

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA**

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Postgrado en Ciencias Matemáticas

**ESTABILIDAD DE PROCESOS ITERATIVOS EN
ESPACIOS MÉTRICOS**

TESIS

Que para obtener el grado de:
Doctor en Ciencias Matemáticas

Presenta:

M.C. Mauricio Ramírez Juárez

Directores de tesis:

Dr. Arnoldo Bezanilla López

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

Puebla, Pue., diciembre 2015.



BUAP

DR. JOSÉ ENRIQUE BARRADAS GUEVARA
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

MAURICIO RAMÍREZ JUÁREZ

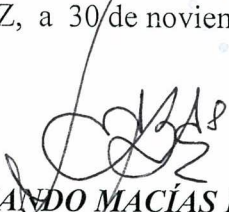
estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 30 de octubre de 2015, con la tesis titulada:

***“ESTABILIDAD DE PROCESOS ITERATIVOS EN ESPACIOS
MÉTRICOS”***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.

H. Puebla de Z, a 30 de noviembre de 2015


DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO
COORDINADOR DEL POSTGRADO
EN MATEMÁTICAS.



A mi familia

Agradecimientos

Primero, agradezco a Dios por iluminarme en el camino para llegar hasta estos momentos.

Agradezco a mi familia el apoyo moral que me ha proporcionado para culminar satisfactoriamente esta etapa.

Agradezco de manera especial al Dr. Arnoldo Bezanilla López, por la dirección de esta tesis, por su paciencia y por ser mi guía hasta la conclusión de este trabajo. Sobre todo le agradezco la amistad y la confianza que me ha brindado.

Al Dr. Francisco Javier Mendoza Torres agradezco su apoyo y disponibilidad durante el periodo y hasta la etapa final.

Gracias a los doctores que fungieron como jurado. Dr. Slavisa Djordjevic, Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros, Dra. María Guadalupe Morales Macías, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, Dr. Pedro García Juárez, gracias por la revisión del trabajo, por sus valiosos comentarios y sus correcciones los cuales contribuyeron a mejorar este trabajo de tesis.

Gracias también a las personas del trabajo administrativo, en especial a María Teresa Rivera Velázquez (Tere) por su amabilidad y atención.

Gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme otorgado la beca económica para realizar mis estudios de doctorado.

Mauricio Ramírez Juárez,
FCFM, BUAP.
Puebla, Pue., Noviembre 2015.

Introducción

La teoría de punto fijo se ha utilizado para resolver diversos problemas y por esta razón, esta área de investigación se ha vuelto un campo de estudio muy activo. Recordemos por ejemplo al teorema del punto fijo de Banach que prueba la existencia de un único punto fijo para las contracciones y además proporciona un método para aproximarlos con cierto margen de error previamente fijado. Este resultado constituye un método numérico que puede ayudar a dar solución a problemas específicos por ejemplo en ecuaciones lineales algebraicas, ecuaciones integrales, ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales parciales, etc. (ver [29]).

Esta teoría no sólo se limita a averiguar que aplicaciones tienen o no puntos fijos y su unicidad. Los métodos de aproximación o procesos iterativos, su velocidad de convergencia al punto fijo, y la equivalencia entre ellos son problemas en los que muchos autores han trabajado bastante. Este escrito se enfoca principalmente en estabilidad de procesos iterativos en espacios métricos.

La motivación para estudiar la estabilidad de procesos iterativos se encuentra en el siguiente razonamiento: Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función con un único punto fijo p . Sea $x_0 \in X$ y sea $x_{n+1} = f(T, x_n)$ el proceso iterativo que en teoría genera la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la cual converge a p . En la práctica no siempre puede obtenerse $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sino sólo una sucesión aproximada $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$. La sucesión $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ podría hallarse del siguiente modo: Tomamos un punto en X , llamémosle x_0 . Ahora quisiéramos obtener $x_1 = f(T, x_0)$, sin embargo por errores de redondeo, o discretización del problema sólo obtenemos \tilde{x}_1 que es una aproximación a x_1 . Para calcular x_2 , ya que conocemos $\tilde{x}_1 \approx x_1$, evaluamos $f(T, \tilde{x}_1)$ y obtendremos \tilde{x}_2 . Considerando que $x_2 \approx \tilde{x}_2$, procedemos del mismo modo para hallar una aproximación de x_3 . De este modo obtenemos una sucesión $\{\tilde{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ que es una aproximación a $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Como se puede ver, en cada iteración se generan errores, de modo que cabe preguntarse ¿Converge \tilde{x}_n a p como lo hace x_n ?

De acuerdo a [22], dada una sucesión arbitraria $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ en X ,

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_{n+1}, f(T, y_n)) = 0 \text{ implica que } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p,$$

entonces el proceso iterativo $x_{n+1} = f(T, x_n)$ es llamado “ T -estable”. Por lo tanto si $f(T, x_n)$ es T -estable, entonces $\{\tilde{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge al punto fijo p de T siempre que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\tilde{x}_{n+1}, f(T, \tilde{x}_n)) = 0$. De este modo podemos ver lo importante que es, desde el punto de vista práctico, conocer si un proceso iterativo que conduce a un punto fijo es T -estable. A través del tiempo, se ha hecho un estudio amplio sobre estabilidad de procesos iterativos en espacios métricos y han surgido otras definiciones de este concepto.

Además de los espacios métricos, otro tipo de espacios en los que la teoría de punto fijo se ha estudiado de manera activa es en los *espacios métricos difusos*. Desde el primer resultado de punto fijo en este tipo de espacios en 1988 (ver [18]), hasta la fecha, la teoría de punto fijo se ha estudiado intensamente en busca de clases de funciones con punto fijo y métodos de aproximación. Sin embargo, hasta el momento no hemos encontrado en la literatura algún resultado que trate el tema de la estabilidad de procesos iterativos en este tipo de espacios.

El tema principal que tratamos en este trabajo de tesis es la estabilidad de procesos iterativos. Por un lado, la estudiaremos en *espacios métricos (clásicos)* donde abordamos distintos tipos de estabilidad y por otro lado, proporcionamos una definición de estabilidad en *espacios métricos difusos* y realizamos un estudio alrededor de esta. Además, en espacios métricos hacemos una recopilación de distintas condiciones contractivas y proceso iterativos encontrados en la literatura con el fin de dar una idea de la manera en que han evolucionado o se han generalizado a través del tiempo. Los resultados originales de la tesis se encuentran en el Capítulo 3 y las Secciones 4.3.2 y 4.4 del Capítulo 4.

Antecedentes

Hasta donde sabemos, el primer resultado sobre estabilidad de procesos iterativos, en el sentido del que hemos hablado, se debe a A. Ostrovski, quien en 1964, prueba para una sucesión arbitraria $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ de un espacio métrico completo (X, d) , que si $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_{n+1}, Ty_n) = 0$, donde $T : X \rightarrow X$ es una contracción, entonces $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge al punto fijo de T (ver [22]). En 1988, Harder y Hicks establecieron en [22] la definición formal de estabilidad de procesos iterativos. A partir de esto y hasta la fecha diversos autores han adoptado esta definición y han obtenido numerosos resultados. Algunos de ellos como Rhoades [55], Osilike

[48], Olatinwo, Owajori y Imoru [42], Olatinwo [45] y Olatinwo [44] utilizaron condiciones contractivas que se han ido generalizando. En 2010 Bosede y Rhoades [8] utilizaron una condición que supone la existencia de un punto fijo, la cual simplifica notablemente los cálculos al probar resultados de estabilidad.

Al mismo tiempo, autores como Kirk [26] en 1969, Isikawa [24] en 1974, Rhoades y Soltuz [56] en 2004, Olatinwo e Imoru [41] en 2008 y Gursoy, Karakaya y Rhoades [20] en el 2014, entre otros, han trabajado en teoremas de punto fijo con procesos iterativos cada vez más generales. En 2005 Singh, Bhatnagar y Mishra [65] fijaron su atención en procesos iterativos actualmente conocidos como *de tipo Jungck* los cuales tiene la forma $Sx_{n+1} = f(T, x_n)$. Estos autores establecieron también una definición de estabilidad para estos procesos basada en la definición de Harder y Hicks. Algunas generalizaciones de este tipo de iteración las veremos en la Sección 1.1.

En cuanto a los espacios métricos difusos, la teoría comienza con el concepto de conjunto difuso que fue introducido en 1965 por Zadeh [76]. Un conjunto difuso se define a partir de un conjunto X , y una función $\mu : X \rightarrow [0, 1]$ que asigna a cada elemento $x \in X$ un grado de pertenencia al conjunto (ver Definición 4.1.1 en esta tesis). Es común llamarle conjunto difuso a la función μ , ya que esta caracteriza a dicho conjunto. Por lo tanto, un conjunto difuso lo entenderemos como una función con dominio un conjunto X y contradominio el intervalo $[0, 1]$. La motivación de este concepto se halla en el lenguaje cotidiano que utilizamos, en el cual de manera frecuente consideramos clases de objetos que no tienen bien definido un criterio de pertenencia. Por ejemplo al referirnos a “café caliente”, tenemos preferencias distintas respecto a la temperatura de este líquido. El margen de temperatura en el cual un líquido se puede considerar caliente es muy amplio, de modo que recurrimos a expresiones como “muy caliente”, “tibio” o “frío”. Aun así, estas palabras no resuelven totalmente el problema, pues, ¿en que momento caliente pasa a muy caliente o a tibio? Entonces es necesario considerar distintos grados de temperatura.

En 1975, Kramosil y Michálek [28] definieron por primera vez un espacio métrico difuso como la terna $(X, M, *)$, donde X es un conjunto no vacío, $*$ es una operación binaria continua en $[0, 1]$ que es además conmutativa, asociativa, que posee como elemento neutro al 1, es monótona (en el sentido de que si $\alpha \leq \alpha'$ y $\beta \leq \beta'$, entonces $\alpha * \beta \leq \alpha' * \beta'$) y M es un conjunto difuso sobre $X^2 \times [0, \infty)$ que satisface las siguientes propiedades para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $t, s > 0$,

$$(KM-1) \quad M(x, y, 0) = 0;$$

$$(KM-2) \quad M(x, y, t) = 1, \forall t > 0 \text{ si y sólo si } x = y;$$

$$(KM-3) \quad M(x, y, t) = M(y, x, t),$$

- (KM-4) $M(x, y, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ es continua por la izquierda;
 (KM-5) $M(x, z, t + s) \geq M(x, y, t) * M(y, z, s)$.

Se puede interpretar a $M(x, y, t)$ como el grado de cercanía entre x e y respecto a t , y en tal caso se se puede relacionar a $M(x, y, t) = 0$ con la idea de que x y y se encuentran infinitamente alejados, y a $M(x, y, t) = 1$ con $x = y$. Debido a la existencia de otras definiciones de espacio métrico difuso, nos referiremos a la de Kramosil y Michálek como *KM-espacio métrico difuso*.

En 1988 Grabiec [18] dio una definición de sucesión de Cauchy y una de espacio métrico difuso completo (Definición 4.2.5 en esta tesis). Con estas definiciones, estableció el primer resultado de punto fijo.

En 1994 George y Veeramani [17] modificaron los axiomas (KM-1), (KM-2) y (KM-4) dando así una definición distinta de espacio métrico difuso y probaron que a cualquier espacio métrico (clásico) se le puede asociar un espacio métrico difuso y a este espacio métrico difuso lo denominaron “estándar”. Modificaron también la definición de sucesión de Cauchy de Grabiec y probaron que cada espacio métrico difuso que proviene de un espacio métrico completo (en el sentido clásico) es también completo en el sentido de su nueva definición.

Existe por supuesto un extenso material bibliográfico sobre teoría de punto fijo en este tipo de espacios. Se ha trabajado bastante en existencia y unicidad de puntos fijos y como en el caso clásico, se han estudiado métodos de convergencia y condiciones contractivas. Sin embargo, de acuerdo a nuestra investigación, hasta la fecha no se ha trabajado en estabilidad.

Contenido General del trabajo

1. Se presenta un panorama del estado actual de las investigaciones en espacios métricos en el que se exponen:
 - a) Los procesos iterativos más usuales así como el proceso de generalización que se ha observado en algunos de ellos.
 - b) La evolución del concepto de contracción.
 - c) Distintas definiciones de estabilidad que han surgido a través del tiempo partiendo de la T -estabilidad.
2. Se estudian algunas relaciones entre distintos tipos de estabilidad.
3. Se estudian, además de la T -estabilidad, otros tipos de estabilidad de procesos iterativos en espacios métricos para los cuales aun no se les conoce esta propiedad.
4. Se aborda el estudio de la estabilidad de procesos iterativos con punto fijo en espacios métricos difusos.

Estructura de la Tesis

Esta tesis consta de una introducción y cuatro capítulos. Los Capítulos 1 y 2 además de exponer el estado del arte en espacios métricos, sirven también para establecer conceptos y resultados necesarios para el desarrollo de los demás capítulos. En el Capítulo 3 se exponen nuestros resultados de estabilidad en espacios métricos y en el Capítulo 4 se aborda la teoría de punto fijo en espacios métricos difusos y se establecen también nuestros resultados sobre este. Finalmente se proporciona una serie de conclusiones y se lista la bibliografía que se ha utilizado en el desarrollo del presente trabajo. A continuación se describe el contenido cada uno de los capítulos.

En el Capítulo 1 exponemos distintos procesos iterativos y condiciones contractivas existentes en la bibliografía, así como algunos resultados y definiciones que utilizamos en capítulos posteriores a este.

En el Capítulo 2 hacemos un estudio de distintos tipos de estabilidad que han aparecido en la literatura y adicionalmente exponemos algunos teoremas encontrados en la literatura que consideramos representativos. Esto último con la intención de dar una idea general del tipo de resultados sobre el tema además de servir como referencia para los resultados del capítulo siguiente.

El Capítulo 3 corresponde a resultados que hemos obtenido sobre estabilidad en espacios métricos. En la Sección 3.1 introducimos dos nuevos procesos iterativos y damos la demostración de la estabilidad, casi estabilidad y casi estabilidad sumable de estos procesos. En la Sección 3.2 damos resultados de γ -estabilidad para el proceso iterativo de Picard y el proceso iterativo de Mann asociados a aplicaciones que satisfacen algunas condiciones que estudiamos en la Sección 1.2.

Por último, en el Capítulo 4 estudiamos la teoría de punto fijo en espacios métricos difusos. En las Secciones 4.1 y 4.2 damos información introductoria sobre este tipo de espacios así como algunos resultados que sirven como antecedente para el desarrollo de las últimas dos secciones. En la Sección 4.3 establecemos nuestros resultados sobre existencia, convergencia y unicidad de puntos fijos, y en la Sección 4.4 proporcionamos una definición de estabilidad en espacios métricos difusos en el mismo sentido que la T -estabilidad y obtenemos varios resultados.

Nota: En el desarrollo del trabajo, especialmente en los Capítulos 3 y 4, aparecerá este cuadrado blanco \square . Este símbolo indica el final de la demostración del resultado que ahí se establece.

Indice

Indice	VI
1. Preliminares	1
1.1. Procesos Iterativos	1
1.2. Funciones contractantes o contracciones	8
1.3. Resultados y definiciones adicionales	19
2. Estabilidad de procesos iterativos	21
2.1. T-Estabilidad	22
2.2. Casi T-Estabilidad	25
2.3. Casi T-Estabilidad Sumable	27
2.4. T-Estabilidad débil	29
2.5. γ -Estabilidad	30
3. Resultados obtenidos en espacios métricos	33
3.1. Resultados sobre T -estabilidad	33
3.2. Resultados sobre γ -estabilidad	40
4. Estabilidad y convergencia de procesos iterativos en espacios métricos difusos.	48
4.1. Introducción y preliminares	48
4.2. Espacios métricos difusos y teoremas de punto fijo	51
4.2.1. Contractividad en espacios métricos difusos	56
4.2.2. Teoremas de punto fijo	58
4.3. Resultados obtenidos sobre convergencia	58
4.3.1. Resultados previos	59
4.3.2. Resultados de convergencia y unicidad	61
4.4. Resultados obtenidos sobre estabilidad	65
4.4.1. Resultados previos	67
4.4.2. Resultados nuevos sobre estabilidad	71
Conclusiones	80
Bibliografía	83

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo exponemos de manera breve, algunos conceptos, términos y propiedades que son básicos para el desarrollo de los siguientes capítulos del trabajo. La parte principal del capítulo son las Secciones 1.1 y 1.2 donde mostramos la manera en que se han generalizado los procesos iterativos y las condiciones contractivas a través del tiempo.

1.1. Procesos Iterativos

El concepto de proceso iterativo es básico en el desarrollo de este trabajo. A continuación proporcionamos su definición.

Definición 1.1.1. Un *proceso iterativo* en un espacio métrico es un procedimiento para generar una sucesión a partir de un punto inicial dado y una o varias funciones.

Una representación simbólica de este concepto puede ser la siguiente. Consideremos un conjunto no vacío Y y un espacio métrico (X, d) . Definamos $\mathcal{X} = \{T : Y \rightarrow X \mid T \text{ es función}\}$. Sean $S, T_1, T_2, \dots, T_k \in \mathcal{X}$ con S inyectiva. Dado $x_0 \in Y$, denotaremos al proceso iterativo que genera la sucesión $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ por

$$Sx_{n+1} = f(T_1, T_2, \dots, T_k, x_n), \quad (1.1.1)$$

con el entendido de que $f : \underbrace{\mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X}}_{k\text{-veces}} \times Y \rightarrow X$ es una función tal que

$f(T_1, T_2, \dots, T_k, x) \in S(Y)$ para cada $x \in Y$. Observe que esta manera de denotar a los procesos iterativos, indica como obtener la sucesión $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$.

En efecto,

- Tomamos arbitrariamente $x_0 \in Y$ y calculamos $f(T_1, T_2, \dots, T_k, x_0)$.
- Ya que $f(T_1, T_2, \dots, T_k, x_0) \in S(Y)$ y S es inyectiva, entonces existe un único elemento $x_1 \in Y$ tal que $Sx_1 = f(T_1, T_2, \dots, T_k, x_0)$.
- Ahora tomamos x_1 y calculamos $f(T_1, T_2, \dots, T_k, x_1) \in S(Y)$.
- Nuevamente existe un único $x_2 \in Y$ tal que $Sx_2 = f(T_1, \dots, T_k, x_1)$.

De este modo obtenemos la sucesión $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Un caso especial es cuando $Y = X$, S es la identidad en X y sólo interviene una función T . Estos procesos iterativos tienen la forma $x_{n+1} = f(T, x_n)$, uno muy conocido y tal vez el más simple, es el proceso iterativo de Picard. Definimos este proceso en términos actuales como el de espacio métrico.

Definición 1.1.2. (Picard [50], 1890). Sean X un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función dada. Sea $x_0 \in X$ un punto arbitrario. Entonces, la *iteración de Picard* o *proceso iterativo de Picard* está definida por

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n \in \mathbb{Z}^+ . \quad (1.1.2)$$

Este método, también conocido como el método de las aproximaciones sucesivas, fue desarrollado por el matemático francés M. Émile Picard para obtener una solución a una ecuación diferencial. Como es bien sabido este proceso fue también utilizado por Banach en 1922 en el conocido teorema del punto fijo de Banach (Kirk [27]).

En general, para funciones no expansivas, (Definición 1.2.12 en esta tesis) la iteración de Picard no converge al punto fijo de T como sucede con las contracciones de Banach (Definición 1.2.1 en esta tesis). Sin embargo, cuando tal punto existe, otros métodos de aproximación pueden ser utilizados, una opción es el siguiente proceso iterativo.

Definición 1.1.3. (Krasnoselskii, 1955; ver [26]). Sean X un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ una función dada. Dado $x_0 \in X$, el proceso iterativo definido por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}Tx_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)x_n + \frac{1}{2}Tx_n, \quad (1.1.3)$$

lo llamaremos *proceso iterativo de Krasnoselskii*.

Krasnoselskii en 1955 demostró que si K es un subconjunto cerrado convexo de un espacio de Banach uniformemente convexo y T es una función definida en K que toma valores en un subconjunto compacto de K , entonces bajo ciertas condiciones para T , el proceso iterativo definido

por (1.1.3) converge a un punto fijo de T . Posteriormente, Schaefer en 1957 observa que $\frac{1}{2}$ puede ser reemplazado por cualquier $a \in (0, 1)$ y el resultado se mantiene (citado por Kirk [26]).

Definición 1.1.4. (Schaefer, 1957; ver [26]). Sean X un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ una función. Sea $x_0 \in X$, el *proceso iterativo de Schaefer* está definido por

$$x_{n+1} = (1 - a)x_n + aTx_n, \quad a \in (0, 1]. \quad (1.1.4)$$

Notemos que el proceso iterativo de Schaefer, además de generalizar al de Krasnoselskii, generaliza también al proceso de Picard, en el sentido de que, si en (1.1.4), $a = 1$, obtenemos el proceso de Picard.

Las iteraciones de Schaefer, son un caso particular del proceso iterativo que introduce Kirk [26] en 1969. Este proceso se define como sigue.

Definición 1.1.5. (Kirk [26], 1969). Sean X un espacio normado y T una función de X en X . El *proceso de Kirk* está dado por

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^k \alpha_i T^i x_n, \quad (1.1.5)$$

para $k \in \mathbb{N}$ fijo, $\alpha_i \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha_1 > 0$ y $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$.

Tomando $k = 1$, $\alpha_0 = (1 - a)$ y $\alpha_1 = a$ en la ecuación (1.1.5), obtenemos las iteraciones definidas por la ecuación (1.1.4).

Sean X un espacio normado, $C \subset X$, $T : C \rightarrow C$ una función y $x_1 \in C$. Sea $A = [a_{n,j}]$ una matriz infinita tal que (I) $a_{n,j} \geq 0$, para toda $n, j \in \mathbb{N}$ y $a_{n,j} = 0$ para $j > n$; (II) $\sum_{j=1}^n a_{n,j} = 1$, para toda $n \in \mathbb{N}$; (III) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = 0$, para toda $j \in \mathbb{N}$. Mann [31] introdujo en 1953 el proceso iterativo

$$v_n = \sum_{j=1}^n a_{n,j} x_j; \quad x_{n+1} = Tv_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.1.6)$$

denotado por $M(x_1, A, T)$. En 1970, Dotson [14] definió un proceso iterativo al que llamo *de Mann Normal* como aquel proceso iterativo $M(x_1, A, T)$ que además de satisfacer (I), (II) y (III) satisface también (IV) $a_{n+1,j} = (1 - a_{n+1,n+1})a_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$ y (V) $a_{n,n} = 1$, para toda $n \in \mathbb{N}$ ó $a_{n,n} < 1$, para toda $n > 1$.

En el inciso (c) del Teorema 2 de [14], Dotson concluye que la sucesión $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un proceso iterativo de Mann normal $M(x_1, A, T)$ satisface para toda $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = (1 - t_n)v_n + t_nTv_n, \quad \text{donde } t_n = a_{n+1,n+1}.$$

Entre otros resultados, Dotson probó también que si X es un espacio de Banach estrictamente convexo, C es cerrado y convexo y T es continua y cuasi-no expansiva sobre C y $T(C) \subset K \subset C$, donde K es compacto y además $\{t_n\} = \{a_{n+1, n+1}\}$ tiene una subsucesión convergente a algún $t \in (0, 1)$, entonces las sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el proceso iterativo de Mann normal $M(x_n, A, T)$ convergen a un punto fijo de T .

A pesar de la definición original dada por Mann (proceso iterativo definido por (1.1.6)), frecuentemente en la literatura se hace referencia al proceso iterativo de Mann como se define enseguida.

Definición 1.1.6. (Ver Mann [31] y Dotson [14]). Sean X un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ una función dada. Sean $x_0 \in X$ un punto arbitrario y $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1]$ una sucesión de números reales. Entonces la *iteración de Mann* o *proceso iterativo de Mann* está definida por

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (1.1.7)$$

El proceso iterativo de Schaefer puede verse también como un caso particular del *proceso iterativo de Mann* y este a su vez es generalizado por el *proceso de Ishikawa* como puede verse en la siguiente definición.

Definición 1.1.7. (Ishikawa [24], 1974). Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ una función dada. Sean $x_0 \in X$ un punto arbitrario y $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1]$ dos sucesiones. Entonces, la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ definida por

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T z_n, \quad n \in \mathbb{Z}^+ ; \\ z_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

se llama *iteración de Ishikawa* o *proceso iterativo de Ishikawa*.

Puede observarse inmediatamente que para $\alpha_n = a$, para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, en las iteraciones de Mann, se obtiene la ecuación (1.1.4). Además si en el proceso iterativo de Ishikawa, $\beta_n = 0$, para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, obtenemos el proceso iterativo de Mann.

El siguiente proceso fue dado por Noor [38] en 2000.

Definición 1.1.8. (Noor [38], 2000). Sea D un subconjunto de un espacio normado X y sea $T : X \rightarrow X$ una función. Para cada $x \in D$ el proceso iterativo de Noor está definido por

$$\begin{cases} w_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n, & \gamma_n \in [0, 1]; \\ z_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T w_n, & \beta_n \in [0, 1]; \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T z_n, & \alpha_n \in [0, 1]. \end{cases}$$

Claramente puede observarse el tipo de generalización que hace el proceso iterativo de Noor respecto al proceso iterativo de Ishikawa.

Veamos una extensión del proceso iterativo de Noor en el cual se realizan un número finito de pasos en cada iteración.

Definición 1.1.9. (Rhoades, Soltuz [56], 2004). Sean X un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ una función. Las *iteraciones multipasos* están dadas, a partir de un $x_0 \in X$, por

$$\begin{cases} z_n^{k-1} = (1 - \beta_n^{k-1})x_n + \beta_n^{k-1}Tx_n & k \geq 2; \\ z_n^i = (1 - \beta_n^i)x_n + \beta_n^i Tz_n^{i+1} & i = 1, 2, \dots, k-2; \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T^i z_n^1, & n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

donde $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\beta_n^i\}_{n=0}^\infty, i = 1, 2, \dots, k-1$, son sucesiones reales en $[0,1]$ tales que $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n = \infty$ y k es un entero fijo.

El siguiente proceso iterativo fue definido haciendo una combinación de los procesos Kirk e Ishikawa.

Definición 1.1.10. (Olatinwo, Imoru [45], 2009). Consideremos un espacio de Banach X y una función $T : X \rightarrow X$. El proceso iterativo *Kirk-Ishikawa* se define a partir de un $x_0 \in X$ por

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_{n,0}x_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}T^i z_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1, \quad n \in \mathbb{Z}^+; \\ z_n &= \sum_{j=0}^s \beta_{n,j}T^j x_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_{n,j} = 1, \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

$k \geq s, \alpha_{n,i} \geq 0, \alpha_{n,0} \neq 0, \beta_{n,j} \geq 0, \beta_{n,0} \neq 0, \alpha_{n,i}, \beta_{n,j} \in [0, 1]$, donde k y s son enteros fijos.

Posteriormente, en 2012 se introdujo (ver [10]) un proceso iterativo llamado *Kirk-Noor* que extendió a las iteraciones Kirk-Ishikawa. La iteración Kirk-Noor consta de un número finito de sumandos como en las iteraciones Kirk-Ishikawa, pero teniendo tres pasos en vez de dos.

Recientemente en 2014, Gursoy, Karakaya y Rhoades [20] introdujeron el proceso iterativo llamado *Kirk multi-pasos* que generaliza al proceso iterativo Kirk-Noor [10] y al proceso iterativo Kirk-Ishikawa.

Definición 1.1.11. (Gursoy, Karakaya, Rhoades [20], 2014). Sean X un espacio normado, y $T : X \rightarrow X$ una función. El proceso iterativo *Kirk multi-pasos* se define a partir de un $x_0 \in X$ como:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in X; \\ y_n^{k-1} = \sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} T^{i_k} x_n, \quad k \geq 2, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}; \\ y_n^p = \beta_{n,0}^p x_n + \sum_{i_{p+1}=1}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p T^{i_{p+1}} y_n^{p+1}, \quad p = 1, 2, \dots, k-2; \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0} x_n + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} y_n^1, \end{array} \right.$$

donde $\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = 1$, $\sum_{i_{p+1}=0}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$ para $p = 1, 2, \dots, k-1$; α_{n,i_1} , $\beta_{n,i_{p+1}}^p \in [0, 1]$, $\alpha_{n,i_1} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,i_{p+1}}^p \geq 0$, $\beta_{n,0}^p \neq 0$ para $p = 1, 2, \dots, k-1$ y s_1, s_{p+1} . Con $p = 1, 2, \dots, k-1$ enteros fijos tales que $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$.

Otros procesos iterativos generales como este último se pueden encontrar en [21].

Ahora veremos algunos procesos iterativos de la forma $Sx_{n+1} = f(T, x_n)$. A este tipo de procesos iterativos los nombraremos en general como “*procesos iterativos tipo Jungck*”. El nombre se debe a que fue Jungck quien introdujo por primera vez un proceso de este tipo, a saber, el siguiente:

Definición 1.1.12. (Jungck, 1976; ver [65]). Sean (X, d) un espacio métrico y $S, T : X \rightarrow X$ tales que $T(X) \subseteq S(X)$ con S inyectiva. Para cada $x_0 \in X$, el *proceso iterativo de Jungck* se define como:

$$Sx_{n+1} = Tx_n, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \quad (1.1.10)$$

De esta última definición, se obtiene el proceso iterativo de Picard cuando $S = id$ (id la función identidad en X).

Singh, Bhatnagar y Mishra en [65] dan una modificación de la Definición 1.1.12 haciéndola más general, considerando no sólo un espacio métrico (X, d) sino también un conjunto Y y funciones $S, T : Y \rightarrow X$ tales que $T(Y) \subseteq S(Y)$ con S inyectiva. Entonces a partir de un $x_0 \in Y$ se genera una sucesión $\{Sx_n\}$ por las iteraciones (1.1.10).

El siguiente proceso iterativo fue introducido en el 2005 por Singh, Bhatnagar y Mishra [65].

Definición 1.1.13. (Singh et al. [65], 2005). Sean X un espacio normado, Y un conjunto cualquiera, y $S, T : Y \rightarrow X$ dos funciones tales que $T(Y) \subseteq S(Y)$ con S inyectiva y $S(Y)$ subespacio de X . Sea $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en $[0, 1]$. Para cada $x_0 \in Y$, el *proceso iterativo de Jungck-Mann* está definido por

$$Sx_{n+1} = (1 - \alpha_n)Sx_n + \alpha_n Tx_n, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

Este proceso iterativo hace de las iteraciones de Mann un caso particular cuando $X = Y$ y $S = id$.

En 2008, Olatinwo e Imoru en [41] definieron una generalización de la iteración de Jungck-Mann y también de la de Ishikawa.

Definición 1.1.14. (Olatinwo, Imoru [41], 2008). Sean X un espacio de Banach y Y un conjunto arbitrario. Sean $S, T : Y \rightarrow X$ dos funciones tales que: $T(Y) \subset S(Y)$, $S(Y)$ es subespacio de X y S es inyectiva. Para cada $x_0 \in Y$, el proceso iterativo *Jungck-Ishikawa* se define por las iteraciones

$$\begin{aligned} Sx_{n+1} &= (1 - \alpha_n)Sx_n + \alpha_n Tz_n, \quad n \in \mathbb{Z}^+ ; \\ Sz_n &= (1 - \beta_n)Sx_n + \beta_n Tx_n, \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

donde $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ son sucesiones en el intervalo $[0, 1]$.

En 2012, Chugh y Kumar establecen en [10] el siguiente proceso llamado Jungck-Kirk-Noor.

Definición 1.1.15. (Chugh, Kumar [10], 2012). Sean X un espacio normado y Y un conjunto arbitrario. Sean $S, T : Y \rightarrow X$, dos funciones tales que $T(Y) \subset S(Y)$, $S(Y)$ un subespacio de X y S es inyectiva. Entonces para cada $x_0 \in Y$, el proceso iterativo *Jungck-Kirk-Noor* se define por las iteraciones

$$\left\{ \begin{array}{l} Sw_n = \gamma_{n,0}Sx_n + \sum_{l=1}^t \gamma_{n,l}T^l x_n, \quad \sum_{l=0}^t \gamma_{n,l} = 1; \\ Sz_n = \beta_{n,0}Sx_n + \sum_{j=1}^s \beta_{n,j}T^j w_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_{n,j} = 1; \\ Sx_{n+1} = \alpha_{n,0}Sx_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}T^i z_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{array} \right.$$

donde $k \geq s \geq t$, $\alpha_{n,i} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,j} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$, $\gamma_{n,l} \geq 0$, $\gamma_{n,0} \neq 0$, $\alpha_{n,i}, \beta_{n,j}, \gamma_{n,l} \in [0, 1]$ donde k, s y t son enteros fijos.

El caso $Y = I$ corresponde al proceso iterativo Kirk-Noor introducido también en [10].

En el 2010 Olaleru y Akewe [39] definieron un proceso iterativo tipo Jungck, a partir de las iteraciones multipasos (Definición 1.1.9 en este trabajo), al que denominaron *Jungck-multipasos*.

1.2. Funciones contractantes o contracciones

La convergencia o la estabilidad de un proceso iterativo, depende directamente de las restricciones o condiciones que cumplan las funciones con las cuales se genera el proceso iterativo. En la literatura estas condiciones aparecen con el nombre general de condiciones de contracción o contractivas. En esta sección hacemos una breve recopilación de tales condiciones, esto con un doble propósito. Primero, pretendemos dar una idea general de cómo ha evolucionado este concepto en el tiempo y segundo, esta sección servirá para entender el porque del tipo de condiciones usadas en la Sección 3.1 así como para conocer algunas relaciones que tienen las condiciones que utilizamos en la Sección 3.2.

Debemos aclarar que debido a la cantidad de condiciones contractivas que aquí consideraremos y a que algunas de ellas ya se les ha asignado un nombre en la literatura, en este texto encontraremos enunciadas estas condiciones de dos maneras. Una de ellas es como *definición* asignándole un nombre al tipo de funciones que satisfacen determinada propiedad. La otra manera es utilizando la palabra *Condición* y asignándole una numeración para identificar tal condición.

De entre las condiciones de contracción, quizás la más popular es la condición del teorema del punto fijo de Banach.

Definición 1.2.1. (Banach, 1922; ver [27]). Sea (X, d) un espacio métrico. Una función T de X en X es una *contracción de Banach* si satisface

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \text{ para algún } \alpha \in [0, 1) \text{ y } x, y \in X. \quad (1.2.1)$$

Como ya se mencionó, esta condición es muy importante en el conocido *teorema del punto fijo de Banach* que establece la existencia y unicidad del punto fijo de T cuando el espacio es completo. Este hecho se logra mostrando la convergencia de la sucesión que genera el proceso iterativo de Picard al punto fijo de T .

Kannan [25] en 1969 muestra la convergencia de la sucesión generada por el proceso iterativo de Picard a un punto fijo cuando la función que lo genera satisface la siguiente condición de contracción:

Definición 1.2.2. (Kannan [25], 1969). Sean (X, d) un espacio métrico y T una función de X en X . Diremos que T es una *aplicación de Kannan* si existe una constante $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq \beta [d(x, Tx) + d(y, Ty)], \text{ para todo } x, y \in X. \quad (1.2.2)$$

Una definición más general de este tipo de funciones es la siguiente.

Definición 1.2.3. (Roux, Maluta [59], 1979). Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $T : X \rightarrow X$ se llama *aplicación tipo Kannan* si para todo $x, y \in X$ se satisface la siguiente condición

$$d(Tx, Ty) \leq b(x, y)d(x, Tx) + b(y, x)d(y, Ty), \quad (1.2.3)$$

donde b es una función de $X \times X$ en $[0, 1)$ que cumple

i) $b(x, y) + b(y, x) < 1$;

ii) cada vez que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} b(x, y) = 1$,

para alguna pareja $(x_0, y_0) \in X \times X$, entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\} = 0 \text{ ó } \infty.$$

A pesar de que no es evidente, puede mostrarse (ver por ejemplo [71], Proposición 2.1, pág. 17) que si T es una aplicación de Kannan en el sentido de la Definición 1.2.2, entonces T satisface también

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{\beta}{1-\beta}d(x, y) + \frac{2\beta}{1-\beta}d(x, Tx), \quad x, y \in X \quad (1.2.4)$$

y que $0 < \frac{\beta}{1-\beta} < 1$.

La desigualdad (1.2.4), es básica en la evolución del concepto de contracción razón por la cual aparecerá varias veces en lo que sigue.

Chatterjea en 1972 usa la siguiente condición contractiva:

Definición 1.2.4. (Chatterjea, 1972; ver [41]). Sean (X, d) un espacio métrico y T una función de X en X . Llamaremos a T una *contracción de Chatterjea* si existe una constante $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq \gamma[d(x, Ty) + d(y, Tx)], \text{ para todo } x, y \in X. \quad (1.2.5)$$

También puede verse en [71] en la Proposición 2.2 pág. 18, que una contracción de Chatterjea implica lo siguiente

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}d(x, y) + \frac{2\gamma}{1-\gamma}d(x, Tx). \quad (1.2.6)$$

Zamfirescu en [77], obtiene una condición, que es combinación de las definiciones de contracción de Banach, aplicación de Kannan y de contracción de Chatterjea.

Definición 1.2.5. (Zamfirescu [77], 1972). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función. Diremos que T es una *contracción de Zamfirescu*, si existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ con $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 0,5$ y $0 \leq \gamma < 0,5$ tales que para cada $x, y \in X$ al menos una de las siguientes proposiciones es verdadera.

$$\begin{aligned} i) \quad & d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \\ ii) \quad & d(Tx, Ty) \leq \beta[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \\ iii) \quad & d(Tx, Ty) \leq \gamma[d(x, Ty) + d(y, Tx)]. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Para este tipo de funciones, Zamfirescu generalizó también el teorema del punto fijo de Banach y demostró en [77] que, cada contracción de Zamfirescu en un espacio métrico completo X , tiene un único punto fijo p y que la iteración de Picard converge a dicho punto, a partir de una aproximación inicial cualquiera $x_0 \in X$.

Notemos que cada las contracciones de Banach, las contracciones de Chatterjea y las aplicaciones de Kannan son contracciones de Zamfirescu. En la demostración del Teorema 2 de Harder y Hicks [22] se prueba que cada contracción de Zamfirescu T , satisface, para cada $x, y \in X$, la siguiente desigualdad

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + 2\delta d(x, Tx), \quad (1.2.8)$$

donde $\delta = \max\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\}$. Como puede verse $0 < \delta < 1$.

Por otra parte, para obtener resultados de estabilidad, en 1993, Rhoades [55] considera la siguiente condición.

Condición 1.2.1. (Rhoades [55], 1993). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función. Diremos que T satisface la Condición 1.2.1 si existe una constante $c \in [0, 1)$ tal que, para todo $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq c \max\{d(x, y), \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}, d(x, Ty), d(y, Tx)\}.$$

Rhoades en la prueba del Teorema 3 en [55], demostró que si T satisface la Condición 1.2.1, entonces

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{c}{1-c} d(x, Tx) + cd(x, y). \quad (1.2.9)$$

Note que la desigualdad (1.2.9) es del mismo tipo que las desigualdades (1.2.8), (1.2.4) y (1.2.6).

Osilike [46] generaliza y extiende varios resultados de Rhoades, Harder y Hicks y de sí mismo (Ver Osilike [46]) usando la siguiente condición.

Definición 1.2.6. (Osilike [48], 1996). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función. Llamaremos a T una *contracción de Osilike* si existen $L \geq 0$ y $b \in [0, 1]$, tales que

$$d(Tx, Ty) \leq bd(x, y) + Ld(x, Tx) \text{ para todo } x, y \in X. \quad (1.2.10)$$

Observe que las desigualdades (1.2.4), (1.2.6), (1.2.8) y (1.2.9) son casos particulares de la contracción de Osilike y por lo tanto las condiciones dadas por Kannan, Chatterjea, Zamfirescu y la Condición 1.2.1, implican a la contracción de Osilike.

Osilike [48] muestra con un ejemplo que la clase de funciones que satisfacen la Condición 1.2.1, es un subconjunto propio de las funciones que son contracción de Osilike.

Definición 1.2.7. (Berinde [3], 2004). Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $T : X \rightarrow X$ es llamada *contracción débil* si existen una constante $\delta \in (0, 1)$ y algún $L \geq 0$ tales que

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \cdot d(x, y) + Ld(y, Tx), \text{ for all } x, y \in X. \quad (1.2.11)$$

Inmediatamente puede verse que cada contracción de Banach satisface (1.2.11) con $\delta = 1$ y $L = 0$, y entonces es una contracción débil.

La Proposición 1, la Proposición 2 y el Corolario 1 de [3] muestran, respectivamente, que cada aplicación de Kannan, cada contracción de Chatterjea y cada contracción de Zamfirescu es también una contracción débil.

Un ejemplo en [48], pág. 18, permite ver que existen contracciones de Osilike (definidas en espacios métricos completos) que no poseen puntos fijos. Por otra parte el Teorema 1 de [3] muestra que en espacios métricos completos, las contracciones débiles poseen al menos un punto fijo. Por lo tanto el ejemplo en [48] y el Teorema 1 en [3] muestran que la desigualdad (1.2.10) no implica (1.2.11). Además el Ejemplo 2 de [3] proporciona un ejemplo de una contracción débil que no es contracción de Osilike. Concluimos entonces que las contracciones débiles son, en general, independientes de las contracciones de Osilike.

Ahora consideremos una definición de contracción que es más general que la Condición 1.2.1 y es independiente de la definición de contracción de Osilike.

Definición 1.2.8. (Ćirić [11], 1974). Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $T : X \rightarrow X$ es llamada *cuasi-contracción* si existe un $\delta \in [0, 1)$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}, \quad (1.2.12)$$

para cada $x, y \in X$.

Puede comprobarse fácilmente que cada aplicación de Kannan, contracción de Chatterjea y contracción de Zamfirescu satisfacen (1.2.12), es decir, todos estos tipos de funciones son también cuasi-contracciones. Además, cada cuasi-contracción con $\delta < \frac{1}{2}$, es una contracción de Zamfirescu.

Por otra parte, puede verse que la Condición 1.2.1 implica a la definición de cuasi-contracción. Sin embargo se tiene un ejemplo en [46], pág. 26, de una función que es cuasi-contractiva y que no satisface la Condición 1.2.1.

La misma función del ejemplo en [46] y el Ejemplo 2 de [3] muestran que existen cuasi-contracciones que no son contracciones de Osilike. Por otra parte la función del ejemplo en [48] muestra que existen contracciones de Osilike que no son cuasi-contracciones. Concluimos que, en general, las definiciones de contracción de Osilike y de cuasi-contracción son independientes.

El Ejemplo 1 de [3] prueba que la función identidad en $[0, 1]$ es débilmente contractiva pero no cuasi-contractiva. La Proposición 3 de [3] muestra que cada cuasi-contracción con $0 < \delta < \frac{1}{2}$ es una contracción débil, sin embargo el Ejemplo 2 del mismo trabajo proporciona una función que es cuasi-contracción con $\frac{1}{2} < \delta < 1$ y que sigue siendo una contracción débil lo cual sugiere afirmar que $\delta < \frac{1}{2}$ no es una condición necesaria para que una cuasi-contracción sea una contracción débil.

Condición 1.2.2. (Rhoades [57], 1978). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función. Diremos que T satisface la Condición 1.2.2 si existen $\delta \in [0, 1)$ y $c > 0$ tales que, para todo $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \max\{cd(x, y), d(x, Tx) + d(y, Ty), d(x, Ty) + d(y, Tx)\}.$$

Fácilmente podemos ver que las cuasi-contracciones satisfacen la Condición 1.2.2. Además las funciones que satisfacen la Condición 1.2.2 con $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$ y $0 \leq \delta c < 1$ son contracciones de Zamfirescu.

Condición 1.2.3. (Babu, Panda [2], 1987). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función. Diremos que T satisface la Condición 1.2.3 si existen $\delta \in [0, 1)$ y $c > 0$ tales que, para todo $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \max\{cd(x, y) + d(x, Tx) + d(y, Ty), cd(x, y) + d(x, Ty) + d(y, Tx)\}.$$

Claramente la Condición 1.2.2 implica la Condición 1.2.3. El ejemplo siguiente muestra que la implicación inversa no siempre es cierta.

Ejemplo 1.2.1. (Babu, Panda [2], 1987). Sean $X = \{x, y, z\}$, $Tx = y$, $Ty = z$, $Tz = z$, $d(x, y) = 1.7$, $d(x, z) = 1.8$, $d(y, z) = 1.3$, $c = 1$ y $\delta = 0.28$. (X, d) es un espacio métrico, T satisface la Condición 1.2.3 pero no la Condición 1.2.2.

Taskovic introduce el concepto de φ -contracción diametral que unifica la definición de contracción de Banach, cuasi-contracción y otras (ver [70]).

Definición 1.2.9. (Taskovic, ver [70], 1980). Sea (X, d) un espacio métrico. $T : X \rightarrow X$ es una φ -contracción diametral si existe una función $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ con la propiedad

- i) $\varphi(t) < t$ para toda $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$,
- ii) $\limsup_{z \rightarrow t+0} \varphi(z) < t$ para toda $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$,

y tal que

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(\delta[O(x, y, \infty)]), \quad \delta[O(x, y, \infty)] \in \mathbb{R}^+, \quad (1.2.13)$$

donde $O(x, y, \infty) = \{x, y, Tx, Ty, T^2x, T^2y, \dots\}$ y $\delta[O(x, y, \infty)]$ denota el diámetro de $O(x, y, \infty)$.

Una contracción de Banach y una cuasi-contracción son φ -contracciones diametrales. En efecto, tomando a $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ como $\varphi(t) = \alpha t$, $\alpha \in [0, 1)$ para toda $t \in \mathbb{R}^+$, entonces si $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$, como $d(x, y) \leq \delta[O(x, y, \infty)]$, entonces

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha \delta[O(x, y, \infty)] = \varphi(\delta[O(x, y, \infty)]).$$

Del mismo modo si

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\},$$

ya que

$$\max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \leq \delta[O(x, y, \infty)],$$

entonces $d(Tx, Ty) \leq \alpha \delta[O(x, y, \infty)] = \varphi(\delta[O(x, y, \infty)])$.

En seguida veremos condiciones de contracción que generalizan algunas de las condiciones anteriores, pero antes veamos la siguiente definición que necesitaremos. Esta definición la podemos encontrar en [23].

Definición 1.2.10. Una función $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ se llama una *función de comparación* si

- i) ψ es monótona creciente;
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}^+$,

donde $\psi^n(t)$ denota la composición de ψ consigo mismo n veces.

Condición 1.2.4. (Olatinwo, et al. [42], 2006). Sean (X, d) espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función. Diremos que T satisface la Condición 1.2.4 si existen una constante $b \in [0, 1)$, y una función monótona creciente $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $\varphi(0) = 0$, tales que

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, Tx)) + bd(x, y), \text{ para cada } x, y \in X.$$

Condición 1.2.5. (Olatinwo [41], 2008). Sean (X, d) espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función. Diremos que T satisface la Condición 1.2.5 si existen una función de comparación ψ y una función monótona creciente $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $\varphi(0) = 0$, tales que

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, Tx)) + \psi(d(x, y)), \text{ para cada } x, y \in X.$$

Condición 1.2.6. (Imoru, Olatinwo [23], 2006). Sean (X, d) espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función. Diremos que T satisface la Condición 1.2.6 si existen una constante $a \in [0, 1)$ y una función monótona creciente $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\Phi(0) = 1$, tales que

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)\Phi(d(x, Tx)),$$

Condición 1.2.7. (Imoru, Olatinwo [23], 2006). Sean (X, d) espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función. Diremos que T satisface la Condición 1.2.7 si existen una constante $L \geq 0$ y una función $\Psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tales que

$$d(Tx, Ty) \leq \Psi(d(x, y)) \exp(Ld(x, Tx)), \text{ para todo } x, y \in X,$$

donde Ψ puede ser una función de comparación o una función monótona creciente.

Condición 1.2.8. (Olatinwo [43], 2009). Sean (X, d) espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función. Diremos que T satisface la Condición 1.2.8 si existen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dos funciones monótonas crecientes con $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 1$ y $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función de comparación continua tales que

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{\varphi_1(d(x, Tx)) + \psi(d(x, y))}{\varphi_2(d(x, Tx))}, \quad x, y \in X.$$

Condición 1.2.9. (Olatinwo [43], 2009). Sean (X, d) espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función. Diremos que T satisface la Condición 1.2.9 si existen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dos funciones monótonas crecientes con $\varphi_1(0) = 0$ y $\varphi_2(0) = 1$ y $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función de comparación continua tales que

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi_1(d(x, Tx)) + \frac{\psi(d(x, y))}{\varphi_2(d(x, Tx))}, \quad x, y \in X,$$

Observaciones:

1. Las Condiciones 1.2.6 y 1.2.7 son independientes (ver [23]).
2. La Condición 1.2.5 extiende a la Condición 1.2.4.

La definición de contracción de Banach puede ser generalizada de una manera distinta como puede observarse en la siguiente definición.

Definición 1.2.11. (Jungck, 1976; ver [65]). Sean (X, d) un espacio métrico y $S, T : Y \rightarrow X$ donde Y un conjunto cualquiera tal que $T(Y) \subseteq S(Y)$. El par de funciones (S, T) es llamado una *J-contracción* si existe una constante $0 \leq a < 1$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq ad(Sx, Sy), \quad (1.2.14)$$

para todo $x, y \in Y$.

Jungck demostró, en el caso $X = Y$, que las parejas de funciones que son una *J-contracción*, tienen un punto fijo en común, siempre que X es un espacio métrico completo, S y T conmutan, $T(X) \subset S(X)$ y S es continua (ver [65]).

Una condición más de este tipo está dada por la Condición 1.2.10, que es similar a la definición de contracción de Osilike. Esta condición la usaron Singh, Bhatnagar y Mishra [65] en el 2005 para mostrar resultados de estabilidad.

Condición 1.2.10. (Singh, et al.. [65], 2005). Sean Y un conjunto arbitrario, (X, d) un espacio métrico y $S, T : Y \rightarrow X$ una función. Diremos que T satisface la Condición 1.2.10 si existen dos constantes $a \in (0, 1)$ y $L \geq 0$, tales que

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(Sx, Tx) + ad(Sx, Sy), \quad x, y \in Y.$$

Olatinwo dio las siguientes condiciones contractivas del mismo tipo que la Condición 1.2.10 y la Definición 1.2.11. Las primeras dos, generalizan a la Condición 1.2.10.

Condición 1.2.11. (Olatinwo [43], 2009). Sean Y un conjunto arbitrario, (X, d) un espacio métrico y $S, T : Y \rightarrow X$ una función. Diremos que T satisface la Condición 1.2.11 si existen un $c > 0$ y una función monótona creciente $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\varphi(0) = 0$ tales que

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(Sx, Tx)) + cd(Sx, Sy), \quad x, y \in Y;$$

Condición 1.2.12. (Olatinwo [43], 2009). Sean Y un conjunto arbitrario, (X, d) un espacio métrico y $S, T : Y \rightarrow X$ una función. Diremos que T satisface la Condición 1.2.12 si existen una función $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ monótona creciente con $\varphi(0) = 0$ y una función de comparación ψ continua, tales que

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(Sx, Tx)) + \psi(d(Sx, Sy)), \quad x, y \in Y,$$

Condición 1.2.13. (Olatinwo [43], 2009). Sean Y un conjunto arbitrario, (X, d) un espacio métrico y $S, T : Y \rightarrow X$ una función. Diremos que T satisface la Condición 1.2.13 si existen un número $M \geq 0$ y una función de comparación continua y subaditiva $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tales que

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{\psi(d(Sx, Sy))}{1 + Md(Sx, Tx)}, \quad x, y \in Y,$$

Condición 1.2.14. (Olatinwo [43], 2009). Sean Y un conjunto arbitrario, (X, d) un espacio métrico y $S, T : Y \rightarrow X$ una función. Diremos que T satisface la Condición 1.2.14 si existen una función $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ monótona creciente con $\varphi(0) = 0$ y una función de comparación continua y subaditiva $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tales que

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{\psi(d(Sx, Sy)) + \varphi(d(Sx, Tx))}{1 + Md(Sx, Tx)}, \quad M \geq 0, \quad x, y \in Y.$$

Pasemos ahora a dar la definición de una función *no expansiva* y *cuasi-no expansiva*. Si $\alpha = 1$ en la definición de contracción de Banach, entonces la función $T : X \rightarrow X$ se conoce como *no expansiva* (ver [26]), esto es:

Definición 1.2.12. (Ver Kirk [26], 1969). Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $T : X \rightarrow X$ es llamada *no expansiva* si para cualesquiera $x, y \in X$, se satisface:

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y). \quad (1.2.15)$$

Una definición más débil que la de función no expansiva es la siguiente.

Definición 1.2.13. (Dotson [14], 1970). Una función $T : X \rightarrow X$ se dice *cuasi-no expansiva* si tiene al menos un punto fijo en X y para cada punto fijo p de T se tiene que

$$d(Tx, p) \leq d(x, p), \quad x \in X \quad (1.2.16)$$

Esta definición es tal como aparece en [14], en 1970. Sin embargo, esta condición considerando la desigualdad estricta fue introducida en 1967 por Diaz y Metcalf en [13].

Note que si T tiene punto fijo y satisface la Condición 1.2.6, o la Condición 1.2.4 o alguno de sus casos particulares, entonces T es una función cuasi-no expansiva. De este modo, una contracción de Osilike con punto fijo es una función cuasi-no expansiva, y en consecuencia también lo son las aplicaciones de Kannan, contracciones de Chatterjea y contracciones de Zamfirescu.

La definición de función cuasi-no expansiva requiere de la existencia de un punto fijo. Podríamos retomar las condiciones de contracción mencionadas en esta sección, pedir la existencia de un punto fijo en el espacio

y dar definiciones análogas al de función cuasi-no expansiva. Sin embargo, sólo haremos mención de dos con las cuales han trabajado algunos autores.

Condición 1.2.15. (Bosede, Rhoades [8], 2010). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función con punto fijo p , diremos que T satisface la Condición 1.2.15 si existe $a \in [0, 1)$ tal que

$$d(Tx, p) \leq ad(x, p), \quad x \in X.$$

Condición 1.2.16. (Asadi, et al. [1], 2009). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función con punto fijo p , diremos que T satisface la Condición 1.2.16 si existen $a \in [0, 1)$ y $L \geq 0$, tales que

$$d(Tx, p) \leq ad(x, p) + Ld(x, Tx), \quad x \in X.$$

La Condición 1.2.15 es la análoga a la definición de contracción de Banach y la Condición 1.2.16 análoga a la contracción de Osilike [46], además la Condición 1.2.15 implica a la Condición 1.2.16.

Note también que en presencia de un punto fijo las contracciones de Osilike y las Condiciones 1.2.4 y 1.2.6 implican a la Condición 1.2.15 y por tanto también a la Condición 1.2.16. De este modo, las contracciones de Zamfirescu y las funciones que satisfacen la Condición 1.2.2 con $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$ y $0 \leq \delta c < 0$ (con punto fijo) satisfacen la Condición 1.2.16.

Puede también comprobarse fácilmente que las cuasi-contracciones con punto fijo, satisfacen la Condición 1.2.16.

Enseguida enunciaremos cuatro condiciones definidas por medio de desigualdades en las que interviene una integral, esto con el fin de dar una breve idea de este tipo de condiciones contractivas.

Condición 1.2.17. (Branciari [7], 2002). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$. Diremos que T satisface la Condición 1.2.17 si existe un número real $c \in (0, 1)$ tal que para cada $x, y \in X$ se tiene

$$\int_0^{d(Tx, Ty)} \varphi(t) dt \leq c \int_0^{d(x, y)} \varphi(t) dt,$$

donde $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ es un función Lebesgue-integrable, en cada subconjunto compacto de $[0, +\infty)$, no negativa y tal que para cada $\epsilon > 0$, $\int_0^\epsilon \varphi(t) dt > 0$.

Branciari prueba que las funciones que satisfacen esta condición en un espacio métrico completo tienen un único punto fijo y que además las iteraciones de Picard convergen a dicho punto.

Como se puede ver, la Condición 1.2.17 es una generalización de la contracción de Banach. Si $\varphi(t) = 1$, para cada $t \geq 0$, entonces se tiene que

$$\int_0^{d(Tx, Ty)} \varphi(t) dt = d(Tx, Ty) \leq cd(x, y) = c \int_0^{d(x, y)} \varphi(t) dt,$$

entonces una contracción de Banach también satisface la Condición 1.2.17, puede verse un ejemplo en (Brianciani [7], Ejemplo 3.6 pág. 535) que la afirmación inversa no siempre es cierta.

Posteriormente en el 2003, Rhoades [58] generaliza la condición anterior utilizando las siguientes dos condiciones.

Condición 1.2.18. (Rhoades [58], 2003). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$. Diremos que T satisface la Condición 1.2.18 si existe un número real $k \in (0, 1)$ tal que para cada $x, y \in X$ se tiene

$$\int_0^{d(Tx, Ty)} \varphi(t) dt \leq k \int_0^{\max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \lfloor \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \rfloor\}} \varphi(t) dt,$$

donde φ son como en la Condición 1.2.17.

Condición 1.2.19. (Rhoades [58], 2003). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$. Diremos que T satisface la Condición 1.2.19 si existe un número real $k \in (0, 1)$ tal que para cada $x, y \in X$ se tiene

$$\int_0^{d(Tx, Ty)} \varphi(t) dt \leq k \int_0^{\max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}} \varphi(t) dt,$$

donde φ es como en la Condición 1.2.17.

Note que si en la Condición 1.2.19 ponemos $\varphi(t) = 1$, obtenemos la definición de cuasi-contracción.

Siguiendo a Brianciani [7] y Rhoades [58] y con fines de obtener resultados sobre estabilidad, en el 2010, Olatinwo [44] establece la siguiente definición de contracción.

Condición 1.2.20. (Olatinwo [44], 2010). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$. Diremos que T satisface la Condición 1.2.20 si existen un número real $k \in [0, 1)$ y dos funciones monótonas crecientes $\nu, \psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\psi(0) = 0$ tales que para todo $x, y \in X$ se tiene

$$\int_0^{d(Tx, Ty)} \varphi(t) d\nu(t) \leq \psi \left[\int_0^{d(x, Tx)} \varphi(t) d\nu(t) \right] + k \int_0^{d(x, y)} \varphi(t) d\nu(t),$$

donde $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función Lebesgue-Stieltjes integrable, no negativa y tal que para cada $\epsilon > 0$,

$$\int_0^\epsilon \varphi(t) d\nu(t) > 0.$$

Observe que si en la Condición 1.2.20, se pone $\varphi(t) = 1$ y $\nu(t) = t$, entonces obtenemos la Condición 1.2.4.

Las condiciones que involucran una integral y que enunciamos aquí, tienen como objetivo dar continuidad a la idea de la evolución del concepto de contracción que presentamos en esta sección. Se han estudiado otras condiciones de tipo integral, como ejemplo de ello puede verse Gairola y Rawat [15], Olatinwo [40] y Moradi y Omid [37].

Finalizamos esta parte con el siguiente diagrama que resume algunas de las implicaciones entre las principales condiciones contractivas que presentamos aquí.

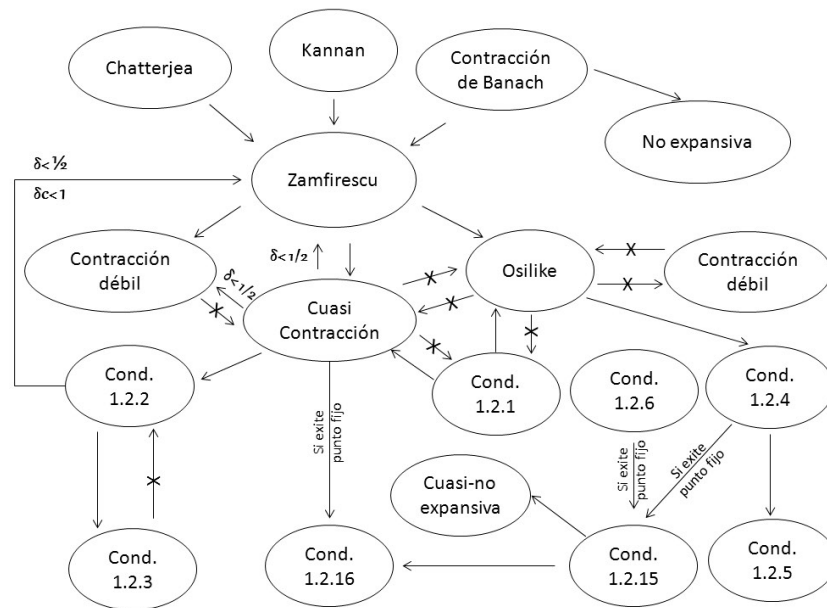


Diagrama 1.2.1. Condiciones contractivas

1.3. Resultados y definiciones adicionales

Comenzaremos con un lema que utilizaremos para las pruebas de los resultados nuevos que presentaremos lo largo de este trabajo.

Lema 1.3.1. (Berinde [5, Lema 1]). Sean $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales no negativos y $\delta \in [0, 1)$ tales que,

$$u_{n+1} \leq \delta u_n + \epsilon_n, \quad n = 0, 1, \dots \tag{1.3.1}$$

$L_1)$ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

$$L_2) \text{ Si } \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n < \infty \text{ entonces } \sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty.$$

Lema 1.3.2. (*Harder y Hicks [22, Lema 1]*). Si λ es un número real tal que $0 < |\lambda| < 1$ y $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión de números reales tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \lambda^{n-k} v_k = 0$

Definición 1.3.1. (*Ćirić [12]*). Sea T una función de un espacio métrico X en si mismo. X se llama *T -orbitalmente completo* si cada sucesión de Cauchy contenida en $O(T, \infty) = \{x, Tx, T^2, \cdot\}$ para algún $x \in X$ converge en X .

Como puede notarse si X es un espacio completo, entonces es T -orbitalmente completo para cada $T : X \rightarrow X$. En [12, Ejemplo 3] se mostró que espacios métricos no completos pueden ser orbitalmente completos con respecto a una función pero no con respecto a otra.

Lema 1.3.3. (*Vetro [75, Lema 1 y Lema 2]*). Sea $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua por la izquierda, no decreciente y tal que $\psi(\alpha) > \alpha$, para toda $\alpha \in (0, 1)$. Entonces

a) $\psi(1) = 1$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(\alpha) = 1$ para cada $\alpha \in (0, 1)$ (ψ^n denota la composición de ψ consigo misma n -veces).

Capítulo 2

Estabilidad de procesos iterativos

En este capítulo se exponen algunas contribuciones en el tema de estabilidad de procesos iterativos encontradas en la literatura con el objetivo de mostrar el estado actual del tema. Esto incluye algunas de las distintas definiciones de estabilidad que se han estudiado, algunas de las relaciones que existen entre ellas y los resultados principales que se han obtenido. Este capítulo es importante como antecedente de los resultados del Capítulo 3.

El concepto de estabilidad tiene significados distintos de acuerdo al área en que se trabaje. Por ejemplo, en matemáticas, en el área de análisis numérico, la estabilidad es una propiedad de los *algoritmos numéricos* (para una definición de este concepto puede consultarse por ejemplo [9, pág. 31]) que describe como los errores en los datos de entrada se magnifican, reducen o mantienen conforme el algoritmo se ejecuta.

Nosotros estamos interesados en la estabilidad de procesos iterativos que generan sucesiones que convergen a un punto fijo de las funciones con las cuales se definen dichas iteraciones. Como veremos, en la actualidad existen distintas definiciones de estabilidad para procesos iterativos. En espacios métricos, la primera definición de este concepto surgió en 1988, es conocido como *T-estabilidad* y esta basado en un resultado aparecido en el año 1964 (ver [22]).

2.1. T-Estabilidad

Veamos el siguiente resultado que puede ser encontrado en [22].

Teorema 2.1.1. (Ostrowski, 1964). Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una contracción, esto es $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ para cada $x, y \in X$, donde $0 \leq k < 1$. Sea p el punto fijo de T . Sea x_0 un punto arbitrario en X y pongamos $x_{n+1} = Tx_n$ para $n = 0, 1, \dots$. Sean $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en X y $\varepsilon_n = d(y_{n+1}, Ty_n)$ para $n = 0, 1, \dots$. Entonces para $n = 0, 1, \dots$,

$$(1) \quad d(p, y_{n+1}) \leq \frac{1}{1-k}(\varepsilon_n + kd(y_n, y_{n+1})) \text{ y}$$

$$(2) \quad d(p, y_{n+1}) \leq d(p, x_{n+1}) + k^{n+1}d(x_0, y_0) + \sum_{i=0}^n k^{n-i}\varepsilon_i.$$

También

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p \text{ si y sólo si } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Basados en el resultado anterior, Harder y Hick [22] dieron en 1988 la siguiente definición de estabilidad.

Definición 2.1.1. (Harder, Hicks [22], 1988). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función con un único punto fijo p . Sea $x_{n+1} = f(T, x_n)$ un proceso iterativo. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$. Sea $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión cualquiera en X y definamos $\varepsilon_n = d(y_{n+1}, f(T, y_n))$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$, entonces diremos que el proceso iterativo $x_{n+1} = f(T, x_n)$ es *estable con respecto a T* o simplemente *T -estable*.

Una motivación para tal definición puede ser la siguiente: Consideremos una función T sobre un espacio métrico X y un proceso iterativo $x_{n+1} = f(T, x_n)$, supongamos que podemos generar una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ con la propiedad que x_n converge a un punto fijo p de T cuando n tiende a infinito. Sin embargo, en la práctica no siempre es posible obtener la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ si no solamente una aproximación $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. La sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ podría hallarse del siguiente modo: tomamos x_0 de forma arbitraria en X . Ahora quisiéramos obtener $x_1 = f(T, x_0)$, sin embargo por errores de redondeo o discretización del problema sólo obtenemos y_1 que es una aproximación a x_1 . Ahora, para calcular x_2 , ya que conocemos $y_1 \approx x_1$, procedemos del mismo modo y evaluamos $f(T, y_1)$ para obtener una aproximación y_2 . Utilizando $y_2 \approx x_2$ podemos encontrar una aproximación a x_3 . Así, obtenemos una sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ que es una aproximación a $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Como se puede ver, en cada iteración se generan errores, de modo que cabe preguntarse ¿Converge y_n a p cómo lo hace x_n ? Pues bien, si $f(T, x_n)$ es T -estable, entonces $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge al mismo punto fijo p de T siempre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Esto muestra la importancia de las investigaciones sobre estabilidad de los procesos iterativos.

Por supuesto, existen procesos iterativos que no son T -estables como lo muestran los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 2.1.1. (Harder, Hicks [22, Ejemplo 5]). Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, donde $|\cdot|$ es la métrica usual. Sea $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x < 0; \\ \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Tenemos que $\frac{1}{4}$ es un punto fijo de T y además es único. También podemos ver que el proceso iterativo de Picard conduce al punto fijo. Esto se debe a que:

1. si $x_0 < 0$, entonces $x_1 = Tx_0 = \frac{1}{2}$ y $x_n = \frac{1}{4}$ para $n \geq 2$;
2. si $0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}$, entonces $x_1 = Tx_0 = \frac{1}{4}$ y $x_n = \frac{1}{4}$ para $n \geq 2$;
3. si $x_0 > \frac{1}{2}$, entonces $x_1 = Tx_0 = 0$ y $x_n = \frac{1}{4}$ para $n \geq 2$.

Ahora veamos que este proceso iterativo no es T -estable. Para ello tomamos la sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1]$ como $y_0 = x_0$ y

$$y_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par;} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Si n es par, tenemos

$$\varepsilon_n = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - T\left(-\frac{1}{n}\right) \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{n+1}.$$

Si n es impar, entonces

$$\varepsilon_n = \left| \left(-\frac{1}{n+1}\right) - T\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \right| = \left| \left(-\frac{1}{n+1}\right) - 0 \right| = \frac{1}{n+1}.$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, sin embargo $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión divergente. Por lo tanto la iteración de Picard es una sucesión no T -estable.

Ejemplo 2.1.2. (Harder, Hicks [22, Ejemplo 3]). Consideremos el espacio métrico $([0, 1], |\cdot|)$ donde $|\cdot|$ es la métrica usual en \mathbb{R} . Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función definida como:

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

La función T tiene un único punto fijo en $\frac{1}{2}$ y las iteraciones de Picard convergen a dicho punto. En efecto

1. si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, entonces $x_1 = Tx_0 = \frac{1}{2}$ y $x_n = \frac{1}{2}$ para $n \geq 2$;
2. si $\frac{1}{2} < x \leq 1$, entonces $x_1 = Tx_0 = 0$ y $x_n = \frac{1}{2}$ para $n \geq 2$.

Para mostrar que esta iteración no es T -estable tomemos la sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1]$, definida como $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4^{2n}}$ y $y_{2n-1} = \frac{1}{4^{2n+1}}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión divergente, $\varepsilon_0 = \left| \frac{1}{4} - T\left(\frac{1}{4}\right) \right| = \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4}$. Si n es par, $\varepsilon_n = \left| \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - T\left(\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \right| = \left| \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 0 \right| = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$. Si n es impar, entonces $\varepsilon_n = \left| \left(\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) - T\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \right| = \left| \left(\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) - \frac{1}{2} \right| = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$. Entonces $\varepsilon_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$, por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, pero $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ no converge a $\frac{1}{2}$.

En el Teorema 2.1.1 se prueba que la iteración de Picard es T -estable con respecto a cada contracción. En [22] se probó la estabilidad de este proceso para cada contracción de Zamfirescu. En [22] se probó que las iteraciones de Mann son T -estables con respecto a cada contracción de Zamfirescu y un resultado similar fue probado para la iteración de Kirk con respecto a una contracción.

Una de las condiciones contractivas más generales que se han utilizado para hallar la estabilidad del proceso iterativo de Picard, Kirk e Ishikawa es la de contracción de Osilike, (Definición 1.2.6). Pruebas cortas de estos resultados las podemos encontrar en [49].

Para hablar de estabilidad de procesos iterativos asumimos que las funciones asociadas tienen puntos fijos. Un ejemplo en [48] muestra que existen funciones que son contracción de Osilike y sin embargo pueden no tener puntos fijos. Pero puede verificarse que si una contracción de Osilike tiene un punto fijo, entonces este es único.

En los siguientes cuatro resultados se utilizó la Condición 1.2.4 que es todavía más general que la definición de contracción de Osilike.

Teorema 2.1.2. (*Olatinwo [45, Teorema 3.1], 2012*). Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sea $T : X \rightarrow X$ una función que satisface la Condición (1.2.4) con la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$ y φ con la hipótesis adicional de ser subaditiva y que $\varphi(Lu) \leq L\varphi(u)$, $L \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^+$. Supongamos que T tiene un punto fijo p y que las iteraciones de Kirk-Ishikawa convergen a él. Entonces el proceso iterativo Kirk-Ishikawa es T -estable.

Teorema 2.1.3. (*Chugh, Kumar [10, Teorema 3.1], 2012*). Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sea $T : X \rightarrow X$ una función que satisface

la Condición 1.2.4, donde $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función monótona creciente, subaditiva tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(Lu) \leq L\varphi(u)$, $L \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^+$. Sea $x_0 \in X$ y $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ la sucesión generada por el proceso iterativo Kirk-Noor. Supongamos que T tiene un punto fijo p . Entonces el proceso iterativo Kirk-Noor es T -estable

El Teorema 2.1.3 generaliza al Teorema 2.1.2 así como también al Teorema 3.2. de [45], el cual corresponde a la estabilidad del proceso iterativo Kirk-Mann.

Teorema 2.1.4. (*Chugh, Kumar [10, Teorema 3.2], 2012*). Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sean $S, T : Y \rightarrow X$ dos operadores conmutativos que satisfacen la Condición 1.2.11 (con la métrica inducida por la norma) y tales que $T(Y) \subset S(Y)$, $S(Y)$ o $T(Y)$ es un subespacio completo de X con $\|S^2x - T(Sx)\| \leq \|Sx - Tx\|$, $\forall x \in Y$ y $\|S^2x - S^2y\| \leq \|Sx - Sy\|$, $\forall x, y \in Y$. Supongamos que z es un punto de coincidencia de S, T, S^i y T^i (es decir $Sz = Tz = p$ y $S^iz = T^iz = p$). Sea $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función monótona creciente, subaditiva tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(Lu) \leq L\varphi(u)$, $L \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^+$. Sean $x_0 \in Y$ y $\{Sx_n\}_{n=0}^\infty$ la sucesión generada por el proceso iterativo Jungck-Kirk-Noor que converge a p . Entonces el proceso iterativo es (S, T) -estable.

Teorema 2.1.5. (*Gürsoy, Karakaya, Rhoades [20, Teorema 6 y 7], 2014*). Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sea $T : X \rightarrow X$ una función que tiene un punto fijo p y que satisface la Condición 1.2.12 con alguna $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ subaditiva, monótona, creciente y tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(Lu) \leq L\varphi(u)$, $L \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^+$. Entonces la sucesión generada por el proceso iterativo Kirk multi-pasos converge a p y es T -estable.

Para terminar esta sección, observemos el teorema siguiente, en el cual se utiliza la Condición 1.2.15. Notemos nuevamente que, si se satisface la Condición 1.2.4 y la función tiene punto fijo, entonces, se satisface también la Condición 1.2.15. Utilizar esta última simplifica cálculos al probar resultados de estabilidad.

Teorema 2.1.6. (*Bosede, Rhoades [8], 2010*). Sea (X, d) un espacio métrico completo. Sea $T : X \rightarrow X$ una función con un punto fijo p tal que satisface $d(p, Tx) \leq ad(p, x)$, para algún $a \in [0, 1)$ y cada $x \in X$. Entonces la iteración de Picard es T -estable.

2.2. Casi T-Estabilidad

Definición 2.2.1. (Osilike [47], 1988). suponga que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach real y $T : X \rightarrow X$ una función con al menos un

punto fijo. Sea $x_0 \in X$ y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ un proceso iterativo definido por

$$x_{n+1} = f(T, x_n), \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad (2.2.1)$$

que converge a un punto fijo p .

Suponga que $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en X y $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión de números reales positivos dados por

$$\varepsilon_n = \|y_{n+1} - f(T, y_n)\|.$$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ implica $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$, entonces el proceso de iteración definido por la ecuación (2.2.1) se dice casi T -estable o casi estable con respecto a T .

Observación 2.2.1. Claramente cada proceso iterativo T -estable es casi T -estable, ya que si el proceso iterativo es T -estable y $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ y por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$

Sin embargo, una iteración que es casi T -estable puede no ser T -estable como muestra el Ejemplo 1 de [47]. Aquí, para mostrar ese hecho tomaremos un caso particular de dicho ejemplo que necesitaremos nuevamente más adelante.

Ejemplo 2.2.1. Consideremos $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, T definida como $Tx = \frac{1}{2}x$ y el proceso iterativo de Mann $x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n$, con $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$. Entonces

$$x_{n+1} = \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right) x_n = \left(\prod_{i=0}^n \frac{2i+1}{2i+2} \right) x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \quad (2.2.2)$$

Tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = 0$, el único punto fijo de T . El Teorema 1 de [47] asegura que el proceso iterativo de Mann que hemos definido es casi T -estable, sin embargo veremos que no es T -estable. Consideremos $y_n = \frac{n}{n+1}$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= |y_{n+1} - (1 - \alpha_n)y_n - \alpha_n T y_n| = \left| \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+1} \frac{n}{n+1} \right| \\ &= \left| \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{n}{2(n+1)^2} \right| = \left| \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{n}{2n^2} \right|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, sin embargo $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$.

Ejemplo 2.2.2. (Osilike [47, Ejemplo 3], 1998). Consideremos a $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y a $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función identidad sobre \mathbb{R} . Sean $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ dos sucesiones en $[0, 1]$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$ y sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión generada por la iteración de Ishikawa. Claramente x_0 es un punto fijo de T y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a x_0 . Sea $y_n = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= |y_{n+1} - (1 - \alpha_n)y_n - \alpha_n T[(1 - \beta_n)y_n + \beta_n T y_n]| \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. Sin embargo $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \neq x_0$, de modo que la iteración de Ishikawa no es casi T -estable y entonces tampoco T -estable.

Es fácil ver también que la iteración de Picard tampoco es casi T -estable y por tanto tampoco T -estable, considerando por ejemplo $y_n = \frac{1}{n}$ y $x_0 \neq 0$.

Como ejemplos de resultados de casi estabilidad podemos ver los teoremas siguientes.

Teorema 2.2.1. (Rezapour, Haghi, Rhoades [54, Teorema 2.2], 2011). Sea X un espacio normado. Sea $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función de comparación tal que $\varphi(u+v) \leq u + \varphi(v)$, para toda $u, v \in [0, \infty)$. Supongamos que $T : X \rightarrow X$ es una función con un único punto fijo p tal que $\|Tx - p\| \leq \varphi(\|x - p\|)$, para toda $x \in X$, entonces el proceso iterativo de Mann es casi T -estable.

Teorema 2.2.2. (Rezapour, Haghi, Rhoades [54, Corolario 2.3], 2011). Sea X un espacio normado. Sea $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función de comparación tal que $\varphi(u+v) \leq u + \varphi(v)$, para toda $u, v \in [0, \infty)$. Supongamos que $T : X \rightarrow X$ es una función que satisface

$$\|Tx - Ty\| \leq \varphi \left(\max \left\{ \|x - y\| + \frac{\|x - Tx\| + \|y - Ty\|}{2}, \|x - Ty\|, \|y - Tx\| \right\} \right),$$

para toda $x \in X$. Entonces el proceso iterativo de Mann es casi T -estable.

2.3. Casi T-Estabilidad Sumable

Definición 2.3.1. (Berinde [5], 2003). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función con un único punto fijo p . Sea $x_{n+1} = f(T, x_n)$ un proceso iterativo. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$. Sea $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión cualquiera en X y definamos $\varepsilon_n = d(y_{n+1}, f(T, y_n))$. El proceso

iterativo $x_{n+1} = f(T, x_n)$ se dice *casi T -estable sumable* o *casi estable sumable con respecto a T* si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} d(y_n, p) < \infty$$

La casi estabilidad sumable de un proceso iterativo expresa una propiedad importante relacionada con la velocidad de convergencia de la sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Observación 2.3.1. Cada proceso iterativo casi estable sumable es también casi estable ya que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, p) = 0$.

Existen procesos iterativos que no son casi estables sumables como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.1. (Berinde [5, Ejemplo 1], 2003). Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definido por $Tx = x$, para cada $x \in [0, 1]$ donde $[0, 1]$ es dotado con la métrica usual. Sea $p = 0$, tomemos $y_n = \frac{1}{n}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$, $\varepsilon_n = |y_{n+1} - Ty_n| = \frac{1}{n(n+1)}$, y entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ pero

$\sum_{n=0}^{\infty} |y_n - p| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. De ahí, la iteración de Picard no es casi T -estable sumable.

Los siguientes resultados son extraídos de [5] donde se muestra que la iteración de Picard, la iteración de Ishikawa y la de Kirk, son casi T -estables sumables bajo ciertas condiciones.

Teorema 2.3.1. (Berinde [5, Teorema 1], 2003). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una contracción de Osilike. Suponga que T tiene un punto fijo p . Sean $x_0 \in X$ y $x_{n+1} = Tx_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p y es casi T -estable sumable.

Teorema 2.3.2. (Berinde [5, Teorema 2], 2003). Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ una contracción de Osilike con $(d(u, v) = \|u - v\|, \forall u, v \in X)$. Suponga que T tiene un punto fijo p . Sean $x_0 \in X$ y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión generada por la iteración de Ishikawa con $\alpha_n, \beta_n \in [0, 1]$ tal que $0 < \alpha \leq \alpha_n$, para algún α . Entonces la iteración de Ishikawa converge a p y es casi T -estable sumable.

Teorema 2.3.3. (Berinde [5, Teorema 3], 2003). Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ una contracción de Osilike con $(d(u, v) = \|u - v\|, \forall u, v \in X)$. Suponga que T tiene un punto fijo p . Sean $x_0 \in X$ y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión generada por la iteración de Kirk con $\alpha_i \geq 0, \alpha_1 > 0$. Entonces la iteración de Kirk converge a p y es casi T -estable sumable.

2.4. T-Estabilidad débil

Berinde [4], hace notar que el concepto de (casi) estabilidad, que hemos definido hasta ahora, no es muy preciso en el sentido de que no es natural que la sucesión sea tomada de forma arbitraria. De acuerdo a Berinde, desde el punto de vista numérico, la sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ debe ser una aproximación a $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en cierto sentido. Adoptando el concepto de la elección de una sucesión aproximada, Berinde introduce el concepto de estabilidad débil.

Definición 2.4.1. (Berinde [4], 2007). Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ una sucesión dada. Diremos que $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ es una *sucesión aproximada* de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ si para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\eta = \eta(k)$ tal que

$$d(x_n, y_n) \leq \eta, \quad n \geq k.$$

Definición 2.4.2. (Berinde [4], 2007). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función. Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ un proceso iterativo definido por $x_0 \in X$ y $x_{n+1} = f(T, x_n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Suponga que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a un punto fijo p de T . Si para cada sucesión aproximada $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ se tiene la siguiente implicación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_{n+1}, f(T, y_n)) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p,$$

entonces se dice que el proceso iterativo $x_{n+1} = f(T, x_n)$ es *débilmente T-estable* o *débilmente estable con respecto a T*.

Cada proceso iterativo estable es también débilmente estable, pero el inverso no siempre es cierto (ver Berinde [4], ejemplo 7.3, pág. 165).

El siguiente ejemplo muestra que existen procesos iterativos casi estables, pero que no son débilmente estables, esto es que la estabilidad débil no implica la casi estabilidad.

Ejemplo 2.4.1. En el Ejemplo 2.2.1 se tiene que el proceso iterativo de Mann definido por (2.2.2) a partir de un $x_0 \in \mathbb{R}$ es casi T -estable, ahora veremos que ese mismo proceso no es débilmente estable. Ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, existe $\kappa \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq x_n \leq 1$, para toda $n \geq \kappa$.

Sea $\eta_n = 1 + \frac{1}{n}$, $\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de números positivos decreciente que converge a $\eta = 1$. Entonces $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida como $y_n = \frac{n}{1+n}$, $n \geq 0$ es una sucesión aproximada de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, ya que $|x_n - y_n| \leq 1 < 1 + \frac{1}{n} = \eta_n$, para toda $n \geq \kappa$. Además $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{2n} = 0$ y sin embargo $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ no converge a 0. Por lo tanto la iteración de Ishikawa no es débilmente estable con respecto a T .

2.5. γ -Estabilidad

Sea $x_{n+1} = f(T, x_0)$ un proceso iterativo cuya sucesión converge a un punto fijo p de T . Cuando este proceso iterativo, como método numérico, es implementado en una computadora para aproximar a dicho punto fijo, se requiere una instrucción que asegure que el programa termine de ejecutarse en una iteración en la cual la aproximación, bajo cierto criterio, pueda considerarse “suficientemente buena”. Una manera es indicar que el programa se detenga cuando la distancia entre la aproximación ω_{n+1} y la anterior ω_n sea menor que cierto valor ϵ . Si trabajamos en espacios métricos esa condición de paro sería $d(\omega_{n+1}, \omega_n) < \epsilon$. Se espera que esto suceda, ya que se busca una aproximación a p y entonces $d(\omega_{n+1}, \omega_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como esto no siempre sucede, se corre el riesgo de que las aproximaciones no converjan a p y el programa trabaje indefinidamente sin obtener un resultado final. Por esta razón se incluye la condición adicional de paro determinado por cierto número de iteraciones. Aun así, la condición $d(\omega_{n+1}, \omega_n) \rightarrow 0$ no garantiza que $\omega_n \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$. Este problema es precisamente el que trata la γ -estabilidad.

Definición 2.5.1. (García [16], 2000). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función con un único punto fijo p . Sea $x_{n+1} = f(T, x_n)$ un proceso iterativo. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$. Sea $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión cualquiera en X y definamos $\gamma_n = d(y_n, f(T, y_n))$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$ implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$, entonces diremos que el proceso iterativo $x_{n+1} = f(T, x_n)$ es γ -estable.

En teoría, la condición de paro $d(\omega_{n+1}, \omega_n) < \epsilon$ respondería satisfactoriamente para los procesos iterativos γ -estables.

La γ -estabilidad no implica a la T -estabilidad, con el teorema expuesto a continuación y el Ejemplo 2.1.2 de la Sección 2.1 veremos este hecho.

Teorema 2.5.1. (García [16, Proposición 5.1.1], 2000). Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función tal que para cada $x, y \in X$, $x \neq y$, $d(Tx, Ty) \leq \max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}$. Supongamos que p es el único punto fijo de T y que la sucesión generada por el proceso iterativo de Picard converge a p . Entonces el proceso iterativo de Picard es γ -estable.

Puede mostrarse fácilmente que T del Ejemplo 2.1.2 (pág. 23) satisface la condición del Teorema 2.5.1. Entonces tenemos que el proceso iterativo de Picard no es T -estable, pero si es γ -estable.

Utilizando el mismo Ejemplo 2.1.2 y asumiendo que ya sabemos que el proceso iterativo de Picard es γ -estable, podemos mostrar que la γ -estabilidad no implica a la casi T -estabilidad, ya que tomando $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset$

$[0, 1]$, definida como $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4^{2n}}$ y $y_{2n-1} = \frac{1}{4^{2n+1}}$, para toda $n \in \mathbb{N}$, como vimos en el Ejemplo 2.1.2, $\varepsilon_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$, para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$, pero $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ no converge a $\frac{1}{2}$. Entonces el proceso iterativo de Picard no es casi T -estable.

Al mismo tiempo, el ejemplo muestra que la γ -estabilidad no implica a la casi T -estabilidad sumable, pues a pesar de que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$, se tiene

que $\sum_{n=0}^{\infty} |y_n - p| = \infty$ y entonces el proceso iterativo de Picard tampoco es casi T -estable sumable.

Ahora veremos que la casi T -estabilidad no implica a la γ -estabilidad y por tanto estos dos conceptos son independientes. En el Ejemplo 2.2.1 tenemos que el proceso iterativo $x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ es casi T -estable con respecto a la función $Tx = \frac{1}{2}x$. Utilizando la sucesión $y_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 0$, veremos que este proceso no es γ -estable. Ya que

$$\begin{aligned} \gamma_n &= |y_n - (1 - \alpha_n)x_n - \alpha_n T x_n| \\ &= \left| \frac{n}{n+1} - \frac{2n+1}{2n+2} \right| = \frac{1}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$, pero y_n no converge a 0.

Ahora a presentaremos otros resultados que se han obtenido sobre γ -estabilidad.

Teorema 2.5.2. (*García [16, Proposición 5.2.1], 2000*). Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una contracción de Zamfirescu (Definición 1.2.5). Sea $p \in X$ el punto fijo de T . Sea $x_0 \in X$ y $x_{n+1} = T x_n$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sean $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en X y $\gamma_n = d(y_n, T y_n)$. Entonces,

a) $d(y_{n+1}, p) \leq \left(\frac{1+2\delta}{1-\delta}\right) \gamma_{n+1}$, donde $\delta = \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}$ y α, β, γ son las constantes que corresponden la contracción de Zamfirescu.

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$.

Teorema 2.5.3. (*García [16, Proposición 5.2.2], 2000*). Sean (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una aplicación tipo Kannan en el sentido de la Definición 1.2.3 para la cual $\sup\{b(x, y) + b(y, x)\} = \lambda < 1$. Sean $x_0 \in X$, $x_{n+1} = T x_n$. Sean $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ otra sucesión en X y $\gamma_n = d(y_n, T y_n)$. Entonces,

$$a) d(y_{n+1}, p) \leq (1 + \lambda)\gamma_{n+1},$$

$$b) \text{ Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0 \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p.$$

Teorema 2.5.4. (*García [16, Proposición 5.3.1], 2000*). Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ una aplicación tipo Kannan en el sentido de la Definición 1.2.3 para la cual $\lambda = \sup\{b(x, y) + b(y, x)\} < 1$. Sean $\alpha_i \in [0, 1]$, $i = 0, 1, \dots, k$ tales que $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$. Consideremos el proceso iterativo de Kirk y supongamos que la sucesión generada $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p , el punto fijo de T . Sean $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ y $\gamma_n = \left\| y_n - \sum_{i=0}^k \alpha_i T^i x_n \right\|$. Entonces,

$$a) d(y_{n+1}, p) \leq \frac{1+\lambda(1-\alpha_0)}{1-\alpha_0} \gamma_{n+1} + \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} \|x_{n+1} - p\| + \lambda \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \frac{1}{1-\alpha_0} \|x_{n+2} - p\|,$$

$$b) \text{ Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0 \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p.$$

Capítulo 3

Resultados obtenidos en espacios métricos

En este capítulo, establecemos los resultados originales de este trabajo de tesis sobre T -estabilidad, casi-estabilidad y casi T -estabilidad sumable de dos procesos iterativos que introduciremos como resultado del proceso de generalización que indagamos en la Sección 1.1. También estudiamos la γ -estabilidad para los procesos iterativos de Picard y Mann, asociados a funciones que satisfacen algunas condiciones estudiadas en el primer capítulo.

3.1. Resultados sobre T -estabilidad

Motivados por la manera en como se han ido generalizando los procesos iterativos que presentamos en la Sección 1.1, definimos a continuación dos nuevos procesos iterativos.

Definición 3.1.1. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y Y un conjunto tal que $X \subseteq Y$. Sean $m \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ fijo y $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $S, T_{j, i_j} : Y \rightarrow X$, para $j = 1, 2, \dots, m$ y $i_j = 1, \dots, k_j$, son funciones tales que: S es inyectiva, y para cualquier colección finita $\{\lambda_{i_j}\}_{i_j=0}^{k_j} \subset [0, 1]$ y para cada $x, y \in Y$ se tiene que:

$$\left(\lambda_0 Sx + \sum_{i_j=1}^{k_j} \lambda_{i_j} T_{j, i_j} y \right) \in S(Y), \text{ para } j = 1, 2, \dots, m.$$

Supongamos que $\alpha_{n, i_j}^{(j)} \in [0, 1]$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, $i_j \in \{0, \dots, k_j\}$

y $n \in \mathbb{N}$ y además $\sum_{i_j=0}^{k_j} \alpha_{n,i_j}^{(j)} = 1$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Sea $x_0 \in Y$ un punto arbitrario. Sea $x_0 \in Y$, definimos el *proceso iterativo Jungck-Kirk multi-pasos generalizado* por

$$\begin{cases} Sz_n^{(m)} = \alpha_{n,0}^{(m)} Sx_n + \sum_{i_m=1}^{k_m} \alpha_{n,i_m}^{(m)} T_{m,i_m} x_n; \\ Sz_n^{(j)} = \alpha_{n,0}^{(j)} Sx_n + \sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{n,i_j}^{(j)} T_{j,i_j} z_n^{j+1}, \text{ para } j=2, \dots, m-1; \\ Sx_{n+1} = \alpha_{n,0}^{(1)} Sx_n + \sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} T_{1,i_1} z_n^{(2)}. \end{cases}$$

Si en la definición anterior $T_{j,i_j} = T^{i_j}$ (aquí T^{i_j} denota la composición de T , i_j -veces), para $j = 1, 2, \dots, m$ e $i_j = 1, \dots, k_j$, obtenemos el caso especial siguiente.

Definición 3.1.2. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y Y un conjunto tal que $X \subseteq Y$. Sean $m \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ fijo y $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $S, T : Y \rightarrow X$ son funciones tales que: S es inyectiva y para cualquier colección finita $\{\lambda_{i_j}\}_{i_j=0}^{k_j} \subset [0, 1]$ y para cada $x, y \in Y$ se tiene que:

$$\left(\lambda_0 Sx + \sum_{i_j=1}^{k_j} \lambda_{i_j} T^{i_j} y \right) \in S(Y), \text{ para cada } j = 1, 2, \dots, m.$$

Supongamos que $\alpha_{n,i_j}^{(j)} \in [0, 1]$ para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, $i_j \in \{0, \dots, k_j\}$ y $n \in \mathbb{N}$, y $\sum_{i_j=0}^{k_j} \alpha_{n,i_j}^{(j)} = 1$, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Sea $x_0 \in Y$, definimos el *proceso iterativo Jungck-Kirk multi-pasos* por

$$\begin{cases} Sz_n^{(m)} = \alpha_{n,0}^{(m)} Sx_n + \sum_{i_m=1}^{k_m} \alpha_{n,i_m}^{(m)} T^{i_m} x_n; \\ Sz_n^{(j)} = \alpha_{n,0}^{(j)} Sx_n + \sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{n,i_j}^{(j)} T^{i_j} z_n^{j+1}, \text{ para } j=2, \dots, m-1; \\ Sx_{n+1} = \alpha_{n,0}^{(1)} Sx_n + \sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} T^{i_1} z_n^{(2)}. \end{cases}$$

Observaciones: Consideremos el proceso iterativo Jungck-Kirk multi-pasos.

- 1.- Si $Y = X$, $S = I$, (I la función identidad en X) obtenemos el proceso iterativo Kirk multi-pasos (Gursoy, Karakaya y Rhoades [20]).
- 2.- Si $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 1$, obtenemos el proceso iterativo Jungck-multipasos (Olaeru and Akewe [39]).
- 3.- Si $m = 3$, obtenemos el proceso iterativo Jungck-Kirk-Noor (Chugh y Kumar [10]).
- 4.- Si $m = 3$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, obtenemos el proceso iterativo de Jungck-Noor (Olatinwo [40]).
- 5.- Si $Y = X$, $S = I$, $m = 3$ y $\alpha_{n,0}^{(3)} = 1$, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, obtenemos el proceso iterativo Kirk-Ishikawa (Olatinwo [45]).

Estas observaciones nos dicen como se obtienen algunos de los procesos iterativos que hemos enunciado en la Sección 1.1 a partir de las iteraciones Jungck-Kirk multi-pasos. Pero por supuesto, a partir de este proceso iterativo, también se pueden obtener los procesos iterativos Mann [31], Ishikawa[24], Noor [38], multi-pasos [56] y Kirk [26].

Los procesos iterativos a los que generaliza las iteraciones Jungck-Kirk multi-pasos, obviamente también los generaliza las iteraciones Jungck-Kirk multi-pasos generalizado.

Los dos teoremas siguientes, son dos de los resultados principales de este trabajo de tesis, en ellos se establecen la T -estabilidad, la casi estabilidad y casi estabilidad sumable de los procesos iterativos Jungck-Kirk multi-pasos generalizado y Jungck-Kirk multi-pasos. Estos resultados están publicados en [53].

Teorema 3.1.1. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y Y un conjunto tal que $X \subseteq Y$. Sean $m \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ fijo y $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $S, T_{j,i_j} : Y \rightarrow X$, para $j = 1, 2, \dots, m$ y $i_j = 1, \dots, k_j$, son funciones tales que: S es inyectiva y para cualquier colección finita $\{\lambda_{i_j}\}_{i_j=0}^{k_j} \subset [0, 1]$ y para cada $x, y \in Y$ se tiene que:

$$\left(\lambda_0 Sx + \sum_{i_j=1}^{k_j} \lambda_{i_j} T_{j,i_j} y \right) \in S(Y), \text{ esto para cada } j = 1, 2, \dots, m.$$

Además supongamos que existe un $p \in S(Y)$ tal que

- a) $\|T_{1,i_1} x - p\| \leq \delta \|Sx - p\|$, para algún $\delta \in [0, 1)$, cada $x \in Y$ e $i_1 = 1, \dots, k_1$;
- b) $\|T_{j,i_j} x - p\| \leq \|Sx - p\|$, para cada $x \in Y$, $i_j = 1, \dots, k_j$ y $j = 1, 2, \dots, m$.

Supongamos también que $\{Sx_n\}_{n=0}^\infty$ es la sucesión generada por el proceso iterativo Jungck-Kirk multi-pasos generalizado, con la condición adicional de que existe $\alpha < 1$ tal que $0 < \alpha_{n,0}^{(1)} + \delta \leq \alpha$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\{Sy_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión arbitraria en $S(Y)$, definamos

$$Sw_n^{(m)} = \alpha_{n,0}^{(m)} Sy_n + \sum_{i_m=1}^{k_m} \alpha_{n,i_m}^{(m)} T_{m,i_m} y_n;$$

$$Sw_n^{(j)} = \alpha_{n,0}^{(j)} Sy_n + \sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{n,i_j}^{(j)} T_{j,i_j} w_n^{j+1}, \text{ para } j=2, \dots, m-1$$

y

$$\epsilon_n = \left\| Sy_{n+1} - \alpha_{n,0}^{(1)} Sy_n - \sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} T_{1,i_1} w_n^{(2)} \right\|.$$

Si $q \in Y$ es el punto tal que $Sq = p$, entonces

i) q es un punto de coincidencia de cada una de las funciones consideradas, es decir $T_{j,i_j} q = Sq = p$ para cada $i_j \in \{1, \dots, k_j\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, m\}$;

ii) la sucesión $\{Sx_n\}_{n=0}^\infty$ converge a p ;

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} Sy_n = p$;

iv) si $\sum_{n=0}^\infty \epsilon_n < \infty$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} Sy_n = p$;

v) si $\sum_{n=0}^\infty \epsilon_n < \infty$ entonces $\sum_{n=0}^\infty d(Sy_n, p) < \infty$.

Demostración. Por la hipótesis a) puede verse directamente que q es un punto de coincidencia de todas las funciones que se están considerando. Omitimos la demostración del inciso (ii), ya que es similar a la prueba de la primera implicación de (iii) que a continuación se presenta.

(Necesidad). Suponga que $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$.

$$\begin{aligned} \|Sy_{n+1} - p\| &\leq \left\| Sy_{n+1} - \alpha_{n,0}^{(1)} Sy_n - \sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} T_{1,i_1} w_n^{(2)} \right\| \\ &\quad + \left\| \alpha_{n,0}^{(1)} Sy_n + \sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} T_{1,i_1} w_n^{(2)} - p \right\|. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|S y_{n+1} - p\| &= \epsilon_n + \left\| \alpha_{n,0}^{(1)} S y_n + \sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} T_{1,i_1} w_n^{(2)} - \alpha_{n,0}^{(1)} p - \sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} p \right\| \\ &\leq \epsilon_n + \alpha_{n,0}^{(1)} \|S y_n - p\| + \sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} \|T_{1,i_1} w_n^{(2)} - p\| \end{aligned}$$

por la hipótesis a) tenemos,

$$\|S y_{n+1} - p\| \leq \epsilon_n + \alpha_{n,0}^{(1)} \|S y_n - p\| + \left(\sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} \right) \delta \|S w_n^{(2)} - p\|. \quad (3.1.1)$$

Ahora consideremos a $\|S w_n^{(j)} - p\|$, para $j = 2, \dots, m-1$,

$$\begin{aligned} \|S w_n^{(j)} - p\| &= \left\| \alpha_{n,0}^{(j)} S y_n + \sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{n,i_j}^{(j)} T_{j,i_j} w_n^{(j+1)} - \sum_{i_j=0}^{k_j} \alpha_{n,i_j}^{(j)} p \right\| \\ &\leq \alpha_{n,0}^{(j)} \|S y_n - p\| + \sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{n,i_j}^{(j)} \|T_{j,i_j} w_n^{(j+1)} - p\| \end{aligned}$$

por la hipótesis b) tenemos que,

$$\|S w_n^{(j)} - p\| \leq \alpha_{n,0}^{(j)} \|S y_n - p\| + \left(\sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{n,i_j}^{(j)} \right) \|S w_n^{(j+1)} - p\|. \quad (3.1.2)$$

Procediendo de manera similar tenemos para, $\|S w_n^{(m)} - p\|$,

$$\|S w_n^{(m)} - p\| \leq \alpha_{n,0}^{(m)} \|S y_n - p\| + \left(\sum_{i_m=1}^{k_m} \alpha_{n,i_m}^{(m)} \right) \|S y_n - p\| = \|S y_n - p\|. \quad (3.1.3)$$

Por (3.1.2) y (3.1.3), $\|S w_n^{(m-l)} - p\| \leq \|S y_n - p\|$, para $l = 0, 1, \dots, m-2$, de modo que

$$\|S w_n^{(2)} - p\| \leq \|S y_n - p\|, \quad (3.1.4)$$

y por (3.1.1)

$$\begin{aligned} \|S y_{n+1} - p\| &\leq \epsilon_n + \alpha_{n,0}^{(1)} \|S y_n - p\| + \left(\sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} \right) \delta \|S y_n - p\| \\ &\leq \epsilon_n + \left(\alpha_{n,0}^{(1)} + \delta \right) \|S y_n - p\| \\ &\leq \epsilon_n + \alpha \|S y_n - p\|. \end{aligned}$$

Ya que $\left(\alpha_{n,0}^{(1)} + \delta \right) \leq \alpha$

$$\|S y_{n+1} - p\| \leq \epsilon_n + \alpha \|S y_n - p\|. \quad (3.1.5)$$

Por el Lema 1.3.1, $\lim_{n \rightarrow \infty} S y_n = p$.

Ahora continuamos con la otra implicación de (iii).

(Suficiencia). Supongamos $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S y_n - p\| = 0$.

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \left\| S y_{n+1} - \alpha_{n,0}^{(1)} S y_n - \sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} T_{1,i_1} w_n^{(2)} \right\| \\ &\leq \|S y_{n+1} - p\| + \left\| \sum_{i_1=0}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} p - \alpha_{n,0}^{(1)} S y_n - \sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} T_{1,i_1} w_n^{(2)} \right\| \\ &\leq \|S y_{n+1} - p\| + \alpha_{n,0}^{(1)} \|S y_n - p\| + \sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} \|T_{1,i_1} w_n^{(2)} - p\| \\ &\leq \|S y_{n+1} - p\| + \alpha_{n,0}^{(1)} \|S y_n - p\| + \left(\sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} \right) \delta \|S w_n^{(2)} - p\| \end{aligned}$$

De esta última desigualdad y de (3.1.4),

$$\begin{aligned} \epsilon_n &\leq \|S y_{n+1} - p\| + \alpha_{n,0}^{(1)} \|S y_n - p\| + \left(\sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} \right) \delta \|S y_n - p\| \\ &\leq \|S y_{n+1} - p\| + \|S y_n - p\|. \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\|S y_{n+1} - p\| + \|S y_n - p\|) = 0.$$

El inciso (v) se tiene también por la desigualdad (3.1.5) y el Lema 1.3.1.

Y el inciso (iv) se tiene como consecuencia tanto de (iii) como de (v). \square

A pesar de que el siguiente resultado puede pensarse como caso particular del teorema anterior, debe ponerse atención en su formulación por la manera en que aparecen las condiciones contractivas. La forma de estas condiciones se acercan más a las utilizadas en [20, Teorema 3.2](Teorema 2.1.4 en este trabajo).

Corolario 3.1.2. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y Y un conjunto tal que $X \subseteq Y$. Sean $S, T : Y \rightarrow X$ dos funciones tales que: S es inyectiva y para cualquier colección finita $\{\lambda_{i_j}\}_{i_j=0}^{k_j} \subset [0, 1]$ y para cada $x, y \in Y$ se tiene que:

$$\left(\lambda_0 Sx + \sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i T^i y \right) \in S(Y), \text{ para cada } j \in \{1, \dots, m\}.$$

Además supongamos que existe un $p \in S(Y)$ tal que

- c) $\|Tx - p\| \leq \delta \|Sx - p\|$, para algún $\delta \in [0, 1)$ y cada $x \in Y$;
- d) $\|S(T(x)) - p\| \leq \|T(S(x)) - p\|$, para cada $x \in Y$;
- e) $\|S^2x - p\| \leq \|Sx - p\|$, para cada $x \in Y$.

Supongamos también que $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión generada por el proceso iterativo Jungck-Kirk multi-pasos, con la condición adicional de que existe $\alpha < 1$ tal que $0 < \alpha_{n,0}^{(1)} + \delta \leq \alpha$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\{Sy_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión arbitraria en $S(Y)$, definamos

$$Sw_n^{(m)} = \alpha_{n,0}^{(m)} Sy_n + \sum_{i_m=1}^{k_m} \alpha_{n,i_m}^{(m)} T^{i_m} y_n;$$

$$Sw_n^{(j)} = \alpha_{n,0}^{(j)} Sy_n + \sum_{i_j=1}^{k_j} \alpha_{n,i_j}^{(j)} T^{i_j} w_n^{j+1}, \text{ para } j=2, \dots, m-1;$$

$$\epsilon_n = \left\| Sy_{n+1} - \alpha_{n,0}^{(1)} Sy_n - \sum_{i_1=1}^{k_1} \alpha_{n,i_1}^{(1)} T^{i_1} w_n^{(2)} \right\|.$$

Si $q \in Y$ es el punto tal que $Sq = p$, entonces

- i) q es un punto de coincidencia de S y T ; más aun, $q = p$, es decir p es un punto fijo de T y S . Además este punto fijo es único.
- ii) la sucesión $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p ;
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} Sy_n = p$;
- iv) si $\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n < \infty$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} Sy_n = p$;

$$v) \text{ si } \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n < \infty \text{ entonces } \sum_{n=0}^{\infty} d(Sy_n, p) < \infty.$$

Demostración. Primero, para probar (i) notemos que (e) implica que $Sp = p$. Ya que S es una función inyectiva, entonces $q = p$. Ahora, por (c) tenemos que $Tp = p$ y de (c) obtenemos que si existe otro punto fijo p' , entonces $p' = p$.

Las pruebas de (ii), (iii), (iv) y (v) se siguen del Teorema 3.1.1. Si ponemos $T_{j,i_j} = T^{i_j}$, para $i_j = 1, \dots, k_j$ y $j = 1, \dots, m$, en el Teorema 3.1.1, sólo necesitamos observar que los supuestos a) and b) se satisfacen. Para esto, fijemos $j \in \{1, \dots, m\}$ y consideremos $i_j \geq 2$,

$$\|T^{i_j}x - p\| = \|TT^{i_j-1}x - p\|.$$

Por la hipótesis c), $\|T^{i_j}x - p\| \leq \delta \|ST^{i_j-1}x - p\|$.

Por la hipótesis d), $\|T^{i_j}x - p\| \leq \delta \|T^{i_j-1}Sx - p\|$.

Repitiendo estos pasos i_j -veces, tenemos,

$$\begin{aligned} \|T^{i_j}x - p\| &\leq \delta^{i_j} \|S^{i_j}x - p\| \\ &\leq \delta \|S^2 S^{i_j-2}x - p\|. \end{aligned}$$

Por la hipótesis e), $\|T^{i_j}x - p\| \leq \delta \|S^{i_j-1}x - p\|$.

Repitiendo estos pasos i_j -veces, tendremos que,

$$\|T^{i_j}x - p\| \leq \delta \|Sx - p\|.$$

Por lo tanto, a) y b) se satisfacen. □

En el caso particular $Y = X$ y S la función identidad en X en el Corolario 3.1.2, obtenemos parcialmente los Teoremas 6 y 7 de [20]. Pero nosotros usamos la Condición 1.2.15 en lugar de la Condición 1.2.4.

El Teorema 3.1.1 y el Corolario 3.1.2 generalizan parcialmente a los Teoremas 3.1 y 3.2 de Chugh y Kumar [10]. Esto se puede ver si elegimos $m = 3$ en el Corolario 3.1.2.

Por último observemos que el Teorema 3.1 de [45] (Teorema 2.1.2 en este trabajo) es generalizado también por los resultados de esta sección.

3.2. Resultados sobre γ -estabilidad

La mayoría de los resultados sobre estabilidad de procesos iterativos, que podemos encontrar en la literatura, están dedicados a la T -estabilidad. Sin embargo, como vimos en el Capítulo 2, existen procesos iterativos que pueden no ser T -estables pero sí γ -estables. En esta sección estudiamos la γ -estabilidad de los procesos iterativos de Picard y de Mann para ciertas clases de funciones.

Cabe recalcar que todos y cada uno de los resultados que aparecen en toda esta sección son resultados propios de la tesis. Iniciaremos con el resultado que asegura la γ -estabilidad del proceso iterativo de Mann para funciones que satisfacen la Condición 1.2.16.

Teorema 3.2.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sea $T : X \rightarrow X$ una función con un punto fijo p tal que para cierto $L > 0$ y cierto $0 \leq \lambda < 1$,*

$$\|Tx - p\| \leq L\|x - Tx\| + \lambda\|x - p\|, \quad \forall x \in X. \quad (3.2.1)$$

Supongamos que la sucesión generada por el proceso iterativo de Mann $x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_nTx_n$ converge a p . Si la sucesión $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ es tal que $\alpha \leq \alpha_n \leq 1$ para algún $\alpha > 0$, entonces el proceso iterativo de Mann es γ -estable.

Demostración. Primero mostremos que el punto fijo p de T es único. Supongamos que q es otro punto fijo de T , entonces

$$\|p - q\| = \|Tp - q\| \leq L\|p - Tp\| + \lambda\|p - q\| = \lambda\|p - q\|,$$

ya que $0 \leq \lambda < 1$, entonces $\|p - q\| = 0$.

Ahora, sea $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión cualquiera en X y definamos $\gamma_n = \|y_n - [(1 - \alpha_n)y_n + \alpha_nTy_n]\|$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &\leq \|y_n - (1 - \alpha_n)y_n - \alpha_nTy_n\| + \|(1 - \alpha_n)y_n + \alpha_nTy_n - p\| \\ &\leq \gamma_n + (1 - \alpha_n)\|y_n - p\| + \alpha_n\|Ty_n - p\| \\ &\leq \gamma_n + (1 - \alpha_n)\|y_n - p\| + \alpha_n(L\|y_n - Ty_n\| + \lambda\|y_n - p\|). \end{aligned}$$

Notemos que $\gamma_n = \alpha_n\|y_n - Ty_n\|$, entonces

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &\leq \gamma_n + (1 - \alpha_n)\|y_n - p\| + L\gamma_n + \alpha_n\lambda\|y_n - p\| \\ &= (1 + L)\gamma_n + [1 - \alpha_n(1 - \lambda)]\|y_n - p\|. \end{aligned}$$

Así tenemos que $[1 - 1 + \alpha_n(1 - \lambda)]\|y_n - p\| \leq (1 + L)\gamma_n$, por lo que

$$\|y_n - p\| \leq \frac{(1 + L)}{\alpha_n(1 - \lambda)}\gamma_n.$$

Por lo tanto, si $\gamma_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $\|y_n - p\|$ converge también a cero. □

Nota: Si $\alpha = 1$ entonces $\alpha_n = 1$, así el proceso iterativo de Mann llega a ser el proceso iterativo de Picard. De hecho, el Teorema 3.2.1 puede escribirse en espacios métricos como sigue.

Teorema 3.2.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $T : X \rightarrow X$ una función con un punto fijo p tal que para cierto $L > 0$ y cierto $0 \leq \delta < 1$,*

$$d(Tx, p) \leq Ld(x, Tx) + \delta d(x, p), \quad \forall x \in X. \quad (3.2.2)$$

Supongamos que la sucesión generada por el proceso iterativo de Picard converge a p . Entonces este proceso iterativo es γ -estable.

La prueba es la misma que la del Teorema 3.2.1 haciendo $\alpha_n = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y cambiando la norma por la métrica d .

Corolario 3.2.3. *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $T : X \rightarrow X$ una función que satisface*

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}, \quad (3.2.3)$$

para algún $0 \leq \delta < 1$. Supongamos que T tiene un punto fijo p y que la sucesión generada por el proceso iterativo de Picard converge a él. Entonces, el punto fijo es único y el proceso iterativo de Picard es γ -stable.

La prueba se sigue del Teorema 3.2.2 ya que

$$\begin{aligned} d(Tx, Tp) &\leq \delta \max\{d(x, p), d(x, Tx), d(p, Tp), d(x, Tp), d(p, Tx)\} \\ &\leq \delta d(x, p) + \delta d(x, Tx). \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Y por lo tanto T satisface la desigualdad (3.2.2).

Si en el corolario anterior (X, d) es T -orbitalmente completo (ver Definición 1.3.1 en este trabajo de tesis), el Teorema 1 de Ćirić [11] asegura que T tiene un único punto fijo y que las iteraciones de Picard convergen a dicho punto.

Corolario 3.2.4. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sea $T : X \rightarrow X$ una función que satisface*

$$\|Tx - Ty\| \leq \delta \max\{\|x - y\|, \|x - Tx\|, \|y - Ty\|, \|x - Ty\|, \|y - Tx\|\}, \quad (3.2.5)$$

para algún $0 \leq \delta < 1$. Supongamos que T tiene un punto fijo p y que la sucesión generada por el proceso iterativo de Mann $x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n$ converge a él, si la sucesión $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ es tal que $\alpha \leq \alpha_n \leq 1$ para algún $\alpha > 0$. Entonces el punto fijo es único, y el proceso iterativo de Mann es γ -stable.

Este resultado se sigue del Teorema 3.2.1 puesto que las cuasi-contracciones satisfacen también (3.2.1), esto puede comprobarse fácilmente observando que la desigualdad (3.2.4) se tiene de igual manera para la norma $\|\cdot\|$.

Teorema 3.2.5. Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función para la cual existe $p \in X$ tal que para algún $\delta \in [0, 1)$:

$$d(Tx, p) \leq \delta d(x, p), \quad \forall x \in X.$$

Entonces,

- (i) p es punto fijo y es único,
- (ii) el proceso iterativo de Picard converge a p y es γ -stable.

La prueba de este último teorema podemos encontrarla implícitamente en la prueba del que sigue.

El Teorema 3.2.5 es válido también para contracciones de Osilike o funciones que satisfacen la Condición 1.2.4 y que poseen punto fijo. Por esta razón la conclusión (b) de la Proposición 5.2.1 de [16] (Teorema 2.5.2 en esta tesis) es implicado por nuestro resultado.

El siguiente resultado nos será útil para probar otros resultados que veremos más adelante.

Teorema 3.2.6. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ una función para la cual existe un $p \in X$ tal que $\|Tx - p\| \leq \delta \|x - p\| \quad \forall x \in X$, para algún $\delta \in [0, 1)$. Supongamos que la sucesión $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ asociada al proceso iterativo de Mann $x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n$ es tal que $\alpha \leq \alpha_n \leq 1$ para algún $\alpha > 0$. Entonces,

- (i) el punto fijo es único,
- (ii) la sucesión generada por el proceso iterativo de Mann converge a p ,
- (iii) el proceso iterativo de Mann es γ -stable.

Demostración. La prueba de (i) es inmediata ya que si existe otro punto fijo q , entonces $\|q - p\| = \|Tq - p\| \leq \delta \|q - p\|$, lo cual implica que $\|q - p\| = 0$. Para la convergencia del proceso iterativo de Mann, hacemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &= \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n - p\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n \|Tx_n - p\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n \delta \|x_n - p\| \\ &= [1 - \alpha_n(1 - \delta)]\|x_n - p\| \\ &\leq [1 - \alpha(1 - \delta)]\|x_n - p\|. \end{aligned}$$

Por esta desigualdad y el inciso (L_1) del Lema 1.3.1 obtenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$.

Para la γ -estabilidad definimos $\gamma_n = \|y_n - (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_nTy_n\|$ y hacemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &\leq \|y_n - (1 - \alpha_n)y_n - \alpha_nTy_n\| + \|(1 - \alpha_n)y_n + \alpha_nTy_n - p\| \\ &\leq \gamma_n + (1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n\|Tx_n - p\| \\ &\leq \gamma_n + [1 - \alpha(1 - \delta)]\|x_n - p\|. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad implica que

$$\|y_n - p\| \leq \frac{\gamma_n}{\alpha(1 - \delta)}.$$

Por lo tanto si $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$. □

En el Corolario 3.2.4 hemos establecido la γ -estabilidad del proceso iterativo de Mann para cuasi-contracciones. En el siguiente resultado veremos que la γ -estabilidad del proceso iterativo de Mann se mantiene para las Condiciones 1.2.2 y 1.2.3.

Teorema 3.2.7. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sea $T : X \rightarrow X$ una función que satisface*

$$\|Tx - Ty\| \leq \delta \max\{c\|x - y\|, \|x - Tx\| + \|y - Ty\|, \|x - Ty\| + \|y - Tx\|\}, \quad (3.2.6)$$

para ciertos $\delta, c \geq 0$ tales que $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$ y $0 \leq \delta c < 1$. Supongamos que T tiene un punto fijo p y sea $x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_nTx_n$ el proceso iterativo de Mann cuya sucesión $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisface que $\alpha \leq \alpha_n$, para todo $n \geq N$, para algún $N \in \mathbb{N}$ y algún $\alpha > 0$. Entonces,

- (i) el punto fijo es único,
- (ii) la sucesión generada por el proceso iterativo de Mann converge a p ,
- (iii) el proceso iterativo de Mann es γ -stable.

Demostración. En primer lugar recordemos que las contracciones de Osilike satisfacen la condición $\|Tx - p\| \leq \delta\|x - p\|$ cuando T tiene un punto fijo. Además las restricciones $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$ y $0 \leq \delta c < 1$ implican que T es también una contracción de Zamfirescu y por tanto también una contracción de Osilike. Por lo tanto (i), (ii) y (iii) de este teorema se siguen del Teorema 3.2.6. □

Corolario 3.2.8. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sea $T : X \rightarrow X$ una función que satisface*

$$\|Tx - Ty\| \leq \delta \max\{\|x - y\|, \|x - Tx\|, \|y - Ty\|, \|x - Ty\|, \|y - Tx\|\},$$

para algún $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$. Supongamos que T tiene un punto fijo p y que la sucesión $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ del proceso iterativo de Mann $x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_nTx_n$ es tal que $\alpha \leq \alpha_n \leq 1$ para algún $\alpha > 0$. Entonces,

- (i) el punto fijo es único,
- (ii) la sucesión generada por el proceso iterativo de Mann converge a p ,
- (iii) el proceso iterativo de Mann es γ -stable.

La prueba se sigue del Teorema 3.2.7 debido a que las funciones cuasi-contractivas con $\delta < \frac{1}{2}$ satisfacen (3.2.6) con $c=1$. También puede ser visto directamente como un corolario del Teorema 3.2.6 ya que las cuasi-contracciones con $\delta < \frac{1}{2}$ son también contracciones de Osilike.

El teorema siguiente establece la γ -estabilidad del proceso iterativo de Mann asociado a funciones que satisfacen la Condición 1.2.3 bajo ciertas restricciones en las constantes contractivas.

Teorema 3.2.9. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sea $T : X \rightarrow X$ una función que satisface*

$$\|Tx - Ty\| \leq \delta \max\{c\|x - y\| + \|x - Tx\| + \|y - Ty\|, c\|x - y\| + \|x - Ty\| + \|y - Tx\|\},$$

para ciertos $\delta, c \geq 0$ tales que $0 \leq \delta < 1$ y $0 \leq \delta(c+2) < 1$. Supongamos que T tiene un punto fijo p y consideremos el proceso iterativo de Mann $x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_nTx_n$, donde la sucesión $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisface que $\alpha \leq \alpha_n$, para todo $n \geq N$, para algún $N \in \mathbb{N}$ y algún $\alpha > 0$. Entonces,

- (i) el punto fijo es único,
- (ii) la sucesión generada por el proceso iterativo de Mann converge a p ,
- (iii) el proceso iterativo de Mann es γ -stable.

Demostración. Para demostrar (i) supongamos que existe otro punto fijo, digamos q . Entonces

$$\begin{aligned} \|p - q\| &= \|Tp - Tq\| \leq \delta \max\{c\|p - q\|, c\|p - q\| + \|p - q\| + \|q - p\|\} \\ &\leq \delta(c+2)\|p - q\|. \end{aligned}$$

Ya que $\delta(c+2) < 1$, tenemos que $\|p - q\| = 0$. Ahora veamos la demostración de (ii),

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_nTx_n - p\| \leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n\|Tx_n - p\|.$$

Además

$$\begin{aligned}
\|Tx_n - p\| &\leq \delta \max\{c\|x_n - p\| + \|x_n - Tx_n\|, \\
&\quad c\|x_n - p\| + \|x_n - p\| + \|p - Tx_n\|\} \\
&\leq \delta \max\{c\|x_n - p\| + \|x_n - p\| + \|Tx_n - p\|, \\
&\quad c\|x_n - p\| + \|x_n - p\| + \|p - Tx_n\|\} \\
&= \delta c\|x_n - p\| + \delta\|x_n - p\| + \delta\|Tx_n - p\|.
\end{aligned}$$

Entonces $\|Tx_n - p\| \leq \frac{\delta(c+1)}{1-\delta}\|x_n - p\|$. Luego

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n \left(\frac{\delta(c+1)}{1-\delta} \right) \|x_n - p\| \\
&= \left[1 - \alpha_n + \alpha_n \left(\frac{\delta(c+1)}{1-\delta} \right) \right] \|x_n - p\| \\
&= \left[\frac{1 - \delta - \alpha_n + \delta\alpha_n + \alpha_n\delta c + \alpha_n\delta}{1-\delta} \right] \|x_n - p\| \\
&= \left[\frac{1-\delta}{1-\delta} + \frac{-\alpha_n + \alpha_n\delta(c+2)}{1-\delta} \right] \|x_n - p\| \\
&= \left[1 - \alpha_n \left(\frac{1-\delta(c+2)}{1-\delta} \right) \right] \|x_n - p\|. \\
&\leq \left[1 - \alpha \left(\frac{1-\delta(c+2)}{1-\delta} \right) \right] \|x_n - p\|. \tag{3.2.7}
\end{aligned}$$

Por último veamos que $0 \leq 1 - \alpha \left(\frac{1-\delta(c+2)}{1-\delta} \right) < 1$. Sea $\Lambda = 1 - \alpha \left(\frac{1-\delta(c+2)}{1-\delta} \right)$. Notemos que

$$1 - \frac{1-\delta(c+2)}{1-\delta} = \frac{1-\delta-1+\delta c+2\delta}{1-\delta} = \frac{\delta(c+1)}{1-\delta} \geq 0.$$

Entonces $0 \leq \frac{1-\delta(c+2)}{1-\delta} \leq 1$ y por lo tanto $0 \leq \Lambda < 1$. Luego (3.2.7), queda escrito como $\|x_{n+1} - p\| \leq \Lambda\|x_n - p\|$. Así, por el inciso (L_1) del Lema 1.3.1, x_n converge a p .

Para la demostración de (iii) tomamos $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión cualquiera en X y definamos $\gamma_n = \|y_n - (1 - \alpha_n)y_n - \alpha_n Ty_n\|$.

$$\begin{aligned}
\|p - y_n\| &\leq \|y_n - (1 - \alpha_n)y_n - \alpha_n Ty_n\| + \|(1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n Ty_n - p\| \\
&\leq \gamma_n + (1 - \alpha_n)\|y_n - p\| + \alpha_n\|Ty_n - p\|.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\|Ty_n - p\| &\leq \delta \max\{c\|y_n - p\| + \|y_n - Ty_n\|, \\
&\quad c\|y_n - p\| + \|y_n - p\| + \|p - Ty_n\|\} \\
&\leq \delta \max\{c\|y_n - p\| + \|y_n - p\| + \|p - Ty_n\|\}, \\
&\quad c\|y_n - p\| + \|y_n - p\| + \|p - Ty_n\|\} \\
&\leq \delta(c+1)\|y_n - p\| + \delta\|p - Ty_n\|.
\end{aligned}$$

Lo cual implica que $\|Ty_n - p\| \leq \frac{\delta(c+1)}{1-\delta}\|y_n - p\|$, entonces

$$\|p - y_n\| \leq \gamma_n + (1 - \alpha_n)\|y_n - p\| + \alpha_n \left(\frac{\delta(c+1)}{1-\delta} \right) \|y_n - p\|.$$

En la prueba de (ii), obtuvimos que

$$(1-\alpha_n) + \alpha_n \left[\frac{\delta(c+1)}{1-\delta} \right] = 1 - \alpha_n \left(\frac{1-\delta(c+2)}{1-\delta} \right) \leq 1 - \alpha \left(\frac{1-\delta(c+2)}{1-\delta} \right).$$

Finalmente, esto implica que $\|p - y_n\| \leq \left(\frac{1-\delta}{1-\delta(c+2)} \right) \gamma_n$.

De este modo, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$. □

A pesar de que tenemos restricciones para δ y c en los Teoremas 3.2.9 y 3.2.7, en el Ejemplo 1.2.1 de la primera sección (pág. 12 de esta tesis), podemos ver que existen funciones que satisfacen la Condición del Teorema 3.2.9 pero no la del Teorema 3.2.7

En esta sección, hemos probado la γ -estabilidad de los procesos iterativos de Mann y de Picard que están asociados a cierto tipo de funciones, sin embargo, es importante mencionar que varios autores se han ocupado ya de estudiar la T -estabilidad de algunos de estos procesos iterativos, aquí mencionamos tres:

- La T -estabilidad del proceso iterativo de Picard asociado a funciones que satisfacen (3.2.2) se probó en [51] haciendo uso de la hipótesis $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, Ty_n) = 0$.
- La T -estabilidad del proceso iterativo de Picard para funciones cuasi-contractivas se probó en [51].
- La T -estabilidad del proceso iterativo de Mann para cuasi-contracciones se tiene por el Teorema 2 de Harder y Hicks [22], ya que las cuasi-contracciones con $\delta < \frac{1}{2}$ son también contracciones de Zamfirescu.

Capítulo 4

Estabilidad y convergencia de procesos iterativos en espacios métricos difusos.

En la literatura no hemos encontrado antecedentes acerca de estabilidad de procesos iterativos en espacios métricos difusos, en este último capítulo abordamos este tema. Comenzamos probando resultados de existencia y unicidad de puntos fijos y posteriormente establecemos resultados de estabilidad.

4.1. Introducción y preliminares

En la vida cotidiana, frecuentemente hacemos uso de información que quizás podemos llamar imprecisa, la cual deja cabida a tratarla de distintas maneras y nos aleja de la lógica clásica donde una afirmación puede ser únicamente “cierta” o “falsa”. Veamos el siguiente ejemplo que podemos encontrar en [74, pág. 33]. *No hay un valor cuantitativo que defina el término joven. Para alguna gente, 25 años es joven, mientras que para otros, 35 es joven. Incluso el concepto puede ser relativo al contexto. Un presidente de gobierno de 35 años es joven, mientras que un futbolista no lo es. Hay sin embargo cosas que están claras: una persona de 1 año es joven, mientras que una de 100 años no lo es. Pero una persona de 35 años tiene algunas posibilidades de ser joven. Para representar este hecho, debemos definir el conjunto joven de modo que cada uno de sus elementos pertenezca a él con cierto grado o posibilidad.*

En el sentido clásico, sabemos que un conjunto (*nítido* en la terminología difusa) es una colección de objetos (elementos) bien especificados que poseen una propiedad común. Para definir un conjunto nítido A podemos utilizar la *función característica* o *función de pertenencia* dada por $\mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}$,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Así, un conjunto A estará completamente definido por el conjunto de pares:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) \in \{0, 1\}\}.$$

Por ejemplo si $X = \{a, e, i, o, u\}$ y $A = \{a, i, o\}$ es un subconjunto de X . Podríamos representar a A de la siguiente forma:

$$A = \{(a, 1), (e, 0), (i, 1), (o, 1), (u, 0)\}.$$

Sin embargo, en conjuntos difusos la función de pertenencia puede tomar cualquier valor en el intervalo $[0, 1]$. Es decir, cada elemento pertenece al conjunto con cierto grado o probabilidad.

En gran parte de la bibliografía se considera a Zadeh [76] como el autor que introduce el concepto de conjunto difuso en 1965, sin embargo el mismo Zadeh cita a [6], donde se trabajó en el tema.

Definición 4.1.1. (Zadeh [76], 1965) Sea X un conjunto. Un *conjunto difuso* A en X es una función con dominio X y valores en $[0, 1]$.

En 1975, Kramosil y Michálek [28] definieron un *conjunto difuso* A en X como un par (X, μ_A) , donde μ_A es una función definida sobre X que toma sus valores en el intervalo $[0, 1]$.

Es decir, tenemos la función de pertenencia de un conjunto difuso $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ y al conjunto A definido por

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) \in [0, 1]\}.$$

Sin embargo frecuentemente se hace referencia a la función de pertenencia μ_A como el conjunto difuso, ya que es esta quien lo caracteriza.

Además en [76], la noción de inclusión, unión, intersección, complemento, convexidad, etc. son extendidas a este tipo de conjuntos y se establecen varias propiedades de esas nociones en el contexto de los conjuntos difusos.

Aquí sólo veremos la inclusión e intersección pues nos interesa llegar al concepto de t -norma para definir posteriormente un espacio métrico difuso.

Definición 4.1.2. (Zadeh [76]). Sea X un conjunto. Un conjunto difuso A está contenida en otro B si y sólo si $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, para todo $x \in X$, o en forma abreviada $\mu_A \leq \mu_B$.

Definición 4.1.3. (Zadeh [76]). La intersección de dos conjuntos difusos A y B , con respectivas funciones de pertenencia μ_A y μ_B , es un conjunto C escrito como $C = A \cap B$ cuya función de pertenencia está relacionada con la de A y B por

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \forall x \in X,$$

o en forma abreviada $\mu_C = \min\{\mu_A, \mu_B\}$.

Se puede mostrar que esta definición es equivalente a la idea de la intersección clásica de conjuntos:

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto difuso más grande que está contenido tanto en A como en B .

Entonces, si D es cualquier conjunto que está contenido tanto en A como en B , entonces también está contenido en la intersección.

Para mostrar la equivalencia, notemos que $A \cap B$ está contenida en A y B ya que

$$\mu_{A \cap B} = \min\{\mu_A, \mu_B\} \leq \mu_A, \quad \text{y} \quad \mu_{A \cap B} = \min\{\mu_A, \mu_B\} \leq \mu_B.$$

Además si D pertenece a A y al mismo tiempo pertenece a B , entonces

$$\mu_D \leq \mu_A, \quad \text{y} \quad \mu_D \leq \mu_B.$$

Por lo que $\mu_D \leq \min\{\mu_A, \mu_B\} = \mu_{A \cap B}$. Esto implica que $D \subset (A \cap B)$. En lo anterior utilizamos el símbolo \subset para denotar inclusión entre conjuntos difusos, de aquí en adelante \subset denotará únicamente la inclusión de conjuntos clásicos.

La Definición 4.1.3 no es la única manera de extender la operación clásica de intersección entre conjuntos, supongamos:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) * \mu_B(x), \quad \text{donde } * : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1].$$

A esta función $*$, desde el punto de vista intuitivo, se le debe exigir las siguientes características:

- | | | |
|--------|---------------------------------|---|
| (TN-0) | Concordancia con el caso nítido | $0 * 1 = 0 * 0 = 1 * 0 = 0;$
$1 * 1 = 1.$ |
| (TN-1) | Conmutatividad | $\alpha * \beta = \beta * \alpha.$ |
| (TN-2) | Asociatividad | $\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma.$ |
| (TN-3) | Identidad | $\alpha * 1 = \alpha.$ |
| (TN-4) | Monotonía | si $\alpha \leq \alpha'$ y $\beta \leq \beta'$, \Rightarrow
$\alpha * \beta \leq \alpha' * \beta'.$ |

Notemos que (TN-0) es consecuencia de (TN-1), (TN-2), (TN-3) y (TN-4).

Las funciones que verifican estas propiedades, se llaman dentro de la teoría de conjuntos difusos **normas triangulares o t -normas**.

En realidad μ_C de la Definición 4.1.3, pertenece a esta clase general de operadores, y comúnmente se denota por \wedge , es decir $\alpha \wedge \beta = \min\{\alpha, \beta\}$ es una t -norma y se conoce como la t -norma del mínimo.

Ejemplos de otras t -normas:

I.- **Producto drástico.** Lo denotaremos por \circ .

$$\alpha \circ \beta = \begin{cases} \alpha & \text{si } \beta = 1; \\ \beta & \text{si } \alpha = 1; \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

II.- **Lukasiewicz.** Lo denotaremos por \mathfrak{L} y está definido como $\alpha \mathfrak{L} \beta = \max\{0, \alpha + \beta - 1\}$

III.- **Producto.** Lo denotaremos por \cdot , éste es precisamente el producto usual en \mathbb{R} .

Una propiedad de estas t -normas es que para toda α y β en el intervalo $[0, 1]$, se satisface

$$\alpha \circ \beta \leq \alpha \mathfrak{L} \beta \leq \alpha \cdot \beta \leq \alpha \wedge \beta.$$

En 1942, Menger [36] generaliza la teoría de espacios métricos introduciendo los espacios métricos probabilísticos. En la formulación original de este espacio, Menger emplea una función $\mathbb{T} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisface $\mathbb{T}(\gamma, \delta) \geq \mathbb{T}(\alpha, \beta)$ para $\gamma \geq \alpha$, $\delta \geq \beta$, $\mathbb{T}(\alpha, \beta) = \mathbb{T}(\beta, \alpha)$, $\mathbb{T}(1, 1) = 1$, $\mathbb{T}(\alpha, 1) > 0$ para $\alpha > 0$. Hoy en día después del estudio axiomático de los espacios métricos probabilísticos por Schweizer y Sklar [63], comúnmente es considerada la siguiente definición.

Definición 4.1.4. (Schweizer, Sklar [63], 1960). Una operación binaria $*$: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es llamada una t -norma continua si satisface (TN-1), (TN-2), (TN-3), (TN-4) y además es continua.

4.2. Espacios métricos difusos y teoremas de punto fijo

En esta sección abordamos el tema de espacios métricos difusos con el objetivo de estudiar la teoría de punto fijo en este tipo de espacios. Daremos algunas definiciones básicas y resultados que consideramos necesarios para el desarrollo de las siguientes secciones.

El concepto de espacio métrico difuso se debe a Kramosil y Michálek [28] quienes por primera vez introdujeron el concepto de métrica difusa, aquí enunciamos la definición tal como aparece en [18].

Definición 4.2.1. (Kramosil, Michalek [28], 1975). Un *KM-espacio métrico difuso* es una terna $(X, M, *)$, donde X es un conjunto no vacío, $*$ es una t -norma continua y M es un conjunto difuso sobre $X^2 \times [0, \infty)$ que satisface las siguientes propiedades:

$$\text{(KM-1)} \quad M(x, y, 0) = 0, \forall x, y \in X;$$

$$\text{(KM-2)} \quad M(x, y, t) = 1, \forall t > 0 \text{ si y sólo si } x = y;$$

$$\text{(KM-3)} \quad M(x, y, t) = M(y, x, t), \forall x, y \in X \text{ y } t > 0;$$

$$\text{(KM-4)} \quad M(x, y, -) : [0, \infty) \longrightarrow [0, 1] \text{ es continua por la izquierda } \forall x, y \in X;$$

$$\text{(KM-5)} \quad M(x, z, t + s) \geq M(x, y, t) * M(y, z, s), \forall x, y, z \in X, \forall t, s > 0.$$

Formalmente, en [28] se definió una métrica difusa sobre X como un conjunto difuso sobre el producto $X^2 \times [0, \infty)$ cuya función característica M satisface (KM-1)-(KM-5). En este trabajo, como en gran parte de la bibliografía consultada, nos referiremos a la métrica difusa sobre X por el par $(M, *)$.

En 1988 Grabiec [18] estableció una definición de sucesión de Cauchy y con ella, una definición de completitud de espacio métrico difuso (Definición 4.2.5 en este trabajo). En la literatura, se hace referencia a esta definición como “G-completitud” (ver por ejemplo [19] y [35]). Aquí llamaremos a este tipo de completitud “completitud débil” como se comenta y sugiere en [73].

Con esta definición de completitud, Grabiec [18] extendió el teorema del punto fijo de Banach a espacios métricos difusos débilmente completos. Más adelante, varios autores obtuvieron teoremas de punto fijo basados en espacios métricos difusos débilmente completos, entre ellos, Vasuki [72], Sharma [66], Subrahmanyam [68], etc.

En 1994 George y Veeramani [17] dieron una definición distinta de espacio métrico difuso $(X, M, *)$ modificando los axiomas (KM-1), (KM-2) y (KM-4) y a partir de M , dedujeron una topología τ_M sobre X que es primero numerable y Hausdorff la cual tiene como base a la familia de conjuntos abiertos de la forma $\{B_M(x, r, t) : x \in X, 0 < r < 1, t > 0\}$, donde $B_M(x, r, t) = \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - r\}$ para todo $x \in X$, $r \in (0, 1)$ y $t > 0$.

Además, a partir de una métrica d sobre un conjunto X , George y Veeramani [17] definieron una métrica difusa (M_d, \cdot) sobre X , donde \cdot es la t -norma producto y M_d está definida como:

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}.$$

Se conoce a (M_d, \cdot) como la *métrica difusa estándar* y a (X, M_d, \cdot) como el *espacio métrico difuso estándar*.

George y Veeramani probaron que la topológica inducida por M_d coincide con la inducida por d y probaron que el espacio métrico difuso estándar deducido de un espacio métrico usual completo no resulta ser completo en el sentido de la definición de Grabiec. Por esta razón modificaron la definición de sucesión de Cauchy. Con la definición de sucesión de Cauchy de George y Veeramani (Definición 4.2.6 en este trabajo), dicho espacio si resulta ser completo.

Song [69] modificó la definición de sucesión de Cauchy de Grabiec [18] argumentando que esta es inadecuada. La definición de Song [69] (Definición 4.2.7 en este trabajo) resulta ser equivalente a la definición de George y Veeramani [17]. Cabe mencionar el comentario de Vasuki y Veeramani [73] donde aclaran que la definiciones de sucesión de Cauchy y de espacio métrico completo de Grabiec [18] son únicamente definiciones más débiles que las de George y Veeramani [17] y por lo tanto los resultados obtenidos son distintos pero no incorrectos (ver [69], [18], [72] y [73]).

De las nociones que han dado George y Veeramani se han obtenido varios resultados sobre propiedades que tienen los espacios métricos difusos, así como también se han deducido otros teoremas de punto fijo. Para tener un panorama general de tales resultados, puede consultarse por ejemplo [61].

De distintos modos ha sido abordado o introducido el concepto de espacio métrico difuso, aquí, nosotros sólo consideraremos la definición de Kramosil y Michálek [28], la de George y Veeramani [17] y la de espacio métrico difuso fuerte [62].

Definición 4.2.2. (George, Veeramani [17], 1994). Sean X un conjunto no vacío, $*$ una t -norma continua y M es un conjunto difuso sobre $X^2 \times [0, \infty)$. Diremos que $(X, M, *)$ es un *GV-espacio métrico difuso* si M satisface (KM-2), (KM-3), (KM-5) y

$$\text{(GV-1)} \quad M(x, y, t) > 0, \forall t > 0 \text{ y } x, y \in X;$$

$$\text{(GV-2)} \quad M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \longrightarrow [0, 1] \text{ es continua para todo } x, y \in X.$$

Se podría interpretar a $M(x, y, t)$ como el grado de cercanía entre x e y respecto a t , y en tal caso se identificaría a $M(x, y, t) = 0$ con la idea de que x y y se encuentran infinitamente alejados, y a $M(x, y, t) = 1$ con $x = y$.

Observación 4.2.1. Notemos que cada KM-espacio métrico difuso, para el cual $M(x, y, t) > 0$, para toda $t > 0$ y $M(x, y, \cdot)$ es también continua por la derecha, es también un GV-espacio métrico difuso. Podemos también ver que todo GV-espacio métrico difuso es también un KM-espacio

métrico difuso si se extiende M definiendo $M(x, y, 0) = 0$, para todo $x, y \in X$.

La siguiente definición podemos verla en [62].

Definición 4.2.3. Un GV-espacio métrico difuso $(X, M, *)$ (o una métrica difusa $(M, *)$) se llama *fuerte* si satisface que para cada $x, y, z \in X$ y cada $t > 0$,

$$(SM) \quad M(x, z, t) \geq M(x, y, t) * M(y, z, t).$$

Proposición 4.2.1. (*George, Veeramani [17], 1994*). Sea (X, d) un GV-espacio métrico difuso. Consideremos la t -norma $\alpha * \beta = \alpha \cdot \beta$, para cualesquiera $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Sea $M_d : X \times X \times (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ la función definida de la siguiente manera:

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}.$$

Entonces (X, M_d, \cdot) es un GV-espacio métrico difuso.

Definición 4.2.4. (*George, Veeramani [17], 1994*). La métrica difusa (M_d, \cdot) definida en la Proposición 4.2.1 la cual es inducida (generada) por la métrica d , se denomina *estándar* y a (X, M_d, \cdot) se le llama *GV-espacio métrico difuso estándar* (asociado al espacio métrico (X, d)).

Definición 4.2.5. (*Grabiec [18], 1988*). Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso, entonces:

- i) Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $x \in X$ (denotado por $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$), si: $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$ para todo $t > 0$.
- ii) Una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en X es una *sucesión de Cauchy débil* si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{n+m}, x_n, t) = 1 \text{ para cada } t > 0 \text{ y } m > 0.$$

- iii) El espacio métrico $(X, M, *)$ es llamado *débilmente completo* si cada sucesión de Cauchy débil es convergente.

Definición 4.2.6. (*George, Veeramani [17], 1994*). Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso, entonces:

- i) Una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en X es una *sucesión de Cauchy* si para cada $\epsilon \in (0, 1)$ y cada $t > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M(x_n, x_m, t) > 1 - \epsilon$ para todo $m, n \geq N$.
- ii) El espacio métrico difuso $(X, M, *)$ es llamado *completo* si cada sucesión de Cauchy es convergente.

Definición 4.2.7. (Song [69], 2003). Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso, una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ es una *sucesión de Cauchy* si $M(x_{n+m}, x_n, t) \rightarrow 1$ (para toda $t > 0$) cuando $n \rightarrow \infty$ uniformemente sobre $m \in \mathbb{N}$.

Notemos que la diferencia entre la definición de sucesión de Cauchy débil y la Definición 4.2.7 radica en la convergencia uniforme sobre m . Por otra parte, puede probarse que las definiciones de sucesión de Cauchy de Song [69] y de George y Veeramani [17] resultan ser equivalentes, por tal razón no hemos hecho distinción en el nombre de sucesión de Cauchy.

En el Capítulo 2 de [30], se presentan diversos ejemplos de métricas difusas, algunas de las cuales generalizan a otras, como la métrica difusa estándar. Aquí sólo colocamos aquellos ejemplos de espacios métricos difusos que usaremos.

En las siguientes tres proposiciones, $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ será una función continua y creciente y d será una métrica clásica sobre X .

Proposición 4.2.2. (López [30, Proposición 2.3.1], 2010). Sea $m \in \mathbb{R}^+$. Sea M definida como

$$M(x, y, t) = \frac{g(t)}{g(t) + md(x, y)}.$$

Entonces (M, \cdot) es una métrica difusa sobre X .

Si en la proposición anterior elegimos a $g(t) = t$, $\forall t > 0$ y $m=1$. Entonces obtenemos la métrica difusa estándar. Por otra parte un caso particular que no cae en la Proposición 4.2.2, es cuando elegimos a $g(t) = t^n$, $\forall t > 0$, con $n \in \mathbb{N}$ y $m = 1$. Entonces obtenemos $M(x, y, t) = \frac{t^n}{t^n + d(x, y)}$ y considerando la t -norma \wedge , tenemos que (M, \wedge) es una métrica difusa, esto puede verse en el inciso (ii) del Ejemplo 4.2 de [60].

Proposición 4.2.3. (López [30, Proposición 2.3.2], 2010). Si M está definida por

$$M(x, y, t) = e^{-\frac{d(x, y)}{g(t)}},$$

entonces (M, \cdot) es una métrica difusa sobre X .

Un caso particular de M en la Proposición 4.2.3, es cuando consideramos a $g(t) = t$, $\forall t > 0$, entonces $M(x, y, t) = e^{-\frac{d(x, y)}{t}}$, con la t -norma \wedge tenemos que (M, \wedge) es también una métrica difusa (ver [17]).

Proposición 4.2.4. (López [30, Proposición 2.3.6], 2010). Sean k un real positivo y (X, d) un espacio métrico tal que $d(x, y) < k$ para

todo $x, y \in X$. Sea $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow (k, +\infty)$ una función continua y creciente. Si definimos la función M por

$$M(x, y, t) = 1 - \frac{d(x, y)}{g(t)},$$

entonces (M, \mathfrak{L}) es una métrica difusa sobre X .

Proposición 4.2.5. (*López [30, Proposición 2.8.1], 2010*). Sean (N, \cdot) una métrica difusa sobre X y $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua y creciente. Si definimos M por

$$M(x, y, t) = \frac{\varphi(t) + N(x, y, t)}{\varphi(t) + 1},$$

entonces (M, \cdot) es una métrica difusa sobre X .

4.2.1. Contractividad en espacios métricos difusos

Nociones de contractividad en espacios métrico difusos se han dado un gran número (ver por ejemplo [33], [67], [19], [68], [18], [34]). Aquí sólo mencionaremos algunas que dan pie a la condición que proponemos y utilizamos.

En lo que sigue, denotaremos por Ψ al conjunto de todas las funciones $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, tales que:

- ψ es continua por la izquierda, no decreciente y
- $\psi(\alpha) > \alpha, \forall \alpha \in (0, 1)$.

Definición 4.2.8. (Sehgal, Bharucha-Reid [64], 1972). Sea $(X, M, *)$ un KM-espacio métrico difuso. Una función $T : X \rightarrow X$ es llamada una *B-contracción probabilística* si existe $k \in (0, 1)$ tal que

$$M(Tx, Ty, kt) \geq M(x, y, t), \quad \forall x, y \in X \text{ y } \forall t > 0.$$

La definición de *B-contracción probabilística* la hemos colocado en el contexto de espacios métricos difusos como en [32]. La versión original en [64] se da en espacios métricos probabilísticos.

Definición 4.2.9. (Gregori, Sapena [19], 2002). Una función *contractiva difusa* sobre un espacio métrico difuso $(X, M, *)$ es una función $T : X \rightarrow X$ con la propiedad:

$$\frac{1}{M(Tx, Ty, t)} - 1 \leq k \left(\frac{1}{M(x, y, t)} - 1 \right), \quad \forall x, y \in X, \quad \forall t > 0,$$

donde k es fijo en $(0, 1)$.

Gregori y Sapena [19] justifican la definición de función contractiva difusa con el hecho de que una función T sobre un espacio métrico (X, d) es una contracción con constante k si y sólo si es contractiva difusa sobre el espacio métrico difuso estándar (X, M_d, \cdot) con constante contractiva k (ver [19, Proposición 3.7]).

Es posible reescribir la condición anterior en la siguiente forma equivalente:

$$M(Tx, Ty, t) \leq \frac{M(x, y, t)}{M(x, y, t) + k(1 - M(x, y, t))}, \forall x, y \in X, \forall t > 0.$$

Definición 4.2.10. (Radu [52], 2002). Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Una *B-contracción estricta* es una función $T : X \rightarrow X$ tal que para todo $x, y \in X$ y todo $t > 0$,

$$M(Tx, Ty, kt) \leq \frac{M(x, y, t)}{M(x, y, t) + k(1 - M(x, y, t))}.$$

donde $k \in (0, 1)$ es un real fijo en.

Radu [52] observó que las *B-contracciones estrictas* pertenecen a la clase de funciones que satisfacen la desigualdad

$$M(Tx, Ty, \varphi(t)) \geq \psi(M(x, y, t)), \forall x, y \in X \text{ y } \forall t > 0, \quad (4.2.1)$$

donde $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es creciente, $\psi(\alpha) \geq \alpha$, para toda $\alpha \in (0, 1)$ y $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es una función creciente tal que, $\varphi(t) \leq t$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ para toda $t > 0$. En efecto, para ver esto es suficiente tomar φ y ψ definidas respectivamente como $\varphi(t) = kt$, y $\psi(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha + k(1 - \alpha)}$ para toda $t \geq 0$, $\alpha \in [0, 1]$ y algún $k \in (0, 1)$.

Mihet [32] introdujo y estudió el siguiente concepto para KM-espacios métricos difusos.

Definición 4.2.11. (Mihet [32], 2004). Sean ψ una función en Ψ continua y $(M, X, *)$ un KM-espacio métrico difuso. Una función $T : X \rightarrow X$ es llamada *ψ -contractiva difusa* si la siguiente implicación se satisface:

$$M(x, y, t) > 0 \implies M(Tx, Ty, t) \geq \psi[M(x, y, t)].$$

Observación 4.2.2. Notemos que para cada $\lambda \in (0, 1)$, la función $\psi_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida como $\psi_\lambda(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda(1 - \alpha)}$ es continua y $\psi(\alpha) > \alpha$ para cada $\alpha \in (0, 1)$, esto es $\psi_\lambda \in \Psi$.

Mihet [32] hace notar que si para cada $\lambda \in (0, 1)$, $\psi_\lambda(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda(1 - \alpha)}$, entonces cada función ψ_λ -contractiva difusa es una función contractiva en el sentido de Gregori y Sapena [19] (Definición 4.2.9).

4.2.2. Teoremas de punto fijo

En esta parte, enunciaremos algunos teoremas encontrados en la literatura con la intención de dar ejemplos de este tipo de resultados sobre el tema a y de resaltar algunas condiciones contractivas que aparecen en estos resultados como motivación de las definiciones 4.3.1 y 4.3.2 que damos en la Sección 4.3.

Teorema 4.2.6. (*Grabiec [18], 1988*). Sea $(X, M, *)$ un KM-espacio métrico difuso débilmente completo tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} M(x, y, t) = 1$ para todo $x, y, \in X$. Si $T : X \rightarrow X$ es una B-contracción probabilística, entonces tiene un único punto fijo.

Teorema 4.2.7. (*Song [69, Teorema 2], 2003*). Sea $(X, M, *)$ un KM-espacio métrico difuso débilmente completo tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} M(x, y, t) = 1$ para todo $x, y, \in X$ y $\alpha * \beta = \min\{\alpha, \beta\}$ para cada $\alpha \in [0, 1]$. Si $T : X \rightarrow X$ es una B-contracción probabilística, entonces tiene un único punto fijo.

Teorema 4.2.8. (*Subrahmanyam [68, Teorema 2], 2005*). Sea $(X, M, *)$ un KM-espacio métrico difuso débilmente completo y sean $T, S : X \rightarrow X$ dos funciones que satisfacen las siguientes condiciones

- (a) $T(X) \subset S(X)$.
- (b) S es continua.
- (c) $M(Tx, Ty, kt) \geq M(Sx, Sy, t)$ para todo $x, y \in X$ y $0 < k < 1$.

Entonces S y T tienen un único punto fijo en común si S y T conmutan.

Notemos que la hipótesis (c) en el Teorema 4.2.8 es una extensión de la definición de B-contracción probabilística, en el sentido de que si en el inciso (c) S es la función identidad en X , entonces obtenemos la Definición 4.2.8.

Teorema 4.2.9. (*Mihet [34, Teorema 3.1], 2008*). Sea $(X, M, *)$ un KM-espacio métrico difuso débilmente completo tal que para cada $x, y, z \in X$ y cada $t > 0$, satisface $M(x, z, t) \geq M(x, y, t) * M(y, z, t)$. Sea $T : X \rightarrow X$ una función ψ -contractiva. Si existe $x \in X$ tal que $M(x, T(x), t) > 0$, para toda $t > 0$. Entonces T tiene un punto fijo.

4.3. Resultados obtenidos sobre convergencia

En esta sección establecemos teoremas originales de este trabajo de tesis que tratan sobre la existencia y unicidad de puntos fijos para cierta clase

de funciones. Pero antes de enunciar los teoremas principales de esta parte, daremos algunos resultados y conceptos necesarios para lo que sigue.

4.3.1. Resultados previos

Lema 4.3.1. Sea $\{a_n\} \subset (0, 1)$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ y sean $r, R \in (0, 1]$ tales que $r < R$. Sea $\phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua tal que: i) $\phi(x, 1) = x$, para todo $x \in [0, 1]$ y, ii) si $y \leq z$ entonces $\phi(x, y) \leq \phi(x, z)$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi(R, a_n) > r, \text{ para cada } n \geq N.$$

Demostración. Consideremos la sucesión $\{(R, a_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1] \times [0, 1]$. Tenemos que $(R, a_n) \rightarrow (R, 1)$, cuando $n \rightarrow \infty$, ya que $a_n \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Como ϕ es continua entonces $\phi(R, a_n) \rightarrow \phi(R, 1)$. Es decir, para cada $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi(R, 1) - \phi(R, a_n) < \epsilon, \text{ para todo } n \geq N_\epsilon.$$

En particular para $\epsilon = R - r$, tenemos que existe $N_{(R-r)}$ tal que

$$\phi(R, 1) - \phi(R, a_n) < R - r.$$

Por lo tanto $\phi(R, a_n) > r$, para toda $n \geq N_{(R-r)}$. □

Siguiendo la condición definida por la desigualdad (4.2.1) y la definición de función ψ -contractiva, damos la definición de (ψ, φ) -contracción difusa.

Definición 4.3.1. Una (ψ, φ) -contracción difusa en un KM-espacio métrico difuso o GV-espacio métrico difuso $(X, M, *)$ es una función $T : X \rightarrow X$ para la cual existen $\psi \in \Psi$ y una función de comparación φ (ver Definición 1.2.10) tales que se satisface la siguiente implicación:

$$M(x, y, t) > 0 \implies M(Tx, Ty, \varphi(t)) \geq \psi[M(x, y, t)],$$

Observación 4.3.1. Una (ψ, φ) -contracción difusa en un GV-espacio métrico difuso satisface $M(Tx, Ty, \varphi(t)) \geq \psi[M(x, y, t)]$ para toda $x, y \in X$.

Observación 4.3.2. Si T es una (ψ, φ) -contracción, entonces T es también ψ -contractiva. Si T satisface la desigualdad 4.2.1 y si φ tiene la forma particular $\varphi(t) = kt$ para toda $t \geq 0$, con $k \in (0, 1)$ entonces T es una B -contracción probabilística.

La condición siguiente, extiende, en cierto modo, la definición de (ψ, φ) -contracción difusa.

Definición 4.3.2. Sean Y un conjunto cualquiera y $(X, M, *)$ un KM-espacio métrico difuso o GV-espacio métrico difuso. Sean $S, T : Y \rightarrow X$ dos funciones. Diremos que T es una (ψ, φ) -contracción difusa de Jungck con respecto a S si existen $\psi \in \Psi$ y una función de comparación φ tales que se satisface la siguiente implicación:

$$M(Sx, Sy, t) > 0 \implies M(Tx, Ty, \varphi(t)) \geq \psi[M(Sx, Sy, t)]$$

Observación 4.3.3. Si en la definición de (ψ, φ) -contracción difusa de Jungck consideramos el caso $Y = X$ y S la identidad en X , obtenemos la definición de (ψ, φ) -contracción difusa.

Observación 4.3.4. Una (ψ, φ) -contracción difusa de Jungck T con respecto a una función S en un GV-espacio métrico difuso satisface $M(Tx, Ty, \varphi(t)) \geq \psi[M(Sx, Sy, t)]$ para toda $x, y \in Y$.

Observación 4.3.5. Una (ψ, φ) -contracción difusa de Jungck $T : X \rightarrow X$ (esto es $Y = X$ en la Definición 4.3.2) con respecto a una función S continua que conmuta con T , satisface la hipótesis (c) del Teorema 4.2.8.

El siguiente ejemplo muestra que en un KM-espacio métrico difuso las contracciones de Banach son ejemplos de (ψ, φ) -contracciones.

Ejemplo 4.3.1. Sean $X = [0, \infty)$, $\alpha \wedge \beta = \min\{\alpha, \beta\}$ para todo $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y

$$M(x, y, t) = \begin{cases} 0, & t \leq |x - y|; \\ 1, & t > |x - y|. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Sea $\psi \in \Psi$ y $T : X \rightarrow X$ una función tal que para algún $k \in (0, 1)$, $|Tx - Ty| \leq k|x - y|$, $\forall x, y \in X$, entonces T es una (ψ, φ) -contracción difusa en un KM-espacio métrico difuso (X, M, \wedge) .

En efecto, puede verse sin dificultad que (X, M, \wedge) es un KM-espacio métrico difuso.

Sean $x, y \in X$, si $M(x, y, t) > 0$, entonces $M(x, y, t) = 1$, esto sólo ocurre si $t > |x - y|$. Entonces $kt > k|x - y| \geq |Tx - Ty|$, por lo tanto $M(Tx, Ty, \varphi(t)) = 1$, así $M(Tx, Ty, \varphi(t)) = \psi[M(x, y, t)]$.

Ahora damos un ejemplo de una (ψ, φ) -contracción difusa en un GV-espacio métrico difuso.

Ejemplo 4.3.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Consideremos el GV-espacio métrico difuso estándar (X, M_d, \cdot) asociado y sea $T : X \rightarrow X$

una contracción con constante contractiva λk , $0 < \lambda, k < 1$. Sabemos que $d(Tx, Ty) \leq \lambda k d(x, y)$, entonces

$$\frac{d(Tx, Ty)}{kt} \leq \frac{\lambda}{t} d(x, y), \quad \forall t > 0.$$

Luego

$$\frac{kt + d(Tx, Ty)}{kt} - 1 \leq \lambda \left[\frac{t + d(x, y)}{t} - 1 \right],$$

así

$$\frac{1}{\frac{kt}{kt + d(Tx, Ty)}} - 1 \leq \lambda \left[\frac{1}{\frac{t}{t + d(x, y)}} - 1 \right].$$

Es decir

$$\frac{1}{M_d(Tx, Ty, \varphi(t))} - 1 \leq \lambda \left[\frac{1}{M_d(x, y, t)} - 1 \right].$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_d(Tx, Ty, \varphi(t))} &\leq \frac{\lambda}{M_d(x, y, t)} - \lambda + 1 \\ &= \frac{1}{M_d(x, y, t)} [\lambda - \lambda M_d(x, y, t) + M_d(x, y, t)] \\ &= \frac{\lambda(1 - M_d(x, y, t)) + M_d(x, y, t)}{M_d(x, y, t)}. \end{aligned}$$

Entonces

$$M_d(Tx, Ty, \varphi(t)) \geq \frac{M_d(x, y, t)}{M_d(x, y, t) + \lambda[1 - M_d(x, y, t)]}.$$

Por lo tanto T es una (ψ_λ, φ) -contracción difusa, con $\varphi(t) = kt$ y ψ_λ definida como $\psi_\lambda(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda(1 - \alpha)}$ ya que $\psi_\lambda \in \Psi$ como afirma la Observación 4.2.2.

4.3.2. Resultados de convergencia y unicidad

Como ya se menciona, los teoremas que en esta sección aparecen son originales de esta tesis, estos resultados son básicos para otros más que establecemos en la Sección 4.4, los cuales también son producto de este trabajo.

Antes de comenzar, recordemos el proceso iterativo de Jungck del que hablamos en el Capítulo 1: Sean Y un conjunto no vacío, $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso y $T, S : Y \rightarrow X$ dos funciones tales que S es inyectiva y $T(Y) \subset S(Y)$. El proceso iterativo de Jungck viene dado por la expresión recursiva $Sx_{n+1} = Tx_n$, la cual genera una sucesión $\{Sx_n\}_{n=0}^\infty$ a partir de un punto inicial $x_0 \in Y$ (ver [65]).

Teorema 4.3.2. Sean Y un conjunto no vacío y $(X, M, *)$ un KM-espacio métrico difuso. Sean $S, T : Y \rightarrow X$ dos funciones, $T(Y) \subset S(Y)$, S inyectiva y T una (ψ, φ) -contracción difusa de Jungck con respecto a S . Supongamos que $(S(Y), M, *)$ es un KM-espacio métrico difuso completo. Sean $x_0 \in Y$ y $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ la sucesión generada por el proceso iterativo de Jungck ($Sx_{n+1} = Tx_n$). Si $M(Tx_0, Sx_0, t) > 0$, $\forall t > 0$. Entonces:

i) $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a algún $Sz = p \in X$.

ii) z es punto de coincidencia de S y T .

Demostración. Sea $t > 0$. Por (KM-2) y (KM-5) de la definición de KM-espacio métrico difuso, ya que T es una (ψ, φ) -contracción difusa de Jungck con respecto a S y dado que $M(Tx_0, Sx_0, t) > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} M(Sx_2, Sx_1, t) &\geq M(Sx_2, Sx_1, \varphi(t)) * M(Sx_1, Sx_1, t - \varphi(t)) \\ &= M(Sx_2, Sx_1, \varphi(t)) \\ &= M(Tx_1, Tx_0, \varphi(t)) \\ &\geq \psi[M(Sx_1, Sx_0, t)] > 0. \end{aligned}$$

Del mismo modo

$$M(Sx_3, Sx_2, t) \geq \psi[M(Sx_2, Sx_1, t)] \geq \psi^2[M(Sx_1, Sx_0, t)] > 0.$$

Por inducción obtenemos que $M(Sx_{n+1}, Sx_n, t) \geq \psi^n[M(Sx_1, Sx_0, t)]$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, para cada $t > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(Sx_{n+1}, Sx_n, t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n[M(Sx_1, Sx_0, t)] = 1.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} M(Tx_n, Sx_n, t - \varphi(t)) = 1$, $1 \geq \psi(1 - \epsilon) > 1 - \epsilon > 0$ y ya que $*$ es continua, por el Lema 4.3.1, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\psi(1 - \epsilon) * M(Tx_n, Sx_n, t - \varphi(t)) > 1 - \epsilon, \quad \forall n \geq N. \quad (4.3.2)$$

Sea $n \geq N$,

$$\begin{aligned} M(Tx_n, Sx_n, t) &\geq M(Tx_n, Tx_n, \varphi(t)) * M(Tx_n, Sx_n, t - \varphi(t)) \\ &\geq \psi(M(Sx_n, Sx_n, t)) * M(Tx_n, Sx_n, t - \varphi(t)) \end{aligned}$$

ya que $\psi(M(Sx_n, Sx_n, t)) = 1$,

$$M(Tx_n, Sx_n, t) \geq \psi(1 - \epsilon) * M(Tx_n, Sx_n, t - \varphi(t))$$

Por (4.3.2) y por la expresión anterior,

$$M(Sx_{n+1}, Sx_n, t) \geq 1 - \epsilon. \quad (4.3.3)$$

Podemos ver también que

$$\begin{aligned} M(Tx_{n+1}, Sx_n, t) &\geq M(Tx_{n+1}, Tx_n, \varphi(t)) * M(Tx_n, Sx_n, t - \varphi(t)) \\ &\geq \psi(M(Sx_{n+1}, Sx_n, t)) * M(Tx_n, Sx_n, t - \varphi(t)) \end{aligned}$$

por (4.3.3),

$$M(Tx_{n+1}, Sx_n, t) \geq \psi(1 - \epsilon) * M(Tx_n, Sx_n, t - \varphi(t)).$$

Luego de la expresión anterior y (4.3.2).

$$M(Sx_{n+2}, Sx_n, t) \geq 1 - \epsilon. \quad (4.3.4)$$

Nuevamente

$$\begin{aligned} M(Tx_{n+2}, Sx_n, t) &\geq M(Tx_{n+2}, Tx_n, \varphi(t)) * M(Tx_n, Sx_n, t - \varphi(t)) \\ &\geq \psi(1 - \epsilon) * M(Tx_n, Sx_n, t - \varphi(t)) \\ &\geq 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

En general $M(Tx_{n+m}, Sx_n, t) \geq 1 - \epsilon$, para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Esto es, para cada $n \geq N$,

$$M(Tx_{n+m}, Sx_n, t) \geq 1 - \epsilon \quad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Notemos que esto nos dice que $M(Tx_{n+m}, Sx_n, t)$ converge uniformemente a 1 cuando $n \rightarrow \infty$. Luego la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y entonces converge a algún $p \in S(Y)$.

Sea $z \in Y$ tal que $Sz = p$. Veamos que z es punto de coincidencia de S y T . Sabemos que, para n suficientemente grande, $M(p, Sx_n, t) > 0$ y entonces $M(Tz, Tx_n, \varphi(t)) \geq \psi[M(p, Sx_n, t)]$. Además ya que ψ es continua por la izquierda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(Tz, Tx_n, \varphi(t)) \geq \psi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} M(p, Sx_n, t) \right) = 1.$$

Luego

$$\begin{aligned} M(p, Tz, t) &\geq M \left(p, Sx_n, \frac{t - \varphi(t)}{2} \right) * M \left(Sx_n, Sx_{n+1}, \frac{t - \varphi(t)}{2} \right) * \\ &\quad * M(Sx_{n+1}, Tz, \varphi(t)). \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$, obtenemos que $M(p, Tz, t) = 1$ y por lo tanto $Tz = p$. □

La siguiente proposición nos dice que si el $(X, M, *)$ del Teorema 4.3.2 satisface (GV-1) de la definición de GV-espacio métrico difuso, entonces el punto de coincidencia de T y S es único.

Proposición 4.3.3. Sean Y un conjunto no vacío, $(X, M, *)$ un KM-espacio métrico difuso y $S, T : Y \rightarrow X$ dos funciones tales que S es inyectiva y T es una (ψ, φ) -contracción difusa de Jungck con respecto a S . Supongamos que $(S(Y), M, *)$ es un KM-espacio métrico difuso completo tal que $M(x, y, t) > 0, \forall x, y \in X, y \forall t > 0$. Entonces S y T tienen a lo más un punto de coincidencia.

Demostración. Supongamos que existe $w \in X$ tal que $Sw = q = Tw$ y $q \neq p$. Entonces

$$\begin{aligned} M(Sw, Sz, t) &= M(Tw, Tz, t) \\ &\geq M(Tw, Tz, \varphi(t)) * M(Tz, Tz, t - \varphi(t)) \\ &\geq \psi[M(Sw, Sz, t)] \\ &> M(Sw, Sz, t). \end{aligned}$$

Esto es una contradicción pues $M(p, q, t) < \psi[M(p, q, t)]$. Por lo tanto $p = q$ y $Sw = p = Tw$ y por la inyectividad de S , $w = z$. \square

Dos resultados inmediatos que se obtienen a partir del Teorema 4.3.2 y la proposición 4.3.3, son la existencia y unicidad de un punto fijo para (ψ, φ) -contracciones difusas.

Teorema 4.3.4. Sean $(X, M, *)$ un KM-espacio métrico difuso completo y $T : X \rightarrow X$ una (ψ, φ) -contracción difusa. Sean $x_0 \in X$ y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión definida por $x_{n+1} = Tx_n$. Si $M(Tx_0, x_0, t) > 0, \forall t > 0$, entonces $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a un punto fijo $p \in X$ de T .

Proposición 4.3.5. Sea (X, M, X) un KM-espacio métrico difuso tal que $M(x, y, t) > 0, \forall t > 0$ y $\forall x, y \in X$. Si $T : X \rightarrow X$ es una (ψ, φ) -contracción difusa entonces tiene a lo más un punto fijo.

Como puede verse en el Teorema 4.3.4, a pesar de que utilizamos (ψ, φ) -contracciones, una clase de funciones más pequeña que la clase de funciones ψ -contractivas, nosotros, a diferencia del Teorema 3.1 de Mihet [34] (Teorema 4.2.9 en este trabajo), debilitamos las condiciones sobre el espacio, considerando en general un KM-espacio métrico difuso, quitando la restricción de que se satisfaga la desigualdad (SM) de la Definición 4.2.3.

El Teorema 4.3.2 se cumple también para GV-espacios métricos difusos. Pero además en este caso, ya que se pide el axioma (GV-1), el resultado garantiza también la unicidad del punto de coincidencia.

Teorema 4.3.6. Sean Y un conjunto no vacío y $(X, M, *)$ un GV-espacio métrico difuso. Sean $S, T : Y \rightarrow X$ dos funciones, $T(Y) \subset$

$S(Y)$, S inyectiva y T una (ψ, φ) -contracción difusa de Jungck con respecto a S . Supongamos que $(S(Y), M, *)$ es GV-espacio métrico difuso completo. Sean $x_0 \in Y$ y $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ la sucesión generada por el proceso iterativo de Jungck ($Sx_{n+1} = Tx_n$). Entonces:

i) $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a algún $Sz = p \in X$.

ii) z es punto de coincidencia de S y T y además es único.

La demostración es básicamente la del Teorema 4.3.2 y la Proposición 4.3.3, por lo cual la omitimos.

De igual manera tenemos el resultado para el caso en que $Y = X$ y S es la identidad en X .

Teorema 4.3.7. Sean $(X, M, *)$ un GV-espacio métrico difuso completo y $T : X \rightarrow X$ una (ψ, φ) -contracción difusa. Sean $x_0 \in X$ y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión definida por $x_{n+1} = Tx_n$. Entonces $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a algún $p \in X$, p es punto fijo de T y además es único.

4.4. Resultados obtenidos sobre estabilidad

De acuerdo a la investigación realizada durante la escritura de esta tesis, en la literatura no hay información relacionada con estabilidad de procesos iterativos en espacios métricos difusos. Siguiendo la definición de T -estabilidad en espacios métricos (Definición 2.5.1), en esta sección, proponemos una definición de estabilidad para procesos iterativos en espacios métricos difusos, a la que llamaremos estabilidad T -difusa.

Definición 4.4.1. Sean $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso y $T : X \rightarrow X$ una función con un único punto fijo p . Sean $x_0 \in X$ y $x_{n+1} = f(T, x_n)$ un proceso iterativo que converge a p . Sean $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión cualquiera en X y $t \in (0, \infty)$. Definamos $\varepsilon_n(t) = M(y_{n+1}, f(T, y_n), t)$.

El proceso iterativo $x_{n+1} = f(T, x_n)$ se dirá T -difuso estable si se satisface la siguiente implicación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(t) = 1, \forall t > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n, p, t) = 1 \forall t > 0.$$

Esto es, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(t) = 1$ para toda $t > 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$.

Ahora damos dos ejemplos para mostrar que existen procesos iterativos que no son T -difuso estables.

Ejemplo 4.4.1. Sea d una métrica en \mathbb{R} , consideremos el GV-espacio métrico difuso estándar (\mathbb{R}, M_d, \cdot) asociado al espacio métrico (\mathbb{R}, d) . Sea $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la función identidad en \mathbb{R} , es decir: $Tx = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión generada por la iteración de Picard iniciando en

$x_0 \neq 0$. Claramente x_0 es punto fijo de T y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Sea $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión definida como $y_n = \frac{1}{n}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_d(y_{n+1}, Ty_n, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{t + d\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)} = 1, \quad \forall t > 0.$$

Sin embargo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M_d(y_n, x_0, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{t + d\left(\frac{1}{n}, x_0\right)} \\ &= \frac{t}{t + d(0, x_0)} < 1, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Lo cual muestra que el proceso iterativo de Picard no es T -difuso estable.

Ejemplo 4.4.2. Consideremos al GV-espacio métrico difuso estándar $([0, 1], M_{|\cdot|}, \cdot)$ donde $|\cdot|$ es la métrica usual en $[0, 1]$ ($M_{|\cdot|}(x, y, t) = \frac{t}{t + |x - y|} \forall x, y \in X$). Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función definida como:

$$Tx = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

La función T tiene un único punto fijo que es 0 y las iteraciones de Picard convergen a dicho punto. En efecto

1. si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, entonces $x_1 = Tx_0 = 0$ y $x_n = 0$ para $n \geq 2$;
2. si $\frac{1}{2} < x \leq 1$, entonces $x_1 = Tx_0 = \frac{1}{2}$ y $x_n = 0$ para $n \geq 2$.

Veremos ahora que la iteración de Picard no es T -difuso estable, para ello tomemos la sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1]$, definida como $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}$. Tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{|\cdot|}(y_{n+1}, Ty_n, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{t + \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right|} = 1, \quad \forall t > 0.$$

Sin embargo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M_{|\cdot|}(y_n, 0, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{t + \left|\frac{1}{n} + \frac{1}{2} - 0\right|} \\ &= \frac{t}{t + \frac{1}{2}} < 1, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

4.4.1. Resultados previos

En lo que continua, el símbolo ψ^0 denotará la función identidad en $[0, 1]$, es decir $\psi^0(\alpha) = \alpha$, para toda $\alpha \in [0, 1]$.

Lema 4.4.1. Sean $*$ una t -norma y $\psi \in \Psi$ tales que

$$\psi(\alpha * \beta) \geq \psi(\alpha) * \psi(\beta) \quad \text{para toda } \alpha, \beta \in [0, 1]. \quad (4.4.1)$$

Sean $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ dos sucesiones en $[0, 1]$ tales que $a_{n+1} \geq \psi(a_n) * v_n$, para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces

$$a_{n+1} \geq \psi^{n+1}(a_0) * \left(\begin{matrix} n \\ * \\ i=0 \end{matrix} \psi^{n-i}(v_i) \right),$$

donde $\begin{matrix} n \\ * \\ k=0 \end{matrix} \psi^{n-k}(v_k)$ denota a $\psi^n[v_0] * \psi^{n-1}[v_1] * \cdots * \psi[v_{n-1}] * \psi^0[v_n]$.

Demostración. Procedamos por inducción. Para $n = 0$,

$$a_{n+1} = a_1 \geq \psi(a_0) * v_0 = \psi^{n+1}(a_0) * \left(\begin{matrix} n \\ * \\ i=0 \end{matrix} \psi^{n-i}(v_i) \right).$$

Supongamos que la conclusión se tiene para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es decir $a_{n+1} \geq \psi^{n+1}(a_0) * \left(\begin{matrix} n \\ * \\ i=0 \end{matrix} \psi^{n-i}(v_i) \right)$. De esto último y por propiedades de ψ , tenemos

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\geq \psi(a_{n+1}) * v_{n+1} \\ &\geq \psi \left[\psi^{n+1}(a_0) * \left(\begin{matrix} n \\ * \\ i=0 \end{matrix} \psi^{n-i}(v_i) \right) \right] * v_{n+1} \\ &\geq \psi^{n+2}(a_0) * \left(\begin{matrix} n \\ * \\ i=0 \end{matrix} \psi^{n-i+1}(v_i) \right) * v_{n+1} \\ &= \psi^{n+2}(a_0) * \left[\left(\begin{matrix} n \\ * \\ i=0 \end{matrix} \psi^{(n+1)-i}(v_i) \right) * \psi^{(n+1)-(n+1)}(v_{n+1}) \right] \\ &= \psi^{n+2}(a_0) * \left(\begin{matrix} n+1 \\ * \\ i=0 \end{matrix} \psi^{(n+1)-i}(v_i) \right). \end{aligned}$$

Lo cual concluye el resultado. \square

En el Lema 4.4.1 ha sido necesario colocar como hipótesis la desigualdad (4.4.1) ya que hay t -normas y funciones en Ψ que no la satisfacen y otras que si lo hacen. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.4.3. Sean $*$ la t -norma producto y $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definido por

$$\psi(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{2\alpha}, & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}; \\ \frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{\alpha-\frac{1}{4}}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{si } \frac{1}{4} \leq \alpha \leq 1. \end{cases}$$

$\psi \in \Psi$ y sin embargo (4.4.1) no se satisface para toda $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Para ver esto basta encontrar dos valores para los cuales no se satisfaga (4.4.1). Tomemos $\alpha = \frac{1}{8}$ y $\beta = \frac{3}{4}$ tenemos:

$$\psi(\alpha \cdot \beta) = 0,4330... < 0,4731... \psi(\alpha) \cdot \psi(\beta).$$

Ejemplo 4.4.4. La función $\psi(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ es un elemento de Ψ y con la t -norma producto se satisface (4.4.1).

Ejemplo 4.4.5. Consideremos la t -norma de Lukasiewicz \mathfrak{L} , $\lambda \in (0, 1)$ y ψ_λ definida como $\psi_\lambda(\alpha) = 1 - \lambda(1 - \alpha)$ para toda $\alpha \in [0, 1]$, entonces se satisface (4.4.1).

De la Observación 4.2.2, para cada $\lambda \in (0, 1)$, $\psi_\lambda \in \Psi$. Veamos que ψ_λ satisface

$$\psi_\lambda(\alpha \mathfrak{L} \beta) \geq \psi_\lambda(\alpha) \mathfrak{L} \psi_\lambda(\beta) \quad \text{para toda } \alpha, \beta \in [0, 1].$$

En efecto $\psi_\lambda(\alpha \mathfrak{L} \beta) = 1 - \lambda(1 - \max\{0, \alpha + \beta - 1\})$ y entonces

$$\psi_\lambda(\alpha \mathfrak{L} \beta) = \begin{cases} 1 - \lambda & \text{si } \alpha + \beta \leq 1 \\ 1 - \lambda[2 - (\alpha + \beta)] & \text{si } \alpha + \beta \geq 1. \end{cases}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(\alpha) \mathfrak{L} \psi_\lambda(\beta) &= \max\{0, 1 - \lambda(1 - \alpha) + 1 - \lambda(1 - \beta) - 1\} \\ &= \max\{0, 1 - \lambda[2 - (\alpha + \beta)]\}. \end{aligned}$$

Caso $\alpha + \beta \leq 1$.

$$\begin{aligned} -(\alpha + \beta) \geq -1 &\Rightarrow 2 - (\alpha + \beta) \geq 1 \Rightarrow \lambda[2 - (\alpha + \beta)] \geq \lambda \\ \Rightarrow -\lambda[2 - (\alpha + \beta)] \leq -\lambda &\Rightarrow 1 - \lambda[2 - (\alpha + \beta)] \leq 1 - \lambda. \end{aligned}$$

Así obtenemos que

$$\psi_\lambda(\alpha \mathfrak{L} \beta) \geq \psi_\lambda(\alpha) \mathfrak{L} \psi_\lambda(\beta).$$

Caso $\alpha + \beta > 1$.

$$2 - (\alpha + \beta) < 1 \Rightarrow 2[2 - (\alpha + \beta)] < 1 \Rightarrow 1 - \lambda[2 - (\alpha + \beta)] > 0.$$

Por lo tanto

$$\psi_\lambda(\alpha) \mathfrak{L} \psi_\lambda(\beta) = 1 - \lambda[2 - (\alpha + \beta)] = \psi_\lambda(\alpha \mathfrak{L} \beta).$$

Ejemplo 4.4.6. Si tomamos la t -norma \wedge , es decir $\alpha \wedge \beta = \min\{\alpha, \beta\}$, tenemos entonces que para cualquier $\psi \in \Psi$ se tiene (4.4.1).

En efecto si $\alpha \leq \beta$ entonces $\psi(\alpha) \leq \psi(\beta)$ y por lo tanto para cada $\alpha, \beta \in [0, 1]$

$$\psi(\alpha \wedge \beta) = \psi(\min\{\alpha, \beta\}) = \psi(\alpha) = \min\{\psi(\alpha), \psi(\beta)\} = \psi(\alpha) \wedge \psi(\beta).$$

Lema 4.4.2. Si $\psi \in \Psi$, entonces para toda sucesión $\{v_n\}_{n=0}^{\infty} \subset (0, 1)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigwedge_{k=0}^n \psi^{n-k}(v_k) = 1,$$

donde $\bigwedge_{k=0}^n \psi^{n-k}(v_k)$ denota a $\psi^n[v_0] \wedge \psi^{n-1}[v_1] \wedge \cdots \wedge \psi[v_{n-1}] \wedge \psi^0[v_n]$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $1 - v_n < \epsilon$. esto es $v_n > 1 - \epsilon$, para toda $n \geq N_\epsilon$. Sea $n > N_\epsilon$, por la asociatividad de \wedge ,

$$\bigwedge_{k=0}^n \psi^{n-k}(v_k) = \left[\bigwedge_{k=0}^{N_\epsilon} \psi^{n-k}(v_k) \right] \wedge \left[\bigwedge_{k=N_\epsilon+1}^n \psi^{n-k}(v_k) \right].$$

Ya que $\psi(\alpha) > \alpha$ para cada $\alpha > 0$, entonces $\psi^{n-i}(v_i) > v_i$ para cada $i \in \{N_\epsilon + 1, \dots, n-1\}$, entonces

$$\bigwedge_{k=0}^n \psi^{n-k}(v_k) \geq \left[\bigwedge_{k=0}^{N_\epsilon} \psi^{n-k}(v_k) \right] \wedge \left[\bigwedge_{k=N_\epsilon+1}^n v_k \right].$$

Ya que $v_n > 1 - \epsilon$, para toda $n \geq N_\epsilon$,

$$\begin{aligned} &\geq \left[\bigwedge_{k=0}^{N_\epsilon} \psi^{n-k}(v_k) \right] \wedge \left[\bigwedge_{k=N_\epsilon+1}^n (1 - \epsilon) \right] \\ &= \left[\bigwedge_{k=0}^{N_\epsilon} \psi^{n-k}(v_k) \right] \wedge (1 - \epsilon). \end{aligned}$$

Por la continuidad de \wedge , tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bigwedge_{k=0}^n \psi^{n-k}(v_k) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left[\bigwedge_{k=0}^{N_\epsilon} \psi^{n-k}(v_k) \right] \wedge (1 - \epsilon) \right) \\ &= \left[\bigwedge_{k=0}^{N_\epsilon} \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^{n-k}(v_k) \right] \wedge (1 - \epsilon) \\ &= 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

De lo cual se obtiene la conclusión. □

Lema 4.4.3. Sean $\lambda \in (0, 1)$ y $\psi_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida como $\psi_\lambda(\alpha) = 1 - \lambda(1 - \alpha)$. Sea \mathfrak{L} la t -norma de Lukasiewicz. Entonces para cada sucesión $\{v_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{L}_{i=0}^n \psi_\lambda^{n-i}(v_i) = 1,$$

donde $\mathfrak{L}_{k=0}^n \psi^{n-k}(v_k)$ denota a $\psi^n[v_0] \mathfrak{L} \psi^{n-1}[v_1] \mathfrak{L} \cdots \mathfrak{L} \psi[v_{n-1}] \mathfrak{L} \psi^0[v_n]$.

Demostración. Definamos

$$\begin{aligned} S_m^{(n)} &= \sum_{i=0}^m \lambda^{n-i}(1-v_i), \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad m \leq n; \\ S_n &= S_n^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}; \\ L_m^{(n)} &= \mathfrak{L}_{\lambda}^m \psi_{\lambda}^{n-i}(v_i), \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad m \leq n; \\ L_n &= L_n^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sabemos por el Lema 1.3.2 que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i}(1-v_i) = 0$.

Sea $\epsilon \in (0, 1)$, existe $\eta \in \mathbb{N}$ tal que $S_n < \epsilon$, para toda $n \geq \eta$. Entonces para cualquier $n \geq \eta$, tenemos que

$$\begin{aligned} L_1^{(n)} &= \mathfrak{L}_{\lambda}^1 \psi_{\lambda}^{n-i}(v_i) \\ &= \psi_{\lambda}^{n-0}(v_0) \mathfrak{L} \psi_{\lambda}^{n-1}(v_1) \\ &= [1 - \lambda^n(1-v_0)] \mathfrak{L} [1 - \lambda^{n-1}(1-v_1)] \\ &= \text{máx}\{0, 2 - [\lambda^n(1-v_0) + \lambda^{n-1}(1-v_1)] - 1\} \\ &= \text{máx} \left\{ 0, 1 - \sum_{i=0}^1 \lambda^{n-i}(1-v_i) \right\} = \text{máx} \left\{ 0, 1 - S_1^{(n)} \right\}. \end{aligned}$$

Notemos que $1 - S_1^{(n)} \geq 1 - S_n > 1 - \epsilon > 0$, entonces

$$L_1^{(n)} = \text{máx} \left\{ 0, 1 - S_1^{(n)} \right\} = 1 - S_1^{(n)}.$$

Ahora consideremos a $L_2^{(n)}$,

$$\begin{aligned} L_2^{(n)} &= \mathfrak{L}_{\lambda}^2 \psi_{\lambda}^{n-i}(v_i) \\ &= L_1^{(n)} \mathfrak{L} \psi_{\lambda}^{n-2}(v_2) \\ &= \left[1 - \sum_{i=0}^1 \lambda^{n-i}(1-v_i) \right] \mathfrak{L} [1 - \lambda^{n-2}(1-v_2)] \\ &= \text{máx} \left\{ 0, 1 - \left[\sum_{i=0}^1 \lambda^{n-i}(1-v_i) + \lambda^{n-2}(1-v_2) \right] \right\} \\ &= \text{máx}\{0, 1 - S_2^{(n)}\}. \end{aligned}$$

Nuevamente, $1 - S_2^{(n)} \geq 1 - S_n > 1 - \epsilon > 0$, entonces

$$L_2^{(n)} = \text{máx} \left\{ 0, 1 - S_2^{(n)} \right\} = 1 - S_2^{(n)}.$$

Realizando este procedimiento n -veces, tendremos que $L_n = 1 - S_n > 1 - \epsilon$. En resumen, dado $\epsilon \in (0, 1)$ existe $\eta \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^m \psi_\lambda^{n-i}(v_i) > 1 - \epsilon, \quad \forall n \geq \eta.$$

Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \psi_\lambda^{n-i}(v_i) = 1$.

□

4.4.2. Resultados nuevos sobre estabilidad

Todos los resultados que presentamos en esta última parte, incluyendo los de la Sección 4.4.1, son resultados propios de la tesis y corresponden a estabilidad de procesos iterativos en espacios métricos difusos.

Comenzaremos con algunos resultados inmediatos que se obtienen directamente de la T -estabilidad en espacios métricos.

Teorema 4.4.4. *Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función con un único punto fijo p . Sean $x_0 \in X$ arbitrario y $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ la sucesión generada por el proceso iterativo $x_{n+1} = f(T, x_n)$ el cual converge al punto fijo de T . Sean $m, k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $\eta \in \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua y creciente. Si $x_{n+1} = f(T, x_n)$ es T -estable (Definición 2.5.1) en (X, d) entonces también es T -difuso estable en el GV -espacio métrico difuso*

a) (X, M, \cdot) con M definida como

$$M(x, y, t) = \frac{g(t)}{g(t) + md(x, y)}, \quad x, y \in X, t \in \mathbb{R}^+.$$

a') (X, M, \wedge) con M definida como

$$M(x, y, t) = \frac{kt^\eta}{kt^\eta + md(x, y)}, \quad \forall x, y \in X, t \in \mathbb{R}^+.$$

b) (X, M, \cdot) con M definida como

$$M(x, y, t) = e^{-\frac{d(x, y)}{g(t)}}, \quad x, y \in X, t \in \mathbb{R}^+.$$

b') (X, M, \wedge) con M definida como

$$M(x, y, t) = e^{-\frac{d(x, y)}{t^\eta}}, \quad \forall x, y \in X, t \in \mathbb{R}^+.$$

Demostración. La prueba de que (X, M, \cdot) en a) y b) son GV-espacios métricos difusos, puede encontrarse en las Propositiones 2.3.1 y 2.3.2 de [30]. Por otra parte, se sabe por el Ejemplo 4.2 de [60] que (M, \wedge) de los incisos a') y b') son métricas difusas. Ahora bien, sea $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión arbitraria en X . Supongamos que $\varepsilon_n(t) = M(y_{n+1}, f(T, y_n), t) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty, \forall t > 0$.

a) En este caso
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{g(t) + md(y_{n+1}, f(T, y_n))} = 1, \quad \forall t > 0.$$

Pero esto sucede si y sólo si $d(y_{n+1}, f(T, y_n)) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, en otro caso $\varepsilon_n(t)$ o no convergería o no lo haría a 1 para cada t .

Luego la T -estabilidad del proceso iterativo, implica que $d(y_n, p) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n, p, t) = \frac{g(t)}{g(t) + md(y_n, p)} = 1.$$

b) Ahora tenemos que
$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{d(y_{n+1}, f(T, y_n))}{g(t)}} = 1.$$

Esto pasa si y sólo si $\frac{d(y_{n+1}, f(T, y_n))}{g(t)} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y esto ocurre si y sólo si $d(y_{n+1}, f(T, y_n)) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Esto implica que $d(y_n, p) \rightarrow 0$ y entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n, p, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{d(y_n, p)}{g(t)}} = 1.$$

Las pruebas de estabilidad de a') y b') son como las de a) y b) respectivamente. □

Es importante mencionar un caso particular del inciso (a) del Teorema 4.4.4 cuando elegimos $m = 1$ y a $g(t) = t$, para toda $t > 0$.

Corolario 4.4.5. Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una función con un único punto fijo p . Sea $x_0 \in X$ arbitrario, suponga que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión generada por cierto proceso iterativo $x_{n+1} = f(T, x_n)$ el cual converge a p . Si el proceso iterativo $x_{n+1} = f(T, x_n)$ es T -estable entonces también es T -difuso estable en el GV-espacio métrico difuso estándar (X, M_d, \cdot) asociado a (X, d) .

Teorema 4.4.6. Sea $k \in \mathbb{R}, k > 0$. Sean (X, d) un espacio métrico tal que $d(x, y) \leq k$, para todo $x, y \in X$ y $T : X \rightarrow X$ una función con un único punto fijo p . Sean $x_0 \in X$ arbitrario y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión generada por el proceso iterativo $x_{n+1} = f(T, x_n)$ el cual converge al punto fijo de T . Sea $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow (k, \infty)$ una función continua y creciente.

Si $x_{n+1} = f(T, x_n)$ es T -estable en (X, d) , entonces también es T -difuso estable en el GV-espacio métrico difuso (X, M, \mathfrak{L}) , con M definida como

$$M(x, y, t) = \left(1 - \frac{d(x, y)}{g(t)}\right), \quad x, y \in X, t \in \mathbb{R}^+.$$

Demostración. Podemos ver que (X, M, \mathfrak{L}) es un GV-espacio métrico difuso en la Proposición 2.3.6 de [30]. Sea $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión arbitraria en X . Supongamos que $\varepsilon_n(t) = M(y_{n+1}, f(T, y_n), t) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, $\forall t > 0$, esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{d(y_{n+1}, f(T, y_n))}{g(t)}\right) = 1, \quad \forall t > 0,$$

pero esto sucede si y sólo si $d(y_{n+1}, f(T, y_n)) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, lo cual implica que $d(y_n, p) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n, p, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{d(y_n, p)}{g(t)}\right) = 1.$$

□

Un resultado distinto pero también inmediato es el siguiente.

Teorema 4.4.7. Sean (X, N, \cdot) un GV-espacio métrico difuso y $T : X \rightarrow X$ una función con un único punto fijo p . Sean $x_0 \in X$ arbitrario y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión generada por el proceso iterativo $x_{n+1} = f(T, x_n)$ el cual converge al punto fijo de T . Sea $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua y creciente. Si $x_{n+1} = f(T, x_n)$ es T -difuso estable en (X, N, \cdot) , entonces también lo es en el GV-espacio métrico difuso (X, M, \cdot) , con M definida como

$$M(x, y, t) = \frac{\varphi(t) + N(x, y, t)}{\varphi(t) + 1}, \quad x, y \in X, t \in \mathbb{R}^+.$$

Demostración. Sea $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión arbitraria en X . Supongamos que $\varepsilon_n(t) = M(y_{n+1}, f(T, y_n), t) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, $\forall t > 0$, es decir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t) + N(y_{n+1}, f(T, y_n), t)}{\varphi(t) + 1} = 1, \quad \forall t > 0.$$

Entonces $N(y_{n+1}, f(T, y_n), t) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, en otro caso, ε_n no converge o $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n < 1$.

Por la estabilidad de $x_{n+1} = f(T, x_n)$ en (X, N, \cdot) se tiene que $M(y_n, p, t)$ tiende a 1 cuando n tiende a ∞ , luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n, p, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t) + N(y_n, p, t)}{\varphi(t) + 1} = 1.$$

□

Teorema 4.4.8. *Sea Y un conjunto no vacío. Consideremos un KM-espacio métrico difuso (X, M, \wedge) , donde M satisface que para todo $x, y \in X$ y $t > 0$, $M(x, y, t) > 0$. Sean $T, S : Y \rightarrow X$ dos funciones tales que $T(Y) \subset S(Y)$, S inyectiva y T una (ψ, φ) -contracción difusa de Jungck con respecto a S . Supongamos que S y T tienen un único punto de coincidencia z , sea $p \in X$ el punto tal que $Sz = Tz = p$. Entonces*

i) el punto de coincidencia es único,

ii) la sucesión $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ generada por el proceso iterativo de Jungck ($Sx_{n+1} = Tx_n$) converge a p y

iii) el proceso iterativo de Jungck es (S, T) -difuso estable.

Demostración. La Proposición 4.3.3 asegura la unicidad del punto de coincidencia. Sea $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión generada por el proceso iterativo de Jungck. Para cada $t > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} M(Sx_n, p, t) &\geq M(Tx_{n-1}, p, \varphi(t)) * M(p, p, t - \varphi(t)) \\ &\geq \psi(M(Sx_{n-1}, p, t)). \end{aligned}$$

Ya que $M(Sx_{n-1}, p, t) \geq \psi(M(Sx_{n-2}, p, t))$, entonces

$$M(Sx_n, p, t) \geq \psi^2(M(Sx_{n-2}, p, t)).$$

Si repetimos este proceso n -veces, obtenemos

$$M(Sx_n, p, t) \geq \psi^n(M(Sx_0, p, t)).$$

Por lo tanto, por el Lema 1.3.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(Sx_n, p, t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(M(Sx_0, p, t)) = 1.$$

Así completamos la prueba de (ii).

Para probar (iii), sea $\{Sy_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión arbitraria en $S(Y)$ y definamos $\varepsilon_n(t) = M(Sy_{n+1}, Ty_n, t)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $t > 0$. Tenemos entonces que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $t > 0$

$$M(Sy_{n+1}, p, t) \geq M(p, Ty_n, \varphi(t)) \wedge M(Ty_n, Sy_{n+1}, t - \varphi(t)).$$

Pero,

$$M(Ty_n, Sy_{n+1}, t - \varphi(t)) = \varepsilon_n(t - \varphi(t)) \text{ y } M(p, Ty_n, \varphi(t)) \geq \psi[M(p, Sy_n, t)],$$

Entonces

$$M(Sy_{n+1}, p, t) \geq \psi[M(p, Sy_n, t)] \wedge \varepsilon_n(t - \varphi(t)). \quad (4.4.2)$$

Si ponemos $a_n = M(Sy_n, p, t)$ y $v_n = \varepsilon_n(t - \varphi(t))$, la desigualdad (4.4.2) queda escrita como $a_{n+1} = \psi(a_n) \wedge v_n$. Además es fácil ver que \wedge y cualquier $\psi \in \Psi$ satisfacen la desigualdad (4.4.1) del Lema 4.4.1 (ver Ejemplo 4.4.6). Por lo tanto, ya que \wedge , ψ , a_n y v_n satisfacen las condiciones de Lema 4.4.1 para cada t , tenemos que para cada $t > 0$

$$M(Sy_{n+1}, p, t) \geq \psi^{n+1}(M(Sy_0, p, t)) \wedge \left(\bigwedge_{i=0}^n \psi^{n-i}(\varepsilon_i(t - \varphi(t))) \right).$$

Si $\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i(s) = 1$, para toda $s > 0$, entonces $\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i(t - \varphi(t)) = 1$, y entonces por el Lema 4.4.2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigwedge_{i=0}^n \psi^{n-i}(\varepsilon_i(t - \varphi(t))) = 1.$$

Por último, de la continuidad de \wedge ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M(Sy_{n+1}, p, t) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\psi^{n+1}(M(Sy_0, p, t)) \wedge \left(\bigwedge_{i=0}^n \psi^{n-i}(\varepsilon_i(t - \varphi(t))) \right) \right] \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^{n+1}(M(Sy_0, p, t)) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\bigwedge_{i=0}^n \psi^{n-i}(\varepsilon_i(t - \varphi(t))) \right) \\ &= 1 \wedge 1 = 1. \end{aligned}$$

□

De este teorema, en el caso $Y = X$ y S la identidad en X se obtiene la estabilidad del proceso iterativo de Picard para (ψ, φ) -contracciones difusas sobre espacios métricos difusos con la t -norma del mínimo.

Teorema 4.4.9. *Consideremos un KM-espacio métrico difuso (X, M, \wedge) , donde M satisface que para todo $x, y \in X$ y $t > 0$, $M(x, y, t) > 0$. Si $T : X \rightarrow X$ es una (ψ, φ) -contracción difusa con un punto fijo p . Entonces el punto fijo es único, la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ generada por el proceso iterativo de Picard converge a p y este proceso iterativo es T -difuso estable.*

El resultado siguiente es la versión del Teorema 4.4.8 para GV -espacios métricos difusos, la prueba es parecida a la del Teorema 4.4.8 y por lo tanto no la daremos.

Teorema 4.4.10. *Sea Y un conjunto no vacío. Consideremos un GV -espacio métrico difuso (X, M, \wedge) . Sean $T, S : Y \rightarrow X$ dos funciones, $T(Y) \subset S(Y)$, S inyectiva y T una (ψ, φ) -contracción difusa de Jungck con respecto a S . Supongamos que S y T tienen un punto de coincidencia z . Sea $p \in X$ el punto tal que $Sz = Tz = p$. Entonces el punto de coincidencia es único, la iteración de Jungck ($Sx_{n+1} = Tx_n$) convergen a p y es (S, T) -difuso estable.*

Veamos un caso particular del resultado anterior que nos garantiza la estabilidad del proceso iterativo de Picard.

Teorema 4.4.11. *Sea (X, M, \wedge) un GV-espacio métrico difuso. Si $T : X \rightarrow X$ es una (ψ, φ) -contracción difusa con un punto fijo p . Entonces el punto fijo es único, la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ generada por el proceso iterativo de Picard converge a p y además este proceso es T -difuso estable.*

Teorema 4.4.12. *Sea Y un conjunto no vacío. Consideremos un KM-espacio métrico difuso (X, M, \mathfrak{L}) , donde M satisface que para todo $x, y \in X$ y $t > 0$, $M(x, y, t) > 0$. Sea $\psi_\lambda \in \Psi$ definida como $\psi_\lambda(\alpha) = 1 - \lambda(1 - \alpha)$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Supongamos que $T, S : Y \rightarrow X$ son dos funciones tales que $T(Y) \subset S(Y)$, S es inyectiva y T es una (ψ_λ, φ) -contracción difusa de Jungck con respecto a S . Supongamos que S y T tienen un punto de coincidencia z , sea $p \in X$ el punto tal que $Sz = Tz = p$. Entonces,*

- i) el punto de coincidencia es único,*
- ii) la sucesión generada por las iteraciones y de Jungck converge a p , y*
- iii) el proceso iterativo de Jungck es (S, T) -difuso estable.*

Demostración. Las pruebas de (i) y (ii) son como las pruebas de (i) y (ii) del Teorema 4.4.8. Para probar (iii) primero notemos que ψ y \mathfrak{L} satisfacen la hipótesis (4.4.1) del Lema 4.4.1 (ver Ejemplo 4.4.5). Sean $\{Sy_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión arbitraria en $S(Y)$ y $\varepsilon_n(t) = M(Sy_{n+1}, Ty_n, t)$. Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t > 0$:

$$\begin{aligned} M(Sy_{n+1}, p, t) &\geq M(Sy_{n+1}, Ty_n, t - \varphi(t)) \mathfrak{L} M(Ty_n, p, \varphi(t)) \\ &\geq \varepsilon_n(t - \varphi(t)) \mathfrak{L} \psi_\lambda[M(y_n, p, t)]. \end{aligned}$$

Hagamos $v_n = \varepsilon_n(t - \varphi(t))$ y $a_n = M(Sy_n, p, t)$. Ya que ψ_λ , v_n y a_n satisfacen las condiciones del Lema 4.4.1 entonces

$$M(Sy_{n+1}, p, t) \geq \psi_\lambda^{n+1}[M(Sy_0, p, t)] \mathfrak{L} \left(\mathfrak{L}_{i=0}^n \psi_\lambda^{n-i}[\varepsilon_i(t - \varphi(t))] \right). \quad (4.4.3)$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(s) = 1$, para toda $s > 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n((1 - k)t) = 1$, y entonces por el Lema 4.4.3,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{L}_{i=0}^n \psi_\lambda^{n-i}[\varepsilon_i(t - \varphi(t))] = 1, \quad \text{para toda } t > 0.$$

De modo que tomando límite en (4.4.3), tenemos por la continuidad de \mathfrak{L} que para toda $t > 0$,

$$\begin{aligned}
1 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} M(Sy_{n+1}, p, t) \\
&\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\psi_\lambda^{n+1}[M(Sy_0, p, t)] \mathfrak{L} \left(\bigotimes_{i=0}^n \psi_\lambda^{n-i}[\varepsilon_i(t - \varphi(t))] \right) \right] \\
&\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_\lambda^{n+1}[M(Sy_0, p, t)] \mathfrak{L} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\bigotimes_{i=0}^n \psi_\lambda^{n-i}[\varepsilon_i(t - \varphi(t))] \right) \\
&= 1 \mathfrak{L} 1 = 1.
\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

□

Tenemos también la estabilidad del proceso iterativo de Picard como caso particular del teorema anterior cuando tomamos $Y = X$ y S la identidad en X .

Teorema 4.4.13. *Consideremos un KM -espacio métrico difuso (X, M, \mathfrak{L}) donde M satisface que para todo $x, y \in X$ y $t > 0$, $M(x, y, t) > 0$. Sea $\lambda \in (0, 1)$ y consideremos la función $\psi_\lambda \in \Psi$ definida por $\psi_\lambda(\alpha) = 1 - \lambda(1 - \alpha)$, para toda $\alpha \in [0, 1]$. Si T es una (ψ_λ, φ) -contracción difusa que tiene un punto fijo entonces este es único, la iteración de Picard converge a dicho punto y es T -difuso estable.*

Por supuesto podemos enunciar también las correspondientes versiones de los Teoremas 4.4.12 y 4.4.13 para GV -espacios métricos difusos.

Teorema 4.4.14. *Sea Y un conjunto no vacío. Consideremos un GV -espacio métrico difuso (X, M, \mathfrak{L}) . Sea $\psi_\lambda \in \Psi$ definida como $\psi_\lambda(\alpha) = 1 - \lambda(1 - \alpha)$, para toda $\alpha \in [0, 1]$. Sean $T, S : Y \rightarrow X$ dos funciones, $T(Y) \subset S(Y)$, S inyectiva y T una (ψ_λ, φ) -contracción difusa de Jungck con respecto a S . Supongamos que S y T tienen un punto de coincidencia z , sea $p \in X$ el punto tal que $Sz = Tz = p$. Entonces el punto de coincidencia es único, la sucesión generada por las iteraciones de Jungck $\{Sx_n\}_{n=0}^\infty$, converge a p y además este proceso iterativo es (S, T) -difuso estable.*

Teorema 4.4.15. *Consideremos un GV -espacio métrico difuso (X, M, \mathfrak{L}) . Sea $\lambda \in (0, 1)$ y consideremos la función $\psi_\lambda \in \Psi$ definida por $\psi_\lambda(\alpha) = 1 - \lambda(1 - \alpha)$, para toda $\alpha \in [0, 1]$. Si T es una (ψ_λ, φ) -contracción difusa que tiene un punto fijo, entonces este es único, las iteraciones de Picard convergen a dicho punto y el proceso iterativo de Picard es T -difuso estable.*

Los siguientes dos resultados nos garantizan la estabilidad del proceso iterativo de Picard para funciones ψ -contractivas en ciertos KM -espacios métricos fuertes.

Teorema 4.4.16. *Sea (X, M, \wedge) un GV-espacio métrico difuso fuerte. Sea $T : X \rightarrow X$ una función ψ -contractiva difusa. Sean $x_0 \in X$ y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión definida por $x_{n+1} = Tx_n$. Entonces este proceso iterativo es T -difuso estable*

Demostración. Sea $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ una sucesión arbitraria. Definamos $\varepsilon_n(t) = M(y_{n+1}, Ty_n, t)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $t > 0$, y supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(t) = 1$, para toda $t > 0$.

Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $t > 0$

$$\begin{aligned} M(y_{n+1}, p, t) &\geq M(p, Ty_n, t) \wedge M(Ty_n, y_{n+1}, t) \\ &\geq \psi[M(p, y_n, t)] \wedge \varepsilon_n(t). \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Si ponemos $a_n = M(y_n, p, t)$ y $v_n = \varepsilon_n(t)$, la desigualdad (4.4.5) queda escrita como $a_{n+1} = \psi(a_n) \wedge v_n$.

Ya que ψ satisface las condiciones de Lema 4.4.1, tenemos que

$$M(y_{n+1}, p, t) \geq \psi^{n+1}(M(y_0, p, t)) \wedge \left(\bigwedge_{i=0}^n \psi^{n-i}(\varepsilon_i(t)) \right).$$

Ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(t) = 1$, por el Lema 4.4.2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigwedge_{i=0}^n \psi^{n-i}(\varepsilon_i(t)) = 1.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M(y_{n+1}, p, t) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\psi^{n+1}(M(y_0, p, t)) \wedge \left(\bigwedge_{i=0}^n \psi^{n-i}(\varepsilon_i(t)) \right) \right] \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^{n+1}(M(y_0, p, t)) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\bigwedge_{i=0}^n \psi^{n-i}(\varepsilon_i(t)) \right) \\ &= 1 \wedge 1 = 1. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.4.17. *Consideremos el GV-espacio métrico difuso fuerte (X, M, \mathfrak{L}) . Sea $\lambda \in (0, 1)$ y consideremos la función $\psi_\lambda \in \Psi$ definida por $\psi_\lambda(\alpha) = 1 - \lambda(1 - \alpha)$, para toda $\alpha \in [0, 1]$. Si T es una función ψ_λ -contractiva que tiene un único punto fijo y además las iteraciones de Picard convergen a dicho punto, entonces el proceso iterativo de Picard es T -difuso estable.*

La manera de probar este resultado es la misma que la del Teorema 4.4.16. La diferencia es que en lugar de utilizar el Lema 4.4.2 se usa el Lema 4.4.3.

En realidad el Teorema 4.4.8 y el Teorema 4.4.12 se satisface también para KM -espacios métricos difusos fuertes y funciones ψ -contractivas. Con estos resultados, los Teoremas 4.4.16 y 4.4.17 quedarían como casos particulares.

Observación 4.4.1. En los Teoremas 4.4.8 y 4.4.12 se pide que la (ψ, φ) -contracción difusa tenga un único punto de coincidencia. Si se pide la completitud del espacio en estos resultados, el Teorema 4.3.2 y la Proposición 4.3.3 aseguran la existencia y unicidad del punto de coincidencia y también la convergencia del proceso iterativo de Picard.

Observación 4.4.2. Lo mismo, que en la Observación 4.4.1, sucede con los Teoremas 4.4.10 y 4.4.14, pero ahora la existencia y unicidad del punto fijo y la convergencia del proceso iterativo de Picard lo garantiza el Teorema 4.3.6.

Conclusiones

A continuación listamos los resultados que hemos obtenido en el desarrollo de esta tesis. Estos resultados se encuentran en los Capítulos 3 y 4 donde abordamos la estabilidad de procesos iterativos con punto fijo en espacios métricos clásicos y espacios métricos difusos respectivamente.

Capítulo 3. Se presentaron resultados obtenidos sobre distintos tipos de estabilidad y también resultados de convergencia a puntos fijos.

Sección 3.1 (a) Se introdujeron los procesos iterativos “*Jungck-Kirk multi-pasos generalizado*” y “*Jungck-Kirk multi-pasos*”. Estos procesos iterativos son de tal generalidad que a partir de ellos pueden ser obtenidos otros ya conocidos.

(b) Se probó en el Teorema 3.1.1 y el Corolario 3.1.2 que, bajo ciertas restricciones, los procesos iterativos “*Jungck-Kirk multi-pasos generalizado*” y “*Jungck-Kirk multi-pasos*” son T -estables, casi T -estables y casi T -estables sumables con respecto a una clase de funciones que satisfacen condiciones contractivas del tipo $d(Tx, p) \leq \delta d(x, p)$, con $\delta \in [0, 1)$ fijo.

Estos resultados se publicaron en la revista *International Journal of Applied Mathematical Research*, (ver [53]).

Sección 3.2 Se establecieron los siguientes resultados de γ -estabilidad:

Teorema 3.2.1 Establece la γ -estabilidad de la iteración de Mann asociada a funciones que satisfacen la Condición 1.2.16.

Corolario 3.2.4 Establece la γ -estabilidad de la iteración de Mann asociada a cuasi-contracciones con la restricción de la constante de contracción $0 \leq \delta < 1$.

Teorema 3.2.6 Establece la γ -estabilidad de la iteración de Mann asociada a funciones que satisfacen la Condición 1.2.15.

Teorema 3.2.7 Establece la γ -estabilidad del proceso iterativo de Mann asociado a funciones que satisfacen la Condición 1.2.2 con la restricción a la constante de contracción $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$ y $0 \leq \delta c < 1$.

Corolario 3.2.8 Establece la γ -estabilidad del proceso iterativo de Mann asociado a cuasi-contracciones con la restricción de la constante de contracción $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$.

Teorema 3.2.9 Establece la γ -estabilidad del proceso iterativo de Mann asociado a funciones que satisfacen la Condición 1.2.3 con la restricción a la constante de contracción $0 \leq \delta < 1$ y $0 \leq \delta(c+2) < 1$.

En los Teoremas 3.2.2, 3.2.5 y el Corolario 3.2.3 establecimos la γ -estabilidad del proceso iterativo de Picard para funciones que satisfacen respectivamente las condiciones contractivas utilizadas en los Teoremas 3.2.1 y 3.2.6 y el Corolario 3.2.4.

Los Teoremas 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7, 3.2.9 y el Corolario 3.2.8 incluyen resultados de convergencia.

Capítulo 4: Abordamos el concepto de espacio métrico difuso con el objetivo de estudiar el tema de la estabilidad de procesos iterativos en este tipo de espacios.

Sección 4.3.2 Introdujimos el concepto de (ψ, φ) -contracción difusa de Jungck (Definición 4.3.2) y establecimos los siguientes resultados:

Teorema 4.3.2: Dada T una (ψ, φ) -contracción difusa de Jungck con respecto a una función S , ambas T y S definidas en un KM-espacio métrico difuso completo, probamos que T y S tienen al menos un punto de coincidencia y que el proceso iterativo de Jungck converge y lo hace a algún punto de coincidencia.

Proposición 4.3.3: Proporciona una condición suficiente que asegura la unicidad del punto de coincidencia para (ψ, φ) -contracciones difusas de Jungck.

El Teorema 4.3.4 y la Proposición 4.3.5 son casos particulares (pero importantes) del Teorema 4.3.2 y la Proposición 4.3.3 respectivamente.

Los Teoremas 4.3.6 y 4.3.7 son las versiones de los Teoremas 4.3.2 y 4.3.4 para GV-espacios métricos difusos completos.

Sección 4.4: Introdujimos el concepto de estabilidad T -difusa (Definición 4.4.1) en espacios métricos difusos y probamos los siguientes resultados:

Teorema 4.4.7: Considerando dos GV-espacios métricos difusos $(X, N, *)$ y $(X, M, *)$ donde M está definida como $M(x, y, t) = \frac{\varphi(t) + N(x, y, t)}{\varphi(t) + 1}$, φ una función positiva, continua y creciente, probamos que si un proceso iterativo es T -difuso estable en $(X, N, *)$ entonces también lo es en $(X, M, *)$.

Teorema 4.4.8: Este teorema establece que el proceso iterativo de Jungck es T -difuso estable con respecto a (ψ, φ) -contracciones definidas en KM-espacios métricos difusos cuya t -norma es la del mínimo \wedge .

Teorema 4.4.12: Este teorema establece que el proceso iterativo de Jungck es T -difuso estable con respecto a (ψ_λ, φ) -contracciones $(\psi_\lambda = 1 - \lambda(1 - \alpha), \forall \alpha \in [0, 1])$ definidas en KM-espacios métricos difusos que tienen por t -norma la de Lukasiewicz \mathfrak{L} .

Teorema 4.4.16: Establece que el proceso iterativo de Picard es T -difuso estable con respecto a funciones ψ -contractivas (Definición 4.2.11) definidas en GV-espacios métricos difusos fuertes cuya t -norma es la del mínimo \wedge .

Teorema 4.4.17: Establece que el proceso iterativo de Picard es T -difuso estable con respecto a funciones ψ_λ -contractivas $(\psi_\lambda = 1 - \lambda(1 - \alpha), \forall \alpha \in [0, 1])$ definidas en GV-espacios métricos difusos fuertes que tienen la t -norma de Lukasiewicz \mathfrak{L} .

Los Teoremas 4.4.10 y 4.4.14 son las versiones para GV -espacios métricos difusos de los Teoremas 4.4.8 y 4.4.12 respectivamente

Los Teoremas 4.4.9, 4.4.11, 4.4.13 y 4.4.15 son casos particulares de Teoremas 4.4.8, 4.4.10, 4.4.12 y 4.4.14 respectivamente. Del Teorema 4.4.4 al 4.4.6 consideramos GV-espacios métricos difusos definidos a partir de espacios métricos clásicos y probamos resultados de estabilidad difusa que se heredan de la estabilidad en los espacios métricos clásicos.

Bibliografía

- [1] Asadi M., Soleimani H., Vaezpour S. M., Rhoades B.E., *On T-Stability of Picard iteration in cone metric spaces*, Fixed Point Theory and Appl., 1-6 (2009).
- [2] Babu A. C., Panda B. B., *Extensions of some fixed point theorems of Ćirić, Maiti and Pal*, Publications de L'Institut Mathématique, 42 (56), 97-105 (1987).
- [3] Berinde V., *Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration*, Nonlinear Analysis Forum, 1 (9), 43-53 (2004).
- [4] Berinde V., *Iterative approximation of fixed Points*, Springer Verlag, Lectures Notes in Mathematics, 1912, ISBN 978-3-540-72223-5 (2007).
- [5] Berinde V., *Summable almost stability of fixed point iteration procedures*, Carpathian J. Math., 19 (2), 81 - 88 (2003).
- [6] Bellman R., Kalaba R., Zadeh. L.A., *Abstraction and Pattern Classification*, RAND Memorandum RM-4307-PR, Octubre (1964).
- [7] Branciari A., *A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type*, Int. J. Math. and Math. Sci., 29 (9), 531-536 (2002).
- [8] Bosede A. O., Rhoades B. E., *Stability of Picard and Mann iteration for a general class of functions*, J. Adv. Math. Studies, 3 (2), 23-25 (2010).
- [9] Burden R. L., Douglas F. J., *Analisis Numérico*, Thomson Learning, 7ma Edición, ISBN: 970-686-134-3 (2001).
- [10] Chugh R., Kumar V., *Stability of hybrid fixed point iterative algorithms of Kirk-Noor type in normed linear space for self and nonself operators*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 7 (24) 1165–1184 (2012).

- [11] Ćirić L. B., *A generalization of Banach's contractions principle*, Proc. Amer. Math. Soc., 45 (2) 267-273 (1974).
- [12] Ćirić L. B., *On contraction type mapping*, Math. Balcanica, 1, 52-57 (1971).
- [13] Diaz J. B., Metcalf F. T., *On the structure of the set of subsequential limit points of successive approximations*, Bull. Amer. Math. Soc., 73, 516-519 (1967).
- [14] Dotson W. G., *On the Mann iterative process*, Trans. Amer. Math. Soc., 149, 65-73 (1970).
- [15] Gairola U. C., Rawat A. S., *A fixed point theorem for integral type inequality*, Int. Journal of Math. Analysis, 2 (15), 709-712 (2008).
- [16] García P., *Estabilidad de procesos iterativos para aplicaciones con punto fijo*, Tesis, Benemértia Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Puebla, México (2000).
- [17] George A., Veeramani P., *On some results in fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 64, 395-399 (1994).
- [18] Grabiec M., *Fixed points in fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 27, 385-389 (1988).
- [19] Gregori V., Sapena A., *On fixed points theorems in fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 125, 245-252 (2002).
- [20] Gürsoy F., Karakaya V., Rhoades B. E., *Some convergence and stability results for the Kirk multistep and Kirk-SP fixed point iterative algorithms*, Abstr. Appl. Anal., 1-12 (2014).
- [21] Gürsoy F., Karakaya V., *Some Convergence and stability results for two new kirk type hybrid fixed point iterative algorithms*, J. Funct. Spaces, 1-8 (2013).
- [22] Harder A. M., Hicks T. L., *Stability results for fixed point iteration procedures*, Math. Jap., 33 (5), 693-706 (1988).
- [23] Imoru C. O., Olatinwo M. O., *Some stability theorems for some iteration processes*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rer. Nat. Mathematica, 45, 81-88 (2006).
- [24] Ishikawa S., *Fixed points by new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc., 44, 147-150 (1974).
- [25] Kannan R., *Some Result on fixed points II.*, Amer. Math. Monthly, 76, 405-408 (1969).

- [26] Kirk W. A., *On successive approximations for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Glasg. Math. J., 12, 6-9 (1969).
- [27] Kirk W. A., Sims B. *Handbook of metric fixed point theory*, Kluwer Academic Publishers, ISBN 0-7923-7073-2, (2001).
- [28] Kramosil I., Michalek J., *Fuzzy metric and statistical metric spaces*, Kybernetica, 11, 326-334 (1975).
- [29] Loayza J. R., *Aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach*, Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima, Peru (2006).
- [30] López A., *Métricas fuzzy. Aplicaciones al filtrado de imágenes en color*, Memoria, Universidad Politécnica de Valencia, Departamento de Matemática Aplicada, Valencia, España (2010).
- [31] Mann W.R., *Mean value methods in iteration* Proc. Amer. Math. Soc., 44, 506–510 (1953)
- [32] Mihet D., *A Banach contraction theorem in fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 144, 431-439 (2004).
- [33] Mihet D., *A class of contractions in fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 161, 1131-1137 (2010)
- [34] Mihet D., *Fuzzy ψ -contractive mappings in non-Archimedean fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 159, 739-744 (2008).
- [35] Mihet D., *On fuzzy contractive mappings in fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 158, 915-921 (2007).
- [36] Menger K., *Statistical metrics*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 28, 535-537 (1942).
- [37] Moradi S., Omid M., *A fixed-point theorem for integral type inequality depending on another function*, Int. Journal of Math. Analysis, 4 (30), 1491 - 1499 (2010).
- [38] Noor M. A., *New approximation schemes for general variational inequalities*, J. Math. Anal. Appl., 251, 217-229 (2000).
- [39] Olaleru J. O., Akewe H., *The convergence of Jungck-type iterative schemes for generalized contractive-like operators*, Fasc. Math. 45, 87-98 (2010).
- [40] Olatinwo M.O., *A generalization of some convergence results using the Jungck-Noor three-step iteration process in arbitrary Banach space*, Fasc. Math. 40, 37-43 (2008).

- [41] Olatinwo M. O., Imoru C. O., *Some convergence results for the Jungck-Mann and the Jungck-Ishikawa iteration processes in the class of generalized Zamfirescu operators*, Acta Math. Univ. Comenianae, 77 (2), 299-304 (2008).
- [42] Olatinwo M. O., Owojori O. O., Imoru C. O., *Some stability results on Krasnolselskij and Ishikawa fixed point iteration procedure*, J. Math. Stat., 2 (1), 360-362 (2006).
- [43] Olatinwo M. O., *Some stability in complete metric space*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rer. Nat. Mathematica, 48, 83-92 (2009).
- [44] Olatinwo M. O., *Some stability results for Picard and Mann iteration processes using contractive condition of integral type*, Department of Mathematics, Obafemi Awolowo University, Ile-Ife, Nigeria, 19, 57-64 (2010).
- [45] Olatinwo M. O., *Some stability Results for two hybrid fixed point iterative algorithms in normed linear space*, Department of Mathematics, Obafemi Awolowo University, Ile-Ife, Nigeria, 61 (4) 247-256 (2009).
- [46] Osilike M. O., *A stable iteration procedure for quasi-contractive maps*, Indian J. Pure Appl. Math., 27 (1), 25-34 (1996).
- [47] Osilike M.O., *Stability of the Mann and Ishikawa iteration procedures for ϕ -strongly pseudocontractions and nonlinear equations of the ϕ -strongly accretive type*, J. Math. Anal. Appl., 227, 319-334 (1998).
- [48] Osilike M. O., *Stability results for fixed point iteration procedures*, J. Nigerian Math. Soc., 17-29 (1995).
- [49] Osilike M.O., Udomene A. *Short proofs of stability results for fixed point iteration procedures for a class of contractive-type mappings* Indian J. Pure Appl. Math., 30 (12), 1229-1234 (1999)
- [50] Picard M.E., *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*, Journ. de Math. (4^e série), tome VI, 145-210 (1890).
- [51] Qing Y., Rhoades B.E., *T-Stability of Picard iteration in metric spaces*, Fixed Point Theory and Appl., 1-4 (2008).
- [52] Radu V., *Some remarks on the probabilistic contractions on fuzzy Menger spaces*, in: The Eighth International Conference on Appl. Math. Comput. Sci., Cluj-Napoca, 2002, Automat. Comput. Appl. Math., 11, 125-131 (2002).

- [53] Ramírez M., Bezanilla A., *Some convergence and stability results for two new Kirk and Jungck-multi step type iterative processes*, International Journal of Applied Mathematical Research, 4 (1), 90-98 (2015).
- [54] Rezapour SH., Haghi R. H., Rhoades B. E., *Some results about T -stability and almost T -stability*, Fixed point Theory, 12 (1), 179-186 (2011).
- [55] Rhoades B. E., *Fixed point theorems and stability results for fixed point iterations procedures II*, Indian J. Pure Appl. Math., 24 (11), 691-703 (1993).
- [56] Rhoades B. E., Soltuz S. M., *The equivalence between Mann-Ishikawa iterations and multistep iteration*, Nonlinear Anal., 58, 219-228 (2004).
- [57] Rhoades B.E., *Extensions of some fixed point theorems of Ćirić, Maiti and Pal*, Math. Seminar Notes, 6, 41-46 (1978).
- [58] Rhoades B. E., *Two fixed-point theorems for mappings satisfying a general contractive condition of integral type*, Int. J. Math. Sci., 63, 4007-4013 (2003).
- [59] Roux D., Maluta E., *Contractive Kannan maps in compact spaces*, Riv. Math. Univ. Parma, 1-7 (1979).
- [60] Sapena A., *A contribution to the study of fuzzy metric spaces*, Appl. Gen. Topology, 2, 63-76 (2001).
- [61] Sapena A., Gregori V., Romanguera S., *Espacios métricos fuzzy definidos por t -normas*, Memoria, Universidad Politécnica de Valencia, Departamento de Matemática Aplicada, Valencia, España, (2002).
- [62] Sapena A., Morillas S., *On strong fuzzy metrics*, in: Proceedings of the Workshop in Applied Topology WiAT'09, 135-141 (2009).
- [63] Schweizer B., Sklar A., *Statistical metric spaces*, Pacific J. Math., 10, 313-334 (1960).
- [64] Sehgal V. M., Bharucha-Reid A. T., *Fixed points of contractions mappings on PM -spaces*, Math. Syst. Theory, 6, 97-100 (1972)
- [65] Singh S. L., Bhatnagar C., Mishra S. N., *Stability of Jungck-Type iterative procedures*, Int. J. Math. and Math. Sci., 19, 3035-3043 (2005).
- [66] Sharma S., *Common fixed point theorems in fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 127, 345-352 (2002).

- [67] Shen Y., Qiu D., Chen W., *Fixed point theorems in fuzzy metric spaces*, Appl. Math. Lett., 25, 138-141 (2012).
- [68] Subrahmanyam P. V., *A common fixed point theorem in fuzzy spaces*, Inform. Sci., 83, 109-112 (1995).
- [69] Song G., *Comments on 'A common fixed point theorem in a fuzzy metric space'*, Fuzzy Sets and Systems, 135, 409-1013 (2003).
- [70] Taskovic M. R., *Some results in the fixed point theory II*, Publications del L'Institut Mathématique. Nouvelle Serie, tome 27(41), 249-258 (1980).
- [71] Useche L., *Estabilidad de algunos procesos iterativos de ciertas aplicaciones contracciones*, Tesis, Universidad de Los Andes, Facultad de Ciencias, Merida-Venezuela, 2007.
- [72] Vasuki R., *A common fixed point theorems in a fuzzy metric space*, Fuzzy Sets and Systems, 97, 395-397 (1998).
- [73] Vasuki R., Veeramani P., *Fixed point theorems and Cauchy sequences in fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 135, 415-417 (2003).
- [74] Vergara C.J., Gaviria H.A., *Aplicaciones de la lógica difusa en la planificación de la producción*, Tesis, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas, Escuela de Ingeniería de la Organización Medellín, Bogotá, Colombia (2009).
- [75] Vetro C., *Fixed points in weak non-Archimedean fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 162, 84-90 (2011).
- [76] Zadeh L.A., *Fuzzy sets*, Inform. and Control, 8, 338-353 (1965).
- [77] Zamfirescu T., *Fix point in metric spaces*, Arch. Math. (Basel) 23 (1), 292-298 (1972).