



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Sensibilidad del entrelazamiento a perturbaciones de sistemas  
cuánticos de muchos cuerpos

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Física**

por

Francisco Correa Alvarado

Asesorado por

Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar

Puebla Pue.  
2024





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Sensibilidad del entrelazamiento a perturbaciones de sistemas  
cuánticos de muchos cuerpos

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Física**

por

Francisco Correa Alvarado

Asesorado por

Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar

Puebla Pue.  
2024



**Título:** Sensibilidad del entrelazamiento a perturbaciones de sistemas cuánticos de muchos cuerpos

**Estudiante:** FRANCISCO CORREA ALVARADO

COMITÉ

---

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero  
Presidente

---

Dr. Juan Mauricio Torres Gonzalez  
Secretario

---

Dr. Jorge Velázquez Castro  
Vocal

---

Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera  
Asesor

---

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar  
Asesor



# Agradecimientos

A mi familia, por el apoyo que día a día me han dado, a mi madre, que siempre ha creído en mis sueños, a mis amigos, que han estado ahí siempre que los necesito, al cru, que durante estos años me sacaron tantas sonrisas y me dieron tantos buenos momentos, a mis profesores, que con su gran pasión por la enseñanza me proporcionaron motivación para estudiar esta bella ciencia, a mis asesores, que gracias a sus enseñanzas, apoyo e infinita paciencia hicieron posible este trabajo y a la FCFM, por proporcionar el espacio que hizo todo esto posible.





# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>XI</b>
<b>Introducción</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Modelo a estudiar</b>	<b>1</b>
1.1. Modelo de Ising con campo transversal . . . . .	2
1.2. Simetrías . . . . .	3
<b>2. Enfoque de Caos Cuántico y Teoría de Matrices Aleatorias</b>	<b>5</b>
2.1. Estadística de niveles. . . . .	5
2.2. Estructura de estados propios. . . . .	11
<b>3. Enfoque en Teoría de la Información Cuántica</b>	<b>15</b>
3.1. Entropía de Entrelazamiento . . . . .	16
3.1.1. Entropía de entrelazamiento de los estados de Bell . . . . .	17
3.2. Entropía de entrelazamiento para los estados propios de un Hamiltoniano . . . . .	18
3.2.1. Sistema de dos espines . . . . .	18
3.3. Entropía de entrelazamiento para los estados propios del modelo de Ising con campo transversal y defecto . . . . .	20
<b>A. Demostración de la ecuación (3.9)</b>	<b>25</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>27</b>



# Índice de figuras

2.1.	$P(r)$ contra $r$ para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para $L = 12$ y valores $J = 1.0$ , $h_x = 0.5$ , $\varepsilon = 0.2$ y $\mu = 0.0$ . La línea morada denota la predicción para GOE[Ec. (2.8)]. La línea roja corresponde a la predicción para Poisson.[Ec. (2.9)] .	6
2.2.	$P(r)$ contra $r$ para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para $L = 12$ y valores $J = 1.0$ , $h_x = 0.5$ , $\varepsilon = 0.2$ y $\mu = 0.06$ . La línea morada denota la predicción para GOE[Ec. (2.8)]. La línea roja corresponde a la predicción para Poisson.[Ec. (2.9)] .	7
2.3.	$P(r)$ contra $r$ para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para $L = 12$ y valores $J = 1.0$ , $h_x = 0.5$ , $\varepsilon = 0.2$ y $\mu = 0.12$ . La línea morada denota la predicción para GOE[Ec. (2.8)]. La línea roja corresponde a la predicción para Poisson.[Ec. (2.9)] .	7
2.4.	$P(r)$ contra $r$ para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para $L = 12$ y valores $J = 1.0$ , $h_x = 0.5$ , $\varepsilon = 0.2$ y $\mu = 0.2$ . La línea morada denota la predicción para GOE[Ec. (2.8)]. La línea roja corresponde a la predicción para Poisson.[Ec. (2.9)] .	8
2.5.	$\langle \tilde{r} \rangle$ contra $\mu$ para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para $L = 10$ línea amarilla, $L = 11$ línea azul y $L = 12$ línea roja. Los valores de los parámetros son $J = 1.0$ , $h_x = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$ . Las líneas negras denotan las estimaciones teóricas para sistemas integrables (línea inferior) y caóticos (línea superior). (a) El intervalo de $\mu$ es $[0, 1.5]$ , (b) Un acercamiento del panel (a) para observar mejor la transición, el intervalo de $\mu$ es $[0, 0.2]$ . . . . .	9
2.6.	$\langle \tilde{r} \rangle$ contra $\mu$ para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para $L = 10$ línea amarilla, $L = 11$ línea azul y $L = 12$ línea roja. Los valores de los parámetros son $J = 1.0$ , $h_x = 0.5$ y $\varepsilon = 0.2$ , las líneas negras denotan las estimaciones teóricas para sistemas integrables (línea inferior) y caóticos (línea superior). El intervalo de $\mu$ es $[0, 1.5]$ . . . . .	10
2.7.	$ C_n^\alpha ^2$ contra $n$ para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para $L = 12$ con valores $\varepsilon = 0.2$ $\mu = 0.12$ , (a) Aquellos que son correspondientes con el estado de menor energía $E_1$ , (b) con el estado con la energía en la posición a un cuarto de la dimensión $E_{N/4}$ , (c) para el que está justo a la mitad $E_{N/2}$ . . . . .	11
2.8.	$PR_\alpha/PR_{GOE}$ contra $E_\alpha$ para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11). Los valores de los parámetros son $L = 12$ , $J = 1.0$ , $h_x = 0.5$ , $\varepsilon = 0.2$ y $\mu = 0.0$ . La línea morada denota el punto medio de los eigenvalores de energía $\{E_\alpha\}$ que se encuentra en $E_{N/2} = 0$ , las líneas rojas son un intervalo del 10 % de los eigenvalores a la izquierda y derecha de este centro. . . . .	12
2.9.	$PR_\alpha/PR_{GOE}$ contra $E_\alpha$ para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11). Los valores de los parámetros son $L = 12$ , $J = 1.0$ , $h_x = 0.5$ , $\varepsilon = 0.2$ y $\mu = 0.06$ . La línea morada denota el punto medio de los eigenvalores de energía $\{E_\alpha\}$ que se encuentra en $E_{N/2} = 0$ , las líneas rojas son un intervalo del 10 % de los eigenvalores a la izquierda y derecha de este centro. . . . .	12
2.10.	$PR_\alpha/PR_{GOE}$ contra $E_\alpha$ para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11). Los valores de los parámetros son $L = 12$ , $J = 1.0$ , $h_x = 0.5$ , $\varepsilon = 0.2$ y $\mu = 0.12$ . La línea morada denota el punto medio de los eigenvalores de energía $\{E_\alpha\}$ que se encuentra en $E_{N/2} = 0$ , las líneas rojas son un intervalo del 10 % de los eigenvalores a la izquierda y derecha de este centro. . . . .	13

2.11.  $\langle PR \rangle / PR_{GOE}$  contra  $\mu$  para el modelo dado por el hamiltoniano (1.11) para  $L = 10$  línea amarilla,  $L = 11$  línea azul y  $L = 12$  línea roja. Los valores de los parámetros son  $J = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$  y  $\varepsilon = 0.2$ . . . . . 13

3.1.  $S_{vN}^\alpha$  contra  $E_\alpha$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para  $L = 12$  y valores  $J_z = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.2$  y  $\mu = 0.0$ . La línea morada denota el punto medio de los eigenvalores de energía  $\{E_\alpha\}$  que se encuentra en  $E_{N/2} = 0$ . Las líneas rojas son un intervalo del 10% de los eigenvalores a la izquierda y derecha de este centro. . . . 20

3.2.  $S_{vN}^\alpha$  contra  $E_\alpha$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para  $L = 12$  y valores  $J_z = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.2$  y  $\mu = 0.06$ . La línea morada denota el punto medio de los eigenvalores de energía  $\{E_\alpha\}$  que se encuentra en  $E_{N/2} = 0$ . Las líneas rojas son un intervalo del 10% de los eigenvalores a la izquierda y derecha de este centro. . . 21

3.3.  $S_{vN}^\alpha$  contra  $E_\alpha$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para  $L = 12$  y valores  $J_z = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.2$  y  $\mu = 0.12$ . La línea morada denota el punto medio de los eigenvalores de energía  $\{E_\alpha\}$  que se encuentra en  $E_{N/2} = 0$ . Las líneas rojas son un intervalo del 10% de los eigenvalores a la izquierda y derecha de este centro. . . 21

3.4.  $\langle S_{vN} \rangle / S_{max}$  contra  $\mu$  para el modelo dado por el hamiltoniano (1.11) para  $L = 8$  línea violeta,  $L = 10$  línea amarilla y  $L = 12$  línea roja. Los valores de los parámetros son  $J = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$  y  $\varepsilon = 0.2$ . . . . . 22

# Resumen

Empleando conceptos y herramientas del caos cuántico, teoría de matrices aleatorias y teoría de la información cuántica, se estudian los efectos de una perturbación local sobre las propiedades de un sistema unidimensional cuántico de muchos cuerpos. En particular, se analiza cómo la estadística de niveles energéticos, estructura de estados propios de energía y el entrelazamiento cuántico en el modelo de Ising en una cadena unidimensional con campo transversal dependen de la magnitud de una perturbación local aplicada en la mitad de la cadena.

Se encuentra que la perturbación rompe la integrabilidad del sistema, así al incrementar la magnitud de la perturbación, este transita de una región integrable a una caótica y para un valor lo suficientemente grande vuelve a la región integrable.

Se observa que al incrementar la magnitud de la perturbación la estructura de estados propios se ve afectada, así, en promedio para los estados con energías en torno al centro del espectro, el sistema se encuentra más localizado para una magnitud nula de la perturbación y al incrementarla estos tienden a encontrarse más extendidos, hasta que, para una magnitud lo suficientemente grande, vuelven a encontrarse localizados.

Finalmente se encuentra que, la perturbación también afecta el entrelazamiento de los estados propios del sistema, en particular, de manera análoga a la estructura de estados propios, se encuentra que, en promedio, los estados en torno al centro del espectro energético se encuentran menos entrelazados para una magnitud nula de la perturbación y al incrementarla el entrelazamiento crece, hasta que, para una magnitud considerable, el entrelazamiento vuelve a un valor menor.

**Palabras clave:** *Sistemas de muchos cuerpos, caos cuántico, entrelazamiento bipartita*



# Introducción

En 1935, Einstein, Podolsky, y Rosen publicaron un artículo [1] en el cual trataron de mostrar que la descripción mecánico cuántica de la realidad no era completa, para ello hicieron uso de dos principios. El principio de realidad y el principio de localidad. El primero nos dice que si, sin perturbar de ninguna manera un sistema, podemos predecir con certeza (es decir, con probabilidad igual a la unidad) el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de realidad física correspondiente a esta cantidad física. Mientras que el segundo nos dice que si dos sistemas no pueden interactuar entre sí, entonces una medición de un sistema no puede cambiar el estado del otro sistema [2], demostrando una contradicción entre los dos principios y puesto que el principio de realidad se cumple en la Mecánica Cuántica debemos abandonar el principio de localidad. El carácter no local de la Mecánica Cuántica fue criticado por Albert Einstein y sus preocupaciones al respecto han sido resumidas en la frase en inglés “*spooky action at a distance*” (acción fantasmal a distancia). Se decía entonces que la Mecánica Cuántica era una teoría incompleta, que necesitaba la incorporación de variables ocultas en los estados cuánticos para restaurar la *localidad* de la realidad. Sin embargo, John S. Bell [3] en los años 60’s del siglo XX, mostró teóricamente que incluso estados cuánticos considerados como un ensamble estadístico de estados de variables ocultas también conducen a resultados contradictorios con la Mecánica Cuántica. Los resultados de Bell fueron posteriormente verificados con fotones emitidos en experimentos con átomos de Calcio [4].

A los sistemas que muestran correlaciones cuánticas que violan el principio de localidad se les conoce como entrelazados. El entrelazamiento es un tipo de correlación cuántica que permite, por ejemplo, a una partícula atómica o subatómica saber instantáneamente algo sobre otra partícula. Esta última se puede encontrar a una larga distancia de la primera y la “comunicación” entre ellas se da aparentemente sin necesidad de un medio físico que las conecte.

Recientemente, en 2012 se entregó el Premio Nobel de Física en relación al entrelazamiento cuántico y la Teoría de la Información Cuántica [5]. De manera que el entrelazamiento cuántico continua siendo ampliamente estudiado, tanto en el contexto de la óptica cuántica y de pocas partículas [ver como ejemplos [6, 7]], así como en el de sistemas cuánticos compuestos por muchas partículas que interactúan de manera compleja (ver solo a manera de ejemplo las Refs. [8, 9]). Además, en Teoría de la Información Cuántica, el entrelazamiento se considera un recurso para protocolos como la teletransportación cuántica, la codificación superdensa o la criptografía cuántica basada en entrelazamiento (comunicación cuántica) [10, 11, 12].

Por otro lado, la teoría de matrices aleatorias (RMT por sus siglas en inglés) originalmente concebida en física nuclear como una aproximación estadística a sistemas con muchos grados de libertad recibió un impulso significativo al mostrar una conexión con el caos clásico y cuántico. A finales de los años 70’s y principios de los años 80’s, varios autores investigaron los espectros cuánticos de sistemas conservativos que se comportan caóticamente en el límite clásico. El interés por esta cuestión surgió naturalmente de la gran atención prestada en aquella época al movimiento caótico clásico [13, 14, 15]. Uno de los conceptos clave en la RMT es el de universalidad, el cual establece que ciertas propiedades estadísticas de los sistemas cuánticos complejos son independientes de los detalles específicos del sistema y solo dependen de alguna propiedad de simetría común. Una conjetura propuesta inicialmente por Bohigas, Giannoni y Schmit, nos dice que el espectro energético de los sistemas cuánticos con simetría de reversión temporal para los

cuales sus análogos clásicos son caóticos muestran las mismas propiedades de fluctuación que las predichas por ensambles Gaussianos ortogonales (GOE por sus siglas en inglés) [16]. Por otro lado la conjetura de Berry-Tabor establece que la estadística de niveles energéticos de los sistemas cuyos análogos clásicos son integrables siguen una ley de Poisson [17]. El caos en Mecánica Cuántica (Caos Cuántico) y la RMT han sido otras áreas de investigación en física muy prominentes y de interés también para experimentos modernos. [18, 19, 20, 21].

Una forma típica de estudiar los conceptos anteriores es en el contexto de los sistemas de espín 1/2. El momento magnético intrínseco total de un átomo o ion (al cual nos referiremos simplemente como su espín) depende en general del espín de los electrones en capas incompletas y de su momento angular orbital. Las interacciones entre espines pueden llevar a fenómenos colectivos con efectos macroscópicos tales como el ferromagnetismo, donde los espines se alinean de forma paralela unos con otros, y el antiferromagnetismo, donde los espines vecinos apuntan en direcciones opuestas [22]. El modelo de Ising constituye uno de los primeros intentos de describir la transición entre una fase paramagnética y otra ferromagnética [23]. En este modelo se consideran interacciones únicamente entre primeros vecinos, donde para un par de espines paralelos el valor de energía toma un signo diferente a aquel en el que el par es antiparalelo. Motivados por el interés en sistemas de espín estudiaremos un modelo el cual es susceptible de ser estudiado experimentalmente en el contexto de los así llamados simuladores cuánticos, como las plataformas con átomos superfríos en redes ópticas [24] y trampas de iones [25], así como qbits superconductores [26] y experimentos usando resonancia magnética nuclear [27]. Estos sistemas son altamente controlables, además están débilmente acoplados al ambiente, lo que permite su estudio en tiempos largos.

Retomando la discusión sobre entrelazamiento, una característica esencial de un estado conjunto entrelazado de dos sistemas físicos A y B (conocido como entrelazamiento bipartita) es que el estado de cada subsistema siempre está mezclado (descrito por varios vectores de estado) aunque el estado conjunto del sistema bipartito pueda ser puro (descrito por un único vector de estado). Por tanto, la entropía de los subsistemas se puede utilizar para cuantificar el entrelazamiento de estados cuánticos bipartitos puros [28], por lo que esta entropía también es conocida como entropía de entrelazamiento. El máximo entrelazamiento, para un sistema bipartita compuesto por  $2k$  espines (dividido en 2 partes iguales), está dado por

$$S_{\text{Máxima}} = k \ln 2.$$

Lo que implica que todos los  $k$  espines de la parte A están entrelazados con todos los  $k$  espines de la parte B. En términos de estados cuánticos, indica que los  $2^k$  estados del subsistema A están entrelazados con los otros  $2^k$  estados de la parte B.

El enfoque propuesto en esta Tesis considera un estudio basado en Caos Cuántico, RMT y Teoría de la Información Cuántica sobre los efectos de una perturbación en las propiedades, en particular la estadística de niveles energéticos, la estructura de estados propios y el entrelazamiento bipartita cuantificado por la entropía de entrelazamiento. El objetivo de esta tesis es estudiar la sensibilidad a perturbaciones de las propiedades espectrales, de estados propios y entrelazamiento de sistemas cuánticos unidimensionales de muchos cuerpos. Así en los siguientes capítulos definiremos y describiremos las cantidades que nos permitirán hacer una caracterización estática de los regímenes por los cuales el sistema bajo análisis transitará conforme la magnitud de la perturbación incrementa.

En el primer Capítulo se define el modelo a estudiar, el cual es un sistema de  $L$  partículas con espín 1/2, acomodadas cada una en cada uno de los sitios de una cadena unidimensional (1D), con interacciones tipo Ising (interacciones entre primeros vecinos), en un campo transversal en la dirección  $x$  y sujetas a una perturbación local en la dirección  $z$ , y se estudiarán sus simetrías, esto será útil en el siguiente Capítulo pues se hará uso de la conjetura de Bohigas-Giannoni-Schmit .



En el segundo Capítulo se estudia el carácter caótico o integrable del sistema mediante la distribución de las razones entre espaciamentos consecutivos de niveles energéticos adyacentes y en términos de un solo número, el promedio de las razones entre espaciamentos. Alternativamente a la estadística espectral, la estructura de los estados propios de un sistema cuántico nos permite determinar el carácter caótico o integrable del sistema. Una forma típica de caracterizar tal estructura es a través de la así llamada razón de participación ( $PR$ , por sus siglas en inglés), donde la  $PR$  cuantifica el número de estados de la base que participan en la estructura del estado cuántico de interés. En esta parte de la Tesis se obtienen los estados y valores propios del Hamiltoniano mediante diagonalización numérica exacta y se comparan con los valores teóricos de GOE. El análisis se hará variando la magnitud de la perturbación local.

En el tercer Capítulo se estudia el entrelazamiento de los estados propios del Hamiltoniano, para ello se calculará la entropía de entrelazamiento para cada uno de ellos. Se compararán los resultados obtenidos con la entropía máxima para distintos valores de la perturbación. Así, se estudiará la sensibilidad del entrelazamiento de estos estados con respecto a la magnitud de la perturbación.



# Capítulo 1

## Modelo a estudiar

En este Capítulo se introduce el estudio de sistemas de espín 1/2, se define el modelo que se estudia a lo largo de esta tesis y se muestran algunas de sus simetrías.

Para describir una única partícula de espín 1/2 se usan los operadores hermitianos  $S^{x,y,z}$ , los cuales para un sistema en unidades tales que  $\hbar = 1$  son descritos por  $S^{x,y,z} = \sigma^{x,y,z}/2$ , con  $\sigma^{x,y,z}$  las matrices de Pauli en  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente, donde

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

El estado cuántico de una partícula será escrito en términos de los estados propios de  $S^z$ , los cuales son el espín apuntando en dirección  $z$ ,  $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y el espín apuntando en dirección contraria  $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . De tal modo que los operadores  $S^{x,y,z}$  actúan como

$$S^z |\uparrow\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle; \quad S^z |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow\rangle. \quad (1.2)$$

$$S^y |\uparrow\rangle = \frac{i}{2} |\downarrow\rangle; \quad S^y |\downarrow\rangle = -\frac{i}{2} |\uparrow\rangle. \quad (1.3)$$

$$S^x |\uparrow\rangle = \frac{1}{2} |\downarrow\rangle; \quad S^x |\downarrow\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle. \quad (1.4)$$

El Hamiltoniano será escrito en la representación de los estados propios de  $S^z$ , esto es, estados de muchas partículas que se pueden escribir como productos de estados de una sola partícula. A manera de ejemplo presentamos un estado conocido como estado de Néel [29],

$$|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \dots \uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes \dots \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle. \quad (1.5)$$

Los espines en este estado tienen direcciones alternadas en los sitios. En teoría de la información cuántica esta es conocida como base computacional o como base de sitios. La dimensión del espacio de Hilbert es  $\mathcal{N} = 2^L$  y por lo tanto la matriz hamiltoniana tendrá dimensión  $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ . Dado el espacio de Hilbert de un sistema  $\mathcal{H}_A$  con una base ortonormal  $\{u_1^A, \dots, u_n^A\}$  y de otro  $\mathcal{H}_B$  con base ortonormal  $\{u_1^B, \dots, u_m^B\}$ , el espacio del sistema compuesto por ambos subsistemas  $\mathcal{H}_{AB}$  queda definido usando el producto tensorial como  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , con una base  $\{u_1^A \otimes u_1^B, \dots, u_1^A \otimes u_m^B, u_2^A \otimes u_1^B, \dots, u_2^A \otimes u_m^B, \dots, u_n^A \otimes u_1^B, \dots, u_n^A \otimes u_m^B\}$ , así una base para un sistema de 2 espines tiene la forma  $\{|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle, |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle, |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle\}$

Los operadores  $S_k^{x,y,z}$  actúan únicamente sobre el espín colocado en el sitio  $k$  de manera que para un sistema de 2 espines

$$(S_1^i + S_2^i) |\uparrow\downarrow\rangle = (S_1^i |\uparrow\rangle) \otimes |\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle \otimes (S_2^i |\downarrow\rangle) \quad (1.6)$$

donde  $S^i$  representa cualquiera de los operadores  $S_k^{x,y,z}$

## 1.1. Modelo de Ising con campo transversal

Se estudia un sistema de  $L$  partículas con espín  $1/2$ , acomodadas cada una en cada uno de los sitios de una cadena unidimensional (1D), el primer término del Hamiltoniano corresponde a interacciones tipo Ising entre dos pares de partículas ubicadas en sitios adyacentes,

$$H_{zz} = J \sum_{k=1}^{L-1} S_k^z S_{k+1}^z. \quad (1.7)$$

La constante  $J$  representa la magnitud del acoplamiento entre dos sitios adyacentes, establece la escala de energía. El estado base es ferromagnético, con todos los espines alineados en la misma dirección para  $J < 0$ , es antiferromagnético con espines vecinos antiparalelos para  $J > 0$  [22]. En este trabajo fijaremos  $J = 1$ .

Se añade una segunda suma que representa un campo transversal en la dirección  $x$  aplicado en cada uno de los sitios y con magnitud  $h_x$ , de tal manera que obtenemos un Hamiltoniano de la forma

$$H_0 = H_{zz} + Jh_x \sum_{k=1}^L S_k^x. \quad (1.8)$$

El espectro energético del Hamiltoniano puede tener degeneraciones, un teorema demostrado por Von Neuman y Wigner [30] muestra que es mucho más probable tenerlas mientras más simetrías existen. Con la finalidad de destruir algunas de estas se consideran condiciones de frontera abiertas, las cuales se reflejan en el límite superior de la sumatoria en  $H_{zz}$ , de esta manera evitamos la simetría de translación. Por otra parte para destruir paridad y reversión del espín se introducirá un defecto en el primer sitio de la cadena con la forma

$$V_\varepsilon = \varepsilon S_1^z. \quad (1.9)$$

El sistema dado por la ecuación (1.8) es integrable y añadir el defecto en el primer sitio, al encontrarse en uno de los bordes continua siendo integrable [31].

Con la finalidad de estudiar los efectos de una perturbación en las propiedades del sistema tanto del punto de vista del caos cuántico como el de teoría de la información cuántica se introduce un defecto a la mitad de la cadena.

$$V_\mu = \mu S_{L/2}^z. \quad (1.10)$$

Juntando todas las partes anteriormente descritas se obtiene el Hamiltoniano que se usará a lo largo de esta tesis, el cual toma la forma

$$H = H_0 + \varepsilon S_1^z + \mu S_{L/2}^z. \quad (1.11)$$

Para obtener las energías y los valores propios se hace uso de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$H |\psi_\alpha\rangle = E_\alpha |\psi_\alpha\rangle. \quad (1.12)$$

La cual se resolverá mediante la técnica llamada diagonalización exacta.

La representación de  $H$  en la base anteriormente descrita queda determinada por

$\langle \uparrow_k \downarrow_{k+1} \dots | H | \downarrow_k \uparrow_{k+1} \dots \rangle$ , de modo que para un sistema de 2 espines tenemos

$$H = \begin{pmatrix} \langle \uparrow\uparrow | H | \uparrow\uparrow \rangle & \langle \uparrow\uparrow | H | \uparrow\downarrow \rangle & \langle \uparrow\uparrow | H | \downarrow\uparrow \rangle & \langle \uparrow\uparrow | H | \downarrow\downarrow \rangle \\ \langle \uparrow\downarrow | H | \uparrow\uparrow \rangle & \langle \uparrow\downarrow | H | \uparrow\downarrow \rangle & \langle \uparrow\downarrow | H | \downarrow\uparrow \rangle & \langle \uparrow\downarrow | H | \downarrow\downarrow \rangle \\ \langle \downarrow\uparrow | H | \uparrow\uparrow \rangle & \langle \downarrow\uparrow | H | \uparrow\downarrow \rangle & \langle \downarrow\uparrow | H | \downarrow\uparrow \rangle & \langle \downarrow\uparrow | H | \downarrow\downarrow \rangle \\ \langle \downarrow\downarrow | H | \uparrow\uparrow \rangle & \langle \downarrow\downarrow | H | \uparrow\downarrow \rangle & \langle \downarrow\downarrow | H | \downarrow\uparrow \rangle & \langle \downarrow\downarrow | H | \downarrow\downarrow \rangle \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

## 1.2. Simetrías

En términos generales la simetría de inversión temporal se puede observar al definir el operador de inversión del tiempo como  $T = UK$ , donde  $U$  es algún operador unitario y  $K$  indica el operador de conjugación compleja. El Hamiltoniano (1.11) posee la simetría si se toma  $U = \mathbb{1}$  [32], por lo que el operador de inversión temporal quedará definido como  $T = K$ , de esta manera se cumple para  $S^{x,y,z}$ .

$$KS^xK^{-1} = S^x, \quad KS^yK^{-1} = -S^y, \quad KS^zK^{-1} = S^z. \quad (1.14)$$

En este caso la operación consiste en una reflexión a través del plano  $x - z$  en el espacio de espines.

El hamiltoniano también satisface la simetría rotacional, se puede ver del hecho de que las matrices  $\sigma^{x,z}$  son ortogonales

$$(\sigma^x)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma^x, \quad (\sigma^z)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma^z. \quad (1.15)$$

En el Hamiltoniano dado por (1.11) es un modelo de espín 1/2 de muchos cuerpos. El uso de fronteras abiertas destruye la simetría de traslación, mientras que el defecto en el primer sitio de la cadena destruye las de paridad y reversión del espín. Se conservan las simetrías de inversión temporal y rotacional lo que es importante para la comparación con las predicciones de RMT.



## Capítulo 2

# Enfoque de Caos Cuántico y Teoría de Matrices Aleatorias

En este Capítulo se estudian la estadística de niveles energéticos y la estructura de estados propios del Hamiltoniano (1.11) y se comparan con los valores teóricos predichos para GOE.

Un ensamble Gaussiano aleatorio consiste de matrices cuadradas con sus elementos matriciales obtenidos de una distribución Gaussiana.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.1)$$

En particular, el ensamble Gaussiano ortogonal es aquel para el cual el Hamiltoniano satisface las simetrías de inversión del tiempo y simetría rotacional, por lo cual su matriz es simétrica con entradas reales y por lo tanto satisface

$$H_{mn} = H_{nm} = H_{nm}^*. \quad (2.2)$$

donde  $H_{mn}$  representa el elemento de matriz en el lugar  $(m, n)$  y el  $*$  indica conjugación compleja

Como se mencionó anteriormente, dada la conjetura de Bohigas-Giannoni-Schmit, un sistema cuántico con las simetrías de inversión del tiempo y rotacional cuya contraparte clásica es caótica posee las mismas propiedades de fluctuación que las predichas por ensambles Gaussianos ortogonales [16].

Dada la conjetura de Berry-Tabor diremos que un sistema cuántico se encuentra en un régimen integrable si su estadística de niveles energéticos sigue una ley de Poisson [17].

### 2.1. Estadística de niveles.

Una medida estadística que ha sido extremadamente útil para analizar sistemas cuánticos acotados con fenómenos clásicos subyacentes es la distribución de espacios vecinos más cercanos en una secuencia dada de valores propios.

Dada la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (1.12), considerando que la dimensión del espacio de Hilbert es  $\mathcal{N}$  se tienen entonces  $\mathcal{N}$  niveles de energía que se pueden organizar de la siguiente forma

$$E_{\mathcal{N}} > E_{\mathcal{N}-1} > \dots > E_1. \quad (2.3)$$

Se define el espaciamiento entre niveles energéticos adyacentes como

$$S_{\alpha} := (E_{\alpha} - E_{\alpha-1}) / \delta. \quad (2.4)$$

donde  $\delta$  denota el espaciamento promedio entre niveles

Se sabe que para el GOE la distribución de espaciamentos consecutivos entre niveles energéticos adyacentes satisface la distribución de Wigner-Dyson

$$P_{WD}(S) = (\pi s/2) \exp(-\pi s^2/4). \quad (2.5)$$

Los sistemas cuánticos cuya contra parte clásica es integrable siguen una ley de Poisson, para la cuál los eigenvalores de un sistema están completamente no correlacionados, es decir existe una repulsión entre niveles energéticos.

$$P(s) = \exp(-s). \quad (2.6)$$

Una manera equivalente de determinar la estadística de niveles es mediante la razón de espaciamentos consecutivos entre niveles energéticos adyacentes

$$r_\alpha := \frac{S_\alpha}{S_{\alpha-1}}. \quad (2.7)$$

Esta cantidad tiene la ventaja de ser independiente del espaciamento medio entre niveles, lo cual hace innecesario el proceso de desdoblamiento usualmente aplicado en el cálculo de  $P(s)$ . Tal cantidad permite una comparación más transparente con los experimentos que la distribución tradicional del espaciamento entre niveles [33, 34].

De manera equivalente a la Ec. (2.5) para el GOE usando la razón de espaciamentos consecutivos entre niveles energéticos adyacentes

$$P_{WD}(r) = \frac{1}{Z} \frac{r + r^2}{(1 + r + r^2)^{5/2}}. \quad (2.8)$$

con  $Z = 8/27$ .

Mientras que para el sistema con eigenvalores no correlacionados [Ec. (2.6)]

$$P_P(r) = \frac{1}{(1+r)^2}. \quad (2.9)$$

En la práctica el cálculo de la distribución de las razones de espaciamentos consecutivos entre niveles energéticos adyacentes  $P(r)$  consiste en un histograma normalizado de las razones  $r_\alpha$ .

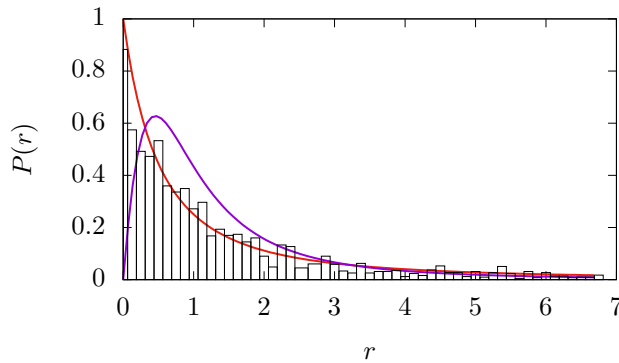


Figura 2.1:  $P(r)$  contra  $r$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para  $L = 12$  y valores  $J = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.2$  y  $\mu = 0.0$ . La línea morada denota la predicción para GOE[Ec. (2.8)]. La línea roja corresponde a la predicción para Poisson.[Ec. (2.9)]

En la figura 2.1 se muestra una alta correspondencia entre  $P(r)$  y  $P_P(r)$  dado por la ecuación (2.9), por lo que se concluye que para el Hamiltoniano (1.11) con un valor de  $\mu = 0.0$  la estadística de niveles es la propia de un sistema integrable. Cambiar los valores  $J$ ,  $h_x$  y  $\varepsilon$  no tiene



ningún efecto sobre la estadística de niveles, además se escoge  $\mu = 0.0$  debido a que el Hamiltoniano (1.8) más el término  $V_\varepsilon$  es un sistema integrable [31]

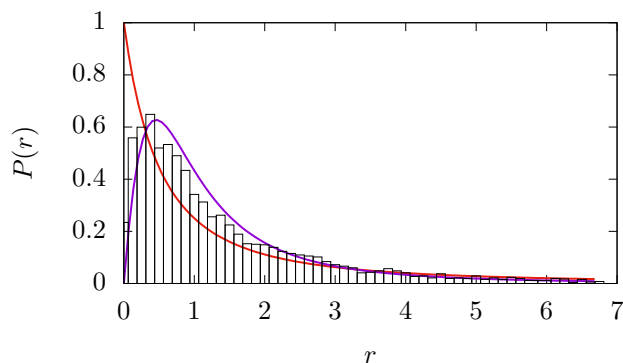


Figura 2.2:  $P(r)$  contra  $r$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para  $L = 12$  y valores  $J = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.2$  y  $\mu = 0.06$ . La línea morada denota la predicción para GOE[Ec. (2.8)]. La línea roja corresponde a la predicción para Poisson.[Ec. (2.9)]

En la figura 2.2 por el contrario no se muestra una correspondencia entre  $P(r)$  y  $P_p(r)$  dado por la Ec. (2.9), pero tampoco muestra una correspondencia con  $P_{WD}(r)$  dado por la Ec. (2.8), por lo que podemos concluir que el Hamiltoniano(1.11) con  $\mu = 0.06$  no es ni caótico ni integrable y se encuentra en alguna región de transición.

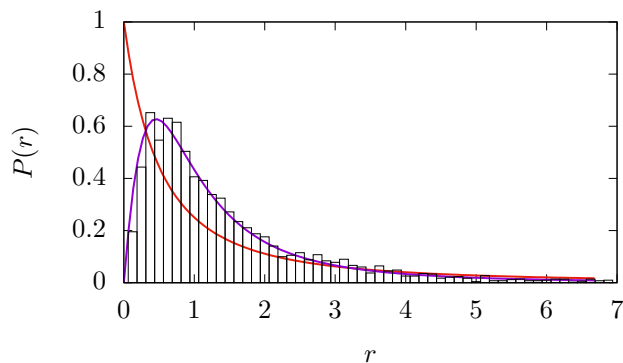


Figura 2.3:  $P(r)$  contra  $r$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para  $L = 12$  y valores  $J = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.2$  y  $\mu = 0.12$ . La línea morada denota la predicción para GOE[Ec. (2.8)]. La línea roja corresponde a la predicción para Poisson.[Ec. (2.9)]

En la figura 2.3 se muestra una alta correspondencia entre  $P(r)$  y  $P_{WD}(r)$  dado por la ecuación (2.8), por lo se concluye que para el hamiltoniano (1.11) con un valor de  $\mu = 0.12$  la estadística de niveles es la propia de un sistema caótico.

Añadiendo una cuarta figura para un sistema con  $\mu = 0.2$  podremos observar si es que el sistema permanece en el régimen caótico.

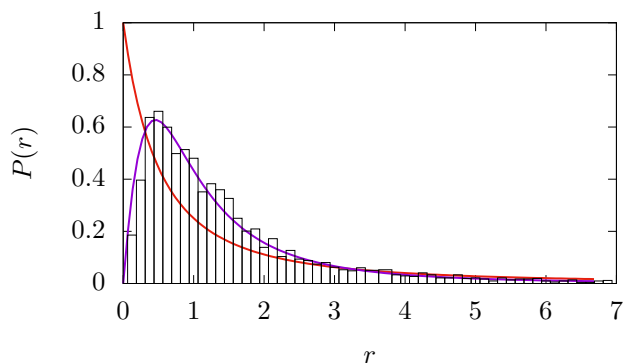


Figura 2.4:  $P(r)$  contra  $r$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para  $L = 12$  y valores  $J = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.2$  y  $\mu = 0.2$ . La línea morada denota la predicción para GOE[Ec. (2.8)]. La línea roja corresponde a la predicción para Poisson.[Ec. (2.9)]

De igual forma que para la figura 2.3 se observa que la figura 2.4 muestra una alta correspondencia entre  $P(r)$  y  $P_{WD}(r)$  dado por la ecuación (2.8), por lo que podemos concluir que el Hamiltoniano (1.11) con valor  $\mu = 0.2$  posee una estadística de niveles propia de un sistema caótico

En las figuras 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 se muestra como al aumentar la magnitud de la perturbación se puede romper la integrabilidad del sistema, el sistema pasa a un régimen de transición hasta que, para un valor de  $\mu$  lo suficientemente alto, el sistema se encuentra en un régimen caótico.

Una manera equivalente de caracterizar la estadística de niveles es haciendo uso de un único número [33], para ello se define

$$\tilde{r}_\alpha := \frac{\min(S_\alpha, S_{\alpha-1})}{\max(S_\alpha, S_{\alpha-1})} = \min \left\{ r_\alpha, \frac{1}{r_\alpha} \right\}. \quad (2.10)$$

A partir del promedio de la función anterior podemos establecer el carácter caótico o integrable de un sistema,

$$\langle \tilde{r} \rangle = \frac{1}{N-2} \sum_{n=1}^{N-2} \tilde{r}_\alpha. \quad (2.11)$$

Las estimaciones teóricas para sistemas integrables y caóticos son respectivamente  $\langle \tilde{r} \rangle_P = 2 \ln 2 - 1 \approx 0.386$  y  $\langle \tilde{r} \rangle_{WD} = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.536$ .

El Hamiltoniano dado por la ecuación (1.11) es de la forma  $H = H_0 + \mu V$  donde  $H_0$  es un modelo integrable, por lo que al variar  $\mu$  en  $\langle \tilde{r}(\mu) \rangle$  podremos observar como el sistema varía entre los distintos regímenes. Realizando los cálculos numéricos para diferentes tamaños del sistema ( $L = 10, 11, 12$ , de dimensiones  $\mathcal{H} = 1024, 2048, 4096$  respectivamente) se obtienen los siguientes resultados.

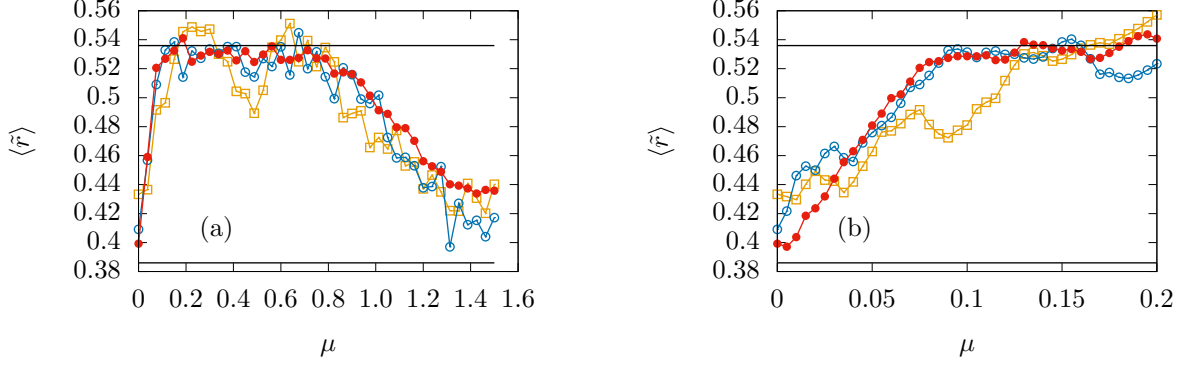


Figura 2.5:  $\langle \tilde{r} \rangle$  contra  $\mu$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para  $L = 10$  línea amarilla,  $L = 11$  línea azul y  $L = 12$  línea roja. Los valores de los parámetros son  $J = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$  y  $\varepsilon = 0.1$ . Las líneas negras denotan las estimaciones teóricas para sistemas integrables (línea inferior) y caóticos (línea superior). (a) El intervalo de  $\mu$  es  $[0, 1.5]$ , (b) Un acercamiento del panel (a) para observar mejor la transición, el intervalo de  $\mu$  es  $[0, 0.2]$ .

La figura 2.5(a) muestra como al aumentar la magnitud de la perturbación representada por  $\mu$  el sistema transita de una fase integrable a una caótica, lo cual concuerda con los resultados previos usando la  $P(r)$ . Una vez alcanzado el valor estimado para sistemas caóticos  $\langle \tilde{r} \rangle$  oscila al rededor de este hasta decaer nuevamente al valor estimado para sistemas integrables. Esto último se explica al notar que el término que contiene la perturbación en el Hamiltoniano (1.11) se vuelve dominante cuando  $\mu \approx 0.8$ . Se puede observar que para ningún tamaño del sistema los valores concuerdan exactamente con los de las predicciones, pero mientras mayor número de partículas mayor es la concordancia y menores son las fluctuaciones por lo que se concluye que son defectos de tamaño finito.

Para la figura 2.5(b) se muestra para el Hamiltoniano (1.11) la transición del régimen integrable al caótico cuando  $\mu \approx 0.2$ . Se puede observar como para tamaños más grandes del sistema las fluctuaciones son menores, además, en un  $\mu = 0$  se observa claramente como a mayores tamaños menor es el error respecto a las estimaciones teóricas.

Repitiendo los cálculos para un valor de  $\varepsilon$  distinto podemos observar si la magnitud de la perturbación en el primer sitio de la cadena juega un papel en la estadística de niveles.

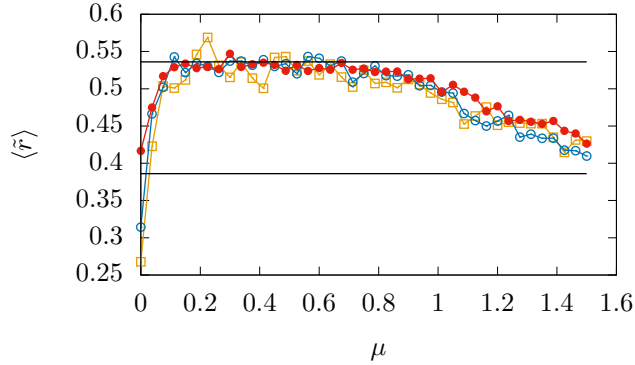


Figura 2.6:  $\langle \tilde{r} \rangle$  contra  $\mu$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para  $L = 10$  línea amarilla,  $L = 11$  línea azul y  $L = 12$  línea roja. Los valores de los parámetros son  $J = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$  y  $\varepsilon = 0.2$ , las líneas negras denotan las estimaciones teóricas para sistemas integrables (línea inferior) y caóticos (línea superior). El intervalo de  $\mu$  es  $[0, 1.5]$ .

En la figura 2.5 al igual que en el caso mostrados en la figura 2.6 notamos que el sistema dado por el Hamiltoniano (1.11) transita de una fase integrable a una caótica, esta oscila durante algún dominio y cuando  $\mu \approx 0.8$  regresa nuevamente a la estimación para sistemas integrables, podemos concluir que la magnitud de la perturbación en el primer sitio de la cadena no influye en las fases bajo las que se encuentra el sistema. Por último podemos observar que nuevamente, a mayor número de partículas menor es el error respecto de las estimaciones y las fluctuaciones son menores.

## 2.2. Estructura de estados propios.

Alternativamente a la estadística espectral, la estructura de los estados propios de un sistema cuántico nos permite determinar el carácter caótico o integrable del sistema. El vector de estado para el  $\alpha$ -ésimo estado propio del Hamiltoniano se puede escribir en términos de una base completa  $\{|n\rangle\}$  (En nuestro caso será la base de estados (1.5)) como

$$|\psi_\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} C_n^\alpha |n\rangle, \quad \text{con } C_n^\alpha = \langle n|\psi_\alpha\rangle. \quad (2.12)$$

Graficando las probabilidades de obtener un cierto estado mediante  $|C_n^\alpha|^2 = |\langle n|\psi_\alpha\rangle|^2$  para distintos valores de  $E_\alpha$  en términos de la base de estados, podemos observar el papel que juegan distintos estados propios respecto del número de elementos que participan en esa base.

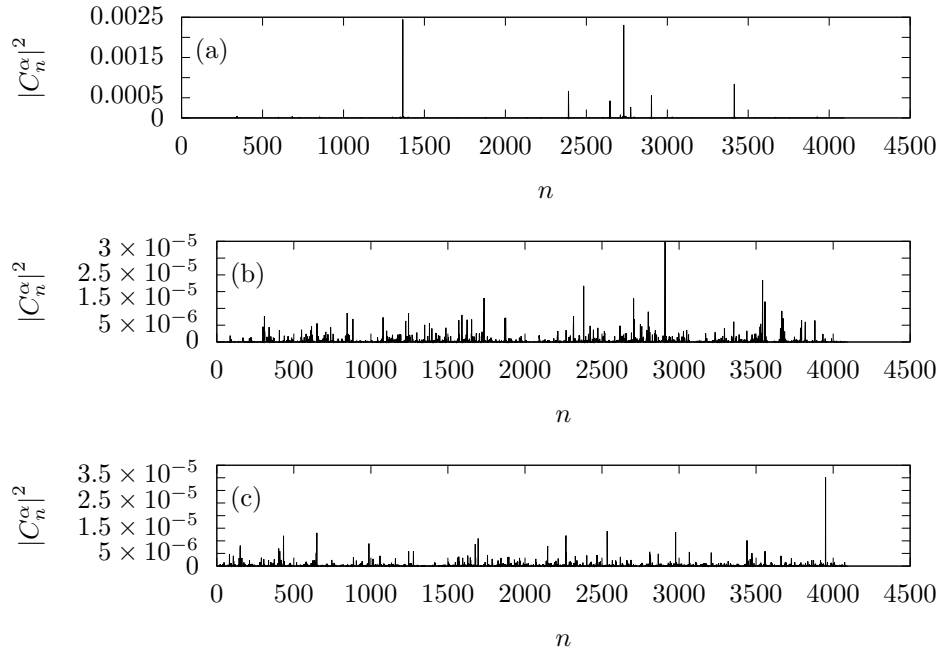


Figura 2.7:  $|C_n^\alpha|^2$  contra  $n$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para  $L = 12$  con valores  $\varepsilon = 0.2$   $\mu = 0.12$ , (a) Aquellos que son correspondientes con el estado de menor energía  $E_1$ , (b) con el estado con la energía en la posición a un cuarto de la dimensión  $E_{\mathcal{N}/4}$ , (c) para el que está justo a la mitad  $E_{\mathcal{N}/2}$ .

Se observa que el número de elementos de esa base que participan en algún estado propio son variables, además aquellos que poseen energías en torno al centro del espectro energético tienen más elementos distintos de cero.

Una forma típica de caracterizar la estructura de estados propios es a través de la así llamada razón de participación (PR, por sus siglas en inglés), definida por medio de

$$PR_\alpha = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\mathcal{N}} |C_n^\alpha|^4}. \quad (2.13)$$

El  $PR_\alpha$  cuantifica el número de estados de la base que participan en la estructura del  $\alpha$ -ésimo estado propio del hamiltoniano. Se dice que un estado está localizado en la base  $\{|n\rangle\}$  si  $PR_\alpha \propto \mathcal{O}(1)$ , esto significa que un número pequeño de estados participa en la estructura del estado propio de energía. Mientras que para un estado extendido se tiene  $PR_\alpha \propto \mathcal{N}$ , muchos estados de la base constituyen el estado de energía. Por ejemplo, en el caso de que un estado esté

completamente extendido, esto es, sus componentes sean  $C_n^\alpha = 1/\sqrt{\mathcal{N}}$ , entonces se tiene  $PR_\alpha = \mathcal{N}$ .

En particular, para el caso de todos los estados de matrices aleatorias con simetría de reversibilidad temporal, que son elementos del GOE se tiene que [35]

$$PR_{\text{GOE}} = \frac{\mathcal{N} + 2}{3}. \quad (2.14)$$

Al gráficar el  $PR_\alpha$  dividido por el  $PR_{\text{GOE}}$  en función de las energías para distintos valores de  $\mu$  se obtienen los siguientes resultados.

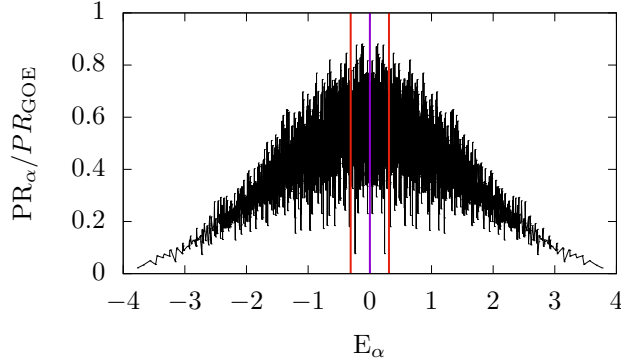


Figura 2.8:  $PR_\alpha/PR_{\text{GOE}}$  contra  $E_\alpha$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11). Los valores de los parámetros son  $L = 12$ ,  $J = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.2$  y  $\mu = 0.0$ . La línea morada denota el punto medio de los eigenvalores de energía  $\{E_\alpha\}$  que se encuentra en  $E_{N/2} = 0$ , las líneas rojas son un intervalo del 10% de los eigenvalores a la izquierda y derecha de este centro.

En la figura 2.8 se observa que los resultados del "PR" son consistentes con los de la gráfica 2.7, pues el  $PR_\alpha/PR_{\text{GOE}}$  es mayor para los estados que tienen energías en torno al centro del espectro, además vemos que son aquellos estados los que más se asemejan a los del GOE.

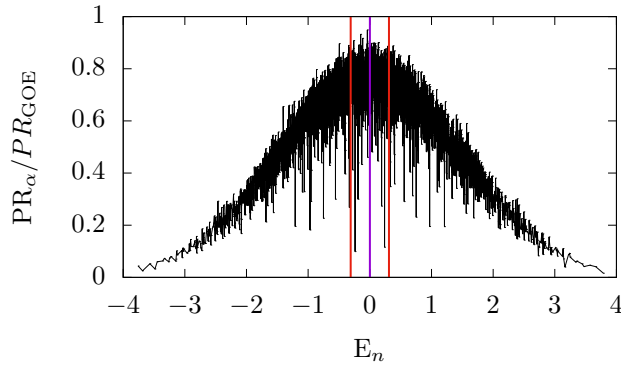


Figura 2.9:  $PR_\alpha/PR_{\text{GOE}}$  contra  $E_\alpha$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11). Los valores de los parámetros son  $L = 12$ ,  $J = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.2$  y  $\mu = 0.06$ . La línea morada denota el punto medio de los eigenvalores de energía  $\{E_\alpha\}$  que se encuentra en  $E_{N/2} = 0$ , las líneas rojas son un intervalo del 10% de los eigenvalores a la izquierda y derecha de este centro.

En la figura 2.9 observan resultados similares a los de la figura 2.8, sin embargo los resultados se encuentran menos dispersos, además se puede observar que los estados en el centro del espectro son más parecidos a los que posee el GOE pues el valor de la razón es más cercano a uno.

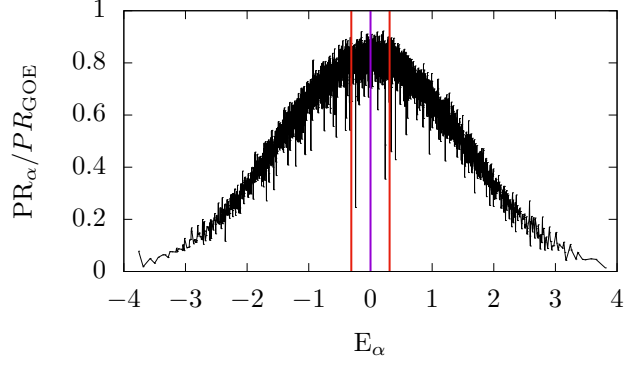


Figura 2.10:  $PR_\alpha/PR_{GOE}$  contra  $E_\alpha$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11). Los valores de los parámetros son  $L = 12$ ,  $J = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.2$  y  $\mu = 0.12$ . La línea morada denota el punto medio de los eigenvalores de energía  $\{E_\alpha\}$  que se encuentra en  $E_{N/2} = 0$ , las líneas rojas son un intervalo del 10% de los eigenvalores a la izquierda y derecha de este centro.

Nuevamente en la figura 2.10 se observa que los resultados son similares a los de las figuras 2.8 y 2.9, en este caso la dispersión de los resultados es aún menor y los estados en torno al centro del espectro son aún más parecidos a los del GOE.

De las figuras 2.8, 2.9 y 2.10 podemos ver que los estados tienden a encontrarse más localizados mientras más cercanos se encuentren a los extremos del espectro energético, mientras que se encuentran más extendidos para energías más cercanas al centro del espectro. También podemos notar que para un régimen integrable el valor del  $PR_\alpha$  se encuentra más disperso que para un régimen intermedio y este a su vez de igual forma tiene unos valores más dispersos que para un régimen caótico. Además, el promedio alrededor del centro del espectro tiende a acercarse al valor estimado para GOE.

Tomando el 10% de los valores a los extremos del centro de los  $\{E_\alpha\}$  (representado por las barras de color rojo en las figuras 2.8, 2.9, 2.10) y promediando, se define

$$\langle PR \rangle := \sum_{\alpha=2N/5}^{3N/5} PR_\alpha \quad (2.15)$$

Al calcular  $\langle PR \rangle / PR(GOE)$  en función de  $\mu$  se obtienen los siguientes resultados.

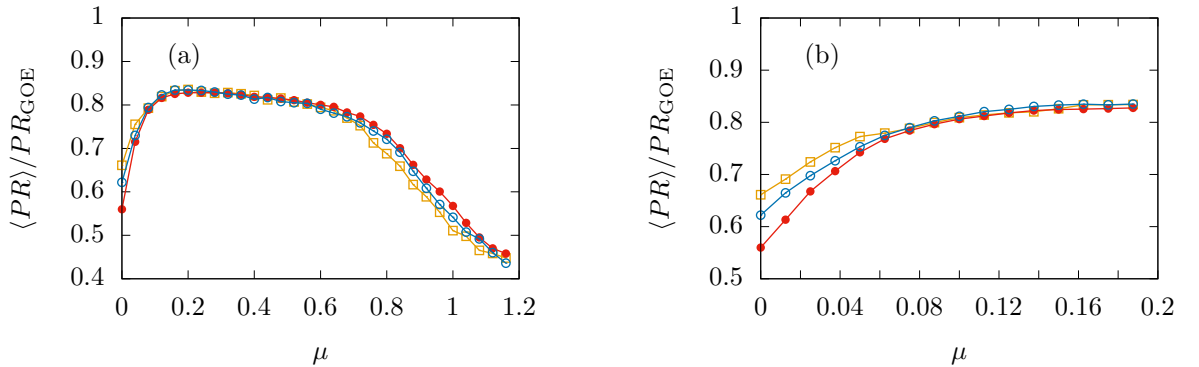


Figura 2.11:  $\langle PR \rangle / PR_{GOE}$  contra  $\mu$  para el modelo dado por el hamiltoniano (1.11) para  $L = 10$  línea amarilla,  $L = 11$  línea azul y  $L = 12$  línea roja. Los valores de los parámetros son  $J = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$  y  $\varepsilon = 0.2$ .

En la figura 2.11(a) se observa que a pesar de que para  $\mu = 0.0$  el valor de  $PR/PR(GOE)$  para los estados al rededor del centro del espectro mayor a 0, el valor promedio sigue siendo menor a aquellos con  $\mu > 0.0$ , en general, el valor promedio tiende a incrementar hasta  $\mu \approx 0.2$  que tiende mantenerse aproximado a un valor máximo para un cierto dominio de  $\mu$  hasta en  $\mu \approx 0.8$  volver a decrecer similar a como ocurre con  $\langle \tilde{r} \rangle$ .

En la figura 2.11(b) se observa como es el crecimiento de  $\mu$  hasta alcanzar un valor máximo, se puede ver como a mayor tamaño del sistema la razón de participación promedio tiende a un valor más pequeño para  $\mu = 0.0$ .

Tanto la estadística de niveles como la estructura de estados propios muestran que la perturbación a la mitad de la cadena rompe la integrabilidad del sistema. Seguir aumentando su valor desde cero lo lleva a un régimen caótico hasta que la perturbación es lo suficientemente grande que se vuelve predominante y el sistema regresa a un régimen integrable.



## Capítulo 3

# Enfoque en Teoría de la Información Cuántica

En 1927 L. Landau motivado por la descripción cuántica de fenómenos provenientes de sistemas complejos, introdujo el concepto de matriz de densidad [36], la cuál en analogía con la mecánica estadística clásica satisface una ecuación de tipo Liouville que lleva por nombre ecuación de Von Neumann, esta ecuación describe la misma dinámica que la ecuación de Schrödinger [37].

Se dice que el sistema cuántico se encuentra en un estado puro cuando su vector de estado puede ser escrito como una superposición lineal de vectores  $|n\rangle$  elementos del espacio de Hilbert

$$|\psi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle \quad (3.1)$$

Se define la matriz de densidad para un estado puro  $|\psi\rangle$  por

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (3.2)$$

Es posible que un sistema cuántico no se encuentre en estado puro. En ese caso, el estado puede verse como una mezcla de estados  $|\psi_i\rangle$ , normalizados en el espacio de Hilbert, que no son necesariamente ortogonales entre sí. El operador de densidad de dicho estado mixto se define como

$$\rho = \sum_{\alpha=1} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (3.3)$$

Cada  $|\psi_i\rangle$  tiene una expansión diferente en la base de los vectores propios  $|n\rangle$  y  $p_i \geq 0$  se interpreta como la probabilidad de obtener un estado en particular.

Algunas de las propiedades que satisface la matriz de densidad son

1. La traza de toda matriz de densidad es igual a uno,  $\text{Tr } \rho = 1$ .
2. La matriz de densidad es hermitiana,  $\rho = \rho^\dagger$ .
3.  $\rho$  debe ser definido positivo,  $\langle c_n | \rho | c_n \rangle \geq 0$ , para todo  $|c_n\rangle$ .

Una de las ventajas del uso de una matriz de densidad es que representa un estado cuántico de manera general. Esto es a diferencia de un vector de estado que es únicamente útil para representar solamente estados puros, la matriz de densidad es útil para representar tanto estados puros como mezclas estadísticas de estados [37]

### 3.1. Entropía de Entrelazamiento

Dado un sistema cuántico, al que denominaremos como bipartita puesto que su espacio de Hilbert se puede escribir como el producto tensorial de dos subespacios  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  con dimensiones  $\dim \mathcal{H}_A \leq \dim \mathcal{H}_B$ , cualquier estado puro puede ser escrito como

$$|\gamma\rangle = \sum_{j=1}^{\dim \mathcal{H}_A} \sqrt{p_j} |\phi_j\rangle \otimes |\psi_j\rangle. \quad (3.4)$$

donde  $|\phi_j\rangle$  y  $|\psi_j\rangle$  son vectores ortonormales en el espacio de Hilbert de los subsistemas  $A$  y  $B$  respectivamente y  $\sqrt{p_j}$  es en general un número complejo. El número de sumandos en esta llamada descomposición de Schmidt es como máximo la dimensión del subsistema más pequeño. Al restringir nuestra atención a uno de los subsistemas ya no podemos describir su estado cuántico mediante una función de onda. En cambio, los “estados reducidos” de  $A$  y  $B$  están dados por los operadores de densidad.

La matriz de densidad asociada a un sistema bipartita se escribe como

$$\rho_S = \rho_A \otimes \rho_B. \quad (3.5)$$

Entonces la información contenida en la parte  $A$  del sistema se puede obtener mediante el proceso de traza parcial, que consiste en remover los grados de libertad correspondientes a alguno de los subsistemas. Por ejemplo, la matriz de densidad reducida correspondiente al subsistema  $A$  se obtiene mediante,

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_S. \quad (3.6)$$

así usando las ecuaciones (3.4) y (3.6) obtenemos que

$$\rho_A = \sum_{j=1}^{\dim \mathcal{H}_B} p_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \quad \rho_B = \sum_{j=1}^{\dim \mathcal{H}_A} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|. \quad (3.7)$$

La entropía de von Neumann de la matriz de densidad reducida del sistema es dada por

$$S_{vN}^A := -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) \quad S_{vN}^B := -\text{Tr}(\rho_B \ln \rho_B). \quad (3.8)$$

Sean  $\{\lambda_n\}$  los valores propios de la matriz de densidad reducida  $\rho_A$  podemos escribir su entropía de entrelazamiento como

$$S_{vN}^A = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i. \quad (3.9)$$

La observación clave para cuantificar el entrelazamiento es que cuando  $\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B$  los valores propios de ambos operadores de densidad son los mismos. Por lo tanto sus entropías de von Neumann coinciden

$$S_{vN}^A = S_{vN}^B. \quad (3.10)$$

La entropía, por tanto, puede considerarse como una propiedad del estado bipartito. La entropía de entrelazamiento [28].

### 3.1.1. Entropía de entrelazamiento de los estados de Bell

Como ejemplo se calcula la entropía de entrelazamiento de los así llamados estados de Bell. Para un sistema de 2 espines se definen los cuatro estados de Bell como

$$\begin{aligned} |\beta_{00}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle). \\ |\beta_{10}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle). \\ |\beta_{01}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \\ |\beta_{11}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\downarrow\rangle - |\uparrow\uparrow\rangle). \end{aligned}$$

La matriz de densidad para cada uno de los 4 estados tiene la siguiente forma

$$\rho_{00} = \frac{1}{2} \left( |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\uparrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \right). \quad (3.11)$$

$$\rho_{10} = \frac{1}{2} \left( |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| \right). \quad (3.12)$$

$$\rho_{01} = \frac{1}{2} \left( |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| - |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| - |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| \right). \quad (3.13)$$

$$\rho_{11} = \frac{1}{2} \left( |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| - |\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| - |\uparrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| \right). \quad (3.14)$$

La matriz de densidad reducida de los cuatro estados son respectivamente

$$\rho_{00A} = \text{Tr}_B(\rho_{00}) = \langle\downarrow|_B(\rho_{00})|\downarrow\rangle_B + \langle\uparrow|_B(\rho_{00})|\uparrow\rangle_B = \frac{1}{2} |\downarrow\rangle_A \langle\downarrow|_A + \frac{1}{2} |\uparrow\rangle_A \langle\uparrow|_A. \quad (3.15)$$

$$\rho_{01A} = \text{Tr}_B(\rho_{01}) = \langle\downarrow|_B(\rho_{01})|\downarrow\rangle_B + \langle\uparrow|_B(\rho_{01})|\uparrow\rangle_B = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle_A \langle\uparrow|_A + \frac{1}{2} |\downarrow\rangle_A \langle\downarrow|_A. \quad (3.16)$$

$$\rho_{10A} = \text{Tr}_B(\rho_{10}) = \langle\downarrow|_B(\rho_{10})|\downarrow\rangle_B + \langle\uparrow|_B(\rho_{10})|\uparrow\rangle_B = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle_A \langle\uparrow|_A + \frac{1}{2} |\downarrow\rangle_A \langle\downarrow|_A. \quad (3.17)$$

$$\rho_{11A} = \text{Tr}_B(\rho_{11}) = \langle\downarrow|_B(\rho_{11})|\downarrow\rangle_B + \langle\uparrow|_B(\rho_{11})|\uparrow\rangle_B = \frac{1}{2} |\downarrow\rangle_A \langle\downarrow|_A + \frac{1}{2} |\uparrow\rangle_A \langle\uparrow|_A. \quad (3.18)$$

Las cuatro matrices de densidad reducidas son iguales por lo que poseen la misma entropía de entrelazamiento, estas poseen eigenvalores  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  y  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$  por lo que usando (3.9) se obtiene

$$S_{\sqrt{N}}^A = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2. \quad (3.19)$$

El máximo entrelazamiento para un sistema bipartita compuesto por  $L = 2k$  espines (dividido en 2 partes iguales), está dado por [38]

$$S_{\text{Máxima}} = k \ln 2. \quad (3.20)$$

Los estados de Bell se encuentran máximamente entrelazados.

## 3.2. Entropía de entrelazamiento para los estados propios de un Hamiltoniano

Escribiendo el vector de estado de algún estado propio de un Hamiltoniano en términos de una base completa  $\{|n\rangle\}$  tenemos:

$$|\psi_\alpha\rangle = \sum_n^{\dim \mathcal{H}} C_n^\alpha |n\rangle, \quad C_n^\alpha = \langle n|\psi_\alpha\rangle. \quad (3.21)$$

La matriz de densidad del estado propio  $|\psi_\alpha\rangle$  y su entropía de entrelazamiento toman la forma:

$$\rho_\alpha = \sum_{n',n}^{\dim \mathcal{H}_A} C_{n'}^\alpha C_n^{\alpha*} |n'\rangle\langle n|. \quad (3.22)$$

$$S_{\sqrt{N}}^A = -\text{Tr}(\{\rho_\alpha\}_A \ln\{\rho_\alpha\}_A) = -\text{Tr}(\{\rho_\alpha\}_B \ln\{\rho_\alpha\}_B) = S_{\sqrt{N}}^B.$$

### 3.2.1. Sistema de dos espines

Sea un estado genérico  $|\psi\rangle$  y la base completa  $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$  de igual forma que en la ecuación (3.21)

$$|\psi\rangle = c_1 |\uparrow\uparrow\rangle + c_2 |\uparrow\downarrow\rangle + c_3 |\downarrow\uparrow\rangle + c_4 |\downarrow\downarrow\rangle.$$

La matriz de densidad del estado anterior viene dada por

$$\begin{aligned} \rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi| &= (c_1 |\uparrow\uparrow\rangle + c_2 |\uparrow\downarrow\rangle + c_3 |\downarrow\uparrow\rangle + c_4 |\downarrow\downarrow\rangle) (c_1^* \langle\uparrow\uparrow| + c_2^* \langle\uparrow\downarrow| + c_3^* \langle\downarrow\uparrow| + c_4^* \langle\downarrow\downarrow|) \\ &= |c_1|^2 |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + c_1 c_2^* |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + c_1 c_3^* |\uparrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + c_1 c_4^* |\uparrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \\ &\quad + c_2 c_1^* |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |c_2|^2 |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + c_2 c_3^* |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + c_2 c_4^* |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \\ &\quad + c_3 c_1^* |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + c_3 c_2^* |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + |c_3|^2 |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + c_3 c_4^* |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \\ &\quad + c_4 c_1^* |\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + c_4 c_2^* |\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + c_4 c_3^* |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + |c_4|^2 |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|. \end{aligned}$$

Así pues, podemos ver que el espacio de Hilbert se puede dividir en 2 partes iguales, la matriz de densidad reducida de la parte  $A$  es

$$\begin{aligned} \rho_A = \text{Tr} \rho_{AB} = \text{Tr} |\psi\rangle\langle\psi| &= {}_B\langle\uparrow| \left( |c_1|^2 |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + c_1 c_2^* |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + c_1 c_3^* |\uparrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + c_1 c_4^* |\uparrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \right. \\ &\quad + c_2 c_1^* |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |c_2|^2 |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + c_2 c_3^* |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + c_2 c_4^* |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \\ &\quad + c_3 c_1^* |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + c_3 c_2^* |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + |c_3|^2 |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + c_3 c_4^* |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \\ &\quad \left. + c_4 c_1^* |\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + c_4 c_2^* |\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + c_4 c_3^* |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + |c_4|^2 |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \right) |\uparrow\rangle_B \\ &\quad + {}_B\langle\downarrow| \left( |c_1|^2 |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + c_1 c_2^* |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + c_1 c_3^* |\uparrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + c_1 c_4^* |\uparrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \right. \\ &\quad + c_2 c_1^* |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |c_2|^2 |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + c_2 c_3^* |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + c_2 c_4^* |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \\ &\quad + c_3 c_1^* |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + c_3 c_2^* |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + |c_3|^2 |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + c_3 c_4^* |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \\ &\quad \left. + c_4 c_1^* |\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + c_4 c_2^* |\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + c_4 c_3^* |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + |c_4|^2 |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \right) |\downarrow\rangle_B \\ &= |c_1|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + c_1 c_3^* |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + c_3 c_1^* |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |c_3|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow| + |c_2|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + c_2 c_4^* |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + c_4 c_2^* |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |c_4|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \end{aligned}$$

La representación matricial de  $\rho_A$  para nuestro sistema de 2 espines es

$$\rho_A = \begin{pmatrix} |c_1|^2 + |c_2|^2 & c_1 c_3^* + c_2 c_4^* \\ c_3 c_1^* + c_4 c_2^* & |c_3|^2 + |c_4|^2 \end{pmatrix}.$$

Suponiendo que  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$  son reales

$$\rho_A = \begin{pmatrix} c_1^2 + c_2^2 & c_1 c_3 + c_2 c_4 \\ c_3 c_1 + c_4 c_2 & c_3^2 + c_4^2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz de densidad reducida son

$$\lambda_+ = \frac{1}{2} \left[ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + \sqrt{(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) - 4(c_1 c_4 - c_2 c_3)^2} \right].$$

$$\lambda_- = \frac{1}{2} \left[ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 - \sqrt{(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) - 4(c_1 c_4 - c_2 c_3)^2} \right].$$

La entropía de entrelazamiento queda de la forma

$$S_{vN}^A = - \sum_i \lambda_i \ln \lambda_i = -\lambda_+ \ln \lambda_+ - \lambda_- \ln \lambda_-. \quad (3.23)$$

Comparando los resultados obtenidos mediante la ecuación (3.23) con los obtenidos numéricamente mediante un programa realizado en FORTRAN 90 para los estados propios del hamiltoniano (1.11), usando los primeros 5 dígitos tenemos que

$E_\alpha$	$S_{vN}$ teórica	$S_{vN}$ numérica
-1.0415	$7.3282 \times 10^{-2}$	$7.3282 \times 10^{-2}$
-0.2452	0.6879	0.6879
0.2452	0.6879	0.6879
1.0415	$7.3282 \times 10^{-2}$	$7.3282 \times 10^{-2}$

Tabla 3.1:  $S_{vN}^\alpha$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para  $L = 12$  y valores  $J_z = 1.0$ ,  $h_x = 1.0$ ,  $\varepsilon = 0.2$  y  $\mu = 0.0$ , la primera columna indica los valores obtenidos haciendo uso de la Ec. (3.23), la segunda columna indica los valores obtenidos numéricamente.

La tabla 3.1 nos muestra que existe una correspondencia exacta entre los resultados obtenidos numéricamente y los obtenidos mediante la ecuación (3.23), esto es útil pues nos muestra que el código funciona correctamente.

### 3.3. Entropía de entrelazamiento para los estados propios del modelo de Ising con campo transversal y defecto

En la práctica una manera útil de calcular la matriz de densidad reducida de un sistema es mediante el producto tensorial del vector de estado y su dual con una matriz identidad de la dimensión del otro subsistema

$$\rho_A = \sum_m^{\dim(\mathcal{H}_B)} (I_A \otimes \langle m|_B) \rho (I_A \otimes |m\rangle_B). \quad (3.24)$$

Por lo que usando (3.22) se obtiene que la matriz de densidad reducida tiene la forma:

$$\{\rho_\alpha\}_A = \sum_m^{\dim(\mathcal{H}_B)} \sum_{n',n}^{\dim(\mathcal{H})} C_{n'}^\alpha C_n^{\alpha*} (I_A \otimes \langle m|_B) |n'\rangle \langle n| (I_A \otimes |m\rangle_B). \quad (3.25)$$

Al gráficar  $S_{vN}^\alpha$  dividido por  $S_{Máxima}$ , discutido en la introducción y en la ecuación (3.20), en función de las energías para distintas magnitudes de la perturbación  $\mu$  se obtienen los siguientes resultados.

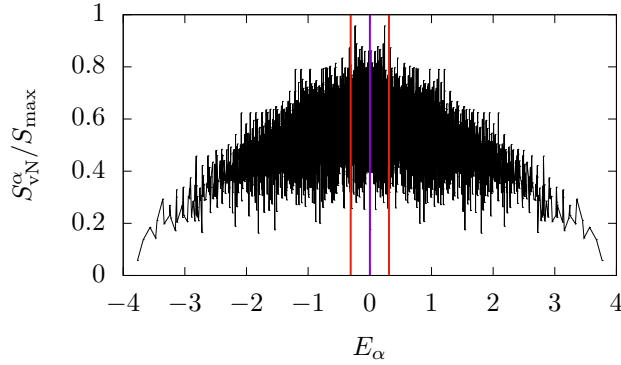


Figura 3.1:  $S_{vN}^\alpha$  contra  $E_\alpha$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para  $L = 12$  y valores  $J_z = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.2$  y  $\mu = 0.0$ . La línea morada denota el punto medio de los eigenvalores de energía  $\{E_\alpha\}$  que se encuentra en  $E_{N/2} = 0$ . Las líneas rojas son un intervalo del 10% de los eigenvalores a la izquierda y derecha de este centro.

En la figura 3.1 se observa que los valores más próximos de la entropía de entrelazamiento a  $S_{máxima}$ , esto es, para energías cercanas a cero el entrelazamiento de los espines es más fuerte, por otro lado aquellos que se encuentran en los extremos tienden a un valor mínimo, esto es, el entrelazamiento es más débil.

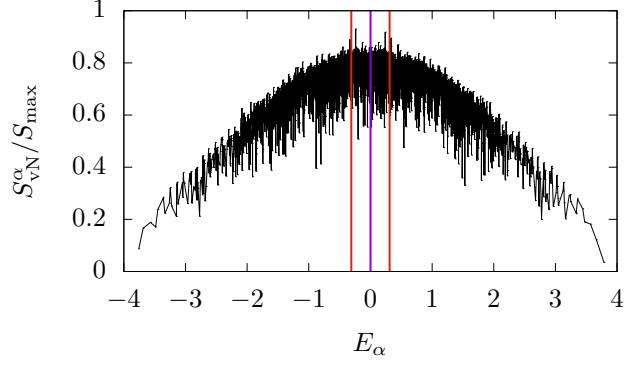


Figura 3.2:  $S_{vN}^\alpha$  contra  $E_\alpha$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para  $L = 12$  y valores  $J_z = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$ ,  $\epsilon = 0.2$  y  $\mu = 0.06$ . La línea morada denota el punto medio de los eigenvalores de energía  $\{E_\alpha\}$  que se encuentra en  $E_{N/2} = 0$ . Las líneas rojas son un intervalo del 10% de los eigenvalores a la izquierda y derecha de este centro.

De manera similar a la figura 3.1 en la figura 3.2 observa que la entropía de entrelazamiento en el centro del espectro es más parecida a  $S_{m\acute{a}xima}$ , pero en este observa una menor desviación y un valor promedio aún mayor.

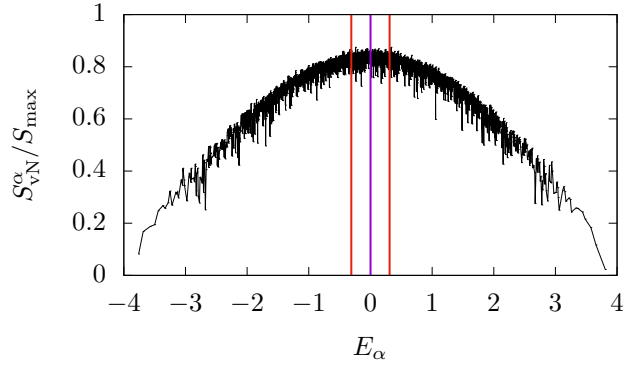


Figura 3.3:  $S_{vN}^\alpha$  contra  $E_\alpha$  para el modelo dado por el Hamiltoniano (1.11) para  $L = 12$  y valores  $J_z = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$ ,  $\epsilon = 0.2$  y  $\mu = 0.12$ . La línea morada denota el punto medio de los eigenvalores de energía  $\{E_\alpha\}$  que se encuentra en  $E_{N/2} = 0$ . Las líneas rojas son un intervalo del 10% de los eigenvalores a la izquierda y derecha de este centro.

Nuevamente en la figura 3.3 se observa que los resultados son similares a los de las figuras 3.1 y 3.2, en este caso la dispersión de los resultados menor y los estados en torno al centro del espectro son aún más parecidos a los de  $S_{m\acute{a}xima}$ .

Podemos tomar el 10 % de los valores a los extremos del centro de los  $\{E_n\}$  denotado por las barras de color rojo en las figuras 3.1, 3.2, 3.3, y promediarlos, definiendo  $\langle S_{vN} \rangle$  como

$$\langle S_{vN} \rangle = \sum_{n=2N/5}^{3N/5} S_{vN}(E_n) \quad (3.26)$$

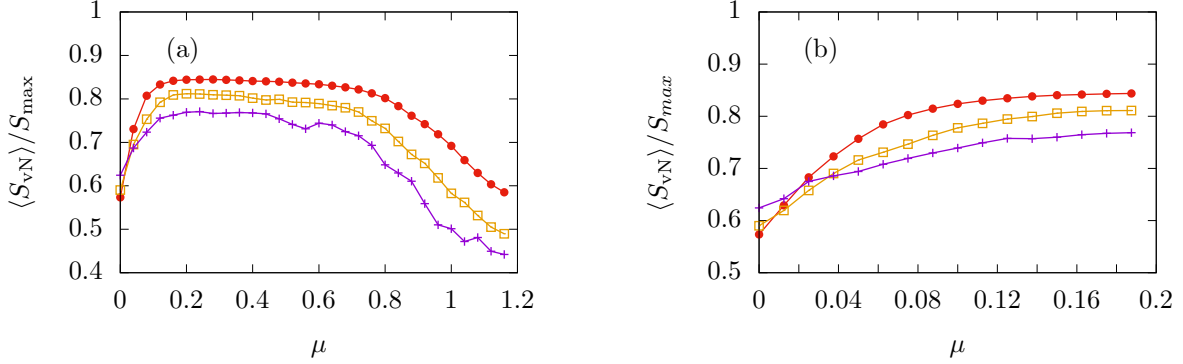


Figura 3.4:  $\langle S_{vN} \rangle / S_{max}$  contra  $\mu$  para el modelo dado por el hamiltoniano (1.11) para  $L = 8$  línea violeta,  $L = 10$  línea amarilla y  $L = 12$  línea roja. Los valores de los parámetros son  $J = 1.0$ ,  $h_x = 0.5$  y  $\varepsilon = 0.2$ .

En la figura 3.4(a) se observa que a pesar de que para  $\mu = 0.0$  el valor de  $S_{vN}/S_{max}$  para los estados alrededor del centro del espectro es cercana a 1, el valor promedio sigue siendo menor a aquellos con  $\mu > 0.0$ , en general, el valor promedio tiende a incrementar hasta alrededor de  $\mu \approx 0.2$  mantenerse en torno a un valor máximo y en  $\mu \approx 0.9$  volver a decrecer de manera análoga a  $\langle \tilde{r} \rangle$  y  $\langle PR \rangle / PR(GOE)$ . Se observa que valor promedio de  $S_{vN}/S_{max}$  es dependiente del tamaño del sistema, para tamaños más pequeños del sistema  $S_{vN}/S_{max}$  tiene un valor promedio menor pero este análisis requiere de tamaños mayores.

En la figura 3.4(b) se observa que  $\langle S_{vN} \rangle / S_{max}$  crece hasta alcanzar su valor máximo, el valor para  $\mu = 0$  en  $L = 8$  es mayor que los del resto pero esto puede deberse a un efecto de tamaño finito. Igual que en la figura 3.4(a) se observa que el valor promedio tiende a ser menor para tamaños más pequeños del sistema.

Al introducir una perturbación a la mitad de la cadena el entrelazamiento bipartita del sistema incrementa su valor, seguir aumentando el valor de la perturbación va aproximando más el promedio a  $S_{n\acute{a}xima}$ .



# Conclusión

El objetivo de esta tesis fue estudiar la sensibilidad a perturbaciones de las propiedades espectrales, de estados propios y entrelazamiento de sistemas unidimensionales de muchos cuerpos, particularmente en el de un sistema de espín 1/2 susceptible de ser estudiado experimentalmente. En el segundo y tercer capítulo se estudiaron la estadística de niveles, la estructura de estados propios y entropía de entrelazamiento para distintas magnitudes de una perturbación con tamaños de hasta 12 partículas.

La estadística de niveles nos permitió discriminar las regiones por las que el sistema transita, mediante la distribución de las razones entre niveles energéticos consecutivos,  $P(r)$ . Se observó que cuando la magnitud de la perturbación se incrementa el sistema transita de un régimen integrable a uno caótico. Lo anterior se verificó posteriormente mediante la relación del espaciamiento entre niveles consecutivos  $\langle \tilde{r}_n \rangle$ . Además, se notó que para valores lo suficientemente grandes de la perturbación el sistema se volvió nuevamente a un régimen integrable.

Se estudió cómo la magnitud perturbación modifica la estructura de estados propios. Usando la razón de participación se cuantificó el número de elementos de la base que participan en dicha estructura correspondiente a distintos valores de energía. Se realizaron promedios en torno al centro del espectro energético y se compararon con los resultados de la teoría de matrices aleatorias. Se encontró que al incrementar la magnitud de la perturbación dicha estructura se ve modificada, si bien, en general los estados se encuentran más localizados para energías en los extremos y extendidos para energías en torno al centro del espectro energético. Para valores de la perturbación más próximos a aquellos en los que la estadística de niveles muestra una región integrable los valores de la razón de participación se encuentran más dispersos que para aquellos valores en los que se encontró que se el sistema está en una región caótica. Además el promedio de la razón de participación en torno al centro del espectro comprobó que al incrementar la perturbación el sistema transita de una región integrable a una caótica y para magnitudes lo suficientemente grandes vuelve a la región integrable.

Finalmente, cuantificado por la entropía de entrelazamiento, se analizó el rol de la perturbación en el entrelazamiento de los estados propios del sistema, se realizaron promedios en torno al centro del espectro energético y se compararon con el máximo entrelazamiento para un sistema de  $L$  espines. Se encontró que para todos los casos el entrelazamiento es máximo para los estados en torno al centro energético y mínimo para los extremos. Sin embargo al incrementar la magnitud de la perturbación, de igual manera que la razón de participación, para valores de la perturbación más próximos a aquellos en los que la estadística de niveles muestra una región integrable los valores de la entropía de entrelazamiento se encuentran más dispersos que para aquellos que se encuentran en una región caótica. El promedio de la entropía de entrelazamiento en torno al centro del espectro mostró que al incrementar la perturbación el entrelazamiento tiende a crecer y aproximarse al máximo entrelazamiento, mientras que para magnitudes lo suficientemente grandes decrece nuevamente.

Se concluye que los enfoques de teoría de matrices aleatorias y teoría de la información cuántica son equivalentes en cuanto a los regímenes bajo los cuales se puede encontrar el sistema, encontrando una equivalencia entre las cantidades  $\langle \tilde{r} \rangle$ ,  $\langle PR \rangle / PR_{\text{GOE}}$  y  $\langle S_{\text{vN}} \rangle / S_{\text{máxima}}$  para los estados propios del hamiltoniano, observando que para sistemas integrables el promedio de los estados tiende a encontrarse localizados y a tener un entrelazamiento menor mientras que para sistemas caóticos el promedio de los estados se encuentra extendido y el entrelazamiento es mayor

# Apéndice A

## Demostración de la ecuación (3.9)

Sea  $\rho_A$  una matriz de densidad formada por una mezcla estadística de estados  $\{|\psi_i\rangle\}$  elementos del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_A$ , de tal manera que se tiene que

$$\rho_A = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (\text{A.1})$$

Dada la matriz de densidad  $\rho_A$  es posible introducir un sistema  $R$  y definir un estado puro  $|\psi\rangle$  para el estado conjunto  $A \otimes R$ , con  $\rho_{AR}$  la matriz de densidad del estado puro, tal que  $\rho_A = \text{tr}_R \rho_{AR}$ . La demostración se obtiene al escribir  $|\psi\rangle$  en términos de las bases  $\{\psi_i\}$  y  $\{a_i\}$  elementos  $\mathcal{H}_A$  y  $R$  respectivamente, para este caso los términos  $\{a_i\}$  se escogerán elementos de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\psi_i\rangle \otimes |a_i\rangle. \quad (\text{A.2})$$

al proceso anterior se le conoce como purificación[38].

Por el teorema de descomposición de Schmidt, existen  $\{|\Psi_i\rangle\}$  y  $\{|A_i\rangle\}$  dos conjuntos ortonormales miembros del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  y  $\{\lambda_i\}$  un conjunto de números reales no negativos, tales que (A.2) puede escribirse como

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |\Psi_i\rangle \otimes |A_i\rangle. \quad (\text{A.3})$$

Como (A.2) y (A.3) son purificaciones de la misma matriz de densidad tenemos que  $\rho_A$  se escribe

$$\sum_i \sum_j \sqrt{p_i p_j} |\psi_i\rangle \otimes |a_i\rangle \langle a_j| \otimes \langle\psi_j| = \rho_A = \sum_i \sum_j \sqrt{\lambda_i \lambda_j} |\Psi_i\rangle \otimes |A_i\rangle \langle A_j| \otimes \langle\Psi_j|. \quad (\text{A.4})$$

Trazando (A.4) sobre alguna base del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_A$ , se escribe a  $\rho_A$  en forma no diagonal

$$\sum_i \sum_j \sqrt{p_i p_j} \langle\psi_j|\psi_i\rangle |a_i\rangle\langle a_j| = \sum_k \lambda_k |A_k\rangle\langle A_k|. \quad (\text{A.5})$$

De modo que proyectando  $\rho_A$  en  $|A_i\rangle$  de (A.5) se obtiene la ecuación de eigenvalores

$$\left( \sum_i \sum_j \sqrt{p_i p_j} \langle\psi_j|\psi_i\rangle |a_i\rangle\langle a_j| \right) |A_k\rangle = \rho_A |A_k\rangle = \lambda_k |A_k\rangle\langle A_k|. \quad (\text{A.6})$$

De tal manera que  $\lambda_i$  es un valor propio de  $\rho_A$  con vector propio  $|A_i\rangle$ .

Trazando (A.4) ahora sobre alguna base de  $\mathbb{R}^n$  obtenemos la forma diagonal de la matriz de

densidad

$$\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \rho_A = \sum_i \lambda_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|. \quad (\text{A.7})$$

Aplicando una función analítica  $f(x)$  a  $\rho_A$ , tomando su representación en serie de Taylor y después tomando la traza para el lado derecho de la ecuación se obtiene

$$\text{Tr } f(\rho_A) = \sum_k f(\lambda_k). \quad (\text{A.8})$$

Tomando a  $f(x) = -x \ln x$  y  $\{\lambda_i\}$  un conjunto de valores propios de  $\rho_A$  se llega a la ecuación del texto principal.

$$S_{VN}^A = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i. \quad (\text{A.9})$$

Los valores propios  $\lambda_k$  representan la probabilidad de que el estado  $|\psi\rangle$  sea descrito por el estado propio  $|\Psi_k\rangle \otimes |A_k\rangle$  en (A.3), de modo que  $|\psi\rangle$  se encuentra maximamente entrelazado si cada estado tiene la misma probabilidad de colapso,  $\lambda = 1/n$  [37]. Por lo tanto el entrelazamiento máximo queda cuantificado por

$$S_{\text{máxima}} = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n}. \quad (\text{A.10})$$

Para un sistema compuesto por  $L = 2k$  espines

$$S_{\text{máxima}} = -\sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{2k} \ln \frac{1}{2k} = k \ln 2. \quad (\text{A.11})$$

# Bibliografía

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47(10):777, 1935.
- [2] Peter Mittelstaedt. *EPR-Problem (Einstein-Podolsky-Rosen Problem)*, pages 209–211. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [3] J. S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1(3):195, 1964.
- [4] S. J Freedman and J. F. Clauser. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 28(14):938, 1972.
- [5] Entangled states – from theory to technology. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/press-release/>. Accessed: 2013-05-23.
- [6] J. Rodríguez-Lima and L. M. Arévalo Aguilar. Collapses and revivals of entanglement in phase space in an optomechanical cavity. *TEPJ Plus*, 135(5):1–25, 2020.
- [7] L.M. Aguilar. Single-particle entanglement gives rise to truly nonlocal effects like single-particle steering. *arXiv preprint arXiv:2011.08286*, 2020.
- [8] E. J. Torres-Herrera and L.F. Santos J. Karp, M. Távora. Realistic many-body quantum systems vs. full random matrices: Static and dynamical properties. *Entropy*, 18(10):359, 2016.
- [9] L. Vidmar and M. Rigol. Entanglement entropy of eigenstates of quantum chaotic Hamiltonians. *Phys. Rev. Lett.*, 119(22):220603, 2017.
- [10] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1895–1899, Mar 1993.
- [11] Charles H. Bennett and Stephen J. Wiesner. Communication via one- and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states. *Phys. Rev. Lett.*, 69:2881–2884, Nov 1992.
- [12] Artur K. Ekert. Quantum cryptography based on bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 67:661–663, Aug 1991.
- [13] M. L. Mehta. *Random matrices*. Elsevier, 2004.
- [14] Greg W Anderson, Alice Guionnet, and Ofer Zeitouni. *An introduction to random matrices*. Number 118. Cambridge university press, 2010.
- [15] T. Guhr, A. Müller-Groeling, and H. A. Weidenmüller. Random-matrix theories in quantum physics: common concepts. *Phys. Rep.*, 299(4-6):189–425, 1998.
- [16] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett.*, 52(1):1, 1984.
- [17] Berry Michael Victor and Tabor M. Level clustering in the regular spectrum. *Royal Society publishing*, 356:375–395, 1977.

- [18] J. B. French and S.S.M. Wong. Validity of random matrix theories for many-particle systems. *Phys. Lett. B*, 33(7):449–452, 1970.
- [19] S. W. McDonald and A. N. Kaufman. Spectrum and eigenfunctions for a hamiltonian with stochastic trajectories. *Phys. Rev. Lett.*, 42(18):1189, 1979.
- [20] G. Casati, F. Valz-Gris, and I. Guarneri. On the connection between quantization of nonintegrable systems and statistical theory of spectra. *Lett. Nuovo Cimento*, 28(8):279–282, 1980.
- [21] M. C. Gutzwiller. Quantum chaos. *Sci. Am.*, 266(1):78–85, 1992.
- [22] Kira Joel, Davida Kollmar, and Lea F. Santos. An introduction to the spectrum, symmetries, and dynamics of spin-1/2 Heisenberg chains. *Am. J. Phys.*, 81(6):450–457, 06 2013.
- [23] B. A. Cipra. An introduction to the ising model. *The American Mathematical Monthly*, 94(10):937–959, 1987.
- [24] I. Bloch, L. Dalibard, and W. Zwerger. Many-body physics with ultracold gases. *Rev.Mod. Phys.*, 80(3):885, 2008.
- [25] J. Zhang, G. Pagano, P. W. Hess, A. Kyprianidis, P. Becker, H. Kaplan, A. V Gorshkov, Z-X Gong, and C. Monroe. Observation of a many-body dynamical phase transition with a 53-qubit quantum simulator. *Nature*, 551(7682):601–604, 2017.
- [26] Hao Li, Yong-Yi Wang, Yun-Hao Shi, Kaixuan Huang, Xiao-Hui Song, Gui-Han Liang, Zheng-Yang Mei, Bozhen Zhou, He Zhang, Jia-Chi Zhang, Shu Chen, S. Zhao, Ye Tian, Zhan-Ying Yang, Zhongcheng Xiang, Kai Xu, Dongning Zheng, and Heng Fan. Observation of critical phase transition in a generalized aubry-andré-harper model with superconducting circuits. *npj Quantum Information*, 9, 04 2023.
- [27] Pai Peng, Bingtian Ye, Norman Yao, and Paola Cappellaro. Exploiting disorder to probe spin and energy hydrodynamics. 09 2022.
- [28] Dominik Janzing. *Entropy of Entanglement*, pages 205–209. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [29] B. Barbara. Louis Néel: His multifaceted seminal work in magnetism. *C. R. Phys.*, 20(7-8):631–649, 2019.
- [30] J. von Neuman and E. Wigner. Uber merkwürdige diskrete Eigenwerte. Uber das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen. *Phys. Z.*, 30:467–470, January 1929.
- [31] L. F. Santos, F. Pérez-Bernal, and E. J. Torres-Herrera. Speck of chaos. *Phys. Rev. Res.*, 2(4):043034, 2020.
- [32] tparker (<https://physics.stackexchange.com/users/92058/tparker>). Time reversal symmetry of transverse field ising model. Physics Stack Exchange. URL:<https://physics.stackexchange.com/q/228864> (version: 2016-01-11).
- [33] YY. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud, and G. Roux. Distribution of the ratio of consecutive level spacings in random matrix ensembles. *Phys. Rev. Lett.*, 110(8):084101, 2013.
- [34] Xiaodong Zhang, Weihua Zhang, Jiongning Che, and Barbara Dietz. Experimental test of the rosenzweig-porter model for the transition from poisson to gaussian unitary ensemble statistics. *Phys. Rev. E*, 108:044211, Oct 2023.
- [35] N. Ullah. Invariance hypothesis and higher correlations of Hamiltonian matrix elements. *Nucl. Phys.*, 58:65–71, 1964.
- [36] L. Landau. Das dämpfungsproblem in der wellenmechanik. *Z. Physik*, 45(5):430–441, 1927.

- [37] Anaya-Contreras J. A. *Descomposición de Schmidt y su aplicación en el cálculo de Von Neuman para mezclas estadísticas de estados*. PhD thesis, Escuela superior de física y matemáticas. Instituto Politécnico Nacional, julio 2020.
- [38] Chuang I. Nielsen, M. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.