la inclusión de algoritmos de simulación “Dinámica” que permiten la imitación de las sensaciones presentes en un vuelo real y se logra mediante el uso de un sistema de movimiento (PS). Cabe señalar que la construcción de los algoritmos de simulación dinámica son el tema central de este trabajo de tesis.

Plataforma de Stewart

A mediados del siglo pasado, Stewart [37] introdujo el manipulador de 6 *gdl* para aplicaciones de simulación de vuelo, el cual ha tenido gran aceptación en el campo de simulaciones de movimiento de aeronaves y automóviles, pues es capaz de proveer una solución mecánica rígida que reproduzca movimientos con una capacidad de carga relativamente alta [2]. Este manipulador lleva por nombre plataforma de Stewart (PS), y consiste de una plataforma (base) móvil que es rígida, conectada a una plataforma (base) fija en el piso mediante seis actuadores lineales. Los actuadores pueden cambiar su longitud independientemente, pero de forma sincronizada, para lograr que la base móvil genere tres movimientos lineales y tres angulares. Generalmente, la PS tiene una configuración simétrica. Los actuadores, o piernas, son todos idénticos y comúnmente se ensamblan a la plataforma móvil y a la fija mediante juntas universales. En la PS, la base móvil juega el papel de efector final, término usado ampliamente en robótica para hacer referencia al último componente de, por ejemplo, un brazo robótico (ver Figura 1.4).

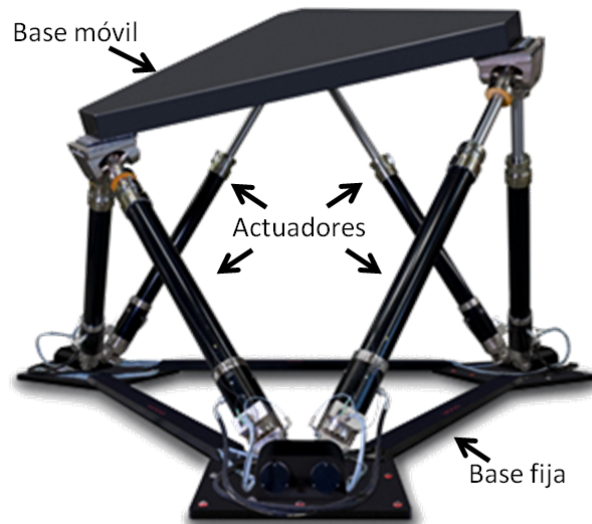


Figura 1.4: Esquema geométrico de la PS.

Dependiendo de la aplicación, la configuración mecánica de la PS cambia, esto es, tanto

los actuadores, como las plataformas fija y móvil pueden cambiar en geometría y disposición, pero su funcionalidad es la misma. La plataforma móvil es la responsable de sostener todo aquel equipo que los actuadores tengan que mover para lograr el objetivo de la aplicación de la PS.

Aplicaciones El sistema de movimiento de la PS puede ser usado para diversas aplicaciones en muchos campos del conocimiento. Algunas de ellas se mencionan a continuación:

- Simuladores de vehículos tripulados (aviones de carga, aviones de combate, automóviles, barcos).
- Industria (espacial, automotriz, naval y nuclear).
- Medicina y terapia.
- Entre otros.

El caso particular de este trabajo de tesis la aplicación de la PS es hacia un simulador de vuelo para aviones de transporte con movimientos en el plano vertical. La PS es la herramienta principal de movimiento de un simulador de vuelo.

1.2. Modelo matemático de vuelo en el plano vertical

En esta sección se presentarán las ecuaciones que gobiernan el movimiento de una aeronave en el plano vertical obtenidas mediante la formulación newtoniana [29]. Estas ecuaciones expresan el movimiento traslacional y rotacional de la aeronave en términos de las fuerzas y momentos que actúan sobre ella.

Antes de comenzar el desarrollo de las ecuaciones de movimiento, es necesario establecer algunas consideraciones que ayudarán a simplificarán el modelo:

- La aeronave es un cuerpo rígido con densidad de masa constante y simetría a lo largo del plano xz en ejes cuerpo.
- Las fuerzas y momentos que actúan sobre la aeronave están dadas por contribuciones de las fuerzas y momentos aerodinámicos, fuerza debida a los motores y la fuerza debida a la gravedad.
- El empuje, producido por los motores o sistema de propulsión, actúa a lo largo del eje cuerpo x y a través del centro de masas.
- La atmósfera es estacionaria.

- Se despreciará la curvatura de la Tierra, y ésta será nuestro sistema de referencia inercial.
- El campo gravitatorio se tomará como uniforme, por tanto no habrá momentos de gravedad o cambios de su valor conforme varía la altitud.
- La masa será constante en el intervalo de tiempo donde se estudiarán los movimientos de la aeronave.
- La trayectoria de vuelo yace en la línea ecuatorial, y esta línea coincide con el plano de simetría de la aeronave.

Aunque el movimiento de una aeronave se describe por ecuaciones bien establecidas, es importante recalcar que para cada aeronave existen contribuciones únicas, generalmente reflejadas en las componentes aerodinámicas y de propulsión.

Ecuaciones de vuelo en el plano vertical

Considere las ecuaciones de movimiento del *c.m.* de la aeronave que dictan su trayectoria de vuelo en el plano vertical [34]:

$$M \frac{dU}{dT} = -\frac{1}{2}\rho V^2 S C_x(\alpha) + P \cos\alpha - Mg \sin\theta, \quad (1.1)$$

$$MU \frac{d\theta}{dT} = -\frac{1}{2}\rho V^2 S C_z(\alpha) + P \sin\alpha + Mg \cos\theta, \quad (1.2)$$

$$I_z \frac{d\Omega}{dT} = \frac{1}{2}\rho V^2 S \bar{c} C_m(\alpha, \Omega, \delta), \quad (1.3)$$

$$\frac{d\theta}{dT} = \Omega. \quad (1.4)$$

$$\theta = \gamma + \alpha \quad (1.5)$$

Donde C_x y C_z representan la contribución de las componentes de fuerza aerodinámica en el plano vertical; α y γ son ángulos aerodinámicos; V es la velocidad del *c.m.* de la aeronave; S es una superficie de referencia dada por la geometría del ala de la aeronave; ρ es la densidad del aire en donde se lleva a cabo el vuelo. A las Ecs. (1.1)-(1.4), se agregan

ecuaciones adicionales que definen las componentes del vector sobrecarga, que será detallado en el Capítulo 2:

$$n_x = \frac{1}{g} \frac{dU}{dT}, \quad n_z = \frac{1}{g} \frac{dW}{dT} + 1 \quad (1.6)$$

1.3. Teorema de Tikhonov

El modelo de perturbación singular de un sistema dinámico es un modelo en el espacio de estados en el cual la derivada de algunos de los estados está multiplicada por el parámetro pequeño positivo, ε , esto es [30], [22]:

$$\frac{dy}{dt} = Y(y, z, t, \varepsilon); \quad y(t_0) = y_0, \quad y \in R^n, \quad (1.7)$$

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = Z(y, z, t, \varepsilon); \quad z(t_0) = z_0, \quad z \in R^m \quad \varepsilon \ll 1. \quad (1.8)$$

Donde se hace la suposición que las funciones Y y Z son diferenciables continuas con respecto a sus argumentos y, z, ε, t , además Y y Z son vectores n - y m - dimensionales. El escalar ε representa a todos los parámetros pequeños que van a ser ignorados y que ayudarán a simplificar el modelo (1.7)-(1.8). Cuando se coloca el valor $\varepsilon = 0$ en las Ecs. (1.7)-(1.8), la dimensión del espacio de estados de este sistema se reduce a $n + m$, es decir, que la ecuación diferencial (1.8) se degenera y se convierte en la ecuación algebraica:

$$0 = Z(\bar{y}, \bar{z}, t, 0), \quad (1.9)$$

donde las variables barradas (\bar{y}, \bar{z}) indican que pertenecen al sistema con $\varepsilon = 0$.

Definición 1.2.1: La raíz

$$z = \varphi(y, t), \quad (1.10)$$

de un sistema de ecuaciones

$$Z(y, z, t, 0) = 0, \quad (1.11)$$

es llamada aislada en algún rango restringido de variables y y t , si las otras raíces del sistema (1.11) no existen para cada valor fijo y y t en alguna vecindad de la raíz.

Un sistema degenerado de ecuaciones, de acuerdo a Tikhonov [39], [30], se obtiene de (1.7)-(1.8), al hacer $\varepsilon = 0$ y excluyendo a z_0 :

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = Y(\bar{y}, \bar{z}, t, 0); \quad y(0) = y_0, \quad (1.12)$$

$$0 = Z(\bar{y}, \bar{z}, t, 0). \quad (1.13)$$

Suponga que, en un dominio de interés, la Ec. (1.13) tiene $k \geq 1$ raíces reales (aisladas):

$$\bar{z} = \varphi_i(\bar{y}, \bar{t}) \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (1.14)$$

donde \bar{y} y t son fijos. Para obtener el i -ésimo modelo simplificado, se sustituye (1.14) en (1.12):

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = Y(\bar{y}, \varphi_i(\bar{y}, \bar{t}), t, 0); \quad y(0) = y_0, \quad (1.15)$$

y manteniendo la misma condición para la variable de estado \bar{y} que para la variable de estado y . La Ec. (1.15) es algunas veces conocida como modelo de estado cuasiestático [27], porque z , cuya velocidad $\dot{z} = \frac{Z}{\varepsilon}$ puede ser muy grande cuando ε es muy pequeño y $Z \neq 0$, puede converger rápidamente a una raíz de (1.13), el cual es un punto de equilibrio o estado cuasiestático de (1.8). A las variables z se les llama variables rápidas y a las variables y se les conoce como lentas. La existencia de raíces aisladas (1.10) asegura que el sistema simplificado, correspondiente a cada raíz, esté bien definido.

Se introduce un sistema de ecuaciones de aproximación cero para movimientos rápidos, el cual se denomina subsistema adicional o sistema de capa frontera [30]. Para obtener este subsistema, se debe realizar la transición al tiempo rápido, dado por $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$:

$$\frac{dz}{d\tau} = Z(y, z, t, 0), \quad (1.16)$$

Donde las variables y y t son los parámetros lentos, y se consideran fijos.

Entonces se tiene que las raíces de (1.13) definen puntos estacionarios, es decir, son posiciones de equilibrio para (1.16).

Definición 1.2.2: El dominio de influencia del punto estacionario $z = \varphi(y, t)$ se conoce como el conjunto de puntos z^+ tales que las soluciones del subsistema adicional, con puntos iniciales z^+ , tienden a $\varphi(y, t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ [30].

Teorema 1. El teorema de Tikhonov.

Considere el sistema perturbado singularmente (1.7)-(1.8), y suponga que se satisfacen las siguientes condiciones [30]:

1. Las funciones $Y(y, z, t, \varepsilon)$ y $Z(y, z, t, \varepsilon)$ son analíticas con respecto a y, z, t , y a ε en algún dominio en el espacio de las variables.
2. La ecuación (1.11) tiene una raíz $z = \varphi(y, t)$ en algún dominio limitado D de variables y y t , y esta raíz es aislada.
3. La Función $Y(y, \varphi(y, t), t, 0)$ es analítica con respecto a y y t .
4. Las condiciones iniciales z_0 se encuentran en el dominio de influencia de la raíz $z = \varphi(y, t)$ del sistema (1.16).
5. Los puntos estacionarios $z = \varphi(y, t)$ del sistema (1.16) son asintóticamente estables por Lyapunov [28] para todo y y t , para los cuales la raíz de la Ec. (1.11) está definida.

Entonces, al satisfacerse las condiciones 1-5, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que la única solución $y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)$ al sistema (1.7)-(1.8) existe para $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, y que satisface las igualdades:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) &= \bar{y}(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq t' \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z(t, \varepsilon) &= \bar{z}(t) \quad \text{para } 0 < t \leq t' \end{aligned}, \tag{1.17}$$

donde $\bar{y}(t)$ es la solución del sistema simplificado

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = Y(\bar{y}, \varphi(\bar{y}, t), t, 0), \tag{1.18}$$

y

$$\bar{z}(t) = \varphi(\bar{y}, t). \tag{1.19}$$

En (1.17), $0 \leq t \leq t'$ es un tiempo finito que pertenece al intervalo $[0, T]$, donde la única solución del sistema (1.7)-(1.8) existe. El punto nulo no pertenece al dominio $0 \leq t \leq t'$ de z por (1.17). Esto excluye una capa frontera de magnitud infinitesimal donde la diferencia $\|z - \bar{z}\|$ es grande.

Considere el sentido de las condiciones 1-5 del teorema de Tikhonov. En acuerdo con [30], la condición 1 garantiza la existencia y unicidad de la solución del sistema inicial (1.7)-(1.8) para algún ε finito. (Para $\varepsilon \rightarrow 0$, el problema no es claro, porque la singularidad $\frac{1}{\varepsilon}$ aparece

en la ecuación $\frac{dz}{dt} = \frac{Z}{\varepsilon}$. El problema establece que la solución de (1.7)-(1.8) existe también para $\varepsilon \rightarrow 0$).

La condición 2 garantiza la posibilidad de excluir la variable z en el sistema degenerado (1.12)-(1.13). Por consiguiente, es posible escribir (1.12)-(1.13) solo en términos de las variables lentas \bar{y} , y es posible formular el problema de Cauchy para el sistema simplificado:

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = Y(\bar{y}, \varphi(\bar{y}, t), t, 0), \quad \bar{y}(t_0) = 0. \quad (1.20)$$

La condición 3 se cumple la existencia y unicidad de la solución del sistema degenerado (1.20). En el espacio de variables iniciales y y z de acuerdo a (1.12)-(1.13), está sobre la superficie $Z(y, z, t, 0) = 0$.

Si la condición 4 se satisface, la trayectoria de (1.7)-(1.8) en el espacio (z, t) está por arriba de la superficie $Z(y, z, t, 0) = 0$ durante el tiempo de capa frontera.

Si se satisface la condición 5, la trayectoria del sistema inicial es atraída a la superficie $Z(y, z, t, 0) = 0$, mientras que el movimiento del sistema degenerado la envuelve. La condición garantiza la existencia de al menos un pequeño dominio de influencia en acuerdo con la condición 4. Si la condición 5 no se llega a cumplir, la trayectoria del estado inicial deja la superficie $Z(y, z, t, 0) = 0$, y uno no puede hablar de la proximidad de las soluciones de los sistemas inicial y simplificado. Algunas situaciones que aparecen en la realización y violación de las condiciones 4 y 5 se muestran en la Figura 1.5.

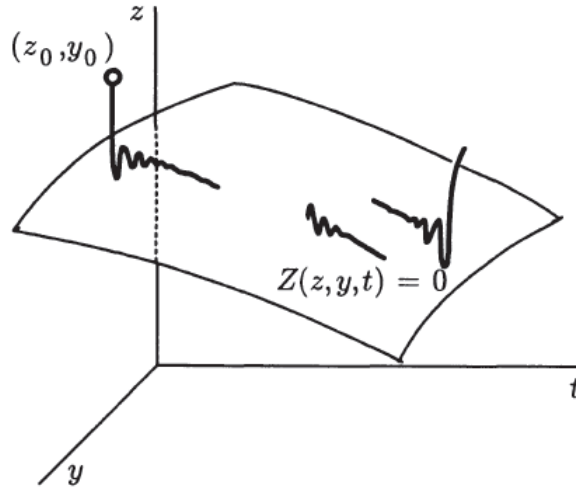


Figura 1.5: Violación y realización de las condiciones 4 y 5 del teorema de Tikhonov.

Por lo tanto, la condición más esencial del Teorema de Tikhonov es el requerimiento de “atracción” de las trayectorias del sistema inicial por la superficie $Z(y, z, t, 0) = 0$. Para su verificación, es natural aplicar el teorema sobre estabilidad por primera aproximación para

el sistema adicional (1.16). Después de sustituir $z = \varphi(y, t) + \tilde{z}$ en (1.16), donde \tilde{z} es una desviación pequeña del punto estacionario, la ecuación lineal con respecto a \tilde{z} es

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = \left(\frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \right) \tilde{z}. \quad (1.21)$$

Aquí, \tilde{z} es un vector columna de dimensión m , y $\left(\frac{\partial Z_i}{\partial z_j} \right)$ es una matriz cuadrada de $m \times m$. Los elementos del i -ésimo renglón de la matriz están formados por la derivada parcial de la i -ésima componente del vector Z con respecto a z_j , $j = 1, \dots, m$. Los valores de la derivada parcial se calculan en el punto $z = \varphi(y, t)$; esto es, las componentes de la matriz dependen de y y t , los cuales son fijos. Entonces (1.21) es un sistema lineal con coeficientes constantes.

1.4. Normalización y aplicación del teorema de Tikhonov para el modelo matemático de vuelo de avión de carga

Las unidades que corresponden a cantidades (con respecto a sus dimensiones) independientes son libres por definición, y las unidades que corresponden a cantidades dependientes pueden ser cambiadas al colocarles diferentes valores. Este hecho hace posible tener las ecuaciones en su forma normalizada. El proceso de normalización consiste en adimensionalizar las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico para facilitar la identificación de los parámetros pequeños [27, 34].

Considere un sistema dinámico arbitrario. Las ecuaciones de este movimiento pueden ser escritas en la forma de Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dT} &= F_1(X_1, X_2, \dots, T, A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots), \\ \frac{dX_2}{dT} &= F_2(X_1, X_2, \dots, T, A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots), \\ &\dots, \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde X_1, X_2, \dots, X_n son variables de fase del problema y A_1, A_2, \dots y B_1, B_2, \dots son grupos de coeficientes con la misma dimensión.

Proceso de normalización

La normalización de las Ecs. (1.22) se cumple siguiendo ciertos pasos, descritos en [30], donde la sucesión de ellos puede no ser en orden.

1. Reescriba el sistema en términos de medidas numéricas que correspondan a las cantidades involucradas:

$$T = T_*t, X_1 = X_{1*}x_1, \dots, A_1 = A_*a_1, \dots, B_1 = B_*b_1, \dots \quad (1.23)$$

2. Esboce una clase de movimiento para el cual el sistema (1.22) será considerado. Elija $T_*, X_{1*}, \dots, A_*, B_*, \dots$ en (1.23) para que sean iguales a algún valor que caracterice a las cantidades correspondientes a la clase de movimiento en cuestión. El valor característico de T_* está determinado principalmente por los objetivos de la investigación, por ejemplo el intervalo en el que el comportamiento del sistema es importante para un investigador. Un valor apropiado de T_* en la clase de movimiento normalmente provee una condición:

$$T \leq T_* \quad (1.24)$$

Los valores característicos de las variables de fase son determinados por su valores absolutos máximos en el intervalo de tiempo dado por (1.24), ver Figura 1.6. Así,

$$X_{1*} = \max|X_1|, \quad X_{2*} = \max|X_2|, \dots \quad (1.25)$$

Por analogía con (1.25), los valores de los coeficientes característicos son sumados para ser igual al valor absoluto máximo en cada grupo de coeficientes:

$$A_* = \max_k \{|A_k|\}, \quad B_* = \max_h \{|B_h|\}, \dots \quad (1.26)$$

Usando los valores característicos (1.24)-(1.26) como unidades en (1.23) se determina el sistema de unidades que es específico para una clase de movimiento dada.

En este sistema de unidades, los valores absolutos de variables dimensionales t, x_1, x_2, \dots varían en intervalos del orden de la unidad en acuerdo con (1.24) y (1.25); y por (1.26), los valores absolutos de coeficientes a_k, b_h no son mayores que la unidad.

3. Divida cada una de las Ecs. (1.22) transformadas en acuerdo con (1.23)-(1.26) mediante una combinación de los multiplicadores T_*, X_{1*}, \dots , los cuales tienen la misma dimensión que la ecuación. Entonces (1.22) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{T_1}{T_*} \frac{dx_1}{dT} &= f_1(x_1, x_2, \dots, t, \Delta_1, \Delta_2, \dots), \\
\frac{dX_2}{dT} &= f_2(x_1, x_2, \dots, t, \Delta_1, \Delta_2, \dots), \\
&\dots
\end{aligned}
\tag{1.27}$$

Las Ecs. (1.27) son adimensionales; se escriben en términos de medidas numéricas adimensionales: t, x_1, \dots . Los multiplicadores $T_1/T_*, T_2/T_*, \dots$ en el lado izquierdo de esas ecuaciones también son adimensionales; por lo tanto T_1, T_2, \dots tienen dimensión de tiempo y son llamadas “constantes de tiempo” para las variables correspondientes del sistema. Los grupos adimensionales $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ en el lado derecho son expresadas por T_*, X_{1*}, \dots . Esto completa la normalización de las Ecs. (1.22).

En el sistema normalizado (1.27) las cantidades $T_1/T_*, T_2/T_*, \dots, \Delta_1, \Delta_2, \dots$ corresponden a la clase de movimiento elegida. Algunas de estas cantidades pueden ser suficientemente pequeñas para ser consideradas como parámetros pequeños en el análisis que se vaya a realizar.

El proceso de normalización no requiere de que se utilicen valores característicos con alta exactitud. Deben estar de acuerdo con un valor de un parámetro pequeño y con la exactitud requerida por la aproximaciones.

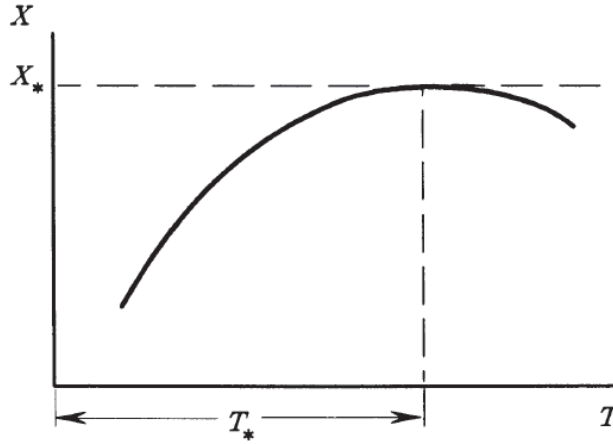


Figura 1.6: Intervalo de tiempo para los valores máximos de las variables de fase [30].

Aplicación del teorema de Tikhonov

Como primer paso, las Ecs. (1.1)-(1.4) se adaptan a la notación mostrada en el proceso de normalización. Según este proceso de normalización [30], se debe reescribir a las Ecs. (1.1)-(1.4) con medidas numéricas que correspondan a las cantidades involucradas, introduciendo las siguientes cantidades adimensionales:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{T}{T_*} & m &= \frac{M}{M_*} & u &= \frac{U}{U_*} \\
w &= \frac{W}{W_*} & q &= \frac{Q}{Q_*} & V_s &= \frac{V}{V_*} , \\
P_T &= \frac{P}{P_T^*} & I_y &= \frac{I}{I_y^*} & \bar{S} &= \frac{S}{S_*} \\
\bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_*} & \bar{g} &= \frac{g}{g_*} & L &= \frac{l}{L_*}
\end{aligned} \tag{1.28}$$

donde los términos V_* , T_* , M_* , U_* , W_* , Q_* , P_T^* , I_y^* , S_* , ρ_* , g_* , L_* , representan valores característicos. Estos valores se consideran iguales a los valores máximos correspondientes a un tipo específico de aeronave, así como para un modo de vuelo dado.

Además, se establecen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
V_* &= \frac{L_*}{T_*} & S_* &= L_* & I_y^* &= M_* L_*^2 \\
\rho_* &= \frac{M_*}{L_*^3} & g_* &= \frac{L_*}{T_*^2} & \bar{c} &= L_*
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Reemplazando las relaciones (1.28) en las Ecs. (1.1)-(1.4), se tiene:

$$\frac{M_* U_*}{T_*} m \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} \bar{\rho} \rho_* V_*^2 V_s^2 \bar{S} S_* C_x + P_T P_T^* \cos \alpha - m M_* \bar{g} g_* \sin \gamma , \tag{1.30}$$

$$\frac{M_* W_*}{T_*} m \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{2} \bar{\rho} \rho_* V_*^2 V_s^2 \bar{S} S_* C_z + P_T P_T^* \sin \alpha + m M_* \bar{g} g_* \cos \gamma , \tag{1.31}$$

$$I_y^* I_y \frac{Q_*}{T_*} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} \bar{\rho} \rho_* V_*^2 V_s^2 \bar{S} S_* \bar{c} C_m , \tag{1.32}$$

$$\frac{1}{T_*} \frac{d\theta}{dt} = q Q_* . \tag{1.33}$$

$$n_x = \frac{1}{\bar{g} g_*} \frac{U_*}{T_*} \frac{du}{dt} , \quad n_z = \frac{1}{\bar{g} g_*} \frac{W_*}{T_*} \frac{dw}{dt} + 1 . \tag{1.34}$$

Reduciendo un poco las ecuaciones anteriores,

$$\frac{U_*}{g_* T_*} m \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} \bar{\rho} \rho_* \frac{V_*^2}{g_* M_*} V_s^2 \bar{S} S_* C_x + P_T \frac{P_T^*}{g_* M_*} \cos \alpha - m \bar{g} \sin \gamma , \tag{1.35}$$

$$\frac{W_*}{g_* T_*} m \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{2} \bar{\rho} \rho_* \frac{V_*^2}{g_* M_*} V_s^2 \bar{S} S_* C_z + P_T \frac{P_T^*}{g_* M_*} \sin \alpha + m \bar{g} \cos \gamma , \tag{1.36}$$

$$I_y^* I_y \frac{Q_*}{T_*} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} \bar{\rho} \rho_* V_*^2 V_s^2 \bar{S} S_* \bar{c} C_m, \quad (1.37)$$

$$\frac{1}{T_* Q_*} \frac{d\theta}{dt} = q. \quad (1.38)$$

$$n_x = \frac{U_*}{\bar{g} g_* T_*} \frac{du}{dt}, \quad n_z = \frac{W_*}{\bar{g} g_* T_*} \frac{dw}{dt} + 1. \quad (1.39)$$

Considerando que:

$$T_1 = \frac{U_*}{g_*}, \quad T_2 = \frac{W_*}{g_*}, \quad P_{T1} = g_* M_*, \quad (1.40)$$

y que, según [30], los valores \bar{S} , $\bar{\rho}$, \bar{g} , pueden ser aproximados a la unidad, entonces se tiene:

$$\frac{T_1}{T_*} m \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} \rho_* \frac{V_*^2}{g_* M_*} V_s^2 S_* C_x + P_T \frac{P_T^*}{P_{T1}} \cos \alpha - m \sin \gamma, \quad (1.41)$$

$$\frac{T_2}{T_*} m \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{2} \rho_* \frac{V_*^2}{g_* M_*} V_s^2 S_* C_z + P_T \frac{P_T^*}{P_{T1}} \sin \alpha + m \cos \gamma, \quad (1.42)$$

$$\frac{Q_*}{T_*} \frac{I_y^*}{\frac{1}{2} \rho_* V_*^2 S_* \bar{c}} \frac{dq}{dt} = V_s^2 C_m, \quad (1.43)$$

$$\frac{1}{T_* Q_*} \frac{d\theta}{dt} = q. \quad (1.44)$$

$$n_x = \frac{T_1}{T_*} \frac{du}{dt}, \quad n_z = \frac{T_2}{T_*} \frac{dw}{dt} + 1. \quad (1.45)$$

De la Ec. (1.43), se simplifica a lo siguiente:

$$\frac{I_y^*}{\frac{1}{2} \rho_* V_*^2 S_* \bar{c}} = \frac{M_* L_*^2}{\frac{1}{2} \frac{M_*}{L_*^3} \frac{L_*^2}{T_*^2} L_*^2 L_*} = 2T_*^2 = T_3^2. \quad (1.46)$$

Donde T_3 es la constante de tiempo. Entonces, si $C_m = 1$:

$$I_y Q_* \frac{I_y^*}{\frac{1}{2} \rho_* V_*^2 S_* \bar{c}} \frac{dq}{dt} = I_y Q_* T_3 \frac{dq}{dt} = V_s^2 \implies I_y Q_* \frac{dq}{dt} = \frac{1}{T_3} V_s^2. \quad (1.47)$$

De la ecuación anterior, $Q_* = \frac{1}{T_3}$ y sustituyendo en (1.43):

$$\frac{T_1}{T_*} m \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} \rho_* \frac{V_*^2}{g_* M_*} V_s^2 S_* C_x + P_T \frac{P_T^*}{P_{T1}} \cos \alpha - m \sin \gamma, \quad (1.48)$$

$$\frac{T_2}{T_*} m \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{2} \rho_* \frac{V_*^2}{g_* M_*} V_s^2 S_* C_z + P_T \frac{P_T^*}{P_{T1}} \sin \alpha + m \cos \gamma, \quad (1.49)$$

$$\frac{T_3}{T_*} \frac{dq}{dt} = V_s^2 C_m, \quad (1.50)$$

$$\frac{T_3}{T_*} \frac{d\theta}{dt} = q. \quad (1.51)$$

$$n_x = \frac{T_1}{T_*} \frac{du}{dt}, \quad n_z = \frac{T_2}{T_*} \frac{dw}{dt} + 1. \quad (1.52)$$

Si se considera que $\rho = \rho_*$, $T_* = T_1 = T_2$, y $P_T^* = P_{T1}$ (para tener un empuje constante), y utilizando las igualdades (1.29), se tiene:

$$m \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} \rho V_s^2 C_x(\alpha) + P_T \cos \alpha - m \sin \gamma, \quad (1.53)$$

$$m \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{2} \rho V_s^2 C_z(\alpha) + P_T \sin \alpha + m \cos \gamma, \quad (1.54)$$

$$\frac{T_3}{T_1} \frac{dq}{dt} = V_s^2 C_m(\alpha, \Omega, \delta), \quad (1.55)$$

$$\frac{T_3}{T_1} \frac{d\theta}{dt} = q. \quad (1.56)$$

$$n_x = \frac{du}{dt}, \quad n_z = \frac{dw}{dt} + 1. \quad (1.57)$$

Modelo matemático simplificado de las ecuaciones de vuelo en el plano vertical

De las Ecs. (1.53)-(1.56), se puede identificar algunos parámetros, específicamente $\frac{T_3}{T_1}$. A este parámetro se le conoce como *parámetro pequeño*, $\varepsilon = \frac{T_3}{T_1}$. Con esto, se pueden reacomodar los términos en (1.53)-(1.56), de tal manera que:

$$\varepsilon \frac{d\theta}{dt} = q$$

$$\varepsilon \frac{dq}{dt} = V_s^2 C_m(\alpha, \Omega, \delta)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2m} \rho V_s^2 C_x + \frac{1}{m} P_T \cos\alpha - \sin\gamma \quad . \quad (1.58)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{2m} \rho V_s^2 C_z + \frac{1}{m} P_T \sin\alpha + \cos\gamma$$

$$n_x = \left(-\frac{1}{2m} \rho V_s^2 C_x + \frac{1}{m} P_T \cos\alpha - \sin\gamma \right)$$

$$n_z = \left(-\frac{1}{2m} \rho V_s^2 C_z + \frac{1}{m} P_T \sin\alpha + \cos\gamma \right) + 1$$

Según la aplicación del teorema de Tikhonov [39, 30], el sistema (1.58) es un modelo perturbado singularmente cuando $\varepsilon \approx 0$, y se obtiene el sistema degenerado:

$$0 = q$$

$$0 = V_s^2 C_m$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2m} V_s^2 C_x + \frac{1}{m} P_T \cos\alpha - \sin\gamma \quad . \quad (1.59)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{2m} V_s^2 C_z + \frac{1}{m} P_T \sin\alpha + \cos\gamma$$

$$n_x = \left(-\frac{1}{2m} V_s^2 C_x + \frac{1}{m} P_T \cos\alpha - \sin\gamma \right)$$

$$n_z = \left(-\frac{1}{2m} V_s^2 C_z + \frac{1}{m} P_T \sin\alpha + \cos\gamma \right) + 1$$

La aplicación del teorema de Tikhonov a las Ecs. (1.1)-(1.4) ha sido útil para presentar un modelo matemático de vuelo como dos subsistemas, el primero es el que tiene el parámetro pequeño, ε , en la parte izquierda de la Ec. (1.58), y el otro subsistema es el que no tiene el parámetro pequeño en la parte izquierda. Si el parámetro pequeño es $\varepsilon = 0$ el sistema se identificará como movimiento rápido de la trayectoria de vuelo. En el otro caso, se tiene la componente lenta de la trayectoria de vuelo cuando $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \ll 1$).

Como primer resultado de este trabajo de tesis, y con ayuda del análisis desarrollado por [4, 34], se puede comentar que, para aviones de transporte, el modelo matemático de vuelo en el plano vertical, la trayectoria de vuelo se establece como la combinación de dos

movimientos: uno lento y uno rápido, de tal manera que se necesita construir algoritmos de simulación para cada uno de ellos y que se representen con el movimiento de una PS.

El algoritmo de simulación para la parte lenta de la trayectoria de vuelo se desarrollará en el Capítulo 2, y la parte rápida se vera reflejada en el Capítulo 3; ambas situaciones utilizan los recursos geométricos de la PS para generar los movimientos que representan a los movimientos de una aeronave durante el vuelo en el plano vertical.

1.5. Principio de Máximo de Pontryagin

El control optimal está fuertemente relacionado, en sus orígenes, con la teoría del cálculo variacional. Entre los importantes aportadores a la teoría inicial de control optimal y de cálculo de variaciones se encuentran Jogan Bernoulli (1667-1748), Isaac Newton (1642-1727), Leonhard Euler (1707-1793), Ludovico Lagrange (1736-1813), Andrien Legendre (1752-1833), Carl Jacobi (1804-1851), William Hamilton (1805-1865), Karl Weierstrass (1815-1897), Adolph Mayer (1839-1907), y Oskar Bolza (1857-1942). Algunos de los hitos importantes en el desarrollo del control optimal, en el siglo XX, incluye la formulación de *programación dinámica* por Richard Bellman (1920-1984) en los 1950's, el desarrollo del *principio del mínimo* por Lev Pontryagin (1908-1988) y sus colaboradores, también en los 1950's, y la formulación del regulador linear cuadrático y el filtro de Kalman, por Rudolf Kalman (1930-) en los 1960'2. El control optimal y sus ramificaciones, han encontrado aplicaciones en diversos campos, incluyendo aeroespacial, procesos de control, robótica, bioingeniería, economía, finanzas y gestión de las ciencias, y que continúa siendo una área de investigación activa dentro de la teoría de control. Antes de la llegada de la computadora digital en los 1950's, solo se podían resolver problemas de control muy simples. La llegada de la computadora digital permitió la aplicación de la teoría de control optimal para muchos problemas complejos. El control optimal es el proceso de determinar el control y el estado de las trayectorias para un sistema dinámico en un periodo de tiempo para minimizar su índice de rendimiento (*performance*) [7].

Según [25], los sistemas dinámicos son estructuras matemáticas que tienen cuyo objetivo es describir la evolución de un sistema determinístico arbitrario a través del tiempo, el cual típicamente es modelado como un subconjunto de los enteros o los números reales

El principio de máximo de Pontryagin

El principio de Máximo de Pontryagin trata el problema de optimizar un funcional sujeto a ciertas restricciones [27].

Suponga que se tiene el problema de minimizar el funcional $J(u)$ con respecto del vector de control u , dado por :

$$J(u) = \varphi_0(x(t_k^0)), \quad (1.60)$$

tal que $x(\cdot)$ satisface:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.61)$$

donde $x(t) \in R^n$ representa el estado del sistema y $u(t) \in R^r$ representa la entradas de control, con $r \leq n$ y

$$u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in L_2^r | u(t) \in \Omega \subset R^r\}, \quad (1.62)$$

es un control admisible [32], [9], r es la dimensión del vector $u(t)$ y Ω es un conjunto convexo, cerrado y acotado. El objetivo del control u es que el sistema pueda alcanzar una variedad suave M , en algún instante de tiempo $t_k^0 : x(t_k^0) \in M \subset R^n$, es decir:

$$x(t_k) \notin M \quad \forall \quad t_k \in (t_0, t_k^0), \quad (1.63)$$

donde t_k^0 es el momento en el que el sistema alcanza al objetivo M .

Para el problema (1.60)-(1.63), se debe definir un vector adjunto y la función de Pontryagin:

1. El vector adjunto Ψ se define como la solución del sistema adjunto [32]:

$$\dot{\Psi} = - \left(\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right)^T \Psi, \quad (1.64)$$

aquí el superíndice T indica la transposición de la matriz. La Ec. (1.64) se puede reescribir como

$$\dot{\Psi}_i = - \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \Psi_j, \quad i = j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.65)$$

Donde $\dot{\Psi}_i$, f_i , Ψ_j y x_i , son las componentes de los vectores $\dot{\Psi}$, f , Ψ y x , respectivamente.

2. La función de Pontryagin H está definida por[32]:

$$H = \langle \Psi, f \rangle = \sum_{j=1}^n \Psi_j f_j = \Psi^T f, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.66)$$

donde Ψ_j y f_j son las componentes de los vectores Ψ y f , respectivamente. Nótese que para valores fijos de Ψ y x , la función H se hace una función del parámetro $u(t) \in \Omega$.

Ahora, se establece el teorema conocido como principio del máximo de Pontryagin (PMP), siendo una condición necesaria para la optimalidad, para el problema (1.60)-(1.63).

Teorema 2. El principio de máximo de Pontryagin.

Suponga que:

- Existen $u(\cdot) \in U$ tales que $x(t_k^0) \in M$.
- Existe $u^0(\cdot) \in U$ tal que $J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in U} J(u)$.

Entonces, si $u^0(t)$ es un control óptimo (o control optimal [21]), es decir, que minimiza a $J(u)$, entonces existe un par $\{\lambda_0 \geq 0, \Psi(\cdot)\}$ no trivial que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Condición de máximo:

$$\max_{u(\cdot) \in U} H(\Psi(t), x(t), u(t)) = H(\Psi(t), x^0(t), u^0(t)), \quad (1.67)$$

donde x^0 es la trayectoria optimal y u^0 el control optimal.

2. Condición de transversalidad (ortogonalidad):

$$\Psi(t_1) + \lambda_0 \left(\frac{\partial f^0(x^0(t_1))}{\partial x} \right)^T \perp M \text{ en } x^0(t_1), \quad (1.68)$$

3. Condición de estacionalidad:

$$\mathcal{H}(t) = H(\psi(t), x^0(t), u^0(t)), \quad (1.69)$$

donde \mathcal{H} se define como el Hamiltoniano para el cual se satisfacen:

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Psi_i}, \\ \frac{d\Psi^i}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.70)$$

1.6. Sistema sensorial del cuerpo del piloto

Durante su entrenamiento en un simulador de vuelo, al piloto se le proveen de todas las herramientas necesarias para que desarrolle sus habilidades y pueda responder a las diversas situaciones que pudieran concretarse en vuelo. Uno de los principales aspectos que provee un simulador de vuelo, es el movimiento en 6 *gdl* mediante la PS, la cual debe proporcionar las aceleraciones, velocidades y desplazamientos, lineales y angulares, que se están llevando a cabo durante el vuelo simulado y que permitirán al piloto hacerse de experiencia y conocer mejor el comportamiento de la aeronave.

Entonces, el piloto recibe señales (aceleraciones, velocidades y desplazamientos) propiciadas por el movimiento coordinado de los actuadores de la PS. Para detectar estas señales, entra en juego un órgano sensorial que se conoce como sistema vestibular. El sistema o aparato vestibular se localiza en el hueso temporal, en el oído interno, junto a la cóclea (ver Figura 1.7). El sistema vestibular provee la información de la postura de la cabeza relativa a la aceleración gravitacional constante y de los movimientos de la cabeza en el espacio tridimensional [31]. Cuando uno va hacia arriba en un elevador, claramente se siente la aceleración. Cuando se gira la cabeza o se viaja en un automóvil que toma una curva muy cerrada, se siente el cambio de dirección. Si no se está acostumbrado a este tipo de estímulos, la sensibilidad al movimiento puede provocar mareos [33].

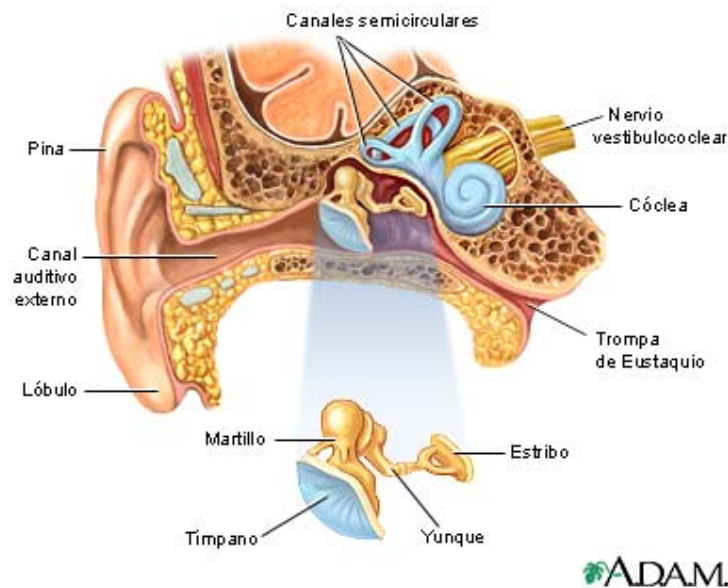


Figura 1.7: Ubicación del sistema vestibular [23].

Toda esa información es adquirida por el sistema nervioso central para determinar la posición de la cabeza, así como la velocidad y dirección de los movimientos a los que es sometida.

Esta información es integrada a nivel central donde, aunada con aquella propioceptiva y visual, permiten establecer esquemas de la posición y la dinámica de los desplazamientos del organismo. Por su parte, el sistema vestibular se compone de dos sensores principales, los órganos otolíticos y los canales semicirculares [13].

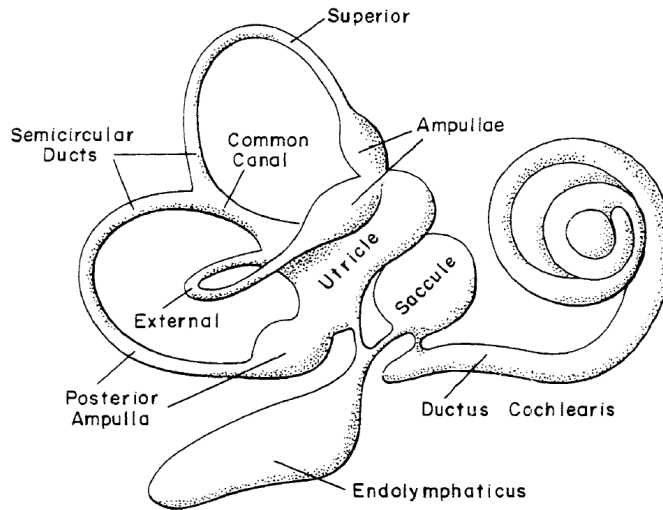


Figura 1.8: Estructura del oído interno [26].

El oído interno se divide en dos partes: 1) la cóclea que tiene función auditiva, y 2) el sistema vestibular, que es la parte no auditiva [26]. Esta estructura, también llamada laberinto, aloja a los sensores asociados con la preservación del balance y orientación en el espacio tridimensional. Uno puede distinguir entre un laberinto óseo y un laberinto membranoso. El laberinto óseo es una cavidad tunelizada en el hueso temporal del cráneo.

Canales semicirculares

En la Figura 1.8, se puede observar tres ductos, que son los canales semicirculares, y el vestíbulo. Este elaborado sistema de canales contiene, en sus cavidades, el laberinto membranoso suspendido en perilinf¹. El sistema de suspensión del laberinto membranoso no permite que se mueva relativo al cráneo. Entonces, las aceleraciones que actúan en el laberinto membranoso son aquellas que aplicadas por la cabeza. Los canales óseos semicirculares alojan a los tres canales semicirculares, mientras que el vestíbulo contiene al utrículo y al sáculo. El laberinto membranoso contiene un fluido llamado endolinf².

¹La perilinfa es un líquido acuoso del oído interno que ocupa el espacio entre el laberinto óseo y el membranoso.

²Líquido acuoso que llena el laberinto del oído de los vertebrados

Los otros órganos principales que entran en juego son los canales semicirculares que consisten en tres conductos circulares con fluido en su interior, fijos en tres planos principales aproximadamente ortogonales (anterior, posterior y lateral). Cuando el observador (piloto) es llevado a una aceleración angular, el momentum del fluido dentro de los canales crea un diferencial de presión sobre la cúpula. La deformación resultante de la cúpula provoca el movimiento de los cabellos diminutos de la crista y la percepción de la aceleración angular es llevada por las fibras nerviosas [3].

Órganos otolíticos

El utrículo es el saco largo y ovalado que ocupa el vestíbulo. Su parte inferior forma una bolsa que se conoce como mácula (sácula). El otolito, una sustancia gelatinosa con granos de carbonato de calcio en su interior, es soportado sobre la mácula por hilos (cabellos) que permiten un recorrido de deslizamiento limitado, de alrededor de 0.1 mm . La mácula es el receptor final del órgano otolítico. Es un pequeño saco que contiene cabellos diminutos muy sensibles, conocidas como células ciliadas (ver Figura 1.8). Estos sacos, utrículo y sáculo, forman el órgano otolítico, y responden a aceleraciones lineales. En total, una persona cuenta con cuatro sacos, y para efectos de la simulación, se considerarán como masas sensibles.

Cuando la cabeza se inclina con relación a la gravedad o cuando es acelerada, las células ciliadas se deflectan y se transmite la percepción de la aceleración al sistema nervioso central. Los otolitos funcionan idénticamente para aceleraciones lineales o inclinación de la cabeza hacia arriba y hacia abajo, ver Figura 1.9. Entonces, en el simulador de vuelo, la PS permitirá la percepción de aceleración lineal simplemente al cambiar su ángulo de inclinación respecto al vector gravitacional en la posición del piloto y cuando tenga movimientos coordinados hacia arriba y hacia abajo.

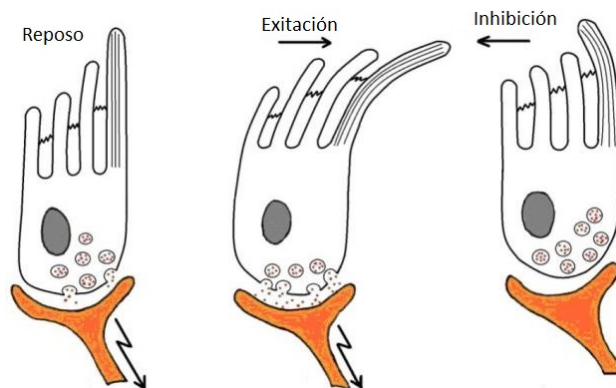


Figura 1.9: Desplazamiento de las células ciliadas.

Mecanorreceptores vestibulares, táctiles y propioceptivos

Los mecanorreceptores vestibulares se encuentran en cada una de las estructuras de los otolitos y los canales semicirculares, se conocen como células ciliadas (Figura 1.9) y son las responsables de la adquisición de las sensaciones. Están localizadas en zonas específicas: en las crestas de las ámpulas en el caso de los canales semicirculares, y en las máculas en el caso de los órganos otolíticos. Sobre las células ciliadas se extiende una capa de sustancia gelatinosa. Cuando se produce un giro de la cabeza la presión se modifica, y con ello se proporcionan informaciones sobre la posición de la cabeza en el campo de gravitación. Los mecanorreceptores pueden denominarse como transductores biológicos que responden a deformaciones, desplazamientos, cambios de presión, entre otros.

Los mecanorreceptores táctiles son aquellos que responden a la presión o al ser tocados (terminaciones nerviosas, discos de Merkel, corpúsculos de Meissner, corpúsculos de Ruffini, corpúsculos de Pacinian) [35]. Normalmente están ligados a receptores cutáneos que permiten percibir las presiones ejercidas en la piel debidas a las deformaciones de sostener un objeto, tocar una superficie o alguna otra parte del cuerpo. Por ejemplo, en el caso de los pilotos de aviones, se ubicarán en un asiento, y durante su vuelo podrá percibir los movimientos a través de las partes de su cuerpo que estén en contacto con la aeronave (piernas, espalda, manos y pies). Es decir, que van a adquirir información a través del contacto con los controles, el asiento, los mandos de vuelo como pedales, volante y las palancas o los botones que están dentro de la cabina.

El sistema propioceptivo incluye a cualquier receptor (proprioceptor) sensorial o terminación nerviosa que aporta sensibilidad interna o *proprioceptiva* al cuerpo. Los propioceptores están localizados en los músculos, articulaciones, tendones y también en el sistema vestibular. Mediante su estimulación, podemos conocer la posición o la velocidad y aceleración ligada a los movimientos del cuerpo. En otro sentido, los propioceptores son mecanorreceptores dado que se activan a consecuencia de la presión o tracción mecánicas [35].

Tanto los mecanorreceptores táctiles como los propioceptivos que están en todo el cuerpo del piloto, como los músculos de las piernas, espalda y órganos internos, van a ser considerados como una sola masa sensible.

Activación del sistema vestibular durante un vuelo

Cada persona cuenta con un sistema vestibular izquierdo y uno derecho. La activación de los sensores biológicos del sistema vestibular y del cuerpo del piloto se da cuando existen cambios en la aceleración de la aeronave.

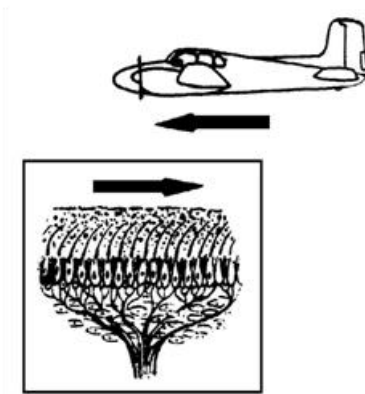


Figura 1.10: Sensación de inclinación hacia atrás [18].

Las aceleraciones y desaceleraciones lineales estimulan a los órganos otolíticos. Como ejemplo, se tiene el desplazamiento hacia atrás de la membrana otolítica (Figura 1.10) como resultado de la aceleración hacia adelante de la aeronave. La estructura del órgano otolítico permite al piloto sentir desplazamientos estáticos, que serían causados por la inclinación de la cabeza relativa al eje gravitacional, y desplazamientos transitorios provocados por movimientos traslacionales de la cabeza [33].

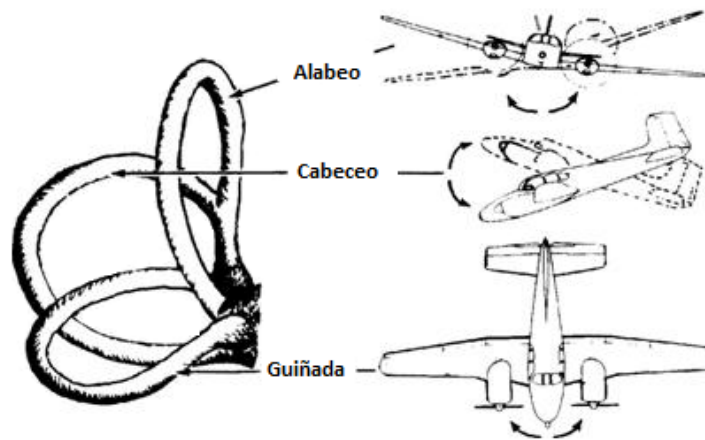


Figura 1.11: Relación de cambios en aceleración angular adquirida por los canales semicirculares [18].

Los canales semicirculares reaccionan a cambios debidos a aceleraciones angulares realizadas por un giro del avión, pero cada canal semicircular adquiere una señal específica. Hay uno para cada giro de la aeronave, como se ve en la Figura 1.11. El torque inercial creado por cualquiera de los movimientos angulares de alabeo, cabeceo o guiñada hace que la endolinfa comience a fluir, y genera la deformación de la cúpula, una estructura gelatinosa localizada

en las ámpulas del canal, la cual propicia que se estimule el nervio vestibular y permite el envío de información del movimiento al cerebro del piloto.

La importancia de conocer este tipo de sensores en el desarrollo de simuladores de vuelo y en la construcción de algoritmo de simulación dinámica como los que se presentarán en esta tesis, radica en que existen valores (o umbrales) de sensibilidad de los órganos que componen al sistema vestibular, mecanorreceptores táctiles y propioceptivos. En el Capítulo 3 se utilizarán datos que corresponden a un valor para el umbral de aceleración (μ) lineal del órgano otolítico, y que servirá para la construcción de algoritmos de un tipo de simulación dinámica de vuelo.

Instrumentos de vuelo

Como analogía hacia los biosensores descritos presentados anteriormente, se puede ver al sistema otolítico como un acelerómetro³, pues es el que ayuda, en sistemas artificiales, a detectar señales lineales como aceleraciones. En cambio, un canal semicircular puede compararse con un giróscopo⁴, pues éste, al ser montado en un eje de referencia, sensa movimientos angulares, específicamente aceleraciones angulares.

Dentro de la aeronave, el piloto tiene la oportunidad de auxiliarse con indicadores que utilizan los sistemas artificiales para no perder la noción de su orientación durante la trayectoria de un vuelo.



Figura 1.12: Tablero de los principales instrumentos de una aeronave.

³Dispositivo electrónico capaz de medir aceleraciones y vibraciones lineales.

⁴Dispositivo mecánico capaz de medir la orientación de algún aparato o vehículo.

De la Figura 1.12 se observan los instrumentos de navegación de los que puede echar mano el piloto para conocer su situación actual durante un vuelo:

- Indicador de actitud: conocido como horizonte artificial, muestra la orientación de la aeronave respecto al horizonte. Con ayuda de este instrumento, el piloto tiene la información de los ángulos de alabeo y cabeceo del avión cuando las situaciones de vuelo no son tan favorables.
- Indicador de velocidad: usado por el piloto en toda la etapa de vuelo para conocer la velocidad, en nudos náuticos, de la aeronave.
- Indicador de ángulo de banqueo: muestra la velocidad de giro, o tasa de cambio del rumbo de la aeronave. Es un instrumento giroscópico que funciona con base en el principio de precesión.
- Indicador de rumbo: proporciona la información de rumbo que lleva el avión.
- Indicador de velocidad vertical: normalmente usado para informar al piloto la velocidad instantánea de ascenso y descenso de su vehículo aéreo.
- Altímetro: indica la altitud de la aeronave medida desde un nivel fijo, como el nivel del mar, por ejemplo.

Así, con ayuda de las percepciones que pueda obtener de sus sensores biológicos más la información que le proporcionen los instrumentos de vuelo, el piloto sabrá con exactitud en qué situación se encuentra dentro del espacio de vuelo donde se lleve a cabo la simulación (o el vuelo real).

1.7. Planteamiento del problema

En el presente trabajo de tesis se establecerá cómo debe actuar el sistema de movimiento de un simulador de vuelo durante la simulación de vuelo para representar las aceleraciones que debe sentir el piloto durante un vuelo real. Este vuelo se limitará al plano vertical, por lo tanto, solo se necesitan tres *g.d.l.* donde un parámetro importante es la variación del ángulo de ataque para alcanzar las actitudes requeridas en vuelo. Se proponen tres etapas de vuelo que consiste en despegue, vuelo a altura fija y, posteriormente, el aterrizaje. En cada una de estas etapas se presentan fuerzas que el piloto percibe, mismas que tendrán que ser simuladas por el sistema de movimiento (Plataforma de Stewart) del simulador de vuelo.

Dado que no se pueden simular las fuerzas presentes en un vuelo real, se va a establecer un vector conocido como sobrecarga, dirigido a lo largo del centro de masas del piloto, se

construirá el algoritmo de simulación dinámica para aviones de transporte. Con ayuda de este vector se podrán imitar las sensaciones complejas como el despegue y el aterrizaje, a través del movimiento de una plataforma de Stewart en el plano vertical, variando su ángulo de inclinación, y desplazando verticalmente su centro geométrico.

Según la posibilidad de descomponer la trayectoria de vuelo de un avión de transporte por movimiento lento y movimiento rápido, en el plano vertical, se debe formar un algoritmo de simulación dinámica mediante la composición de dos elementos, 1) simulación de la *orientación* del vector sobrecarga, para la parte lenta de la trayectoria de vuelo; b) la simulación del *decremento* del módulo del vector sobrecarga para la parte rápida de esa trayectoria.

Entonces, un sistema de movimiento (plataforma de Stewart), debe actuar de tal manera que su centro geométrico se desplace dentro de un espacio de trabajo definido, y es necesario saber cómo debe alcanzar tales puntos que estén dentro de su región de movimiento. Para tal situación, los algoritmos de simulación dictarán la manera en que los actuadores de la PS deben cambiar su longitud para lograr el movimiento de inclinación de la PS (parte lenta) o de cambio de altura del centro geométrico (parte rápida), y que respeten los umbrales de sensibilidad del piloto y se logre la imitación de vuelo de manera correcta.

Capítulo 2

Planteamiento matemático y algoritmo de simulación dinámica de vuelo en el plano vertical

La simulación dinámica de vuelo consiste en el uso de un simulador de vuelo para la generación de estímulos adecuados que imiten las experiencias de movimiento que se dan en un vuelo real. El simulador de vuelo utiliza una PS como el mecanismo que provee los movimientos en hasta 6 *gdl*. Como trabajo de esta tesis, se utilizarán solo 3 *gdl* de la PS.

Entonces, la PS debe moverse de tal manera que transmita aceleraciones al piloto en entrenamiento, y éste se sienta dentro de un ambiente donde se llevaría a cabo un vuelo real. Por esta razón, es indispensable la construcción de algoritmos de simulación que, a través de las tecnologías electrónicas, mecánicas y computacionales, suministren de situaciones de movimiento específicas a los actuadores de la plataforma.

2.1. Esquema cinemático de la plataforma de Stewart y el rango de movimiento del ángulo de inclinación y de altura del centro geométrico

El esquema cinemático de la PS consta de describir a todos aquellos elementos que nos ayudan a ilustrar su configuración mecánica. En este capítulo, y como uno de los puntos principales de la presente tesis, se presentará un esquema genérico de una plataforma de Stewart aplicada a un simulador de vuelo. La configuración de la PS que se trabajará será utilizada para un simulador de vuelo.

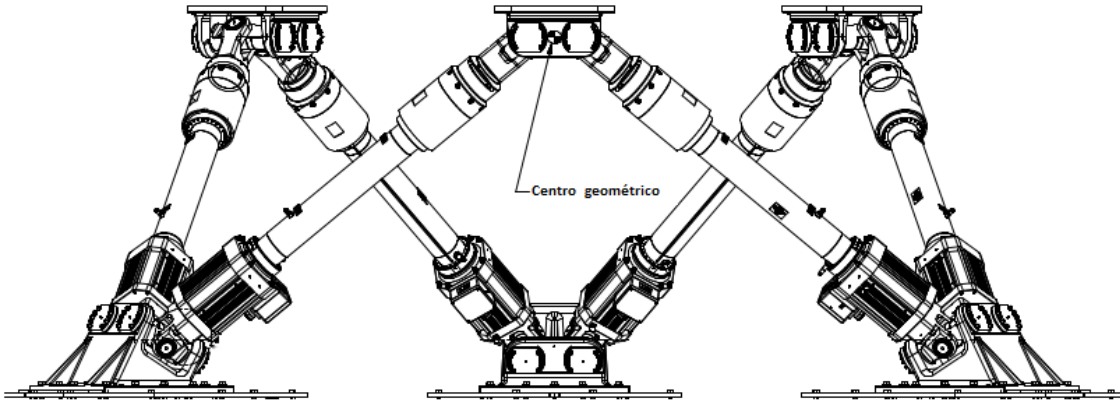


Figura 2.1: Diagrama geométrico de la Plataforma de Stewart.

En la Figura 2.1, se presenta un esquema mecánico genérico de una de las PS de la compañía MOOG¹. Antes de iniciar con la presentación del esquema cinemático de la PS, se va a considerar una geometría más simple de la plataforma. Se ha mencionado en el capítulo anterior que los vuelos a simular yacen en el plano vertical, lo que simplificará las cosas para el movimiento de la plataforma móvil pues, ahora, la PS también estará definida en el plano vertical. Entonces, la simplificación a la configuración presentada en la Figura 1.4 será considerar que la plataforma tiene tres actuadores en lugar de seis, es decir, tres pares de actuadores donde cada par se mueve independiente de los otros dos. Al tomar en cuenta esta consideración, el movimiento de la plataforma móvil en su plano vertical va a resultar en dos posibles movimientos lineales sobre sus ejes, en x (*surge*) y en z (*heave*), y un movimiento angular alrededor del eje y (*pitch*), ver Tabla 1.1.

Por lo tanto, se tendrán tres grados de libertad para generar las simulaciones de movimiento que se abordarán en este trabajo de tesis. Aunque se tienen estos tres diferentes movimientos, para el caso de estudio presentado en este trabajo, el desplazamiento sobre el eje x quedará descartado, y el desarrollo de los algoritmos que se presentarán en secciones siguientes atacarán al problema de movimiento por línea vertical, sobre el eje z , y al movimiento angular alrededor del eje y .

2.1.1. Esquema cinemático de la plataforma de Stewart

Antes de presentar el esquema cinemático de la PS en el plano vertical, se hará una simplificación en la geometría de la plataforma, misma que se visualiza en la siguiente en tres dimensiones.

¹<http://www.moog.com/>

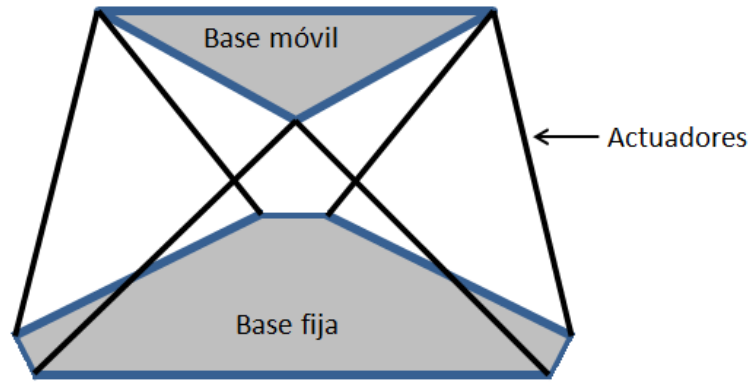


Figura 2.2: Esquema cinemático de la PS en 3D.

En la Figura 2.3 se puede ver el esquema cinemático, en el plano vertical, que representa a la plataforma de la Figura 2.1 una vez hecha la simplificación geométrica (Figura 2.2). Este esquema consta de una plataforma fija, una plataforma móvil, tres actuadores lineales. Los puntos de unión (juntas) $A1$, $B1$ y $C1$, están siempre en la misma posición, mientras que $A2$, $B2$ y $C2$, se mueven junto con el centro geométrico de la plataforma móvil. A través del cambio de longitud coordinado de los actuadores, el centro geométrico se podrá desplazar hacia arriba y hacia abajo y, con la ayuda de estas juntas, se logra el movimiento angular tomando como pivote el centro geométrico de la plataforma móvil.

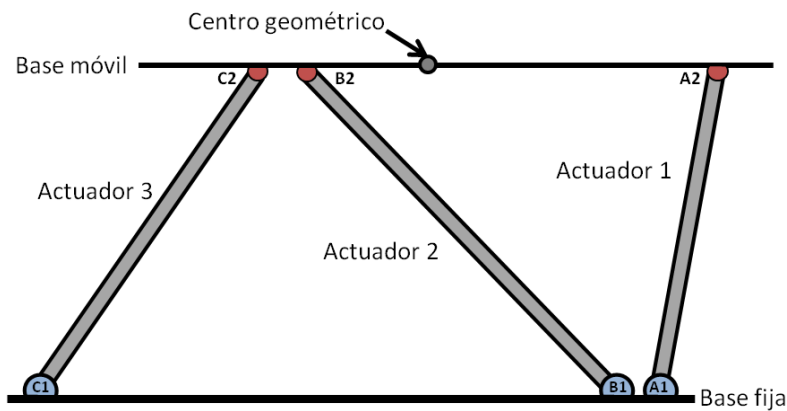


Figura 2.3: Esquema cinemático de la PS en el plano vertical.

El movimiento de la PS se describe, tomando en cuenta la posición de inicio para toda simulación de vuelo detallada en la Figura 2.3, a través del cambio de posición del centro geométrico de la plataforma móvil. Se tienen tres variantes que se describen a continuación.

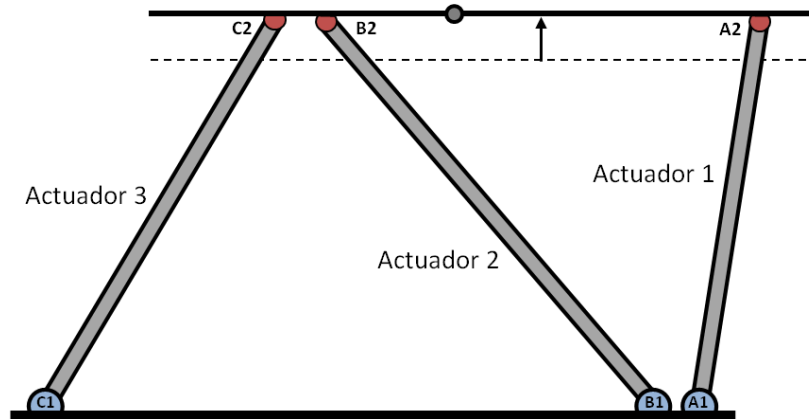


Figura 2.4: Representación del cambio de altura del centro geométrico de la plataforma móvil.

1. Movimiento por línea vertical (*heave*), ver Figura 2.4:

- a) Cada uno de los actuadores (Actuador 1-3) se mueve al mismo tiempo, desplazando al centro geométrico de su posición central hacia arriba y hacia abajo en dependencia de lo requerido por la simulación.

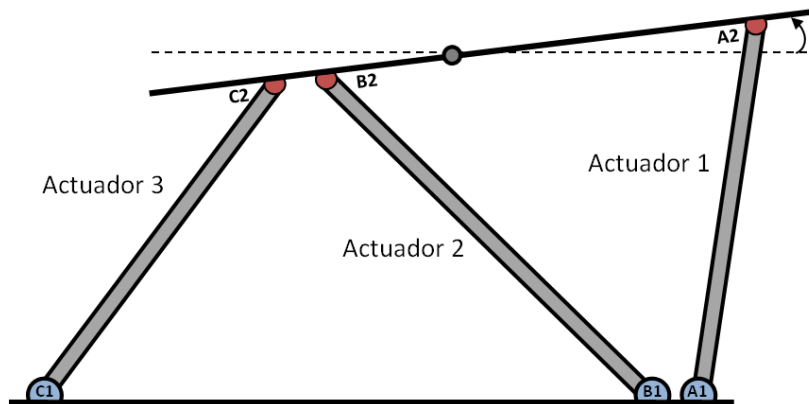


Figura 2.5: Representación del cambio de inclinación de la plataforma móvil.

2. Movimiento angular o de inclinación (*pitch*), ver Figura 2.5:

- a) El centro geométrico se mantiene fijo y en su posición de inicio (Figura 2.3).
- b) Para que la plataforma móvil apunte hacia arriba, inclinación positiva, Actuador 1 debe aumentar su longitud para llevar a $A2$ a un punto sobre el centro geométrico, mientras que Actuador 2 y 3 deben disminuir su longitud. Dado que Actuador 2 y 3 no comparten el mismo punto de unión, deben de desplazarse en diferente medida, para llevar a $C2$ y $B2$, respectivamente, por debajo del centro geométrico de la plataforma móvil.

- c) Para que la plataforma móvil apunte hacia abajo, inclinación negativa, Actuador 1 debe disminuir su longitud para llevar a $A2$ hacia la plataforma fija, es decir, por debajo del centro geométrico, en tanto, Actuador 2 y 3 aumentan su longitud. Como en la situación de inclinación positiva, Actuador 2 debe desplazarse un poco más que Actuador 3, para llevar a $C2$ y $B2$, respectivamente, por encima del centro geométrico.

3. Movimiento compuesto:

- a) Consiste en realizar una composición del movimiento por línea vertical y el movimiento de inclinación de la plataforma móvil. El centro geométrico seguirá moviéndose exclusivamente sobre el eje z , definido en la Figura 2.3, pero existirá también una inclinación de la plataforma móvil. Esto reducirá las posibilidades del centro geométrico para desplazarse sobre su rango de movimiento.

2.1.2. Rango de movimientos del centro geométrico en el plano vertical y ángulo de inclinación de la PS

A todo el conjunto de puntos que el centro geométrico de la PS pueda llegar, se les llamará rango de movimiento o espacio de trabajo.

EL rango de movimiento, para el plano vertical, de la plataforma móvil de la PS va a estar contenido en dos ejes, el primero, un eje de movimiento lineal (h) en la dirección z , que representa el cambio de altura del centro geométrico de la plataforma, y el otro eje (κ), denota el movimiento angular que gira sobre el eje y de la PS, y que tiene como pivote su centro geométrico.

La plataforma se puede mover en un ambos ejes, por separado o combinados, como se mencionó en el punto 1 y 2 de la sección anterior. Entonces es posible obtener un rango de movimiento, como el que se muestra en la Figura 2.6, y poder separar, primeramente, el movimiento del centro geométrico de la PS en dos posibilidades, uno que es el movimiento por línea vertical, y otro que será el cambio de inclinación de la plataforma móvil cuando el centro geométrico se queda en la misma posición.

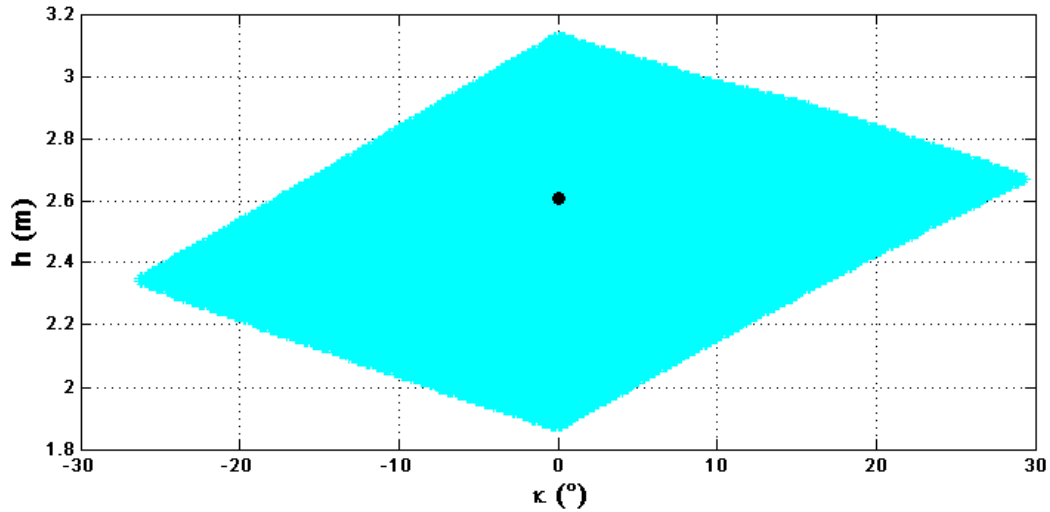


Figura 2.6: Rango de movimiento plataforma móvil.

En la Figura 2.6 se puede observar que el centro geométrico (círculo negro al centro de la gráfica) se encuentra en la posición $(0, 2.6) m$, esto es porque cuando se inicia una simulación de vuelo, la plataforma móvil se debe colocar en una posición de inicio que permita acceder al mayor espacio de trabajo posible.

Por ejemplo, si se solicita realizar una tarea de simulación que comprenda el movimiento angular de la plataforma móvil de la PS, es posible utilizar todo el rango de movimiento presentado en la Figura 2.6. Pero si se quiere utilizar todo este espacio, no es posible mantener al centro geométrico en la misma posición, sobre el eje z , por lo que, para que la plataforma móvil pueda inclinarse sin modificar la altura de su centro geométrico, h , es necesario acotar el rango de movimiento a una región más pequeña, misma que se presenta en la Figura 2.7, a través del rectángulo gris que ahí se indica.

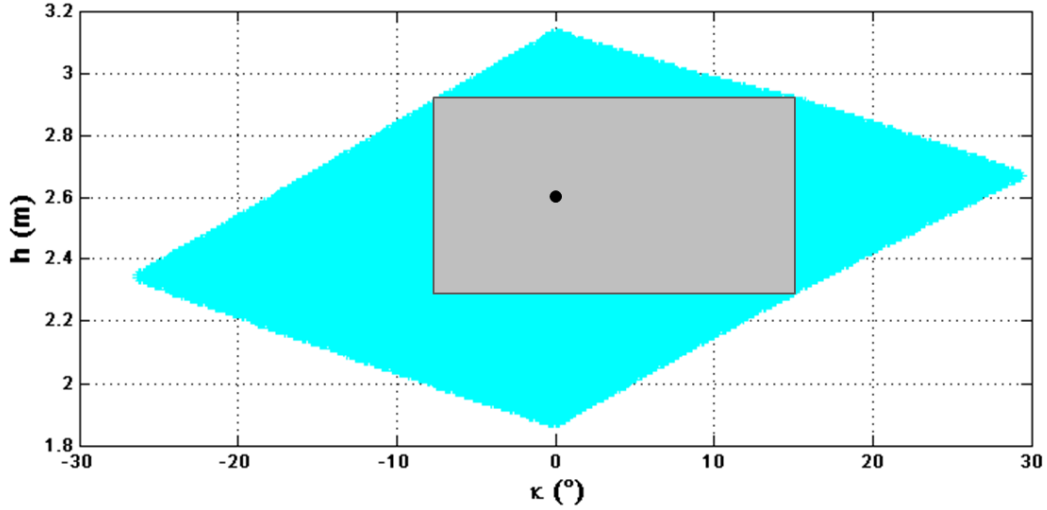


Figura 2.7: Espacio de trabajo de la PS reducido para primera aproximación.

Ahora el espacio de trabajo estará determinado por una región rectangular, que es simétrica, y permitirá realizar los movimientos de la plataforma móvil de manera independiente. De esta manera, si se requiere el cambio de altura del centro geométrico o del cambio de inclinación, es posible generarlos por separado. Es decir, que es posible fijar un valor de h (en el plano de la Figura 2.7) y modificar el ángulo de inclinación de la plataforma móvil κ , o simplemente, generar los cambios de altura modificando h , por línea vertical, y dejar fijo el valor de κ (esto indicaría una posición horizontal de la plataforma móvil).

Esta reducción del rango de movimiento la tomaremos como una aproximación, pues será necesaria para describir cómo van a actuar los algoritmos de simulación sobre los actuadores de la plataforma. El espacio de trabajo de la PS para esta primera aproximación puede ser, por ejemplo, como muestra en la Figura 2.7, y estará acotado por:

$$\kappa = \begin{cases} \kappa_{max} = 14^\circ \\ \kappa_{min} = -8^\circ \end{cases} \quad (2.1)$$

$$h = \begin{cases} h_{max} = 2.9 \text{ m} \\ h_{min} = 2.3 \text{ m} \end{cases} \quad (2.2)$$

La simulación dinámica de vuelo usa una PS para imitar las sensaciones que un piloto percibe mientras vuela una aeronave. Entonces, la simulación dinámica de vuelo va a estar enfocada a dos variantes en el plano vertical:

- Cambio de ángulo de inclinación de la plataforma móvil.

- Movimiento por línea vertical del centro geométrico de la plataforma móvil.

Para lograr que se lleve a cabo la simulación dinámica, se deben crear algoritmos de simulación que consisten en construir ecuaciones que representen a las variantes mencionadas y que darán movimiento a la PS. En general para cada uno de los movimientos en el plano vertical, los actuadores de la PS, quienes mueven el centro geométrico de la PS, deben moverse de acuerdo a lo siguiente:

1. Se replicará la aceleración inicial del avión con un valor muy cercano al real. Pero esto provocará que los actuadores alcancen su límite de operación.
2. Al estar próximo a ese límite de operación, los actuadores se irán desacelerando hasta alcanzar, eventualmente, su paro.
3. Por último, la PS regresará a su posición inicial pero su velocidad será mucho menor al umbral sensorial del piloto, a manera de que el usuario no perciba el regreso a la posición de inicio y pueda realizar otro ejercicio, retomando el punto 1.

Con base en la Figura 2.7 es posible declarar que, dado el espacio de trabajo reducido para el plano vertical, los movimientos de la PS pueden descomponerse en tres situaciones, la primera se relaciona con el movimiento únicamente mediante el cambio de inclinación de la plataforma móvil alrededor de su centro geométrico; la segunda, se realiza a través del movimiento del centro geométrico sobre la línea vertical que representa el eje z del sistema de referencia de la PS, sin tener la presencia de movimiento angular de la plataforma; la tercera, se refiere al movimiento combinado de estas dos opciones. La primera opción se desarrollará en el presente Capítulo 2, mientras que la segunda, será elaborada en el Capítulo 3.

2.2. Planteamiento físico y matemático de simulación dinámica para vuelo lento

La aplicación de la PS está orientada hacia el movimiento de un simulador de vuelo para un avión de transporte, por lo tanto es necesario realizar el análisis correspondiente a una trayectoria de vuelo de la aeronave que se desplaza en el plano vertical. Esto nos indica que existirán movimientos lineales en el eje x del cuerpo del avión, y sobre su eje z , así como un movimiento de rotación al rededor del eje y del cuerpo del avión.

2.2.1. Planteamiento físico del problema de simulación dinámica

La trayectoria de vuelo del avión en el plano vertical, fue realizada mediante simulación por computadora con ayuda de un Modelo de Dinámicas de Vuelo (FDM, por sus siglas en inglés) [8] incluido en el simulador de vuelo, de código abierto y multiplataforma, FlightGear [1], en donde se incluyen las ecuaciones de movimiento para la aeronave, considerada como cuerpo rígido. Se utilizó la configuración de una aeronave de transporte cuyas características generales son las siguientes:

- Modelo: Fokker 50.
- Compañía constructora: Fokker (Holanda).
- Peso: 18600 *kg* (sin combustible).
- Envergadura: 29 *m*.
- Velocidad máxima: 560 *km/h*.
- Velocidad de crucero: 530 *km/h*.
- Tipo de motor: Pratt & Whitney Canada PW127B.

El modelo de aeronave Fokker 50 (Figura 2.8) es usado tanto para fines militares como comerciales (de transporte).



Figura 2.8: Fokker 50 .

A continuación se presentan datos de vuelo, obtenidos de FlightGear, para el plano vertical.

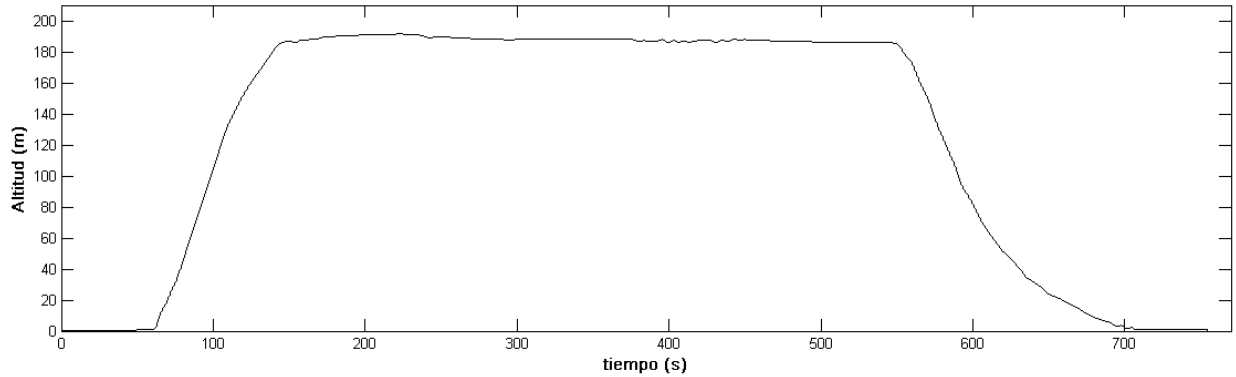


Figura 2.9: Altitud del *c.m.* durante la trayectoria de vuelo.

En la Figura 2.9 se puede observar el movimiento del *c.m.* del avión en el plano vertical a través del cambio de altura con respecto al tiempo. El cambio de altitud se da a lo largo del eje z de la trayectoria de vuelo. Se distingue el inicio de la simulación, cuando la aeronave, en el tiempo inicial, está en reposo, posteriormente incrementa su altitud a unos 190 m sobre el nivel del mar cuando han pasado 130 segundos. Luego se mantiene a una altitud casi constante por poco más de 400 segundos, y luego comienza su descenso para el posterior aterrizaje hasta que llega a la altitud de inicio. La situación de vuelo lento, para la simulación, se lleva a cabo entre el tiempo $t \approx 150\text{ s}$ a $t \approx 230\text{ s}$, y luego entre $t \approx 300\text{ s}$ y $t \approx 360\text{ s}$ (el movimiento rápido en esta trayectoria de vuelo puede encontrarse, por ejemplo entre el tiempo $t \approx 380\text{ s}$ y $t \approx 460\text{ s}$).

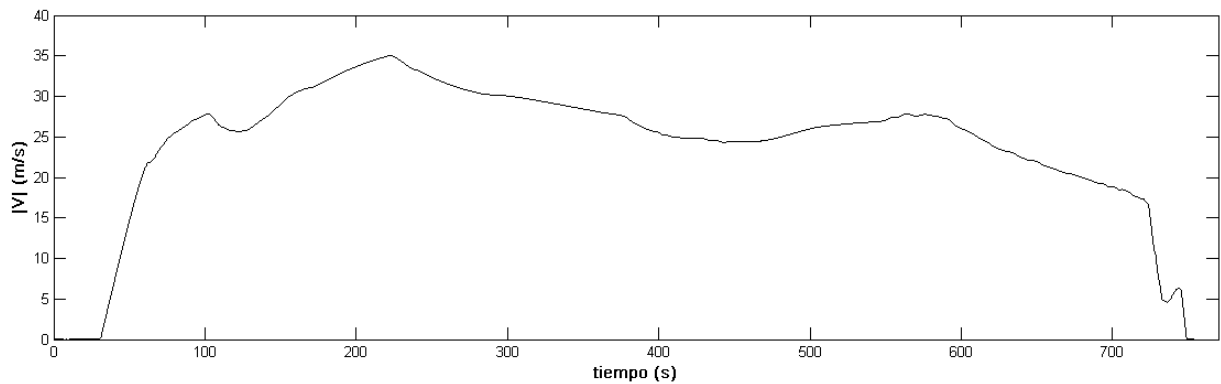


Figura 2.10: Velocidad absoluta del *c.m.* durante la simulación de vuelo.

En la Figura 2.10 se presenta el valor de velocidad absoluta del *c.m.* de la aeronave para la trayectoria de vuelo en el plano vertical, en donde se incluyen los valores de las componentes la velocidad del *c.m.* en x_b y z_b . En la gráfica, se observa cómo se da el incremento de velocidad para lograr el despegue y llegar a la altitud mostrada en la Figura 2.9, y posterior

al ascenso, la velocidad se trata de mantener con variaciones pequeñas para lograr que el *c.m.* se mantenga en la altitud fija de 190 m . Hacia el final de la simulación de vuelo, la velocidad disminuye abruptamente con el objetivo de obtener el descenso de la aeronave, y tocar la pista de aterrizaje, por último, el avión debe frenar para lograr su paro completamente, por lo que la velocidad va decreciendo hasta alcanzar $|\vec{V}| = 0$.

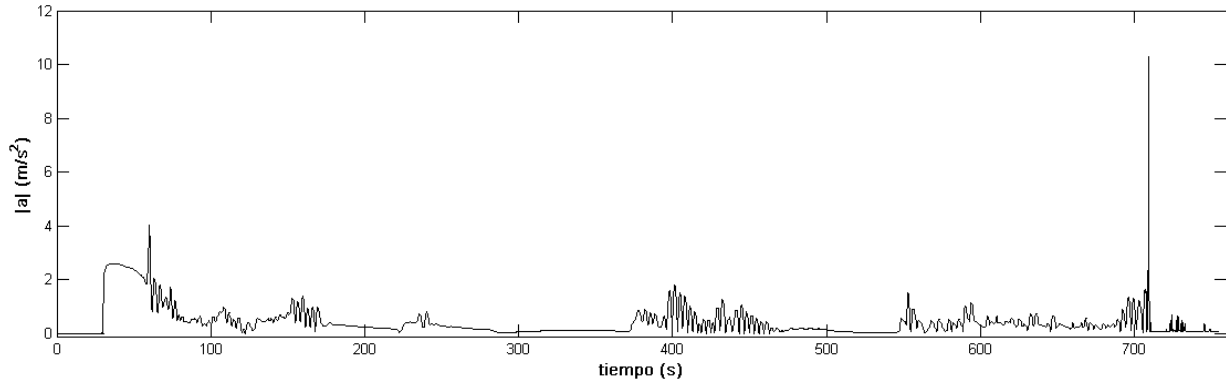


Figura 2.11: Módulo de la aceleración absoluta del *c.m.* para el vuelo simulado.

La Figura 2.11 permite visualizar los cambios de velocidad respecto al tiempo, es decir, se tiene una lectura para la aceleración absoluta del *c.m.* en el plano vertical. Los valores que se muestran en la gráfica anterior no son muy grandes, a excepción del valor de aceleración absoluta en el tiempo $t = 710\text{ s}$, en donde se tiene el contacto con la pista, y la velocidad decrece muy rápido, por lo tanto, el registro de la aceleración absoluta es el más alto durante la simulación. Para la situación de vuelo lento, los valores de aceleración absoluta del *c.m.* de la aeronave no son muy grandes, y en algunos intervalos, se mantiene casi constante, por lo que entra en el rango de movimiento lento del avión, es decir, la aceleración no tiene cambios abruptos durante la simulación.

Como se mencionó en el Capítulo 1, donde se aplicó el teorema de Tikhonov para distinguir entre dos tipos de movimiento de la trayectoria de una aeronave dadas sus ecuaciones de movimiento, es factible presentar las situaciones de vuelo lento y rápido.

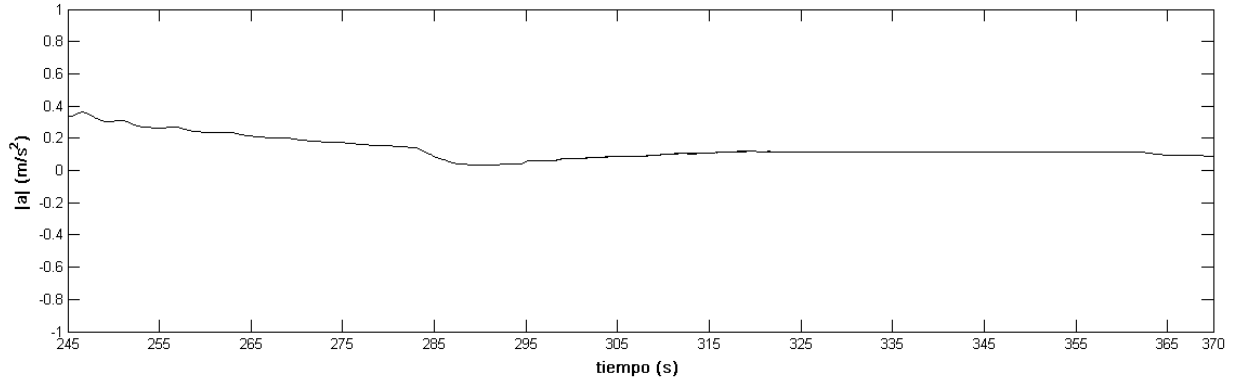


Figura 2.12: Intervalo de tiempo que alberga los movimientos lentos de la trayectoria de vuelo.

Es posible que los valores de aceleración absoluta del *c.m.* de la aeronave no cambian en gran medida, de hecho, en la Figura 2.12 puede verse que se tiene un comportamiento casi constante para el valor de $|\vec{a}|$. En este tipo de situaciones es posible hablar o identificar situaciones de vuelo lento de la trayectoria de movimiento de una avión de transporte, como el descrito al inicio de esta sección.

Las fuerzas que se generan en el *c.m.* de la aeronave son muy grandes y no pueden ser representadas directamente a través del movimiento de la PS, puesto que es un elemento mecánico muy limitado. Sin embargo, es posible construir elementos presentes en la trayectoria de vuelo que se puedan representar por la PS para generar al piloto en entrenamiento, los estímulos adecuados que sentiría en un vuelo real. Estos elementos presentes en vuelo serán, básicamente, un vector y su ángulo de orientación.

El planteamiento físico de la simulación dinámica de vuelo consiste, entonces, en realizar una análisis vectorial de la trayectoria de movimiento de una aeronave en el plano vertical, dado un vuelo real, y construir vectores de vuelo que actúen a través del *c.m.* del avión y a través de la posición del piloto que controla el vehículo. El elemento a definir es el vector sobrecarga y la orientación que éste presenta en las situaciones de vuelo simulado. Para definir al vector sobrecarga, se necesita primero la descripción de otro vector conocido como gravitoinercial [12].

El vector gravitoinercial tiene su nombre por el hecho de que está formado por dos componentes vectoriales de vuelo, una gravitacional y otra inercial. Este vector se ve reflejado tanto en el *c.m.* de la aeronave como en la posición del piloto. El piloto sentirá la influencia de este vector a través de los sensores biológicos de su cuerpo. Las componentes del vector gravitoinercial se detallan a continuación y se visualizan en la Figura 2.13.

- Gravitacional: siempre está presente en todas las etapas de vuelo y se debe a la influencia del campo gravitacional terrestre, desde que el avión está detenido, a punto de despegar

y cuando está en el aire. El elemento gravitacional está dirigido hacia el centro de la Tierra, y se considerará actuando a través del centro de masas del avión, pero su influencia es presenciada en la ubicación del piloto en la aeronave.

- Inercial: este constituyente es el resultado de las aceleraciones generadas por cambios de velocidad absoluta y actitud de la aeronave, presentes en el cuerpo del piloto. Este elemento actúa en sentido contrario al vector de aceleración del *c.m.* del avión puesto que la inercia es una propiedad tanto del cuerpo del avión como del cuerpo del piloto.

El vector gravitoinercial se debe ubicar, para efectos de simulación, en el cuerpo del piloto. La expresión “cuerpo del piloto” se utiliza así pues se considera al piloto como un cuerpo representado por su cabeza y su tronco más los brazos, excluyendo las piernas. Dentro de la cabeza del piloto se encuentran sus sensores biológicos, que ayudan a adquirir las señales debidas a las aceleraciones presentes en vuelo. Para el vuelo lento, los sensores que entran en acción son los canales semicirculares, pues miden los cambios angulares a través del tiempo.

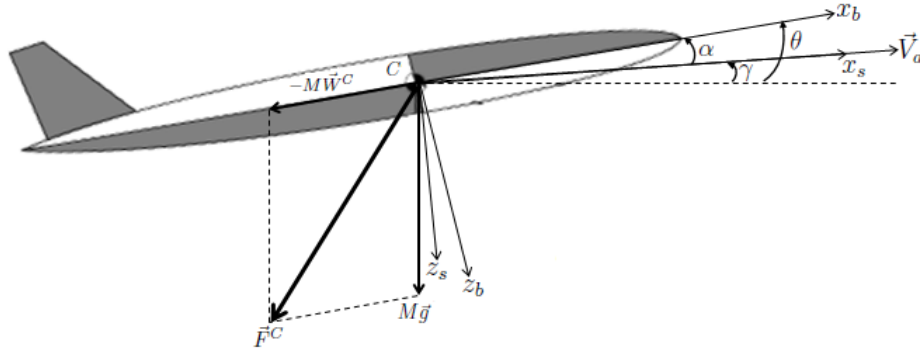


Figura 2.13: Descripción del vector gravitoinercial del *c.m.* del avión.

De la Figura 2.13, se propone construir lo siguiente:

$$M\vec{W}^C = M\vec{g} + \vec{T}^p + \vec{R}^{aero}, \quad (2.3)$$

$$M \left(\vec{W}^C - \vec{g} \right) = \vec{T}^p + \vec{R}^{aero}, \quad (2.4)$$

donde \vec{T}^p representa la fuerza de empuje de los motores actuando sobre el eje cuerpo x_b y \vec{R}^{aero} son las fuerzas aerodinámicas. Siendo el vector gravitoinercial la parte izquierda de la Ec. (2.4):

$$\vec{F}^C = M \left(\vec{W}^C - \vec{g} \right) \quad (2.5)$$

Luego, se divide la Ec. (2.4) por M y g_0 , donde g_0 es la aceleración de caída libre a nivel del mar:

$$\frac{1}{g_0} \left(\vec{W}^C - \vec{g} \right) = \frac{1}{g_0 M} \left(\vec{T}^p + \vec{R}^{aero} \right), \quad (2.6)$$

y de aquí se define a la aceleración aparente en el *c.m.* como:

$$\vec{a}^C = \vec{W}^C - \vec{g}. \quad (2.7)$$

La Ec. (2.6) relaciona las aceleraciones del cuerpo rígido, representadas en el *c.m.* de la aeronave, con los valores las fuerzas aerodinámicas, que contienen los coeficientes aerodinámicos característicos de la misma, y las fuerzas propulsivas, dadas por el tipo de motor que tenga la aeronave. Se hará uso de la aceleración aparente para la definición del vector sobrecarga, el cual se detallará más adelante.

$$\frac{1}{g_0} \vec{a}^C = \frac{1}{g_0 M} \left(\vec{T}^p + \vec{R}^{aero} \right). \quad (2.8)$$

2.2.2. Definición del vector sobrecarga en el plano vertical para la posición del piloto

Lo que necesita un simulador de vuelo para generar simulaciones correctas es representar los datos de un vuelo, incluidos en el vector gravitoinercial, pero éste es muy grande para ser simulado por la PS, pues tiene restricciones geométricas muy pobres para alcanzar las aceleraciones reales de un avión. Por esta razón se necesita crear un vector, que sea mucho más pequeño, que esté directamente relacionado con el vector gravitoinercial. Se define entonces el vector sobrecarga, \vec{n} , el cual es adimensional y contiene toda la información de vuelo de una aeronave, especialmente las aceleraciones del *c.m.* del avión, donde se encuentran incluidos los coeficientes aerodinámicos, además de ser funcional para construir algoritmos de simulación dinámica de vuelo. El vector de sobrecarga es mucho más pequeño que el vector gravitoinercial, pues está reducido en magnitud con ayuda del valor de la constante de gravedad y la masa del avión, además tienen direcciones opuestas.

Con ayuda de la Ec. (2.8) se puede reescribir el vector gravitoinercial como

$$\vec{F}^C = -M g_0 \vec{n}^C, \quad (2.9)$$

donde \vec{n}^C es el vector sobrecarga en la posición del *c.m.* (*C*) de la aeronave:

$$\vec{n}^C = \frac{1}{g_0} \vec{a}^C \quad (2.10)$$

El vector sobrecarga tiene valores adimensionales, y es mucho más pequeño que el vector gravitoinercial, como dato, para un avión de carga, el vector de sobrecarga puede tener un valor máximo de 3, es decir, $n^C < 3$.

Una vez que se ha construido el vector sobrecarga en la posición del *c.m.* del avión, es tiempo de trasladarlo a la posición del piloto. Se recuerda al lector que la simulación de vuelo a través de un simulador de vuelo está orientada al entrenamiento de pilotos, por lo que se debe realizar el estudio en la posición que ocupa éste dentro de la aeronave.

Entonces se debe elegir un nuevo punto donde actuará el vector gravitoinercial, el cual debe estar dentro de la cabina del avión, y debe ubicarse en donde se encontraría sentado el piloto. Se propone esta ubicación aproximada a la boca del estómago del cuerpo del piloto. Además, se considera que el piloto está localizado a lo largo del eje cuerpo x , y no está muy lejano del *c.m.* del avión, por lo tanto, es posible considerar que el vector gravitoinercial va a actuar de forma similar tanto en el *c.m.* del avión como en el cuerpo del piloto.

De manera gráfica, y con el fin de ejemplificar visualmente al vector de sobrecarga, se muestra la Figura 2.14 donde, además, se colocan las componentes inercial ($m\vec{W}^N$) y gravitacional ($m\vec{g}$) del vector gravitoinercial en el cuerpo del piloto. El punto N es un punto fijo que representa a todas las masas sensibles (los sensores biológicos y todo el cuerpo) del piloto, y el punto N_p representa a las mismas masas sensibles pero cuando están en movimiento. La hipótesis que se plantea para la simulación es que el punto N se va a localizar en el centro del cuerpo del piloto y estará siempre fijo durante la simulación de vuelo lento. Se ubicará, aproximadamente, en un punto central en el torso, alrededor de la boca del estómago.

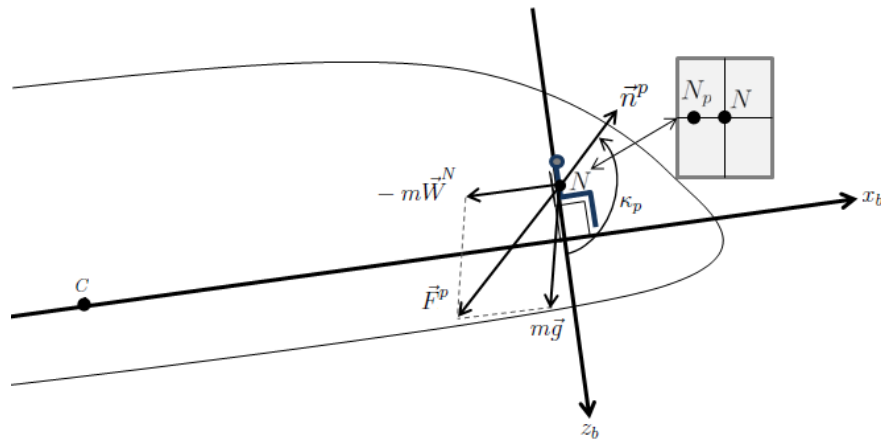


Figura 2.14: Relación del vector gravitoinercial y sobrecarga para la posición del piloto.

La ubicación del piloto es distinta a la del *c.m.* de cualquier aeronave, y depende de la configuración geométrica de ésta. Para fines prácticos de la simulación de vuelo lento se considerara al piloto como punto central de cálculos representado por el punto N . La razón de tener esta consideración tiene fundamento en que cuando se vaya a trasladar todos los cálculos de simulación dinámica del vuelo al movimiento de la plataforma móvil de la PS, se realicen de manera directa. Primeramente, se debe construir el vector gravitoinercial en la posición del piloto, \vec{F}^p . El subíndice p denota que este vector está ubicado en la posición del piloto. Entonces,

$$m\ddot{\vec{x}}_p + \varepsilon\dot{\vec{x}}_p + k\vec{x}_p = \vec{F}^p = -m\left(\vec{W}^N - \vec{g}\right) = m\left(\vec{g} - \vec{W}^N\right), \quad (2.11)$$

siendo m la masa del piloto y,

$$\vec{W}^N = \vec{W}^C + \vec{W}^\alpha, \quad (2.12)$$

donde \vec{W}^N es la aceleración inercial de un punto fijo en el cuerpo del piloto. \vec{W}^α es la aceleración de las masas sensibles alrededor del punto N . Existe una relación entre el vector gravitoinercial \vec{F}^C y \vec{F}^p , dada por la presencia de la aceleración aparente, \vec{a}^C . Cuando se tiene la situación de vuelo lento, las aceleraciones de las masas sensibles son muy pequeñas, y se puede considerar $\vec{W}^\alpha = 0$, y los vectores gravitoinerciales en ambas posiciones serían idénticos en forma. La parte izquierda de la Ec. (2.11) muestra tres sumandos, el primero se identifica como la fuerza que actúa en el centro de masas del cuerpo del piloto; el segundo término se relaciona con fuerzas de viscosidad propias de los componentes del cuerpo del piloto; el tercer término se relaciona con los efectos de elasticidad que indican el desplazamiento de los órganos del cuerpo del piloto alrededor del punto N , es decir, cómo se deforman los órganos sensibles al cambio de las aceleraciones de un vuelo. Como se tiene el movimiento *relativo* del piloto, que está montado sobre una aeronave que tiene una trayectoria de movimiento lento, los dos primeros términos de la Ec (2.11) serán descartados, considerando únicamente los efectos de elasticidad de las masas sensibles del cuerpo del piloto.

El vector gravitoinercial en la posición del centro de masas del cuerpo del piloto queda definido por:

$$\vec{F}^p = m\left(\vec{g} - \vec{W}^N\right). \quad (2.13)$$

La definición del vector sobrecarga en la posición del piloto, se realiza mediante la ayuda de la Ec. (2.8) como:

$$\vec{n}^p = \frac{1}{g_0} \vec{a}^p. \quad (2.14)$$

El término \vec{a}^p es la aceleración aparente en la posición del piloto dada por:

$$\vec{a}^p = \left(\vec{W}^N - \vec{g} \right). \quad (2.15)$$

Y el vector gravitoinercial en la posición del piloto ahora se puede escribir como:

$$\vec{F}^p = -mg_0 \vec{n}^p. \quad (2.16)$$

Dado que \vec{n}^p está compuesto por \vec{W}^N , que a su vez contiene la aceleración del *c.m.* de la aeronave, puede escribirse el vector sobrecarga en la posición del piloto como la suma de dos componentes, el vector sobrecarga \vec{n}^C más la componente relativa al *c.m.* del avión, es decir:

$$\vec{n}^p = \frac{1}{g_0} \left(\vec{W}^N - \vec{g} \right) = \frac{1}{g_0} \left(\vec{W}^C - \vec{g} + \vec{W}^\alpha \right) = \vec{n}^C + \frac{1}{g_0} \vec{W}^\alpha \quad (2.17)$$

Para calcular el ángulo de orientación de \vec{n}^p en el plano vertical, se tiene

$$\kappa = \arctan \left(\frac{F_x^p}{F_z^p} \right) = \arctan \left(\frac{n_x^p}{n_z^p} \right). \quad (2.18)$$

Definición del vector sobrecarga para el plano frontal

De manera similar al análisis realizado para el plano vertical, se define el plano frontal para visualizar al vector sobrecarga y definir su orientación. De manera práctica, se ha decidido que la orientación del vector sobrecarga en el plano frontal se mida como positivo en sentido contrario a las manecillas del reloj, desde el eje z_b , mediante el ángulo χ_a .

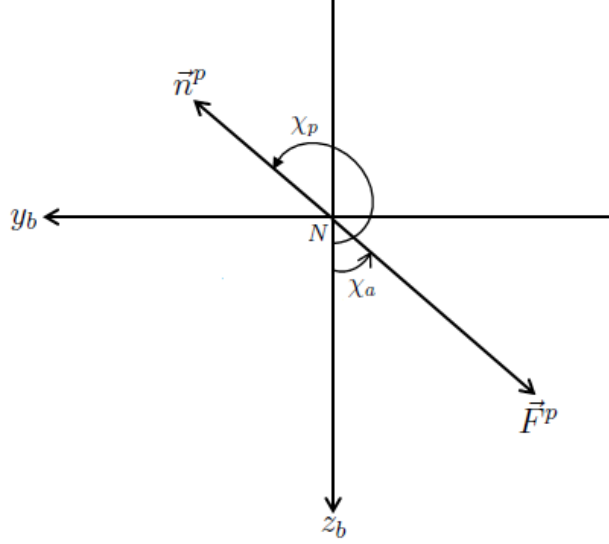


Figura 2.15: Orientación del vector sobrecarga y gravitoinercial para un giro a la derecha.

El proceso es similar al realizado para la orientación en el plano vertical del vector de sobrecarga, por lo tanto, en el plano frontal (Figura 2.15) la orientación del vector sobrecarga está dictada por:

$$\chi_p = \arctan\left(\frac{n_y^p}{n_z^p}\right) + \pi. \quad (2.19)$$

Para el plano frontal también se pueden identificar dos situaciones, cuando la aeronave gira a la derecha y cuando gira a la izquierda, para las cuales se respeta la Ec. (2.19), y el valor de n_{py} es el que las diferencia, entonces:

- Giro a la derecha: $n_z^p < 0$ y $n_y^p < 0$ ($F_y^p > 0$).
- Giro a la izquierda: $n_z^p < 0$ y $n_y^p > 0$ ($F_y^p < 0$).

El vector sobrecarga se puede definir mediante su módulo y dos ángulos, es decir, como si fuese a ser descrito en coordenadas esféricas. Afortunadamente, ya se ha mencionado la definición de este vector, \vec{n}^p , y un ángulo de orientación, κ_p , girando al rededor del eje y_b del cuerpo del avión. El segundo ángulo a utilizar es χ_p , que en términos aeronáuticos está relacionado con un ángulo de la trayectoria de vuelo conocido como alabeo; a diferencia del ángulo κ_p que se relaciona con el cabeceo de la aeronave. Entonces, el ángulo χ_p va a representar el giro al rededor de x_b del cuerpo de la aeronave, positivo en sentido contrario de las manecillas del reloj. Entonces el vector sobrecarga estaría representado por:

$$\vec{n}^p = \{|\vec{n}^p|, \kappa_p, \chi_p\}. \quad (2.20)$$

La Ec. (2.20) contiene al módulo del vector gravitoinercial, dato que será de gran utilidad en el desarrollo del Capítulo 3; y dos ángulos, de los cuales uno será utilizado para la construcción de los algoritmos de simulación de vuelo lento. El ángulo que se usará en el presente Capítulo 2, será el ángulo de orientación κ_p , usado para generar simulaciones dinámicas de vuelo en el plano vertical para vuelo lento. El otro ángulo, χ_p , será usado para un trabajo a futuro.

Sin embargo, durante un vuelo real existen otros datos como el ángulo de alabeo, χ_p , que también debería ser representado por la PS, pero esta situación será para un caso de estudio posterior al planteado en la presente tesis. El ángulo χ_p , en el sistema de referencia de la PS, se logra mediante el giro alrededor del eje x_b , cuando se tienen giros a la izquierda o a la derecha generados por la aeronave.

Suponga que se tienen estos dos movimientos angulares en un vuelo, y se presentan las siguientes dos opciones :

1. Realizar el giro por el ángulo χ_p , y posteriormente por κ_p .
2. Realizar el giro, primeramente, por el ángulo κ_p y luego por χ_p .

La elección de cualquiera de las opciones anteriores depende de la configuración de la simulación de vuelo (o vuelo real) que se esté ejecutando. Para situaciones de vuelo lento, estos ángulos pueden conmutarse, es decir, que se puede tener tanto una como la otra opción durante el vuelo. Como ejemplo, considérese la secuencia de giro planteada por la opción 1.

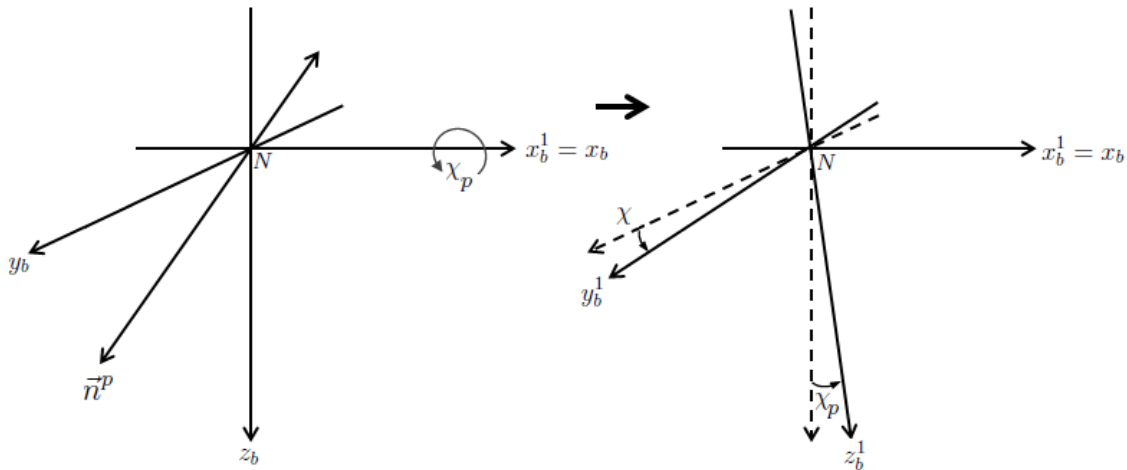


Figura 2.16: Giro por ángulo χ_p .

En la Figura 2.16, el giro se realiza alrededor del eje x_b variando el ángulo χ_p .

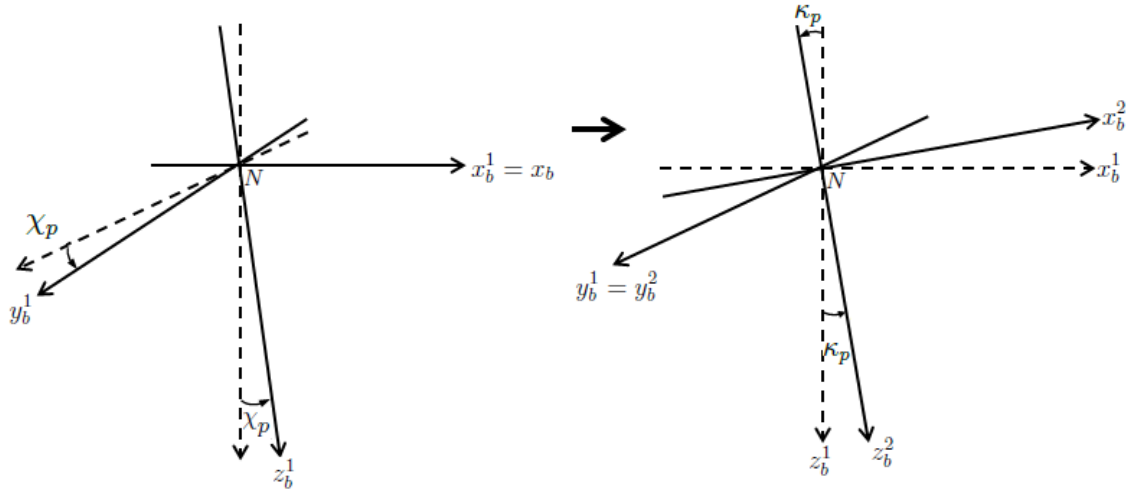


Figura 2.17: Giro por ángulo κ_p .

A continuación, se gira sobre el eje y_b en la Figura 2.17 para tener el cambio en el ángulo κ_p , completando la secuencia de giro y obtener la orientación del vector sobrecarga en todo el espacio.

2.2.3. Planteamiento matemático del vector sobrecarga para movimientos lentos en el plano vertical

El planteamiento matemático del vector de sobrecarga estará dado por una ecuación que indique la orientación de este vector en todo momento, se representará mediante el ángulo κ_p , medido desde el eje z del cuerpo del avión.

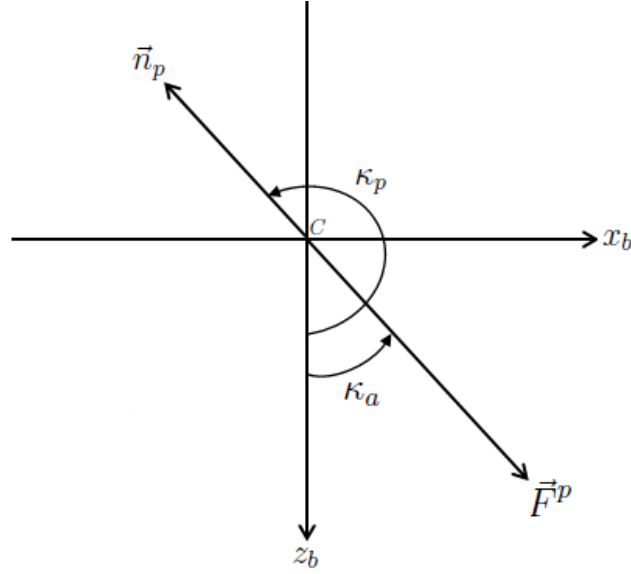


Figura 2.18: Orientación del vector de sobrecarga durante el descenso.

De nuevo, a partir de la Ec. (2.18), y con ayuda de la Figura 2.18, el ángulo de orientación κ_p se establece como sigue:

$$\kappa_p = \kappa_a + \pi, \quad (2.21)$$

$$\kappa_p = \arctan\left(\frac{n_x^p}{n_z^p}\right) + \pi. \quad (2.22)$$

En el Anexo C se presenta un análisis complementario para determinar el ángulo κ_p . Se presenta a continuación, un análisis complementario para entender el valor del ángulo de orientación del vector sobrecarga en la posición del piloto. El valor de la componente z de sobrecarga siempre va a estar muy cercano al valor de la unidad puesto que:

$$\vec{n}^p = \frac{1}{g_0} \begin{bmatrix} n_x^p \\ 0 \\ n_z^p \end{bmatrix} = \frac{1}{g_0} \begin{bmatrix} a_x^p \\ 0 \\ a_z^p \end{bmatrix} = \frac{1}{g_0} \begin{bmatrix} W_x^N \\ 0 \\ W_z^N - g_0 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

En la Ec. (2.23), tanto la aceleración W_z^N como W_x^N pueden ser cero, puesto que es la aceleración que tiene el cuerpo del piloto respecto al sistema de referencias situado en el *c.m.* del avión. Entonces, cuando $W_x^N = W_z^N = 0$, se tiene una situación de vuelo estable, por ejemplo, cuando la aeronave está volando a una altitud fija. Pero el valor de g_0 nunca va a cambiar, pues se ha considerado que el campo gravitacional es constante para todas las altitudes. Por lo tanto, el valor de $n_z^p \neq 0$.

El planteamiento matemático de simulación se propone como sigue:

$$\kappa_s = -\kappa_a. \quad (2.24)$$

Donde κ_s es el ángulo de inclinación, en el plano vertical, de la plataforma móvil de la PS y,

$$-\frac{\pi}{2} < \kappa_s < \frac{\pi}{2}. \quad (2.25)$$

Se tiene que:

$$\kappa_s = -\arctan\left(\frac{n_x^p}{n_z^p}\right) = -\arctan\left(\frac{F_x^p}{F_z^p}\right). \quad (2.26)$$

Se puede comentar, de la Ec. (2.26), que la parte izquierda representa el sentido matemático de la construcción del algoritmo de simulación de orientación del vector sobrecarga, mientras que la parte derecha de esa ecuación, asocia el sentido físico dado por las componentes del vector gravitoinercial presente en la trayectoria de vuelo en el plano vertical.

En la sección 2.3 de este capítulo, se trabajará con este nuevo ángulo κ_s para construir el algoritmo de simulación correspondiente a la componente lenta del vector sobrecarga.

De los datos de simulaciones de vuelo, y con ayuda de las Ecuaciones (2.8), (2.18), (2.14) y (3.33), se han obtenido gráficas que se presentan como primeros resultados para los valores de sobrecarga y su inclinación en las posiciones del *c.m.* y del piloto, sobre la aeronave.

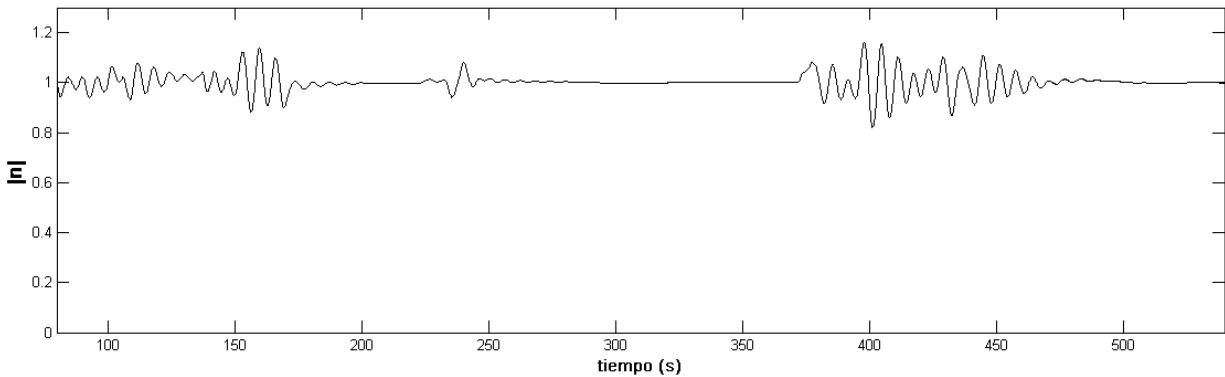


Figura 2.19: Valor absoluto del vector sobrecarga en la posición del *c.m.* del avión.

El vector de sobrecarga que actúa en la posición del *c.m.* de la aeronave para movimientos lentos, se representa a través de la Figura 2.19, que indica cómo va cambiando el valor

absoluto de este vector a través del tiempo. Note que el valor absoluto del vector sobrecarga en esta posición, para la situación de movimiento lento, estará rondando el valor de la unidad, puesto que, a medida de que el valor de \vec{W}^a se vaya modificando en un rango pequeño, el valor predominante es el del campo gravitacional, según la Ec. (2.7).

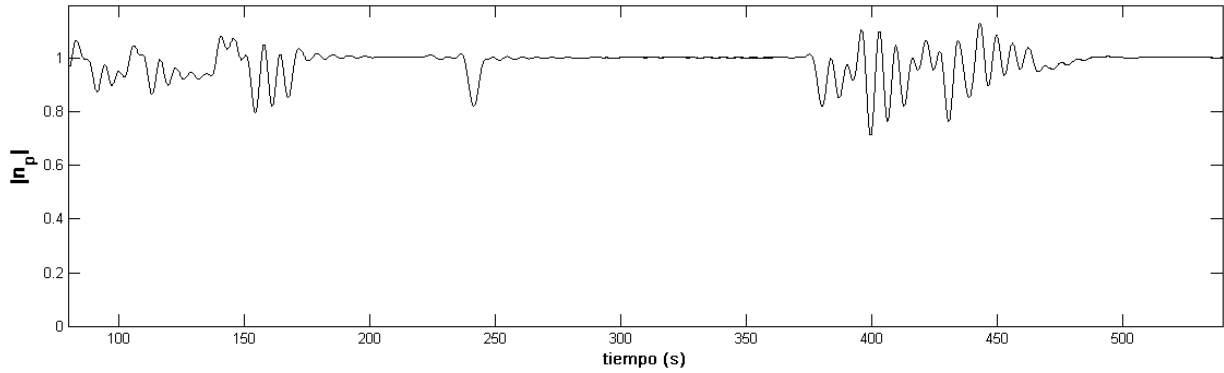


Figura 2.20: Valor absoluto del vector sobrecarga en la posición del piloto.

El valor del vector sobrecarga en la posición del piloto cambia en relación al presentado para la posición del *c.m.* del avión, como se muestra en la Figura 2.20. Esto se debe a que estas dos posiciones están separadas a una distancia no tan grande pero considerable, por lo tanto, para una trayectoria de vuelo definida, los valores de sobrecarga para las posiciones antes mencionadas varían, pero no en gran cantidad. Al igual que de $|\vec{n}^a|$, el valor de $|\vec{n}^p|$ va a estar rondando el valor de la unidad para la situación de vuelo lento en el plano vertical.

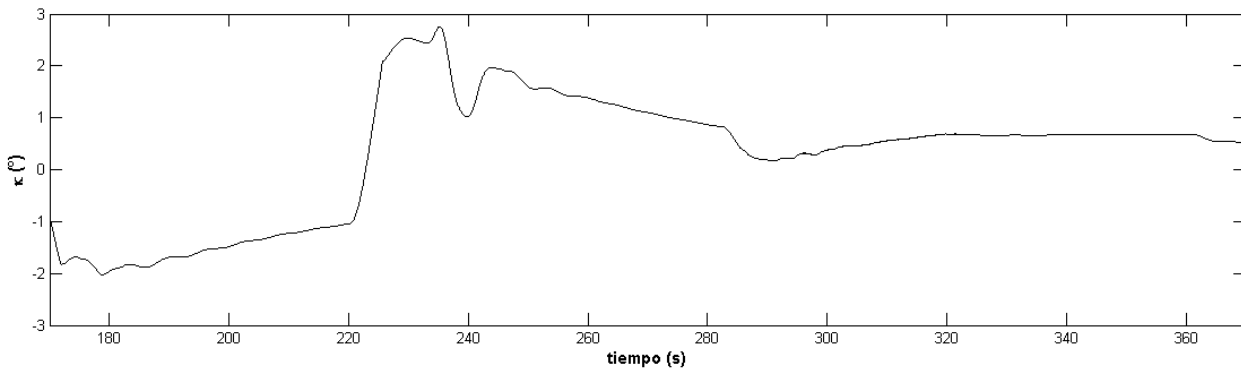


Figura 2.21: Ángulo de orientación del vector sobrecarga en la posición del *c.m.*

Ahora, se debe mostrar cómo cambia la orientación del vector sobrecarga, y es a través de la Figura 2.21 que se observa que el valor del ángulo κ varía en una región muy pequeña pues la trayectoria del *c.m.* de la aeronave está en la situación de vuelo lento. Así mismo, es

posible identificar que hay un intervalo de tiempo ($340 < t < 360$ s) para el cual $\kappa \approx 0$, esto indica que durante el vuelo lento, el avión entró en una situación de vuelo a altura fija, y se puede decir que alcanzó un valor casi constante en su aceleración .

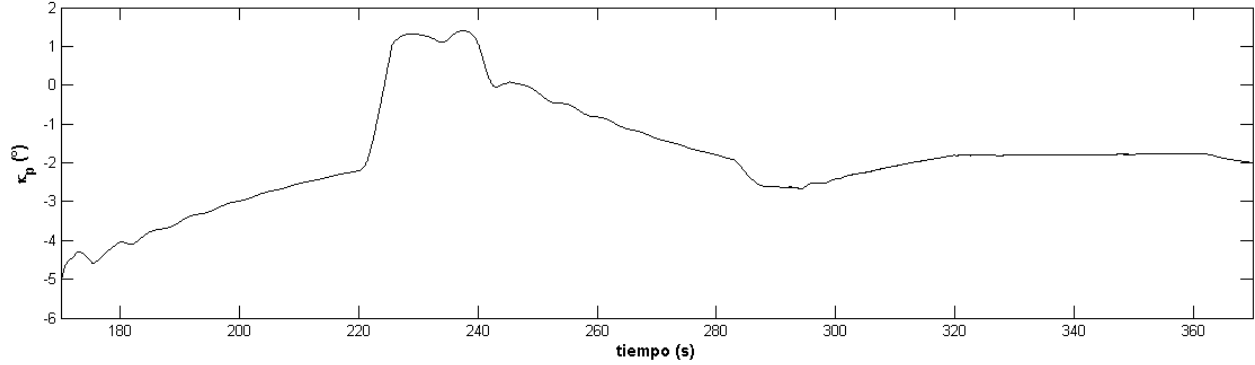


Figura 2.22: Ángulo de orientación del vector sobrecarga en la posición del piloto.

El ángulo de orientación, κ_p , del vector sobrecarga en la posición del piloto va a tener un comportamiento similar al establecido por κ . En la Figura 2.22 puede verse este comportamiento para la situación de movimiento lento de la trayectoria del vuelo simulado en la posición del piloto. La variación de κ_p es mayor a la de κ , puesto que están medidos en puntos distintos dentro de la aeronave, uno en la posición del piloto y el otro en la posición del *c.m.* del avión, respectivamente.

2.3. Algoritmo de simulación para el ángulo de orientación de sobrecarga en el plano vertical para vuelo lento

Una vez que se ha definido cómo cambia la orientación del vector de sobrecarga en la posición del piloto durante un vuelo, es necesario llevarlo a su representación a través del movimiento de la plataforma móvil de la PS. Esto es porque los algoritmos de simulación dinámica van a establecer de qué manera se tendrán los cambios en las longitudes de los actuadores para lograr el movimiento angular de la plataforma móvil, dejando fijo al centro geométrico de la PS.

La relación entre el ángulo de orientación del vector sobrecarga sobre la posición del piloto en la aeronave y sobre la posición del piloto en la PS, depende de cómo se mida con respecto a un eje de referencia en cada sistema. Para representar el ángulo de orientación del vector

sobrecarga a través de la PS, es necesario definir como van a ser medidos los ángulos de orientación del vector sobrecarga, puesto que la PS está fija a la Tierra.

La PS, en el plano vertical, la podemos ver como un sistema cartesiano, donde el eje x positivo apunta hacia la derecha de la plataforma móvil, mientras que el eje z positivo apunta hacia abajo, con el objetivo de que se tenga el mismo sistema que se tiene durante un vuelo simulado. Se muestra en la Figura 2.23 el ángulo κ_a , de orientación del vector de sobrecarga en el plano vertical, reflejado en la PS, y se debe definir la relación con el ángulo de inclinación de la plataforma móvil de la PS.

$$\kappa_s = -\kappa_a . \quad (2.27)$$

Donde κ_s es el ángulo de inclinación o de cabeceo, medido positiva en sentido contrario de las manecillas del reloj, desde el eje x_s de la plataforma.

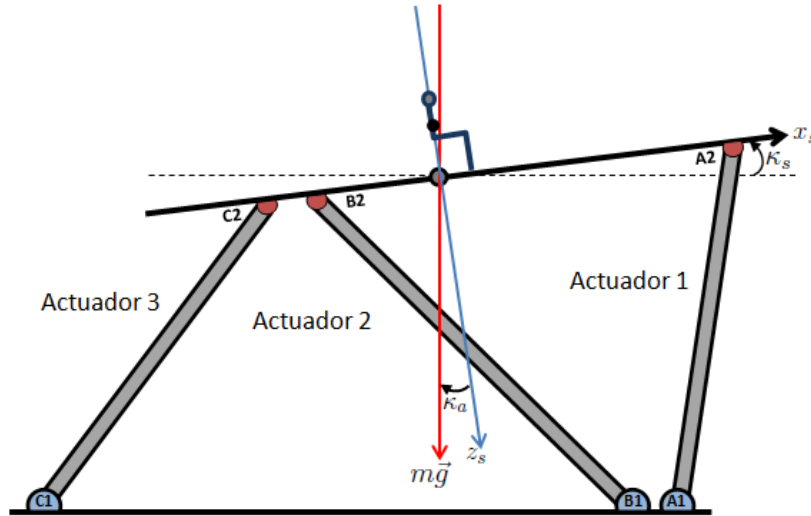


Figura 2.23: Configuración del sistema de referencia de la PS y los elementos de simulación dinámica de vuelo.

La razón por la cual es posible la igualdad (2.27) se debe a que, para un vuelo lento, la componente inercial del vector gravitoinercial cambia muy poco y su frecuencia es baja, por lo tanto, el vector sobrecarga no tiene variaciones tan grandes en su orientación en el plano vertical. La componente gravitacional está siempre presente, tanto en vuelo como en el simulador fijo al suelo. La relación matemática entre las aceleraciones que siente el piloto en vuelo y su representación mediante el cambio de inclinación de la plataforma móvil de la PS está dada por los valores de W^N y κ_s , de tal manera que cuando $W^N > 0$ entonces $\kappa_s > 0$, y para el evento donde $W^N < 0$ entonces $\kappa_s < 0$.

Para generar los cambios de inclinación de la plataforma móvil, κ_s , los actuadores deben

cambiar su longitud para extenderse o contraerse y lograr, mediante el movimiento coordinado de los 3 actuadores, el ángulo de cabeceo deseado.

La relación entre el ángulo de inclinación de la plataforma móvil y el ángulo de orientación del vector sobrecarga se da de la siguiente manera:

$$\kappa_s = -\arctan\left(\frac{n_x^p}{n_z^p}\right). \quad (2.28)$$

Donde $F_z^p > 0$ ($n_z^p < 0$), y se han definido siguientes criterios de simulación dinámica de vuelo lento:

1. Si la aeronave se encuentra acelerando, $F_x^p > 0$ ($n_x^p < 0$), entonces $\kappa_a < 0$, por lo tanto $\kappa_s > 0$.
2. Si la aeronave se encuentra desacelerando, $F_x^p < 0$ ($n_x^p > 0$), entonces $\kappa_a > 0$, por lo tanto $\kappa_s < 0$.

La manera de lograr la imitación de las aceleraciones presentes en vuelo resulta, de haber definido el vector sobrecarga, y de representar su orientación mediante la inclinación de la plataforma móvil de la PS. En la Figura 2.23, se muestra un vector apuntando hacia abajo sobre el eje z , representando la componente gravitacional del vector gravitoinercial, que siempre estará presente tanto en vuelo como en la superficie a la que esté fijada la PS.

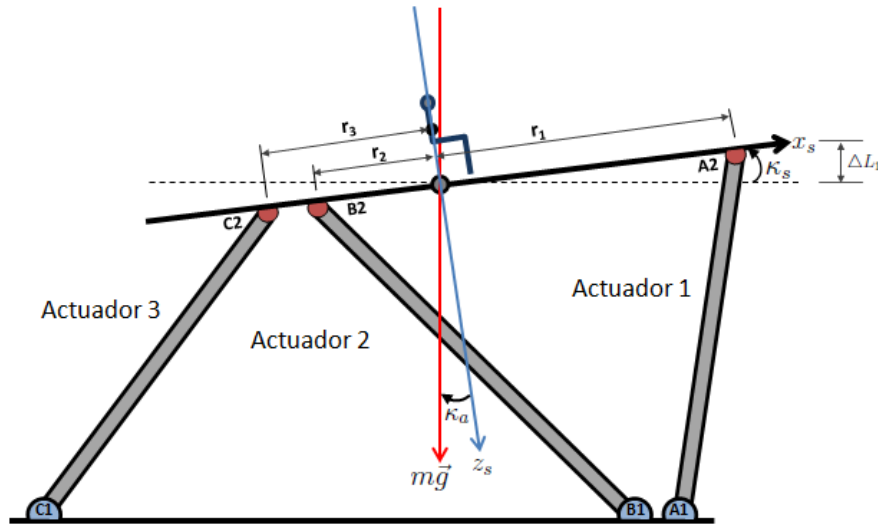


Figura 2.24: Esquema del cambio de longitud (ΔL) de los actuadores.

Se tomará en cuenta dos casos de la simulación de vuelo, y la relación (2.28). Los casos que se consideran son la situación de ascenso de la aeronave y el descenso.

- Ascenso: los Actuadores 1, 2 y 3 se deben mover de manera coordinada para lograr el cabeceo de la plataforma móvil, como lo muestra la Figura 2.24, dejando al centro geométrico fijo.

- Actuador 1:

$$\Delta L_1 = r_1 \sin(\kappa_s) = -r_1 \sin(\kappa_a), \quad (2.29)$$

$$\Delta L_1 = -r_1 \sin\left(\arctan\left(\frac{n_x^p}{n_z^p}\right)\right), \quad n_x^p < 0, F_x^p > 0 \quad (2.30)$$

Los Actuadores 2 y 3 (y sus cambios ΔL_2 y ΔL_3), están en el lado izquierdo de la plataforma móvil, tomando en cuenta que su centro geométrico es el origen del sistema de coordenadas de la PS, por lo que $r_{2,3} < 0$.

- Actuador 2:

$$\Delta L_2 = r_2 \sin(\kappa_s) = r_2 \sin(-\kappa_a) = -r_2 \sin(\kappa_a), \quad (2.31)$$

$$\Delta L_2 = -r_2 \sin\left(\arctan\left(\frac{n_x^p}{n_z^p}\right)\right), \quad n_x^p < 0, F_x^p > 0 \quad (2.32)$$

- Actuador 3:

$$\Delta L_3 = r_3 \sin(\kappa_s) = r_3 \sin(-\kappa_a) = -r_3 \sin(\kappa_a), \quad (2.33)$$

$$\Delta L_3 = -r_3 \sin\left(\arctan\left(\frac{n_x^p}{n_z^p}\right)\right), \quad n_x^p < 0, F_x^p > 0 \quad (2.34)$$

- Descenso: se tiene otro caso de simulación dinámica, que involucra la actitud de una aeronave cuando esta en descenso. En este caso, la plataforma móvil debe inclinarse de manera inversa al caso anterior, es decir, que tanto ΔL_1 como ΔL_2 y ΔL_3 , van a cambiar su longitud en sentido contrario.

- Actuador 1:

$$\Delta L_1 = -r_1 \sin \left(\arctan \left(\frac{n_x^p}{n_z^p} \right) \right), \quad n_x^p > 0, F_x^p > 0. \quad (2.35)$$

- Actuador 2:

$$\Delta L_2 = -r_2 \sin \left(\arctan \left(\frac{n_x^p}{n_z^p} \right) \right), \quad n_x^p > 0, F_x^p > 0. \quad (2.36)$$

- Actuador 3:

$$\Delta L_3 = -r_3 \sin \left(\arctan \left(\frac{n_x^p}{n_z^p} \right) \right), \quad n_x^p > 0, F_x^p > 0. \quad (2.37)$$

Las Ecs. (2.30) y (2.35) son totalmente iguales, así como (2.32) y (2.36), (2.34) y (2.37), y se puede ver que la variable que dicta el movimiento hacia arriba o hacia abajo de cada actuador, es el valor de n_x^p , pues cambia de signo dependiendo de la actitud de la aeronave durante el vuelo simulado.

Los valores de ΔL_j , $j = 1, 2, 3$, indican el cambio de longitud medidos a partir horizontal (línea punteada) que se muestra en la Figura 2.24, sin embargo, es necesario expresar la longitud efectiva de cada uno de los actuadores lineales a partir de la posición de inicio (Figura 2.3). En el Anexo C se presentan las ecuaciones para ΔL_j , $j = 1, 2, 3$ escritas para su aplicación desde el punto de vista ingeneril.

Para calcular las longitudes efectivas de los Actuadores 1, 2 y 3, se necesitará definir un esquema que indique relaciones vectoriales entre cada elemento de la PS, tomando como punto de referencia la plataforma fija.

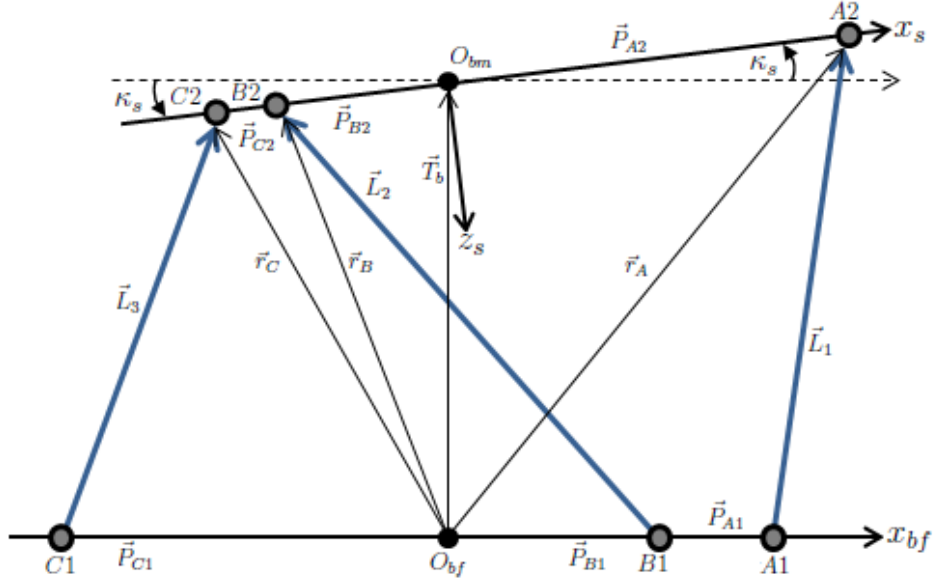


Figura 2.25: Esquema cinemático para longitudes efectivas de los actuadores lineales.

El cambio de ángulo de inclinación de la plataforma móvil, κ_s como se mencionó anteriormente, requiere tener un cambio de longitud de los actuadores de la PS, con respecto a la línea punteada horizontal de la Figura 2.25, donde los puntos $A2, B2$ y $C2$, son los puntos sobre la plataforma móvil que se deben mover a través del cambio de longitud efectiva de cada actuador. Considere que el vector columna \vec{L}_1 representa la longitud del Actuador 1 medida desde su unión a la plataforma fija, $A1$, hacia la junta en la plataforma móvil, $A2$; \vec{L}_2 representa la longitud del Actuador 2 uniendo los puntos $B1$ y $B2$; \vec{L}_3 representa al Actuador 3 al unir los puntos $C1$ y $C2$. La longitud efectiva se describe como la magnitud del vector de cada actuador. A continuación se presenta un análisis complementario, utilizado normalmente por los ingenieros especializados en el sistema de movimiento de un simulador de vuelo, que muestre cómo debe cambiar la longitud de cada actuador para alcanzar la inclinación requerida por la plataforma móvil.

Primeramente se analizará la longitud efectiva del Actuador 1, $|\vec{L}_1|$. Según el análisis cinemático, similar al realizado en [36, 38], con base en la Figura 2.25 y con ayuda de los datos mostrados en la Figura 2.24, se tiene que:

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_A - \vec{P}_{A1}, \quad (2.38)$$

donde \vec{r}_A es el vector que une al punto $A2$ con el origen del sistema de la plataforma fija, O_{bf} , dado por:

$$\vec{r}_A = \vec{T}_b + \left(\vec{R}_{rot} \right) \left(\vec{P}_{A2} \right), \quad (2.39)$$

siendo $\vec{P}_{A1} = \begin{bmatrix} x_{A1} & 0 & z_{A1} \end{bmatrix}^T$ el vector que une al punto $A1$ con el origen del sistema de la plataforma fija en el eje x_{bf} , $\vec{P}_{A2} = \begin{bmatrix} r_1 \cos \kappa_s & 0 & r_1 \sin \kappa_s \end{bmatrix}^T$ el vector que une al punto $A2$ con el origen del sistema de la plataforma móvil en el eje x_{bm} , $\vec{T}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_0 \end{bmatrix}^T$ el vector que une el origen de la plataforma fija, O_{bf} , con el origen de la plataforma móvil, O_{bm} , y \vec{R}_A es la matriz de rotación de la plataforma móvil relativa a la plataforma fija,

$$\vec{R}_{rot} = \begin{bmatrix} \cos \kappa_s & 0 & -\sin \kappa_s \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \kappa_s & 0 & \cos \kappa_s \end{bmatrix}$$

Entonces, la longitud del Actuador 1 es:

$$\vec{L}_1 = \vec{T}_b + \left(\vec{R}_A \right) \left(\vec{P}_{A2} \right) - \vec{P}_{A1}. \quad (2.40)$$

Ahora, desarrollando para \vec{L}_1 :

$$\begin{aligned} \vec{L}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \kappa_s & 0 & -\sin \kappa_s \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \kappa_s & 0 & \cos \kappa_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \cos \kappa_s \\ 0 \\ r_1 \sin \kappa_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{A1} \\ 0 \\ z_{A1} \end{bmatrix} \\ \vec{L}_1 &= \begin{bmatrix} r_1 \cos^2 \kappa_s - r_1 \sin^2 \kappa_s - x_{A1} \\ 0 \\ 2r_1 \sin \kappa_s \cos \kappa_s + h_0 - z_{A1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Los valores x_{A1} , z_{A1} son las coordenadas del punto $A1$ que son fijas en todo momento, mientras que el punto h_0 es la altura fija a la que está ubicado el centro geométrico de la plataforma móvil, O_{bm} . La longitud efectiva del Actuador 1 es:

$$\left| \vec{L}_1 \right| = \left((r_1 \cos^2 \kappa_s - \Delta L_1 \sin \kappa_s - x_{A1})^2 + (2\Delta L_1 \cos \kappa_s + h_0 - z_{A1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.41)$$

Para la longitud efectiva del Actuador 2, se tiene:

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_B + \vec{P}_{B1}, \quad (2.42)$$

$$\vec{r}_B = \vec{T}_b + \left(\vec{R}_{rot} \right) \left(\vec{P}_{B2} \right), \quad (2.43)$$

$$\vec{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\kappa_s & 0 & -\sin\kappa_s \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\kappa_s & 0 & \cos\kappa_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 \cos\kappa_s \\ 0 \\ r_2 \sin\kappa_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{B1} \\ 0 \\ z_{B1} \end{bmatrix}$$

$$\vec{L}_2 = \begin{bmatrix} r_2 \cos^2\kappa_s - r_2 \sin^2\kappa_s + x_{B1} \\ 0 \\ 2r_2 \cos\kappa_s \sin\kappa_s + h_0 + z_{B1} \end{bmatrix}$$

Los valores x_{B1} , z_{B1} son las coordenadas del punto $B1$, fijas en todo momento. La longitud efectiva del Actuador 2 es:

$$\left| \vec{L}_2 \right| = \left((r_2 \cos^2\kappa_s + \Delta L_2 \sin\kappa_s + x_{B1})^2 + (h_0 - 2\Delta L_2 \cos\kappa_s + z_{B1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.44)$$

La longitud efectiva del Actuador 3 se da como:

$$\vec{L}_3 = \vec{r}_C - \vec{P}_{C1}, \quad (2.45)$$

$$\vec{r}_B = \vec{T}_b + \left(\vec{R}_{rot} \right) \left(\vec{P}_{C2} \right), \quad (2.46)$$

$$\vec{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\kappa_s & 0 & -\sin\kappa_s \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\kappa_s & 0 & \cos\kappa_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_3 \cos\kappa_s \\ 0 \\ r_3 \sin\kappa_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{C1} \\ 0 \\ z_{C1} \end{bmatrix}$$

$$\vec{L}_3 = \begin{bmatrix} r_3 \cos^2\kappa_s - r_3 \sin^2\kappa_s - x_{C1} \\ 0 \\ 2r_3 \cos\kappa_s \sin\kappa_s + h_0 - z_{C1} \end{bmatrix}$$

Los valores x_{C1} , z_{C1} son las coordenadas del punto $C1$, fijas en todo momento. La longitud efectiva del Actuador 3 es:

$$\left| \vec{L}_3 \right| = \left((r_3 \cos^2\kappa_s + \Delta L_3 \sin\kappa_s - x_{C1})^2 + (h_0 - 2\Delta L_3 \cos\kappa_s - z_{C1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.47)$$

Al tener el valor de las longitudes efectivas de los actuadores de la PS, se podrá generar el ángulo de inclinación, κ_s , de la plataforma móvil que se aproxime al ángulo de orientación del vector sobrecarga presente en el vuelo simulado.

Como se mostró en la sección anterior de este capítulo, de los datos de la trayectoria de movimiento en el plano vertical obtenidos de la simulación de vuelo, y con ayuda de las Ecs. (2.28) y (2.28) se obtiene el valor para el cambio del ángulo de inclinación de la plataforma móvil de la PS.

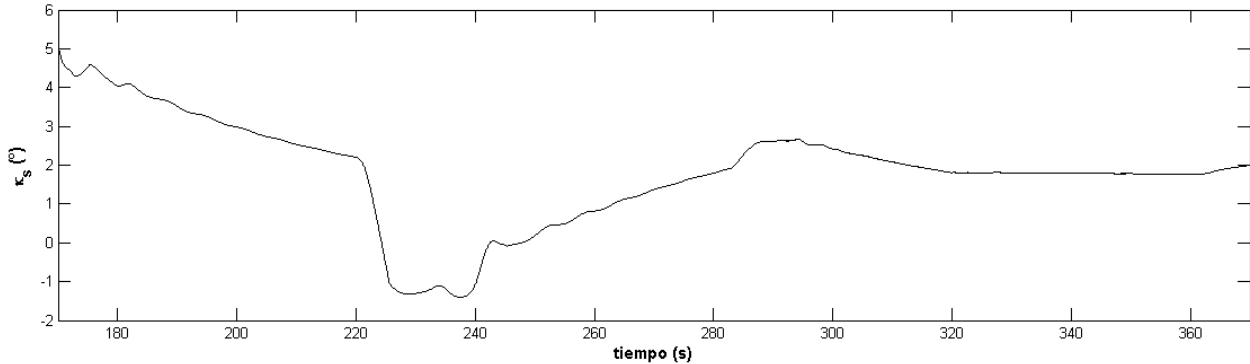


Figura 2.26: Ángulo de inclinación de la plataforma móvil en el plano vertical.

La Figura 2.26 muestra cómo es el cambio del ángulo de cabeceo de la PS, κ_s , que indica inclinación del vector sobrecarga en la posición del piloto dentro de la aeronave durante el vuelo simulado. Esto es posible ya que se estableció el planteamiento matemático dado por (2.27). El rango que ocupa el ángulo κ_s , está dentro de la región establecida por (2.1) en la sección 2.1, por lo tanto se cumple que, para movimientos lentos, la inclinación de la plataforma móvil de la PS puede representar la orientación del vector sobrecarga en la posición del piloto dentro de la aeronave durante un vuelo sin perturbaciones.

Sin embargo, es posible identificar ciertas regiones de la Figura 2.26 en donde el cambio del ángulo κ_s tiene variaciones pronunciadas. Esto es un indicio de que no siempre se tendrá la representación de la orientación del vector sobrecarga mediante el cambio de ángulo de cabeceo de la plataforma móvil (movimiento lento), razón por la que será necesario implementar el otro recurso geométrico de la plataforma, el cambio de altura por línea vertical, para que sea posible generar los movimientos rápidos que requiere la simulación dinámica de vuelo en el plano vertical.

Pruebas realizadas en la PS de INAOE

Como parte del trabajo de esta tesis, se tuvo la oportunidad de probar el algoritmo de cambio de ángulo de inclinación en una plataforma de Stewart, propiedad del Instituto Na-

cional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE). Esta plataforma es parte del simulador de vuelo que en ese instituto se está construyendo. Para comprobar que se efectúa el cambio de ángulo de inclinación, se introdujeron los datos angulares, correspondientes a los cálculos de la Ec. (2.28), al sistema de control de la plataforma de Stewart de INAOE, y con ayuda de una Unidad de Medición Inercial (IMU, por sus siglas en inglés) de 3 *gdl* montada en el centro geométrico de la PS, se logró obtener la respuesta de la PS a los cambios de ángulo de inclinación teóricos. En la Figura 2.27 se muestra los datos capturados por la IMU MotionNode [16], que se pueden comparar con los cálculos teóricos de la Ec. (2.28) presentados en la Figura 2.26.

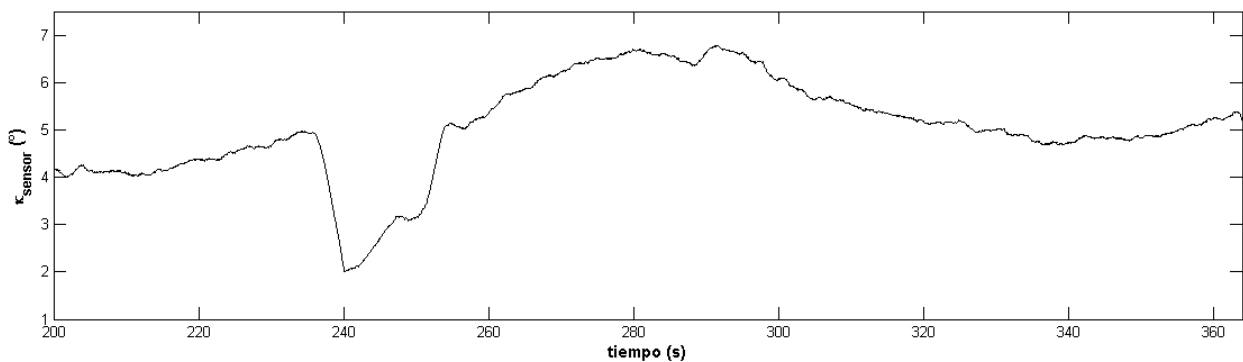


Figura 2.27: Datos de salida del sensor MotionNode para el ángulo de inclinación de la PS de INAOE.

Para comparar los datos calculados y los datos experimentales, se estableció una prueba estadística para corroborar si los conjuntos de datos, para κ_s (teórico) y κ_{sensor} (experimental), graficados en las Figuras 2.26 y 2.27, respectivamente, tienen buen ajuste. Se realizó la prueba estadística de Kolmogorov-Smirnov implementada en MATLAB² tomando en cuenta todo el intervalo de datos para esas dos gráficas. La función $h = kstest2(x1, x2)$, hace una prueba de Kolmogorov-Smirnov para dos muestras de datos, es implementada en MATLAB, y da como resultado una decisión de prueba para la hipótesis nula de que los datos de los vectores $x1$ y $x2$ pertenecen a la misma distribución continua. La hipótesis alternativa es que $x1$ y $x2$ son de diferentes distribuciones continuas. El resultado es $h = 1$ si la prueba rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia de 5 %, y $h = 0$ en otro caso.

Dados los datos graficados en las Figuras 2.26 y 2.27, al aplicar la prueba de Kolmogorov-Smirnov a esas muestras de datos, se obtuvo el resultado de $h = 1$, lo que nos indica que para el 5 % de significancia, los valores vienen de una misma distribución, y se puede argumentar que la plataforma móvil de la PS de INAOE reproduce en buena medida el algoritmo de simulación

²http://www.mathworks.com/help/stats/kstest2.html?searchHighlight=kstest2#btn1_1d-1

para el cambio de ángulo de inclinación, es decir, el algoritmo de simulación para movimientos lentos. El resultado mostrado en la gráfica anterior es adicional a los resultados mostrados en este capítulo. Los datos que se muestran fueron obtenidos con ayuda del personal propietario de la plataforma de Stewart que es el sistema de movimiento del simulador de vuelo propiedad de INAOE.

Por otro lado, la sincronización para los cálculos de los algoritmos y el movimiento de la plataforma, debe realizarse en tiempo real. Es necesario que, dentro del sistema del simulador de vuelo, se cuente con equipos de cómputo capaces de hacer esta tarea, es decir, con buen rendimiento de su sistema operativo. Sin embargo, siempre existen retrasos dados por el hardware del sistema, por lo que es necesario que los algoritmos de simulación dinámica se calculen de tal manera que se conozca con anticipación el siguiente paso a realizarse por la PS. Todo esto se lleva a cabo gracias a la integración de todos los sistemas físicos del simulador de vuelo, en donde se establecen protocolos de comunicación, diversos componentes de hardware, así como el uso de *timers* (relojes) y la implementación de protocolos de comunicación (como HLA, Telenet, SSH, RPC y ZMQ). La sincronización de datos está fuera del alcance de este trabajo de tesis, pero no se excluye en la construcción de un simulador de vuelo, y deben realizarse diversas y amplias pruebas para obtener las simulaciones deseadas para el entrenamiento de piloto.

Datos del sensor MotionNode

Es una IMU de 3 *gdl* para su uso en aplicaciones de medición de movimiento. Este sensor es pequeño, fácil de usar, y proporciona resultados precisos de orientación. Tiene como características principales, las siguientes:

- Pequeño en dimensiones, minimiza la interferencia con el movimiento natural.
- Datos de salida en un rango completo de 360°, en todos los ejes.
- Preciso, rastreador de movimiento de propósito general.
- Conexión USB simple.
- Fácil de usar y de integrar a diversas aplicaciones.
- Incluye software para configuración del sensor, lectura de datos, y exportar datos capturados.
- Soluciones integradas completamente de acelerómetro, giróscopo, y magnetómetro.
- Excelente plataforma para investigación y desarrollo.

El dispositivo MotionNode, Figura 2.28, contiene nueve sensores de alta calidad para estimar una orientación estable y precisa. Un acelerómetro (mide aceleración lineal), un giróscopo (mide velocidad angular) y un magnetómetro (mide la intensidad del campo magnético) aportan datos en tiempo real para cada uno de sus tres ejes.

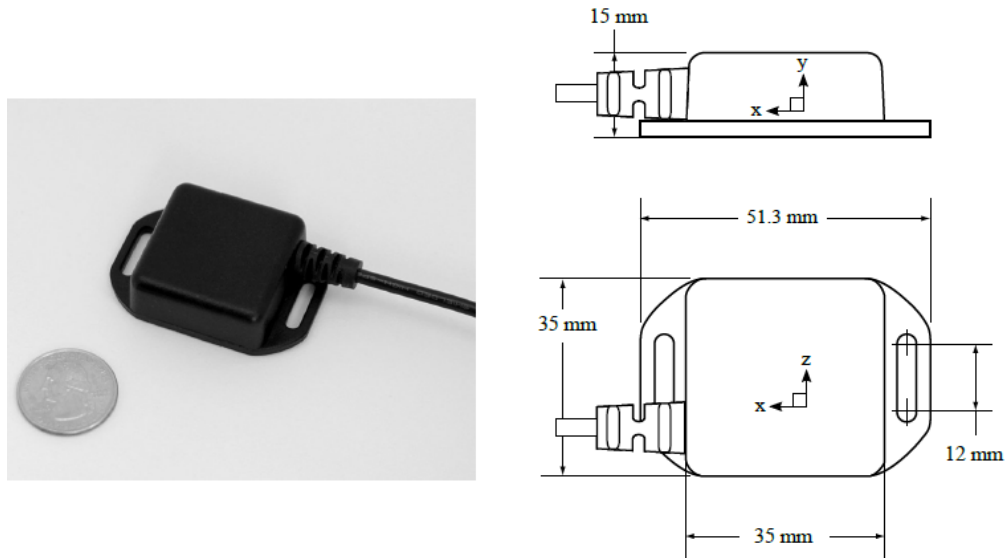


Figura 2.28: Características geométricas del sensor MotionNode.

Capítulo 3

Algoritmo de simulación de la componente rápida de sobrecarga

En el capítulo anterior, se ha discutido sobre la simulación de la componente lenta de la trayectoria de vuelo, que se basa en el uso del algoritmo para el cambio de ángulo de inclinación de la plataforma móvil de la PS. Se identificaron zonas en las que ese algoritmo no podrá imitar las sensaciones que el piloto experimenta durante un vuelo, por lo tanto, es conveniente hablar acerca de otro movimiento generado por la plataforma.

El movimiento en cuestión, será aquel que realice desplazamientos lineales del centro geométrico de la plataforma móvil, sobre una línea vertical, en el eje z del sistema de referencia montados sobre la plataforma fija de la PS. La razón por la cual esta opción es necesaria es porque, adicional al movimiento lento del *c.m.* de la aeronave durante la trayectoria de vuelo, se tienen movimientos rápidos que representan aceleraciones con valores más grandes y en un tiempo más corto, lo cual implica que el vector sobrecarga tendrá variaciones más pronunciadas y se requerirá que la plataforma móvil de la PS trate de replicar esos movimientos.

En este capítulo, se trabajará con el segundo recurso geométrico de la PS, que puede darse de dos maneras para lograr la imitación de vuelo en el plano vertical:

1. Que el centro geométrico de la plataforma móvil de la PS se mueve únicamente en línea vertical (Figura 2.4);
2. Que la plataforma móvil tenga una inclinación, dada por la Ec. (2.28), y que a partir de esta posición, el centro geométrico se desplace en línea vertical, es decir, tener el movimiento combinado y ocupar todo el recurso geométrico reducido de la Figura 2.7.

Se describirá más adelante, que se necesita la representación de movimientos rápidos a través de la variación en la longitud de los actuadores lineales de la plataforma para que, en con-

junto, muevan verticalmente el centro geométrico de la plataforma móvil de la PS. Para esta situación n_z es la componente a seguir, puesto que tiene cambios sustanciales en su valor.

3.1. Descripción de los movimientos rápidos del vector sobrecarga en el plano vertical

En el Capítulo 2 se mostró un análisis para la trayectoria de movimiento del *c.m.* correspondiente a un vuelo simulado de un avión de carga, en donde se identificaron las zonas de movimiento lento. Ahora, utilizando ese mismo vuelo simulado, se identificarán las zonas en donde existen movimientos rápidos, es decir, cambios pronunciados en la orientación del vector sobrecarga en la posición del piloto. Estos movimientos se conocen como movimientos relativos, y para el problema de esta tesis, dependen en gran medida de la variación del valor de la aceleración angular de la posición del piloto relativa al *c.m.* de la aeronave, dada por $\ddot{\alpha}$

3.1.1. Análisis de la trayectoria de vuelo en el plano vertical para movimientos rápidos de la aeronave

Para las situaciones de vuelo normales, es decir, sin perturbaciones en la atmósfera, los movimientos rápidos de una aeronave son causados por varias razones. Las principales son las siguientes:

- Despegue: durante el despegue cabe la posibilidad de que se tengan perturbaciones debidas al ángulo de ataque con el que la aeronave está ascendiendo. En gran medida depende de cómo el piloto conduzca su avión.
- Aterrizaje: en el momento del contacto con la pista, el avión resiste el choque de los neumáticos con el pavimento, esto genera un cambio brusco en la aceleración que percibe el piloto.
- Cambios en regímenes de vuelo: se deben a una maniobra mal realizada por el piloto cuando el aeroplano está a cierta altitud. Los giros muy pronunciados, normalmente en alabeo, son un buen ejemplo para esta situación.

En todas las situaciones anteriores, la componente en z del vector sobrecarga es la que más se ve afectada por esta condición. Esto es porque la simulación de vuelo que se está analizando es la del plano vertical.

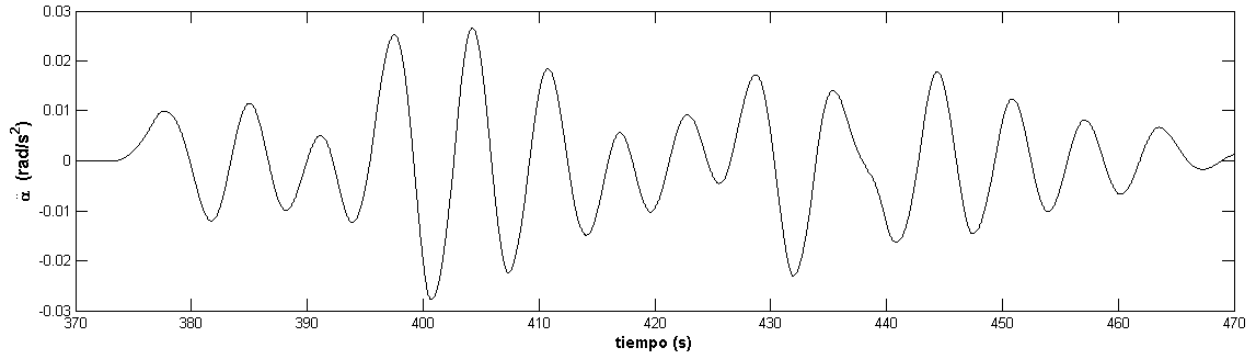


Figura 3.1: Comportamiento de la componente z de la aceleración durante el aterrizaje de la aeronave.

Si se presentan valores de la aceleración relativa del $c.m.$, como se ve en el ejemplo de la Figura 3.1, es posible hablar de la componente rápida de la trayectoria de vuelo de una aeronave. Esta situación se presenta cuando se tienen cambios de régimen de vuelo, es decir, que el piloto ha realizado maniobras con los controles de la aeronave, de tal suerte que ésta tiene movimientos bruscos y ocasiona que se tengan movimientos relativos de su $c.m.$ Cuando se tiene esta situación el valor de sobrecarga puede alcanzar valores muy altos, y se vuelve complicado para el algoritmo de simulación de movimiento lento, presentado en el Capítulo 2, generar los movimientos en la PS. Esto quiere decir que el cambio del ángulo de inclinación de la plataforma móvil de la PS no es suficiente para generar los estímulos adecuados al piloto que corresponden a la situación de vuelo rápido que se esté simulando.

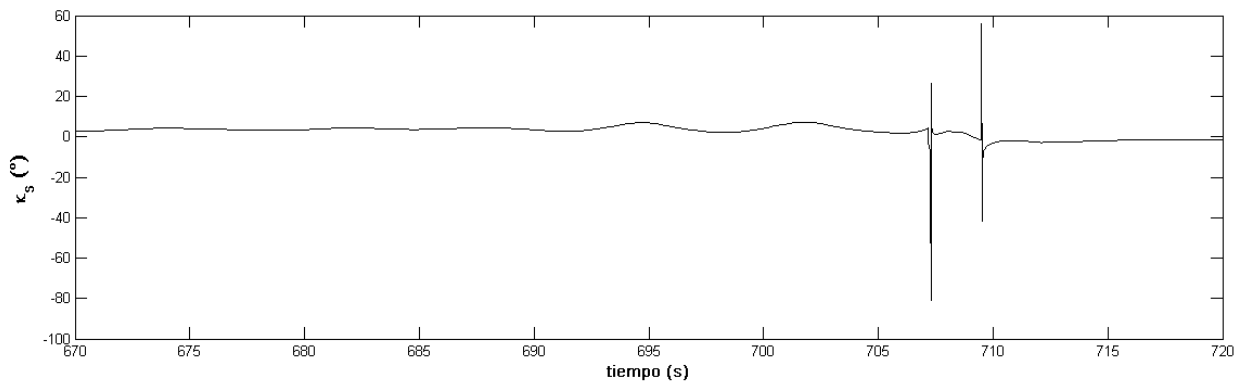


Figura 3.2: Comportamiento de κ_s en la situación de movimientos rápidos.

Como puede observarse en la Figura 3.2, se visualiza el momento de contacto con la pista ($t = 707s$), y se alcanza un valor angular de κ_s muy alto y en un intervalo pequeño. Es posible que, si se utiliza únicamente el cambio de inclinación de la plataforma móvil, el piloto no podrá adquirir toda la información del vuelo simulado correctamente. Recuerde que κ_s

representa la orientación del vector sobrecarga para la situación de movimiento lento, pero como se expuso anteriormente, el valor del vector sobrecarga cambia con mayor frecuencia, y por consecuencia, el ángulo de inclinación de la plataforma móvil también experimentará esos cambios y de manera rápida.

Uno de los factores del vuelo de un avión que hace posible la presencia de movimientos rápidos es el cambio del ángulo de ataque, α . Este cambio, cuando no se tienen perturbaciones atmosféricas, es debido a los cambios de velocidad del *c.m.* de la aeronave, y este cambio de velocidad provoca que se tengan variaciones en el ángulo α para conservar su movimiento en el plano vertical.

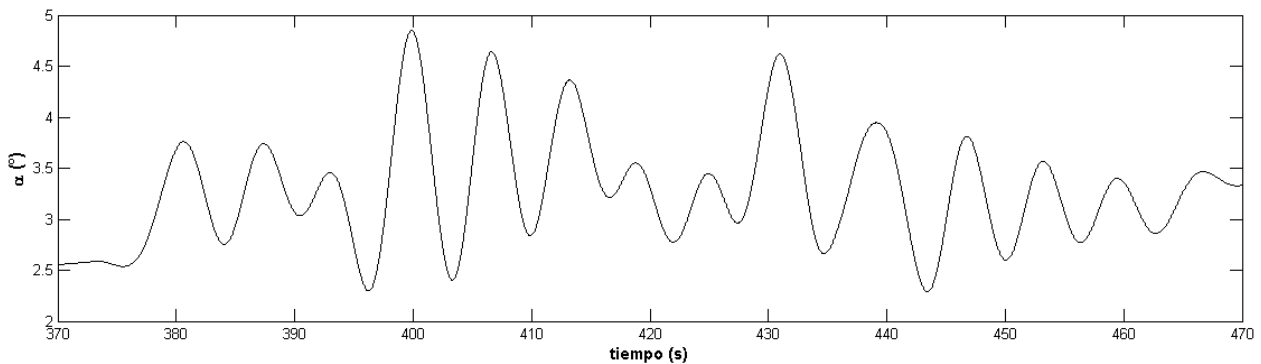


Figura 3.3: Valores del ángulo de ataque y velocidad angular de ataque.

Si se presentan cambios en el valor del ángulo de ataque con respecto al tiempo, existirá velocidad angular, $\dot{\alpha}$, y seguramente se observarán aceleraciones angulares, $\ddot{\alpha}$. En la Figura 3.3 se muestra un evento en el que los cambios del ángulo de ataque, α , se deben a movimientos propiciados por el piloto, es decir, que no tuvo un buen control de la aeronave y su velocidad se incrementó repentinamente. El comportamiento de α también puede ser ocasionado por el mal uso de los controles de vuelo de la aeronave, sin incrementar su velocidad. Normalmente, los piloto se deben entrenar en un simulador de vuelo para evitar, a toda costa, situaciones de vuelo en las que pierdan el control debido a un manejo ineficiente.

Es por esto que zonas, así como las que se presentan en la Figura 3.2, requieren que se utilice otro movimiento de la PS para imitar fielmente la actuación del vector sobrecarga en la posición del piloto. Una vez más, es necesaria la construcción de un algoritmo que ayude a representar estas aceleraciones y se imiten las sensaciones que el piloto percibe en vuelo.

3.1.2. Descripción de la región de desplazamientos disponibles de la plataforma de Stewart para movimientos rápidos verticales

El rango de movimiento para la parte rápida de sobrecarga corresponderá a dos posibles situaciones. La primera se presenta cuando κ_s se mantiene fijo dentro del rango $\kappa_{min} < \kappa_s < \kappa_{max}$ y el centro geométrico de la plataforma debe moverse sobre una línea vertical, hacia arriba y hacia abajo en $h_{min} < h_0 < h_{max}$; la segunda opción consiste en que κ_s esté variando dentro del rango $\kappa_{min} < \kappa_s < \kappa_{max}$, y el centro geométrico tenga libertad de moverse sobre una línea vertical cuando $h_{min} < h_0 < h_{max}$.

Si $\kappa_s = 0$ la plataforma móvil, según el espacio reducido de trabajo, va a moverse en todo el rango de movimiento definido para el cambio de altura del centro geométrico de la plataforma. El punto inicial de toda simulación está en $\kappa_s = 0$ y $h = h_0 = 2.5$, entonces es posible cambiar la altura del centro geométrico entre $2.3 < h < 2.9 m$. Sin embargo, si se elige un valor para $\kappa_s \neq 0$ y que sea fijo, también es posible alcanzar el mismo rango de movimiento para h , puesto que el espacio de estados posibles del movimiento del centro geométrico de la PS, así lo permite.

Sin embargo, para una simulación dada, κ_s no necesariamente puede quedarse en un valor fijo, sino que puede estar cambiando, al mismo tiempo que lo hace el valor de h . El cambio de posición del centro geométrico de la plataforma móvil será controlado por el cambio en los valores de las dos variables que se han mencionado en este capítulo, κ_s y h . Para los desplazamientos por línea vertical, los actuadores deben modificar su longitud y cambiar la altura del centro geométrico para obtener el movimiento (ideal).

Para simular los movimientos rápidos de vuelo, el centro geométrico de la plataforma debe estar aumentando y disminuyendo su altura por línea vertical, al mismo tiempo que el ángulo de inclinación de la plataforma móvil varía. Al final del Capítulo 3 se retomará esta afirmación.

3.2. Planteamiento matemático de simulación dinámica de $|\vec{n}|$ para movimientos rápidos.

El problema de imitación dinámica de vuelo para el piloto cuando se tienen movimientos rápido, se puede ver como una composición de dos movimientos, el primero como movimiento cuasiestacionario (movimiento lento) y el segundo es relativo, mediante la variación de ángulos pequeños [5].

1. Movimiento cuasiestacionario: es el movimiento lento que se ha tratado en el Capítulo
2. El movimiento del cuerpo del piloto, relativo al *c.m.* de la aeronave es muy muy

pequeño, y casi nulo para las situaciones de vuelo estable, por ejemplo, cuando se tiene una altitud fija.

2. Movimiento relativo: se trata del movimiento rápido. En el plano vertical, el cuerpo del piloto estará moviéndose, relativo al *c.m.* de la aeronave, a través de variaciones angulares pequeñas, pero que son percibidas por los órganos sensoriales del piloto.

En la Figura 3.4 es la representación de cómo se pueden dar estos cambios en el movimiento relativo. Se tiene el sistema de referencia C_{x_b, y_b, z_b} como el centro de masas del avión, y el punto N_{x_b, y_b, z_b} que representa al centro de masas del cuerpo del piloto.

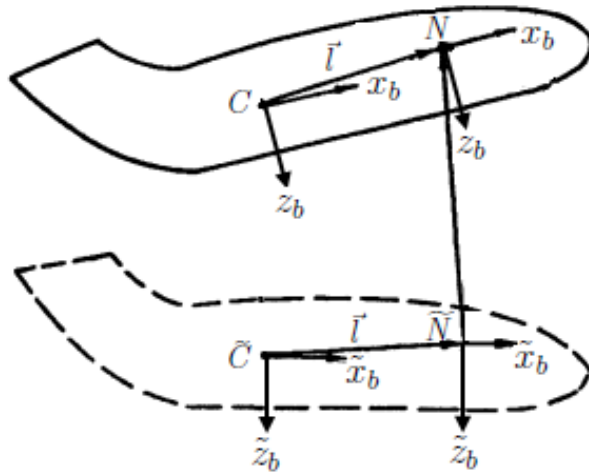


Figura 3.4: Sistema de coordenadas para describir el movimiento angular relativo [5].

En el plano vertical, los movimientos de tipo rápido se dan cuando en punto N viene variaciones angulares, y su giro se da relativo al punto C en la aeronave. Este giro se realiza alrededor del eje y_b , y se corresponde con el ángulo de ataque, α , que es un ángulo aerodinámico presente en las ecuaciones de movimiento de la aeronave. Entonces, para un cambio debido a α , el sistema de coordenadas N_{x_b, y_b, z_b} se transforma en el sistema $\tilde{N}_{\tilde{x}_b, \tilde{y}_b, \tilde{z}_b}$, suponiendo que $C_{x_b, y_b, z_b} = \tilde{C}_{\tilde{x}_b, \tilde{y}_b, \tilde{z}_b}$, es decir, que el *c.m.* de la aeronave no va a tener variaciones considerables. Por lo tanto, si α se altera durante periodos cortos, tenemos velocidades y aceleraciones angulares dadas por el ángulo de ataque, que van a estar presentes en el punto N , y que difieren en valor con las velocidades y aceleraciones del punto C .

En el Capítulo 2 se estableció que las aceleraciones en el centro de masas del cuerpo del piloto, N , están dadas por:

$$\vec{W}^N = \vec{W}^C + \vec{W}^\alpha, \quad (3.1)$$

y se mencionó que $\vec{W}^\alpha \approx 0$. Esto porque no existían movimientos bruscos que propiciaran diferencias en los valores de aceleración entre la posición del piloto y el *c.m.* de la aeronave. Esta suposición sólo está presente en zonas de vuelo estable, lo que se ha nombrado como movimientos lentos, o componente lenta del vector sobrecarga, y su propuesta de solución está representada por la Ec. (2.26). Sin embargo, siempre existen zonas en las que no se cumplirá esta situación puesto que $\vec{W}^\alpha \neq 0$, y se vuelve obligatorio añadir otro factor de simulación al planteamiento matemático presentado en el capítulo anterior.

En la Ec. (3.1), \vec{W}^C es la aceleración que está presente en el punto *C* vista desde un sistema de referencia fijo en la Tierra, es decir, es la aceleración del *c.m.* de la aeronave vista como un cuerpo rígido, \vec{W}^N es la aceleración del punto *N* vista desde el mismo sistema de referencia con que se evalúa a \vec{W}^C . En [17] se indica que la única diferencia entre \vec{W}^C y \vec{W}^N , es el valor de \vec{W}^α , que es la aceleración causada por la propia rotación del cuerpo, medida desde el punto *C*. La rotación se dará a lo largo del eje y_b por medio del ángulo α . El valor de la aceleración angular \vec{W}^α , relativa al punto *C* (*c.m.* de la aeronave), está dado por:

$$\vec{W}^\alpha = \frac{d^2}{dt^2} \vec{l}. \quad (3.2)$$

Donde \vec{r}_p es el vector que ubica al punto *N* respecto de *C*, y siempre se considera fijo al cuerpo rígido (la aeronave) para efectos prácticos de la simulación de vuelo que se presenta en este trabajo de tesis, \vec{W}^α representa las aceleraciones angulares debidas a la aerodinámica del avión (Figura 2.13) durante la trayectoria de vuelo.

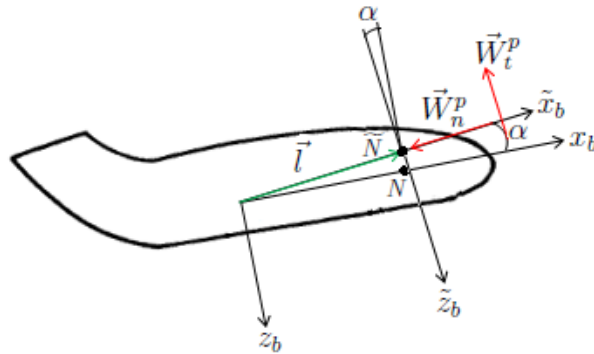


Figura 3.5: Determinación de la aceleración del punto *N* relativa al *c.m.*

En la Figura 3.5 el vector \vec{l} está dado, para el plano vertical, por:

$$\vec{l} = l \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Donde α es el ángulo de ataque y l es el valor de la distancia absoluta entre el punto N y el punto C en la aeronave. Luego,

$$\frac{d}{dt}\vec{l} = l\dot{\alpha} \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

y por último,

$$\vec{W}^\alpha = \frac{d^2}{dt^2}\vec{l} = \begin{bmatrix} -l\ddot{\alpha}\sin\alpha - l\dot{\alpha}^2\cos\alpha \\ 0 \\ l\ddot{\alpha}\cos\alpha - l\dot{\alpha}^2\sin\alpha \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

A su vez, \vec{W}^α puede separarse en dos elementos, como sigue:

$$\vec{W}^\alpha = \vec{W}_n^\alpha + \vec{W}_t^\alpha = l\dot{\alpha}^2 \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ 0 \\ -\sin\alpha \end{bmatrix} + l\ddot{\alpha} \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

El primer término del lado derecho en la Ec. (3.6), representa la aceleración normal o centrípeta, \vec{W}_n^α , mientras que el segundo término se conoce como aceleración tangencial, \vec{W}_t^α . Se puede ver que la componente normal tiene la misma dirección (radial) que el vector \vec{l} en (3.3), pero tiene sentido opuesto y actúa a lo largo del vector que une al punto N con el punto C ; la componente tangencial de (3.6) tiene la misma dirección que la velocidad (3.4), que es tangencial a la trayectoria del punto N . Por lo tanto, para la construcción del algoritmo de simulación para movimientos rápidos, se utilizará únicamente la componente tangencial de (3.6), además, el valor $l\ddot{\alpha}$ cambia más rápido. La componente normal de \vec{W}^α contiene el valor $l\dot{\alpha}^2$ que, adicionalmente a lo que se ha comentado, genera un aumento muy pequeño en el valor del módulo del vector sobrecarga, pero sí afecta en mayor medida la orientación de \vec{n}^p .

La Ec. (3.1) nos proporciona datos para la aceleración que siente el piloto, medidas respecto al punto C de la aeronave. La simulación dinámica de movimientos rápidos también requiere la construcción del vector sobrecarga para esta situación, en la posición del piloto, el cual está dado como:

$$\vec{n}^p = \vec{n}^C + \frac{1}{g_0} \vec{W}^\alpha, \quad (3.7)$$

y de acuerdo con las Ecs. (2.8) y (2.14) se tiene que:

$$\vec{n}^p = \frac{1}{g_0} \left(\vec{W}^C - \vec{g} \right) + \frac{1}{g_0} \vec{W}^\alpha. \quad (3.8)$$

Si se considera que el valor del ángulo de ataque, α , es muy pequeño, entonces $\dot{\alpha}^2 \approx 0$ en la Ec. (3.5), entonces:

$$\vec{n}^p = \begin{bmatrix} n_x^C - \frac{l\ddot{\alpha} \sin \alpha}{g_0} \\ 0 \\ n_z^C + \frac{l\ddot{\alpha} \cos \alpha}{g_0} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Recordar que \vec{n}^p es el vector sobrecarga en la posición del piloto (N) durante el vuelo simulado, y que se construyó en el Capítulo 2 para el planteamiento matemático de la simulación dinámica de vuelo para movimientos lentos. Nuevamente \vec{n}^p tendrá que ser usado para el planteamiento matemático de simulación de vuelo para movimientos rápidos.

La Ec. (3.9) contiene dos componentes para el plano vertical, n_x^p y n_z^p , que van cambiando conforme avanza la simulación de vuelo y deberán ser representadas por el movimiento de la PS. De los recursos geométricos de la plataforma, descritos en la Sección 3.1, primeramente se utilizará el desplazamiento por línea vertical, es decir, el centro geométrico de la plataforma debe modificar sus valores para trasladarse verticalmente sobre el eje z del sistema de referencias del cuerpo de la PS. La PS no puede desplazarse en su eje longitudinal (x) porque está fija a una superficie rígida, la plataforma móvil se desplaza en x , pero sus limitaciones son tan grandes que no permiten organizar movimientos importantes en este eje. A causa de esta situación, el planteamiento matemático para los movimientos rápidos del vector sobrecarga representados por la PS, estarán acotados a los valores de la componente n_z^p .

Si se supone que $\sin \alpha \approx 0$ y $\cos \alpha \approx 1$, en la Ec. (3.9), se tiene:

$$\vec{n}^p = \begin{bmatrix} n_x^C \\ 0 \\ n_z^C + \frac{l\ddot{\alpha}}{g_0} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Entonces, el módulo del vector sobrecarga se encuentra como:

$$|\vec{n}^p| = \left((n_x^C)^2 + \left(n_z^C + \frac{l\ddot{\alpha}}{g_0} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.11)$$

y

$$|\vec{n}^p| = |\vec{n}^C| + \Delta n = |\vec{n}^C| + \frac{l n_z^C}{g_0} \ddot{\alpha}. \quad (3.12)$$

Donde $|\frac{l n_z^C}{g_0} \ddot{\alpha}| < |\vec{n}^C|$. Además $\ddot{\alpha}$ representa cambios en la posición del piloto relativos al *c.m.* de la aeronave, lo que significa que el piloto se podrá percatar de este tipo de movimiento que se considera como rápido. Las señales debidas a aceleraciones del tipo (3.16) en la PS, son adquiridas por los sensores biológicos [15] del piloto como aceleraciones lineales, por lo tanto, los sensores biológicos que actúan en este tipo de eventos son los órganos otolíticos. La Ec. (3.12) representa la simulación del decremento del módulo de sobrecarga en el plano vertical [5].

Si se compara $|\vec{n}^p|$ para movimientos lentos data en la Ec. (2.14) contra la situación de movimientos rápidos en (3.9), se identifica que la diferencia entre ellos es la variación en la aceleración angular, $\ddot{\alpha}$, es decir, los movimientos *relativos* al punto *C* en la aeronave, dado que el valor del ángulo de ataque durante un vuelo no es muy grande para el tipo de avión que se está analizando, entonces es posible utilizar los valores que contengan $a\ddot{\alpha}$ y representarlos directamente mediante el movimiento de la plataforma móvil de la PS, utilizando la siguiente relación proveniente de (3.12):

$$|\vec{n}^p| \approx \frac{l n_z^C}{g_0} \ddot{\alpha} \longrightarrow \Delta \ddot{h} = g_0 |\vec{n}^p| \quad (3.13)$$

de donde se obtiene el siguiente planteamiento:

$$\Delta \ddot{h} = n_z^C l \ddot{\alpha}. \quad (3.14)$$

Donde $\Delta \ddot{h}$ se interpretará como la aceleración lineal del centro geométrico de la plataforma móvil a medida que cambia el valor de la aceleración angular (tangencial) de ataque de la aeronave, $\ddot{\alpha}$, durante un vuelo simulado.

Respecto al recurso geométrico de la PS, el centro geométrico de la plataforma móvil debe moverse dentro de una región limitada.

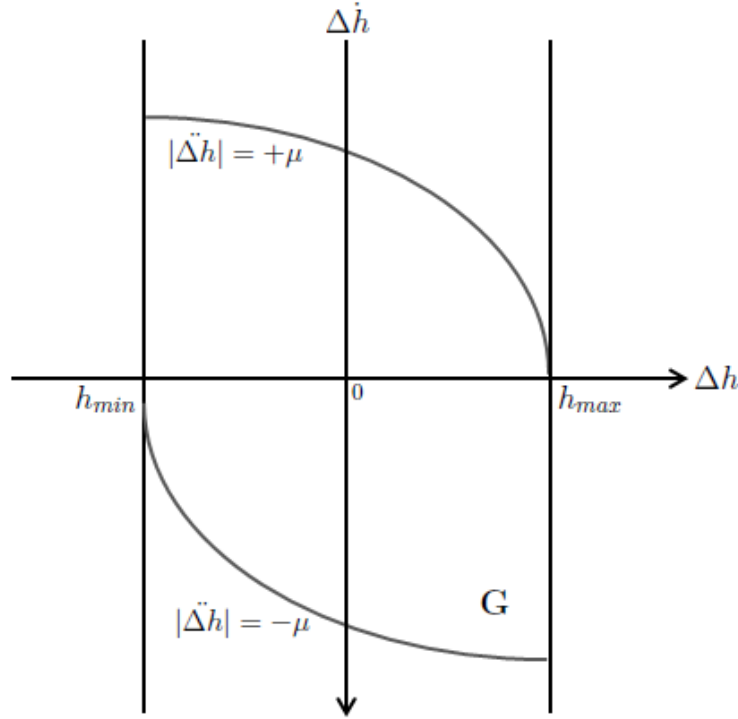


Figura 3.6: Región de trabajo para el algoritmo de movimientos rápidos y retorno a la posición de inicio.

En la Figura 3.6 se representa, en el espacio de estados, los alcances que debe tener el movimiento del centro geométrico de la plataforma móvil de la PS, en el plano vertical. La restricción mostrada en la imagen anterior va a garantizar que las aceleraciones de la PS, dadas por (3.16), sean las adecuadas para que el piloto las perciba durante la simulación de vuelo. El conjunto \mathbf{G} de la figura anterior, está restringido gráficamente por dos líneas verticales que corresponden a las limitaciones geométricas de la plataforma que se establecieron en (2.2) dadas por la longitud de los actuadores de la PS, mientras que la fronteras superior e inferior de \mathbf{G} , pertenecen a restricciones dictadas por:

$$|\Delta \ddot{h}| \leq \mu, \quad (3.15)$$

donde μ es el umbral de sensibilidad de aceleraciones lineales de los sensores biológicos (órganos otolíticos) del cuerpo del piloto, con valor aproximado de $\mu \approx 0.04 g_0$. El valor de $\Delta \ddot{h}$ representará la aceleración del centro geométrico de la plataforma móvil de la PS, impulsada por los actuadores y acotada por los valores de sensibilidad del piloto. Con este algoritmo, la PS tendrá la capacidad de imitar las situaciones de movimiento rápido y transmitir las al piloto en entrenamiento. La Ec. (3.15) es la que da pie al algoritmo de simulación de

movimientos rápidos, que se llevarán a cabo dentro de la región \mathbf{G} .

3.3. Algoritmo de simulación dinámica para movimientos rápidos y regreso a la posición de inicio en tiempo óptimo.

El algoritmo de simulación para movimientos rápidos contiene dos etapas, mismas que van a funcionar dentro de la región mostrada en la Figura 3.6. Estas etapas coinciden con los valores de aceleración angular de la simulación de vuelo, ya sea para $|\ddot{\alpha}| < 0$ o cuando $|\ddot{\alpha}| > 0$. Además, van a contener la estructura del algoritmo que permite al centro geométrico de la plataforma móvil regresar a su posición de inicio y esperar un tiempo¹ determinado para iniciar otra simulación de movimientos rápidos.

3.3.1. Algoritmo de simulación para movimientos rápidos

El planteamiento matemático presentado por la Ec. (3.14) en la sección anterior,

$$\Delta \ddot{h} = n_z^C l \ddot{\alpha}, \quad (3.16)$$

se convierte en el algoritmo de para movimientos rápidos del valor absoluto del vector sobrecarga, para movimientos relativos al *c.m.* de la aeronave. La razón por la que es posible implementar la Ec. (3.16) como un algoritmo de simulación a través del uso de una PS es simple: si se analiza la Ec. (3.9), es posible darse cuenta que la PS no puede simular las aceleraciones reales de una aeronave (W_z^C y W_x^C) cuando ésta se encuentra en vuelo, el término g_0 , que representa el valor de la aceleración gravitacional, siempre está presente tanto en vuelo como en el lugar en donde se encuentre fijo el simulador de vuelo (dado que se ha considerado que tiene valor constante para la simulación), y la PS no tiene qué simularla. Por consiguiente, el único movimiento de \vec{n}^p que será simulado en las etapas de movimiento rápido, es el determinado por el valor de $n_z^C l \ddot{\alpha}$ indicado en (3.16), de tal suerte que se podrán *imitar* las aceleraciones presentes vuelo a través del desplazamiento vertical del centro geométrico de la plataforma móvil de la PS con ayuda de los actuadores lineales, y estas aceleraciones son percibidas por los órganos otolíticos del piloto.

¹Este tiempo está dado por la simulación computacional de vuelo.

3.3.2. Algoritmo de retorno a la posición de inicio

El algoritmo (3.16) es el que inicia la simulación para movimientos rápidos, pero se necesita de un algoritmo adicional para llevar a la PS a su posición inicial o de reposo. Este movimiento se realiza de la siguiente manera:

1. Mientras $|\Delta\ddot{h}| = |n_z^C l \ddot{\alpha}| < \mu$, no existe simulación de movimientos rápidos, por lo tanto, la simulación dinámica de vuelo se da a través de 2.28, es decir, la simulación de la componente lenta del vector sobrecarga.
2. Cuando se tenga que $|\Delta\ddot{h}| = |n_z^C l \ddot{\alpha}| \geq \mu$, entonces es necesario que entre en funcionamiento el algoritmo de simulación dinámica para la componente rápida del vector sobrecarga (3.16). A partir de este punto, se tienen dos situaciones para (3.16):
 - a) Para un intervalo corto dado $t = (t_0, t_1)$, en donde $(x_1(t_1), x_2(t_1)) \in \mathbf{G}$, y $\ddot{\alpha} > 0$ o también puede ser que $\ddot{\alpha} < 0$, y se tiene que $|n_z^C l \ddot{\alpha}| > \mu$ hasta que la aceleración angular alcance $\ddot{\alpha}(t_1) \cong 0$, es decir, que se tiene el regreso al punto de inicio 0, en la Figura 3.7.
 - b) Para un intervalo corto dado $t = (t_0, t_1)$, en donde $(x_1(t_1), x_2(t_1)) \in Fr \mathbf{G}$, está dado porque $|n_z^C l \ddot{\alpha}| = \mu$ en ese intervalo, por lo que el movimiento debe continuar hasta llegar a la línea de reposo para, posteriormente, regresar al punto de inicio en tiempo óptimo.

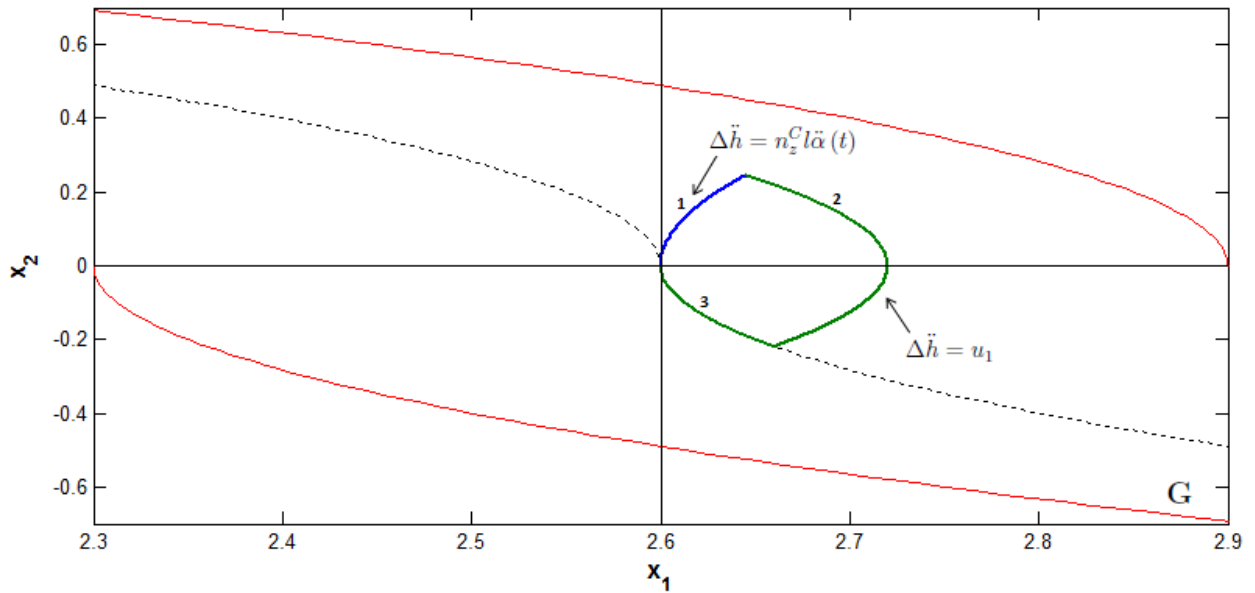


Figura 3.7: Situación normal para el algoritmo de movimiento rápido y regreso al punto de inicio.

La primera situación de simulación de (3.16), inciso a), contiene a todos los puntos de las coordenadas generalizadas (x_1, x_2) del conjunto de accesibilidad \mathbf{G} . Esto sucede porque $|\Delta\ddot{h}|$ iguala o supera el valor del umbral de sensibilidad de aceleración de los órganos otolíticos del piloto, entonces es necesario activar el algoritmo rápido. Las variables x_1 y x_2 , sirven para etiquetar a la posición del centro geométrico y a su velocidad, respectivamente, en el espacio fase en donde se lleva a cabo esta simulación.

Como ejemplo, de la simulación de vuelo se tiene que $\ddot{\alpha} > 0$ (evento que indica la aceleración relativa de N respecto a C , en la Figura 3.4), y para ese pequeño instante de tiempo $|n_z^C l \ddot{\alpha}| > \mu$, este movimiento está representado por la curva 1 en la Figura 3.7, luego $\ddot{\alpha}$ comienza a disminuir su valor, curva 2, hasta que $|n_z^C l \ddot{\alpha}| < \mu$, y se llega a la posición de inicio (respetando $|u_1(t)| \leq \mu$ que se analizará más adelante), a través de la curva 3.

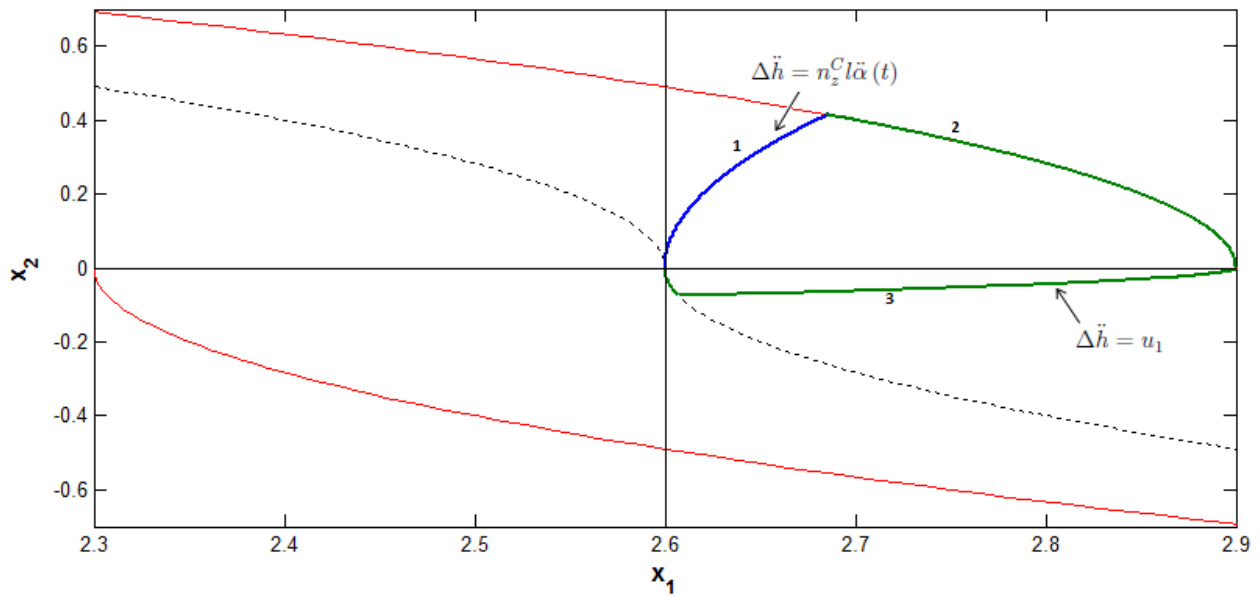


Figura 3.8: Ejemplo de actuación del algoritmo para movimiento rápido y regreso al punto de inicio como una situación extrema.

En la Figura 3.8, se muestra la simulación de movimiento rápido para los eventos del tipo de movimiento descritos en el inciso b), en donde la aceleración angular $|\ddot{\alpha}|$ contiene valores que crecen muy rápido, alcanzando fácilmente la frontera de la región \mathbf{G} , es decir, que para un pequeño intervalo de tiempo se mantiene el valor $|n_z^C l \ddot{\alpha}| = \mu$. La llega a la frontera del conjunto \mathbf{G} , a través del movimiento por la curva 1, luego se debe regresar a cualquier punto en la línea de reposo por medio de la curva 2, que coincide con la curva frontera (curva superior en color rojo), finalmente se regresa a la posición de inicio, para tener los recursos disponibles y realizar un nuevo movimiento. Esta situación puede catalogarse como extrema, puesto que las aceleraciones que la propician son muy elevadas pero no son tan comunes para

un vuelo normal. Generalmente se presentan en un aterrizaje muy forzado, o en situaciones cuando la atmósfera está altamente perturbada.

Con ayuda del PMP, y de la aplicación del problema de síntesis para los procesos de control optimal [32], se va a construir el conjunto de accesibilidad presentado en las Figuras 3.7, ?? y 3.8, que de la pauta para el movimiento del centro geométrico de la plataforma móvil de la PS, dadas ciertas restricciones.

Para la construcción del conjunto de accesibilidad, \mathbf{G} , se presenta el sistema (3.17), correspondiente al planteamiento de retorno a la posición de inicio del centro geométrico de la plataforma móvil, interpretado como un movimiento adicional al algoritmo (3.16) en el plano vertical:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(t_0) \neq 0 & x_1(t_1) = 0 \\ \dot{x}_2 = u_1 & x_2(t_0) \neq 0 & x_2(t_1) = 0 \\ |u_1(t)| \leq \mu \\ \dot{x}_3 = 1 & x_3(t_0) = t_0 & x_3(t_1) = t_1 \end{array} \right. , \quad (3.17)$$

$$\varphi_0(x(t_1)) = t_1 = x_3(t_1) \longrightarrow \min$$

donde $x_2 = \Delta \dot{h}$ y $x_1 = \Delta h$, son las coordenadas generalizadas en el plano de fases; considerando que $u_1 = \Delta \ddot{h}$ para el cual se utiliza el valor de umbral de aceleración para los órganos otolíticos del piloto, $\mu = 0.04 g_0$.

Construcción del sistema conjugado y aplicación del PMP.

De la teoría del PMP, se tiene que construir el sistema adjunto:

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \end{pmatrix} \{ \lambda_0 \geq 0, \psi(\cdot) \} , \quad (3.18)$$

donde no todos $\lambda_0, \psi(\cdot)$ son nulos, y se supone la existencia de un control optimal, $u_1^0(\cdot)$,

desconocido. Se deben cumplir las siguientes condiciones del PMP:

1. Condición de máximo:

$$\exists \max_{|u| \leq \mu} H = (\psi(t), x^0(t), u) = H(\psi(t), x^0(t), u_1^0(t)), \quad (3.19)$$

2. Condición de estacionalidad del Hamiltoniano:

$$\mathcal{H}(t) = H(\psi(t), x^0(t), u^0(t)) \equiv 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (3.20)$$

3. Condición de transversalidad:

$$\psi(t_1) + \lambda_0 \left(\frac{\partial \varphi_0(x^0(t_1))}{\partial x} \right)^T \perp M_1 \text{ en } x^0(t_1). \quad (3.21)$$

Donde,

$$M_1 = \{0, 0, \gamma_3\}, \quad \forall \gamma \in R_1 \quad \lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se construye el Hamiltoniano, para este problema optimal, como sigue:

$$H(\psi_1, \psi_2, x_1, x_2; u) = \dot{x}^T \psi. \quad (3.22)$$

Donde

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}^T = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Entonces,

$$H = \dot{x}_1 \psi_1 + \dot{x}_2 \psi_2 + \dot{x}_3 \psi_3. \quad (3.24)$$

Sustituyendo los valores establecidos del sistema (3.17) en la Ec. (3.24), se tiene:

$$H = x_2\psi_1 + u_1\psi_2 + \psi_3. \quad (3.25)$$

Donde ψ_1, ψ_2, ψ_3 deben satisfacer el sistema adjunto, es decir, las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_1}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1. \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

De la condición 1 del PMP, se solicita maximizar H en función de $u \in [-\mu, \mu]$ en cada tiempo fijo t . Como H es lineal en u , se puede decir que el máximo ocurre en uno de los puntos finales, $u = -\mu$ o $u = \mu$. De la Ec. (3.26), se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 = 0 &\implies \psi_1 = a_1 \\ \dot{\psi}_2 = \psi_1 &\implies \psi_2 = -a_1t + a_2. \\ \dot{\psi}_3 = 0 &\implies \psi_3 = a_3 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Donde, a_1, a_2, a_3 son constantes. Se puede escribir el control como:

$$u^*(t) = \text{sign } \psi_2(t) = \text{sign } (-a_1t + a_2). \quad (3.28)$$

De (3.28), cada control optimal $u^*(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, es una función constante a trozos que toma los valores $\pm u_1$, y tiene al menos dos intervalos en los que es constante, pues $\psi_2 = -a_1t + a_2$ tiene un cambio de signo al menos una vez en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$.

Según el desarrollo del problema de síntesis (ver Anexo D) realizado en [32], se obtienen las trayectorias mostradas en la Figura 3.9 gobernadas por el control:

$$u_1^* = \begin{cases} +\mu & \text{si } x_2 < \tilde{x}_2^+ \text{ y } x_1 < 2.6 \\ +\mu & \text{si } x_2 < \tilde{x}_2^- \text{ y } x_1 > 2.6 \\ -\mu & \text{si } x_2 > \tilde{x}_2^+ \text{ y } x_1 < 2.6 \\ -\mu & \text{si } x_2 > \tilde{x}_2^- \text{ y } x_1 > 2.6 \end{cases}, \quad (3.29)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_2^+ &= \sqrt{2.6 - 2\mu x_1} \\
 \tilde{x}_2^- &= \sqrt{2.6 + 2\mu x_1} \\
 x_1 &= \Delta h \\
 x_2 &= \Delta \dot{h}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

En este punto, u_1^* se convierte en el algoritmo de movimiento adicional, es decir, de retorno a la posición de inicio, dado por:

$$\Delta \ddot{h} = u_1^*. \tag{3.31}$$

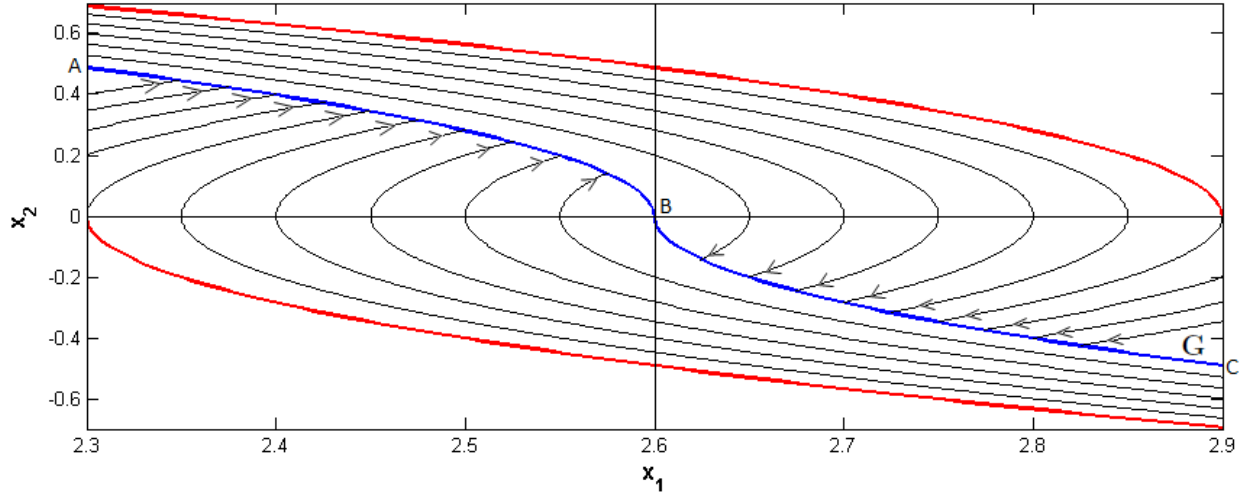


Figura 3.9: Trayectorias optimales de la región \mathbf{G} , gobernadas por u_1^* .

En la Figura 3.9 se puede ver que el control (3.29) toma el valor de $+\mu$, y luego $-\mu$, la trayectoria de fase consiste en dos segmentos parabólicos adjuntos. Entonces, los valores de control se pueden catalogar como $+\mu$ para los puntos debajo de la curva ABC (esta curva es conocida como *línea de switcheo* [32]), mientras que los puntos en este espacio por encima de la curva ABC tendrán el valor $-\mu$. Además, se tienen valores de $+\mu$ en el segmento BC (\tilde{x}_2^-), y valores de $-\mu$ en el segmento AB (\tilde{x}_2^+).

De acuerdo con [32], las trayectorias mostradas en la Figura 3.9 son *trayectorias optimales*. Por otra parte, puede comentarse que de cada punto (x_1, x_2) en el plano fase hay solo una

trayectoria que lleva al origen que puede ser optimal, es decir, una vez que se ha dado un punto inicial x_0 la trayectoria optimal correspondiente queda determinada. Entonces, el problema de regreso a la posición de inicio por tiempo óptimo queda resuelto al aplicar el PMP, de manera sencilla, como una condición necesaria para el control optimal, pues existe un control optimal u_1^* para el cual se cumplen las condiciones iniciales de (3.17) y se encuentra una sola trayectoria (trayectoria optimal) de retorno al punto de inicio o de reposo, $(x_1 = 2.6, x_2 = 0)$.

Es necesario comentar que para este tipo de simulaciones ya se debe conocer un pronóstico de los datos. Es decir, que se inicie la simulación en el tiempo $t = t_0$ teniendo en cuenta que el sistema de cálculo del simulador de vuelo ya va a contener la información que corresponde al tiempo $t = t_1$. A este tiempo se le conoce como tiempo de pronóstico. En ese caso, todos los valores de $n_z^C l \ddot{\alpha}$ se van a conocer, y será posible hablar de un tiempo optimal que se identificará como el tiempo mínimo en el que la trayectoria optimal, gobernadas por el control optimal u_1^* en la Ec. (3.29), hará que el sistema retorne a la posición de inicio.

El algoritmo para el movimiento rápido, que corresponde al cambio de longitud de cada actuador de la PS para desplazar, por línea vertical, a la plataforma móvil, estará dictado la Ec. (3.32). Recordar que, para esta etapa de simulación, los actuadores de la PS se desplazan (hacia arriba y hacia abajo) al mismo tiempo y con el mismo cambio de longitud. Al realizar un análisis similar a [2, 36] y al presentado en el Capítulo 2 de esta tesis, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \left((r_1 - x_{A1})^2 + (h_0 + \Delta h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 L_2 &= \left((r_2 + x_{B1})^2 + (h_0 + \Delta h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \\
 L_3 &= \left((r_3 - x_{C1})^2 + (h_0 + \Delta h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Donde los valores de $r_j, j = 1, 2, 3, x_{A1}, x_{B1}, x_{C1}$ y h_0 están definidos por la configuración de la PS, Δh resulta de la integración de (3.16). $L_j, j = 1, 2, 3$, es la longitud de cada actuador proyectado en el plano vertical y aunque, en forma, las Ecs. (3.32) no sean similares, el valor del cambio de longitud va a ser en la misma cantidad para todos ellos.

La Ec. (3.32) es la propuesta para que el cambio de altura del centro geométrico de la PS se realice de manera correcta, puesto que, no se tienen sensores en cada actuador que mida la posición, velocidad y aceleración, se han considerado como actuadores que responden idealmente a los parámetros de movimiento que el usuario le indique, en este caso, a través de (3.32), (3.16) y (3.29).

El algoritmo de simulación descrito en esta sección se conoce, por un lado, como un “algoritmo programado” que recibe la información de entrada de los datos del vuelo simulado. Por

otro lado, el algoritmo de regreso a la posición de inicio (algoritmo adicional), es considerado como “algoritmo no programado” pues tiene que utilizar la información del estado (posición y velocidad) inicial y final de la PS y también debe retroalimentarse, a través de los datos enviados por los sensores que están incluidos² en los actuadores de la PS. Según la línea de *switcheo* [32], en la Figura 3.9, se necesita conocer tanto la posición como la velocidad de cada actuador, pues con esta información se sabrá cuándo el punto fase va a alcanzar a la línea de *switcheo* (ABC), y regresar a la posición de inicio.

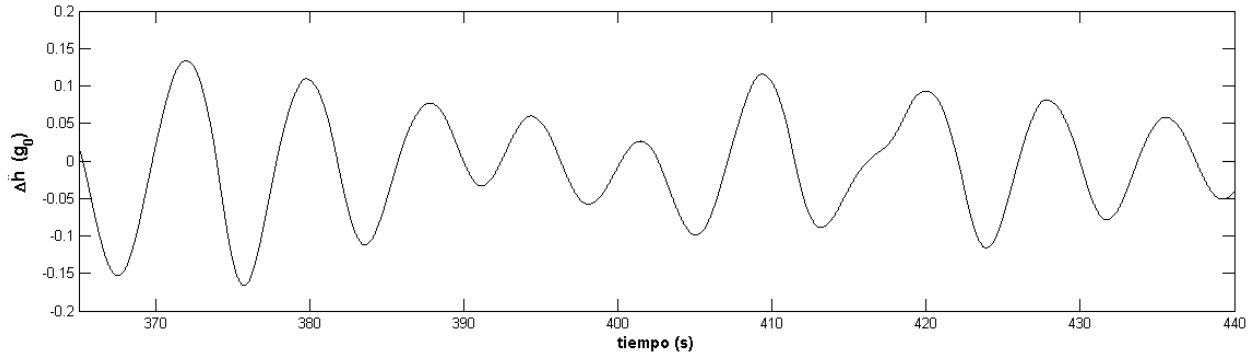


Figura 3.10: Algoritmo de movimiento rápido, $\Delta\ddot{h}$ especificado en g_0 .

Con ayuda de la Ec. (3.16), considerando $l = 6\text{ m}$ y los datos aceleración angular de ataque de un vuelo, es posible construir la gráfica presentada en la Figura 3.10, y puede considerarse como el primer resultado del algoritmo de simulación para la parte rápida de la trayectoria de vuelo. Durante la trayectoria de vuelo se encontrarán intervalos en los que $\Delta\ddot{h} = 0$, es decir que el centro geométrico de la PS se quedará fijo en su posición de inicio, y es en estas zonas en las que el algoritmo (3.16) no entra en función, es decir, que en estas regiones, sólo es necesario implementar el algoritmo de simulación para vuelo lento presentado en el Capítulo 2.

²Para esta simulación dinámica, y dadas las especificaciones de la plataforma de Stewart, los actuadores de la misma cuentan con sensores que proporcionan información, individualmente, de su posición y su velocidad.

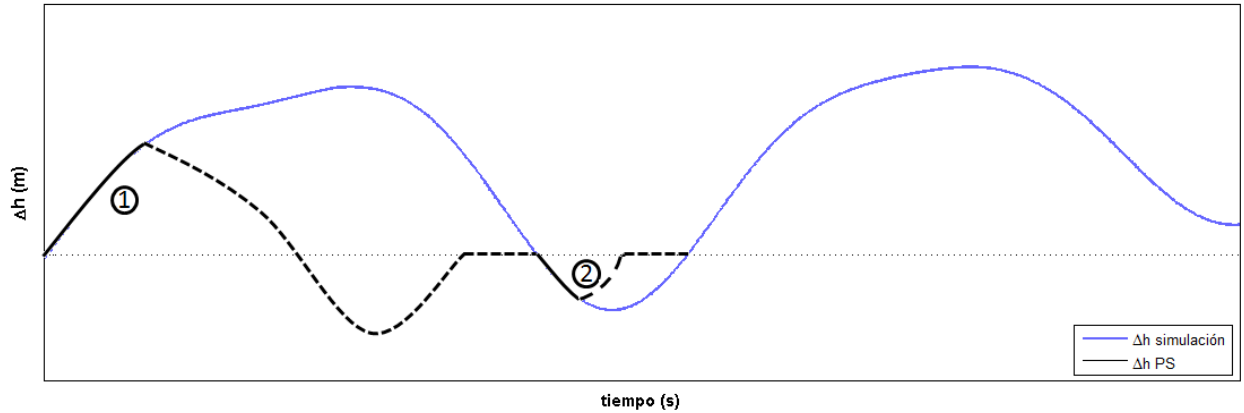


Figura 3.11: Comparación entre la simulación dinámica de vuelo rápido y el movimiento real de la PS.

Al integrar (3.16), se obtiene Δh , que indicará la medida en que debe moverse, hacia arriba y hacia abajo, el centro geométrico de la plataforma para proporcionar lo que dicta el algoritmo (3.16). Sin embargo, el sistema real no puede reproducir este tipo de movimiento por el hecho de que se necesita inducir al piloto en entrenamiento, cierto tipo de aceleraciones. Es decir, cuando la plataforma móvil se desplaza hacia arriba (pudiendo o no llegar a su límite), tiene que regresar a un punto de partida para volver a ocupar todo su espacio disponible y generar otro movimiento.

En la Figura 3.11 se trata de ejemplificar este movimiento. Considerando a la línea azul de esta figura como el valor de Δh que se obtiene de la integración respecto de tiempo del algoritmo (3.16), se tendrán oscilaciones como resultado; pero generar este movimiento no es de mucha ayuda para el entrenamiento del piloto. La PS debe moverse de tal manera que trate de imitar la aceleración descrita por (3.16) mediante el desplazamiento vertical de su centro geométrico. Esto se describe mediante el movimiento 1, en donde la línea continua, en color negro, representa el movimiento inicial. Esta parte va a corresponder al movimiento inicial dictado por el algoritmo de simulación (3.16), que debe realizarse normalmente en un tiempo aproximado de $100ms$, dependiendo de lo que la simulación requiera y las capacidades de la PS. La línea negra segmentada, representa el regreso a la posición de inicio, hasta encontrarse en la línea de reposo, que corresponde a la posición inicial $h_0 = 2.6 m$. Posteriormente, el algoritmo (3.16), indica que se debe tener otro movimiento de la PS, en donde se requiere un escenario similar, es decir, el centro geométrico de la PS se tiene que mover para alcanzar la altura solicitada, pero debe retornar a la línea de reposo para poder generar otro desplazamiento, como el que se muestra con el número 2 en esta figura.

Diagrama de bloques para la simulación de movimientos rápidos

Para los dos esquemas de simulación tratados en esta sección, tanto para el regreso al punto de inicio por tiempo óptimo como para el algoritmo de simulación de la componente rápida de sobrecarga, debe existir una señal de salida que va a ser enviada hacia el sistema que controla la ejecución del movimiento de los actuadores de la PS y está descrito por el siguiente diagrama.

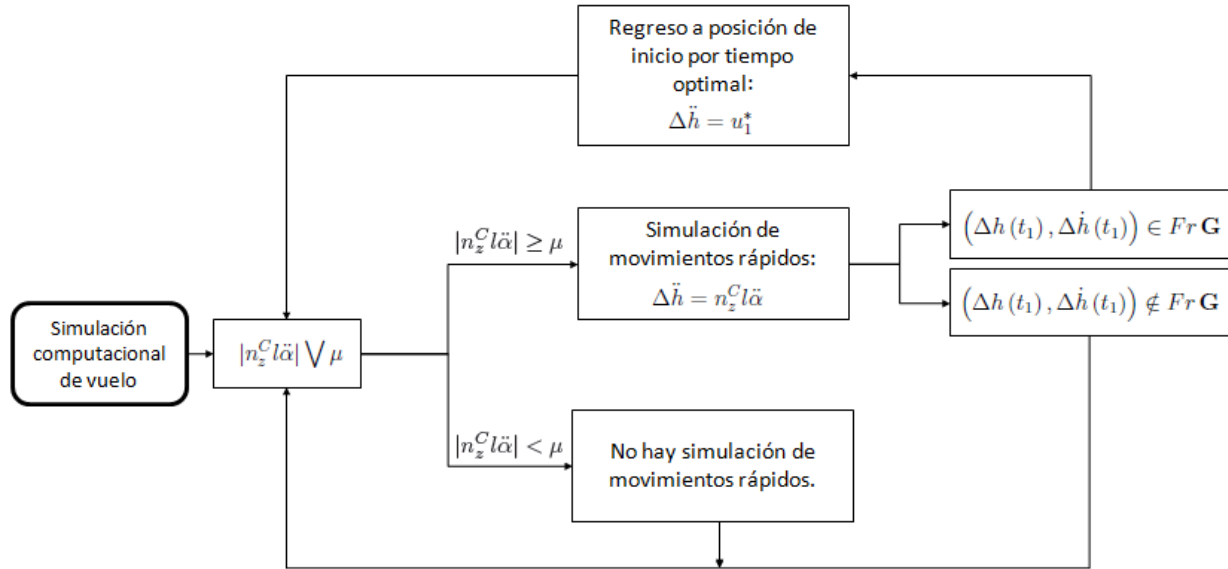


Figura 3.12: Diagrama a bloques para la señal de salida del algoritmo de control.

En el esquema de la Figura 3.12 se quiere dar a entender cuándo es que entra en funcionamiento este algoritmo. En resumen, se reciben datos del modelo matemático de vuelo, $|n_z^C l \ddot{\alpha}|$, y se discrimina sobre la situación a simular; ya sea la simulación de movimientos rápidos y el regreso óptimo a la posición de inicio, como se describe en el inciso a) y b). También se puede discernir si el algoritmo de simulación para situaciones de movimiento rápido no se lleva a cabo.

Combinación de los dos movimientos descritos por la PS

Para diferentes intervalos de la simulación de vuelo, va a ser necesario combinar los movimientos descritos por los algoritmos (2.28) y (3.16). Por ejemplo en el recuadro que se observa en la Figura 3.13, se puede ver que la inclinación de la plataforma móvil debe cambiar rápido para alcanzar a simular la orientación del vector gravitoinercial. Debido a los recursos de la PS, no siempre es posible esto, Por esto, se hace uso del otro recurso de la PS, que es el movimiento por línea vertical.

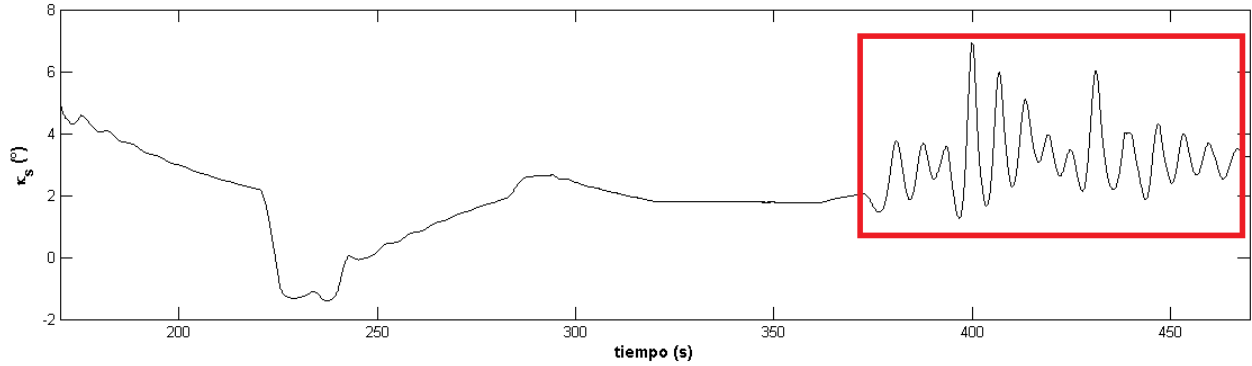


Figura 3.13: Región para el movimiento rápido del centro geométrico de la PS.

Dada la situación de la Figura 3.13, cuando en la simulación se requiera que los dos algoritmos entren en funcionamiento simultáneamente, se debe tener el movimiento compuesto entre Δh y κ_s . Esto debe ser generado dentro del rango limitado por las restricciones geométricas de la PS.

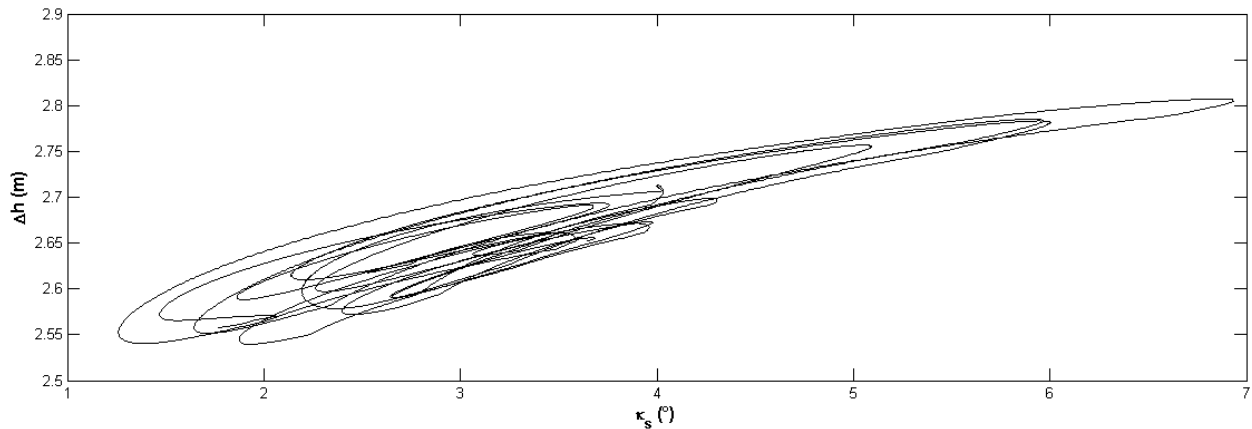


Figura 3.14: Composición de los algoritmos de simulación para una región de la trayectoria de vuelo.

En la Figura 3.14, se muestra un ejemplo muy sencillo para la simulación de vuelo, que corresponde al intervalo $370 < t < 470 s$, en donde se indica el movimiento combinado por línea vertical (que se obtiene con el algoritmo de movimiento rápido) y por ángulo de inclinación (algoritmo de movimiento lento) de la plataforma móvil. En esta figura sólo se trata de ilustrar lo que podría ser un resultado del movimiento compuesto, es decir, de la unión de los dos algoritmos de simulación dinámica para una situación de simulación solicitada. Esta composición será una de las tareas a desarrollar como parte del trabajo a futuro de esta tesis. Lo que se visualiza en la Figura 3.14 proviene del cálculo del vector sobrecarga (2.17) que propicia la creación de los algoritmos (2.28) y (3.16). Para decidir

cuándo entra en funcionamiento uno y cuando el otro, es precisamente el comportamiento del vector sobrecarga el que da la pauta. A veces es necesario utilizar los dos, y en otras ocasiones sólo uno, según los requerimientos de la simulación de vuelo.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se ha presentado la descripción de elementos que se pueden obtener a partir de los datos de vuelo de una aeronave de transporte (carga), que se utilizaron en la construcción de algoritmos de simulación dinámica de vuelo. Se definió entonces el vector sobrecarga, del cual se destaca su orientación para la construcción de un algoritmo de simulación, y el uso del módulo del vector sobrecarga para la formulación de un segundo algoritmo de simulación. De manera puntual, se concluye lo siguiente:

1. Se realizó el planteamiento de simulación dinámica de sobrecarga en el plano vertical a partir del modelo matemático de vuelo, en el plano vertical, de una aeronave de transporte. La aplicación del teorema de Tikhonov a estas ecuaciones de movimiento ya establecidas se utilizó únicamente para diferenciar dos tipos de movimientos de la trayectoria de vuelo, uno lento y otro rápido. Estos movimientos dan pie a la formulación de dos algoritmos de simulación.
2. Una vez definido el movimiento lento de la trayectoria de vuelo, se presentó el algoritmo de simulación para esta situación. Este algoritmo se basa en la orientación del vector sobrecarga en la posición del piloto, \vec{n}^p , para un vuelo no perturbado y que yace en el plano vertical. Se definió también cómo van a modificarse las longitudes de los actuadores de la plataforma de Stewart para alcanzar la inclinación requerida y simular la orientación de \vec{n}^p mediante el ángulo κ_s .
3. Para las situaciones de movimiento rápido de la trayectoria de vuelo, se estableció la simulación dinámica de movimientos rápidos con ayuda del movimiento del centro geométrico de la PS por línea vertical, teniendo en cuenta el cálculo del decremento del módulo de sobrecarga en la posición del piloto, Δn . Y se encontró que es posible generar el regreso del centro geométrico de la PS a su posición de inicio a través de la implementación de un control optimal. En la PS esto se realiza con ayuda de los sensores de los actuadores lineales de la PS que indican su posición y velocidad en todo momento. Así mismo, para garantizar que el algoritmo de simulación de movimientos rápidos funcione de la manera más correcta posible, se introdujeron restricciones definidas por

la presencia de sensores biológicos en el cuerpo del piloto. El dato que se utilizó como restricción fue tomado de valores conocidos del umbral de aceleración de las masas sensibles de los órganos otolíticos (sáculo y utrículo), y fue de gran ayuda para la construcción de un control optimal, a través de la aplicación del principio del máximo de Pontryagin, que gobierna el movimiento de retorno del centro geométrico de la plataforma a su posición de reposo.

4. Se realizaron algunos experimentos y mediciones sobre una plataforma de Stewart, propiedad de INAOE. Los ejercicios que se realizaron corresponden al algoritmo de orientación del vector sobrecarga, para movimientos lentos, que coinciden en buena manera para un intervalo de la simulación de vuelo presentada en esta tesis.

La inclusión de algunos parámetros conocidos que provienen de los estudios fisiológicos del sistema vestibular, sirven para organizar los movimientos del simulador de tal manera que no se tengan conflictos con las sensaciones que debe percibir el piloto en entrenamiento, y deben estar en acuerdo con la simulación de vuelo. Por último, es necesario mencionar que un criterio de evaluación de estos algoritmos de movimiento para la PS, y para un simulador de vuelo en general, es la participación de pilotos expertos. Ellos tienen la última palabra para decidir si el movimiento del simulador corresponde, eficientemente, con lo esperado respecto al funcionamiento de una aeronave real.

Trabajo a futuro

Como continuación de este trabajo de tesis, se describen las siguientes propuestas:

1. Construcción del algoritmo de simulación dinámica para la composición de los movimientos lentos y rápidos en el plano vertical.
2. Composición de los algoritmos de simulación de sobrecarga (orientación y decremento) para todo el espacio de vuelo de una avión de transporte.
3. Aplicación de modelos computacionales de perturbaciones atmosféricas, y simulaciones de vuelos anormales y de emergencia.
4. Inclusión de algoritmos de simulación galvánica y vestibular.

Anexo A. Organización general de un simulador de vuelo.

Un simulador de vuelo conlleva la aplicación de diversas herramientas de software y hardware, realizada por desarrolladores de proyectos especialistas en diferentes áreas, como ingeniería de control, óptica, redes, programación, mecánica, entre otras. De manera breve, un simulador de vuelo está organizado por los siguientes aspectos [6]:

1. Ecuaciones de movimiento: son el punto central de todos los simulador de vuelo, pues determinan los estados del simulador, tomando en cuenta todos los parámetros de entrada, incluyendo los controles que maneja el piloto, viento, términos aerodinámicos y de motores propulsores, y calcula las variables que representan el estado de la aeronave simulada, específicamente fuerzas, momentos, actitud, altitud, rumbo y velocidades. Esta traducción de entradas a salidas depende de las ecuaciones de movimiento usadas para resolver un movimiento lineal o angular de la aeronave y se incluyen los datos aerodinámicos.
2. Modelo aerodinámico: está compuesto por todos aquellos datos que permiten calcular las fuerzas y momentos aerodinámicos. Por ejemplo, el coeficiente de levantamiento puede ser derivado como función del ángulo de ataque, donde coeficientes aerodinámicos específicos están definidos en una base de datos aerodinámica. El modelo aerodinámico es el elemento más crítico de un simulador de vuelo, pues representa la “huella digital” de cada aeronave.
3. Modelo de motor: se considera como un modelo de la dinámica del sistema de propulsión, esto es, se usa para determinar el empuje, flujos de combustible y presiones de motor, así como velocidades de rotación que necesita tener en cuenta el piloto durante el vuelo.
4. Adquisición de datos: en un simulador de vuelo la cabina corresponde, casi siempre, a la misma cabina que utiliza la aeronave simulada, de hecho, varios de los componentes e

instrumentos del avión real son usados para la construcción de la cabina del simulador, esto se hace principalmente para recrear lo mejor posible el ambiente de entrenamiento para el piloto. Entonces, cada uno de estos instrumentos generan señales de entrada y deben ser llevadas hacia algún módulo que se encargará de adquirir esta información. Este sistema de adquisición será el responsable de minimizar cualquier retraso en la captura de los datos y que la simulación se lleve a cabo en tiempo real.

5. Modelo de tren de aterrizaje: durante el rodaje el tren de aterrizaje es el que hace contacto con la pista, y la interacción entre ésta y el sistema del tren de aterrizaje es muy diferente a lo que se siente cuando la aeronave se encuentra en vuelo. Es necesario un modelo adicional que provea al simulador estos efectos de contacto con pista, mismo que servirá para el momento en el que la aeronave aterrice.
6. Modelo de clima: la atmósfera es claramente la que tiene un mayor efecto sobre el desempeño de aeronaves. Las ecuaciones para calcular la presión y densidad del aire así como la temperatura, son bien conocidas y sencillas de implementar. Estos términos son usados en los puntos 2 y 3. Sin embargo, otros términos son modelados en la mayoría de los simuladores, particularmente el viento, pues la presencia de un fuerte viento tiene efecto en la navegación y el manejo de la aeronave, por ejemplo, cuando existen vientos cruzados durante el aterrizaje o la presencia de turbulencias.
7. Sistema visual: este sistema provee imágenes en tiempo real que son vistas desde la posición de los ojos del piloto. Este sistema proyecta todo el ambiente de animación dependiendo las condiciones de vuelo que se requieran para el entrenamiento, las cuales deben ser coherentes con las acciones que tome el piloto durante el vuelo.
8. Sistema de sonido: dado que la cabina de una aeronave es muy ruidosa, el simulador de vuelo debe replicar estos sonidos. Se encuentran sonidos como el de los motores, el rompimiento del aire, que varían con las condiciones de vuelo, además, los mismos instrumentos en cabina a través de alarmas, anuncian una interacción que debe ser atendida por el piloto, y éste utiliza los anuncios sonoros para dar atención a esa alarma. Este sistema consiste entonces en replicar en el simulador de vuelo todos los sonidos que derivan de la aeronave mientras está en uso.
9. Sistema de movimiento: mientras la aeronave simulada realiza maniobras, el piloto esperará sentir las aceleraciones que experimentaría durante un vuelo real. Las aceleraciones son calculadas en el modelo de vuelo (1 y 2) y luego se pasan al sistema de movimiento. Se requiere, como estándar, de una plataforma móvil con actuadores lineales que

son capaces de moverse y colocarse en diferentes posiciones para intentar replicar las aceleraciones en el cuerpo del piloto.

10. Control de carga: consiste en recrear la sensación de “fuerza” que el piloto sentiría de los mandos de vuelo mientras está volando.
11. Pantallas de instrumentos: son dispositivos representados mediante pantallas electrónicas que congreguen los instrumentos reales presentes en la cabina del avión real.
12. Sistema de navegación: es un sistema que implementa los parámetros e instrumentos necesarios para proveer al piloto toda la información sobre la localización de la aeronave durante el vuelo simulado.

A lo largo de este trabajo de tesis, se ha trabajado con el punto 9, que a su vez, requiere de cálculos descritos por los puntos 1 y 2. El sistema de movimiento es la plataforma de Stewart.

Anexo B. Códigos MATLAB (archivos .m) para simulación dinámica de vuelo.

Para hacer las operaciones correspondientes a los algoritmos de simulación y obtener las figuras mostradas a lo largo de los capítulos contenidos en esta Tesis, se creó un *script* en el software de programación MATLAB. En las siguientes figuras se describe lo realizado.

Archivo de datos de vuelo

```
load completo.csv;
```

Figura 3.15: Archivo de datos de vuelo.

En la Figura 3.15 se muestra cómo se carga, en MATLAB, un archivo para tener acceso a su información. El archivo “completo.csv” está en formato de *valores separados por coma* (csv, por sus siglas en inglés), ya que permite un fácil acceso a su contenido, y contiene los datos de vuelo de la aeronave, descrita en el Capítulo 2, para una trayectoria de vuelo específica.

Componentes de vuelo

```
ts = completo(:,1);
alpha = completo(:,2);
alpha_d= completo(:,3);
g0= completo(:,27)*0.3048;
Vpx_d = completo(:,6)*0.3048;
Vpz_d = completo(:,8)*(-0.3048);
alpha_dd= completo(:,10);
Vax_d = completo(:,12)*0.3048;
Vaz_d = completo(:,14)*(-0.3048);
h = completo(:,20)*0.3048;
u_aero = completo(:,21)*0.3048;
w_aero = completo(:,23)*0.3048;
u = completo(:,24)*0.3048;
w = completo(:,26)*0.3048;
vel = sqrt(u.^2 + w.^2);
vel_p = sqrt(u_aero.^2 + w_aero.^2);
acel = sqrt(Vax_d.^2 + Vaz_d.^2);
theta = completo(:,17)*57.3;
phi = theta + alpha;
a_pilot= sqrt(Vpx_d.^2 + Vpz_d.^2);
l=6;
```

Figura 3.16: Extracción de las variables de vuelo.

La Figura 3.16 muestra cómo se asignan los valores del archivo “completo.csv” a las variables (lado izquierda de la igualdad) en el script de MATLAB. Cuando se hace la asignación, cada variable tiene forma de matriz columna.

Componentes del vector sobrecarga

```
nx = (1/9.81).*(Vax_d);
nz = ((1/9.81).*(Vaz_d - g0));
nxp= (1/9.81).*(Vpx_d);
nzp= ((1/9.81).*(Vpz_d -g0));
n = sqrt(nz.^2 + nx.^2);
np = sqrt(nzp.^2 + nxp.^2);
K = atand(nx./nz);
```

Figura 3.17: Componentes del vector sobrecarga.

En la Figura 3.17 se muestran las operaciones para formar el vector sobrecarga tanto en la posición del *c.m.* de la aeronave (n) como en la posición del piloto (np), así como la

orientación del vector sobrecarga de la aeronave.

Algoritmo vuelo lento

```
K_p = atand(nxp./nzp);  
K_s = -atand(nxp./nzp);
```

Figura 3.18: Algoritmo de simulación para movimiento lento.

Una vez definida la orientación del vector sobrecarga en la ubicación del piloto, como lo indica la primera ecuación de la Figura 3.18, se aplica el algoritmo de simulación dinámica para movimientos lentos descrito en el Capítulo 2. Así, encontramos cómo debe cambiar la base móvil su inclinación para imitar la orientación del vector sobrecarga durante la simulación de vuelo.

Algoritmo vuelo rapido

```
delta_h = l*alpha_dd;
```

Figura 3.19: Algoritmo de simulación para movimientos rápidos.

De nuevo, se utilizan los datos de vuelo para formar el algoritmo de simulación para movimientos rápidos. El algoritmo es detallado en el Capítulo 3, y en la Figura 3.19 se muestra su implementación en código.

Como parte del algoritmo de simulación para movimientos rápidos, se tuvo que aplicar el PMP, y como resultado, en el Capítulo 3, se mostraron gráficas que establecían cómo se comportaría el algoritmo (3.16) bajo ciertas restricciones. La creación del conjunto de accesibilidad, \mathbf{G} , así como las distintas opciones que tiene el sistema para disponer de esta región, se muestra en las figuras siguientes.

Construccion de control optimal y restricciones

```
v = 0.4;
a = 2.6;
x1=-10:0.01:0;
y1=(0.5/v)*x1.^2 + a;
x2=0:0.01:10;
y2=-(0.5/v)*x2.^2 + a;
x3=0:0.01:10;
y3=-(0.5/v)*x3.^2 + 2.9;
x4=-10:0.01:0;
y4=(0.5/v)*x4.^2 + 2.3;
x8=-10:0.001:0.316;
y8=(0.5/v)*x8.^2 + 2.35;
x5=-10:0.001:0.283;
y5=(0.5/v)*x5.^2 + 2.4;
x7=-10:0.001:0.245;
y7=(0.5/v)*x7.^2 + 2.45;
x6=-10:0.005:0.2;
y6=(0.5/v)*x6.^2 + 2.5;
x9=-10:0.001:0.142;
y9=(0.5/v)*x9.^2 + 2.55;
x51=-0.144:0.001:10;
y51=-(0.5/v)*x51.^2 + 2.65;
x61=-0.2:0.001:10;
y61=-(0.5/v)*x61.^2 + 2.7;
x71=-0.245:0.001:10;
y71=-(0.5/v)*x71.^2 + 2.75;
x81=-0.283:0.001:10;
y81=-(0.5/v)*x81.^2 + 2.8;
x91=-0.316:0.001:10;
y91=-(0.5/v)*x91.^2 + 2.85;
```

Figura 3.20: Cálculo de trayectorias, línea de *switcheo* y restricciones cinemáticas.

En la Figura 3.20 se quiere dar a entender cómo es posible formular las diferentes formas en que el control u_1^* puede funcionar. Todas estas trayectorias van a ser optimales, de acuerdo al tipo de problema que se está analizando.

Region G y trayectorias optimales

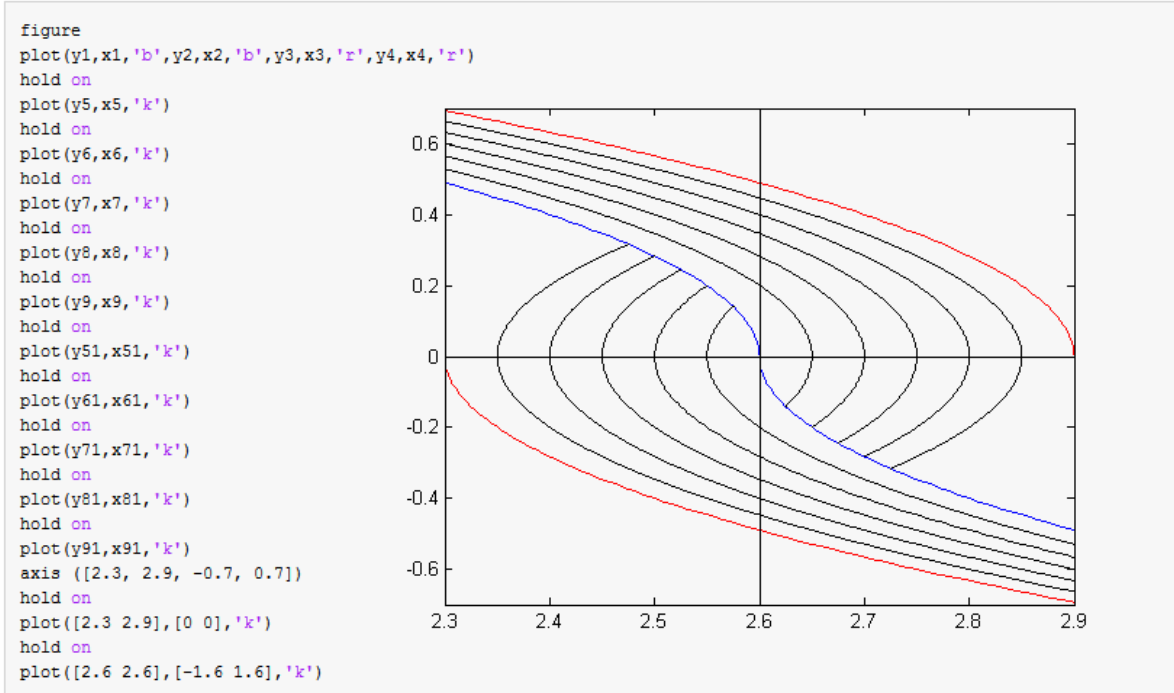


Figura 3.21: Algunas trayectorias disponibles, dentro de la región **G**.

En las Figuras 3.22 a 3.24 se presenta el evento descrito en el Capítulo 3, para el cual está bien definido (3.12). En cada una de las figuras mostradas se añade una gráfica de las trayectorias se generan con cada parte del código.

Trayectoria 1 (Simulación de movimientos rapidos continua)

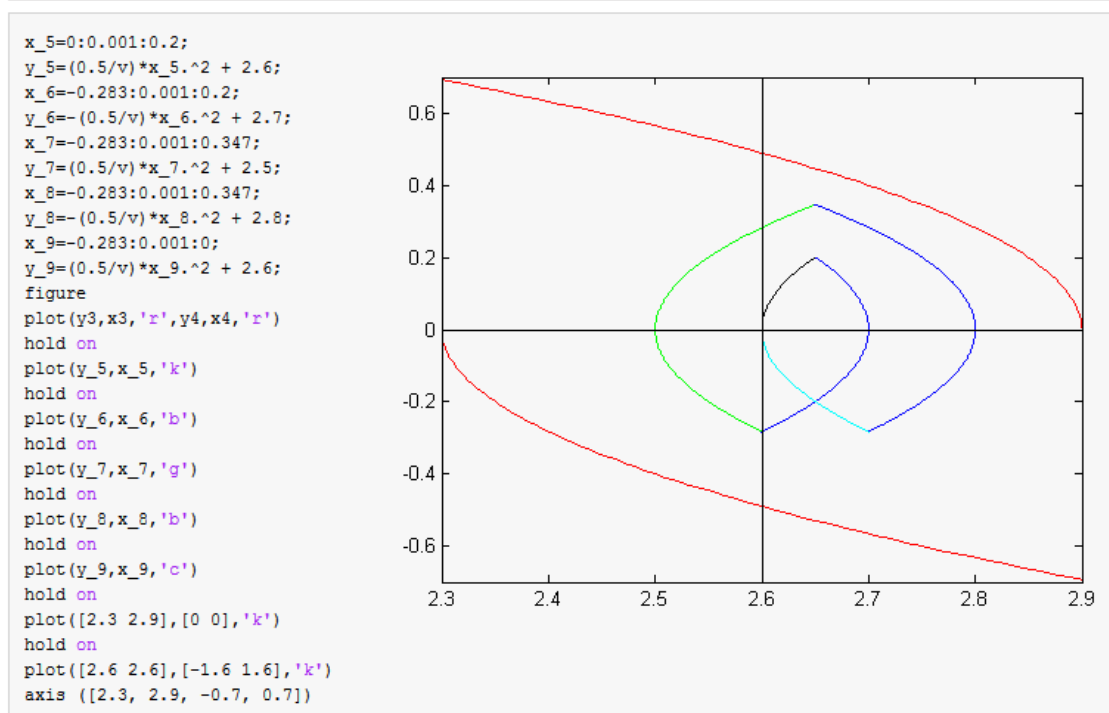


Figura 3.22: Situación de simulación continua por movimiento en línea vertical.

Trayectoria 2 (Simulación a punto en frontera y retorno optimal)

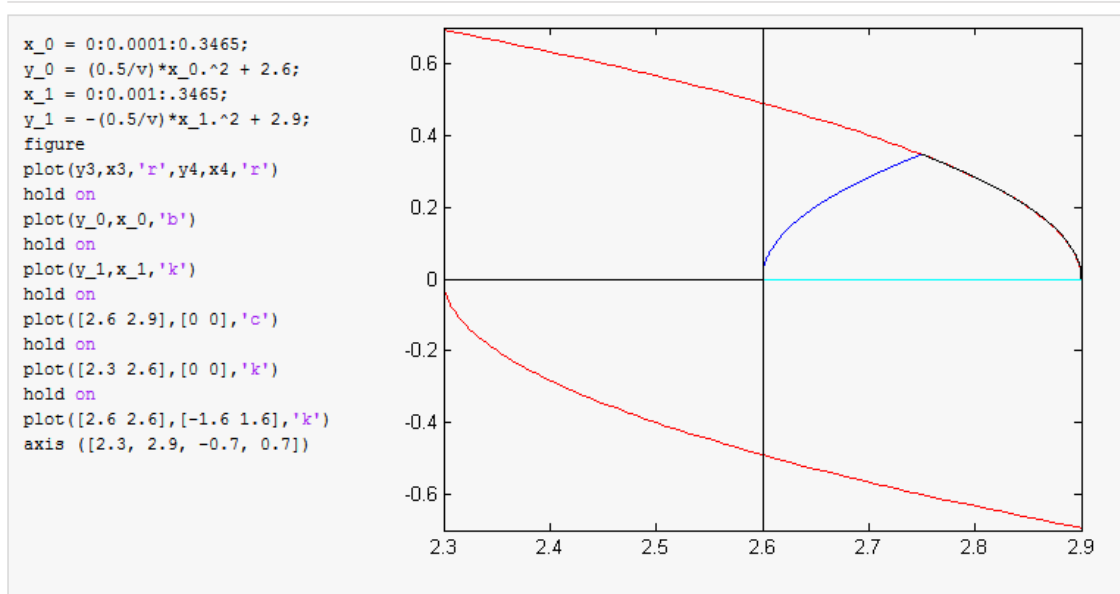


Figura 3.23: Situación de simulación de movimientos rápidos que alcanzan los límites geométricos del conjunto G .

Para la situación de la Figura 3.23, el valor de $\ddot{\alpha}$ es muy grande y las restricciones de la

PS no permiten que se alcance un valor tan alto. Lo que se hace es llegar a los límites (línea azul rey) y regresar al intervalo de reposo (línea azul cyan) para llegar el punto de inicio y poder ejecutar otro movimiento cuando así lo requiera la simulación de vuelo.

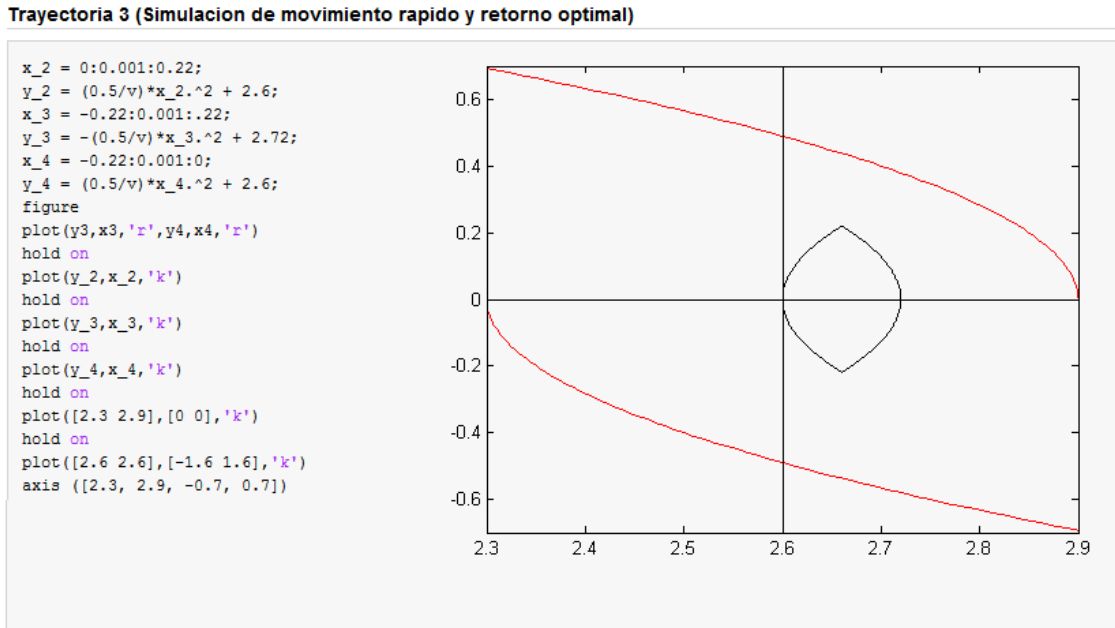


Figura 3.24: Simulación de movimiento rápido y regreso a punto de inicio.

La situación de la Figura 3.24, muestra la actuación del algoritmo de control para cuando la simulación de movimientos rápidos se activa para generar un solo desplazamiento por línea vertical y retorna a la posición de inicio.

Anexo C. Cálculo adicional para la orientación del vector sobrecarga en la posición del piloto.

Cálculos adicionales para el cambio del ángulo de orientación de sobrecarga

La orientación del vector sobrecarga, en la posición del piloto, para la situación de descenso se puede expresar mediante:

$$\tan(\kappa_p) = \frac{-F_{gix}}{F_{giz}} = \frac{mg_0 n_{px}}{mg_0 n_{pz}} = \frac{n_x^p}{n_z^p},$$

$$\frac{\sin(\kappa_p)}{\cos(\kappa_p)} = \sin(\kappa_p) \sec(\kappa_p) = \frac{n_x^p}{n_z^p},$$

$$\sin(\kappa_p) \sqrt{1 + \tan^2(\kappa_p)} = \frac{n_x^p}{n_z^p},$$

$$\sin(\kappa_p) \frac{1}{|n_{pz}|} \sqrt{n_{pz}^2 + n_{py}^2} = \frac{n_x^p}{n_z^p},$$

$$\sin(\kappa_p) = \frac{|n_{pz}| n_{py}}{n_{pz} \sqrt{n_{pz}^2 + n_{py}^2}}.$$

$$\kappa_p = \arcsen\left(\frac{|n_z^p| n_x^p}{n_z^p \sqrt{(n_z^p)^2 + (n_x^p)^2}}\right), \quad n_x^p < 0, n_z^p < 0. \quad (3.33)$$

Y para encontrar la orientación del vector sobrecarga durante el ascenso y despegue:

$$\kappa_p = \arcsen \left(\frac{|n_z^p| n_x^p}{n_z^p \sqrt{(n_z^p)^2 + (n_x^p)^2}} \right), \quad n_x^p > 0, n_z^p < 0. \quad (3.34)$$

En las Ecs. (3.33) y (3.34) se puede ver que el valor absoluto de la componente en z del vector sobrecarga, $|n_z^p|$, está dividido por el valor de esta componente, n_z^p . El resultado de este cociente siempre es igual a -1 , puesto que para todo momento $n_z^p < 0$, es decir,

$$\frac{|n_z^p|}{n_z^p} = -1. \quad (3.35)$$

Las Ecuaciones (3.33) y (3.34) son idénticas en forma, pero las diferencia el valor de la componente n_x^p del vector sobrecarga, esto es una gran ventaja pues la orientación del vector sobrecarga estará definida con una misma ecuación para toda la simulación del vuelo lento. Entonces, es posible escribir una sola fórmula que abarque las dos situaciones de para el movimiento lento de un vuelo:

$$\kappa_p = -\arcsen \left(\frac{n_x^p}{\sqrt{(n_z^p)^2 + (n_x^p)^2}} \right), \quad F_x^p < 0 \quad (n_x^p > 0) \quad (3.36)$$

Presentación del cambio de longitud de los actuadores para su aplicación, desde el punto de vista ingenieril.

Como una síntesis para la aplicación de este algoritmo, desde el punto de vista ingenieril, se tiene:

$$\Delta L_1 = r_1 \sin(\kappa_s) = -r_1 \sin(\kappa_p) \quad (3.37)$$

Utilizando 3.36, en la ecuación anterior, se tiene:

$$\Delta L_1 = r_1 \left(\frac{n_{px}}{\sqrt{(n_z^p)^2 + (n_x^p)^2}} \right), \quad n_x^p > 0, F_x^p < 0. \quad (3.38)$$

En la Figura 2.24 se observa que el valor de ΔL_1 , en el sistema de referencia de la PS, es positivo, por lo que la Ec. (3.38) es congruente para el cambio de longitud del Actuador 1 (L_1) en esta situación. Luego, para ΔL_2 y ΔL_3 , se tiene:

$$\Delta L_2 = r_2 \left(\frac{n_{px}}{\sqrt{(n_z^p)^2 + (n_x^p)^2}} \right), \quad n_x^p > 0, F_x^p < 0.$$

$$\Delta L_3 = r_3 \left(\frac{n_{px}}{\sqrt{(n_z^p)^2 + (n_x^p)^2}} \right), \quad n_x^p > 0, F_x^p < 0.$$

ΔL_2 y ΔL_3 tienen signo contrario que ΔL_1 puesto que, en el sistema de referencias de la PS, están del lado negativo del eje x_s . Es decir que $r_2 < 0$ y $r_3 < 0$.

Anexo D. El problema de síntesis.

De [32], se considerará la aplicación del PMP como la solución de algunos problemas simples de tiempo optimal. Un nuevo e importante ámbito del problema de procesos optimales, el *problema de la síntesis* de los controles optimales, es explicado como una consideración para problemas de ese tipo.

Ejemplo 1, [32].

Considere la ecuación $d^2x/dt^2 = u$, donde u es un parámetro de control real restringido por la condición $|u| \leq 1$. En coordenadas fase, $x_1 = x$ y $x_2 = dx/dt$, esta ecuación puede reescribirse en la forma del siguiente sistema:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u. \quad (3.39)$$

Considere el problema, de un punto fase que se mueve en acuerdo con (3.39), para llegar al origen $(0, 0)$ para un estado inicial dado x_0 en el menor tiempo. En otras palabras, se debe considerar el problema de tiempo optimal para el caso donde el origen $(0, 0)$ es la posición terminal de x_1 .

La función H en este caso tiene la forma:

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u. \quad (3.40)$$

Además, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1, \quad (3.41)$$

para las variables auxiliares ψ_1 y ψ_2 . Por lo tanto, $\psi_1 = c$ y $\psi_2 = c_2 - c_1 t$ (c_1 y c_2 son constantes). Relacionando (1.67) resulta, tomando en cuenta a (3.40) y la condición $-1 \leq u \leq 1$,

$$u(t) = \text{sign } \psi_2(t) = \text{sign}(c_2 - c_1 t). \quad (3.42)$$

Se sigue de (3.42) que cada control optimal $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, es una función constante a trozos que toma los valores de ± 1 , y tiene a lo sumo dos intervalos en los cuales es constante (dado que la función lineal $c_2 - c_1 t$ cambia de signo a lo sumo una vez en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$). Inversamente, cualquier función $u(t)$ puede ser obtenida de la relación (3.42) para algunos valores de c_1 y c_2 .

Para el intervalo de tiempo en el cual $u \equiv 1$, se tiene, según (3.39):

$$x_2 = t + s_2, \quad x_1 = \frac{t^2}{2} + s_2 t + s_1 = \frac{1}{2} (t + s_2)^2 + \left(s_1 - \frac{(s_2)^2}{2} \right), \quad (3.43)$$

(s_1 y s_2 son constantes de integración), de las cuales se obtiene

$$x_1 = \frac{1}{2} (x_2)^2 + s, \quad (3.44)$$

donde $s = s_1 - \frac{1}{2} (s_2)^2$ es una constante. Entonces, la porción de la trayectoria de fase para la cual $u \equiv 1$ es un arco de la parábola (3.44). La familia de parábolas (3.44) es mostrada en la Figura 3.25.

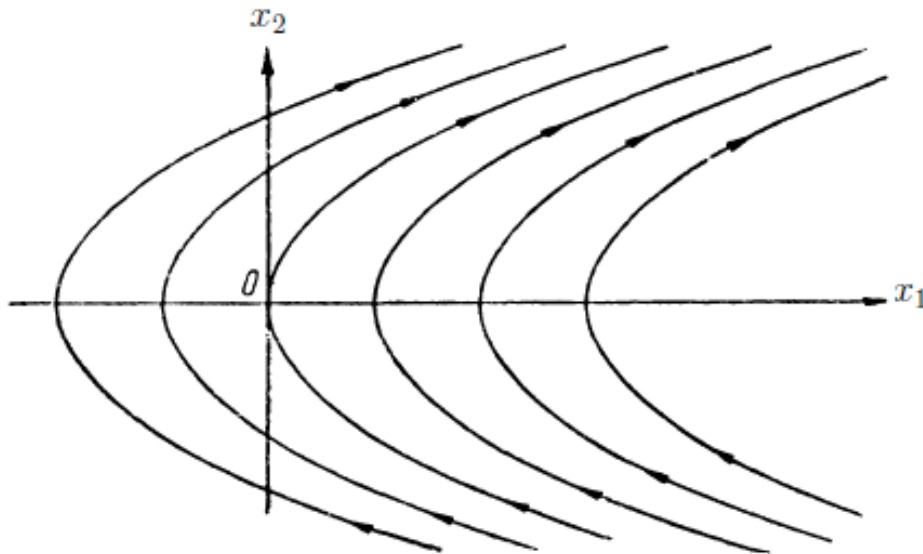


Figura 3.25: Familia de parábolas (3.44).

Análogamente, para el intervalo de tiempo en el cual $u \equiv -1$, se tiene

$$x_2 = -t + s'_2, \quad (3.45)$$

$$x_1 = -\frac{t^2}{2} + s_2' t + s_1' = -\frac{1}{2} (-t + s_2')^2 + \left(s_1' + \frac{1}{2} (s_2')^2 \right), \quad (3.46)$$

de la cual se obtiene

$$x_1 = -\frac{1}{2} (x_2)^2 + s'. \quad (3.47)$$

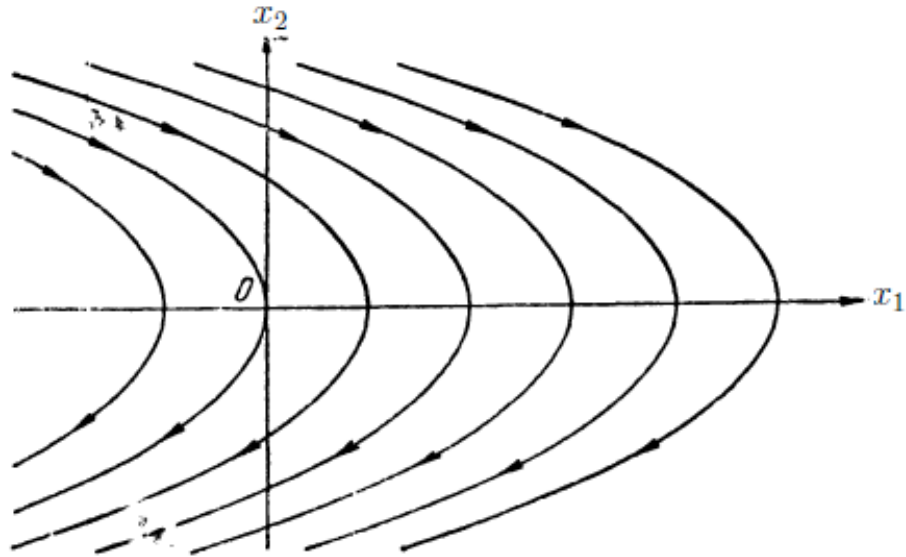


Figura 3.26: Familia de parábolas de (3.47)

La familia de parábolas (3.47) se muestran en la Figura 3.26. Los puntos de fase se mueven hacia arriba de las parábolas (3.44) (ya que $\frac{d^2x}{dt^2} = u = 1$), y hacia abajo a lo largo de las parábolas (3.47) ($\frac{d^2x}{dt^2} = u = -1$).

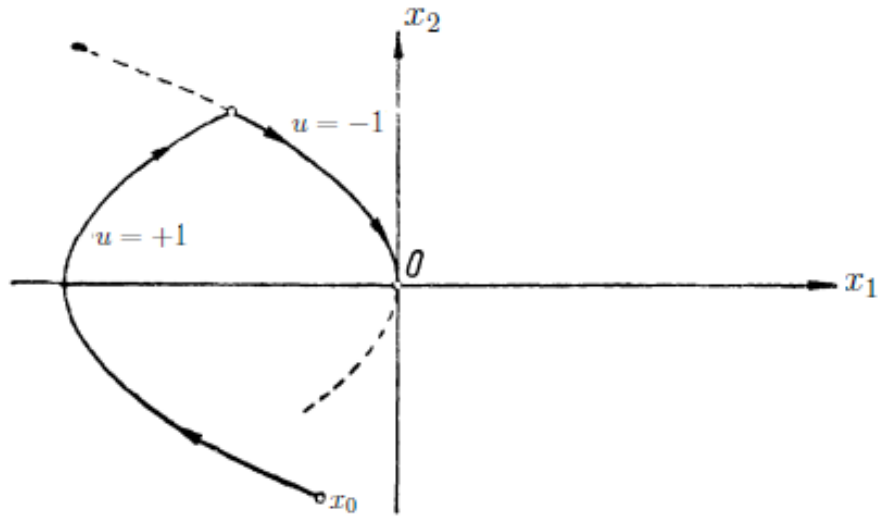


Figura 3.27: Primera opción de trayectoria para alcanzar el origen.

Como se declaró arriba, cada control optimal $u(t)$ es una función continua a trozos, tomando valores de ± 1 , y teniendo a lo sumo, dos intervalos en los que es constante. Si $u(t)$ es inicialmente igual a $+1$, y luego a -1 , la trayectoria de fase consiste en dos segmentos parabólicos adjuntos (Figura 3.27). El segundo de estos segmentos yace en aquella parábola definida por (3.47) la cual pasa a través del origen (ya que la trayectoria deseada debe llegar al origen).

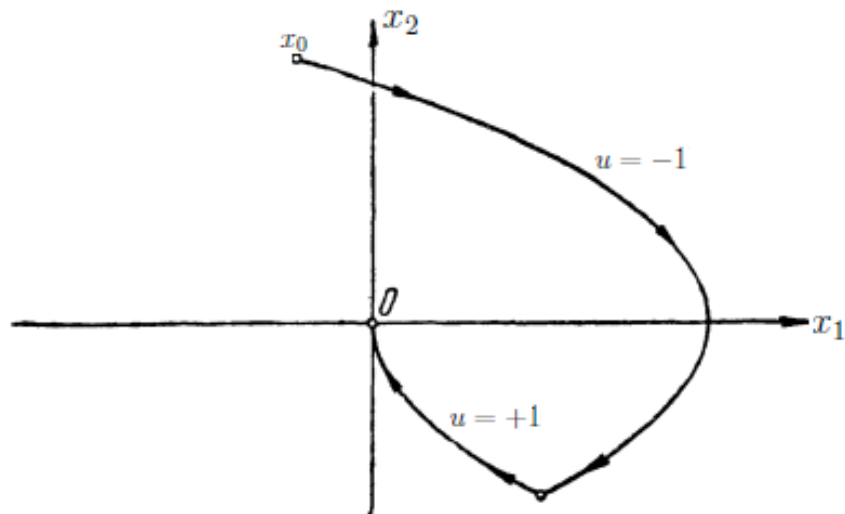


Figura 3.28: Segunda opción de trayectoria para alcanzar el origen.

Por otro lado, si primero $u = -1$, y luego $u = +1$, la curva de fase es reemplazada por una que es simétrica con respecto al origen (Figura 3.28). En la Figura 6 los valores

correspondientes del parámetro de control u son escritos arriba de los arcos parabólicos. La Figura 3.29 representa a la familia entera de las trayectorias de fase obtenidas ($A0$ es el arco de la parábola $x_1 = \frac{1}{2}(x_2)^2$ en el semiplano inferior; $B0$ es el arco de la parábola $x_1 = -\frac{1}{2}(x_2)^2$ en el semiplano superior). Los puntos fase se mueven a lo largo de un arco de una parábola de (3.47) la cual para a través del punto inicial x_0 , si x_0 está arriba de la curva $A0B$; y a lo largo de un arco de una parábola de (3.44) si x_0 está debajo de esta curva. En otras palabras, si la posición inicial x_0 está arriba de $A0B$, el punto fase debe moverse bajo la influencia del control $u = -1$ hasta que alcance el arco $A0$. En el instante en que esto suceda, el valor de u cambia a $+1$ y se mantiene en este valor hasta que el punto fase alcance el origen. Sin embargo, si la posición inicial x_0 está debajo de $A0B$, u debe ser igual a $+1$ hasta el momento en que alcance el arco $B0$, y en ese instante el valor de u cambia a -1 .

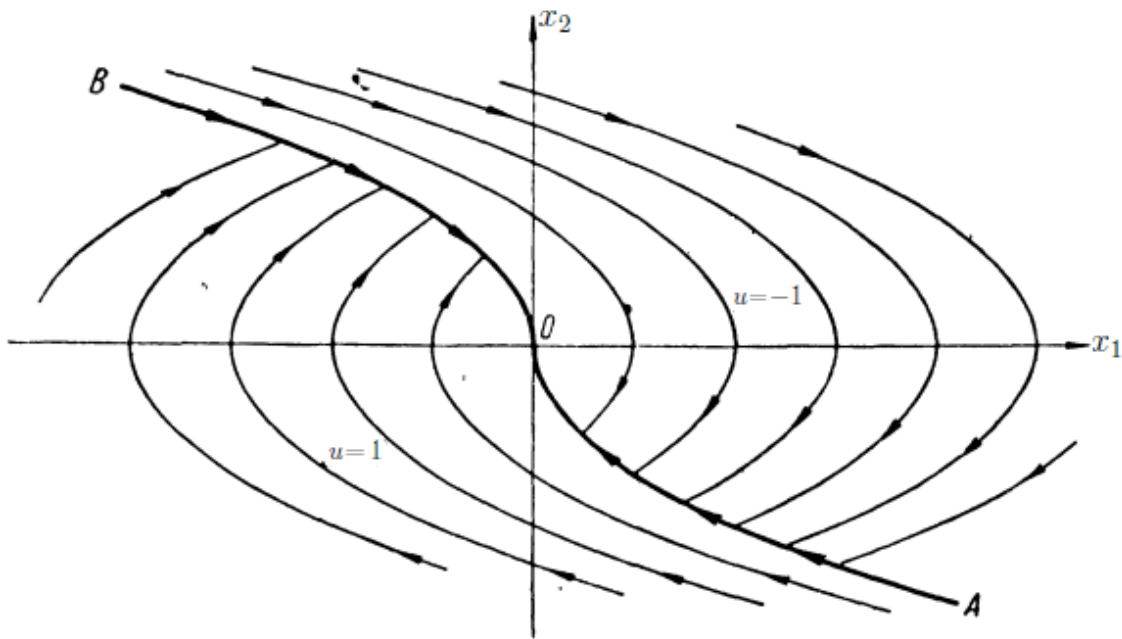


Figura 3.29: Conjunto de trayectorias optimales.

Por lo tanto, de acuerdo con [32], *solo las trayectorias arriba descritas pueden ser optimales*. Por otra parte, se puede ver de la investigación anterior que de cada punto en el plano de fase hay solo una trayectoria que lleva al origen que puede ser optimal (es decir, una vez que el punto inicial x_0 esté dado) la trayectoria correspondiente queda únicamente determinada).

Entonces, las trayectorias que se han encontrado (Figura 3.29) son optimales, y no hay otras trayectorias optimales que lleven al origen.

La solución al problema optimal obtenida para el presente ejemplo se puede interpretar como sigue. Sea $v(x_1, x_2) = v(x)$ la función dada en el plano x_1, x_2 como sigue:

$$v(x) = \begin{cases} +1 & \text{debajo de la curva } A0B, \text{ y sobre el arco } A0, \\ -1 & \text{arriba de la curva } A0B, \text{ y sobre el arco } B0. \end{cases} \quad (3.48)$$

Entonces, sobre cada trayectoria optimal el valor $u(t)$ del parámetro de control (en un tiempo arbitrario t) es igual a $v(x(t))$; es decir, iguala al valor de la función v en el punto en el cual el punto fase, que se mueve a lo largo de la trayectoria optimal

$$u(t) = v(x(t)) , \quad (3.49)$$

está localizado en el tiempo t . Esto significa que si reemplazamos la variable u por la función $v(x)$ en el sistema (3.39), se obtiene el sistema

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 , \\ \frac{dx_2}{dt} &= v(x_1, x_2) , \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

cuya solución (para cualquier estado arbitrario inicial x_0) produce la trayectoria optimal de fase que lleva al origen. En otras palabras, el sistema (3.50) es el sistema de ecuaciones diferenciales (con parte derecha discontinua) para la determinación de las trayectorias optimales las cuales conducen al origen.

Bibliografía

- [1] *The Flight Gear Manual*.
- [2] Sunjoo Kan Advani. *The Kinematic Design of Flight Simulator Motion-Bases*. Delft University Press, 1998.
- [3] Jarmo Ahonen, Tiina Lahtinen, and Marita Sandström. *Kinesiología y Anatomía Aplicada a la Actividad Física*. Paidotribo, 2001.
- [4] V. V. Alexandrov, Yu. V. Bolotin, S. S. Lemak, N. A. Parushnikov, S. I. Zlochevsky, and W. F. Guerrero S. *Introduction to Control of Dynamic Systems*. Dirección de Fomento Editorial BUAP, 2009. ISBN: 978-607-487-095-4.
- [5] V. V. Alexandrov, L. I. Voronin, Y. N. Glazkov, A. Y. Ishlinskii, and V. A. Sadovnichy. *Mathematical Problems of Dynamic Imitation of Aerospace Flight*. 1995. ISBN 5-211-03336-1.
- [6] David Allerton. *Principles of Flight Simulation*. Wiley, 2009. ISBN: 978-0-470-75436-8.
- [7] V. M. Becerra. Optimal control. *Scholarpedia*, 3:5354, 2008. revision 124632.
- [8] Jon Berndt. *JSBSim an Open Source Flight Dynamics Model*. <http://jsbsim.sourceforge.net/index.html>.
- [9] Vladimir G. Boltyanski and Alexander S. Poznyak. *The Robust Maximum Principle: Theory and Applications*. Birkhäuser, 2012.
- [10] Sung-Hua Chen and Li-Chen Fu. An optimal washout filter design for a motion platform with senseless and angular scaling maneuvers. In *American Control Conference*, pages 4295–4300. IEEE, June 2010.
- [11] Sui Cheng-cheng, Yang Yong-tian, and Jia Rong-zhen. Modeling and software implementation of flight system for simulator of a new fighter. *Journal of Marine Science and Application*, 3:52–56, 2004.

- [12] Gilles Clément. Using your head: Cognition and sensorimotor functions in microgravity. *Gravitational and Space Biology*, 2(20):65–78, June 2007.
- [13] Amira del Rayo Flores Urbina, Salvador Galicia Isasmendi, and Gabriela Ollyni Gómez Rivera. El sistema vestibular: Aspectos generales y neurodesarrollo. In *Temas selectos de Neurociencias II*, 2001.
- [14] Agostino De Marco Domenico P. Coiro and Fabrizio Nicolosi. A 6dof flight simulation environment for general aviation aircraft with control load reproduction. In American Institute of Aeronautics and Astronautics, editors, *AIAA Meeting Papers*, volume 12. AIAA, 2007.
- [15] Kent K. Gillingham and Robert W. Krutz. Effects of the abnormal acceleratory environment of flight. Technical report, USAF School of Aerospace Medicine, 1974.
- [16] GLI Interactive LLC. *MotiMotion Tutorial*, 2009.
- [17] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical Mechanics*. 2000.
- [18] Headquarters, Department of the Army. *Aeromedical Training for Flight Personnel*, Agosto 2009.
- [19] Ruud Hosman and Henk Stassen. Pilot’s perception in the control of aircraft motions. *Control Engineering Practice*, 7:1421–1428, 1999.
- [20] Andrew Hamish John Jamson. *Motion Cueing in Driving Simulators for Research Applications*. PhD thesis, University of Leeds, November 2010.
- [21] Donald E. Kirk. *Optimal Control Theory, An Introduction*. Prentice Hall, 2004.
- [22] Petar Kotokovic, Hassan K. Khalil, and John O’Reilly. *Singular Perturbation Methods in Control, Analysis and Design*. SIAM, 1986.
- [23] R. N. Kristin Hayes. What is labrynthitis and vestibular neuritis?, 2015. Taken from <http://ent.about.com/od/entdisordersjl/a/Labrynthitis.htm>.
- [24] Alfred T. Lee. *Flight Simulation, Virtual Environments in Aviation*. Ashgate, 2005.
- [25] Claudio Mazzola and Marco Giunti. *Methods, Models, Simulation and Approaches Toward a General Theory of Change.*, chapter Dynamical Systems on Monoids: Toward a General Theory of Deterministic Systems and Motion, page 12. World Scientific, 2012.

- [26] Jacob L. Meiry. *The Vestibular System and Human Dynamic Space Orientation*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1958.
- [27] Maribel Reyes Moreno. *Lanzamiento y Estabilización Suóptimales de un Avión Automático*. PhD thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2006.
- [28] Richard M. Murray, Zexiang Li, and S. Shankar Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, 1994.
- [29] Robert C. Nelson. *Flight Stability and Automatic Control*. Tom Casson, 1998.
- [30] Igor V. Novozhilov. *Fractional Analysis: Methods of Motion Decomposition*. 1997.
- [31] Christian Pfeiffer, Andrea Serino, and Olaf Blanke. The vestibular system: a spatial reference for bodily self-consciousness. *Frontiers in Integrative Neuroscience*, 8:1–13, 2014.
- [32] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Control Processes*. Interscience, 1962.
- [33] D. Purves, G. J. Augustine, D. Fitzpatrick, W. C. Hall, A. LaMantia, J. McNamara, and S. Williams. *Neuroscience*. Sinauer Associates, Sunderland, Massachusetts, 3rd edition, 2004.
- [34] W. Fermín Guerrero Sánchez. *Algoritmos de Estabilización para Sistemas Perturbados Singularmente*. PhD thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2008.
- [35] Eldra P. Solomon, Linda R. Berg, and Diana W. Martin. *Biology*, volume 1. Peter Adams, 8th edition, 2008. ISBN: 978-0-495-30978-8.
- [36] R. E. Stamper. *A Three Degree of Freedom Parallel Manipulator with Only Translational Degrees of Freedom*. PhD thesis, University of Maryland, 1997.
- [37] James D. Stewart. A platform with six degrees of freedom. Technical report, Institute of mechanical engineers, 1965.
- [38] Robert J. Telban and Frank M. Cardullo. Motion cueing algorithm development: Human-centered linear and nonlinear approaches. Technical report, State University of New York, 2005.
- [39] A. N. Tikhonov. Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives. *Mat. Sb.*, 31(73):575–586, 1952.

- [40] A. T. van Wieringen, D. M. Pool, M. M. van Paassen, and M. Mulder. Effects of heave washout filtering on motion fidelity and pilot control behavior for a large commercial airliner. *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*, page 26, 2011.
- [41] Peter H. Zipfel. *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. AIAA Education Series, 2000.

Nomenclatura

c.m. centro de masas

FDM Flight Dynamics Model.

gdl Grados de libertad.

PMP Principio de Máximo de Pontryagin

PS Plataforma de Stewart.