



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE PUEBLA**

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

**Estructura homotópica de Quillen en la categoría de
conjuntos simpliciales**

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito para la obtención del título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

Por

Óscar Andrade Hernández

Asesorado por

Prof. Ángel Contreras Pérez

Diciembre 2014

Las preguntas verdaderamente serias son aquéllas que pueden ser formuladas hasta por un niño. Sólo las preguntas más ingenuas son verdaderamente serias. Son preguntas que no tienen respuesta. Una pregunta que no tiene respuesta es una barrera que no puede atravesarse. Dicho de otro modo: precisamente las preguntas que no tienen respuesta son las que determinan las posibilidades del ser humano, son las que trazan las fronteras de la existencia del hombre.

M.K

Agradecimientos

Ante todo agradezco el apoyo incondicional de mis padres Juan y Catalina quienes con su paciencia y cariño me han mostrado el camino para lograr ser alguien en la vida; a mis hermanos Juan, Mónica, Jazmín e Ireri y mis sobrinos Alejandro, Carlos y Héctor por compartir tantos momentos en familia; principalmente a mi hermana Mónica quien siempre ha cuidado de mí.

A todos los profesores que han compartido sus conocimientos y experiencia a lo largo de mis años en FCFM, a mis sinodales por tomarse el tiempo de revisar mi tesis y aportar sus ideas al trabajo realizado, en especial a mi asesor M.C. Ángel Contreras Pérez quien siempre da lo mejor de él en cada curso que imparte, por compartir sus ideas conmigo y mostrarme que siempre se debe tener la mirada en alto.

Índice

Introducción	v
Capítulo 1 Objetos Simpliciales	1
1.1 La categoría de conjuntos de orden finito y los objetos simpliciales	1
1.2 El n -esqueleto de un conjunto simplicial	8
1.3 Triangulación de categorías	10
1.4 El grupoide fundamental de un conjunto simplicial	15
1.5 Complejo de funciones	17
1.6 Complejos de Kan	17
Capítulo 2 Estructura homotópica de Quillen	20
2.1 Estructura homotópica en Top y Gpd	20
2.2 Estructuras fibrantes y cofibrantes	32
Capítulo 3 La estructura homotópica de Quillen en la categoría Ss	42
3.1 Clases saturadas	42
3.2 La fibra de un conjunto simplicial	49
3.3 Complejos minimales	53
3.4 Fibraciones minimales	56
3.5 La estructura homotópica de Quillen en Ss	57
Capítulo 4 El n-ésimo grupo de homotopía de un conjunto simplicial	63
4.1 Conjuntos simpliciales punteados y el grupo fundamental	63
4.2 Sucesiones exactas, el teorema de Whitehead y el teorema de Milnor	68
Apéndice	77
A.1 Teoría de Categorías	77
A.2 Categoría de modelos	83
Bibliografía	86

Introducción

El concepto de *conjunto simplicial* es una extensión de la noción de complejo simplicial en topología algebraica, la cual nos aporta un modelo combinatorio de la teoría de homotopía de un espacio topológico. La teoría de *conjuntos simpliciales* generaliza la idea de los Δ -complejos de topología algebraica. El análisis de su categoría de conjuntos simpliciales Ss y su relación con la categoría Top , mediante los funtores realización $|\cdot| : Ss \rightarrow Top$ y su adjunto $Sig : Top \rightarrow Ss$, nos permite asociar cada espacio topológico a un conjunto de mapeos simpliciales.

Daniel Kan define en 1956 el concepto de fibración de conjuntos simpliciales o *fibración de Kan* la cual involucra la propiedad de extensión que permite el desarrollo de la teoría de homotopía de conjuntos simpliciales, teoría que aporta la idea de construcción de mapeos y homotopías de mapeos dentro de la teoría de simplices abordándolo algebraica y combinatoriamente. Pero no fue sino hasta 1967 que Daniel Quillen, con la noción de categoría de modelos, aporta un conjunto de técnicas abstractas que permiten realizar un análisis homotópico a una categoría de modelos \mathcal{C} . La teoría de categorías de modelos revolucionó la teoría de homotopía moderna y en la actualidad existen numerosas aplicaciones en álgebra y K-teoría. Una categoría de modelos es una categoría ordinaria con tres clases de morfismos especiales llamados *fibraciones* (\mathcal{F}), *cofibraciones* (\mathcal{C}) y *equivalencias débiles* (\mathcal{W}), que satisfacen ciertos axiomas que han hecho posible desarrollar por completo una teoría de homotopía, de la misma forma que sucede en los ejemplos clásicos de espacios topológicos y de los conjuntos simpliciales, por lo que las categorías de modelos son una abstracción y generalización de la teoría de homotopía. Dos ejemplos básicos de categorías de modelos son las categorías Top de los espacios topológicos y la categoría ChR de complejos de cadenas no negativas de módulos sobre un anillo R . La teoría de homotopía de ChR es usualmente llamada *álgebra homológica*. La comparación de estos dos ejemplos ayuda a explicar porqué Quillen llamó al estudio de las categorías de modelos “álgebra homotópica” y la consideró como una generalización de álgebra homológica.

El objetivo principal de la tesis es dotar de una estructura homotópica de Quillen a la categoría de conjuntos simpliciales Ss . La tesis se desarrolla de la siguiente manera. En el primer capítulo definimos lo que es un conjunto simplicial mostrando sus propiedades básicas y el análisis de su n -esqueleto. También mostramos la relación entre la categoría de conjuntos simpliciales Ss con otras categorías como Cat , Gpd y Top y las propiedades elementales de los *conjuntos simpliciales de Kan*. En el capítulo dos definimos lo que es una *estructura homotópica de Quillen* desarrollando dos ejemplos importantes, las categorías Top y Gpd , así como una introducción a las estructuras fibrantes y cofibrantes de una categoría de modelos \mathcal{C} .

En el capítulo tres y cuatro asignamos una estructura homotópica a la categoría de conjuntos simpliciales Ss y analizamos las equivalencias homotópicas con la categoría de espacios topológicos Top , además de mostrar propiedades básicas del grupo fundamental de un conjunto simplicial. Al final también se anexa un apéndice en el cual se muestran resultados elementales sobre teoría de categorías y categorías de modelos.

Capítulo 1

Objetos Simpliciales

En este capítulo se introducen los elementos básicos para el estudio de los *conjuntos simpliciales* desde un punto de vista homotópico y categórico analizando la relación existente con otras categorías. Estudiamos también la relación de homotopía entre *conjuntos simpliciales de Kan* así como la construcción del grupoide fundamental de un conjunto simplicial.

1.1 La categoría de conjuntos de orden finito y los objetos simpliciales

Definamos la categoría *Delta*, la cual denotaremos por Δ , como:

- $Obj(\Delta) = \{[n] = \{0, 1, \dots, n-1, n\}\}$
- $Morf(\Delta) = \{\alpha : [m] \rightarrow [n] : \text{con } \alpha \text{ no decreciente}\}$
- \circ es la composición usual entre funciones.

Definición 1.1.1 Para cada $n \geq 1$ y $j \in [n]$ definamos el mapeo $\delta_j^n : [n-1] \rightarrow [n]$ como un morfismo inyectivo que preserva el orden saltando el elemento j , es decir $(\delta_j^n(\{j\}))^{-1} = \emptyset$ y para $n \geq 0$ el mapeo $\sigma_j^n : [n+1] \rightarrow [n]$ el morfismo suprayectivo que preserva el orden tal que $(\sigma_j^n)^{-1}\{j\} = \{j, j+1\}$.

Una observación relevante en la categoría Δ es que todos sus mapeos pueden ser escritos como composición de δ_j^n y σ_j^n , para cualquier mapeo $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ bastará con definir los siguientes conjuntos

$$A = \{j \in [m] : \alpha(j) = \alpha(j+1)\} = \{j_t < j_{t-1} < \dots < j_0\}$$

$$B = \{i \in [n] : i \notin \text{Img}(\alpha)\} = \{i_s > i_{s-1} > \dots > i_0\}$$

Por lo que

$$\alpha = \delta_{i_s} \delta_{i_{s-1}} \dots \delta_{i_0} \sigma_{j_t} \dots \sigma_{j_0} = \delta_B \sigma_A$$

Ejemplo 1.1.1 Sea $\mu : [4] \rightarrow [5]$ definida como $\mu(0) = 1, \mu(1) = 1, \mu(2) = 3, \mu(3) = 3, \mu(4) = 5$. Así, $A = \{j \in [4] : \mu(j) = \mu(j+1)\} = \{j_2 = 0, j_1 = 2\}$ y $B = \{i \in [5] : i \notin \text{Img}[\mu]\} = \{i_1 = 0, i_2 = 2, i_3 = 4\}$. Por lo que finalmente

$$\mu = \delta_4 \delta_2 \delta_0 \sigma_0 \sigma_2$$

Observemos además que se cumplen las siguientes identidades

$$\begin{aligned}\delta^j \delta^i &= \delta^i \delta^{j-1} \text{ para } i < j \\ \sigma^j \sigma^i &= \sigma^i \sigma^{j+1} \text{ para } i \leq j\end{aligned}\tag{1}$$

$$\sigma^j \delta^i = \begin{cases} \delta^i \sigma^{j-1} & i < j \\ id & i = j \text{ o } i = j + 1 \\ \delta^{i-1} \sigma^j & i > j + 1 \end{cases}$$

o bien

$$\begin{array}{ccc} [n] & \xrightarrow{\sigma_j} & [n-1] \\ \sigma_i \uparrow & \delta_j & \downarrow \sigma_i \\ [n-1] & \xrightarrow{\sigma_{j-1}} & [n-2] \end{array} \quad \begin{array}{c} \delta_i \downarrow \\ \delta_i \uparrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \delta_{j-1} \\ \delta_{j-1} \end{array} .$$

Notemos que los cuadrados generados por los morfismos δ_i 's y los σ_i 's, forman diagramas pullback y pushout respectivamente, lo cual nos lo afirma la siguiente proposición.

Proposición 1.1.1 Sea

$$\begin{array}{ccc} C & \xleftarrow{s_4} & A \\ \uparrow p_3 & p_4 & \downarrow p_1 \\ B & \xrightarrow{p_2} & D \\ \downarrow s_3 & s_2 & \uparrow s_1 \end{array}$$

un diagrama conmutativo en el cual se cumple que

$$s_4 s_1 = s_3 s_2$$

$$p_1 p_4 = p_2 p_3$$

$$p_4 s_3 = s_1 p_2$$

$$p_i s_i = id$$

$$p_3 s_4 = s_2 p_1.$$

Entonces el cuadrado de s 's es un pullback y el cuadrado de los p 's es un pushout.

Demostración. Probemos el caso del pushout. Consideremos la terna (X, g_1, g_2) como otra solución del diagrama de los p 's, así se tiene que $g_1 p_4 = g_2 p_3$. Notemos que $g_1 = g_1 p_4 s_4$ por lo que $g_1 s_1 = g_1 p_4 s_4 s_1 = g_1 p_4 s_3 s_2 = g_2 p_3 s_3 s_2 = g_2 s_2$ y además, $(g_2 s_2) p_1 = g_2 p_3 s_4 = g_1 p_4 s_4 = g_1$.

Supongamos ahora que existe otro mapeo $a : D \rightarrow X$ con la propiedad $g_1 = a p_1$ y $g_2 = a p_2$ pero $g_1 s_1 = a p_1 s_1 = a$ y $g_2 s_2 = a p_2 s_2 = a$, por lo que el mapeo $g_1 s_1 = g_2 s_2 : D \rightarrow X$ es único. Análogamente para el pullback \vdash

Véase que por la proposición anterior la categoría Δ tiene pushout de suryectivas y pullback de inyectivas.

Recordemos que Δ^{op} se define como

- $Ob(\Delta^{op}) = Obj(\Delta)$
- $Mor(\Delta^{op}) = \{\alpha^* : [n] \rightarrow [m] \text{ donde } \alpha : [m] \rightarrow [n] \text{ es un mapeo en } \Delta\}$

Definición 1.1.2 Sea C una categoría

- Un *objeto simplicial* U de C es un funtor contravariante de Δ a C , en la fórmula $U : \Delta^{op} \rightarrow C$.
- Un *morfismo entre objetos simpliciales* $U \rightarrow U^*$ es una transformación natural .

Observemos que dado un objeto simplicial U se tienen objetos $U([0]), U([1]) \dots$ en la categoría C y de cualquier mapeo no decreciente $\psi : [m] \rightarrow [n]$ se tienen $U(\psi) : U([n]) \rightarrow U([m])$ satisfaciendo $U(\psi \circ \phi) = U(\phi) \circ U(\psi)$.

Al aplicar un objeto simplicial a las identidades 1 se obtienen

$$\begin{aligned}
 d_i d_j &= d_{j-1} d_i \text{ para } i < j \\
 s_i s_j &= s_{j+1} s_i \text{ para } i \leq j \\
 d_i s_j &= s_{j-1} d_i \text{ para } i < j \\
 s_j d_i &= id \text{ para } i = j \text{ o } i = j + 1 \\
 d_i s_j &= s_{j+1} d_i \text{ para } i > j + 1
 \end{aligned} \tag{2}$$

Definición 1.1.3 Sea C una categoría y sean U y V objetos simpliciales de C . Asumamos que el producto $U_n \times V_n$ existen en C . El producto de U y V es el objeto simplicial $U \times V$ definido por

- $(U \times V)_n = U_n \times V_n$.
- $d_i = (d_i, d_i)$.
- $s_i = (s_i, s_i)$.

El objeto de nuestro estudio es el caso particular cuando la categoría C es la categoría de conjuntos.

Definición 1.1.4 Un *conjunto simplicial* X es un funtor contravariante $X : \Delta^{op} \rightarrow Set$. Donde $X([n]) = X_n$.

Definición 1.1.5 Un *conjunto simplicial* X consiste de:

- Una sucesión de conjuntos $\{X_n\}_{n \geq 0}$.
- Para cada $n \geq 1$ una colección de mapeos $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1} (0 \leq i \leq n)$ llamados *mapeo cara*.

- Para cada $n \geq 1$ una colección de mapeos $s_j : X_{n-1} \rightarrow X_n$ llamados *mapeo degenerado*.
- Los mapeos s_j y d_i satisfacen las ecuaciones 2.

$$X_0 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} X_1 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} X_2 \quad \dots X_n \quad \dots$$

Ejemplo 1.1.2 El conjunto simplicial $\Delta^n : \Delta^{op} \rightarrow Set$ definido como $(\Delta^n)([m]) = \Delta_m^n = hom_{\Delta}([m], [n])$ es llamado *conjunto simplicial estándar*.

Recordemos que un mapeo entre dos complejos simpliciales queda determinado por la imagen de sus vértices bajo el mapeo, así el conjunto simplicial $\Delta^n(m)$, con $m \leq n$, es la identificación de todos los subcomplejos de un complejo simplicial de n vértices. Ya que

$$\Delta_m^n = hom_{\Delta}([m], [n]) = \{(a_0, a_1, \dots, a_m) : 0 \leq a_i \leq a_j \leq n \text{ donde } i \leq j\}.$$

Los elementos de X_n son llamados n -simplejos de X , en el caso particular de X_0 sus elementos son llamados vértices.

Definición 1.1.6 La i -ésima cara $\delta_i \Delta^n$ de Δ^n es el subconjunto simplicial generado por $d_i \in \Delta_{n-1}^n$. La n -esfera simplicial $\delta \Delta^n$ de Δ^n es su subconjunto simplicial definido por la unión de $\delta_i \Delta^n$, equivalentemente, es el conjunto simplicial generado por $\{d_0, d_1, \dots, d_n\} \subset \Delta_{n-1}^n$ o bien el coigualador en

$$\coprod_{i < j \leq n} \Delta^{n-2} \rightrightarrows \coprod_{i < n} \Delta^{n-1} \longrightarrow \delta \Delta^n .$$

Definición 1.1.7 Un *mapeo simplicial* $f : X \rightarrow Y$ es una sucesión de funciones $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ para $n \geq 0$ tal que $f_{n-1} d_i = d_i f_n$ y $f_{n+1} s_i = s_i f_n$, esto es que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccccc} X_{n+1} & \xleftarrow{s_i} & X_n & \xrightarrow{\quad} & X_{n-1}^{\vee} \\ \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ Y_{n+1} & \xleftarrow{s_i} & Y_n & \xrightarrow{\quad} & Y_{n-1} \end{array} .$$

Si cada X_n es subconjunto de Y_n tal que la inclusión $X_n \rightarrow Y_n$ forma un mapeo simplicial, entonces se dice que X es un *subconjunto simplicial de Y* .

Denotemos por Ss a la categoría de conjuntos simpliciales donde sus objetos son conjuntos simpliciales y su clase de morfismos consta de los mapeos entre conjuntos simpliciales con la composición de transformaciones naturales usual.

Definición 1.1.8

- Sea X un conjunto simplicial y $A = \{A_n\}_{n \in N}$ con $A_n \subseteq X_n$. El *subconjunto simplicial de X generado por A* es definido por

$$\langle A \rangle = \bigcap \{Y \subset X \mid Y \text{ es subconjunto simplicial de } X \text{ y } A_n \subset Y_n\}$$

consiste de los elementos de X que pueden ser escritos como iteraciones de composiciones de caras y degenerados de elementos de A .

- Sea X un conjunto simplicial y $x_0 \in X_0$. Entonces la imagen del mapeo $f_{x_0} : \Delta^0 \rightarrow X$ es un subconjunto simplicial de X el cual consiste de un solo elemento $f_{x_0}(0, 0, \dots, 0) = s_1(x_0)$ en cada dimensión. Así, un *punto base* $*$ de X es una sucesión de elementos $\{f_{x_0}(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ correspondiente al elemento $x_0 \in X_0$.
- Un *conjunto simplicial punteado* es un conjunto simplicial con punto base y un mapeo simplicial punteado es un mapeo simplicial que preserva puntos base.
- Un conjunto simplicial X es llamado *reducido* si X_0 tienen un solo elemento.

Notemos que un conjunto simplicial reducido tienen una única elección de punto base. Mas aún, cualquier mapeo entre conjuntos simpliciales reducidos es punteado.

Ejemplo 1.1.3 Sea X un conjunto simplicial punteado. El *cono reducido* CX es definido como

$(CX)_n = \{(x, q) | x \in X_{n-q}, 0 \leq q \leq n\}$ con $(*, q)$ identificando el punto base $*$. Definiendo:

$$\begin{aligned}
 d_i(x, q) &= (x, q-1) & \text{si } 0 \leq i < q \\
 d_i(x, q) &= (d_{i-q}(x), q) & \text{si } q \leq i \leq n \\
 s_i(x, q) &= (x, q+1) & \text{si } 0 \leq i < q \\
 s_i(x, q) &= (s_{i-q}, q) & \text{si } q \leq i \leq n
 \end{aligned} \tag{3}$$

para cada $x \in X_0$ se tiene $d_1(x, 1) = *$. Por la identificación de x con $(x, 0)$ se tiene que X es subconjunto simplicial de CX . La *suspensión reducida* ΣX es definida por $\Sigma X = CX/X$.

Otra descripción de la construcción de CX es: Dado cualquier conjunto simplicial X , sin haber elegido punto base, tomemos y_0 un punto no perteneciente a X , así definamos $\mathfrak{R}CX$ como:

$$(\mathfrak{R}CX)_n = X_n \sqcup s_{-1}(X_{n-1}) \sqcup \dots \sqcup s_{-1}^n(X_0) \sqcup s_0^n(y_0) = s_0^n(y_0) \sqcup_{k=0}^n s_{-1}^k(X_{n-k})$$

la unión disjunta, como conjuntos, donde $s_{-1}(X_j) = X_j$. Respecto s_{-1} como la -1 -ésima operación degenerada. De las identidades simpliciales se tienen :

$$\begin{aligned}
 d_i s_{-1} &= id & \text{si } i = 0 \\
 d_i s_{-1} &= s_{-1} d_i & \text{si } i > 0 \\
 s_i s_{-1} &= s_{-1} s_{-1} & \text{si } i = 0 \\
 s_i s_{-1} &= s_{-1} s_{i-1} & \text{si } i > 0,
 \end{aligned} \tag{4}$$

las cuales inducen las operaciones d_i y s_i con $\mathfrak{R}CX$ como en 3 identificando $s_{-1}^q(x)$ con (x, q) , donde $d_1(s_{-1}(x)) = y_0$ para $x \in X_0$. El conjunto simplicial resultante $\mathfrak{R}CX$ es llamado *cono irreducible de X* . El cono reducido CX es

entonces el cociente de $\mathfrak{R}CX$ dado la relación $x_0 \sim y_0$ y $(x_0, 1) = s_{-1}x_0 \sim (s_0x_0, 0) = s_0x_0 \sim s_0y_0$ para el vértice base $x_0 \in X_0$.

Proposición 1.1.2 (Criterio de contracción) Sea X un conjunto simplicial punteado. Entonces la inclusión $j : X \rightarrow CX$ admite una retracción simplicial si y sólo si existe una función $s_{-1} : X_n \rightarrow X_{n+1}$ para $n \geq 0$ tal que $s_{-1}(\ast) = \ast$ y 4 se cumplen.

Demostración. [\Rightarrow] Supongamos que existe un retracto $r : CX \rightarrow X$ tal que $r \circ j = id_x$. Definamos $s_{-1}(x) = r(x, 1)$ para $x \in X_n$

$$d_i s_{-1}(x) = d_i r(x, 1) = r d_i(x, 1) = r(d_i s_{-1}(x, 0))$$

$$s_i s_{-1}(x) = s_i r(x, 1) = r s_i(x, 1) = r(s_i s_{-1}(x))$$

y 4 se cumple.

[\Leftarrow] Supongamos que existe $s_{-1} : X_n \rightarrow X_{n+1}$ tal que $s_{-1}(\ast) = \ast$ y cumple 4. Definamos la función $r : CX \rightarrow X$ como $r(x, 0) = x$ y $r(x, q) = s_{-1}^q(x)$ para $q > 0$. Entonces r es un mapeo implicial con $r|_X = id$. \vdash

Teorema 1.1.3 (Criterio de la homotopía nula) Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo simplicial punteado. Entonces el problema de extensión

$$\begin{array}{ccc} CX & \xrightarrow{\bar{f}} & Y \\ \uparrow & \nearrow f & \\ X & & \end{array}$$

tiene como solución un mapeo simplicial \bar{f} si y sólo si existe $F : X_n \rightarrow Y_{n+1}$ para $n \geq i$ tal que cumple

- $d_0 F = f$ y $d_i F = F d_{i-1}$.
- $s_i F = F s_i$ para $i > 0$.

Demostración. [\Rightarrow] Supongamos que \bar{f} existe. Definamos $F(x) = \bar{f}(x, 1)$ para $x \in X_n$. Entonces F satisface las condiciones.

[\Leftarrow] Supongamos que existe $F : X_n \rightarrow Y_{n+1}$ que satisface las condiciones. Definamos $\bar{f} : CX \rightarrow Y$ por

$$\bar{f}(x, q) = \begin{cases} f(x) & \text{para } q = 0 \\ F(x) & \text{para } q = 1 \\ s_0^{q-1} F(x) & \text{para } q \geq 2. \end{cases}$$

Notemos que $\bar{f}|_X = f$ y demostramos que $d_j \bar{f}(x, q) = \bar{f} d_j(x, q)$ y $s_j \bar{f}(x, q) = \bar{f} s_j(x, q)$.

Consideremos $j > 0$, entonces

$$d_j \bar{f}(x, q) = d_j s_0^{q-1} F(x) = \begin{cases} d_0 F(x) & \text{para } j=0 \text{ y } q=1 \\ s_0^{q-2} F(x) & 0 \leq j \leq q \text{ y } q \geq 2 \\ s_0^{q-1} d_{j-q+1} F(x) & \text{para } j \geq q \end{cases}$$

y además

$$\bar{f}(d_j(x, q)) = \begin{cases} f(x) & \text{para } j=0 \text{ y } q=1 \\ \bar{f}(x, q-1) = s_0^{q-2}F(x) & \text{para } 0 \leq j \leq q \text{ y } q \geq 2 \\ \bar{f}(d_{j-q}(x, q)) = s_0^{q-1}F(d_{j-q}(x)) & \text{para } j \geq q, \end{cases}$$

donde $d_0F(x) = f(x)$ y $d_iF(x) = F(d_i(x))$ para $i > 0$, $d_j\bar{f}(x, q) = \bar{f}(d_j(x, q))$ para cualquier x y q .

Ahora observemos que

$$s_j\bar{f}(x, q) = s_j s_0^{q-1}F(x) = \begin{cases} s_0^q F(x) & \text{para } 0 \leq j \leq q \\ s_0^{q-1} s_{j-q+1} F(x) & \text{para } j \geq q \end{cases}$$

$$\bar{f}s_j(x, q) = \begin{cases} \bar{f}(x, q+1) & \text{para } 0 \leq j \leq q \\ \bar{f}(s_{j-q}x, q) = s_0^{q-1}F(s_{j-q}x) & \text{si } j \geq q, \end{cases}$$

donde $s_iF(x) = F(s_{i-1}(x))$ para $i > 0$, $\bar{f}(x, q) = \bar{f}(s_j(x, q))$ para cualesquiera x y q .[†]

Proposición 1.1.4 Sea X un conjunto simplicial y sea $x \in X_n$ un elemento. Entonces existe un único mapeo simplicial $f_x : \Delta^n \rightarrow X$ tal que $f_x(\sigma_n) = x$, donde $\sigma_n = (0, 1, \dots, n) \in \Delta^n([n])$.

Definición 1.1.9 Sea X un conjunto simplicial y sea $x \in X_m$ un m -simplejo de X . Decimos que x es *degenerado* si existe una suprayectiva $\eta : [n] \rightarrow [m]$ con $m < n$ y un n -simplejo y tal que $x = X(\eta)(y)$.

Lema de Eilenberg-Zilber 1.1.5 Para cada m -simplejo $x \in X$, se tiene una suprayectiva $s : [m] \rightarrow [n]$ y un n -simplejo y no degenerado tal que $x = X(s)(y)$. Más aún, el par (s, y) es único.

Demostración. Supongamos que (s, y) y (\bar{s}, \bar{y}) son dos pares que satisfacen que $X(\bar{s})(\bar{y}) = x = X(s)(y)$ con $s : [m] \rightarrow [n]$ y $\bar{s} : [m] \rightarrow [\bar{n}]$ y consideremos σ y $\bar{\sigma}$ secciones de s y \bar{s} respectivamente, así se tiene

$$y = X(\sigma)(x) \text{ y } \bar{y} = X(\bar{\sigma})(x).$$

Por lo tanto $y = X(\sigma)(x) = X(\sigma)X(\bar{s})(\bar{y}) = X(\bar{s}\sigma)(\bar{y})$, donde y es no degenerado y $\bar{s}\sigma$ es un monomorfismo, por lo que $\bar{n} \leq n$.

Análogamente se tiene que $\bar{y} = X(\bar{\sigma})(x) = X(\bar{\sigma})X(s)(y) = X(\bar{\sigma}s)(y)$, por lo que $n \leq \bar{n}$ y por lo tanto $n = \bar{n}$.

Se sigue que $\bar{s}\sigma$ es una biyección no creciente, es decir, coincide con el mapeo identidad en $[n]$ por lo que $y = \bar{y}$ y $s = \bar{y}$.[†]

Una interpretación del lema de Eilenberg-Zilber en la categoría Δ es considerando el siguiente cuadro conmutativo de suprayectivas, considerando el pushout

$[\bar{n}] \amalg^{s, \bar{s}} [n]$ el cual coincide con la suma amalgamada de conjuntos.

$$\begin{array}{ccc} [m] & \xrightarrow{s} & [n] \\ \downarrow \bar{s} & & \downarrow in_1 \\ [\bar{n}] & \xrightarrow{in_2} & [\bar{n}] \amalg^{s, \bar{s}} [n] \end{array}$$

Aplicando el funtor $\bar{\Delta} : \Delta^{op} \rightarrow Ss$ definido como $\bar{\Delta}([n]) = \Delta^n$, se tiene el siguiente diagrama en Ss :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Delta}([m]) & \xrightarrow{\bar{\Delta}(s)} & \bar{\Delta}([n]) \\ \downarrow \bar{\Delta}(\bar{s}) & & \\ \bar{\Delta}([\bar{n}]) & & \end{array}$$

Sean $Y : \Delta^n \rightarrow X$ y $\bar{Y} : \Delta^{\bar{n}} \rightarrow X$ tal que $\bar{Y}\bar{s} = Ys$ y sean y y \bar{y} los n -simplejos para los cuales Y y \bar{Y} son sus mapeos característicos (proposición 1.1.4), se tiene que $X(s)(y) = X(\bar{s})(\bar{y})$. Por el lema anterior se tienen $t : [n] \rightarrow [p]$ y $\bar{t} : [\bar{n}] \rightarrow [\bar{p}]$ y simplejos no degenerados $z \in X_p$ y $\bar{z} \in X_{\bar{p}}$ tales que $y = X(t)(z)$ y $\bar{y} = X(\bar{t})(\bar{z})$. Por lo tanto se tiene $X(ts)(z) = X(s)(y) = X(\bar{s})(\bar{y}) = X(\bar{t}\bar{s})(\bar{z})$ y por unicidad se tiene que $ts = \bar{t}\bar{s}$ y $z = \bar{z}$, lo cual implica la existencia de un mapeo $r : [\bar{n}] \amalg^{s, \bar{s}} [n] \rightarrow [p]$ tal que $t = rin_1$ y $\bar{t} = rin_2$.

Si $Z : \Delta^p \rightarrow X$ es el simplejo asociado a z se tiene $Y = Z\Delta^t = Z\Delta^r\Delta^{in_1}$ y $\bar{Y} = Z\Delta^{\bar{t}} = Z\Delta^r\Delta^{in_2}$. Así Y y \bar{Y} pueden ser factorizados a través de $[\bar{n}] \amalg^{s, \bar{s}} [n]$.

1.2. El n -esqueleto de un conjunto simplicial

Definamos la categoría plena y fiel Δ_n por :

- $Obj(\Delta_n) = \{[m] : \text{tal que } m \leq n\}$
- $Mor(\Delta_n) = \{\alpha : [m] \rightarrow [p] : \text{tal que } \alpha \in Mor(\Delta) \text{ y } [m], [p] \in Obj(\Delta_n)\}$

Llamaremos un *conjunto simplicial n -truncado* al funtor $X : \Delta_n^{op} \rightarrow Set$. Denotemos a la categoría de conjuntos simpliciales n -truncados por Ss_n . El funtor inclusión $I_n : \Delta_n \rightarrow \Delta$ nos induce el funtor n -truncado $tr^n : Ss \rightarrow Ss_n$ que asigna al conjunto simplicial X el conjunto simplicial n -truncado $tr^n(X) = X \circ I_n$.

El funtor tr^n tiene como adjunto izquierdo al funtor $sk^n : Ss_n \rightarrow Ss$ definido por

$$sk^n(X) = \lim_{\Delta_n[P] \rightarrow X} \Delta[P].$$

Definamos al *n -esqueleto de X* como $Sk^n X = sk^n tr^n X$ para cualquier conjunto simplicial X . Notemos que para $m \leq n$ se tiene que $(Sk^n X)_m \approx X_m$ y para $m \geq n$ se tiene que $(Sk^n X)_m$ consiste de símplices degenerados.

Proposición 1.2.1 Para cualquier conjunto simplicial X , el morfismo $Sk^n X \rightarrow X$ es un monomorfismo.

Demostración. Para demostrar la proposición bastará demostrar la siguiente afirmación: Sea $\Psi : Z \rightarrow X$ un mapeo simplicial tal que para $p \leq n$ el mapeo Ψ_p es un monomorfismo y para $q > n$ todo q -simplejo de Z es degenerado, entonces Ψ es inyectiva para todo p .

Para demostrar la afirmación notemos que es clara para $p \leq n$; por lo que consideremos el caso $q > n$, tomemos $z, \bar{z} \in Z_q$ tal que $\Psi_q(z) = \Psi_q(\bar{z})$ por el lema de Eilenberg se tienen suprayectivas $s : [q] \rightarrow [p]$ y $\bar{s} : [q] \rightarrow [\bar{p}]$ y dos simplejos x y \bar{x} tal que $z = Z(s)(x)$ y $\bar{z} = Z(\bar{s})(\bar{x})$ con $p, \bar{p} \leq n$, así Ψ_p y $\Psi_{\bar{p}}$ son inyectivas y $\Psi_p(x)$ y $\Psi_{\bar{p}}(\bar{x})$ son no degenerados. Por lo que $(s, \Psi_p(x))$ y $(\bar{s}, \Psi_{\bar{p}}(\bar{x}))$ descomponen a $\Psi_q(z)$ y $\Psi_q(\bar{z})$. Del hecho de que $\Psi_q(z) = \Psi_q(\bar{z})$ se tiene que $s = \bar{s}$, $p = \bar{p}$ y $x = \bar{x}$. Por lo tanto $z = \bar{z}$. \dashv

Decimos que X es de *dimensión menor o igual a n* si $Sk^n(X) = X$. La adjunción $sk^n \vdash tr^n$ nos aporta una equivalencia entre la categoría de conjuntos simpliciales de dimensión menor a n y la categoría de los conjuntos simpliciales n -truncados.

El funtor tr^n tiene como adjunto derecho al funtor csk^n definido como $csk(x)_{[m]} \approx hom_{S_s}(\Delta^m, csk^n(X)) \approx hom_{S_s}(tr^n \Delta^m, X)$. Llamaremos el n -coesqueleto de X a $Csk^n(X) = csk^n tr^n(X)$ en la fórmula

$$Csk^n(X)_{[m]} \approx hom_{S_s}(\Delta^m, Csk^n(X)) \approx hom_{S_s}(Sk^n(\Delta^m), X).$$

Notemos que para cualquier conjunto simplicial X se tiene la siguiente filtración

$$\emptyset = Sk^{-1} \subset Sk^0(X) \subset Sk^1(X) \subset \dots$$

llamada *filtración esqueleto de X* y además $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sk^n(X)$. El 0-esqueleto de X $Sk^0(X)$ es de dimensión 0 (o discreto) y tiene los mismos vértices que X . Más generalmente se puede obtener Sk^n a partir de Sk^{n-1} definiendo el conjunto Σ^n como el conjunto de n -simplejos no degenerados de X . Sea $(\Delta_\alpha^n)_{\alpha \in \Sigma^n}$ la familia de n -simplejos estandar indexados en Σ^n y $\bar{\sigma} : \Delta_\alpha^n \rightarrow X$ el simplejo asociado al simplejo no degenerado $\sigma \in \Sigma^n$.

Proposición 1.2.2 El siguiente diagrama es un pushout

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma \in \Sigma^n} \delta \Delta_\sigma^n & \longrightarrow & Sk^{n-1}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\sigma \in \Sigma^n} \Delta_\sigma^n & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & Sk^n(X) \end{array} .$$

Demostración. Por la equivalencia entre los conjuntos simpliciales n -truncados y los de dimensión menor que n ; en el caso de que $p < n$ las verticales en el siguiente diagrama son biyecciones

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma \in \Sigma^n} (\delta \Delta_\sigma^n)_p & \longrightarrow & (Sk^{n-1}(X))_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\sigma \in \Sigma^n} (\Delta_\sigma^n)_p & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & (Sk^n(X))_p \end{array} .$$

Para el caso en que $p = n$ notemos que el complemento de $\coprod(\delta\Delta_\sigma^n)_p$ en $\coprod(\Delta_\sigma^n)_p$ es formado por los símplices fundamentales $Id[n]_\sigma$, similarmente el complemento de $(Sk^{n-1}(X))_p$ en $(Sk^n(X))_p$ es formado por todos los n -símplices no degenerados de X . El mapeo $(\bar{\sigma})_n$ induce una biyección del complemento de $\coprod(\delta\Delta_\sigma^n)_p$ sobre el complemento de $(Sk^n(X))_p$. Por lo que $Sk^n X = Sk^{n-1} \cup \Sigma^n$ y el diagrama es un pushout. \vdash

1.3. Triangulación de Categorías

Definición 1.3.1 Sea $P : C^{op} \rightarrow Set$ un funtor. La **categoría de elementos de P** es la categoría $\int_c P$ cuyos elementos son los pares (c, p) para $c \in Obj(C)$ y $p \in P(C)$ y un morfismo $(c, p) \rightarrow (\bar{c}, \bar{p})$ entre dos elementos de $\int_c P$ es un morfismo $f : c \rightarrow \bar{c}$ en C tal que $P(f)(\bar{p}) = p$.

Teorema 1.3.1 Sea $F : C \rightarrow D$ un funtor de una categoría pequeña C a una cocompleta D . El funtor $R : D \rightarrow Set^{C^{op}}$ definido por $R(D)(C) = hom_D(F(C), D)$ tiene adjunto izquierdo $L : Set^{C^{op}} \rightarrow D$ enviando la pregavilla

P a un colímite $L(P) = Colim(\int_c P \xrightarrow{\Pi_p} C \longrightarrow D)$

Demostración. Probaremos que $hom_D(L(P), D) \cong hom_{Set^{C^{op}}}(P, R(D))$. Sea $\Phi : P \rightarrow R(D)$ una transformación natural y $f : C \rightarrow \bar{C}$ un morfismo en C por lo que tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} P(C) & \xrightarrow{\Phi_C} & hom_D(F(C), D) \\ P(f) \downarrow & & \downarrow \\ P(\bar{C}) & \xrightarrow{\Phi_{\bar{C}}} & hom_D(F(\bar{C}), D) \end{array} .$$

Observemos que cada morfismo Φ_C asigna a cada $p \in P(C)$ un morfismo $\Phi_C(p) : F(C) \rightarrow D$. Por lo que podemos considerar a Φ como una familia de flechas $\Phi_C(P)$ indexada sobre elementos (C, p) de $\int_c P$. Lo que nos proporciona un triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F\Pi_p(c, P(f)(p)) = F(C) & & \\ \downarrow F(f) & \searrow \Phi_C(Pf(\bar{p})) & \\ F\Pi_p(\bar{C}, \bar{p}) = F(\bar{C}) & \xrightarrow{\Phi_C(\bar{p})} & D \end{array} .$$

Por la propiedad universal del colímite se tiene un morfismo único $\bar{\Phi} : L(P) \rightarrow D$. Obteniendo así la adjunción isomorfa. \vdash

En el caso particular cuando $C = \Delta$ se tiene que $Set^{C^{op}} = Ss$ y recordando

el functor $\bar{\Delta} : \Delta \rightarrow Ss$ tenemos la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \xrightarrow{F} & D \\ & \searrow \bar{\Delta} & \nearrow L(P) \\ & & Ss \end{array} \quad .$$

Primero analicemos el caso cuando $D = Cat$. Recordemos

- Una categoría A se dice que es pequeña si la clase de objetos $Ob(A)$ es un conjunto.

- La categoría Cat de todas las categorías pequeñas se define como

$$Ob(Cat) = \{A : A \text{ es una categoría pequeña}\}.$$

$$Mor(Cat) = \{F : A \rightarrow B : F \text{ es functor; } A, B \in Ob(Cat)\}.$$

Así definimos el functor $F_1 : \Delta^{op} \rightarrow Cat$ de la siguiente manera:

- Sea $[n] \in Ob(\Delta^{op})$, $F_1([n]) = [n]$ (Visto como una categoría con su orden natural) .
- Para $\alpha \in Mor(\Delta^{op})$ se define $F_1(\alpha)$ como una inclusión.

Por lo que podemos extender el functor F_1 a $L_1 : Ss \rightarrow Cat$ definido por

$$L_1(X) = \lim_{\Delta^n \rightarrow X} [n]$$

para cualquier conjunto simplicial X . $L_1(X)$ es llamado *la categoría fundamental de X* que tiene como adjunto al functor $N : Cat \rightarrow Ss$ definido por

$$N(A)_m = hom_{Cat}([m], A)$$

para cualquier categoría pequeña A .

Introduciendo el functor tr^2 obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & Ss \\ \uparrow & & \searrow L_1 \\ \Delta_2 & \longrightarrow & Ss_2 \\ & & \nearrow N \\ & & Cat \end{array} \quad .$$

Así podemos definir la categoría fundamental de los conjuntos simpliciales 2-truncados como $L_1^2 = \lim_{\Delta_2^n \rightarrow X} [n]$ y su adjunto $N^2 : Cat \rightarrow Ss_2$ como $N^2(A)_p = tr^2 N(A)_p = hom_{Cat}([p], A)$ para $p \leq 2$

Proposición 1.3.2 Si A es una categoría pequeña, el mapeo $\rho : NA \rightarrow Cosk^2 NA$ es un isomorfismo.

Demostración. Notemos que el mapeo ρ_n es equivalente a $hom_{Cat}([n], A) \rightarrow hom_{Ss}(Sk^2 \Delta^n, NA)$ y que si cada mapeo $\alpha : Sk^2 \Delta^2 \rightarrow NA$ puede ser extendido

a un mapeo $\Delta^2 \rightarrow NA$, entonces ρ es biyectiva. Observemos que $\alpha : Sk^1\Delta^2 \rightarrow NA$ es un mapeo de gráficas el cual manda a $i \in [n]$ a un elemento $a_i \in A_0$ y a cada par $i < j$ a una flecha $a_{ij} : a_i \rightarrow a_j$. Recordemos que $Sk^2\Delta^2 = Sk^1X \cup \Sigma^2$ por lo que α se puede extender a $Sk^2\Delta^2 \rightarrow NA$ si y sólo si para $i < j < k$ se tiene que $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ lo cual se cumple ya que Σ^2 esta formado por n -símplices no degenerados. Por lo que α puede ser extendido a $\Delta^n \rightarrow NA$. \vdash

Lema 1.3.3 Si $n > 2$ la inclusión $\delta\Delta^n \rightarrow \Delta^n$ induce un isomorfismos entre $L_1(\delta\Delta^n) \rightarrow L_1(\Delta^n)$. Si $n = 1$, $L_1(\delta\Delta^n)$ es una categoría discreta. Si $n = 2$, $L_1(\delta\Delta^n)$ tiene 3 objetos X_0, X_1, X_2 y 4 morfismos.

Demostración. Para $n = 1$ es claro. Consideremos $n > 1$ y el diagrama

$$\coprod_{i \leq j \leq n} \Delta_{i,j}^{n-2} \xrightarrow[u]{v} \coprod_{i \leq n} \Delta_i^{n-1} .$$

Como L_1 conmuta con límites directos $L_1(\delta\Delta^n)$ es identificado con el corkernel del par

$$\coprod_{i \leq j \leq n} L_1(\Delta_{i,j}^{n-2}) \xrightarrow[L_1(u)]{L_1(v)} \coprod_{i \leq n} L_1(\Delta_i^{n-1}) .$$

Escribamos $[P_k] = \{m \in [p] | m \neq k\}$ y $[p_{k,l}] = \{m \in [p] | m \notin \{k, l\}\}$. Así, los mapeos $L_1(u)$ y $L_1(v)$ son identificados en

$$\coprod_{i \leq j \leq n} F_1([n_{i,j}]) \xrightarrow[\bar{u}]{\bar{v}} F_1([n]_i) ,$$

donde \bar{u} y \bar{v} son inducidos por la inclusión de $[n_{i,j}]$ en $[n_i]$ y $[n_j]$ respectivamente. De aquí se induce la estructura de $L_1(\Delta^2)$.

Para $n > 2$, consideremos $\alpha = (a, a_1)(a_1, a_2) \dots (a_k, b)$ un morfismo en $PA(F_1([n]))$ con $\{a, a_1, a_2\} \subset [n_i]$. Por lo que (a, a_2) y $(a, a_1)(a_1, a_2)$ tienen la misma imagen en el corkernel (\bar{u}, \bar{v}) , lo cual muestra que \bar{u} y \bar{v} se conectan por uno y solo un morfismo. \vdash

Recordemos que un grafo consiste en dos conjuntos E (aristas) y V (vértices) y dos funciones $s : E \rightarrow V$ (origen) y $t : E \rightarrow V$ (destino). Sea $G(E, V, s, t)$ un grafo, definamos la categoría libre del grafo G , denotado por $C(G)$, como

$$V = Obj(C(G)) \text{ y } \{a | a = a_1 a_2 \dots a_n \in E\} = Mor(C(G)).$$

Para cada vértice $v \in V$ se tiene un camino vacío, denotado por 1_v , como la identidad en v .

Si G tiene un solo vértice entonces $C(G)$ es un monoide libre sobre el conjunto de aristas de G . Más formalmente tenemos un funtor $H : Graph \rightarrow Cat$ definido como antes, y un funtor que olvida $U : Cat \rightarrow Graph$ tal que dado una categoría pequeña C , $U(C)$ es el grafo donde $V = Obj(C)$, $E = Mor(C)$, $s = dom$ y $t = cod$.

Sea X un conjunto simplicial. Tomando el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma \in \Sigma^n} \delta \Delta_{\sigma}^n & \longrightarrow & Sk^{n-1}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\sigma \in \Sigma^n} \Delta_{\sigma}^n & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & Sk^n(X) \end{array} .$$

Se induce un pushout aplicando el funtor L_1

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma \in \Sigma^n} L_1(\delta \Delta_{\sigma}^n) & \longrightarrow & L_1(Sk^{n-1}(X)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\sigma \in \Sigma^n} L_1(\Delta_{\sigma}^n) & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & L_1(Sk^n(X)) \end{array} .$$

Para $n > 2$ la flecha izquierda es un isomorfismo y por lo mismo la de la derecha, así

$$L_1(X) = \varinjlim L_1(Sk^n X) = L_1(Sk^2 X).$$

Una descripción fácil de $L_1(Sk^2 X)$ seria :

- $L_1(Sk^0 X) = X_0$ (discreto).
- Para $n=1$, los objetos de la categoría $L_1(Sk^1 X)$ son elementos X_0 . Cada elemento de $x \in X_1$ se le asocia un morfismo $x : d_1 x \rightarrow d_0 x$. Entonces el conjunto de morfismos de $L_1(Sk^1 X)$ es generado por elementos de X_1 , los cuales verifican la relación $s_0 x = id_x$ para $x \in X_0$

Proposición 1.3.4 Sea X un conjunto simplicial y \bar{X} el diagrama asociado definido por las ecuaciones $Ob(\bar{X}) = X_0$, $Mor(\bar{X}) = X_1$, $d_x = d_1^1 x$ y $t_x = d_0^1 x$. La categoría $L_1(X)$ es el cociente de la categoría $PA\bar{X}$ de caminos de \bar{X} por la relación $s_0 x = id_x$ para $x \in X_0$ y $(d_0 \sigma)(d_2 \sigma) = d_1 \sigma$ para $\sigma \in X_2$

$$X_0 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \end{array} X_1 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \leftarrow \\ \rightleftarrows \\ \rightarrow \\ \longrightarrow \end{array} X_2 .$$

Demostración. La demostración de la proposición 1.3.4 puede consultarse en [10] capítulo 4.

Ahora definamos el funtor $F_2 : \Delta^{op} \rightarrow Top$ como

- $F_2([n]) = T_n = \{x \in R^{n+1} : x = \sum_{i=0}^n t_i e_i \text{ con } \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$ donde e_i es el vector canónico $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$.
- si $\alpha : [m] \rightarrow [n]$, entonces $F_2(\alpha) : T_m \rightarrow T_n$ se define como $F_2(\alpha)(x) = \sum_{i=0}^{n+1} t_i e_{\alpha(i)}$.

Definamos los mapeos $F_2(d_i) = d^i : T_{n-1} \rightarrow T_n$ y $F_2(s_i) = s^i : T_{n+1} \rightarrow T_n$ por

$$\begin{aligned} d^i(t_0, t_1, \dots, t_n) &= (t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_n) \\ s^i(t_0, \dots, t_{n+2}) &= (t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, \dots, t_{n+2}). \end{aligned}$$

Por lo que podemos extender los funtores de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^{op} & \xrightarrow{F_2} & Top \\
 & \searrow \bar{\Delta} & \nearrow |\cdot| \\
 & & Ss \xleftarrow{sig}
 \end{array}
 .$$

El funtor $sig : Top \rightarrow Ss$ es llamado *el funtor singular* mandando a cada espacio topológico X a su *complejo singular* $sig(X)$ definido por

$$sig(X)_n = hom_{Top}(T_n, X)$$

El funtor $|\cdot| : Ss \rightarrow Top$ es llamado *realización geométrica* y está definido por

$$|X| = \lim_{\Delta^n \rightarrow X} T_n$$

Dado un conjunto simplicial X , otra forma de describir la realización geométrica es como

$$|X| = \coprod_{x \in X_n, n \geq 0} (T_n, x) / \sim = \coprod_{x \in X_n, n \geq 0} T_n \times X_n / \sim,$$

donde (T_n, x) se obtiene identificando a $x \in X_n$ el espacio topológico estándar T_n y \sim es generada por $(z, d_i x) \sim (d^i z, x)$ para $x \in X_n$ y $z \in T_{n-1}$ asignado a $d_i x$ y $(z, s_i x) \sim (s^i z, x)$ para $x \in X_n$ y $z \in T_{n+1}$ asignado a $s_i x$. Notemos que los puntos en $(T_{n+1}, s_i x)$ y $(T_{n-1}, d_i x)$ son identificados con un punto en (T_n, x) .

El funtor realización relaciona los conjuntos simpliciales con espacios topológicos, por lo que resulta natural que el homeomorfismo entre S^1 y un 1-simplejo (como complejo simplicial) induzca una propiedad semejante a los conjuntos simpliciales, a saber, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 1.3.5 Sea X un conjunto simplicial. Entonces $|X|$ es un CW-complejo con una n-celda por cada n-símplice no degenerado.

Demostración. Consideremos el diagrama pushout

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{x \in \Sigma^n} \delta \Delta^n & \longrightarrow & Sk^{n-1} X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \coprod_{x \in \Sigma^n} \Delta^n & \longrightarrow & Sk^n X
 \end{array}
 .$$

Aplicando el funtor realización obtenemos

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{x \in \Sigma^n} |\delta \Delta^n| & \longrightarrow & |Sk^{n-1} X| \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \coprod_{x \in \Sigma^n} |\Delta^n| & \longrightarrow & |Sk^n X|
 \end{array}
 .$$

Por lo que $|X|$ se adjunta celda por celda, entonces $|X|$ es un CW-complejo.

Definición 1.3.2 Se dice que un subconjunto $Y \subset X$ es *K-cerrado* si $u^{-1}(Y)$ es cerrado en K para cada espacio compacto K y cada mapeo continuo $u : K \rightarrow X$. Escribamos $\kappa(\zeta)$ la colección de conjuntos K -cerrados. Denotemos por κX el conjunto X equipado con la topología inducida por $\kappa(\zeta)$. Decimos que X es *generado compactamente* si $\kappa X = X$

Teorema 1.3.6 Sean X y Y conjuntos simpliciales. $\eta : |X \times Y| \rightarrow \kappa(X \times Y)$ es un homeomorfismo.

Demostración: Para no desviarnos del objetivo de la tesis, la demostración del teorema 1.3.6 puede ser consultada en [8] capítulo 2.

1.4. EL grupoide fundamental de un conjunto simplicial

Definición 1.4.1 Un grupoide es una categoría pequeña en la cual todos sus morfismos son invertibles.

Denotemos por Gpd a la categoría de grupoides. Definamos el functor $F_3 : \Delta \rightarrow Gpd$ enviando a cada objeto $[n]$ al grupoide $F_3([n]) = G_n = \{1 \rightrightarrows 2 \rightrightarrows \dots n - 1 \rightrightarrows n\}$.

Sea $X_n \times G_n$ el grupoide en el cual sus objetos son pares (x, i) con $x \in X_n$ e $i \in G_n$ y la clase de morfismos son el producto $(1_x, p)$, donde 1_x es el mapeo identidad en x y p es un morfismo invertible en G_n .

Llamaremos *el grupoide fundamental* $\Pi(X)$ de un conjunto simplicial X al colímite del diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_n \times G_m & \xrightarrow{X(f) \times 1_{G_m}} & X_m \times G_m \\ \downarrow 1_x \times G(f) & & \downarrow \\ X_n \times G_n & \longrightarrow & \Pi(X) \end{array} .$$

para cualquier morfismo $f : [m] \rightarrow [n]$. Además, sea $\alpha : X \rightarrow Y$ un mapeo simplicial y consideremos el diagrama tridimensional

$$\begin{array}{ccccc}
& & X_n \times G_m & \xrightarrow{X(f) \times 1_{G_m}} & X_m \times G_m \\
& \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\
X_n \times G_n & \xrightarrow{1_x \times G(f)} & \Pi(X) & \xrightarrow{\alpha_n \times 1_{G_m}} & \Pi(X) \\
\downarrow \alpha_n \times 1_{G_n} & & \downarrow & & \downarrow \alpha_m \times 1_{G_m} \\
& & Y_n \times G_m & \xrightarrow{y(f) \times 1_{G_m}} & Y_m \times G_m \\
& \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\
Y_n \times G_n & \xrightarrow{1_y \times G(f)} & \Pi(Y) & \xrightarrow{\beta_n \times 1_{G_n}} & \Pi(Y)
\end{array}$$

donde la cara superior e inferior conmutan por propiedad del grupoide fundamental mientras que las laterales conmutan por *naturalidad*. Por lo que cualesquiera dos caminos de $X_n \times G_m$ a $\Pi(Y)$ son iguales y por propiedad de $\Pi(X)$ se tiene un mapeo único $\Pi(\alpha) : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$.

Notemos que hemos definido un functor $\Pi : Ss \rightarrow Gpd$ el cual es llamado *functor de grupoide fundamental en X*.

Definición 1.4.2 Un functor $F : C \rightarrow D$ se dice que es:

- *Pleno* si el mapeo $hom_C(X, Y) \rightarrow hom_D(F(X), F(Y))$ inducido por F es suprayectivo para cualesquiera X y Y de C.
- *Fiel* si $hom_C(X, Y) \rightarrow hom_D(F(X), F(Y))$ es inyectiva.
- *Esencialmente suprayectivo* si cada objeto \bar{X} de D es isomorfo a un objeto de la forma $F(X)$ para algún X en C.

Sea K un espacio topológico. Definamos la categoría $\Pi(K)$ como *el grupoide fundamental del espacio K* cuyos objetos son los puntos de K y los morfismos $[f] : x \rightarrow y$ son las clases de homotopia de caminos entre x y y .

Teorema 1.4.1 Sea X un conjunto simplicial. Entonces las categorías $\Pi(X)$ y $\Pi(|X|)$ son equivalentes.

Demostración. Consideremos el punto $(x, e_i) \in X_n \times T_n$ (el cual es un objeto de la categoría $\Pi(|X|)$) y denotemoslo por $\Psi_n(x, i)$. Luego consideremos un morfismo $1_x \times p$ de $X_n \times G_n$ con $p : i \rightarrow j$ al que se le asocia un camino $\alpha : (1-t)e_i + te_j$ en $|X|$ parametrizado por t . La clase homotópica de α es un camino en $\Pi(X)$ al cual denotamos por $\Psi_n(1_x \times p)$.

Aquí hemos definido un functor $\Psi_n : X_n \times G_n \rightarrow \Pi(|X|)$ de grupoides, así por la propiedad universal del grupoide fundamental $\Pi(X)$, se tiene un functor $B : \Pi(X) \rightarrow \Pi(|X|)$ que satisface

$$\begin{array}{ccc}
X_n \times G_m & \longrightarrow & X_m \times G_m \\
\downarrow & & \downarrow \psi_m \\
X_n \times G_n & \xrightarrow{\psi_n} & \Pi(X) \\
& \searrow \Psi_n & \searrow B \\
& & \Pi(|X|)
\end{array}$$

Notemos que cada simplex T_n es simplemente conexo, así cualesquiera dos caminos entre vértices $\Psi_n(x, i)$ y $\Psi_n(x, j)$ en $|X|$ son homotópicos a uno inducido $\Psi_n(1_x \times p)$. Por lo que B es un funtor pleno. Dado que tenemos exactamente un morfismo entre dos objetos de G_n entonces existe un sólo morfismo entre dos objetos de $X_n \times G_n$ por lo que también se tiene una sola flecha para cualesquiera $\psi_n(x, i)$ y $\psi_n(x, j)$ en $\Pi(X)$.

Así cualesquiera dos caminos entre $\Psi_n(x, i)$ y $\Psi_n(x, j)$ de $|X|$ son homotópicos, entonces es la imagen de sólo una flecha bajo el funtor B , por lo que se tiene que B es fiel.

Como T_n es conexo por caminos, se tiene un camino de cualquier punto de $|X|$ a algún $\Psi_n(x, i)$. Donde cada camino en $|X|$ corresponde a una flecha invertible en $\Pi(X)$. Por lo que B es esencialmente suprayectiva.

1.5. Complejo de funciones

Sean X y Y conjuntos simpliciales. El complejo de funciones Y^X es el conjunto simplicial definido como

$$Y_n^X = \text{hom}_{ss}(X \times \Delta^n, Y).$$

Si $\theta : [m] \rightarrow [n]$ en Δ el mapeo inducido $\bar{\theta} : Y_n^X \rightarrow Y_m^X$ se define por la composición $\bar{\theta}(f) = f \circ (1 \times \bar{\Delta}(\theta)) : X \times \Delta^m \rightarrow X \times \Delta^n \rightarrow Y$.

Definamos el mapeo evaluación $ev : X \times Y^X \rightarrow Y$ como $ev(x, f) = f(x)$.

Proposición 1.5.1 La función $ev_* : \text{hom}_{ss}(K, Y^X) \rightarrow \text{hom}_{ss}(X \times K, Y)$ la cual envía un mapeo simplicial $g : K \rightarrow Y^X$ a la composición $ev \circ (1 \times g) : X \times K \rightarrow Y$ es una biyección la cual es natural en K, X y Y .

Demostración Definamos el mapeo inverso $ev_*^{-1} : \text{hom}_{ss}(X \times K, Y) \rightarrow \text{hom}_{ss}(K, Y^X)$ enviando el mapeo $g : X \times K \rightarrow Y$ al mapeo $g_* : K \rightarrow Y^X$ donde, para $x \in K_n$ se define $g_*(x) = (1 \times f_x) \circ g$ donde f_x es la función característica de $x \in K_n$.

1.6. Complejos de Kan

Definición 1.6.1 Un cuerno simplicial Λ_k^n es la unión de todas las caras de Δ^n exceptuando la k -ésima cara, es decir, es el subconjunto simplicial de Δ^n generado por $\{d_0\sigma_n, \dots, d_{k-1}\sigma_n, d_{k+1}\sigma_n, \dots, d_n\sigma_n\}$ para $\sigma_n \in \Delta_n^n$.

Definición 1.6.2 Sea X un conjunto simplicial. Los elementos $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in X_{n-1}$ son llamados *caras coincidentes respecto a i* si $d_j x_k = d_k x_{j+1}$ para $j \geq k$ y $k, j+1 \neq i$. X es llamado *fibrante (o complejo de Kan)* si satisface que si $\{x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\} \subset X_{n-1}$ son caras coincidentes, entonces existe $w \in X_n$ tal que $d_j w = x_j$ para $j \neq i$.

Decimos que un conjunto simplicial X satisface *la condición de extensión* si cada mapeo $f : \Lambda_k^n \rightarrow X$ tiene una extensión $g : \Delta^n \rightarrow X$.

Proposición 1.6.1 Sea X un conjunto simplicial X es fibrante si y sólo si satisface la condición de extensión.

Demostración. Supongamos que X es un conjunto simplicial fibrante. Dado un mapeo simplicial $f : \Lambda_i^n \rightarrow X$ con caras coincidentes $\{f(d_0 \sigma_n), \dots, f(d_{i-1} \sigma_n), f(d_{i+1} \sigma_n), \dots, f(d_n \sigma_n)\}$ por hipótesis existe un elemento $w \in X_n$ tal que $d_j w = f(d_j \sigma_n)$ para $i \neq j$. Así, la función $g = f_w : \Delta^n \rightarrow X$ es una extensión de f .

Luego considérese $\{x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\} \subset X_{n-1}$ caras coincidentes respecto a i , el mapeo caracterizador $f_{x_j} : \Delta^{n-1} \rightarrow X$ define un mapeo simplicial $f : \Lambda_i^n \rightarrow X$ el cual puede ser extendido a $g : \Delta^n \rightarrow X$ que $g|_{\Lambda_i^n} = f$,

$$\begin{array}{ccccc}
 \Delta^{n-1} & \xrightarrow{f_{d_j \sigma_n}} & \Lambda_i^n & \longrightarrow & \Delta^n \\
 & \searrow f_{x_j} & \downarrow f & & \swarrow g \\
 & & X & &
 \end{array}$$

Tomando $w = g(\sigma_n)$ se tiene que $d_j w = d_j g(\sigma_n) = g(d_j \sigma_n) = f(d_j \sigma_n) = x_j$.

Lema 1.6.2 Sea X un complejo de Kan, Y cualquier conjunto simplicial. Entonces el mapeo $f : Y \times \Lambda_k^n \rightarrow X$ puede ser extendido a un mapeo $g : Y \times \Delta^n \rightarrow X$.

Demostración. La demostración del lema 1.6.2 puede ser consultada en [2].

Proposición 1.6.3 Si X es un complejo de Kan entonces X^Y es de Kan.

Demostración. Consideremos las caras coincidentes $\{f_0, f_1, \dots, f_{k-1}, f_{k+1}, \dots, f_n\} \subset (X^Y)_{n-1}$, así para $f_i : Y \times \Delta^{n-1} \rightarrow X$ tomemos Δ^{n-1} como la i -ésima cara de Δ^n , la coincidencia de f_i en Δ^{n-2} nos da un mapeo $f : Y \times \Lambda_k^n \rightarrow X$ el cual se extiende a $g : Y \times \Delta^n \rightarrow X$. Entonces $g \in (X^Y)_n$ cumple $d_i g = f_i$ para $i \neq k$

[Ref2]

Definición 1.6.3 Sea X un conjunto simplicial. Un camino entre x e y es una mapeo simplicial $\alpha : \Delta^1 \rightarrow X$ tal que $d_0 \alpha = \alpha(0) = x$ y $d_1 \alpha = \alpha(1) = y$.

Definición 1.6.4 Sean $f, g : X \rightarrow Y$ mapeos simpliciales, decimos que f es *homotópica a g* ($f \simeq g$) si existe un mapeo $h : X \times \Delta^1 \rightarrow Y$ con $h_0 = f$ y $h_1 = g$.

Notemos que una homotopía es un camino en la clase de morfismos $hom_{ss}(X, Y)$ para cada homotopía $h : X \times \Delta^1 \rightarrow Y$ identificandola con $\alpha : \Delta^1 \rightarrow hom_{ss}(X, Y)$ definida como $\alpha(0) = h_0 = f$ y $\alpha(1) = h_1 = g$.

Lema 1.6.4 Supongamos que X es un conjunto simplicial de Kan. Entonces la homotopía simplicial de vértices $x : \Delta^0 \rightarrow X$ de X es una relación de equivalencia.

Demostración. Una homotopía entre dos vértices $x, y \in X_0$ puede ser vista como un 1-simplejo v tal que $d_0v = x$ y $d_1v = y$, de forma alternativa $\delta v = (x, y)$, en general podemos definir la frontera de un n -simplejo σ como $\delta\sigma = \{d_0\sigma, d_1\sigma, \dots, d_n\sigma\}$.

Así $\delta s_0x = \delta 1_x = (x, x)$, logrando la transitividad. Supongamos que $\delta v_0 = (y, z)$ y $\delta v_2 = (x, y)$, entonces $d_0v_2 = d_1v_0$, así v_2 y v_1 determina un mapeo $(v_1, v_2) : \Lambda_1^2 \rightarrow X$ el cual puede ser extendido a $\theta : \Delta^2 \rightarrow X$.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_1^2 & \xrightarrow{(v_1, v_2)} & X \\ \downarrow & \nearrow \theta & \\ \Delta^2 & & . \end{array}$$

Entonces $\delta(d_1\theta) = (d_0d_1\theta, d_1d_1\theta) = (z, x)$. Luego, dado $\delta v_2 = (y, x)$ y $v_1 = s_0x$ se tiene $d_1v_1 = d_1v_2$ y definen un mapeo $(v_1, v_2) : \Lambda_0^2 \rightarrow X$. Tomando la extensión $\bar{\theta} : \Delta^2 \rightarrow X$ se tiene que $\delta(d_0\bar{\theta}) = (d_0d_0\bar{\theta}, d_1d_0\bar{\theta}) = (d_0d_1\bar{\theta}, d_0d_2\bar{\theta}) = (x, y)$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_0^2 & \xrightarrow{(v_1, v_2)} & X \\ \downarrow & \nearrow \bar{\theta} & \\ \Delta^2 & & . \vdash \end{array}$$

Capítulo 2

Estructura homotópica de Quillen

Este capítulo está centrado en dar nociones sobre la *categoría de modelos* desarrollando, de forma elemental, el estudio de *estructura homotópica de Quillen* sobre la categoría de espacios topológicos y de grupoides.

2.1. Estructura Homotópica en Top y Gpd

Definición 2.1.1 Sea \mathcal{K} una categoría con límites y colímites finitos. Una *estructura homotópica de Quillen* en \mathcal{K} consiste de tres clases de mapeos $(\mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathcal{W})$ de \mathcal{K} llamados fibración, cofibración y equivalencia débil tal que cumplen:

A_1 *Saturación.* Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son mapeos en \mathcal{K} y si cualesquiera dos mapeos de f, g o gf pertenecen a \mathcal{W} , el tercero también pertenece.

A_2 *Retracto.* Sea

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & \bar{X} & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow f & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{j} & \bar{Y} & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

un diagrama conmutativo con $ui = id_x$ y $vj = id_y$. Entonces si \bar{f} es una fibración, cofibración o equivalencia débil entonces f también lo es.

A_3 *Levantamiento.* Si

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

es un diagrama conmutativo en el cual i es una cofibración y f es una fibración, entonces si i o f pertenecen a \mathcal{W} , se tiene una diagonal que hace conmutar ambos triángulos.

A_4 *Factorización.* Cualquier mapeo $f : X \rightarrow Y$ puede ser factorizado como

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & E \\ & \searrow f & \swarrow p \\ & & Y \end{array}$$

donde i es una cofibración y p es una fibración en las que se da sólo uno de los siguientes casos: una donde $i \in \mathcal{W}$ y otra donde $p \in \mathcal{W}$.

La estructura homotópica se dice *propia* si además se cumple

A₅. Si

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \longrightarrow & X \\ \bar{w} \downarrow & & \downarrow w \\ \bar{Y} & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

es un diagrama pullback, en el cual $f \in \mathcal{F}$ y $w \in \mathcal{W}$, entonces $\bar{w} \in \mathcal{W}$

Definición 2.1.2 En el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{k_0} & X \\ g \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

en el cual existe un levantamiento $h : B \rightarrow X$, el mapeo f se dice que tiene la *propiedad del levantamiento derecho respecto a g* (RLP), similarmente se dice que g tiene la *propiedad del levantamiento izquierdo respecto a f* (LLP).

En este apartado, desarrollaremos dos ejemplos de estructuras homotópicas de Quillen de suma importancia. Primero recordemos que la categoría de todos los espacios topológicos **Top** está definida por

- $Ob(\mathbf{Top}) = \{X \text{ sea un espacio topológico} \}$
- $Morf(\mathbf{Top}) = \{f : X \rightarrow Y \text{ con } f \text{ una función continua entre dos espacios topológicos } X \text{ y } Y\}$
- \circ se define como la composición usual entre funciones.

Definición 2.1.3 Un mapeo $f : A \rightarrow B$ es llamada *equivalencia homotópica débil* si esta induce un isomorfismo, entre sus grupos de homotopía, $f_* : \pi_i(A, a) \rightarrow \pi_i(B, f(a))$.

Definición 2.1.4 Un mapeo $p : X \rightarrow Y$ es llamado *fibración de Serre* si tienen la propiedad del levantamiento derecho respecto a la inclusión $i : A \times \{0\} \rightarrow A \times [0, 1]$, para cada complejo CW A .

Por lo que nos disponemos a asignarle a la categoría **Top** la siguiente estructura homotópica de Quillen.

Proposición 2.1.1 La categoría **Top** de espacios topológicos se le puede asignar una estructura homotópica de Quillen definiendo a $f : A \rightarrow B$ como

- (i) Una *equivalencia débil* si f es una equivalencia débil homotópica.
- (ii) Una *fibración* si f es una fibración de Serre.
- (iii) Una *cofibración* si f tiene LLP respecto a las fibraciones triviales.

Antes de realizar la demostración debemos notar que la identidad es una equivalencia homotopica débil. Además, las equivalencias homotopicas débiles son cerradas bajo composición ya que $\pi_i(f \circ g) = \pi_i(f) \circ \pi_i(g)$, donde π_i es un funtor, donde cada uno de los factores son isomorfismos.

Notemos que el mapeo identidad $id_C : C \rightarrow C$ tiene la propiedad del levantamiento derecho respecto a cada mapeo. Bastará fijarnos en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ f \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow id_C \\ B & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array}$$

donde $f : A \rightarrow B$ es un mapeo arbitrario y además, las fibraciones de Serre son cerradas bajo composición. Bastará con tomar f y g fibraciones de Serre por lo que se obtienen los diagramas

$$\begin{array}{ccc} A \times 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ A \times [0, 1] & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A \times 0 & \xrightarrow{h_Y} & Y \\ \downarrow & & \downarrow g \\ A \times [0, 1] & \longrightarrow & Z \end{array} ,$$

donde el mapeo $h : A \times [0, 1] \rightarrow X$ existe ya que f es una fibración de Serre y definamos $h_Y = fh$. Así se tiene el levantamiento en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \times 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ A \times [0, 1] & \longrightarrow & Y \\ & & \downarrow g \\ & & Z \end{array} .$$

Demostración. A_1 Consideremos las funciones $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ y $gf : X \rightarrow Z$, se tiene que $\pi_i(gf) = \pi_i(g)\pi_i(f)$ que en el caso de que dos de ellas sean equivalencias débiles entonces se tiene que son isomorfismos y por lo tanto la tercera también, lo que la hace una equivalencia débil.

A_2 Antes que nada necesitamos demostrar un pequeño resultado

Lema: Si g es un isomorfismo en \mathcal{C} y f es retracto de g , entonces f es un isomorfismo.

Demostración. Bastará considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & \bar{X} & \xrightarrow{v} & X \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\bar{u}} & \bar{Y} & \xrightarrow{\bar{v}} & Y \end{array} .$$

Lo que nos permite definir a $f^{-1} = v g^{-1} \bar{u}$, por lo tanto f es un isomorfismo.

Luego consideremos los casos:

Equivalencia débil. Es fácil notar que en caso de que f sea retracts de g con g equivalencia débil, el diagrama inducido por el funtor π_i

$$\begin{array}{ccccc} \pi_i(X) & \xrightarrow{u^*} & \pi_i(\bar{X}) & \xrightarrow{v^*} & \pi_i(X) \\ \downarrow f^* & & \downarrow g^* & & \downarrow f^* \\ \pi_i(Y) & \xrightarrow{\bar{u}^*} & \pi_i(\bar{Y}) & \xrightarrow{\bar{v}^*} & \pi_i(Y) \end{array} ,$$

es similar al diagrama expuesto en el lema anterior, porque el morfismo f^* es un isomorfismo y por lo tanto f es una equivalencia débil.

Fibración. Sea g una fibración de Serre y consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} A \times 0 & \xrightarrow{k} & C & \xrightarrow{i} & D & \xrightarrow{r} & C \\ \downarrow j & & \downarrow f & \dashrightarrow h & \downarrow g & & \downarrow f \\ A \times [0, 1] & \dashrightarrow & \bar{C} & \xrightarrow{\bar{i}} & \bar{D} & \xrightarrow{\bar{r}} & \bar{C} \end{array} ,$$

donde el mapeo $h : A \times [0, 1] \rightarrow D$ es el levantamiento inducido por g . Definiendo $h_f = rh : A \times [0, 1] \rightarrow C$ se tiene el levantamiento de f respecto a j .

Para la demostración del resto de los axiomas, nos es necesario desarrollar más herramientas.

Lema 2.1.2 Sea $p : X \rightarrow Y$ un mapeo en **Top**, p es una fibración de Serre si y sólo si p tiene RLP respecto a la inclusión $(D^n \times \{0\}) \rightarrow (D^n \times [0, 1])$

Demostración. La demostración del lema 2.1.2 puede ser consultada en [6] capítulo 2.

Definición 2.1.5 Un par de espacios topológicos digamos (X, A) se dice que es *un par CW relativo* si X puede ser obtenido mediante A adjuntando un número finito de celdas.

Definición 2.1.6 Sea $\mathcal{F} = \{f_i : A_i \rightarrow B_i\}$ un conjunto de mapeos de \mathcal{C} . Sea $p : X \rightarrow Y$ el mapeo factorizado como $X \rightarrow \bar{X} \rightarrow Y$. Para $i \in \mathcal{I}$ consideremos el conjunto $\mathcal{S}(i)$ de pares de mapeos (g, h) que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow f_i & & \downarrow p \\ B_i & \xrightarrow{h} & Y \end{array} .$$

Definamos el *pegado construido* $G^1(\mathcal{F}, p)$ como el pushout en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{i \in \mathcal{I}} \coprod_{(g,h) \in \mathcal{S}(i)} A_i & \longrightarrow & X \\
 \downarrow \coprod f_i & & \downarrow \\
 \coprod_{i \in \mathcal{I}} \coprod_{(g,h) \in \mathcal{S}(i)} B_i & \longrightarrow & G^1(\mathcal{F}, p) \\
 & \searrow & \downarrow p \\
 & & Y
 \end{array}$$

.

Para la construcción del *pegado construido infinito* se repite el proceso de construcción $G^k(\mathcal{F}, p)$ y mapeos $p_k : G^k(\mathcal{F}, p) \rightarrow Y$. Repitiendo el proceso reemplazando p por p_1 , se tiene $G^2(\mathcal{F}, p) = G^1(\mathcal{F}, p_1)$ y $p_2 : G^2(\mathcal{F}, p) \rightarrow Y$ es $p_2 = (p_1)_1$.

Más generalmente, $G^k(\mathcal{F}, p) = G^1(\mathcal{F}, p_{k-1})$ y $p_k = (p_{k-1})_1$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 X & \xrightarrow{i_1} & G^1(\mathcal{F}, p) & \xrightarrow{i_2} & G^2(\mathcal{F}, p) & \xrightarrow{i_3} & \dots & \xrightarrow{i_k} & G^k(\mathcal{F}, p) & \xrightarrow{i_{k+1}} & \dots \\
 \downarrow p & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 & & \downarrow p_k & & \downarrow p_{k+1} & & \\
 Y & \longleftarrow & Y & \longleftarrow & Y & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & Y & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Así definamos $G^\infty(\mathcal{F}, p)$ como el colímite del diagrama anterior, por lo que se tiene un mapeo natural $i_\infty : X \rightarrow G^\infty(\mathcal{F}, p)$ y $p_\infty : G^\infty(\mathcal{F}, p) \rightarrow Y$

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \longrightarrow & G^1(\mathcal{F}, p) & \longrightarrow & G^2(\mathcal{F}, p) & \longrightarrow & \dots \\
 & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & & & G^\infty(\mathcal{F}, p) & & \\
 & \searrow & \downarrow p & \searrow & \downarrow p_\infty & \searrow & \\
 & & & & Y & &
 \end{array}$$

Notemos que para que el mapeo p_∞ tenga la propiedad deseada, pediremos algo más sobre \mathcal{F} . Sea \mathcal{C} una categoría pequeña y definamos un functor $B : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ donde $Obj(\mathcal{D}) = \{n : n \text{ sea un natural}\}$ con $Morf(\mathcal{D}) = \{n \rightarrow m \text{ tal que } n < m\}$.

Tomemos el colímite secuencial

$$\begin{array}{ccccccc}
 B(0) & \longrightarrow & B(1) & \longrightarrow & B(2) & \longrightarrow & \dots \\
 & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & & & colim_n B(n) & &
 \end{array}$$

.

Aplicando el funtor $hom_{\mathcal{C}}(A, \cdot) : \mathcal{C} \rightarrow Set$ para $A \in Obj(\mathcal{C})$, nos induce

$$\begin{array}{ccccccc} hom_{\mathcal{C}}(A, B(0)) & \longrightarrow & hom_{\mathcal{C}}(A, B(1)) & \longrightarrow & hom_{\mathcal{C}}(A, B(2)) & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & & & \\ & & hom_{\mathcal{C}}(A, colim_n B(n)) & & & & \end{array} .$$

Tomando el colimite de la secuencia superior, se tiene el mapeo

$$colim_n hom_{\mathcal{C}}(A, B(n)) \rightarrow hom_{\mathcal{C}}(A, colim_n B(n)).$$

Considerando la situación del pegado construido infinito.

Proposición 2.1.3 Supongamos que para toda $i \in \mathcal{I}$ el objeto A_i tiene la propiedad tal que $colim_n hom_{\mathcal{C}}(A_i, G^n(\mathcal{F}, p)) \rightarrow hom_{\mathcal{C}}(A_i, colim_n G^n(\mathcal{F}, p)) = hom_{\mathcal{C}}(A_i, G^\infty(\mathcal{F}, p))$ es una biyección, entonces el mapeo p_∞ tiene la propiedad del levantamiento derecho respecto a cada mapeo de la familia \mathcal{F} .

Demostración. Consideremos el siguiente cuadro conmutativo en \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{g} & G^\infty(\mathcal{F}, p) \\ \downarrow f_i & & \downarrow p_\infty \\ B_i & \xrightarrow{k} & Y \end{array} .$$

La biyección del mapeo $colim_n hom(A_i, G^n(\mathcal{F}, p)) \rightarrow hom_{\mathcal{C}}(A_i, colim_n G^n(\mathcal{F}, p))$ nos proporciona la siguiente factorización

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{g} & G^\infty(\mathcal{F}, p) \\ & \searrow g_k & \nearrow \\ & & G^k(\mathcal{F}, p) \end{array} .$$

Así generamos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} A_i & \xrightarrow{g_k} & G^k(\mathcal{F}, p) & \xrightarrow{i_{k+1}} & G^{k+1}(\mathcal{F}, p) & \longrightarrow & G^\infty(\mathcal{F}, p) \\ f_i \downarrow & & \downarrow p_k & \dashrightarrow & \downarrow p_{k+1} & & \downarrow p_\infty \\ B_i & \xrightarrow{h} & Y & \longleftarrow & Y & \longrightarrow & Y \end{array} ,$$

donde el mapeo g se puede expresar como la composición de los mapeos en la fila superior del diagrama. El par (g_k, h) pertenecen al conjunto $\mathcal{S}(i)$ en la construcción de $G^{k+1}(\mathcal{F}, p)$ desde $G^k(\mathcal{F}, p)$, obteniendo un mapeo $\alpha : B_i \rightarrow G^{k+1}$ que hace conmutar el diagrama. La composición del mapeo α con los mapeo de la parte superior (partiendo de $G^{k+1}(\mathcal{F}, p)$) nos proporcionan el levantamiento deseado.

Lema 2.1.4 Sean \mathcal{D} la categoría descrita previamente y $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Top}$ un funtor con la propiedad de que para cualquier $n \geq 0$ el espacio X_n es subespacio

de X_{n+1} y el par (X_{n+1}, X_n) es un par CW relativo. Si A es un complejo CW finito, entonces el mapeo $\text{colim}_n \text{hom}_{\text{Top}}(A, X_n) \rightarrow \text{hom}_{\text{Top}}(A, \text{colim}_n X_n)$ es una biyección.

Demostración. Notemos que el colímite secuencial de espacios topológicos es el cociente de la unión disjunta de estos, donde se identifican puntos de X_i con su imagen en X_{i+1} . Todas las inclusiones son entre complejos CW, por lo que el colímite también lo es con n-esqueleto X_n . Por otro lado tenemos $\text{colim}_n \text{hom}_{\text{Top}}(A, X_n) = \bigsqcup_n \text{hom}_{\text{Top}}(A, X_n) / \sim$.

Sea $u : \text{colim}_n \text{hom}_{\text{Top}}(A, X_n) \rightarrow \text{hom}_{\text{Top}}(A, \text{colim}_n X_n)$, para demostrar que es suprayectiva, tomemos $f \in \text{hom}_{\text{Top}}(A, \text{colim}_n X_n)$ ya que A es finito se tiene que $f(A)$ es compacto y además está contenido en un esqueleto finito de X , por lo que para algún k , f se puede factorizar como

$$A \xrightarrow{f_k} X_k \longrightarrow X \quad .$$

Notemos que f_k es un mapeo en la unión disjunta de $A \rightarrow X_k$, entonces u es suprayectiva.

Luego, sean $f_0, g_0 : A \rightarrow X_i$ en el cociente. Podemos tomar el mismo conjunto X_i ya que podemos componer el que tiene menor índice con las inclusiones para conseguir un mapeo al mismo espacio y supongamos que toman el mismo valor sobre la composición con u induciendo $f_1, g_1 : A \xrightarrow{f_0, g_0} X_i \xrightarrow{u} X$ cuya imagen pertenecen a un esqueleto finito, digamos X_n . Por lo que ambos mapeos toman los mismo valores después de las inclusiones, por lo tanto son los mismo en el cociente. †

Lema 2.1.5 Sea $p : X \rightarrow Y$ un mapeo entre dos espacios topológicos. Son equivalentes : i) p es una fibración de Serre.

ii) p tiene la propiedad del levantamiento derecho respecto a todo n-disco D^n .

iii) p tiene la propiedad del levantamiento homotópico relativo respecto a cualquier (D^n, S^{n-1}) .

iv) p tiene la propiedad del levantamiento homotópico respecto a cualquier complejo CW (X, A) .

Demostración.

$i) \Rightarrow ii)$ Se cumple por definición.

$ii) \Rightarrow iii)$ Aplicando el lema 2,1,2

$iii) \Rightarrow iv)$ Supongamos que P tiene la propiedad del levantamiento derecho respecto a los mapeos $j_n : S^{n-1} \rightarrow D^n$, por inducción sobre el esqueleto de $B - A$ y usando el mapeo característico, podemos definir el levantamiento $h = ki^{-1}$ en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\psi} & A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow k & \downarrow p \\ D^n & \xrightarrow{i} & B & \longrightarrow & Y \end{array} \quad .$$

$iv) \rightarrow i)$ Se cumple considerando $A = \emptyset$. †

Lema 2.1.6 Cada mapeo f en **Top**, puede ser factorizado como $p_\infty i_\infty$, en el cual i_∞ es una equivalencia homotópica débil con la propiedad LLP respecto a las fibraciones de Serre y p_∞ es una fibración de Serre.

Demostración. Definamos $\mathcal{F} = \{D^n \times 0 \rightarrow D^n \times [0, 1]\}$. Así, podemos obtener $G^1(\mathcal{F}, p)$ pegando varios cilindros $D^n \times [0, 1]$ a X a lo largo de un extremo de éstos. Se tiene que $(G^1(\mathcal{F}, p), X)$ es un par CW relativo y el mapeo $i_1 : X \rightarrow G^1(\mathcal{F}, p)$ es un retracts de deformación donde un cilindro sólido es contraíble. Se tiene que i_1 es una inclusión entre complejos CW y una equivalencia homotópica débil. Se sigue que tiene LLP respecto a las fibraciones de Serre.

Análogamente el mapeo $i_{k+1} : G^k(\mathcal{F}, p) \rightarrow G^{k+1}(\mathcal{F}, p)$ es una equivalencia homotópica débil y tiene LLP respecto a las fibraciones de Serre para cada entero k . Consideremos la factorización

$$X \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(\mathcal{F}, p) \xrightarrow{p_\infty} Y \quad .$$

Notemos que en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} G^1(\mathcal{F}, p) & \longrightarrow & X & \longrightarrow & E \\ i_2 \downarrow & & \downarrow i_\infty & & \downarrow q \\ G^2(\mathcal{F}, p) & \longrightarrow & G^\infty(\mathcal{F}, p) & \longrightarrow & B \\ i_3 \downarrow & \nearrow & & & \\ G^3(\mathcal{F}, p) & & & & \end{array} \quad ,$$

donde q es una fibración de Serre. Dado que i_1 tiene la LLP, se usa este levantamiento

para inducir otro de $G^2(\mathcal{F}, p)$ a E , repitiendo el proceso se tiene un levantamiento de $G^n(\mathcal{F}, p)$ a E y por la propiedad universal de $G^\infty(\mathcal{F}, p)$ se tiene un levantamiento de $G^\infty(\mathcal{F}, p)$ a E

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ i_\infty \downarrow & \nearrow & \downarrow q \\ G^\infty & \longrightarrow & D \end{array} \quad .$$

Por el lema 2.1.4 bastará mostrar que el mapeo $colim_n hom_{Top}(D^n, G^n(\mathcal{F}, p)) \rightarrow hom_{Top}(D^n, colim_n G^n(\mathcal{F}, p))$ es una biyección, el cual lo es por el lema 2.1.4.

Para mostrar que p_∞ es una equivalencia débil usaremos el lema 2.1.5 con S^{n-1} un complejo CW finito. Veamos que cada mapeo $S^{n-1} \rightarrow G^\infty(\mathcal{F}, p)$ se ancla en algún subconjunto $G^k(\mathcal{F}, p)$ para k entero, el cual i_k es una equivalencia y por lo tanto $i_\infty \vdash$

Continuemos en la demostración de 2.1.1 .

A_3 (**Levantamiento**). Considerese el siguiente diagrama conmutativo en **Top**

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

Caso 1: Supongamos que g es una cofibración y f una fibración de Serre y equivalencia homotópica débil. Como g tiene LLP respecto a las fibraciones triviales se tiene el mapeo $\bar{g} : B \rightarrow X$.

Caso 2: Supongamos que $g : A \rightarrow B$ es una cofibración trivial y $f : X \rightarrow Y$ es una fibración, por el lema 2.1.6 g se puede factorizar como $g = pi$ donde p es una fibración e i una equivalencia débil con la propiedad del levantamiento izquierdo respecto a todas las fibraciones, por lo que se tiene un levantamiento $\bar{i} : B \rightarrow X$ en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{p} & \bar{A} & \longrightarrow & X \\ g \downarrow & & i \downarrow & \nearrow \bar{i} & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{id} & B & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

A_4 (**Factorización**). Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo en **Top**.

Caso 1: Por el último lema se tiene que f se puede factorizar como $p_\infty i_\infty$ con p_∞ una fibración de Serre y con i_∞ una cofibración y equivalencia débil.

Caso 2: Considérese el conjunto $\mathcal{F} = \{j_n : S^{n-1} \rightarrow D^n\}$, por la construcción del pegado infinito se tiene la factorización $f = p_\infty i_\infty$. Notemos que $(G^{n+1}(\mathcal{F}, p), G^n(\mathcal{F}, p))$ es un par CW relativo. Por el lema 2,1,5 se tiene que $i_{k+1} : G^k(\mathcal{F}, p) \rightarrow G^{k+1}(\mathcal{F}, p)$ tiene LLP respecto a las fibraciones de Serre que son también equivalencias débiles, donde éstas tienen RLP respecto a las inclusiones de pares CW relativos.

Sea k una fibración de Serre y equivalencia débil en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} G^1(\mathcal{F}, p) & \longleftarrow & X & \longrightarrow & E \\ i_2 \downarrow & & \downarrow i_\infty & & \downarrow k \\ G^2(\mathcal{F}, p) & \longrightarrow & G^\infty(\mathcal{F}, p) & \longrightarrow & B \\ i_3 \downarrow & \nearrow & & & \\ G^3(\mathcal{F}, p) & & & & \\ & & \vdots & & \\ & & & & \end{array} .$$

Por inducción se tiene un levantamiento de $G^n(\mathcal{F}, p)$ a E para cualquier n , por la propiedad universal del colímite se tiene un levantamiento de $G^\infty(\mathcal{F}, p)$ a B , así i_∞ tiene LLP respecto a todas las

fibraciones de Serre que sean también equivalencias débiles y por lo tanto i_∞ es una cofibración.

Por el lema 2.1.4 y la proposición 2.1.3 se tiene que p_∞ tiene RLP respecto a los mapeos de \mathcal{F} y así, es una fibración de Serre. \vdash

Definamos la categoría **Gpd** por:

- $Obj(Gpd) = \{A : \text{tal que } A \text{ sea un grupoide}\}$.
- $Morf(Gpd) = \{\alpha : A \rightarrow B \text{ con } A \text{ y } B \text{ grupoides y } \alpha \text{ funtor}\}$.
- \circ la composición entre funtores .

Teorema 2.1.7 Las clases

- $\mathcal{W} = \{w : A \rightarrow B \text{ tal que } w \text{ es cuasi-invertible, es decir, } w \text{ tiene adjunto } \bar{w}\}$.
- $\mathcal{C} = \{i : A \rightarrow B \text{ tal que } i \text{ es inyectiva en objetos}\}$.
- $\mathcal{F} = \{p : E \rightarrow C \text{ tal que si } e \in Ob(E) \text{ y } \alpha \in hom_C(c, p(e)) \text{ existe } \bar{e} \in E \text{ y } \bar{\alpha} \in hom_E(\bar{e}, e) \text{ tal que } p(\bar{\alpha}) = \alpha\}$,

proporcionan una estructura homotópica de Quillen a la categoría Gpd.

Diremos que un funtor $p : E \rightarrow C$ es una *fibración trivial* si tiene la propiedad del levantamiento derecho respecto las cofibraciones.

Lema 2.1.8 Un funtor $p : E \rightarrow C$ es una fibración trivial si y sólo si es una equivalencia débil y p es suprayectiva en objetos.

Demostración. Supongamos que $p : E \rightarrow C$ es una fibración trivial. Sea 0 el grupoide nulo y consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow s & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{id} & C \end{array} ,$$

donde $s : C \rightarrow E$ es dado por la propiedad de levantamiento de p el cual satisface $ps = id$ y por lo que deducimos que p es suprayectiva en objetos.

Sea I el grupoide con elementos 0 y 1 . Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (E \times 0) + (E \times 1) & \xrightarrow{(ps, id)} & E \\ \downarrow j & \nearrow h & \downarrow p \\ E \times I & \longrightarrow & E \xrightarrow{p} C \end{array} ,$$

donde el mapeo $(E \times 0) + (E \times 1) \rightarrow E \times I$ es una inclusión y por lo tanto una cofibración, así se tiene el levantamiento $h : E \times I \rightarrow E$ la cual es una homotopía entre ps y id_c , por lo que p es una equivalencia débil.

Asumamos ahora que $p : E \rightarrow C$ es una equivalencia débil y que es supra-yectiva en objetos. Sea $i : A \rightarrow B$ una cofibración arbitraria, consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & E \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{f} & C \end{array} .$$

Induciendo sobre los objetos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{g_0} & E_0 \\ i_0 \downarrow & \nearrow \bar{f} & \downarrow p_0 \\ B_0 & \xrightarrow{f_0} & C_0 \end{array}$$

definiendo \bar{f} por

$$\bar{f} = \begin{cases} g_0(x) & x \in A_0 \\ s f_0(x) & x \in B_0 - A_0, \end{cases}$$

con $s : C_0 \rightarrow E_0$ sección de p . Luego, considerando un morfismo $\alpha : b \rightarrow c$ en B , notemos que $f(\alpha) = p\bar{f}(\alpha) : p\bar{f}(b) \rightarrow p\bar{f}(c)$. Como p es pleno y fiel se tiene un único mapeo $\bar{\alpha} : \bar{f}(b) \rightarrow \bar{f}(c)$ en E tal que $p(\bar{\alpha}) = \alpha$. Por lo tanto, el functor \bar{f} es el levantamiento buscado en nuestro diagrama original.└

Demostración del teorema 2.1.7

A_1 Consideremos tres funtores α , β y $\alpha\beta$ (cuando exista), claramente si α y β son equivalencias débiles se tiene que la composición es una equivalencia débil. Si α y $\alpha\beta$ son equivalencias débiles entonces $\beta \simeq \alpha^{-1}\alpha\beta$, con α^{-1} el functor adjunto de α , por lo que β es cuasi-invertible. Análogamente si β y $\alpha\beta \in \mathcal{W}$.

A_2 (Similar que en el ejemplo en Top).

A_4 Sea $f : G \rightarrow H$ un functor arbitrario en Gpd , definamos la categoría (H, f) por

- $Obj((H, f)) = \{(y, \alpha, x) : \alpha \in hom_H(y, f(x))\}$.
- $Mor((H, f)) = \{(\beta, \rho) : (y, \alpha, x) \rightarrow (\bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{x}) \text{ con } \beta : x \rightarrow \bar{x} \text{ y } \rho : y \rightarrow \bar{y} \text{ y } f\rho \circ \alpha = \bar{\alpha} \circ \beta\}$ donde (β, ρ) hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\alpha} & f(x) \\ \beta \downarrow & & \downarrow f\rho \\ \bar{y} & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & f(\bar{x}) \end{array} .$$

- \circ la composición usual.

Definiendo $p : (H, f) \rightarrow H$ e $i : G \rightarrow (H, f)$ como $f(y, \alpha, y) = y$ e $i(x) = (f(x), id_{f(x)}, x)$ se cumple

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{i} & (H, f) \\ & \searrow f & \swarrow p \\ & & H \end{array} .$$

El functor i tiene como adjunto derecho a $r : (H, f) \rightarrow G$. Como $r(y, \alpha, x) = x$, i es una cofibración y equivalencia débil. Si $p(\bar{y}, \alpha, x) = \bar{y}$ y $\beta : y \rightarrow \bar{y}$, entonces $(\beta, id) : (y, \alpha\beta, x) \rightarrow (\bar{y}, \alpha, x)$ es un levantamiento de β y p es una fibración, así f se puede factorizar como una cofibración trivial seguida de una fibración.

Ahora supongamos que un mapeo $f : G \rightarrow H$ se factoriza como

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_0} & E_0 \\ & \searrow f_0 & \swarrow p_0 \\ & & H_0 \end{array} .$$

con $E_0 = G_0 + H_0$. Se tiene que i_0 es inyectiva y p_0 es suprayectiva.

Considerando el pullback

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & H_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_0 \times E_0 & \longrightarrow & H_0 \times H_0 \end{array} ,$$

el cual nos induce

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{i} & E \\ & \searrow f & \swarrow p \\ & & H \end{array} ,$$

con i cofibración y p pleno, fiel y suprayectivo en objetos, por el lema anterior se tiene que p es una fibración trivial. Luego para todo morfismo $\alpha : y \rightarrow \bar{y}$ por ser p suprayectivo en objetos, se tiene $e, \bar{e} \in Obj(E)$ tal que $p(e) = y$ y $p(\bar{e}) = \bar{y}$. Como p es pleno y fiel, existe $\bar{\alpha} : e \rightarrow \bar{e}$ tal que $p(\bar{\alpha}) = \alpha$. Así, p es una fibración equivalencia débil.

A₃ Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & E \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{v} & C \end{array}$$

con i una fibrición trivial y p una fibrición. Sea $a \in \text{Obj}(A)$ y consideremos un mapeo $\beta : b \rightarrow i(a)$ para $b \in \text{Obj}(B)$, definiendo $\beta = id_B$ para $i(a) = b$. Sea $\alpha : b \rightarrow \bar{b}$ un morfismo en B tal que existe $\bar{\alpha} : a \rightarrow \bar{a}$ en A tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\alpha} & \bar{b} \\ \beta \downarrow & & \downarrow \bar{\beta} \\ i(a) & \xrightarrow{i\bar{\alpha}} & i(\bar{a}) \end{array}$$

con i pleno y fiel, aplicando v se tiene

$$\begin{array}{ccc} v(b) & \longrightarrow & v(\bar{b}) \\ v\beta \downarrow & & \downarrow \\ pu(a) & \xrightarrow{ui} & pu(\bar{a}) \end{array}$$

en C . Como p es una fibrición se tiene el morfismo ρ en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{\rho} & \bar{e} \\ \epsilon \downarrow & & \downarrow \epsilon \\ u(a) & \xrightarrow{u\alpha} & u(\bar{a}) \end{array} .$$

Así, definimos el levantamiento $\bar{v}(\alpha) = \rho$.

Ahora supongamos que $p : E \rightarrow B$ es una fibrición equivalencia débil. Consideremos la factorización

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & Z \\ & \searrow p & \swarrow \bar{p} \\ & & B \end{array}$$

con i una cofibración y p una fibrición trivial. Notemos que por A_1 , i es una cofibración equivalencia débil.

Considerando el levantamiento s en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{id} & E \\ i \downarrow & \nearrow s & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{\bar{p}} & B \end{array}$$

se tiene que p es un retracto de \bar{p} y p es una fibrición trivial, por lo que p es una fibrición equivalencia débil si y sólo si es una fibrición trivial, obteniendo así el levantamiento \bar{s} en nuestro diagrama original.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ i \downarrow & \nearrow \bar{s} & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & C \end{array}$$

2.2. Estructuras fibrantes y cofibrantes

Definición 2.2.1 Sea

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{v} & U \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y +_x U \end{array}$$

un diagrama pushout en una categoría \mathcal{K} . Si \mathcal{C} es una clase de mapeos en \mathcal{K} , decimos que \mathcal{C} *admite cambio de cobase* si para un morfismo $f \in \mathcal{C}$ y cualquier mapeo $v : X \rightarrow U$ el mapeo pushout $U \rightarrow Y +_x U$ existe y pertenece a \mathcal{C} . Dualmente, decimos que una clase de mapeos \mathcal{F} *admite cambio de base* si el pullback $A \times_B E \rightarrow A$ pertenece a \mathcal{F} para cualquier mapeo $E \rightarrow B$ en \mathcal{F} y $A \rightarrow B$.

Definición 2.2.2 Una *estructura cofibrante* en una categoría \mathcal{K} es un par $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ (cofibración y equivalencia débil, respectivamente) de mapeos en \mathcal{K} que contienen a los isomorfismos y es cerrada bajo la composición y además cumplen:

- C_1 *Saturación.* Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son mapeos en \mathcal{K} y cualesquiera dos f, g, gf pertenecen a \mathcal{W} entonces el tercero también (dos de tres).
- C_2 *Cambio de cobase.* Las clases \mathcal{C} y $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ admiten cambio de cobase.
- C_3 *Factorización.* Cada mapeo f en \mathcal{K} puede ser factorizado como $f = pi$ con $i \in \mathcal{C}$ y $p \in \mathcal{W}$.

Un objeto A de \mathcal{K} es llamado *objeto cofibrante* si el mapeo $0 \rightarrow A$ pertenece a \mathcal{C} .

Definición 2.2.3 Una *estructura fibrante* en una categoría \mathcal{K} es un par $(\mathcal{F}, \mathcal{W})$ de mapeos en \mathcal{K} (fibraciones y equivalencia débil respectivamente) que contienen a los isomorfismos y es cerrada bajo la composición tal que cumplen:

- F_1 *Saturación.* La clase de mapeos \mathcal{W} satisface "dos de tres".
- F_2 *Cambio de base.* Las clases \mathcal{F} y $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ admiten cambio de base.
- F_3 *Factorización.* Cada mapeo f en \mathcal{K} puede ser factorizado como $f = pi$ con $i \in \mathcal{W}$ y $p \in \mathcal{F}$.

Análogamente, un objeto A en \mathcal{K} se llama *objeto fibrante* si el mapeo $A \rightarrow 1$ pertenece a \mathcal{F} .

Consideremos el diagrama con \mathcal{K}

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

Diremos que i es ortogonal por la izquierda de f o *la propiedad del levantamiento izquierdo respecto a f (LLP)*, dualmente f es ortogonal por la derecha de g o tiene *la propiedad del levantamiento derecho respecto a i RLP*.

Una clase de mapeos \mathcal{M} en \mathcal{K} se dice que es estable bajo retracts si para cada mapeo en \mathcal{M} su retracto pertenece a \mathcal{M} y es estable bajo pushout si para cualquier mapeo $A \rightarrow B$ en \mathcal{M} a lo largo de un mapeo $A \rightarrow C$ en \mathcal{K} , su pushout $C \rightarrow B +_A C$ existe y pertenece a \mathcal{M} .

Denotamos por ${}^\perp\mathcal{M}$ la clase de mapeos ortogonales por la izquierda a \mathcal{M} y \mathcal{M}^\perp la clase de mapeos ortogonales por la derecha a \mathcal{M} .

Proposición 2.2.1 \mathcal{M}^\perp contiene isomorfismos, es cerrada bajo composiciones y es estable bajo retracto y pushout.

Demostración. La demostración de la proposición 2.2.1 puede ser consultada en [11] capítulo 2.

Lema (Argumento del retracto) 2.2.2 Supongamos que se tiene una factorización $f = pi$ en \mathcal{K} y supongamos que f tiene la propiedad del levantamiento izquierdo respecto a p . Entonces f es retracto de i .

Demostración. Consideremos la siguiente factorización de f

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ \downarrow f & \nearrow p & \\ C & & \end{array} .$$

Como f tiene la propiedad del levantamiento izquierdo respecto a p , se tiene un mapeo $r : C \rightarrow B$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ \downarrow f & \nearrow r & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{id_C} & C \end{array} .$$

Así, f es retracto de i en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \leftarrow & A & \rightarrow & A \\ \downarrow f & & \downarrow i & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{r} & B & \xrightarrow{p} & C \end{array} .$$

Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathcal{W})$ una estructura de Quillen.

Proposición 2.2.3 Supongamos que \mathcal{K} es una categoría de modelos. Entonces un mapeo es una cofibración (cofibración trivial) si y sólo si tiene la propiedad del levantamiento izquierdo respecto a todas las fibraciones triviales (fibraciones). Dualmente, un mapeo es una fibración (fibración trivial) si tiene la

propiedad del levantamiento derecho respecto a todas las cofibraciones triviales (cofibraciones).

Demostración. Efectivamente por el axioma A_3 se tiene que toda cofibración tiene la propiedad del levantamiento izquierdo respecto a las fibraciones triviales. Supongamos que f tiene la propiedad del levantamiento izquierdo respecto a las fibraciones triviales. Factorizando $f = pi$ con i una cofibración y p una fibración trivial, f es retracto de i por el argumento del retracto y por A_2 , se tiene que f es una cofibración. \vdash

Como consecuencia de esta proposición, se tienen las siguientes igualdades

$$\mathcal{C} = {}^\perp(\mathcal{F} \cap \mathcal{W}), \mathcal{F} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{W})^\perp, \mathcal{C} \cap \mathcal{W} = {}^\perp \mathcal{F} \text{ y } \mathcal{F} \cap \mathcal{W} = \mathcal{C}^\perp$$

Corolario 2.2.4 Supongamos que \mathcal{K} es una categoría de modelos. Entonces las cofibraciones (cofibraciones triviales) son cerradas bajo pushout.

Lema (de Ken Brown) 2.2.5 Supongamos que \mathcal{C} es una categoría modelada y \mathcal{D} es una categoría con una subcategoría de equivalencias débiles la cual satisface el axioma 2 de 3. Supongamos que $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un funtor el cual toma cofibraciones triviales entre objetos cofibrantes a equivalencias débiles. Entonces F toma cualquier equivalencia débil entre objetos cofibrantes a equivalencias débiles. Dualmente, si F toma fibraciones triviales entre objetos fibrantes a equivalencias débiles, entonces F toma cualquier equivalencia débil entre objetos fibrantes a equivalencias débiles.

Demostración. Considérese $f : A \rightarrow B$ una equivalencia débil entre objetos cofibrantes. Sea $f = pi_A$ y $id_B = pi_B$ la factorización del mapeo cilindro de f con $p \in \mathcal{W}$ y $i_A, i_B \in \mathcal{C}$; notemos que por A_1 se tiene que $i_A, i_B \in \mathcal{W} \cap \mathcal{C}$ por lo que $F(i_A)$ y $F(i_B)$ son equivalencias débiles y por “2 de 3” en \mathcal{D} se tiene que $F(p)$ es equivalencia débil ya que $F(id_B) = F(p)F(i_B)$. Por lo que finalmente $F(f) = F(p)F(i_A)$ es una equivalencia débil. \vdash

Recordemos que la categoría coma $(F \downarrow G)$ inducida por dos funtores $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$, es la categoría cuyos objetos son ternas (A, f, B) con $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ y $B \in \text{Obj}(\mathcal{B})$ donde $f \in \text{Morf}(\mathcal{C})$ tal que $f : F(A) \rightarrow G(B)$, un morfismo entre (A, f, B) a $(\bar{A}, \bar{f}, \bar{B})$ es un par (a, b) con $a : A \rightarrow \bar{A}$ y $b : B \rightarrow \bar{B}$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(a)} & F(\bar{A}) \\ \downarrow f & & \downarrow \bar{f} \\ G(B) & \xrightarrow{G(b)} & G(\bar{B}) \end{array} \quad ,$$

y definiendo la composición como $(\bar{a}, \bar{b}) \circ (a, b) = (\bar{a} \circ a, \bar{b} \circ b)$

Consideremos el caso particular de la categoría coma A/\mathcal{K} inducida por los funtores $id : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ y el funtor constante $C_A : 1 \rightarrow \mathcal{K}$ con $A \in \text{Obj}(\mathcal{K})$, donde un morfismo entre dos objetos $(1, f, B)$ y $(1, \bar{f}, \bar{B})$ es morfismo $b \in \text{Morf}(\mathcal{K})$

tal que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{id_A} & A \\ \downarrow f & & \downarrow \bar{f} \\ G(B) & \xrightarrow{G(b)} & G(\bar{B}) \end{array} .$$

Sin pérdida de generalidad, podemos considerar la categoría A/\mathcal{K} como la categoría de pares (B, a) con $B \in \text{Obj}(\mathcal{K})$ y a un morfismo tal que $a : A \rightarrow B$. Notemos además que si la categoría \mathcal{K} tiene una estructura cofibrante, entonces A/\mathcal{K} tiene una estructura cofibrante inducida, donde un mapeo en A/\mathcal{K} es una cofibración o equivalencia débil si su proyección sobre \mathcal{K} lo es.

Corolario 2.2.6: Sea $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ una estructura cofibrante en \mathcal{K} y $w : (X, \alpha) \rightarrow (Y, \bar{\alpha})$ una equivalencia débil entre objetos cofibrantes de A/\mathcal{K} . Entonces para cualquier mapeo $A \rightarrow B$, el pushout $B +_A w : B +_A X \rightarrow B +_A Y$ es una equivalencia débil en B/\mathcal{K} .

Demostración. Como el mapeo $w : (X, \alpha) \rightarrow (Y, \bar{\alpha})$ es una cofibración trivial en A/\mathcal{K} entonces $w : X \rightarrow Y$ también lo es en \mathcal{K} . Definiendo el funtor $B +_A () : A/\mathcal{K} \rightarrow B/\mathcal{K}$ como $B +_A ((X, \alpha)) = (B +_A X, \bar{\alpha})$ en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & B +_A X \end{array} .$$

Así, el mapeo $B +_A (w) : B +_A X \rightarrow B +_A Y$ es una cofibración trivial y por lo tanto una equivalencia débil por ser pushout en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & B +_A X \\ \downarrow w & & \downarrow B +_A w \\ Y & \longrightarrow & B +_A Y \end{array} .$$

Por lo que el funtor $B +_A ()$ cumple las hipótesis del lema anterior.†

Teorema 2.2.7 Sea $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ una estructura cofibrante sobre una categoría \mathcal{K} con objeto inicial 0. Si $f : A \rightarrow B$ es una equivalencia débil entre objetos cofibrantes de \mathcal{K} e $i : A \rightarrow C$ es una cofibración, entonces el pushout \bar{f} es una equivalencia débil.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\bar{f}} & C +_A B \end{array} .$$

Demostración. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 B & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow ij & & \downarrow \bar{i} & & \downarrow \\
 C & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{C} & \xrightarrow{\bar{f}} & C \\
 \downarrow id_C & \searrow \bar{j} & \downarrow w & & \downarrow \bar{w} \\
 & & C & \xrightarrow{g} & C +_A B
 \end{array}$$

El mapeo $j : C \rightarrow A$ es la sección de f y los mapeos $id_C = \bar{j}w$ y $i = w\bar{i}$ son las factorizaciones en \mathcal{K} donde $\bar{j} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ y $\bar{i} \in \mathcal{C}$; ya que $id_C = \bar{j}f = w\bar{j}$, se tiene por A_1 que \bar{f} y w pertenecen a \mathcal{W} . Por lo que w es una equivalencia débil entre objetos cofibrantes de A/\mathcal{K} y por corolario anterior \bar{w} también lo es. \dashv

Dualmente:

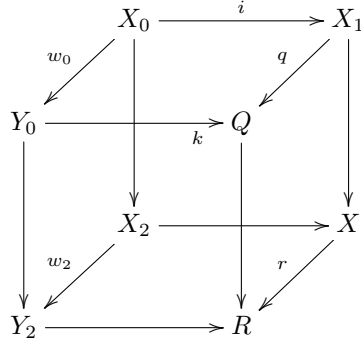
Teorema 2.2.8 Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{W})$ una estructura fibrante en una categoría \mathcal{K} con objeto inicial 1. Entonces si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia débil entre objetos fibrantes en \mathcal{K} y $p : E \rightarrow Y$ es una fibración, entonces en el pullback \bar{f} es una equivalencia débil

$$\begin{array}{ccc}
 E \times_Y X & \longrightarrow & X \\
 \downarrow \bar{f} & & \downarrow f \\
 E & \xrightarrow{p} & Y
 \end{array}$$

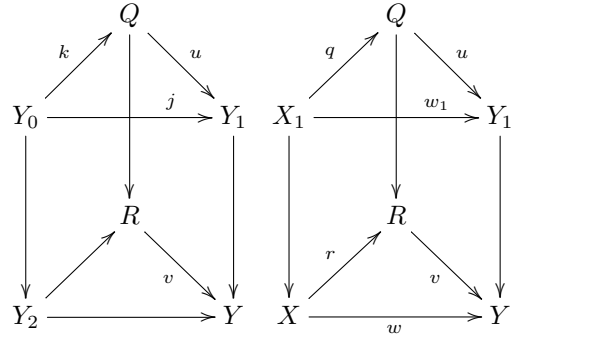
Teorema:(Lema del pegado) 2.2.9 Sea $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ es una estructura cofibrante en una categoría \mathcal{K} con objeto inicial. Supóngase un cubo conmutativo tal que la cara superior y la inferior son pushout, i y j son cofibraciones y X_0, Y_0, X_2 y Y_2 son cofibrantes. Entonces si w_0, w_1 y w_2 son equivalencias débiles entonces w también lo es.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_0 & \xrightarrow{i} & X_1 \\
 & \swarrow w_0 & \downarrow & & \swarrow w_1 \\
 Y_0 & \xrightarrow{\quad} & Y_1 & & \\
 \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow \\
 & \swarrow w_2 & X_2 & \xrightarrow{\quad} & X \\
 Y_2 & \xrightarrow{\quad} & Y & & \\
 & & \downarrow w & &
 \end{array}$$

Demostración. De la cara superior e inferior generamos el cubo



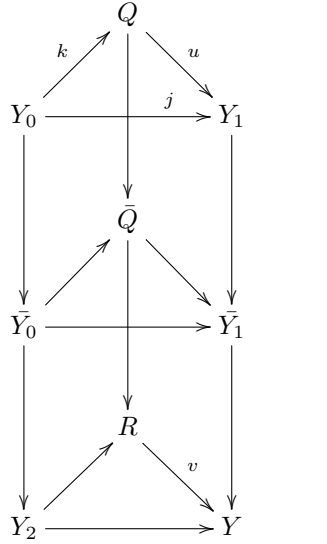
Por el teorema 2.2.6 se tiene que q y r son equivalencias débiles. Así se tienen los diagramas



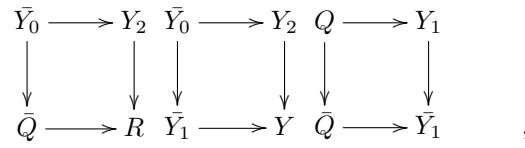
donde w_1 es una equivalencia débil, por lo que u también lo es y además notemos que w es una equivalencia débil si y sólo si v lo es.

Consideremos el caso cuando $w_0 = w_2 = id$ para mostrar que $v \in \mathcal{W}$. Consideremos la factorización de $Y_0 \rightarrow Y_2$. Como $Y_0 \rightarrow \bar{Y}_0 \rightarrow Y_2$, donde $Y_0 \rightarrow \bar{Y}_0$ es una cofibración y $\bar{Y}_0 \rightarrow Y_2$ es una equivalencia débil. Por lo que el pushout

por fases se ve como



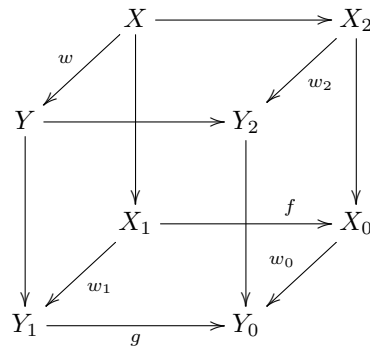
donde los mapeos $Y_0 \rightarrow \bar{Y}_0$ y $Q \rightarrow \bar{Q}$ son cofibraciones, por el lema 2.2.4 el mapeo $\bar{Y}_0 \rightarrow \bar{Y}_1$ también lo es. Considerando los diagramas pushout



se tiene que los mapeos $\bar{Q} \rightarrow R$, $\bar{Y}_1 \rightarrow Y$ y $\bar{Q} \rightarrow \bar{Y}_1$ son equivalencias débiles, y por C_1 se tiene que $v \in \mathcal{W}$. \vdash

Dualmente se tienen:

Teorema 2.2.10 Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{W})$ una estructura fibrante en una categoría \mathcal{K} con objeto terminal. Supongamos que



es un cubo conmutativo en \mathcal{K} tal que f y g son fibraciones, X_0, Y_0, X_2 y Y_2 son fibrantes y las caras de atrás y del frente son pullback. Entonces si w_0, w_1 y w_2 son equivalencias débiles, entonces w también lo es.

Definición 2.2.4 Sea X un conjunto simplicial y $x, y \in X_0$, decimos que x *esta conectada a y por un camino* si existe un mapeo simplicial $\alpha : \Delta^1 \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

Definición 2.2.5 Sea X un conjunto simplicial, definamos el *conjunto de componentes conexas de X* como el coigualador en el diagrama

$$X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} X_0 \longrightarrow \Pi_0(X) \quad .$$

Decimos que un conjunto simplicial X es *conexo* si $\Pi_0(X) = 1$.

Denotemos por $\Pi_1(X, x)$ al grupoide fundamental del conjunto simplicial punteado (X, x) .

Teorema (Van Kampen) 2.2.11 Sea

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

un pushout de conjuntos simpliciales tal que $W_0 \rightarrow V_0$ es inyectiva y U, V y W son conexos. Sea $w \in W_0$ y u, v y x las imágenes de w en U, V y X respectivamente. Entonces

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(W, w) & \longrightarrow & \Pi_1(V, v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi_1(U, u) & \longrightarrow & \Pi_1(X, x) \end{array}$$

es un pushout de grupos.

Demostración.
Consideremos

$$\begin{array}{ccccc} & & \Pi_1(W, w) & \xrightarrow{\quad} & \Pi_1(V, v) \\ & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(W) & \xrightarrow{\quad} & \Pi_1(V) & \xleftarrow{v} & \Pi_1(V, v) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(U) & \xrightarrow{\quad} & \Pi_1(U, u) & \xrightarrow{\quad} & \Pi_1 +_{\Pi_1(W, w)} \Pi(V, v) \\ & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & \Pi(X) & \xleftarrow{u} & \Pi(V, v) \end{array} \quad .$$

Notemos que si $W_0 \rightarrow V_0$ es inyectiva, se tiene que $\Pi(W) \rightarrow \Pi(V)$ es una cofibración, análogamente $\Pi_1(W, w) \rightarrow \Pi_1(V, v)$ también lo es.

Dado que U, V y W son conexos, se tiene que $\Pi_1(U, u) \rightarrow \Pi(U)$, $\Pi_1(W, w) \rightarrow \Pi(W)$ y $\Pi_1(V, v) \rightarrow \Pi(V)$ son equivalencias débiles de grupoide. Por el lema

del pegado se tiene que el mapeo $\Pi_1(U, u) +_{\Pi_1(W, w)} \Pi_1(V, v) \rightarrow \Pi(X)$ es una equivalencia débil. Por lo que en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \Pi_1(U, u) +_{\Pi_1(W, w)} \Pi_1(V, v) & \xrightarrow{\quad} & \Pi_1(X, x) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & \Pi(X) &
 \end{array}$$

el mapeo $\Pi_1(X, x) \rightarrow \Pi(X)$ es una equivalencia, dado que X es conexo, y por 2 de 3 se tiene que $\Pi_1(U, u) +_{\Pi_1(W, w)} \Pi_1(V, v) \rightarrow \Pi(X)$ es una equivalencia débil.

⊢

Capítulo 3

La estructura homotópica de Quillen en la categoría Ss

El capítulo III se centra principalmente en el desarrollo de la teoría de homotopía entre conjuntos simpliciales, basada en la definición de fibraciones de Kan, y se le asigna a la categoría Ss una estructura homotópica de Quillen.

3.1. Clases Saturadas

Definición 3.1.1 Sea \mathcal{M} una clase de monomorfismos en Ss , diremos que \mathcal{M} es *saturada* si se cumple:

A La clase \mathcal{M} contiene todos los isomorfismos.

B \mathcal{M} es cerrada bajo pushout, es decir

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow i & & \downarrow \bar{i} \\ C & \longrightarrow & B \amalg_A C \end{array}$$

Si $i \in \mathcal{M}$, entonces \bar{i} también pertenece a \mathcal{M} .

C Cada retracts de un elemento de \mathcal{M} es un elemento de \mathcal{M}

$$\begin{array}{ccccc} \bar{A} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \bar{A} \\ \downarrow \bar{i} & & \downarrow i & & \downarrow i \\ \bar{B} & \longrightarrow & B & \longrightarrow & \bar{B} \end{array} .$$

D \mathcal{M} es cerrada bajo composición numerable de mapeos. Es decir $A_1 \rightarrow \lim_{\rightarrow} A_i$

pertenece a \mathcal{M} .

E Dado $i_j : A_j \rightarrow B_j$ con $i_j \in \mathcal{M}$ se tienen que $\coprod_{j \in \mathcal{I}} i_j : \coprod_{j \in \mathcal{I}} A_j \rightarrow \coprod_{j \in \mathcal{I}} B_j$

pertenece a \mathcal{M} .

Lema 3.1.1 La clase \mathcal{M}_p de todos los morfismos que tengan LLP respecto a un mapeo fijo $p : X \rightarrow Y$ es saturada.

Demostración.

A Es claro que todo isomorfismo pertenece a \mathcal{M}_p , bastará definir el levantamiento como $h = \alpha i^{-1}$ en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

B Sea $i \in \mathcal{M}_p$ y consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \bar{i} \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\theta} & B \amalg_A C & \longrightarrow & Y \end{array} ,$$

donde el mapeo $\theta : B \rightarrow X$ es el levantamiento de i respecto a p , note-mos que por la propiedad universal del pushout se induce un mapeo $\alpha : B \amalg_A C \rightarrow X$ el cual es el levantamiento en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & X \\ \bar{i} \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow p \\ B \amalg_A C & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

C Sea \bar{i} retracto de $i \in \mathcal{M}$, tomemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{A} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \bar{A} & \longrightarrow & X \\ \bar{i} \downarrow & & i \downarrow & & \bar{i} \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ \bar{B} & \xrightarrow{\alpha} & B & \longrightarrow & \bar{B} & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

Por lo que el levantamiento esta dado por $h_2 = h\alpha$ en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bar{A} & \longrightarrow & X \\ \bar{i} \downarrow & \nearrow h_2 & \downarrow p \\ \bar{B} & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

Las propiedades **D** y **E** se siguen por propiedades de límites directos y coproducto. \vdash

Definición 3.1.2 Se llama a \mathcal{M}_B la saturación de B , o bien la clase generada por la clase de morfismos B , a la intersección de todas las clases saturadas que contengan a B .

Denotemos por

$$B_1 = \{\Delta_k^n \rightarrow \Delta^n \text{ para } 0 \leq k \leq n, n > 0\}.$$

$$B_2 = \{(\Delta^1 \times \delta\Delta^n) \cup (e \times \Delta^n) \rightarrow \Delta^1 \times \Delta^n \text{ con } e=0,1\}.$$

$B_3 = \{(\Delta^1 \times Y) \cup (e \times X) \rightarrow \Delta^1 \times X\}$, donde $Y \rightarrow X$ es la inclusión entre conjuntos simpliciales.

Sean \mathcal{M}_{B_i} con $i \in \{1, 2, 3\}$, la respectiva saturación de la clase B_i .

Proposición 3.1.2 Las clases B_1, B_2, B_3 tienen la misma saturación.

Demostración. Notemos que $\mathcal{M}_{B_2} = \mathcal{M}_{B_3}$ se cumple dado que todo conjunto simplicial puede ser expresado como límite directo de conjuntos simpliciales estandar. Por lo que nos proponemos demostrar que $\mathcal{M}_{B_1} = \mathcal{M}_{B_2}$. Veamos que $\mathcal{M}_{B_2} \subset \mathcal{M}_{B_1}$. El conjunto simplicial $\Delta^1 \times \Delta^1$ tiene simplejos no degenerados $C_j : \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n \times \Delta^1$, los cuales pueden ser identificados con cadenas de morfismos de longitud $n+1$ en $[n] \times [1]$

$$\begin{array}{ccccccc} (0, 0) & \longrightarrow & (0, 1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (0, j) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & (1, j) \longrightarrow \dots \longrightarrow (1, n) \end{array} .$$

Tomando los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{d_0} & \Delta^{n+1} & & \Delta^n & \xrightarrow{d_{n+1}} & \Delta^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow C_0 & & \downarrow & & \downarrow C_n \\ \Delta^n \times \{1\} & \longrightarrow & \Delta^n \times \Delta^1 & & \Delta^n \times \{0\} & \longrightarrow & \Delta^n \times \Delta^1 \end{array} ,$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{d_i} & \Delta^{n+1} & \text{para } i < j, \\ \downarrow C_{j-1} & & \downarrow C_j & \\ \Delta^{n-1} \times \Delta^1 & \xrightarrow{d_i \times 1} & \Delta^n \times \Delta^1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{d_{j+1}} & \Delta^{n+1} \\ \downarrow d_{j+1} & & \downarrow C_{j+1} \\ \Delta^{n+1} & \xrightarrow{C_j} & \Delta^n \times \Delta^1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{d_i} & \Delta^{n+1} \\ \downarrow C_j & & \downarrow C_j \\ \Delta^{n-1} \times \Delta^1 & \xrightarrow{d_{i-1} \times 1} & \Delta^n \times \Delta^1 \end{array}$$

para $i > j + 1$.

Notemos que para $j > 0$ se tiene que $d_{j+1}C_j \notin \delta\Delta^1 \times \Delta^1$ y $d_{j+1}C_j$ no es una cara de C_j para $j \geq i + 1$ donde se tiene el vértice $(0, j)$.

Sea $(\Delta^n \times \Delta^1)^{(i)}$ con $i \geq 1$ el subcomplejo simplicial mas pequeño de $\Delta^n \times \Delta^1$ que contenga a $\delta\Delta^n \times \Delta^1$ con simplejos C_0, \dots, C_i . Entonces $(\Delta^n \times \Delta^1)^n =$

$\Delta^n \times \Delta^1$ y una sucesión de pushouts de forma

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{i+2}^{n+1} & \xrightarrow{\coprod_{j \in [n] - \{i+2\}} d_j C_{i+1}} & (\Delta^n \times \Delta^1)^i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^{n+1} & \xrightarrow{C_{i+1}} & (\Delta^n \times \Delta^1)^{i+1} \end{array} .$$

Para demostrar la contención $\mathcal{M}_{B_1} \subset \mathcal{M}_{B_2}$, definimos los funtores $s^k : [n] \rightarrow [1] \times [n]$ y $r^k : [1] \times [n] \rightarrow [n]$ dados por

$$s^k(x) = \begin{cases} (1, x) & x \neq k \\ (0, k+1) & x = k \end{cases}$$

$$r^k(i) = \begin{cases} i & \text{para } (1, i) \\ i & \text{para } (0, i) \text{ con } i < k \\ k & \text{para } (0, i) \text{ con } i \geq k \end{cases} .$$

Notemos que $r^k s^k = 1_{[n]}$ y además el mapeo $N(s^k) : \Delta^n \rightarrow \Delta^1 \times \Delta^n$ induce un mapeo $\Lambda_k^n \rightarrow (0) \times \Delta^n \cup (\Delta^1 \times \Lambda_k^n)$. Análogamente el mapeo $N(r^k) : \Delta^1 \times \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ induce un mapeo $((0) \times \Delta^n) \cup \Delta^1 \times \Lambda_k^n \rightarrow \Lambda_k^n$, obteniendo el retracto

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & (0) \times \Delta^n \cup \Delta^1 \times \Lambda_k^n & \longrightarrow & \Lambda_k^n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & \Delta^1 \times \Delta^n & \longrightarrow & \Delta^n \end{array} ,$$

donde el mapeo de enmedio pertenece a \mathcal{M}_{B_2} y por lo tanto $\Lambda_k^n \rightarrow \Delta^n$ pertenece a \mathcal{M}_{B_2} . \dashv

Definición 3.1.3 La clase saturada generada en \mathcal{M}_{B_1} es llamada *la clase de extensiones anodinas*.

Corolario 3.1.3 Supongamos que $i : A \rightarrow B$ es una extensión anodina y $k : Y \rightarrow Z$ un monomorfismo arbitrario en Ss . Entonces el mapeo inducido $(K \times X) \cup (L \times Y) \rightarrow (L \times X)$ es una extensión anodina.

Demostración. Denotemos por \mathcal{D} la clase saturada de morfismos $i : A \rightarrow B$ tal que $(A \times Z) \cup (B \times Y) \rightarrow B \times Z$ es anodina. Sea $\bar{m} : \bar{Y} \rightarrow \bar{Z}$ un monomorfismo en Ss y consideremos la inclusión $((e) \times \bar{Z}) \cup (\Delta^1 \times \bar{Y}) \rightarrow \Delta^1 \times \bar{Z}$ en \mathcal{M}_{B_3} .

Entonces el mapeo $((e) \times \bar{Z}) \cup (\Delta^1 \times \bar{Y}) \times Z \cup (\Delta^1 \times \bar{Z}) \times Y \rightarrow (\Delta^1 \times \bar{Z}) \times Z$ es isomorfo a $((e) \times \bar{Z} \times Z) \cup \Delta^1 \times (\bar{Y} \times Z \cup \bar{Z} \times Y) \rightarrow \Delta^1 \times (\bar{Z} \times Z)$, el cual es un mapeo en \mathcal{M}_{B_3} y entonces la clase saturada contiene a todos los morfismos anodinos. \dashv

Definición 3.1.4 Una *fibración de Kan* es un mapeo $p : E \rightarrow X$ de conjuntos simpliciales los cuales tienen RLP respecto a las inclusiones $\{\Lambda_k^n \rightarrow \Delta^n$ con $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq n\}$.

Otra manera de definir una fibración de Kan es la siguiente.

Definición 3.1.5 Sea $p : E \rightarrow X$ un mapeo simplicial, diremos que p es una *fibración de Kan* si cada colección de $n+1$ n -simplejos $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ de E que satisface $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ para $i < j$ e $i \neq k$ y para $(n+1)$ -simplejo y de B tal que $d_i y = p(x_i)$ para $i \neq k$, existe $(n+1)$ -simplejo x de E tal que $d_i x = x_i$ para $i \neq k$ y $p(x) = y$.

Definición 3.1.6 Un mapeo $p : E \rightarrow X$ se dice que es una *fibración trivial* si tiene RLP respecto a la familia $\{\delta \Delta^n \rightarrow \Delta^n\}$ o, equivalentemente, respecto a toda la familia de monomorfismos.

Sea $k : Y \rightarrow Z$ un monomorfismo y sea $p : E \rightarrow X$. Denotemos el pullback de X^k y p^y por

$$\begin{array}{ccc} (k, p) & \longrightarrow & E^y \\ \downarrow & & \downarrow p^y \\ X^z & \xrightarrow{X^k} & X^y \end{array} .$$

Considerano el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E^z & \xrightarrow{E^k} & E^y \\ p^z \downarrow & & \downarrow p^y \\ X^z & \xrightarrow{X^k} & X^y \end{array} ,$$

el cual nos induce un mapeo $\beta : E^z \rightarrow (k, p)$.

Teorema 3.1.4 Si $p : E \rightarrow X$ es una fibración, entonces $\beta : E^z \rightarrow (k, p)$ es una fibración la cual es trivial si k es anodino o p es trivial.

Demotración. Sea $i : A \rightarrow B$ un monomorfismo arbitrario y consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E^z \\ \downarrow & & \downarrow \beta \\ B & \longrightarrow & (k, p) \end{array} ,$$

el cual es equivalente, por la ley exponencial, a

$$\begin{array}{ccc} (A \times Z) \cup (B \times Y) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ B \times Z & \longrightarrow & X \end{array} ,$$

para el que podemos encontrar la diagonal si p es trivial. La inclusión $(A \times Z) \cup (B \times Y) \rightarrow B \times Z$ es anodino si i o k lo son. \vdash

Corolario 3.1.5 Si $p : E \rightarrow X$ es una fibración, entonces también lo es $p^Y : E^Y \rightarrow X^Y$ para cualquier Y .

Demostración. La demostración puede ser consultada en [12] capítulo 2.

Proposición 3.1.6 Sean $p : E \rightarrow X$ una fibración, $h : Z \times I \rightarrow X$ una homotopía, $Y \rightarrow Z$ un monomorfismo y $\alpha : Y \times I \rightarrow E$ un levantamiento de h a E en $Y \times I$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} Y \times I & \xrightarrow{\alpha} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{h} & X \end{array} ,$$

además se tiene un levantamiento $f_e : Z \times (e) \rightarrow E$ de h_e a E . Entonces se tiene una homotopía $\bar{h} : Z \times I \rightarrow E$, la cual levanta a h , es decir, $p\bar{h} = h$, la cual coincide con α en $Y \times I$ tal que $\bar{h}_e = f_e$.

Demostración. Considerando el mapeo $(e) \rightarrow I$, el cual es anodino al ser identificado como la inclusión $\Lambda_i^1 \rightarrow \Delta^1$ con $i \in \{0, 1\}$, y el monomorfismo $Y \rightarrow Z$, se induce un mapeo $(Z \times (e)) \cup (Y \times I) \rightarrow E$ el cual es anodino, así el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (Z \times (e)) \cup (Y \times I) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow \bar{h} & \downarrow p \\ Z \times I & \longrightarrow & X \end{array}$$

tiene como levantamiento a $\bar{h} : Z \times I \rightarrow E$. \vdash

Definición 3.1.7 Decimos que A es un *retracto de deformación fuerte* de B si se tiene un retracto $r : B \rightarrow A$ y una homotopía $h : B \times I \rightarrow B$ tal que $ri = id_A$, $h_0 = id_B$ y $h_1 = ir$ y h es estacionaria en A , es decir, tal que hace conmutar el diagrama :

$$\begin{array}{ccccc} A \times I & \longrightarrow & B \times I & \xrightarrow{h} & B \\ & \searrow & & \nearrow i & \\ & & A & & \end{array} .$$

Proposición 3.1.7 Sea A y B complejos de Kan e $i : A \rightarrow B$ una extensión anodina, entonces A es un retracto de deformación fuerte de B .

Demostración. Dado que i es anodina se tiene un retracto $r : B \rightarrow A$ y para obtener la homotopía $h : B \times I \rightarrow B$, nos fijamos en la transposición exponencial de la diagonal en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B^I \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ B & \xrightarrow{(id_B, ir)} & B^{(0)+(1)} \end{array} . \vdash$$

Proposición 3.1.8 Si $i : A \rightarrow B$ es un monomorfismo con A retracto de deformación de B , entonces i es anodino.

Demostración. Como A es retracto de deformación de B , se tiene una homotopía $h : B \times I \rightarrow A$ entre id_B e ir , donde $r : B \rightarrow A$ es un retracto de i . Sea $p : X \rightarrow Y$ una fibración arbitraria y consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A \times I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow i & \nearrow & \downarrow \\ B \times I & \longrightarrow & B & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

Por la propiedad de la extensión de la homotopía cubriente, se tiene una homotopía $\bar{h} : B \times I \rightarrow E$, la cual cumple que $p\bar{h} = bh$, así para $h_0 = id_B$ se tiene la diagonal deseada. \vdash

Definición 3.1.9 Un mapeo $p : E \rightarrow X$ se dice que es *dual de un retracto de deformación fuerte* si y sólo si se tiene un mapeo $s : X \rightarrow E$ que cumple $ps = id_X$ y una homotopía $h : E \times I \rightarrow E$ entre id_E y sp que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E \times I & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ E & \xrightarrow{p} & X \end{array} .$$

Proposición 3.1.9 Una fibración $p : E \rightarrow X$ es trivial si y sólo si es el dual de un retracto de deformación fuerte.

Demostración. Supongamos que $p : E \rightarrow X$ es una fibración trivial, entonces tiene RLP respecto a todos los monomorfismos, así obtenemos un retracto $s : X \rightarrow E$ del levantamiento del diagrama

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow s & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{id_X} & X \end{array} .$$

Similarmente obtenemos la homotopía $h : E \times I \rightarrow E$ del levantamiento en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E \times (0+1) & \xrightarrow{(id_E, sp)} & E \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ E \times I & \xrightarrow{p\pi_1} & X \end{array} .$$

Supongamos ahora que p es un retracto de deformación fuerte, así se tiene un mapeo $s : X \rightarrow E$ y una homotopía $h : E \times I \rightarrow E$ entre id_E y sp . Sea i un monomorfismo arbitrario en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & E \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{b} & X \end{array} .$$

Definamos $\bar{h} : A \times I \rightarrow E$ como la homotopía restringida a la imagen del mapeo $a : A \rightarrow E$ tal que $\bar{h}_0 = a$ y $\bar{h}_1 = spa = sbi$, por lo que tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A \times I & \xrightarrow{\bar{h}} & E \\
\pi_1 \downarrow & & \downarrow p \\
A & \xrightarrow{bi} & X
\end{array} .$$

Además, se tiene un levantamiento en

$$\begin{array}{ccc}
(A \times I) \cup (B \times (1)) & \xrightarrow{(\bar{h}, sb)} & E \\
\downarrow & \nearrow k & \downarrow p \\
B \times I & \longrightarrow & X
\end{array} ,$$

donde la homotopía $k : B \times I \rightarrow E$ se tiene por la propiedad de la extensión homotópica cubriente la cual satisface que $k_1 = sb$ y $pk_0 = b$ y $k_0i = \bar{h}$. Por lo que k_0 es el levantamiento buscado. †

Definición 3.1.10 Sea $p : E \rightarrow X$ un mapeo en Ss , decimos que p es una *equivalencia homotópica* si existe un mapeo $s : X \rightarrow E$ tal que $sp \simeq id_E$ y $ps \simeq id_X$.

Proposición 3.1.10 Sea X un complejo de Kan, entonces la fibración $p : E \rightarrow X$ es trivial si y sólo si es una equivalencia homotópica.

Demostración. Supongamos que $p : E \rightarrow X$ es una fibración trivial, por la proposición anterior se tiene que p es el dual de un retracto de deformación, así que se tiene un mapeo $s : X \rightarrow E$ tal que $ps = id_X$ y $sp \simeq id_E$ y por lo tanto es una equivalencia homotópica.

Supongamos ahora que $p : E \rightarrow X$ es una equivalencia homotópica, por lo que tenemos dos mapeos $h, \bar{h} : I \rightarrow E$ con $\bar{h} = sph$, las cuales coinciden en $E \times \{0\}$, los cuales nos inducen dos mapeos $I \rightarrow E^E$. Identificando los mapeos $h_1 = id_E$ y $\bar{h}_1 = sp$ como vértices en Λ_0^2 , notemos además que $p^E : E^E \rightarrow X^E$ es una fibración ya que p lo es. Así, se tiene el levantamiento α en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_0^2 & \longrightarrow & E^E \\
\downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow p^E \\
\Delta^2 & \longrightarrow & X^E
\end{array} .$$

Definiendo $\bar{\alpha} = \alpha \varepsilon^0 : E \times I \rightarrow E$ es tal que

$$\begin{array}{ccc}
E \times I & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & E \\
\pi_1 \downarrow & & \downarrow p \\
E & \xrightarrow{p} & X
\end{array} .$$

Por lo que p es una fibración trivial por la proposición anterior. †

3.2. La fibra de un conjunto simplicial

Definición 3.2.1 Sea $p : E \rightarrow X$ una fibración. La terna (p, E, X) es llamado *espacio fibrante*, donde E es llamado el complejo total y X el complejo base. Si Φ es el complejo generado por un vértice X , $F = p^{-1}(\phi)$ es llamada *la fibra sobre Φ* . Si Ψ es el complejo generado por los vértices de F , entonces la sucesión

$$(F, \Psi) \xrightarrow{i} (E, \Psi) \xrightarrow{p} (E, \Phi)$$

es exacta.

Proposición 3.2.1 Sea $p : E \rightarrow X$ una fibración de Kan. Entonces F es un complejo de Kan.

Demostración. Consideremos $\{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_{n+1}\} \subset F_n$ n -simplejos coincidentes de F , denotemos por Φ al $n+1$ -simplejo de X tal que $p(x_i) = d_i\Phi$. Como p es de Kan se tiene que existe $x \in E_{n+1}$ tal que $d_i x = x_i$ con $i \neq k$ y $p(x) = \Phi$. Entonces $x \in F_{n+1}$ ya que $F = p^{-1}(\Phi)$. \vdash

Lema 3.2.2 Sea $p : E \rightarrow X$ una fibración sobreyectiva de Kan. Dados $\{x_0, \dots, x_r\} \subset E_n$ con $r \leq n$ y $\delta_s x_t = d_{t-1} x_s$ para $s < t$, si existe $y \in X_{n+1}$ tal que $d_s y = p(x_s)$ para $0 \leq s \leq r$, entonces existe $x \in E_{n+1}$ tal que $d_s x = x_s$ y $p(x) = y$.

Demostración. La demostración del lema 3.2.2 puede ser consultada en [12] capítulo 2.

Proposición 3.2.3 Sea $p : E \rightarrow X$ una fibración de Kan.

A) Si E es un complejo de Kan y p es sobreyectiva entonces X es un complejo de Kan.

Demostración. Supongamos que E es un complejo de Kan y sea $\{x_0, \dots, x_k, \dots, x_{n+1}\} \subset X_n$ n -simplejos coincidentes. Dado que p es sobreyectiva se tiene $\{y_0, \dots, y_k, \dots, y_{n+1}\} \subset E_n$ con $p(y_i) = x_i$ y como E es de Kan, existe $y \in E_{n+1}$ tal que $d_i y = y_i$. Tomando $x = p(y)$ se tiene que $d_i x = x_i$.

B) Si X es un complejo de Kan, entonces E es un complejo de Kan.

Demostración. Supongamos que X es un complejo de Kan. Considerando $\{y_0, \dots, y_k, \dots, y_n\} \subset E_n$ n -simplejos coincidentes, bastará tomar $\{x_0, \dots, x_k, \dots, x_n\} \subset X_n$ n -simplejos coincidentes en X_n con $y_i = p(x_i)$, como X es de Kan se tiene $y \in X_{n+1}$ tal que $d_i y = y_i = p(x_i)$ y por el lema anterior se tiene $x \in E_{n+1}$ tal que $d_i x = x_i$ y $p(x) = y$. \vdash

Definición 3.2.2

- Sean (E, p, B) y $(\bar{E}, \bar{p}, \bar{B})$ espacios fibrados. Un mapeo $(\bar{f}, f) : (E, p, B) \rightarrow (\bar{E}, \bar{p}, \bar{B})$ es un par de mapeos tales que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{E} \\ p \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\ B & \xrightarrow{f} & \bar{B} \end{array} .$$

- Una homotopía $(\bar{F}, F) : (\bar{f}, f) \rightarrow (\bar{g}, g)$ es un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E \times I & \xrightarrow{\bar{F}} & \bar{E} \\ p \times id_I \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\ B \times I & \xrightarrow{F} & \bar{B} \end{array} .$$

- Un sub-espacio fibrado (E, p, B) de $(\bar{E}, \bar{p}, \bar{B})$ se dice que es un *retracto de deformación* de $(\bar{E}, \bar{p}, \bar{B})$, si la identidad de (E, p, B) es homotópicamente relativa en (E, p, B) a un mapeo $(\bar{E}, \bar{p}, \bar{B})$ sobre (E, p, B) , el cual extiende la inclusión $(E, p, B) \rightarrow (\bar{E}, \bar{p}, \bar{B})$.

Teorema 3.2.4 Si $p : E \rightarrow X$ es una fibración de Kan y F es la fibra sobre Φ , entonces F^K es la fibra sobre Φ^K para cualquier complejo K .

Demostración. La demostración del teorema 3.2.4 puede ser consultada en [2] capítulo 2.

Corolario 3.2.5 Sean (E, p, B) y (E_1, p_1, B_1) espacios fibrados con B_1 complejo de Kan. La relación entre los mapeos $(E, p, B) \rightarrow (E_1, p_1, B_1)$, dada por la homotopía, es una relación de equivalencia.

Demostración. Sea $(\bar{f}, f) : (E, p, B) \rightarrow (E_1, p_1, B_1)$ un mapeo entre espacios fibrados, bastará definir (\bar{F}, F) como $\bar{F}(x, z) = \bar{f}(x)$ y $F(y, z) = f(z)$ con $x \in E_n$, $y \in B_n$ y $z \in I_n$ haciendo conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E \times I & \xrightarrow{\bar{F}} & E_1 \\ p \times id_I \downarrow & & \downarrow p_1 \\ B \times I & \xrightarrow{F} & B_1 \end{array} .$$

Por lo que $(\bar{f}, f) \sim (\bar{f}, f)$.

Supongamos ahora que $(\bar{F}, F) : (\bar{f}, f) \simeq (\bar{g}, g)$ y $(\bar{G}, G) : (\bar{h}, h) \simeq (\bar{g}, g)$. Como B_1 es un complejo de Kan, se tiene que $B_1^B = hom_{Ss}(B \times \Delta^0, B_1)$ también lo es, tomando $U : B \times \Delta^2 \rightarrow B_1$ tal que $d_1U = G$ y $d_2U = F$. Definiendo $H = d_0U$ se tiene que $H : g \simeq f$ ya que usando la identidad $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ se cumple

$$\begin{aligned} d_0 H &= d_0 d_0 U = d_0 d_1 U = d_0 G = h \\ d_1 H &= d_1 d_0 U = d_0 d_2 U = d_0 F = g. \end{aligned}$$

Análogamente, dado que $p_1^E : E_1^E \rightarrow B_1^E$ es una fibración de Kan se tiene $v \in (E_1^E)_2$ tal que $d_1 v = \bar{G}$ y $d_2 v = \bar{F}$ y $p_1^E(v) = U(p \times 1)$. Definiendo $d_0 v = \bar{H}$ se tiene que $\bar{H} : \bar{g} \simeq \bar{f}$ y $p_1 \bar{H} = p_1^E(\bar{H}) = H(p \times I)$.†

Corolario 3.2.6 Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración de Kan y consideremos F_Φ y F_Ψ las fibras sobre Φ y Ψ , respectivamente. Si Ψ y Φ pertenecen a la misma componente conexa de B , entonces F_Ψ y F_Φ pertenecen al mismo tipo de homotopía.

Demostración. La demostración del corolario 3.2.6 puede ser consultada en [2] capítulo 2.

Proposición 3.2.7 Sea $p : E \rightarrow X$ una fibración de Kan e $i : A \rightarrow X$ un monomorfismo. Si A es un retracto de deformación fuerte de X , entonces en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_A & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{i} & X \end{array} ,$$

F_A es retracto de deformación fuerte de E , donde F_A es la fibra sobre el complejo A .

Demostración. Dado que A es retracto de deformación de X , se tiene una homotopía $h : X \times I \rightarrow X$ la cual nos induce los diagramas

$$\begin{array}{ccccccc} E \times 0 & \longrightarrow & E & & F_A \times I & \longrightarrow & F_A \longrightarrow E \\ \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow & & \downarrow p \\ E \times I & \longrightarrow & X \times I & \longrightarrow & X & & X \end{array} .$$

Los cuales nos aportan el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (E \times 0) \cup (F_A \times I) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow k & \downarrow p \\ E \times I & \longrightarrow & X \times I \longrightarrow X \end{array} ,$$

donde el levantamiento $k : E \times I \rightarrow E$ existe por la propiedad de la extensión homotópica cubriente.†

Definición 3.2.3 Diremos que dos mapeos $\alpha : A \rightarrow C$ y $\beta : B \rightarrow C$ son una *equivalencia homotópica fibrante* si existen dos mapeos f y g tales que conmutan los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha \searrow & & \swarrow \beta \\ & C & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g} & A \\ \beta \searrow & & \swarrow \alpha \\ & C & \end{array} ,$$

y dos homotopías $h : A \times I \rightarrow A$ y $k : B \times I \rightarrow B$ con $h_0 = id_A$, $h_1 = gf$, $k_0 = id_B$ y $k_1 = fg$ tales que

$$\begin{array}{ccc} A \times I & \xrightarrow{h} & A \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ A & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} B \times I & \xrightarrow{k} & B \\ \downarrow & & \downarrow \beta \\ B & \xrightarrow{\beta} & C \end{array}$$

conmutan.

Proposición 3.2.8 Sea $p : E \rightarrow X$ una fibración. Denotemos por $p_0 : E_0 \rightarrow X$ y $p_1 : E_1 \rightarrow X$ las inclusiones de las fibras $E_0 = p^{-1}(X \times \{0\})$ y $E_1 = p^{-1}(X \times \{1\})$ en X , entonces p_0 y p_1 son equivalencias homotópicas fibrantes.

Demostración. Por la proposición anterior se tiene que E_0 y E_1 son retracts de deformación de E , esto dado que $X \times \{0\}$ y $X \times \{1\}$ son retracts de $X \times I$, así las homotopías inducidas $h : E_0 \times I \rightarrow E_0$ y $k : E_1 \times I \rightarrow E_1$ son las homotopías buscadas. \dashv

3.3 Complejos minimales

Definición 3.3.1 Sea X un complejo de Kan. Dados $x, y \in X_n$, diremos que $x \simeq y$ si los mapeos representativos f_x y f_y son homotópicos relativos a $\delta\Delta^n$.

Proposición 3.3.1 Sean X un complejo de Kan y $x, y \in X_n$. Entonces $x \simeq y$ si y sólo si $d_i x = d_i y$ para toda i y para algún $0 \leq k \leq n$ se tiene $w \in X_{n+1}$ el cual $d_k w = x$, $d_{k+1} w = y$ y $d_i w = d_i s_k x$ para $k \neq i \neq k+1$.

Definición 3.3.2 Un complejo de Kan X es llamado *complejo minimal* si para cualesquiera dos $x, y \in X_n$ tal que $x \simeq y$ implica que $x = y$. Un subcomplejo simplicial $M \subset X$ es llamado *subcomplejo minimal de X* si M es minimal y además M es retracts de deformación fuerte de X .

Otra definición de conjunto minimal es la siguiente

Definición 3.3.3 Diremos que un complejo de Kan X es minimal si para cualesquiera $x, y \in X_n$ tal que $d_i x = d_i y$ para $i \neq k$ entonces $d_k x = d_k y$.

En este sentido se tiene la siguiente proposición

Proposición 3.3.2 Un complejo de Kan X es minimal si y sólo si, para cualesquiera $x, y \in X_n$ tal que $x \sim y$ se tiene que $x = y$.

Demostración. Asumamos que X es un complejo minimal, dados $x, y \in X_n$ talque $x \sim y$ por la proposición anterior se tiene la existencia de $z \in X_{n+1}$ con $d_n z = x$, $d_{n+1} z = y$ y $d_i z = s_{n+1} d_i x$ para $i < n+1$. Notemos que $s_{n+1} d_i x = d_i s_n x$ para $i < n+1$, así tenemos que $z, s_n x \in X_{n+1}$ coinciden en caras para todo $i \neq n+1$. Como X es minimal se tienen que $y = d_{n+1} z = s_{n+1} d_{n+1} x = x$. Por lo tanto $x = y$.

Luego, sean $x, y \in X_{n+1}$ tales que $d_i x = d_i y \in X_n$ para $i \neq k$. Por la condición de extensión se tiene que para $k \leq n$ se tiene $z \in X_{n+2}$ que satisface que $d_i z = s_n d_i x$ para $i \leq n$, $i \neq k$, $d_{n+1} z = x$ y $d_{n+2} z = y$. Entonces $d_k z : d_k x \sim d_k y$ y por hipótesis se tiene que $d_k x = d_k y$. \dashv

Proposición 3.3.3 Cualquier complejo de Kan contiene un subcomplejo minimal.

Demostración. Recordemos que si X es un complejo de Kan, la homotopía entre simplejos es una relación de equivalencia. Desarrollemos la construcción de un subcomplejo $M \subset X$ mediante inducción sobre M_i . Definamos M_0 como el complejo que consiste de los representantes de las clases de equivalencia sobre X_0 dada por la equivalencia de vértices.

Supongamos que M_j está definida para $j < n$, definamos M_n como el complejo formado por los representantes de cada clase de equivalencia en X_n , notemos que todos los símlices están en M_{n-1} eligiendo un degenerado cuando sea posible.

Mostremos que M es un complejo de Kan, para ello consideremos $\{y_0, \dots, \bar{y}_k, \dots, y_n\} \subset M_{n-1}$ simplejos coincidentes. Como X es de Kan se tiene $y \in X_n$ tal que $d_i y = y_i$ para $i \neq k$. Como $d_k y \in X_{n-1}$ se tiene que es homotópico a algún $w \in M_{n-1}$. Sea $z \in X_n$ tal que $d_i z = d_i y$ suponiendo que $d_k z = w$. Entonces $z \sim x$ con $x \in M_n$ tal que $d_i x = y_i$ para $i \neq k$.

Ahora definamos $F : X \times I \rightarrow X$ aplicando inducción sobre el esqueleto de X ; definamos F sobre $X_0 \times I$ asignándole a cada vértice $v \in X_0$ un simplex $x \in X_1$ donde $d_0 x = v$ y $d_1 x = w$ para $v \sim w$ con $w \in M$. Así, $F(v, i_1) = x$.

Supongamos ahora que F está definida en $(X_{n-1} \times I) \cup (X \times 0)$. Recordando el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in \Sigma^n} \delta \Delta^n & \longrightarrow & Sk^{n-1} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{x \in \Sigma^n} \Delta^n & \longrightarrow & Sk^n X \end{array} ,$$

para cada $x \in X_n$ no degenerado, F induce un mapeo $G : (\delta \Delta^n \times I) \cup (\Delta^n \times 0) \rightarrow X$, que puede ser extendido a $\bar{G} : \Delta^n \times I \rightarrow X$, para el cual el complejo $\bar{G}(i_n, 1)$ tiene todas sus caras en M_{n-1} por lo cual es homotópico a algún $z \in M_n$. Así definamos $\bar{G}(i_n, 1) = z$ y $\bar{G} = G$ en cualquier otra parte. Así tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\delta \Delta^n \times I) \cup (\Delta^n \times 0) & \xrightarrow{G} & X_n \times I \\ & \searrow & \uparrow \bar{G} \\ & & \Delta^n \times I \end{array} .$$

Por lo tanto F queda definida en $X_n \times I$ por estos dos mapeos.†

Definición 3.3.4 Sean $f, g : L \rightarrow K$ dos mapeos simpliciales. Una *homotopía* entre f y g es un mapeo $h_i : L_q \rightarrow K_{q+1}$, $i \leq q$, el cual cumple

- $d_0 h_0 = f$ y $d_{q+1} h_q = g$
- $d_i h_j = h_{j-1} d_i$ para $i < j$
 $d_{j+1} h_{j+1} = d_{j+1} h_j$
 $d_i h_j = h_j d_{i-1}$ para $i > j + 1$

- $s_i h_j = h_{j+1} s_i$ para $i \leq j$
- $s_i h_j = h_j s_{i-1}$ para $i > j$.

Lema 3.3.4 Sea $f \simeq g : L \rightarrow M$ con M un conjunto minimal. Si f es un isomorfismo, entonces g también lo es.

Demostración. Sea $h : L \rightarrow M$ la homotopía dada, supongamos que para $x, y \in L_q$ se tiene que $g(x) = g(y)$ es decir $d_{q+1} h q(x) = d_{q+1} h q(y)$. Apliquemos inducción sobre $h_q : L_q \rightarrow M_{q+1}$.

Para $q = 0$ tenemos que $d_1 h_0(x) = d_1 h_0(y)$ y por la minimalidad de M se tiene que $g(x) = d_0 h_0(x) = d_0 h_0(y) = f(y)$, dado que f es isomorfismo se tiene que $x = y$.

Supongamos que se cumple para $r < q$, es decir, $g_r : L_r \rightarrow M_r$ es un isomorfismo. Notemos que para $x, y \in M_q$ se tiene que $d_i x, d_i y \in M_{q-1}$, por lo que $g(d_i x) = d_i g(x) = d_i g(y) = g(d_i y)$ y por hipótesis inductiva se tiene que $d_i x = d_i y$. Si $i < q$ se tiene que $d_i h_q(x) = h_{q-1} d_i(x) = h_{q-1} d_i(y) = d_i h_q(y)$, nuevamente por la minimalidad de M , se cumple que $d_q h_q(x) = d_q h_q(y)$. Análogamente se tiene que $d_{q-1} h_{q-1}(x) = d_{q-1} h_{q-1}(y)$ e iterando se llega a $f(x) = d_0 h_0(x) = d_0 h_0(y) = f(y)$, por lo que finalmente $x = y$.

Demostremos ahora que g es suprayectiva, para esto apliquemos inducción sobre $g_q : L_q \rightarrow M_q$. Para $q = 0$ y dado $y \in M_0$ tomemos $z \in M_1$ tal que $d_1 z = y$ y $x \in L_0$ con $f(x) = d_0 z$ con $f(x) = d_0 h_0(x)$. Así, $g(x) = d_1 h_0 = d_1 z = y$.

Supongamos que se cumple para $\bar{q} < q$. Sea $y \in M_q$, notemos que $d_i y \in M_{q-1}$ para $i \leq q$. Por hipótesis existe $x_i \in L_{q-1}$ tal que $g(x_i) = d_i y$, tomando $h_{q-1} : L_{q-1} \rightarrow M_q$ y $z \in M_{q+1}$ tal que $d_i z = h_{q-1}(x_i)$ para $i < q$ y $d_{q+1} z = y$. Repitiendo éste proceso para $j \in \{0, 1, \dots, q\}$ se tienen $z_j \in M_{q+1}$ tal que $d_i z_j = h_{j-1}(x_i)$ si $i < j$, $d_{j+1} z_j = d_{j+1} z_{j+1}$ y $d_i z_j = h_j(x_{i-1})$ si $i > j + 1$.

Tomando $x \in L_q$ tal que $f(x) = d_0 z_0$, notemos que para $i > 0$ $f(d_i x) = d_i f(x) = d_i d_0 z = d_0 d_{i+1} z_0 = d_0 h_0(x_i) = f_{x_i}$, lo que implica que $d_i x = x_i$. Usando las identidades $d_i z_j = h_j(x_{i-1})$ y que $d_i h_j = h_j d_{i-1}$ se tiene que $d_i h_0(x) = h_0 d_{i-1}(x) = h_0(x_{i-1}) = d_i z_0$. Análogamente se tiene que $d_i h_j = h_j d_{i-1}(x) = d_i z_j$. En particular $g(x) = d_{q+1} h_q(x) = d_{q+1} z_q = y$. Por lo tanto, g es un isomorfismo.†

Proposición 3.3.5 Sea $f : M \rightarrow \bar{M}$ una equivalencia homotópica con M y \bar{M} complejos minimales, entonces f es un isomorfismo.

Demostración. Como f es una equivalencia homotópica, de tiene un mapeo $g : \bar{M} \rightarrow M$ tal que $gf \simeq 1_M$ y $fg \simeq 1_{\bar{M}}$, por el lema anterior se tiene que gf y fg son isomorfismo. †

Notemos que una consecuencia de la proposición anterior es la unicidad, salvo isomorfismos, cuando existe una equivalencia homotópica, es decir, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.3.6 Cualesquiera dos complejos que sean retractos de un complejo de Kan, son isomorfos.

Corolario 3.3.7 Cualesquiera dos complejos minimales M y \bar{M} de un complejo de Kan X , son isomorfos.

3.4. Fibraciones minimales

Definición 3.4.1 Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración de Kan, se dice que es una *fibración minimal* si $p(x) = p(y)$ y $d_i x = d_i y$ para $i \neq k$ implica que $d_k x = d_k y$. Si B es un complejo minimal, (E, p, B) se le llama *espacio fibrante minimal*.

Lema 3.4.1 Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración de Kan. Entonces si p es minimal, cada fibra de p es un complejo de Kan.

[Ref]

Lema 3.4.2 Sea (E, p, B) un espacio fibra. Si E es un complejo minimal y p es suprayectiva, entonces (E, p, B) es un espacio fibrante minimal.

Demostración. Notemos que el mapeo $p : E \rightarrow B$ es una fibración minimal. Faltaría mostrar que B es un complejo minimal. Tomemos $x, y \in B_q$ tal que $z : x \sim y$ con $z \in B_{n+1}$, $d_q z = x$ y $d_{q+1} z = y$. Como p es suprayectiva se tiene $w \in E_q$ tal que $p(w) = x$, ya que p es una fibración de Kan, existe $u \in E_{q+1}$ tal que $d_i u = s_{q-1} d_i w$ para $i < q$ y $d_q u = w$ y $p(u) = z$. Además $u : d_{q+1} u \sim d_q u$ y ya que E es minimal, tenemos que $d_{q+1} u = d_q u$. Así, $p(d_{q+1} u) = d_{q+1} p(u) = d_{q+1} z = y$ y $p(d_q u) = p(w) = x$, por lo que $x = y$. \dashv

Definición 3.4.2 Sea $p : E \rightarrow B$ un mapeo. Tomando $x, y \in E_q$, decimos que x es *p-homotópica a y* ($x \sim_p y$).

Lema 3.4.3 Si $p : E \rightarrow B$ es una fibración de Kan, entonces \sim_p es una relación de equivalencia.

Definición 3.4.3 Dados dos mapeos $p : E \rightarrow B$ y $f : A \rightarrow B$, definamos $E^f = \{(e, a) | p(e) = f(a)\} \subset E \times A$ y $p^f : E^f \rightarrow A$ y $\bar{f} : E^f \rightarrow E$ como proyecciones canónicas.

El diagrama

$$\begin{array}{ccc} E^f & \xrightarrow{p^f} & A \\ \bar{f} \downarrow & & \downarrow f \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

es llamado *el producto fibra de p y f* y la terna (E^f, p^f, A) es llamado *el espacio fibra inducido por (E, p, B) y f*.

Definición 3.4.4 Un mapeo $p : E \rightarrow B$ es llamado *un haz fibrado* si p es un mapeo suprayectivo y si para cada $\bar{b} : \Delta^n \rightarrow B$ se induce un mapeo $p^{\bar{b}} : E^{\bar{b}} \rightarrow E$, el cual es isomorfo a $p^* : F \times \Delta^n \rightarrow \Delta^n$, donde $p^*(f, k) = k$ con $k \in \Delta^n$ y donde

F es un complejo el cual es llamado la *fibra del haz*. Si F es un complejo de Kan $p : E \rightarrow B$ recibe el nombre de *haz fibra de Kan*.

Lema 3.4.4 Un haz fibrado de Kan es una fibración de Kan.

Demostración. Sean $\{x_0, x_1, \dots, \bar{x}_k, \dots, x_{q+1}\}$ q -símplices compatibles, se tiene $b \in X_{q+1}$ tal que $d_i b = x_i$ para $i \neq k$. Definamos $a(b) : F \times \Delta^{q+1} \rightarrow E^{\bar{b}}$ un isomorfismo como $a(b)(y_i, d_i \Delta^{q+1}) = (x_i, d_i \Delta^{q+1})$, entonces existe $y \in F_{q+1}$ tal que $d_i y = y_i$ y si $a(b)(y, \Delta^{q+1})$ entonces $p(x) = b$ y $d_i x = x_i$. \vdash

Teorema 3.4.5 Una fibración minimal es un haz fibrado.

Demostración. La demostración el teorema 3.4.5 puede ser consultada en [12] capítulo 2.

Teorema 3.4.6 Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración de Kan, entonces se tiene un subcomplejo \bar{E} de E tal que $p|_{\bar{E}} : \bar{E} \rightarrow B$ es una fibración minimal, la cual es un retracto de deformación fuerte fibrante de p .

Demostración. La demostración del teorema 3.4.6 puede ser consultada en [12] capítulo 3.

3.5. La estructura homotópica de Quillen en Ss

Teorema 3.5.1 Cualquier mapeo $f : X \rightarrow Y$ en Ss puede ser factorizado como

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & E \\ & \searrow f & \swarrow p \\ & & Y \end{array}$$

con i anodino y p una fibración.

Demostración. Definimos $\mathcal{L} = \{(h, g) \in \text{hom}_{Ss}(\Lambda_k^n, X) \times \text{hom}_{Ss}(\Delta^n, Y) \text{ con } 0 \leq n \text{ y } 0 \leq k \leq n\}$ al conjunto de pares de morfismos tal que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \xrightarrow{h} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \Delta^n & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

asumiendo que existe su producto, \mathcal{L} induce el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \coprod \Lambda_k^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \coprod \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

Considerando el pushout del diagrama anterior, podemos factorizar el mapeo f como $f_0 i_0$, donde i_0 es anodina,

$$\begin{array}{ccc}
\coprod \Lambda_k^n & \longrightarrow & X \\
\downarrow & & \downarrow i_0 \\
\coprod \Delta^n & \longrightarrow & X_1 \\
& \searrow & \downarrow f_0 \\
& & Y
\end{array}
\begin{array}{c}
\swarrow f \\
\downarrow f \\
\swarrow f_0 \\
\downarrow f_0
\end{array}$$

Repitiendo éste argumento, podemos factorizar $f_0 = f_1 i_1$, definiendo $x = x_0$ se obtiene

$$\begin{array}{ccccc}
x_0 & \xrightarrow{i_0} & x_1 & \xrightarrow{i_1} & X_2 \\
& \searrow f & \downarrow f_0 & \swarrow f_1 & \\
& & Y & &
\end{array}$$

Definiendo $E = \text{colim}_n X_n$ y $p : E \rightarrow Y$ definido en cada f^n y siendo $i : X \rightarrow E$ el mapeo inducido por el colímite, el cual es un mapeo anodino, tenemos la factorización

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{i} & E \\
& \searrow f & \swarrow p \\
& & Y
\end{array}$$

Para mostrar que p es una fibración de Kan, mostremos que tiene RLP respecto a la familia $\{\Lambda_k^n \rightarrow \Delta^n\}$, para ello considérese el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_k^n & \xrightarrow{g} & E \\
\downarrow & & \downarrow f \\
\Delta^n & \longrightarrow & Y
\end{array}
,$$

donde el mapeo $g : \Lambda_k^n \rightarrow E = \text{colim}_n x_n$ puede ser factorizado como en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\Lambda_k^n & \xrightarrow{g_n} & X_n & \xrightarrow{i_n} & X_{n+1} \\
\downarrow & \nearrow \alpha_n & \downarrow f_n & \swarrow f_{n+1} & \\
\Delta^n & \longrightarrow & Y & &
\end{array}
,$$

y el mapeo $\alpha_n : \Delta^n \rightarrow X_n$ es obtenido en la construcción del pushout (α_n, X_n, i_n) . De esto obtenemos el levantamiento en el colímite $\alpha : \Delta^n \rightarrow E$.

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_k^n & \longrightarrow & E \\
\downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow p \\
\Delta^n & \longrightarrow & Y
\end{array}$$

Por lo tanto, $p : E \rightarrow Y$ es una fibración.

Sustituyendo el mapeo $\Lambda_k^n \rightarrow \Delta^n$ por $\delta\Delta^n \rightarrow \Delta^n$ se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 3.5.2 Cualquier mapeo $f : X \rightarrow Y$ de Ss puede ser factorizado como $f = pi$ con i monomorfismo y p una fibración trivial.

Teorema 3.5.3 Si $i : A \rightarrow B$ tiene LLP respecto a todas las fibraciones, entonces i es anodino.

Demostración. Por el teorema anterior, i se puede factorizar como pi con j un mapeo anodino y p una fibración. Así se obtiene la diagonal en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & X \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{id_B} & B \end{array} .$$

Por lo que i es retracto de j y por lo tanto i es anodino.†

Definición 3.5.1 Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo en Ss , diremos que f es una *equivalencia débil* si para cada complejo K de Kan, el mapeo $\pi_0(f^k) : \pi_0(Y^k) \rightarrow \pi_0(X^k)$ es una biyección.

Así definimos tres clases de mapeos en Ss

$$\mathcal{F} = \{ \alpha : X \rightarrow Y \text{ tal que } \alpha \text{ sea una fibración de Kan} \}$$

$$\mathcal{C} = \{ \alpha : X \rightarrow Y \text{ con } \alpha \text{ monomorfismo} \}$$

$$\mathcal{W} = \{ \alpha : X \rightarrow Y \text{ con } \alpha \text{ equivalencia débil} \}.$$

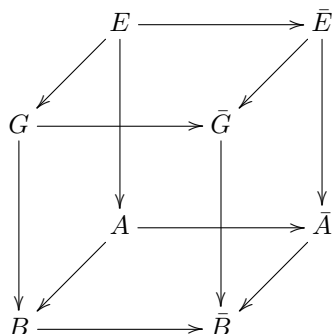
Lema 3.5.4 Sean $i : A \rightarrow B$ un mapeo anodino y $p : E \rightarrow A$ un haz. Entonces se tiene en el diagrama pullback

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \bar{E} \\ p \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\ A & \xrightarrow{i} & B \end{array} ,$$

donde el mapeo $\bar{p} : \bar{E} \rightarrow B$ es un haz y $E \rightarrow \bar{E}$ es anodina. Más aún, la extensión \bar{p} de p es única salvo isomorfismos.

Demostración. La demostración del lema 3.5.4 puede ser consultada en [11] capítulo 3.

Lema 3.5.5 Sea



un cubo conmutativo en Ss , en el cual la cara izquierda y la trasera son pullback's. Si $A \rightarrow B$ es un monomorfismo, entonces la cara derecha y la del frente son pullback's.

Demostración. Evaluando el cubo en objetos de la categoría Δ , bastará mostrar el teorema en la categoría Set , por lo que la cara derecha y la del frente se identifican con

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{E} & \longrightarrow & \bar{E} + (G - E) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bar{A} & \longrightarrow & \bar{A} + (B - A) \\
 \\
 E + (G - E) & \longrightarrow & \bar{E} + (G - E) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A + (B - A) & \longrightarrow & \bar{A} + (B - A)
 \end{array}$$

Así, estos dos diagramas son el coproducto de

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{E} & \longrightarrow & \bar{E} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bar{A} & \longrightarrow & \bar{A} \\
 \\
 0 & \longrightarrow & (G - E) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & (B - A)
 \end{array}$$

y de

$$\begin{array}{ccc}
E & \longrightarrow & \bar{E} \\
\downarrow & & \downarrow \\
A & \longrightarrow & \bar{A} \\
\\
(G - E) & \longrightarrow & (G - E) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(B - A) & \longrightarrow & (B - A)
\end{array} \quad ,$$

respectivamente, y usando que el coproducto de dos pullback es un pullback. \vdash

Proposición 3.5.6 Una fibración $p : E \rightarrow X$ es trivial si y sólo si p es una equivalencia débil.

Demostración. Supongamos $p : E \rightarrow X$ es una fibración trivial, por lo que p es una equivalencia homotópica y por lo tanto es una equivalencia débil, es decir, $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$.

El resto de la demostración puede ser consultada en [11] capítulo 3.

Proposición 3.5.7 Una cofibración $i : A \rightarrow B$ es anodino si y sólo si es una equivalencia débil.

Demostración. Supongamos que $i : A \rightarrow B$ es una cofibración y equivalencia débil, por la proposición 3.5.2, se tiene una factorización pj con j un monomorfismo y p una fibración trivial. Como i es un monomorfismo se tiene la diagonal en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{j} & E \\
i \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\
B & \xrightarrow{id_B} & B
\end{array} \quad ,$$

donde se puede notar que i es retracto de j y por lo tanto es un mapeo anodino.

Ahora, supongamos que i es un monomorfismo y mapeo anodino, el regreso es válido aplicando la proposición 3.5.2 y el dos de tres de la clase \mathcal{W} .

Teorema 3.5.8 Las clases de fibración, cofibración y equivalencia débil $(\mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathcal{W})$, definidas anteriormente, aportan a la categoría \mathcal{Ss} una estructura homotópica de Quillen.

Demostración. Claramente los axiomas A_1, A_2 se cumplen. Para demostrar A_3 consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & X \\
g \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\
B & \longrightarrow & Y
\end{array}$$

con g una cofibración y f una fibración. Supongamos que g es una cofibración equivalencia débil. Por la proposición 3.5.7 se tiene que g es anodino por lo que tiene la propiedad del levantamiento izquierdo respecto a la fibración f induciendo el levantamiento $h : B \rightarrow X$. Si ahora suponemos que f es una fibración equivalencia débil se tiene por la proposición 3.5.6 que f es una fibración trivial, así se tiene el levantamiento $h : B \rightarrow X$ respecto al monomorfismo g . Notemos que A_4 se cumple como consecuencia de 3.5.1 y 3.5.2.†

Capítulo 4

El n-ésimo grupo de homotopía de un conjunto simplicial

4.1 Conjuntos simpliciales punteados y el grupo fundamental

Sea \mathcal{K} un categoría y denotemos por $\mathcal{K}^* = */\mathcal{K}$, con objeto terminal $*$ \in $Obj(\mathcal{K})$, a la categoría

$$Obj(\mathcal{K}^*) = \{(A, a) : A \in Obj(\mathcal{K}) \text{ y } a : * \rightarrow A\}$$

$Morf(\mathcal{K}^*) = \{\alpha : (A, a) \rightarrow (B, b) : (A, a), (B, b) \in \mathcal{K}^*\}$ que haga conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{a} & A \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ * & \xrightarrow{b} & B \end{array} .$$

Definiendo los funtores adjuntos $F_a : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^*$ y $G : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{K}$ como $F_a(A) = (A, a)$ y $G((A, a)) = A$, nos permite calcular límites y pushouts de \mathcal{K}^* a partir de \mathcal{K} como $(A, a) \times (B, b) = (A \times B, (a, b))$. De igual forma dados dos mapeos $f, g : (A, a) \rightarrow (B, b)$ en \mathcal{K}^* , su coigualador (C, qb) es calculado en \mathcal{K} como el coigualador en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{g} & B & \xrightarrow{q} & C \\ & \xrightarrow{f} & & & \end{array} .$$

Análogamente el pushout en \mathcal{K}^*

$$\begin{array}{ccc} (A, a) & \longrightarrow & (C, c) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (B, b) & \longrightarrow & (B \sqcup_A C, \alpha) \end{array} ,$$

está dado por el pushout en \mathcal{K}

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B +_A C \end{array} .$$

Proposición 4.1.1 Si $(\mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathcal{W})$ es una estructura homotópica de Quillen sobre una categoría \mathcal{K} , entonces $(G^{-1}(\mathcal{F}), G^{-1}(\mathcal{C}), G^{-1}(\mathcal{W}))$ es una estructura homotópica de Quillen sobre \mathcal{K}^* .

Demostración. Notemos que los axiomas A_1 y A_2 se cumplen dado que la cerradura en retracts y el dos de tres en \mathcal{K}^* son llevados a \mathcal{K} mediante el functor G .

Para A_3 consideremos el diagrama en \mathcal{K}^*

$$\begin{array}{ccc} (A, a) & \longrightarrow & (X, x) \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ (B, b) & \longrightarrow & (Y, y) \end{array}$$

con $f \in G^{-1}(\mathcal{C})$ y $g \in G^{-1}(\mathcal{F})$. Si f o g pertenecen a $G^{-1}(\mathcal{W})$ se tiene la existencia de la diagonal en el diagrama inducido en \mathcal{K} , la cual nos induce la diagonal en \mathcal{K}^* satisfaciendo A_3 .

Para A_4 consideremos un mapeo en \mathcal{K}^* , $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$, con $x : * \rightarrow X$ y $y : * \rightarrow Y$ puntos base de X e Y , respectivamente, el cual puede ser factorizado en \mathcal{K} como

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & A \\ & \searrow f & \swarrow p \\ & & Y \end{array}$$

con $i \in \mathcal{C}$ y $p \in \mathcal{F}$ la cual nos induce la factorización

$$\begin{array}{ccc} (X, x) & \longrightarrow & (A, a) \\ & \searrow & \swarrow \\ & & (Y, y) \end{array} ,$$

cumpléndose A_4 . \vdash

En el caso particular que la categoría \mathcal{K} sea propia, dado que podemos calcular pushout en \mathcal{K}^* a partir de \mathcal{K} , se puede concluir que \mathcal{K}^* también es propia.

Cuando $\mathcal{K} = Ss$ la categoría Ss^* es llamada *la categoría de conjuntos simpliciales punteados*.

Definición 4.1.1 Sean X, Y conjuntos simpliciales punteados, el *producto cuña de X e Y* , denotado $X \vee Y$, es el conjunto simplicial obtenido al identificar sus puntos base, es decir

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \vee Y \end{array} .$$

El cociente $X \times Y / X \vee Y = X \wedge Y$ es definido como *el producto reducido de X e Y* .

Teorema 4.1.2 Sean X un conjunto simplicial punteado y un mapeo $i : A \rightarrow B$ una extensión anodina en Ss^* . Entonces el mapeo $A \wedge X \rightarrow B \wedge X$ es anodino.

Demostración. Considerando el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \{a\} \times X \cup A \times \{x\} & \longrightarrow & A \times X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \{a\} \times X \cup B \times \{x\} & \longrightarrow & A \times X \cup B \times \{x\} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & A \times X
 \end{array} ,$$

donde a y x son los puntos bases de A y X respectivamente, en el anterior diagrama, la parte superior es un pushout y considerando la inclusión canónica $k : \{x\} \rightarrow X$ se tiene el mapeo anodino $\{x\} \times B \cup A \times X \rightarrow B \times X$ en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \{x\} \times B \cup A \times X & \longrightarrow & B \times X \\
 \downarrow & \swarrow & \searrow \\
 & \{a\} \times X \cup B \times \{a\} & \\
 & \downarrow & \\
 & * & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 A \wedge X & \xrightarrow{i \wedge X} & B \wedge X \\
 \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$

y se tiene que el pushout $i \wedge X : A \wedge X \rightarrow B \wedge X$ es anodino. \vdash

Para realizar un análisis del n -ésimo grupo de homotopía de un conjunto simplicial daremos especial atención a subconjunto simplicial S^n

Definición 4.1.2: La n -esfera simplicial S^n es definida como el subconjunto simplicial $S^n = \Delta^n / \delta\Delta^n$.

$$\begin{array}{ccc}
 * & \longrightarrow & \Delta^n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \delta\Delta^n & \longrightarrow & S^n
 \end{array}$$

Explicitamente los elementos del círculo simplicial S^1 son

$$\Delta_k^1 = \{(i_0, \dots, i_k) \mid 0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq 1\} = \{\overbrace{0, \dots, 0}^i, 1, \dots, 1 \mid 0 \leq i \leq k+1\}$$

Luego $(\delta\Delta^n)_k = \{(0, \dots, 0), (1, \dots, 1)\}$ y por definición se tienen que $S_k^n = \{*, (i_0, \dots, i_k) \mid 0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq 1\} = \{(0, \dots, 0)(1, \dots, 1) \mid 1 \leq k \leq n\}$, el cual tiene $k+1$ elementos incluyendo el punto base. De forma más general, $S_k^n = \{*\}$ para $k < n$ y $S_k^n = \{*, (i_0, \dots, i_k)\}$ para $k \geq n$.

Definamos el n -ésimo grupo de homotopía de un complejo de Kan X como $\pi_n(X) = [S^n, X] = \pi_0(X^{S^n})$, pero también $\pi_n(X)$ puede ser definido como una partición.

Definición 4.1.3 Dado un complejo de Kan punteado X , definamos $\pi_n(X)$ para $n \geq 0$ como el conjunto de clases de equivalencias homotópicas de n -simplices $x \in X_n$ con $d_i x \in [*]$ para $0 \leq i \leq n$.

Definición 4.1.4 Dado un complejo de Kan punteado, definamos $\pi_n(X, *)$ con $n \leq 0$ como el conjunto de clases homotópicas de mapeos $(\delta\Delta^{n+1}, *) \rightarrow (X, *)$, el cual se toma como punto base de $\delta\Delta^{n+1}$ el subconjunto de Δ^{n+1} generado por el vértice $[0]$ y todas las clases homotópicas son relativas al punto base.

Recordemos que un camino simplicial es un mapeo $\alpha : \Delta^1 \rightarrow X$ el cual puede ser identificado con un elemento $x \in X_1$ considerando el camino como su mapeo característico, así se tiene que $\text{hom}_{S_s}(\Delta^1, X) \approx X_1$ por lo que *el punto inicial* $\alpha(0) = \alpha(d_1\sigma) = d_1x_\alpha$ y *el punto final* $\alpha(1) = \alpha(d_0\sigma) = d_0x_\alpha$, con $\sigma \in \Delta^1$.

Si X es de Kan, dados dos caminos α y μ tales que $\alpha(1) = \mu(0)$ podemos encontrar $w \in X_2$ tal que $d_0w = x_\mu$ y $d_2w = x_\alpha$, denotemos por $\alpha * \mu = f_{d_1w}$.

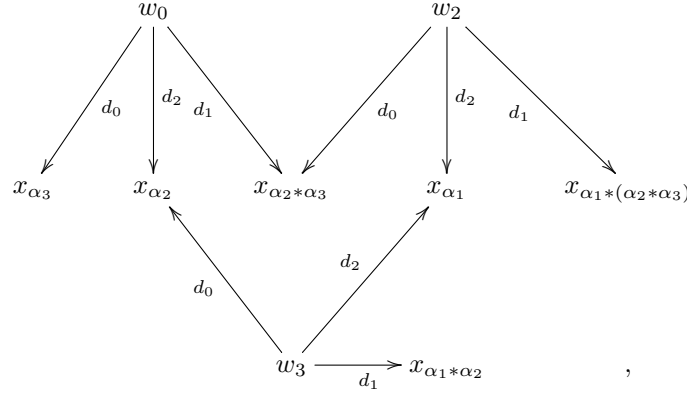
Definamos $[\alpha] = \{\beta : \Delta^1 \rightarrow X \mid \alpha \simeq \beta \text{ rel}(\delta\Delta^1)\}$.

Lema 4.1.2 Supongamos que existen $w_1, w_2 \in X_2$ tales que $d_0w_1 = d_0w_2$ y $d_2w_1 = d_2w_2$, entonces $f_{d_1w_1} \simeq f_{d_1w_2} \text{ rel} \delta\Delta^1$.

Demostración. Definamos el mapeo $F : (\Lambda_1^2 \times \Delta^1) \cup (\Delta^1 \times \delta\Delta^1) \rightarrow X$ dado por $F|_{\Lambda_1^2 \times \Delta^1}(x, t) = f_{w_1}|_{\Lambda_1^2}(x) = f_{w_2}|_{\Lambda_1^2}(x)$ y $F|_{\Delta^1 \times \{0\}} = f_{w_1}$ y $F|_{\Delta^1 \times \{1\}} = f_{w_2}$. F puede ser extendido a un mapeo $\bar{F} : \Delta^2 \times \Delta^1 \rightarrow X$ considerando que la realización geométrica de $|(\Lambda_1^2 \times \Delta^1) \cup (\Delta^2 \times \delta\Delta^1)|$ es un retracto de $|\Delta^2 \times \Delta^1| = T_2 \times T_1$. La composición $\Delta^1 \times \Delta^1 \rightarrow \Delta^2 \times \Delta^1 \rightarrow X$ es una homotopía entre $f_{d_1w_1} \simeq f_{d_1w_2} \text{ rel} \delta\Delta^1$. \dashv

Lema 4.1.3 (Asociatividad) Sea X un complejo de Kan y dados $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ caminos en X con $\alpha_1(1) = \alpha_2(0)$ y $\alpha_2(1) = \alpha_3(0)$. Entonces $(\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3 \simeq \alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3) \text{ rel} \delta\Delta^1$.

Demostración. Dado que $\alpha_2(1) = \alpha_3(0)$ se tiene que $d_0x_{\alpha_2} = d_1x_{\alpha_3}$, por lo que existe $w_0 \in X_2$ con $d_0w_0 = x_{\alpha_3}$ y $d_2w_0 = x_{\alpha_2}$. Notemos que $d_2(d_1w_0) = d_1d_2w_0 = d_1x_{\alpha_2} = \alpha_2(0) = \alpha_1(1) = d_0x_{\alpha_1}$ por lo que existe $w_2 \in X_2$ con $d_0w_2 = d_1w_0$ y $d_2w_2 = x_{\alpha_1}$. Análogamente, como $d_0x_{\alpha_1} = \alpha_1(1) = d_2x_{\alpha_2} = \alpha_2(0)$, existe entonces $w_3 \in X_2$ tal que $d_0w_3 = x_{\alpha_2}$ y $d_2w_3 = x_{\alpha_1}$.



donde $d_1 w_0 = d_0 w_2$, $d_2 w_2 = d_2 w_3$ y $d_2 w_1 = d_0 w_3$, por lo que w_1, w_2 y w_3 son coincidentes. Dado que X es de Kan se tiene $u \in X_3$ tal que $d_i u = w_i$ para $i \neq 1$. Así, $x_{\alpha_1} * (\alpha_2 * \alpha_3) = d_1 w_2 = d_1 d_2 u = d_1 (d_1 u)$ con $d_2 (d_1 u) = d_1 d_3 u = d_1 w_3 = x_{\alpha_1 * \alpha_2}$ y $d_0 (d_1 u) = d_0 d_0 u = d_0 w_0 = x_{\alpha_3}$. De las últimas dos ecuaciones, se tiene que el mapeo $d_1 d_1 u$ es el mapeo representativo para $(\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3$. \vdash

Lema 4.1.4 Sea X un complejo de Kan y sea α un camino en X , entonces existe un camino α^{-1} tal que $\alpha * \alpha^{-1} = id_{\alpha(0)}$ rel $\delta \Delta^1$.

Demostración. Sea $x_2 = x_\alpha$ y $x_1 = s_0 \alpha(0)$, entonces $d_1 x_2 = d_1 x_\alpha = \alpha(0) = d_1 x_1$, por lo que x_1 y x_2 son caras coincidentes, así se tiene $w \in X_2$ tal que $d_2 w = x_\alpha$ y $d_1 w = s_0 \alpha(0)$. Definiendo $\alpha^{-1} = f_{d_0 w}$ se tiene que $\alpha * \alpha^{-1} \simeq id_{\alpha(0)}$ rel $\delta \Delta^1$. \vdash

Teorema 4.1.5 Sea X un complejo de Kan punteado y $*$ su punto base, entonces el grupo de homotopía $\pi_n(X)$ es el conjunto cociente de elementos esféricos en X_n bajo la relación, $x \sim x_1$ si existe $w \in X_{n+1}$ tal que $d_0 w = x$ y $d_2 w = x_1$ y $d_j w = *$ para $j > 1$.

Definimos el producto sobre $\pi_n(X)$ como $[x] + [x_1] = [d_1 w]$.

Proposición 4.1.6 Sea X un complejo de Kan punteado, entonces π_n es conmutativo para $2 \leq n$.

Demostración. La demostración de la proposición 4.1.6 puede ser consultada en [8] capítulo 2.

Lema 4.1.7 Sea X un complejos de Kan punteado y sean x, x_1, x_2 elementos esféricos de X_n para $2 \leq n$. Supongamos que existe $y \in X_{n+1}$ tal que $d_q y = x$, $d_{q+1} y = x_1$, $d_{q+2} y = x_2$ y $d_j y = *$ para $j \neq q, q+1, q+2$. Entonces

$$[x] - [x_1] + [x_2] = 0.$$

Demostración. Aplicando inducción sobre q , notemos que para $q = 0$ se tiene que existe $w \in X_{n+1}$ tal que $d_0 w = x$, $d_1 w = x_1$ y $d_2 w = x_2$. Así, se tiene que $[x] - [x_1] + [x_2] = [d_0 w] - [d_1 w] + [d_2 w] = 0$.

Tomemos $x_i = *$ para $i < q - 1$ o $q + 3 < i$, $x_{q-1} = s_{q+2}d_{q+2}y$, $x_q = y$, $x_{q+1} = s_q d_q y$, $x_{q+3} = s_{q-1} d_{q+2} y$. Notemos que

	x_{q-2}	x_{q-1}	x_q	x_{q+1}	x_{q+2}	x_{q+3}	x_{q+4}
d_{q-3}	*	*	*	*		*	*
d_{q-2}	o	*	*	*		*	*
d_{q-1}	*	o	$d_{q-1}x_q = *$	*		$d_{q+2}y$	*
d_q	*	$d_{q-1}x_{q-1} = *$	o	$d_q y$		$d_{q+2}y$	*

En la tabla se muestra que los elementos x_i tienen caras coincidentes, por lo que existe $w \in X_{n+2}$ con $d_i w = x_i$ para $i \neq q + 2$. Definiendo $z = d_{q+2} w$ se tiene

$$d_j z = d_j d_{q+2} w = \begin{cases} d_{q+1} d_j w = d_{q+1} x_j = * & j < q - 1 \\ d_{q+1} d_{q-1} w = d_{q+1} x_{q-1} = d_{q+2} y = x_2 & j = q - 1 \\ d_{q+1} d_q w = d_{q+1} x_q = d_{q+1} y = x_1 & j = q \\ d_{q+1} d_{q+1} w = d_{q+1} x_{q+1} = d_q y = x & j = q + 1 \\ d_{q+2} d_{q+3} w = d_{q+2} x_{q+3} = * & j = q + 2 \\ d_{q+2} d_{j+1} w = d_{q+1} x_{j+1} = * & j > q + 2 . \end{cases}$$

Así, $[x] - [x_1] + [x_2] = [d_{q+1} x_{q+1}] - [d_{q+1} x_q] + [d_{q+1} x_{q-1}] = 0$ y por hipótesis inductiva se tiene que $[x] - [x_1] + [x_2] = 0$. \vdash

Lema 4.1.8 Sea X un complejo simplicial punteado de Kan y dado $x \in X_{n+1}$ con $d_i x = x_i$ para $0 \leq q \leq n + 1$ tal que todo x_i es esférico. Sea $w \in X_{n+1}$ con $d_i w = x_i$ con $q \neq i, i + 1$, $d_q w = *$ y $d_{q+1} w = z$ para algún $0 \leq q \leq n - 1$. Entonces en $\pi_n(X)$ se satisface

$$[x_q] - [x_{q+1}] + [z] = 0.$$

Teorema 4.1.9 (de la adición homotópica) Sea X un conjunto simplicial punteado de Kan y sean $y_i \in X_n$ elementos esféricos para $0 \leq i \leq n + 1$ con $2 \leq n$. Entonces en $\pi_n(X)$ la ecuación

$$[y_0] - [y_1] + [y_2] + \dots + (-1)^{n+1} [y_{n+1}] = 0$$

es válida si y sólo si existe $y \in X_{n+1}$ tal que $d_i y = y_i$ para $0 \leq i \leq n + 1$.

Demostración. La demostración el teorema 4.1.9 puede ser consultada en [8] capítulo 2.

4.2 Sucesiones exactas, el teorema de Whithead y el teorema de Milnor

Recordemos que dada la composición de dos morfismos

$$\cdot \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} \cdot$$

se dice que es una sucesión exacta en b si $\text{im}(f) = \text{ker}(g)$ y un diagrama de la forma

$$\cdot \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow \cdot$$

es una *sucesión exacta corta* cuando es exacta en a, b y en c .

Consideremos ahora una fibración $p : E \rightarrow B$ y la inclusión $i : F \rightarrow E$ de la fibra F sobre E . Aplicando el funtor π_n se obtiene la sucesión

$$\pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \quad .$$

Definamos el *mapeo frontera* $\partial : \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F)$ de la siguiente manera, sea $b \in B_n$ un elemento esférico y consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ \Delta^n & \xrightarrow{f_b} & B \end{array}$$

con $x \in E_n$ tal que $d_j x = *$ y $p(x) = b$ donde $p(d_0 x) = d_0 p(x) = d_0 b = *$ con $d_0 x \in F_{n-1}$. Dado que $d_j x = *$ se tiene que $d_{j+1} d_0 x = d_0 d_j x = d_0 * = *$. Así, $d_0 x$ es un elemento esférico de F_{n-1} , por lo que definimos $\partial(b) = [d_0 x]$ en $\pi_n(F)$.

Lema 4.2.1 El mapeo $\partial : \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F)$ está bien definido.

Demostración. Mostremos que la definición del mapeo frontera es independiente del representante de la clase de homotopía, para ello consideremos $b, \bar{b} \in B_n$ con $b \simeq \bar{b}$ y $\bar{x} \in E_n$ con $p(\bar{x}) = \bar{b}$ y $d_j \bar{x} = *$; tomemos $c \in B_{n+1}$ con $d_0 c = *$, $d_1 c = b$, $d_2 c = \bar{b}$ y $d_j c = *$ para $j > 2$. Denotemos por $y_1 = x$, $y_2 = \bar{x}$ y $y_i = *$, notemos que $p(y_j) = d_j(c)$ para $j \neq 0$, el conjunto y_i con $1 \leq i \leq n+1$ son caras coincidentes respecto a 0 ya que $d_j y_1 = *$ y $d_j y_2 = *$ para $j > 0$ por lo que existe $z \in E_{n+1}$ tal que $p(z) = c$ y $d_j z = y_j$ para $j \neq 0$.

Observemos que $p(d_0 z) = d_0 p(z) = d_0 c = *$, se tiene que $d_0 z \in F_n$ con

$$d_0 d_0 z = d_0 d_1 z = d_0 y_1 = d_0 x$$

$$d_1 d_0 z = d_0 d_2 z = d_0 y_2 = d_0 \bar{x}$$

$$d_j d_0 z = d_0 d_{j+1} z \text{ para } 2 \leq j.$$

Así, $d_0x \simeq d_0\bar{x}$ y $[d_0x] = [d_0\bar{x}]$, por lo tanto $\partial : \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F)$ es independiente de la elección del representante de la clase homotópica. \vdash

Lema 4.2.2 El mapeo frontera es un homomorfismo.

Demostración. Consideremos b_1, b_2, b_3 elementos esféricos de B_n que satisfacen $[b_1] - [b_2] + [b_3] = 0$, es decir, $[b_2] = [b_1] + [b_3]$. Por el teorema de la adición homotópica existe $c \in B_{n+1}$ tal que $d_jc = *$ para $j < n - 1$ y $d_{n-1}c = b_1$, $d_nc = b_2$ y $d_{n+1}c = b_3$. Sean x_1, x_2, x_3 elementos esféricos de E_n tal que $d_jx_1 = d_jx_2 = d_jx_3 = *$, denotemos por $y_i = *$ para $i < n - 1$, $y_{n-1} = x_1$, $y_n = x_2$ y $y_{n+1} = x_3$, entonces $p(y_j) = d_jc$ para $j > 0$, los elementos y_i son caras coincidentes respecto al 0 por lo que existe $z \in E_{n+1}$ tal que $d_jz = y_j$ y $p(z) = c$ por lo que $p(d_0z) = d_0p(z) = d_0c = *$, así $d_0z \in F_{n-1}$.

Luego se tiene que

$$\begin{aligned} d_jd_0z &= d_0d_{j+1}z = d_0y_{n+1} = * \text{ para } j < n - 3 \\ d_{n-2}d_0z &= d_0d_{n-1}z = d_0y_{n-1} = d_0x_1 \\ d_{n-1}d_0z &= d_0d_nz = d_0y_n = d_0x_2 \\ d_n d_0z &= d_0d_{n+1}z = d_0y_{n+1} = d_0x_3 . \end{aligned}$$

Por el teorema de la adición homotópica (4.1.9) se tiene que $[d_0x_1] - [d_0x_2] + [d_0x_3]$, así $[d_0x_1] + [d_0x_3] = [d_0x_2]$. \vdash

Teorema 4.2.3 Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración y sea F la fibra, supongamos que E o B son de Kan. Entonces la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \longrightarrow & \pi_n(F) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(E) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(B) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F) & \cdots \\ & & & & & & & & & \\ & & & & \xrightarrow{\partial} & \pi_0(F) & \xrightarrow{i_*} & \pi_0(E) & \xrightarrow{p_*} & \pi_0(B) \end{array}$$

es exacta corta.

Demostración. Realicemos la prueba por partes

1. Probemos que $p_*i_* = 0$ y $ker(p_*) = Im(i_*)$. Notemos que $p \circ i = *$, así, $p_*i_* = 0$. Sea $x \in E_n$ un elemento esférico tal que $[p(x)] = 0$, entonces se tiene un elemento $c \in B_{n+1}$ tal que $d_0c = *$, $d_1c = p(x)$ y $d_jc = *$ para $j > 1$. Definamos $y_1 = x, y_j = *$, entonces $p(y_j) = d_jc$ y los elementos y_i con $1 \leq i \leq n + 1$ son caras coincidentes respecto a 0, por lo que existe $z \in E_{n+1}$ tal que $p(z) = c$ y $d_jz = y_j$ para $j > 0$ con $d_0z \in F_n$, $d_1z = y_1 = x$ y $d_jz = *$ para $j > 0$. Por el teorema de la adición homotópica se tiene que $i_*([d_0z]) - [x] = 0$ en $\pi_n(E)$, así $[x] \in Im(i_*)$.
2. Veamos que $i_*\partial = 0$ y $ker(i_*) = im(\partial)$. Sea $b \in E_n$ un elemento esférico, por definición se tiene que $\partial([b]) = [d_0x]$ para $p(x) = b$ y $d_jx = *$. Así $[d_0x] \in \pi_{n-1}(F)$ por lo que $i_*([d_0x]) = 0$.

Tomemos $x \in F_n$ tal que $i_*[x] = 0$, es decir, $[x] = 0$ en $\pi_n(E)$, luego existe $z \in E_{n+1}$ tal que $d_0z = x$ y $d_jz = *$ para $j > 0$. Definiendo $b = p(z)$ se tiene que $\partial[b] = [d_0z] = [x]$.

3. Finalmente probemos que $\partial p_* = 0$ y $\ker(\partial) = \text{im}(p_*)$. Consideremos un elemento esférico $x \in E_n$ y definamos $[b] = p_*[x]$. Por definición $\partial[b] = [d_0x] = [*] = 0$.

Ahora tomemos $b \in B_n$ un elemento esférico tal que $\partial[b] = 0$, por definición $\partial[b] = [d_0x]$ con $p(x) = b$ y $d_jx = *$ para $j > 0$ con $d_0x \in F_{n-1}$. Se tiene que existe $\bar{x} \in F_n$ tal que $d_0\bar{x} = d_0x$ y $d_j\bar{x} = *$ para $j > 0$, definiendo $y_0 = \bar{x}$, $y_1 = x$ y $y_j = *$ para $2 \leq j \leq n$, entonces y_i son caras coincidentes por lo que existe $z \in E_{n+1}$ tal que $d_jz = y_j$ para $0 \leq j$ y además $d_jd_{n+1}z = d_n d_jz = *$ para $0 \leq j \leq n$, por lo que d_j es un elemento esférico en E_n .

Si $c = p(z)$, se tiene que

$$\begin{aligned} d_0c &= d_0p(z) = p(d_0z) = p(y_0) = p(\bar{x}) = * \\ d_1c &= d_1p(z) = p(d_1z) = p(y_1) = p(x) = b \\ d_jc &= d_jp(z) = p(d_jz) = p(y_j) = p(*) = * \text{ para } 2 \leq j \leq n \\ d_{n+1}c &= p(d_{n+1}z) . \end{aligned}$$

Por el teorema de la adición homotópica

$$[b] + (-1)^{n+1}[p(d_{n+1}z)] = [b] + (-1)^{n+1}p_*[d_{n+1}] = 0 . \quad \vdash$$

Lema 4.2.4 Si X es un conjunto simplicial de Kan, entonces el producto de mapeos evaluación $e_0 \times e_1 : X^I \rightarrow X \times X$ es una fibración de conjuntos simpliciales.

Demostración. Consideremos la equivalencia débil entre conjuntos simpliciales $K \rightarrow L$ y el diagrama en Ss

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{a} & X^I \\ \downarrow & & \downarrow \\ L & \xrightarrow{b} & X \times X \end{array} .$$

Por la ley exponencial podemos identificar los mapeos a y b como $a : K \times I \rightarrow X$ y $b : L \times \{0, 1\} \rightarrow X$, ya que el diagrama conmuta podemos decir que a y b coinciden en $K \times \{0, 1\}$. Definamos W el pushout en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} K \times \{0, 1\} & \longrightarrow & L \times \{0, 1\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K \times I & \longrightarrow & W \end{array} .$$

Como el mapeo horizontal superior es una equivalencia débil y el vertical izquierdo es una cofibración en Ss , se tiene que el pushout es una equivalencia débil y una cofibración. Tomando los mapeos $j : W \rightarrow L \times I$ y $f = (a, b) : W \rightarrow X$ Así, se tiene que j es una cofibración trivial ya que es inyectivo y es una equivalencia débil por 2 de 3 y se obtiene la diagonal en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & X \\ j \downarrow & \nearrow \alpha & \\ L \times I & & \end{array} .$$

Nuevamente mediante la ley exponencial identificamos a α como el mapeo $\alpha : L \rightarrow X^I$ de nuestro diagrama original. \vdash

Lema 4.2.5 Supongamos que $f : X \rightarrow Y$ es un mapeo arbitrario entre conjuntos simpliciales de Kan. Si $i_y : Y \rightarrow Y^I$ denota el camino constante y $e_0, e_1 : Y^I \rightarrow Y$ son los mapeos evaluación. Entonces se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(id_x, i_y f)} & X \times_{y}^{e_0} Y^I \\ f \searrow & & \nearrow e_1 \pi_2 \\ & Y & \end{array} ,$$

donde $(id_x, i_y f)$ es una equivalencia homotópica y $e_1 \pi_2$ es una fibración.

Teorema 4.2.6 (de Whitehead) Cualquier cofibración trivial entre conjuntos simpliciales de Kan admite un retractor de deformación. Cualquier equivalencia débil entre conjuntos simpliciales de Kan es una equivalencia homotópica.

Demostración. Sea $j : X \rightarrow Z$ una cofibración trivial con X y Z de Kan, por el lema anterior se tiene que el mapeo $e_1 \pi_2$ es una fibración por lo que se tiene el levantamiento en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(id_x, i_z j)} & X \times_z^{e_0} Z^I \\ j \downarrow & \nearrow (r, H) & \downarrow e_1 \pi_2 \\ Z & \xrightarrow{\quad} & Z \end{array} ,$$

donde $rj = id_X$ es el retractor buscado y el mapeo $H : Z \rightarrow Z^I$ puede ser visto como la homotopía $\alpha : Z \times I \rightarrow Z$ por la ley exponencial.

Luego, sea $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia débil entre conjuntos simpliciales de Kan. Realizando la factorización en Ss

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & Z \\ f \searrow & & \nearrow p \\ & Y & \end{array}$$

con j una cofibración trivial y p una fibración (la cual también es trivial por 2 de 3) con Z de Kan, por lo que se tiene un levantamiento $s : Y \rightarrow Z$ en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & \nearrow s & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{id_Y} & Y \end{array} .$$

Notemos que s es una cofibración trivial ya que es inyectiva y equivalencia débil por 2 de 3, así se tiene el levantamiento en

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{(irs)} & Z^I \\ \downarrow s & \nearrow J & \downarrow e_0 \times e_1 \\ Z & \xrightarrow{(id, sp)} & Z \times Z \end{array} ,$$

donde el mapeo $J : Z \rightarrow Z^I$ es identificado con la homotopía $\bar{H} : Z \times I \rightarrow Z$ entre id_Z y sp .

Observemos que la homotopía inducida por $p * \bar{H} * s$ relaciona $pjrs = frs$ y $id_y = ps$ mientras que $r * J * j$ nos proporciona una homotopía entre $rspj = rsf$ y $id_X = rj$.

Por lo tanto f es una equivalencia homotópica con inversa homotópica $rs : Y \rightarrow X$. \vdash

Teorema 4.2.7 (de Milnor) Sea X un conjunto simplicial de Kan, entonces el mapeo simplicial $\eta_X : X \rightarrow S|X|$ es una equivalencia homotópica.

Demostración. La demostración del teorema 4.2.7 puede ser consultada en [11] capítulo 4.

Lema 4.2.8 Si $j : D \rightarrow C$ es un mapeo arbitrario en Top_C con la propiedad del levantamiento izquierdo respecto a las fibraciones de Serre, entonces D es un retracto de deformación de C .

Demostración. Es una consecuencia del argumento del retracto.

Proposición 4.2.9: Si $i : A \rightarrow B$ es un mapeo anodino entonces $|i| : |A| \rightarrow |B|$ y $|A|$ es un retracto de deformación.

Demostración. Sea $p : X \rightarrow Y$ una fibración en Ss y consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\eta_X} & s|X| \\ \downarrow & \nearrow h & \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{\eta_Y} & s|Y| \end{array} ,$$

del cual podemos inducir el levantamiento en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & s|X| \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ B & \longrightarrow & s|Y| \end{array} .$$

Aplicando el funtor $|\cdot|$ al diagrama anterior se tiene el levantamiento $|B| \rightarrow |X|$ y por el lema anterior se tiene que $|A|$ es un retracto de deformación de $|B|$. \dashv

Proposición 4.2.10 Sea X un conjunto simplicial, entonces $\eta_X : X \rightarrow s|X|$ es una equivalencia débil.

Demostración. Sea $\alpha : X \rightarrow Y$ una inclusión anodina con Y de Kan. Tomemos en cuenta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & s|X| \\ \downarrow \alpha & & \downarrow s|\alpha| \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & s|Y| \end{array} .$$

Por la proposición anterior y por el teorema de Milnor se tiene que los mapeos $s|\alpha|$ y η_Y son equivalencias homotópicas y además α también es una equivalencia débil, por lo que el mapeo η_X es también una equivalencia débil. \dashv

Diremos que un mapeo $f : X \rightarrow Y$ en Ss es una equivalencia homotópica geométrica si al aplicarle el funtor realización $|f| : |X| \rightarrow |Y|$ es una equivalencia homotópica.

Proposición 4.2.11 Un mapeo $f : X \rightarrow Y$ en Ss es una equivalencia débil si y sólo si es una equivalencia homotópica geométrica.

Demostración. Primero supongamos que $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia débil, considerando la factorización de f como

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Z \\ & \searrow f & \swarrow p \\ & & Y \end{array}$$

con i una cofibración y p una fibración trivial. Notemos que por *dos de tres* i es también una equivalencia débil y además como i es una cofibración y equivalencia débil se tiene que i es anodina y por lo tanto $|i|$ es una equivalencia homotópica. Análogamente dado que p es una fibración trivial entonces p y $|p|$ son equivalencias homotópicas. Por 2 de 3 se concluye que $|f|$ también es una equivalencia homotópica.

Luego, asumamos que f es una equivalencia homotópica geométrica, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & s|X| \\ f \downarrow & & \downarrow s|f| \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & s|Y| \end{array} ,$$

donde η_X y η_Y son equivalencias débiles y $|f|$ es una equivalencia homotópica entonces f es una equivalencia débil. \vdash

Considerando la versión topológica del Teorema de Whithead:

Sea $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia débil entre dos complejos CW, entonces f es una equivalencia homotópica.

Conclusión 1:

Si tomamos una equivalencia débil $w : X \rightarrow Y$ con X y Y espacios topológicos y consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} |sX| & \xrightarrow{|sw|} & |sY| \\ \epsilon_X \downarrow & & \downarrow \epsilon_Y \\ X & \xrightarrow{w} & Y \end{array} .$$

Por dos de tres se tiene que $|sw| : |sX| \rightarrow |sY|$ es una equivalencia débil entre complejos CW y por la versión topológica del teorema de Whithead, se tiene que $|sw|$ es una equivalencia homotópica.

Luego, si tomamos ahora una equivalencia débil $w : X \rightarrow Y$ entre dos conjuntos simpliciales, si consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{w} & Y \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\ s|X| & \xrightarrow{s|w|} & s|Y| \end{array}$$

Por dos de tres se tiene que el mapeo $s|w| : s|X| \rightarrow s|Y|$ es una equivalencia débil y por la versión simplicial de teorema de Whithead se tiene que también es una equivalencia homotópica.

Por lo que podemos concluir que las composiciones $s|-|$ y $|s|$ preserva equivalencias homotópicas.

Conclusión 2:

Se demuestra que $\Pi(X) = \Pi(|X|)$, particularmente $\pi_n(X, x) = \pi_n(|X|, |x|)$. Así si f es una equivalencia débil geométrica, se tiene que $|f|$ es una equivalencia débil por lo que $\pi_n(|f|) : \pi_n(|X|, |x|) \rightarrow \pi_n(|Y|, |y|)$ es una biyección, por lo que $\pi_n(f) : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, y)$ también lo es.

Conclusión 3:

Considerando la versión topológica del teorema de Seifer- Van Kampen, el cual nos dice

Teorema: Sea H un grupo y ρ_1, ρ_2 y ρ_3 homomorfismos tal que hagan conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U \cap V) & \longrightarrow & \Pi(U) \\ \rho_2 \downarrow & & \downarrow \rho_1 \\ \Pi(V) & \longrightarrow & H \end{array}$$

entonces existe un mapeo $\sigma : \Pi(X) \rightarrow H$ tal que conmuten el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U \cap V) & \longrightarrow & \Pi(U) \\ \psi_2 \downarrow & & \downarrow \psi_1 \\ \Pi(V) & \longrightarrow & \Pi(X) \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \rho_1 \\ \searrow \sigma \\ \nearrow \rho_2 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ H \end{array}$$

Podemos considerar la versión simplicial como una generalización de la versión topológica, ya que al comparar los diagramas de ambas categorías

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) & \xrightarrow{i_1^*} & \pi_1(X, x_1) \\ i_2^* \downarrow & & \downarrow j_1^* \\ \pi_1(X_2, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \\ \Pi_1(W, w) & \longrightarrow & \Pi_1(V, v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi_1(U, u) & \longrightarrow & \Pi_1(X, x) \end{array}$$

Se nota una identificación de los elementos del diagrama en Ss con los elemento en la categoría Top ya que al comparar los grupoides fundamentales de las realizaciones geométricas de los conjuntos simpliciales, encontramos la misma situación del teorema de Seifer- Van kampen.

Conclusión 4: Como $\Lambda_k^n \rightarrow \Delta^n$ es un mapeo anodino, se tiene que su realización $|\Lambda_k^n| \rightarrow |\Delta^n|$ es un retracts de deformación. Así al aplicar el funtor singular en el diagrama en Top

$$\begin{array}{ccc} |\Lambda_k^n| & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow h & \\ |\Delta^n| & & \end{array}$$

Se obtiene

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & sX \\ \downarrow & \nearrow sh & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

Por lo tanto se tiene el complejo singular de cualquier espacio topológico X es un conjunto simplicial de Kan.

Apéndice

A.1. Teoría de Categorías

Definición A.1.1 Una *categoría* es un quintuple $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, \text{dom}, \text{cod}, \circ)$ donde :

- 1) \mathcal{O} es una clase cuyos miembros son llamados \mathcal{C} -objetos, denotada usualmente por $\text{Obj}(\mathcal{C})$ o \mathcal{C}_0 .
- 2) \mathcal{M} es una clase cuyos miembros son llamados \mathcal{C} -morfismos, denotada usualmente por $\text{Morf}(\mathcal{C})$ o \mathcal{C}_1 .
- 3) dom y cod son dos funciones de \mathcal{M} a \mathcal{O} . Si $f \in \mathcal{M}$, $\text{dom}(f)$ se llama *dominio de f* y $\text{cod}(f)$ se llama *codominio de f* .
- 4) \circ es una función de $D = \{(f, g) : f, g \in \mathcal{M} \text{ y } \text{dom}(f) = \text{cod}(g)\}$ en \mathcal{M} llamada *ley de composición de \mathcal{M}* tal que $\circ(f, g)$ se denota por $f \circ g$ y se dice que $f \circ g$ *está definida* si y sólo si $(f, g) \in D$. Además \circ satisface las siguientes propiedades:

- a) *Condición de igualdad.* Si $f \circ g$ está definida, entonces $\text{dom}(f \circ g) = \text{dom}(g)$ y $\text{cod}(f \circ g) = \text{cod}(f)$.
- b) *Condición de asociatividad.* Si $f \circ g$ y $h \circ f$ están definidas, entonces $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$.
- c) *Condición de existencia de identidades.* Para cada \mathcal{C} -objeto A hay un \mathcal{C} -morfismo e tal que $\text{dom}(e) = A = \text{cod}(e)$ y
 - i) $f \circ e = f$ si $f \circ e$ está definida;
 - ii) $e \circ g = g$ si $e \circ g$ está definida.
- d) *Condición de pequeñez de clases de morfismos.* Para cada par de \mathcal{C} -objetos (A, B) , la clase

$$\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \{f : f \in \mathcal{M}, \text{dom}(f) = A \text{ y } \text{cod}(f) = B\}$$

es un conjunto

Para cada categoría \mathcal{C} se le asocia su categoría opuesta \mathcal{C}^{op} llamada *la categoría opuesta de \mathcal{C}* . Los objetos de \mathcal{C}^{op} son los objetos de \mathcal{C} , los morfismos en \mathcal{C}^{op} son morfismos $f^{op} : b \rightarrow a$ siempre que $f : a \rightarrow b$ sea un morfismo en \mathcal{C} y la composición se define como $f^{op}g^{op} = (gf)^{op}$ siempre que gf esté definida en \mathcal{C} .

Definición A.1.2 Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías. Un *functor covariante de \mathcal{C} a \mathcal{D}* es una terna $(\mathcal{C}, F, \mathcal{D})$ en la cual F es una función de la clase de morfismos de \mathcal{C} a la clase de morfismos de \mathcal{D} ($F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$) satisfaciendo las siguientes condiciones;

- i) F *preserva identidades*, es decir, si e es una \mathcal{C} -identidad, entonces $F(e)$ es una \mathcal{D} -identidad.
- ii) F *preserva composición*, $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, es decir si $\text{dom}(f) = \text{cod}(g)$, entonces $\text{dom}(F(f)) = \text{cod}(F(g))$.

Definición A.1.3 Un *functor contravariante* es una terna $(\mathcal{C}, F, \mathcal{D})$ tal que $(\mathcal{C}^{op}, F, \mathcal{D})$ es un functor covariante (donde la categoría \mathcal{C}^{op} es la categoría opuesta de \mathcal{C}).

Definición A.1.4 Dado un functor $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, entre las categorías \mathcal{A} y \mathcal{B} , diremos que T es *pleno* si dado dos objetos c y \bar{c} de \mathcal{A} y un morfismo $\bar{f} : T(c) \rightarrow T(\bar{c})$ en \mathcal{B} , entonces existe $f : c \rightarrow \bar{c}$ en \mathcal{A} tal que $T(f) = \bar{f}$.

Definición A.1.5 Dado un functor $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, entre las categorías \mathcal{A} y \mathcal{B} diremos que S es *fiel* si para cada par de objetos c y \bar{c} en \mathcal{A} y cada par de morfismos $f_1, f_2 : c \rightarrow \bar{c}$ tal que $S(f_1) = S(f_2)$, entonces se tiene que $f_1 = f_2$.

Definición A.1.6 Dados dos funtores $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ una *transformación natural* $\alpha : F \rightarrow G$ es una colección de flechas $(\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X))_{X \in \mathcal{C}}$ de \mathcal{D} tal que para cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \alpha_X \downarrow & & \downarrow \alpha_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array} .$$

Definamos la categoría $Set^{\mathcal{C}^{op}}$, donde Set es la categoría de conjuntos, por

- $Obj(Set^{\mathcal{C}^{op}}) = \{F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow Set \text{ donde } F \text{ es functor}\}$.
- $Morf(Set^{\mathcal{C}^{op}}) = \{\alpha : F \rightarrow G : \alpha \text{ es transformación natural y } F, G \in Obj(Set^{\mathcal{C}^{op}})\}$.

Lema A.1.7 (Lema de Yoneda) Para cada objeto $F \in Obj(Set^{\mathcal{C}^{op}})$ y $X \in Obj(\mathcal{C})$ se tiene la biyección

$$y : Set^{\mathcal{C}^{op}}(\mathcal{C}(-, X), F) \simeq F(X)$$

enviando una transformación natural $\alpha \in Set^{\mathcal{C}^{op}}(\mathcal{C}(-, X), F)$ al elemento $\alpha(1_X)$ de $F(X)$.

Demostración Sean $\alpha : hom_{\mathcal{C}}(-, X) \rightarrow F$ una transformación natural y $f : Y \rightarrow X$ un morfismo en \mathcal{C} , con $X \in Obj(\mathcal{C})$, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} hom_{\mathcal{C}}(Y, X) & \xrightarrow{hom_{\mathcal{C}}(f, X)} & hom_{\mathcal{C}}(X, X) \\ \alpha_Y \downarrow & & \downarrow \alpha_X \\ F(Y) & \xrightarrow{F(f)} & F(X) \end{array} .$$

Notemos que α_X determina de forma única al elemento $a = \alpha_X(1_X)$, así definimos el isomorfismo y enviando a cada transformación natural α al elemento

$\alpha_X(1_X) \in F(X)$ mientras que y^{-1} envía a $a \in F(X)$ a la única transformación natural α que satisface $\alpha_X(1_X) = a$.

Corolario A.1.8 EL funtor $C : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$, definido por $C(X) = \text{hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$ es pleno, fiel e inyectivo en objetos.

Demostración Es consecuencia inmediata del lema Yoneda.

Definición A.1.9 Una categoría \mathcal{D} se dice que es una *subcategoría de \mathcal{C}* si las siguientes condiciones se satisfacen

- $\text{Obj}(\mathcal{D}) \subset \text{Obj}(\mathcal{C})$.
- $\text{Morf}(\mathcal{D}) \subset \text{Morf}(\mathcal{C})$.
- Las funciones dominio, codominio y composición de morfismos de \mathcal{D} son las restricciones de las funciones dominio, codominio y composición de morfismos \mathcal{C} .
- Cada \mathcal{D} -identidad es una \mathcal{C} -identidad.

Definición A.1.10 Una relación de equivalencia \sim en la clase de morfismos de una categoría \mathcal{C} es llamada *una congruencia en \mathcal{C}* a condición de que

- Cada clase de equivalencia bajo \sim , está contenida en $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para algún par de objetos $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$
- Siempre que $f \sim f'$ y $g \sim g'$ se tiene que $g \circ f \sim g' \circ f'$ (cuando la composición está definida).

Definición A.1.11 Un morfismo $f : A \rightarrow B$ en una categoría \mathcal{C} se dice que tiene *una sección* (o *corretracción*) en \mathcal{C} si existe un mapeo $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f \simeq \text{id}_A$.

Noción dual: *Cosección* (o *retracción*).

Definición A.1.12 Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo en \mathcal{C}

- Diremos que f es un *monomorfismo* en \mathcal{C} si para cualesquiera h, k morfismos tales que $f \circ h = f \circ k$ se sigue que $h = k$.
- Diremos que f es un *epimorfismo* en \mathcal{C} si para cualesquiera morfismos h, k tales que $h \circ f = k \circ f$ se sigue que $h = k$.

Definición A.1.13 Sean $f, g : A \rightarrow B$ un par de morfismos en \mathcal{C} . Un par (E, e) es llamado *el igualador de f y g en \mathcal{C}* siempre que se satisfaga:

- $e : E \rightarrow A$ es un morfismo en \mathcal{C} .
- $f \circ e = g \circ e$.

- Para cualquier morfismos $h : \bar{E} \rightarrow A$ tal que $f \circ h = g \circ h$, entonces existe un único morfismo $\bar{e} : \bar{E} \rightarrow E$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{E} & & \\
 \bar{e} \downarrow & \searrow h & \\
 E & \xrightarrow{e} & A
 \end{array}
 .$$

Noción dual *Coigualador.*

En el caso particular cuando g sea un morfismo nulo, el igualador entre f y g es llamado *núcleo o kernel de f y g en \mathcal{C}* .

Definición A.1.14 Dado un par de objetos (A, B) de una categoría \mathcal{C} , el *producto de (A, B) en \mathcal{C}* se define como la terna (P, Π_A, Π_B) donde $P \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y $\Pi_A : P \rightarrow A$, $\Pi_B : P \rightarrow B$ son morfismos, usualmente llamados *proyecciones*, en \mathcal{C} . Además se satisface la propiedad de que si C es cualquier otro objeto y $f : C \rightarrow A$, $g : C \rightarrow B$ son morfismos arbitrarios, entonces existe un único morfismo $\langle f, g \rangle : C \rightarrow P$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 f \nearrow & & \nwarrow \Pi_A \\
 C & \xrightarrow{\langle f, g \rangle} & P \\
 g \searrow & & \swarrow \Pi_B \\
 & B &
 \end{array}
 .$$

Noción dual *Coproducto.*

Definición A.1.15 Dada una familia $(A_i)_{i \in I}$ de objetos en \mathcal{C} , definimos su *producto en \mathcal{C}* como el par $(\prod(A_i)_{i \in I}, (\prod i)_{i \in I})$ la cual satisface

- 1) $\prod(A_i)_{i \in I}$ es un objeto en \mathcal{C} .
- 2) Para cada $j \in I$, $\prod j : \prod(A_i)_{i \in I} \rightarrow A_j$ es un morfismo en \mathcal{C} .
- 3) Por cada par $(C, (f_i)_{i \in I})$, con C objeto de \mathcal{C} y para cada $j \in I$, $f_j : C \rightarrow A_j$, se tiene un único morfismo $\langle f_j \rangle$ tal que para toda $j \in I$ conmuta el triángulo

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\langle f_j \rangle} & \prod(A_j)_{j \in I} \\
 & \searrow f_j & \downarrow \prod j \\
 & & A_j
 \end{array}$$

Proposición A.1.16 Si $(\prod A_i, \Pi_i)$ es un producto de $(A_i)_{i \in I}$ y sean $h, k : C \rightarrow \prod A_i$ monomorfismos con la propiedad de que para cada $i \in I$, $\Pi_i \circ h = \Pi_i \circ k$, entonces $h = k$.

Demostración Definamos $f_i = \Pi_i \circ h = \Pi_i \circ k$, por la condición de unicidad en la definición del producto, se tiene $h = \langle f_i \rangle = k$.

Proposición A.1.17 Sean $(\prod A_i, \Pi_i)$ y $(\prod \bar{A}_i, \bar{\Pi}_i)$ productos de $(A_i)_{i \in I}$, entonces existe un único isomorfismo $s : \prod A_i \rightarrow \prod \bar{A}_i$ tal que para toda $j \in I$, conmuta el triángulo

$$\begin{array}{ccc} \prod A_i & \xrightarrow{s} & \prod \bar{A}_i \\ & \searrow \Pi_j & \swarrow \bar{\Pi}_j \\ & A_j & \end{array} .$$

Por definición de producto existen morfismos únicos s y t tales que, para cada $j \in I$, conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \prod A_i & \xrightarrow{s} & \prod \bar{A}_i & \xrightarrow{t} & \prod A_i \\ & \searrow \Pi_j & \downarrow \bar{\Pi}_j & \swarrow \Pi_j & \\ & & A_j & & \end{array} .$$

Notemos que $\Pi_j \circ t \circ s = \Pi_j \circ id_{\prod A_i}$, por la proposición anterior se tiene que $t \circ s = id_{\prod A_i}$. Análogamente se cumple que $t \circ s = id_{\prod \bar{A}_i}$. Por lo tanto s es un isomorfismo.

Definición A.1.18 Dado un functor $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$, con \mathcal{I} y \mathcal{C} categorías, entonces una *fuerza natural* es un par $(L, (l_i)_{i \in Obj(I)})$ en \mathcal{C} tal que para cada $i \in Obj(I)$, $l_i : L \rightarrow D(i)$ y para todo monomorfismo $m : i \rightarrow j$ en \mathcal{I} , conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & D(i) & \\ & \nearrow l_i & \downarrow D(m) \\ L & & \\ & \searrow l_j & \\ & D(j) & \end{array} .$$

Noción dual *Cofuerza natural o despenadero natural.*

Definición A.1.19 Sean $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor entonces una fuerza natural $(L, (l_i)_{i \in Obj(I)})$ es llamada *límite de D* si dada otra fuerza natural $(\bar{L}, (\bar{l}_i)_{i \in Obj(I)})$, entonces se tiene un único monomorfismo $h : \bar{L} \rightarrow L$ tal que para cada $j \in Obj(I)$, conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bar{L} & & \\ \downarrow h & \searrow \bar{l}_j & \\ L & \xrightarrow{l_j} & D(j) \end{array} .$$

Noción dual Colímite.

Definición A.1.20 Un cuadrado en \mathcal{C} , digamos

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_1} & D_1 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ D_2 & \xrightarrow{f_2} & D_0 \end{array} ,$$

es llamado *cuadrado pullback* si dada la terna (P, p_1, p_2) como límite del functor $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$, donde la categoría \mathcal{I} se definió por

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \searrow m & \\ & & 0 \\ & \nearrow n & \\ 2 & & \end{array} ,$$

con $D(m) = f_1, D(n) = f_2$ y $f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$. En otras palabras, dado otra terna $(\bar{P}, \bar{f}_1, \bar{f}_2)$ tal que haga conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bar{P} & \xrightarrow{\bar{p}_1} & D_1 \\ \bar{p}_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ D_2 & \xrightarrow{f_2} & D_0 \end{array} ,$$

entonces existe un único morfismo $h : \bar{P} \rightarrow P$ tal que el triángulo en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \bar{P} & & & & \\ & \searrow \bar{p}_1 & & & \\ & & P & \xrightarrow{p_1} & D_1 \\ & \searrow h & \downarrow p_2 & & \downarrow f_1 \\ & & D_2 & \xrightarrow{f_2} & D_0 \end{array} .$$

conmuta.

Noción dual Cuadrado pushout.

Definición A.1.21 Sean $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funtores. Diremos que F es *adjunto izquierdo de G* , o bien G es *adjunto derecho de F* ($F \vdash G$) si se satisface una de las siguientes condiciones equivalentes:

- Se tienen transformaciones naturales $\epsilon : FG \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ y $\eta : 1_{\mathcal{D}} \rightarrow GF$ tal que

conmutan los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\eta^G} & GFG \\
 & \searrow 1_G & \downarrow G_\epsilon \\
 & & G
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{F_\eta} & FGF \\
 1_F \downarrow & & \swarrow \epsilon^F \\
 & & F
 \end{array}$$

- Para X, \bar{X} en \mathcal{C} y Y y \bar{Y} en \mathcal{D} existe un isomorfismo natural $\psi : \mathcal{D}(F(X), Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, G(Y))$ tal que:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{D}(F(X), Y) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{C}(X, G(Y)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{D}(F(\bar{X}), \bar{Y}) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{C}(\bar{X}, G(\bar{Y}))
 \end{array}$$

Definición A.1.22 Una categoría \mathcal{D} es *completa* si el funtor $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ tiene adjunto derecho.

Noción dual *Categoría cocompleta*

A.2 Categoría de Modelos

Definición A.2.1 Dado el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & X \\
 i \downarrow & & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}
 ,$$

un *levantamiento* es un mapeo $h : B \rightarrow X$ tal que conmuta el diagrama resultante

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & X \\
 i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}
 ,$$

es decir, tal que $hi = f$ y $ph = g$.

Definición A.2.2 Una *categoría de modelos* es una categoría \mathcal{K} con tres clases de morfismos.

- i) *Equivalencias débiles* \mathcal{W} .
- ii) *Fibraciones* \mathcal{F} .
- iii) *Cofibraciones* \mathcal{C} .

Las cuales son cerradas bajo la composición y contienen todos los mapeos identidad. Si f es una equivalencia débil y una fibración (cofibración), f es llamada *fibración (cofibración acíclica)*. La categoría de modelos \mathcal{K} satisface

M1 Los límites y colímites finitos existen en \mathcal{K} .

M2 Si f y g son mapeos en \mathcal{K} talque fg está definida, si dos de los tres mapeos son equivalencias débiles, entonces el tercero también lo es.

M3 Si f es retracto de g y g es una equivalencia débil, fibración o cofibración, entonces f también lo es.

M4 Dado un diagrama como $*$, entonces el levantamiento existe siempre que

- i es una cofibración y p una fibración acíclica o bien
- i es una cofibración acíclica y p una fibración.

M5 Cualquier mapeo f en \mathcal{K} puede ser factorizado como $f = pi$ en cualquiera de los dos casos

- 1) p una fibración e i cofibración acíclica.
- 2) p una fibración acíclica e i cofibración.

Ejemplo 1. Sea \mathcal{K} una categoría con límites y colímites finitos. Definamos $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \text{Morf}(\mathcal{K})$ y $\mathcal{W} = \{f : X \rightarrow Y \text{ tal que } f \text{ es un isomorfismo en } \mathcal{K}\}$. Claramente $(\mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathcal{W})$ es una categoría de modelos sobre \mathcal{K} .

Proposición A.2.3 Sea \mathcal{K} una categoría de modelos, entonces \mathcal{K}^{op} es una categoría de modelos definiendo

- $\bar{\mathcal{F}} = \{f^{op} : Y \rightarrow X \text{ tal que } f \in \mathcal{F}\}$.
- $\bar{\mathcal{C}} = \{f^{op} : Y \rightarrow X \text{ tal que } f \in \mathcal{C}\}$.
- $\bar{\mathcal{W}} = \{f^{op} : Y \rightarrow X \text{ tal que } f \in \mathcal{W}\}$.

Demostración. Notemos que *M1* se cumple dado que un límite (colímite) en \mathcal{K}^{op} es un colímite (límite) en \mathcal{K} . Para *M2* tomemos f^{op}, g^{op} en \mathcal{K}^{op} y suponemos que $f^{op}g^{op}$ está definida y que f^{op} y $f^{op}g^{op}$ pertenecen a $\bar{\mathcal{W}}$, entonces $f, gf \in \mathcal{W}$ lo que implica que $g \in \bar{\mathcal{W}}$. Por lo tanto $g^{op} \in \bar{\mathcal{W}}$. Para *M3* y *M4* bastará que los diagramas en \mathcal{K}^{op} sean invertidos para obtener la cerradura (o levantamiento) en \mathcal{K} y regresarlo a \mathcal{K}^{op} . Finalmente, considere un mapeo arbitrario $f^{op} : Y \rightarrow X$ en \mathcal{K}^{op} , entonces $f : X \rightarrow Y$ tiene una factorización

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & E \\ & \searrow f & \swarrow p \\ & & Y \end{array} .$$

Invirtiendo nuevamente el diagrama se tiene la factorización en el diagrama original en \mathcal{K}^{op} . \vdash

Proposición A.2.4 Sean \mathcal{K} una categoría de modelos y $f : X \rightarrow Y$ morfismo en \mathcal{K} con la propiedad del levantamiento izquierdo respecto a todas las fibraciones acíclicas (fibraciones), entonces f es una cofibración (cofibración trivial).

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo con la propiedad del levantamiento izquierdo respecto a todas las fibraciones. Considérese la factorización

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & E \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & Y & \end{array},$$

con i cofibración y p fibración acíclica. Como f tiene la propiedad del levantamiento izquierdo respecto a p , se tiene el levantamiento en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & E \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{id_Y} & Y \end{array}.$$

Por lo que f es retracto de i y por $M3$ se tiene que f es una cofibración. \dashv

Dualmente

Proposición A.2.5 Sean \mathcal{K} una categoría de modelos y $f : X \rightarrow Y$ morfismo en \mathcal{K} con la propiedad del levantamiento derecho respecto a todas las cofibraciones acíclicas (cofibraciones), entonces f es una cofibración (fibración trivial).

Bibliografia

- 1) P.G. Goerss and J.F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*, Progress in Math., Vol. 174, Birkhäuser, Berlin-Basel-Boston, 1999.
- 2) Edward B. Curtis. *Simplicial Homotopy Theory* Matematisk Institut, Aarhus, Denmark; Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139
- 3) Horst Herrlich, George E. Strecker (1990). *Abstract and Concrete Categories*
- 4) Dylen G. L. Allegretti. *Simplicial sets and Van Kampen's theorem*
- 5) Greg Friedman. *An elementary illustrated introduction to simplicial sets*. Texas Christian University. December 2011.
- 6) Jacobien Carstens. *Homotopy Theory of Topological Space and Simplicial Sets*. May 2007. Faculty of Natural Sciences. Mathematics and Informatics. University of Amsterdam.
- 7) Stephen A. Mitchell. *Notes on Serre fibrations*.
- 8) J. Wu. *Simplicial Objects and Homotopy Groups*. Department of Mathematics. National University of Singapore, Singapore.
- 9) W. D. Gillam. *Simplicial Methods in algebra and algebraic geometry*.
- 10) P. Gabriel and M. Zisman, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete vol. 35*, Springer, Berlin (1967).
- 11) André Joyal, Myles Tierney. *Notes on simplicial homotopy theory*.
- 12) J. P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Math. Studies No. 11, Van Nostrand, Princeton (1967).
- 13) M. Hovey, *Model Categories*, *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 63, American Mathematical Society, 1999.