



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

**RELACIÓN DE CAOS HOMOGÉNEO CON
INTEGRALES MÚLTIPLES WIENER-ITÔ**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
GUSTAVO PORTILLO RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. HUGO ADÁN CRUZ SUÁREZ

PUEBLA, PUEBLA

MAYO 2018

*Dedicado a
mi familia*



Agradecimientos

A mis padres, Teresa y Jacinto por su esfuerzo para darme mis estudios y por el apoyo incondicional y confianza brindada a lo largo toda mi vida. A mis hermanas, Amada, Bertha y Reyna por darme ánimos, compañía, confianza y motivación. A mis sobrinas Jeansli y Mariana que las he visto crecer a nuestro lado y que llenan de alegría el hogar. A mis hermanos Edmundo, Francisco, Gilberto y Josué por apoyarme durante todos estos años. Gracias a toda mi familia por su cariño y amor.

A mis compañeros y amigos de la facultad, América, Edgar, Juan, Julio y Roque con quienes he compartido los mejores momentos de la universidad. A Sinai por apoyarme, motivarme y simplemente por estar en mi vida. Gracias por ser mi equilibrio amor.

A mi asesor de tesis, Dr. Hugo Adán Cruz Suárez, a quien admiro y respeto, por su labor en la facultad. Gracias por su apoyo y asesoría en el desarrollo de este trabajo y por los conocimientos compartidos en sus cursos.

A mis sinodales: Dra. Hortensia Josefina Reyes Cervantes, Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara y Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria por tomarse el tiempo para revisar este trabajo, por sus sugerencias y observaciones.

Introducción

Los modelos matemáticos ideados para predecir la evolución de algún fenómeno no consideran la aleatoriedad a lo que están expuestos, lo que implica un cierto error respecto a los resultados obtenidos y a lo que realmente sucede. Por ejemplo, en los sistemas de ecuaciones diferenciales se consideran coeficientes con valores reales, se buscan los puntos estacionarios y se analiza la estabilidad de estos lo que nos conduce a dar las correspondientes conclusiones. Sin embargo, no se está considerando la posibilidad de que en algún momento los parámetros sean afectados por factores que modifiquen la evolución del sistema. Por ejemplo, para el modelo logístico, la tasa de crecimiento puede ser afectada por varios factores externos lo que tiene como resultado una variante en el crecimiento de la población. Tomando tales coeficientes como variables aleatorias, obtenemos un sistema dinámico aleatorio donde la solución a este es un proceso estocástico $X(t, \xi)$. La técnica que se sigue en esta tesis para dar solución a dicha ecuación consiste en la aplicación del caos homogéneo, esto se hará de manera constructiva por lo que es necesario iniciar con el estudio de las integrales de Itô, seguir con la fórmula de Itô para finalmente revisar las llamadas integrales múltiples Wiener-Itô. Además, se presenta la relación que se tiene entre las integrales múltiples Wiener-Itô y el caos homogéneo. Este último concepto fue introducido por primera vez por Wiener (1938). Partiendo de las investigaciones de Wiener sobre funcionales no lineales del movimiento browniano, Cameron y Martin (1947) construyeron una base ortonormal de funcionales no lineales en términos de funcionales Fourier-Hermite. Posteriormente, Itô (1951) refinó el caos homogéneo de Wiener en lo que se conoce como integral múltiple Wiener-Itô. Para la construcción del caos homogéneo está dedicada una sección en la que se propone una base para cada caos homogéneo de orden n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), basándose en polinomios ortogonales, en este caso usaremos los polinomios de Hermite. La base obtenida para cada caos homogéneo y las propiedades

que se desarrollan en el capítulo 3 nos permiten escribir el espacio $L_B^2(\Omega)$ como suma directa de los espacios K_n , es decir,

$$L_B^2(\Omega) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n.$$

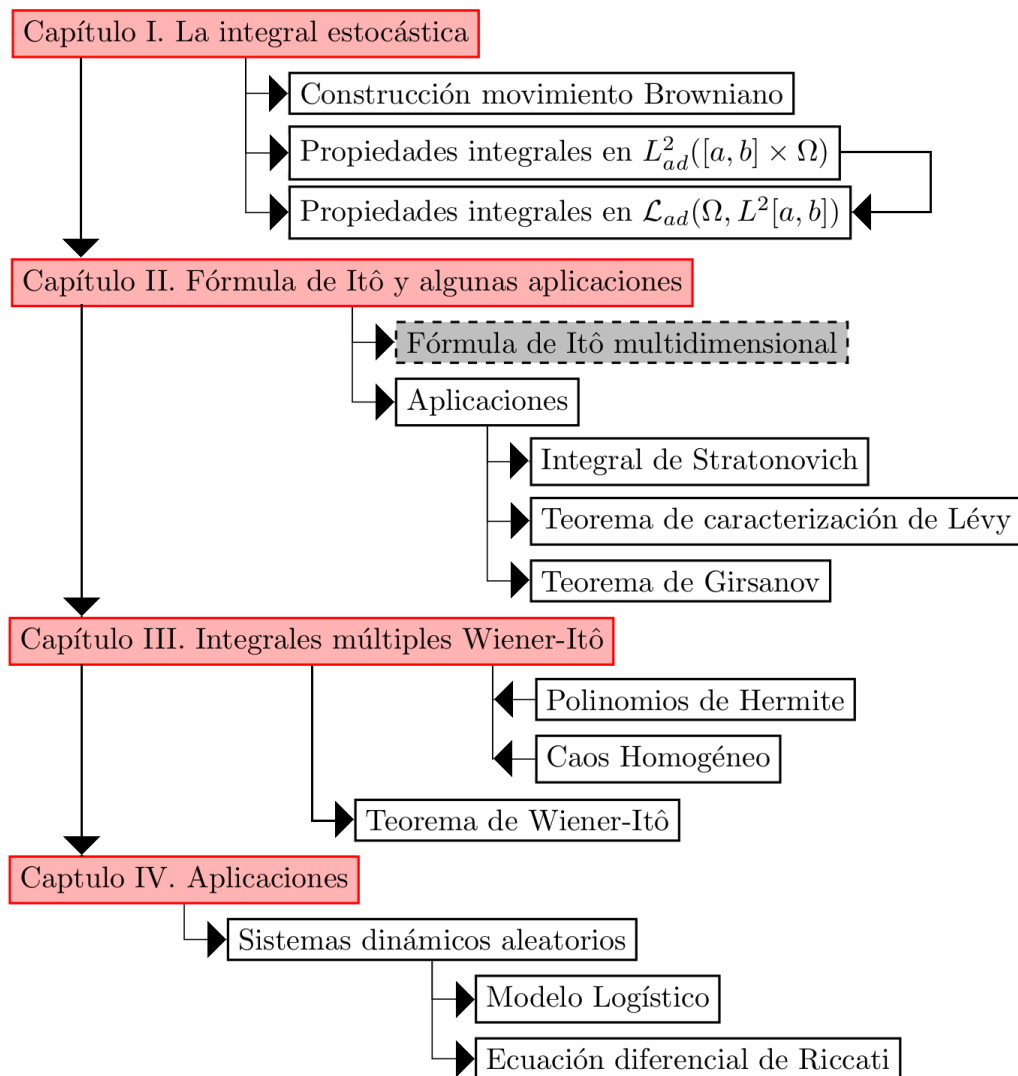
Finalmente, se proporcionan ejemplos numéricos a partir de modelos matemáticos deterministas conocidos, a los cuales se les induce una perturbación aleatoria en los coeficientes. Para tal propósito se considera el modelo logístico y un tipo especial de ecuación Riccati. Usando el hecho de que el espacio $L_B^2(\Omega)$ se escribe como la suma directa de los subespacios K_n , cada proceso estocástico en $X(t, \xi) \in L_B^2(\Omega)$ tiene una representación única dada por

$$X(t, \xi) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) \Psi_i(\xi).$$

Dado que los elementos Ψ_i de la expansión en serie anterior son conocidos, resta encontrar los valores $x_i(t)$ que hacen posible tal representación. Para realizar esto último, haremos uso de una aproximación truncada para $X(t, \xi)$ y encontraremos $x_i(t)$ por el llamado método de proyección espectral no intrusivo.

INTRODUCCIÓN

El siguiente diagrama relaciona las secciones más importantes de este trabajo.



Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	V
1. La integral estocástica	1
1.1. Construcción del proceso de Wiener	1
1.2. La integral estocástica	6
1.3. Propiedades de la integral estocástica	16
1.4. Integrales estocásticas generales	23
1.5. Propiedades de la integral estocástica generalizada	32
2. Fórmula de Itô y algunas aplicaciones	39
2.1. Fórmula de Itô	39
2.2. Fórmula de Itô multidimensional	42
2.3. Cálculo de integrales estocásticas	44
2.4. Integral de Stratonovich	45
2.5. Teorema de caracterización de Lévy	50
2.6. Movimiento browniano multidimensional	56
2.7. Procesos exponenciales	61
2.8. Transformación de medidas de probabilidad	63
2.9. Teorema de Girsanov	65
3. Integrales múltiples Wiener-Itô	69
3.1. Integrales dobles Wiener-Itô	72
3.2. Polinomios de Hermite	78
3.3. Caos homogéneo	83
3.4. Base ortonormal para caos homogéneo	88
3.5. Integrales múltiples Wiener-Itô	93

3.6. Teorema de Wiener-Itô	101
3.7. Representación de martingalas brownianas	106
4. Aplicaciones	109
4.1. Expansión de caos homogéneo truncado	109
4.2. Sistemas dinámicos aleatorios	112
4.2.1. Modelo logístico	113
4.2.2. Ecuación diferencial de Riccati	119
A. Apéndice	127
A.1. Esperanza condicional y propiedades	127
A.2. Otros resultados	128
A.3. Cuadratura Gauss-Hermite	131
Bibliografía	132

Capítulo 1

La integral estocástica

Este capítulo tiene como objetivo definir la integral estocástica para procesos estocásticos $\{X_t; 0 \leq t \leq T\}$ respecto al movimiento browniano $\{B(t); 0 \leq t \leq T\}$. Para construir esta integral requerimos del movimiento browniano, el cual se presenta como el límite de una caminata aleatoria. Para la construcción de la integral, se tomará el límite de una sucesión de procesos escalonados que convergen a X_t en $L^2(\Omega)$, donde $L^2(\Omega)$ denota el espacio de Hilbert de variables aleatorias cuadrado integrables con valores reales en Ω con producto interior $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY]$. En secciones posteriores, se tomará la integral estocástica como un proceso estocástico, lo que nos permitirá presentar algunas de sus propiedades, como son: propiedad martingala y propiedad de continuidad.

1.1. Construcción del proceso de Wiener

Se desarrollará la construcción del proceso de Wiener por medio de una aproximación de procesos estocásticos discretos, más precisamente, utilizaremos el proceso límite de una caminata aleatoria.

Considere la caminata aleatoria simétrica que inicia en 0 y que avanza una unidad a la derecha con una probabilidad $p = \frac{1}{2}$ o a la izquierda con una probabilidad $1 - p = \frac{1}{2}$, es decir, tenemos

$$\forall n \in \mathbb{N} : X_n = \begin{cases} 1, & p = \frac{1}{2}; \\ -1, & 1 - p = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

con $X_0 = 0$. Entonces $M_n = \sum_{i=0}^n X_i$ nos da la posición en el n -ésimo movimiento, claramente $M_0 = X_0 = 0$.

Consideremos el siguiente proceso estocástico en tiempo continuo:

$$\forall n \in \mathbb{N}, t \geq 0 : M_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i. \quad (1.1)$$

Se desea obtener la distribución límite de $M_n(t)$, para ello se utilizará su función generadora de momentos, la cual se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi_n(u) &= \mathbb{E}[\exp(uM_n(t))] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(u \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{[nt]} u \frac{X_i}{\sqrt{n}}\right)\right] \\ &= \prod_{i=1}^{[nt]} \mathbb{E}\left[e^{u \frac{X_i}{\sqrt{n}}}\right] \\ &= \prod_{i=1}^{[nt]} \left[\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}\right] \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}\right]^{[nt]}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Aplicando logaritmo natural, se tiene que

$$\log(\phi_n(u)) = [nt] \log\left(\frac{e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}}{2}\right).$$

Sea $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, entonces

$$\log(\phi_n(u)) = \frac{t}{x^2} \log\left(\frac{e^{ux} + e^{-ux}}{2}\right).$$

De manera que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(\phi_n(u)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{t}{x^2} \log\left(\frac{e^{ux} + e^{-ux}}{2}\right).$$

Aplicando la regla de L' Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{t}{x^2} \log \left(\frac{e^{ux} + e^{-ux}}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} tu \frac{e^{ux} - e^{-ux}}{2x(e^{ux} - e^{-ux})}.$$

Nuevamente, por la regla de L' Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} tu \frac{e^{ux} - e^{-ux}}{2x(e^{ux} - e^{-ux})} &= \frac{tu^2}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ux} + e^{-ux}}{2} \\ &= \frac{tu^2}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(\phi_n(u)) = \frac{tu^2}{2}.$$

En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(u) = e^{\frac{tu^2}{2}}. \quad (1.3)$$

El lado derecho de (1.3) coincide con la función generadora de momentos para una variable aleatoria normal con media 0 y varianza t . En consecuencia $M_n(t)$ converge en distribución a $B(t) \sim N(0, t)$.

El proceso límite $B(t)$ cumple con las siguientes propiedades:

1. $B(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(0) = 0$.
2. Sean $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ y $M_n(t_i) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt_i \rfloor} X_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$.
Veamos que $M_n(t_1), M_n(t_2) - M_n(t_1), \dots, M_n(t_n) - M_n(t_{n-1})$ son independientes. Observemos que

$$M_n(t_i) - M_n(t_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=\lfloor nt_{i-1} \rfloor + 1}^{\lfloor nt_i \rfloor} X_j = s_i,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Para $l, m \in \{1, \dots, n\}$ tal que $l > m$ se cumple;

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P} [M_n(t_l) - M_n(t_{l-1}) = s_l | M_n(t_m) - M_n(t_{m-1}) = s_m] \\
 &= \frac{\mathbb{P} [M_n(t_l) - M_n(t_{l-1}) = s_l, M_n(t_m) - M_n(t_{m-1}) = s_m]}{\mathbb{P} [M_n(t_m) - M_n(t_{m-1}) = s_m]} \\
 &= \frac{\mathbb{P} \left[\sum_{j=[nt_{l-1}]+1}^{[nt_l]} X_j = s_l, \sum_{j=[nt_{m-1}]+1}^{[nt_m]} X_j = s_m \right]}{\mathbb{P} \left[\sum_{j=[nt_{m-1}]+1}^{[nt_m]} X_j = s_m \right]} \\
 &= \mathbb{P} \left[\sum_{j=[nt_{l-1}]+1}^{[nt_l]} X_j = s_l \right] \\
 &= \mathbb{P} [M_n(t_l) - M_n(t_{l-1}) = s_l].
 \end{aligned}$$

En consecuencia para $l, m \in \{1, \dots, n\}$ tal que $l > m$, se cumple:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P} [M_n(t_l) - M_n(t_{l-1}) = s_l | M_n(t_m) - M_n(t_{m-1}) = s_m] \\
 &= \mathbb{P} [M_n(t_l) - M_n(t_{l-1}) = s_l].
 \end{aligned}$$

Es decir, los incrementos de $M_n(\cdot)$ son independientes.

Finalmente, aplicando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ en la relación anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P} [B(t_l) - B(t_{l-1}) = s_l | B(t_m) - B(t_{m-1}) = s_m] \\
 &= \mathbb{P} [B(t_l) - B(t_{l-1}) = s_l],
 \end{aligned}$$

para $l, m \in \{1, \dots, n\}$ tal que $l > m$ y por lo tanto, los incrementos de $B(t)$ son independientes.

3. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$. Elíjanse $l, m \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$\begin{aligned}
 M_n(t_m + t_l) - M_n(t_l) &= \sum_{j=1}^{[n(t_m+t_l)]} X_j - \sum_{j=1}^{[nt_l]} X_j \\
 &= \sum_{j=1}^{[nt_m]} X_j \\
 &= M_n(t_m).
 \end{aligned}$$

Así, tenemos que $M_n(t_m + t_l) - M_n(t_l) = M_n(t_m)$, por tal razón se dice que $M_n(\cdot)$ tiene incrementos estacionarios. Entonces aplicando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se consigue: $B(t_m + t_l) - B(t_l) = B(t_m)$ para $l, m \in \{1, \dots, n\}$ y en este caso se dice que $B(\cdot)$ tiene incrementos estacionarios.

4. El proceso límite tiene la propiedad de tener trayectorias continuas casi seguramente. Dicha propiedad se garantiza por el Teorema de continuidad de Kolmogorov (Ver Apéndice, Teorema A.2.1). Es suficiente ver que se verifica:

$$\mathbb{E} \left[|M_n(t) - M_n(s)|^2 \right] = |t - s|, \text{ para } 0 \leq s, t \leq 1. \quad (1.4)$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ en (1.4), se consigue

$$\mathbb{E} \left[|B(t) - B(s)|^2 \right] = |t - s|, \text{ para } 0 \leq s, t \leq 1. \quad (1.5)$$

Entonces, por el Teorema de continuidad de Kolmogorov, el proceso $B(\cdot)$ tiene trayectorias continuas.

A un proceso estocástico que cumple con las propiedades (1)-(4), se le llama proceso de Wiener. Más precisamente tenemos la siguiente definición.

Definición 1.1.1. *Un proceso estocástico $B(t, \omega)$ es llamado un proceso de Wiener o movimiento browniano si verifica las siguientes propiedades:*

1. $\mathbb{P}[\{\omega : B(0, \omega) = 0\}] = 1$.
2. Para cualesquiera $0 \leq s < t$, $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s)$.
3. $B(t)$ tiene incrementos independientes y estacionarios, es decir, para cualesquiera $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, las variables aleatorias $B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ son independientes y para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $B(t_i + t_j) - B(t_j) \sim B(t_i)$.
4. Las trayectorias de $B(t, \omega)$ son funciones continuas casi seguramente, es decir, $\mathbb{P}[\{\omega : B(\cdot, \omega) \text{ es continua}\}] = 1$.

1.2. La integral estocástica

Para la construcción de la integral estocástica y en el desarrollo posterior del este trabajo, requerimos de términos básicos como filtración, procesos adaptados a la filtración, etc. Los cuales son encontrados en [8], [14] y [20]. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado, donde:

1. Ω es un conjunto no vacío denominado espacio muestral.
2. \mathcal{F} una sigma-álgebra.
3. $\{\mathcal{F}_t\}$ la filtración generada por el movimiento browniano:

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{B(u) : a \leq u \leq t\}.$$

4. \mathbb{P} una medida de probabilidad.

En lo que sigue $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ denota el espacio de procesos estocásticos $f = \{f(t, \cdot); a \leq t \leq b\}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $f(t, \omega)$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$.
2. $\int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t)|^2 \right] dt < \infty$.

El objetivo es definir la integral estocástica para cualquier proceso estocástico $f(t, \omega) \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Para lograrlo, serán considerados dos casos previos; cuando $f(t, \omega)$ es un proceso estocástico escalonado y cuando $f(t, \omega)$ es acotado.

Supongamos que $f(t, \omega)$ es un proceso estocástico escalonado en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Entonces $f(t, \omega)$ está dado por

$$f(t, \omega) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(\omega) 1_{[t_{i-1}, t_i)}(t), \quad (1.6)$$

donde $a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = b$, además ξ_{i-1} es $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible y $\mathbb{E} [\xi_{i-1}^2] < \infty$. En consecuencia, se define

$$I(f) := \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})), \quad (1.7)$$

CAPÍTULO 1. LA INTEGRAL ESTOCÁSTICA

en donde $B(t)$ es el proceso de Wiener.

Observe que si $f, g \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ son procesos estocásticos escalonados, existen Δ_f y Δ_g particiones tales que f y g se escriben como en la ecuación (1.6). Tome Δ_n un refinamiento entre la partición Δ_f y Δ_g y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned}
 I(af + bg) &= \sum_{i=1}^n (a\xi_{f_{i-1}} + b\xi_{g_{i-1}}) (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\
 &= \sum_{i=1}^n a\xi_{f_{i-1}} (B(t_i) - B(t_{i-1})) + b\xi_{g_{i-1}} (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\
 &= a \sum_{i=1}^n \xi_{f_{i-1}} (B(t_i) - B(t_{i-1})) + b \sum_{i=1}^n \xi_{g_{i-1}} (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\
 &= aI(f) + bI(g).
 \end{aligned}$$

Así, $I(\cdot)$ cumple la propiedad de linealidad. Además, se tiene el siguiente lema.

Lema 1.2.1. *Sea $I(f)$ como en la ecuación (1.7), entonces $\mathbb{E}[I(f)] = 0$ y*

$$\mathbb{E} \left[|I(f)|^2 \right] = \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t)|^2 \right] dt.$$

Demostración. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [\xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1}))] &= \mathbb{E} \{ \mathbb{E} [\xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1}))] \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}} \} \\
 &= \mathbb{E} \{ \xi_{i-1} \mathbb{E} [B(t_i) - B(t_{i-1})] \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}} \} \\
 &= \mathbb{E} \{ \xi_{i-1} \mathbb{E} [B(t_i) - B(t_{i-1})] \} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [I(f)] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [\xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1}))] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, observemos que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[|I(f)|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) \right|^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_{i-1} \xi_{j-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1})) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E} [\xi_{i-1} \xi_{j-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1}))].
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ahora, sean $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Para el caso en que $i \neq j$, supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$, entonces

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} [\xi_{i-1} \xi_{j-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1}))] \\
 &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [\xi_{i-1} \xi_{j-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1}))] | \mathcal{F}_{t_{j-1}}] \\
 &= \mathbb{E} [\xi_{i-1} \xi_{j-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})) \mathbb{E} [(B(t_j) - B(t_{j-1}))] | \mathcal{F}_{t_{j-1}}] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

En el caso en que $i = j$, se tiene

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} [\xi_{i-1}^2 (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2] \\
 &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [\xi_{i-1}^2 (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2] | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] \\
 &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [\xi_{i-1}^2 (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2]] \\
 &= \mathbb{E} [\xi_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1})] \\
 &= (t_i - t_{i-1}) \mathbb{E} [\xi_{i-1}^2].
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Entonces de las ecuaciones (1.8), (1.9) y (1.10) obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[|I(f)|^2 \right] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [\xi_{i-1}^2] (t_i - t_{i-1}) \\
 &= \int_a^b \mathbb{E} [|f(t)|^2] dt.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

□

CAPÍTULO 1. LA INTEGRAL ESTOCÁSTICA

A continuación, se probará un lema que nos servirá para aproximar los procesos estocásticos en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$.

Lema 1.2.2. *Sea $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, entonces existe una sucesión $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de procesos estocásticos escalonados en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t) - f_n(t)|^2 \right] dt = 0.$$

Demostración. Sea $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Se utilizarán dos casos previos, para pasar al caso general $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. El primero cuando $\mathbb{E}[f(t)f(s)]$ es una función continua de $(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$ y el segundo cuando f es un proceso estocástico acotado.

Caso 1.- $\mathbb{E}[f(t)f(s)]$ es una función continua de (t, s) .

Suponga que $\mathbb{E}[f(t)f(s)]$ es una función continua de $(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$. Para cada partición $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$, defina el proceso estocástico $f_n(t, \omega)$ por

$$f_n(t, \omega) = f(t_{i-1}, \omega), \quad (1.12)$$

para $t_{i-1} < t \leq t_i$ y $\omega \in \Omega$. Entonces $\{f_n(t, \omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de procesos estocásticos escalonados.

Por la continuidad de $\mathbb{E}[f(t)f(s)]$ sobre $[a, b] \times [a, b]$ se tiene

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{E} \left[|f(s) - f(t)|^2 \right] = 0. \quad (1.13)$$

De las ecuaciones (1.12) y (1.13) tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[|f(t) - f_n(t)|^2 \right] = 0. \quad (1.14)$$

Utilizando la desigualdad $|u + v|^2 \leq 2(|u|^2 + |v|^2)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|f(t) - f_n(t)|^2 \right] &\leq 2 \left(\mathbb{E} \left[|f(t)|^2 \right] + \mathbb{E} \left[|f_n(t)|^2 \right] \right) \\ &\leq 4 \sup_{a \leq s \leq b} \mathbb{E} \left[|f(s)|^2 \right], \end{aligned}$$

para todo $t \in [a, b]$. Finalmente, aplicando el Teorema de convergencia dominada (Ver Apéndice, Teorema A.2.5), se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t) - f_n(t)|^2 \right] dt = 0.$$

Caso 2.- $f(t, \omega)$ es un procesos estocástico acotado.

Suponga ahora que f es un proceso estocástico acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que $\forall t \in [a, b] : \forall \omega \in \Omega : |f(t, \omega)| \leq M$. Definimos el proceso estocástico g_n para cada $t \in [a, b]$ y $\omega \in \Omega$ por:

$$g_n(t, \omega) = \begin{cases} \int_0^{n(t-a)} e^{-\tau} f(t - \frac{\tau}{n}, \omega) d\tau, & a + \frac{\tau}{n} \leq t \leq b; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.15)$$

Observe que g_n es adaptada a \mathcal{F}_t pues así lo es f . Veamos que g_n cumple con lo siguiente:

$$\int_a^b \mathbb{E} \left[|g_n(t)|^2 \right] dt < \infty.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbb{E} \left[|g_n(t)|^2 \right] dt &= \int_a^b \mathbb{E} \left[\left| \int_0^{n(t-a)} e^{-\tau} f(t - \frac{\tau}{n}, \omega) d\tau \right|^2 \right] dt \\ &\leq \int_a^b \mathbb{E} \left[\int_0^{n(t-a)} e^{-2\tau} d\tau \int_0^{n(t-a)} f^2(t - \frac{\tau}{n}, \omega) d\tau \right] dt \quad (1.16) \\ &\leq \int_a^b \mathbb{E} \left[\int_0^{n(t-a)} e^{-2\tau} d\tau \int_0^{n(t-a)} M^2 d\tau \right] dt < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g_n(t) \in L_{aa}^2([a, b] \times \Omega)$. Ahora, se harán efectivas las siguientes proposiciones.

Proposición 1.2.3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mathbb{E}[g_n(t)g_n(s)]$ es una función continua de (t, s) .*

CAPÍTULO 1. LA INTEGRAL ESTOCÁSTICA

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, y tómesese $u = t - \frac{\tau}{n}$ entonces $\tau = n(t - a)$, con esto g_n se reescribe como

$$\begin{aligned} g_n(t, \omega) &= \int_t^a e^{-n(t-u)} f(u, \omega) (-n) du \\ &= \int_a^t n e^{-n(t-u)} f(u, \omega) du. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Además,

$$\lim_{t \rightarrow s} g_n(t, \omega) = \int_a^s n e^{-n(s-u)} f(u, \omega) du = g_n(s, \omega).$$

En consecuencia,

$$\lim_{t \rightarrow s} \mathbb{E} \left[|g_n(t) - g_n(s)|^2 \right] = 0.$$

Por otra parte, observemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow s} \mathbb{E} \left[|g_n(t) - g_n(s)|^2 \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow s} \mathbb{E} \left[g_n(t)^2 - 2g_n(t)g_n(s) + g_n(s)^2 \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow s} \mathbb{E} \left[g_n(t)^2 \right] - 2\mathbb{E} \left[g_n(t)g_n(s) \right] + \mathbb{E} \left[g_n(s)^2 \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow s} \mathbb{E} \left[g_n(t)^2 \right] - 2 \lim_{t \rightarrow s} \mathbb{E} \left[g_n(t)g_n(s) \right] + \mathbb{E} \left[g_n(s)^2 \right]. \end{aligned}$$

Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{t \rightarrow s} \mathbb{E} \left[g_n(t)g_n(s) \right] = \mathbb{E} \left[g_n(s)^2 \right]. \tag{1.18}$$

□

Proposición 1.2.4. *Se verifica que $\int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t) - g_n(t)|^2 \right] \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

Demostración. Defina la función $\mathbb{S} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$\mathbb{S}(A) = \int_A e^{-\tau} d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}, \quad \tau \in [0, \infty).$$

Entonces \mathbb{S} define una medida de probabilidad. Denotemos por $\mathbb{E}_{\mathbb{S}}$ a la esperanza respecto a \mathbb{S} . Además, nótese que

$$\begin{aligned}
 f(t) - g_n(t) &= f(t) \int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau - \int_0^{n(t-a)} e^{-\tau} f\left(t - \frac{\tau}{n}\right) d\tau \\
 &= f(t) \int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau - \int_0^{\infty} e^{-\tau} f\left(t - \frac{\tau}{n}\right) d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\tau} \left(f(t) - f\left(t - \frac{\tau}{n}\right) \right) d\tau \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[\left(f(t) - f\left(t - \frac{\tau}{n}\right) \right) \right].
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Entonces de la ecuación (1.19), la isometría entre $L^2(\Omega)$ y $L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene que

$$\begin{aligned}
 |f(t, \omega) - g_n(t, \omega)|^2 &= \left| \int_0^{\infty} e^{-\tau} (f(t, \omega) - f(t - \frac{\tau}{n}, \omega)) d\tau \right|^2 \\
 &= \left| \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[f(t, \omega) - f\left(t - \frac{\tau}{n}, \omega\right) \right] \right|^2 \\
 &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[\left(f(t, \omega) - f\left(t - \frac{\tau}{n}, \omega\right) \right)^2 \right] \\
 &\leq \int_0^{\infty} e^{-\tau} |f(t, \omega) - f\left(t - \frac{\tau}{n}, \omega\right)|^2 d\tau.
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Luego de (1.20), se consigue

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t) - g_n(t)|^2 \right] dt &\leq \int_a^b \left(\int_0^\infty e^{-\tau} \mathbb{E} \left[|f(t, \omega) - f(t - \frac{\tau}{n}, \omega)|^2 \right] d\tau \right) dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-\tau} \left(\int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t, \omega) - f(t - \frac{\tau}{n}, \omega)|^2 \right] dt \right) d\tau \\
 &= \int_0^\infty e^{-\tau} \mathbb{E} \left[\int_a^b |f(t, \omega) - f(t - \frac{\tau}{n}, \omega)|^2 dt \right] d\tau.
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Además, como f es acotada se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(t, \omega) - f(t - \frac{\tau}{n}, \omega)|^2 dt = 0, \quad \mathbb{P}\text{-c.s.} \tag{1.22}$$

Finalmente, de la ecuación (1.21) y (1.22) se tiene:

$$\int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t) - g_n(t)|^2 \right] dt = 0.$$

□

Por Proposición 1.2.3, es posible aplicar a g_n el Caso 1 para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, proceso estocástico escalonado tal que

$$\int_a^b \mathbb{E} \left[|g_n(t) - f_n(t)|^2 \right] dt \leq \frac{1}{n}. \tag{1.23}$$

Finalmente, por la desigualdad triangular y la ecuación (1.23) tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t) - f_n(t)|^2 \right] dt &\leq \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t) - g_n(t)|^2 \right] dt + \int_a^b \mathbb{E} \left[|g_n(t) - f_n(t)|^2 \right] dt \\
 &\leq \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t) - g_n(t)|^2 \right] dt + \frac{1}{n}.
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

Por la Proposición 1.2.4, cuando $n \rightarrow \infty$, el último término de la desigualdad (1.24) converge a 0.

Por lo tanto, existe una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de procesos estocásticos escalonados tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t) - f_n(t)|^2 \right] dt = 0.$$

A continuación, abordaremos el caso general. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$g_n(t, \omega) = \begin{cases} f(t, \omega), & \text{si } |f(t, \omega)| \leq n; \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (1.25)$$

Por el Teorema de convergencia dominada

$$\int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t) - g_n(t)|^2 \right] dt \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (1.26)$$

Por el caso en que f es un procesos estocástico acotado, para cada $n \geq 1$, existe un proceso estocástico f_n tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E} \left[|g_n(t) - f_n(t)|^2 \right] dt \leq \frac{1}{n}. \quad (1.27)$$

Observe que

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t) - f_n(t)|^2 \right] dt \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t) - g_n(t)|^2 \right] dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E} \left[|g_n(t) - f_n(t)|^2 \right] dt. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Luego, de (1.26) y (1.27), el lado derecho de la desigualdad (1.28) converge a 0. Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t) - f_n(t)|^2 \right] dt = 0.$$

□

CAPÍTULO 1. LA INTEGRAL ESTOCÁSTICA

Para $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ definiremos la integral estocástica

$$\int_a^b f(t)dB(t).$$

Sea $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$, por el Lema 1.2.2, existe $\{f_n(t, \omega)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de procesos estocásticos escalonados tal que

$$\int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t) - f_n(t)|^2 \right] dt \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (1.29)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $I(f_n)$ como en (1.7). Entonces por el Lema 1.2.1 se tiene que

$$\mathbb{E} \left[|I(f_n) - I(f_m)|^2 \right] = \int_a^b \mathbb{E} \left[|f_n - f_m|^2 \right] dt. \quad (1.30)$$

Cuando $n, m \rightarrow \infty$, el lado derecho de (1.30) converge a cero.

Por lo tanto, la sucesión $\{I(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$. Dado que $L^2(\Omega)$ es completo, se define

$$I(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n). \quad (1.31)$$

Definición 1.2.5. Sea $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$. El límite $I(f)$ que aparece en la ecuación (1.31), es llamada la integral de Itô de f y es denotado por $\int_a^b f(t)dB(t)$.

Veamos que $I(\cdot)$ es un mapeo lineal. Sean $f, g \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} I(af + bg) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (aI(f_n) + bI(g_n)) \\ &= a \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) + b \lim_{n \rightarrow \infty} I(g_n) \\ &= aI(f) + bI(g). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Teorema 1.2.6. *Sea $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$. Entonces la integral de Itô $I(f) = \int_a^b f(t)dB(t)$ es una variable aleatoria con $\mathbb{E}[I(f)] = 0$ y varianza*

$$\mathbb{E} \left[|I(f)|^2 \right] = \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t)|^2 \right] dt.$$

La demostración es una consecuencia de la definición de $I(f)$ en (1.31).

Corolario 1.2.7. *Para cualesquiera $f, g \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ la siguiente igualdad es válida:*

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b f(t)dB(t) \int_a^b g(t)dB(t) \right] = \int_a^b \mathbb{E} [f(t)g(t)] dt. \quad (1.33)$$

1.3. Propiedades de la integral estocástica

En esta sección resaltaremos dos propiedades importantes de la integral estocástica vista como proceso estocástico; la propiedad de martingala y la propiedad de continuidad.

Teorema 1.3.1. *Suponga que $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$. Entonces el proceso estocástico,*

$$X_t = \int_a^t f(s)dB(s), \quad a \leq t \leq b,$$

es una martingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t : a \leq t \leq b\}$.

Demostración. Sea $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$. Veamos que se cumplen las tres propiedades de martingala para X_t .

1. Claramente X_t es \mathcal{F}_t -medible.

2.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t f(s)dB(s)\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^a f(s)dB(s)\right] \\ &= 0 < \infty.\end{aligned}\tag{1.34}$$

Por lo tanto, $\mathbb{E}[X_t] < \infty$.

3. Finalmente, veamos que $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$, \mathbb{P} -c.s., para cualesquiera $s, t \in [a, b]$ tal que $s < t$. Es posible escribir

$$\begin{aligned}X_t &= \int_a^t f(u)dB(u) \\ &= \int_a^s f(u)dB(u) + \int_s^t f(u)dB(u) \\ &= X_s + \int_s^t f(u)dB(u).\end{aligned}$$

De manera que es suficiente ver que

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t f(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right] = 0, \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Supongamos que f es un proceso estocástico escalonado, entonces f está dado por

$$f(t, \omega) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(\omega)1_{(t_{i-1}, t_i]}(u),$$

donde $s = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ y ξ_{i-1} es $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible y pertenece a $L^2(\Omega)$. Entonces

$$\int_s^t f(u)dB(u) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i-1})).\tag{1.35}$$

Para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$, se cumple

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [\xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i_1})) | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [\xi_{i-1} (B(t_i) - B(t_{i_1})) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] | \mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E} [\xi_{i-1} \mathbb{E} [B(t_i) - B(t_{i_1}) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] | \mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E} [\xi_{i-1} \mathbb{E} [B(t_i) - B(t_{i_1})] | \mathcal{F}_s] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Aplicando esperanza a la igualdad (1.35) y utilizando lo obtenido en (1.36) se consigue

$$\mathbb{E} \left[\int_s^t f(u) dB(u) | \mathcal{F}_s \right] = 0, \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Por lo tanto, $\mathbb{E} [X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$, \mathbb{P} -c.s., cuando f es un proceso estocástico escalonado.

Para el caso general, elija una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de procesos estocásticos escalonados en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E} [|f(u) - f_n(u)|^2] du = 0. \tag{1.37}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina el proceso estocástico:

$$X_t^{(n)} = \int_a^t f_n(u) dB(u).$$

Anteriormente, se verificó que la propiedad martingala es válida para procesos estocásticos escalonados, por lo que $X_t^{(n)}$ es una martingala, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para $s < t$, es posible escribir

$$X_t - X_s = (X_t - X_t^{(n)}) + (X_t^{(n)} - X_s^{(n)}) + (X_s^{(n)} - X_s). \tag{1.38}$$

La igualdad (1.38), implica

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} [X_t - X_s | \mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E} [X_t - X_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E} [X_t^{(n)} - X_s^{(n)} | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E} [X_s^{(n)} - X_s | \mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E} [X_t - X_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E} [X_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] - X_s^{(n)} + \mathbb{E} [X_s^{(n)} - X_s | \mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E} [X_t - X_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] + X_s^{(n)} - X_s^{(n)} + \mathbb{E} [X_s^{(n)} - X_s | \mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E} [X_t - X_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E} [X_s^{(n)} - X_s | \mathcal{F}_s].
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

Considere la primera expresión de la última igualdad en (1.39), aplicando la desigualdad de Jensen, propiedades de la esperanza condicional y la isometría de Itô se obtiene

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\left| \mathbb{E} [X_t - X_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] \right|^2 \right] &\leq \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[|X_t - X_t^{(n)}|^2 | \mathcal{F}_s \right] \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[|X_t - X_t^{(n)}|^2 \right] \\
 &= \int_a^t \mathbb{E} \left[|f(u) - f_n(u)|^2 \right] du \tag{1.40} \\
 &\leq \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(u) - f_n(u)|^2 \right] du.
 \end{aligned}$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, por (1.37), el último término de (1.40) converge a 0. De ahí que,

$$\mathbb{E} [X_t - X_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \tag{1.41}$$

De manera análoga se muestra que

$$\mathbb{E} [X_s - X_s^{(n)} | \mathcal{F}_s] \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \tag{1.42}$$

Finalmente, de la igualdad (1.39) conjuntamente con las relaciones (1.41) y (1.42) concluimos que

$$\mathbb{E} [X_t - X_s | \mathcal{F}_s] = 0, \text{ } \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

En consecuencia,

$$\mathbb{E} [X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, \text{ } \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Por lo tanto, X_t es una martingala. □

Teorema 1.3.2. *Sea $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Entonces el proceso estocástico*

$$X_t = \int_a^t f(s)dB(s), \quad a \leq t \leq b,$$

es continuo, es decir, todas las trayectorias de X_t son funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$, \mathbb{P} -c.s.

Demostración. Sea $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ y $\omega \in \Omega$. Se procederá por casos, el primero cuando f es un proceso estocástico escalonado y el segundo el caso general.

Caso 1.- Supongamos que f es un proceso estocástico escalonado, es decir, de la forma:

$$f(t, \omega) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(\omega) 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t),$$

donde ξ_{i-1} es $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible.

Para cada $\omega \in \Omega$ fijo, la trayectoria de X_t está dada por:

$$X_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_{i-1}(\omega)(B(t_i, \omega) - B(t_{i-1}, \omega)) + \xi_{n-1}(\omega)(B(t, \omega) - B(t_{n-1}, \omega)),$$

para $t_{n-1} \leq t \leq t_n$.

Recordemos que las trayectorias del movimiento browniano $B(\cdot, \omega)$ son continuas \mathbb{P} -c.s., por lo que las trayectorias de $X_{(\cdot)}(\omega)$ son funciones continuas sobre $[a, b]$, \mathbb{P} -c.s.

Caso 2.- El caso general: sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de procesos estocásticos en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(s) - f_n(s)|^2 \right] ds = 0. \quad (1.43)$$

Dada la convergencia en (1.43), es posible elegir una subsucesión, si es necesario, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(s) - f_n(s)|^2 \right] ds \leq \frac{1}{n^6}, \quad \forall n \geq 1. \quad (1.44)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina el proceso estocástico

$$X_t^{(n)} := \int_a^t f_n(s) dB(s), \quad a \leq t \leq b.$$

Por el Caso 1, $X_t^{(n)}$ tiene trayectorias continuas, \mathbb{P} -c.s.

Observe que X_t y $X_t^{(n)}$ son martingalas y por tanto, $X_t - X_t^{(n)}$ es martingala. Entonces por la desigualdad de Doob (Ver Apéndice, Teorema A.1.2), se tiene que

$$\mathbb{P} \left[\sup_{a \leq t \leq b} |X_t - X_t^{(n)}| \geq \frac{1}{n} \right] \leq n \mathbb{E} \left[|X_b - X_b^{(n)}| \right]. \quad (1.45)$$

En consecuencia de la desigualdad de Schwarz, la isometría de Itô y de desigualdad (1.44), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|X_b - X_b^{(n)}| \right] &\leq \left(\mathbb{E} \left[|X_b - X_b^{(n)}|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_a^b \mathbb{E} \left[|f(s) - f_n(s)|^2 \right] ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{n^3}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

De las ecuaciones (1.45) y (1.46), para cada $n \geq 1$ se consigue

$$\mathbb{P} \left[\sup_{a \leq t \leq b} |X_t - X_t^{(n)}| \geq \frac{1}{n} \right] \leq \frac{1}{n^2}. \quad (1.47)$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, por el Lema de Borel-Cantelli (Ver Apéndice, Teorema A.2.2), tenemos que

$$\mathbb{P} \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \sup_{a \leq t \leq b} |X_t - X_t^{(k)}| \geq \frac{1}{k} \right] = 0. \quad (1.48)$$

Tomando el evento complemento se tiene que

$$\mathbb{P} \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \sup_{a \leq t \leq b} |X_t - X_t^{(k)}| \geq \frac{1}{k} \right] = 1. \quad (1.49)$$

Por lo tanto, existe un evento $\Omega_0 \subseteq \Omega$ tal que $\mathbb{P}[\Omega_0] = 1$ y para cada $\omega \in \Omega_0$, existe un entero positivo N_ω tal que

$$\sup_{a \leq t \leq b} |X_t(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq N_\omega.$$

Entonces para cada $\omega \in \Omega_0$, la sucesión de funciones $\{X_{(\cdot)}^{(n)}\}$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformemente a $X_{(\cdot)}(\omega)$ sobre $[a, b]$. Pero para cada n , el proceso estocástico $X_t^{(n)}$ es continuo y así, existe un evento Ω_n con $\mathbb{P}[\Omega_n] = 1$ y para cualquier $\omega \in \Omega_n$ la función $X_{(\cdot)}^{(n)}(\omega)$ es continua.

Finalmente, sea $\widehat{\Omega} := \bigcap_{n=0}^{\infty} \Omega_n$. Entonces $\mathbb{P}[\widehat{\Omega}] = 1$ y para cada $\omega \in \widehat{\Omega}$, la sucesión

$$X_{(\cdot)}^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

es una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente a $X_{(\cdot)}(\omega)$ sobre $[a, b]$.

Se sigue que $X_{(\cdot)}(\omega)$ es una función continua para cada $\omega \in \widehat{\Omega}$. En consecuencia las trayectorias del proceso estocástico X_t son funciones continuas sobre $[a, b]$. Por lo tanto, X_t es un proceso estocástico continuo, $\mathbb{P} - c.s.$ \square

Teorema 1.3.3. *Supongamos que $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ y que $\mathbb{E}[f(t)f(s)]$ es una función continua de t y s . Entonces*

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} f(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})), \quad \text{en } L^2(\Omega),$$

donde $\Delta_n = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$.

Demostración. Sea $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ y supongamos que $\mathbb{E}[f(t)f(s)]$ es una función continua de t y s .

Sea f_n el proceso definido por

$$f_n(t, \omega) := f(t_{i-1}, \omega), \quad t_{i-1} < t \leq t_i,$$

para cada $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$. Por el Lema 1.2.2 se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t) - f_n(t)|^2 \right] dt = 0. \quad (1.50)$$

Además, se sabe que

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n), \text{ en } L^2(\Omega), \quad (1.51)$$

donde

$$\begin{aligned} I(f_n) &= \sum_{i=1}^n f_n(t_{i-1})(B(t_{i-1}) - B(t_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B(t_{i-1}) - B(t_i)). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} f(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})), \text{ en } L^2(\Omega).$$

□

1.4. Integrales estocásticas generales

En esta sección definiremos la integral estocástica $\int_a^b f(t)dB(t)$ para procesos estocásticos $f(t, \cdot)$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $f(t, \omega)$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$.
2. $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$, casi seguramente.

Observación 1.4.1. *La condición dos nos dice que las trayectorias son funciones en el espacio de Hilbert $L^2[a, b]$.*

Se usará $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$ para denotar el espacio de procesos estocásticos $f = \{f(t, \cdot); a \leq t \leq b\}$ que satisfagan las condiciones 1 y 2.

Recordemos que si $f(t, \omega) \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$, entonces $f(t, \omega)$ es un proceso estocástico $\{\mathcal{F}_t\}$ - adaptado tal que $\int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t)|^2 \right] dt < \infty$.

Por el Teorema de Fubini, $\mathbb{E} \left[\int_a^b |f(t)|^2 dt \right] = \int_a^b \mathbb{E} \left[|f(t)|^2 \right] dt < \infty$.

Entonces $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty, \mathbb{P}$ -c.s.

Por lo tanto, $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega) \subset \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$.

A continuación, se probará un lema de aproximación para la extensión de la integral estocástica $\int_a^b f(t)dB(t)$, para una clase más amplia de integrandos en $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$.

Lema 1.4.2. *Sea $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0,$$

\mathbb{P} -c.s. y por lo tanto, en probabilidad.

Demostración. Sean $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$, $\omega \in \Omega$ y $t \in [a, b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defínase

$$f_n(t, \omega) := \begin{cases} f(t, \omega), & \text{si } \int_a^t |f(s, \omega)|^2 ds \leq n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.53)$$

Claramente f_n es adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}$. Observemos que

$$\int_a^b |f_n(t, \omega)|^2 dt = \int_a^{\tau_n(\omega)} |f(t, \omega)|^2 dt, \quad \mathbb{P}\text{-c.s.},$$

en donde

$$\tau_n(\omega) = \sup \left\{ t; \int_a^t |f(s, \omega)|^2 ds \leq n \right\}.$$

Por lo tanto, se obtiene que

$$\int_a^b |f_n(t)|^2 dt \leq n, \quad \mathbb{P}\text{-c.s.} \quad (1.54)$$

De (1.54) se consigue

$$\int_a^b \mathbb{E} \left[|f_n(t)|^2 \right] dt \leq n.$$

Así, $f_n \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Elija $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \int_a^b |f(t, \omega)|^2 dt$, por (1.53),

$$f_n(t, \omega) = f(t, \omega), \quad \forall t \in [a, b].$$

Lo que claramente implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(t, \omega) - f(t, \omega)|^2 dt = 0. \quad (1.55)$$

Como $\int_a^b |f(t, \omega)|^2 dt < \infty$, $\forall \omega \in \Omega$, \mathbb{P} -c.s., entonces la convergencia casi seguramente es válida en (1.55). \square

Lema 1.4.3. *Sea $f(t, \omega)$ un proceso estocástico escalonado en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Entonces la desigualdad*

$$\mathbb{P} \left[\left| \int_a^b f(t) dB(t) \right| > \epsilon \right] \leq \frac{C}{\epsilon} + \mathbb{P} \left[\int_a^b |f(t)|^2 dt > C \right],$$

es válida para cualesquiera $\epsilon > 0$ y $C > 0$.

Demostración. Sean $f(t, \omega)$ un proceso estocástico escalonado en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, $C > 0$ y $\epsilon > 0$.

Defina el proceso estocástico $f_C(t, \omega)$ por

$$f_C(t, \omega) := \begin{cases} f(t, \omega), & \text{si } \int_a^t |f(s, \omega)|^2 ds \leq C; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.56)$$

De la definición de $f_C(t, \omega)$ ocurre lo siguiente

$$\begin{aligned} & \left\{ \left| \int_a^b f(t) dB(t) \right| > \epsilon \right\} \\ & \subset \left\{ \left| \int_a^b f_C(t) dB(t) \right| > \epsilon \right\} \cup \left\{ \int_a^b f(t) dB(t) \neq \int_a^b f_C(t) dB(t) \right\}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Dado que f es un proceso estocástico escalonado ocurre que

$$\left\{ \int_a^b f(t) dB(t) \neq \int_a^b f_C(t) dB(t) \right\} \subset \left\{ \int_a^b |f(t, \omega)|^2 dt > C \right\}. \quad (1.58)$$

De (1.57) y (1.58), se consigue que

$$\left\{ \left| \int_a^b f(t) dB(t) \right| > \epsilon \right\} \subset \left\{ \left| \int_a^b f_C(t) dB(t) \right| > \epsilon \right\} \cup \left\{ \int_a^b |f(t, \omega)|^2 dt > C \right\}. \quad (1.59)$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[\left\{ \left| \int_a^b f(t) dB(t) \right| > \epsilon \right\} \right] \\ & \leq \mathbb{P} \left[\left\{ \left| \int_a^b f_C(t) dB(t) \right| > \epsilon \right\} \right] + \mathbb{P} \left[\left\{ \int_a^b |f(t, \omega)|^2 dt > C \right\} \right]. \end{aligned} \quad (1.60)$$

De la definición de f_C se tiene que

$$\int_a^b |f_C(t)| dt \leq C, \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Luego, $\mathbb{E} \left[\int_a^b |f_C(t)| dt \right] \leq C$. Entonces, por la desigualdad de Chebyshev apli-

cada al primer término del lado derecho de la desigualdad (1.60), se consigue

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P} \left[\left\{ \left| \int_a^b f(t) dB(t) \right| > \epsilon \right\} \right] \\
 & \leq \frac{1}{\epsilon^2} \mathbb{E} \left[\left| \int_a^b f_C(t) dB(t) \right|^2 \right] + \mathbb{P} \left[\left\{ \int_a^b |f(t, \omega)|^2 dt > C \right\} \right] \\
 & = \frac{1}{\epsilon^2} \int_a^b \mathbb{E} [|f_C(t)|^2] dt \mathbb{P} \left[\left\{ \int_a^b |f(t, \omega)|^2 dt > C \right\} \right] \\
 & \leq \frac{C}{\epsilon^2} + \mathbb{P} \left[\left\{ \int_a^b |f(t, \omega)|^2 dt > C \right\} \right].
 \end{aligned} \tag{1.61}$$

□

Para definir las integrales estocásticas con integrando f en $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$, se utilizará el siguiente lema.

Lema 1.4.4. *Sea $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de procesos escalonados en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0, \text{ en probabilidad.}$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$, por Lema 1.4.2, existe una sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |g_n(t) - f(t)|^2 dt = 0, \text{ en probabilidad.} \tag{1.62}$$

Para cada $g_n(t)$, por Lema 1.2.2, existe un proceso estocástico escalonado en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ tal que

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b |f_n(t) - g_n(t)|^2 dt \right] < \frac{1}{n}. \tag{1.63}$$

Sea $\epsilon > 0$, veamos que se cumple

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt > \epsilon \right\} \\ & \subset \left\{ \int_a^b |f_n(t) - g_n(t)|^2 dt > \frac{\epsilon}{4} \right\} \cup \left\{ \int_a^b |g_n(t) - f(t)|^2 dt > \frac{\epsilon}{4} \right\}, \end{aligned} \quad (1.64)$$

para ello, suponga que $\int_a^b |\hat{f}_n(t) - \hat{g}_n(t)|^2 dt \leq \frac{\epsilon}{4}$, $\int_a^b |\hat{g}_n(t) - f(t)|^2 dt \leq \frac{\epsilon}{4}$ y observe que

$$\begin{aligned} |\hat{f}_n(t) - f_n(t)|^2 &= |\hat{f}_n(t) - \hat{g}_n(t) + \hat{g}_n(t) - f(t)|^2 \\ &\leq 2 \left(|\hat{f}_n(t) - \hat{g}_n(t)|^2 + |\hat{g}_n(t) - f(t)|^2 \right). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b |\hat{f}_n(t) - f(t)|^2 dt &\leq 2 \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right) \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (1.64) es válido. En consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[\left\{ \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt > \epsilon \right\} \right] \\ & \leq \mathbb{P} \left[\left\{ \int_a^b |f_n(t) - g_n(t)|^2 dt > \frac{\epsilon}{4} \right\} \right] + \mathbb{P} \left[\left\{ \int_a^b |g_n(t) - f(t)|^2 dt > \frac{\epsilon}{4} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Aplicando la desigualdad de Chebyshev al primer término de la derecha de (1.65) y por (1.63) se obtiene

$$\mathbb{P} \left[\left\{ \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt > \epsilon \right\} \right] \leq \frac{4}{\epsilon n} + \mathbb{P} \left[\left\{ \int_a^b |g_n(t) - f(t)|^2 dt > \frac{\epsilon}{4} \right\} \right]. \quad (1.66)$$

CAPÍTULO 1. LA INTEGRAL ESTOCÁSTICA

Cuando $n \rightarrow \infty$, el lado derecho de (1.66) converge a 0 por (1.62). Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left\{ \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt > \epsilon \right\} \right] = 0.$$

□

Ahora estamos en condiciones para definir la integral estocástica

$$\int_a^b f(t) dB(t),$$

para $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega \times L^2[a, b])$.

Sea $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega \times L^2[a, b])$, por el Lema 1.4.4, existe una sucesión $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de procesos estocásticos escalonados en $L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0, \text{ en probabilidad.}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la integral estocástica como

$$I(f_n) = \int_a^b f_n(t) dB(t),$$

de la misma forma que en la Sección 1.2.

Aplicando el Lema 1.4.3 a $f = f_n - f_m$, con $\epsilon > 0$ y $C = \frac{\epsilon^3}{2}$, se consigue

$$\mathbb{P} [|I(f_n) - I(f_m)| > \epsilon] \leq \frac{\epsilon}{2} + \mathbb{P} \left[\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{2} \right]. \quad (1.67)$$

Por otro lado, veamos que

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{2} \right\} \\ & \subset \left\{ \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{8} \right\} \cup \left\{ \int_a^b |f(t) - f_m(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{8} \right\}, \end{aligned} \quad (1.68)$$

para ello, suponga que $\int_a^b |\hat{f}_n(t) - f(t)|^2 dt \leq \frac{\epsilon^3}{8}$, $\int_a^b |f(t) - \hat{f}_m(t)|^2 dt \leq \frac{\epsilon^3}{8}$.

Observe que

$$\begin{aligned} |\hat{f}_n(t) - \hat{f}_m(t)|^2 &= |\hat{f}_n(t) - f(t) + f(t) - \hat{f}_m(t)|^2 \\ &\leq 2 \left(|\hat{f}_n(t) - f(t)|^2 + |f(t) - \hat{f}_m(t)|^2 \right), \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b |\hat{f}_n(t) - \hat{f}_m(t)|^2 dt &\leq 2 \left(\frac{\epsilon^3}{8} + \frac{\epsilon^3}{8} \right) \\ &= \frac{\epsilon^3}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (1.68) es válido. En consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left[\left\{ \int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{2} \right\} \right] \\ &\leq \mathbb{P} \left[\left\{ \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{8} \right\} \right] + \mathbb{P} \left[\left\{ \int_a^b |f(t) - f_m(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{8} \right\} \right]. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Cuando $n, m \rightarrow \infty$ el lado derecho de (1.69) converge a cero, entonces

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left\{ \int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{2} \right\} \right] = 0.$$

De manera que para $\frac{\epsilon}{2}$, existe $N > 1$ tal que $\forall n, m \geq N$ se cumple

$$\mathbb{P} \left[\left\{ \int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt > \frac{\epsilon^3}{2} \right\} \right] < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.70}$$

Finalmente, de (1.67) y (1.70) se consigue

$$\mathbb{P} [|I(f_n) - I(f_m)| > \epsilon] < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N. \tag{1.71}$$

CAPÍTULO 1. LA INTEGRAL ESTOCÁSTICA

Con lo anterior se ha probado que la sucesión de variables aleatorias $\{I(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilidad. Por el hecho de que el espacio $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$ es completo es posible definir

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n), \text{ en probabilidad.} \quad (1.72)$$

Observemos que el límite en (1.72) es independiente de la selección de la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Teorema 1.4.5. *Supongamos que f es un proceso estocástico continuo $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptado. Entonces $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$ y*

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})), \text{ en probabilidad,}$$

donde $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ es una partición finita del intervalo $[a, b]$.

Demostración. Sea f un proceso estocástico continuo $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptado y Δ_n una partición finita de $[a, b]$.

Suponga que $\gamma \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$, es un proceso estocástico escalonado, es decir,

$$\gamma(t, \omega) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(\omega) 1_{[t_{i-1}, t_i)}(t),$$

donde ξ_{i-1} es $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible, entonces se verifica que

$$\int_a^b \gamma(t)dB(t) = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1})). \quad (1.73)$$

Considere

$$f_n(t) := \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) 1_{[t_{i-1}, t_i)}(t).$$

Como f es continua, se cumple que

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Por lo tanto, en probabilidad. Procediendo como anteriormente de las expresiones (1.67), (1.70) y (1.72) obtenemos que

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \int_a^b f_n(t)dB(t), \text{ en probabilidad.} \quad (1.74)$$

Tómese $\gamma = f_n$ en (1.73), de lo que se consigue

$$\int_a^b f_n(t)dB(t) = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})).$$

Entonces

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \int_a^b f_n(t)dB(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})). \quad (1.75)$$

De (1.74) y (1.75) se sigue

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})).$$

□

1.5. Propiedades de la integral estocástica generalizada

Para nuestro propósito de estudiar las propiedades de la integral estocástica generalizada, requerimos de la siguiente definición.

Definición 1.5.1. *Un proceso estocástico X_t $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptado, es llamado una martingala local respecto a $\{\mathcal{F}_t; a \leq t \leq b\}$ si existe una sucesión de tiempos de paro $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tales que*

1. $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona creciente a b , \mathbb{P} -c.s.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{t \wedge \tau_n}$ es una martingala con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$.

Teorema 1.5.2. *Sea $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$. Entonces el proceso estocástico*

$$X_t = \int_a^t f(s)dB(s), \quad a \leq t \leq b,$$

es una martingala local con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t : a \leq t \leq b\}$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$.

Para $a \leq t \leq b$, reescribimos a X_t como sigue

$$\begin{aligned} X_t &= \int_a^t f(s)dB(s) \\ &= \int_a^b 1_{[a,t]}(s)f(s)dB(s), \end{aligned} \tag{1.76}$$

donde $1_{[a,t]}(s)f(s) \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$ para cualquier $t \in [a, b]$.

Para cada n , definimos el proceso estocástico

$$f_n(t, \omega) := \begin{cases} f(t, \omega), & \text{si } \int_a^t |f(s, \omega)|^2 ds \leq n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.77}$$

Sea τ_n definido para cada $n \in \mathbb{N}$ por

$$\tau_n(\omega) := \begin{cases} \inf \left\{ t : \int_a^t |f(s, \omega)|^2 ds \geq n \right\}, & \text{si } \left\{ t : \int_a^t |f(s, \omega)|^2 ds \geq n \right\} \neq \emptyset; \\ 0, & \text{si } \left\{ t : \int_a^t |f(s, \omega)|^2 ds \geq n \right\} = \emptyset. \end{cases}$$

Veamos que τ_n es un tiempo de paro, para esto observemos que

$$\{\omega : \tau_n(\omega) < t\} = \bigcup_{a < r < t, r \in \mathbb{Q}} \left\{ \omega : \int_a^r |f(s, \omega)|^2 ds \geq n \right\} \in \mathcal{F}_t,$$

para $t \in [a, b]$. Además, si $t = a$, se tiene que $\{\omega : \tau_n(\omega) < t\} = \emptyset \in \mathcal{F}_a$.

Por lo tanto, τ_n es un tiempo de paro.

Regresando a (1.76), reemplazamos t por $t \wedge \tau_n$ y obtenemos el proceso estocástico

$$X_{t \wedge \tau_n} = \int_a^{t \wedge \tau_n} f(s) dB(s) = \int_a^b 1_{[a, t \wedge \tau_n]}(s) f(s) dB(s), \quad a \leq t \leq b.$$

Supongamos que $t \leq \tau_n(\omega)$, entonces

$$\begin{aligned} 1_{[a, t \wedge \tau_n(\omega)]}(s) f(s, \omega) &= 1_{[a, t]}(s) f(s, \omega) \\ &= 1_{[a, t]}(s) f_n(s, \omega). \end{aligned} \quad (1.78)$$

Por otra parte, si $t > \tau_n(\omega)$, entonces

$$\begin{aligned} 1_{[a, t \wedge \tau_n(\omega)]}(s) f(s, \omega) &= 1_{[a, \tau_n(\omega)]}(s) f(s, \omega) \\ &= 1_{[a, \tau_n(\omega)]}(s) f_n(s, \omega) \\ &= 1_{[a, t]}(s) f_n(s, \omega). \end{aligned} \quad (1.79)$$

De este modo por (1.78) y (1.79), se concluye que

$$1_{[a, t \wedge \tau_n(\omega)]}(s) f(s, \omega) = 1_{[a, t]}(s) f_n(s, \omega), \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

En consecuencia,

$$X_{t \wedge \tau_n} = \int_a^{t \wedge \tau_n} f(s) dB(s) = \int_a^t f_n(s) dB(s), \quad a \leq t \leq b.$$

De la demostración del Lema 1.4.2 se obtiene (1.54), esto es

$$\int_a^b |f_n(t)|^2 dt \leq n, \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Entonces $\int_a^b \mathbb{E} \left[|f_n(t)|^2 \right] dt \leq n$, \mathbb{P} -c.s.

Por lo tanto, $f_n \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Ahora, por la propiedad martingala para procesos estocásticos en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, vista en Teorema 1.3.1, concluimos

CAPÍTULO 1. LA INTEGRAL ESTOCÁSTICA

que $X_{t \wedge \tau_n}$ es una martingala para cada $n \in \mathbb{N}$.

Además, es claro que la sucesión $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona creciente y $\tau_n \rightarrow b$, casi seguramente, cuando $n \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, X_t es una martingala local con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t : a \leq t \leq b\}$. \square

Para demostrar la propiedad de continuidad, utilizaremos el siguiente lema.

Lema 1.5.3. *Suponga que $f, g \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$. Sea A el evento*

$$A = \{\omega : f(t, \omega) = g(t, \omega), \forall t \in [a, b]\}.$$

Entonces $\int_a^b f(t)dB(t) = \int_a^b g(t)dB(t)$, \mathbb{P} -c.s. sobre A .

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $g(t, \omega) = 0$ para todo t en $[a, b]$ y ω en Ω . Defina

$$\tau(\omega) := \begin{cases} \inf \{t : f(t, \omega) \neq 0\}, & \text{si } \{t : f(t, \omega) \neq 0\} \neq \emptyset; \\ 0, & \text{si } \{t : f(t, \omega) \neq 0\} = \emptyset. \end{cases} \quad (1.80)$$

Se cumple que τ es un tiempo de paro.

Consideremos la variable aleatoria

$$Y(\tau) = \int_a^\tau f(s)dB(s) = \int_a^b 1_{[a, \tau]}(s)f(s)dB(s),$$

donde $1_{[a, \tau]}(s)f(s) \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$.

Además, para cada $\omega \in \Omega$ se cumple que

$$1_{[a, \tau(\omega)]}(s)|f(s, \omega)|^2 = 1_{\{\tau(\omega)\}}(s)|f(\tau(\omega), \omega)|^2.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b 1_{[a, \tau]}(t)|f(t)|^2 dt = 0, \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Por la isometría de Itô se consigue

$$\mathbb{E} \left[|Y(\tau)|^2 \right] = \int_a^b 1_{[a, \tau]}(t) |f(t)|^2 dt = 0.$$

En consecuencia $Y(\tau) = 0$, \mathbb{P} -c.s. Así, para $\omega \in A$ se tiene que $\tau(\omega) = b$, luego

$$Y(\tau(\omega)) = \int_a^b f(s) dB(s).$$

Se concluye que

$$\int_a^b f(s) dB(s) = 0, \quad \mathbb{P}\text{-c.s. sobre } A.$$

□

Teorema 1.5.4. *Sea $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$. Entonces el proceso estocástico*

$$X_t = \int_a^t f(s) dB(s), \quad a \leq t \leq b,$$

tiene realizaciones continuas.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea f_n el proceso estocástico definido por

$$f_n(t, \omega) := \begin{cases} f(t, \omega), & \text{si } \int_a^t |f(s, \omega)|^2 ds \leq n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.81)$$

Sea

$$X_t^{(n)} := \int_a^t f_n(s) dB(s), \quad a \leq t \leq b.$$

Por la propiedad de continuidad para procesos estocásticos en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ del Teorema 1.3.2, $X_t^{(n)}$ es un proceso estocástico continuo.

Sea

$$A_n := \left\{ \omega; \int_a^b |f(t, \omega)|^2 dt \leq n \right\}.$$

CAPÍTULO 1. LA INTEGRAL ESTOCÁSTICA

Observemos que la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente. Sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces

$P[A] = 1$, pues $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$, \mathbb{P} -c.s.

Además, si $\omega \in A_n$ entonces

$$f_n(t, \omega) = f_m(t, \omega), \quad \forall m \geq n \text{ y } \forall t \in [a, b].$$

Aplicando el Lema 1.5.3, para todo $\omega \in A_n$, se tiene \mathbb{P} -c.s. que

$$X_t^{(m)} = X_t^{(n)}, \quad \forall m \geq n \text{ y } \forall t \in [a, b]. \quad (1.82)$$

Como $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, la igualdad (1.82) implica que $\forall \omega \in A$ \mathbb{P} -c.s. el siguiente límite existe para todo t en $[a, b]$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X_t^{(m)}.$$

Luego, definimos el proceso estocástico $Y_t(\omega)$ por

$$Y_t(\omega) := \begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} X_t^{(m)}(\omega), & \text{si } \omega \in A; \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases} \quad (1.83)$$

Entonces $Y_t(\omega)$ es un proceso estocástico continuo.

Por otra parte, de la definición de integral estocástica, se tiene que

$$X_t = \lim_{m \rightarrow \infty} X_t^{(m)}, \text{ en probabilidad.}$$

Por lo tanto, para cada $t \in [a, b]$ se cumple que $X_t = Y_t$, \mathbb{P} -c.s.

De manera que Y_t es una realización continua de X_t . □

Capítulo 2

Fórmula de Itô y algunas aplicaciones

Sea $B(t)$ el movimiento browniano y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 . Considérese la variable aleatoria compuesta $f(B(t))$. Sabemos que las trayectorias de $B(t)$ son no diferenciables, por lo que la igualdad

$$\frac{d}{dt}f(B(t)) = f'(B(t))B'(t),$$

carece de sentido. Sin embargo, existe una fórmula para la función composición $f(B(t))$, que hace el papel de la regla de la cadena en su forma integral en el cálculo de estocástico. Dicha fórmula es conocida como la fórmula de Itô, en el presente capítulo presentamos tres de sus versiones. También se presentan algunas aplicaciones que nos permiten observar la importancia de este resultado.

2.1. Fórmula de Itô

En el Capítulo 1 se han definido y estudiado las integrales estocásticas, sin embargo no contamos con un método o herramienta que nos ayude a calcular estas integrales. Para tal propósito se proporciona la llamada fórmula de Itô. La fórmula de Itô en su forma más simple está garantizada por el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1. *Sea f una función de clase C^2 y $B(t)$ un movimiento Browniano. Entonces*

$$f(B(t)) - f(B(a)) = \int_a^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2} \int_a^t f''(B(s))ds,$$

donde la primera integral es una integral de Itô y la segunda integral es una integral de Riemann para cada trayectoria de $B(s)$.

La demostración del Teorema 2.1.1 se puede revisar en [10] y [26].

El siguiente teorema presenta la fórmula de Itô ligeramente generalizada.

Teorema 2.1.2. *Sea $f(t, x)$ una función continua con derivadas parciales continuas $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Entonces*

$$\begin{aligned} f(t, B(t)) &= f(a, B(a)) + \int_a^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B(s))dB(s) \\ &+ \int_a^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, B(s)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B(s)) \right) ds. \end{aligned} \tag{2.1}$$

La demostración del Teorema 2.1.2 se encuentra en [10].

Definiremos los procesos de Itô, lo cual nos permitirá abordar el teorema que nos da la fórmula de Itô en su forma general.

Sea $\{\mathcal{F}_t : a \leq t \leq b\}$ la filtración natural. En lo que sigue usaremos $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a, b])$ para denotar el espacio de todos los procesos estocásticos $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptados $f(t)$ tales que $\int_a^b |f(t)|dt < \infty$, \mathbb{P} -c.s.

Definición 2.1.3. *Un proceso de Itô es un proceso estocástico de la forma*

$$X_t = X_a + \int_a^t f(s)dB(s) + \int_a^t g(s)ds, \quad a \leq t \leq b,$$

donde $X_a \in \mathcal{F}_a$, $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$ y $g \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a, b])$.

Teorema 2.1.4. *Sea X_t un proceso de Itô dado por*

$$X_t = X_a + \int_a^t f(s)dB(s) + \int_a^t g(s)ds, \quad a \leq t \leq b.$$

Suponga que $\theta(t, x)$ es una función continua con derivadas parciales continuas $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$. Entonces $\theta(t, X_t)$ es también un proceso de Itô y

$$\begin{aligned} \theta(t, X_t) = & \theta(a, X_a) + \int_a^t \frac{\partial \theta}{\partial x}(s, X_s) f(s)dB(s) \\ & + \int_a^t \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}(s, X_s) + \frac{\partial \theta}{\partial x}(s, X_s) g(s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(s, X_s) f(s)^2 \right) ds. \end{aligned}$$

La demostración del Teorema 2.1.4 se puede revisar en [3].

En secciones posteriores será de ayuda el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.5. *Sea $f \in \mathcal{L}(\Omega, L^2[0, 1])$. Considere la función $\theta(x) = e^x$ y el proceso de Itô dado por*

$$X_t = \int_0^t f(s)dB(s) - \frac{1}{2} \int_0^t f(s)^2 ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Observemos que $dX_t = f(t)dB(t) - \frac{1}{2}f(t)^2 dt$. Además, por la expansión de Taylor y teniendo en cuenta que $dB(t)dB(t) = dt$, $dB(t)dt = 0$ y $dt dt = 0$ se consigue que

$$\begin{aligned} d\theta(X_t) &= e^{X_t} dX_t + \frac{1}{2} e^{X_t} (dX_t)^2 \\ &= e^{X_t} \left(f(t)dB(t) - \frac{1}{2}f(t)^2 dt \right) + \frac{1}{2} e^{X_t} f(t)^2 dt \\ &= f(t)e^{X_t} dB(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$e^{\int_0^t f(t)dB(t) - \frac{1}{2} \int_0^t f(t)^2 dt} = 1 + \int_0^t f(s)e^{\int_0^s f(u)dB(u) - \frac{1}{2} \int_0^s f(u)^2 du} dB(s).$$

Por el Teorema 1.5.2, $e^{\int_0^t f(t)dB(t) - \frac{1}{2} \int_0^t f(t)^2 dt}$ es una martingala local. Cuando $f(t) \in L^2[0, 1]$, se tiene que $e^{\int_0^t f(t)dB(t) - \frac{1}{2} \int_0^t f(t)^2 dt}$ es una martingala por el Teorema 1.3.1.

2.2. Fórmula de Itô multidimensional

Sean $B_1(t), \dots, B_m(t)$, m movimientos brownianos independientes. Considere $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \dots, X_t^{(n)}$, n procesos de Itô dados por

$$X_t^{(i)} = X_a^{(i)} + \sum_{j=1}^m \int_a^t f_{ij}(s) dB_j(s) + \int_a^t g_i(s) ds, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.2)$$

donde $f_{ij} \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$ y $g_i \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a, b])$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Considere las matrices

$$B(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \\ \vdots \\ B_m(t) \end{bmatrix}, \quad X_t = \begin{bmatrix} X_t^{(1)} \\ X_t^{(2)} \\ \vdots \\ X_t^{(n)} \end{bmatrix},$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1m}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nm}(t) \end{bmatrix}, \quad g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}.$$

Entonces la igualdad (2.2) se reescribe como

$$X_t = X_a + \int_a^t f(s) dB(s) + \int_a^t g(s) ds, \quad a \leq t \leq b.$$

Es posible extender la fórmula de Itô del Teorema 2.1.4 al caso multidimensional. Suponga que $\theta(t, x_1, \dots, x_n)$ una función continua sobre $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ que tiene derivadas parciales continuas $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}$ para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces la diferencial estocástica de $\theta(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)})$ está dado por

$$\begin{aligned} d\theta(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) &= \frac{\partial \theta}{\partial t}(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) dX_t^{(i)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) dX_t^{(i)} dX_t^{(j)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

CAPÍTULO 2. FÓRMULA DE ITÔ Y ALGUNAS APLICACIONES

En donde el producto $dX_t^{(i)}dX_t^{(j)}$ se calcula mediante la Tabla 2.1, conocida como tabla de McKean.

\times	$dB_j(t)$	dt
$dB_i(t)$	δ_{ij}	0
dt	0	0

Tabla 2.1: Tabla de McKean.

El producto $dX_t^{(i)}dX_t^{(j)} = 0$ para $i \neq j$ es la expresión simbólica del siguiente hecho.

Sean $B_1(t)$ y $B_2(t)$ dos movimientos brownianos independientes y sea $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Entonces

$$\sum_{i=1}^n (B_1(t_i) - B_1(t_{i-1})) (B_2(t_i) - B_2(t_{i-1})) \rightarrow 0, \text{ en } L^2(\Omega), \text{ cuando } \|\Delta_n\| \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Para verificar este hecho, reescribimos (2.4) como

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

donde $X_i = (B_1(t_i) - B_1(t_{i-1})) (B_2(t_i) - B_2(t_{i-1}))$. Entonces

$$\Phi_n^2 = \sum_{i,j=1}^n X_i X_j.$$

Para $i \neq j$ y por la independencia de $B_k(t_i) - B_k(t_{i-1})$ y $B_k(t_j) - B_k(t_{j-1})$, para $k \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_i X_j] &= \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[X_j] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para $i = j$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_i^2] &= \mathbb{E} \left[((B_1(t_i) - B_1(t_{i-1})) (B_2(t_i) - B_2(t_{i-1})))^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(B_1(t_i) - B_1(t_{i-1}))^2 (B_2(t_i) - B_2(t_{i-1}))^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(B_1(t_i) - B_1(t_{i-1}))^2 \right] \mathbb{E} \left[(B_2(t_i) - B_2(t_{i-1}))^2 \right] \\ &= (t_i - t_{i-1})^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

De (2.5) y (2.6) se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\Phi_n^2] &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \\ &\leq \|\Delta_n\| \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= \|\Delta_n\| (b - a).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Cuando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$, la última igualdad de (2.7) converge a 0. Por lo tanto, (2.4) es válido.

Ejemplo 2.2.1. Considere la función $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\theta(x, y) = xy$. Las derivadas parciales de θ están dadas por

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial x} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0.$$

Aplicando (2.3) a la función $\theta(x, y)$, para dos procesos de Itô X_t y Y_t conseguimos

$$\begin{aligned}d(X_t Y_t) &= Y_t dX_t + X_t dY_t + \frac{1}{2} dX_t dY_t + \frac{1}{2} dY_t dX_t \\ &= Y_t dX_t + X_t dY_t + dX_t dY_t.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X_t Y_t = X_a Y_a + \int_a^t Y_s dX_s + \int_a^t X_s dY_s + \int_a^t dX_s dY_s.\tag{2.8}$$

La igualdad (2.8) es llamada la fórmula de Itô producto.

Si X_t y Y_t están dados por $dX_t = f(t)dB(t) + \xi(t)dt$ y $dY_t = g(t)dB(t) + \eta(t)dt$, entonces la fórmula de producto está dada por

$$X_t Y_t = X_a Y_a + \int_a^t (f(s)Y_s + g(s)X_s) dB(s) + \int_a^t (\xi(s)Y_s + \eta(s)X_s + f(s)g(s)) ds.$$

2.3. Cálculo de integrales estocásticas

La fórmula de Itô es usada para calcular integrales estocásticas $\int_a^b g(t)dB(t)$, cuando $g(t) = f(B(t))$, para f una función que tiene derivadas continuas. La fórmula de Itô la podemos escribir como en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1. *Suponga que $F(t, x)$ es una antiderivada en x de una función continua $f(t, x)$. Además suponga que $\frac{\partial F}{\partial t}$ y $\frac{\partial f}{\partial t}$ son continuas. Entonces*

$$\int_a^b f(t, B(t))dB(t) = F(t, B(t))\Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, B(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(t, B(t)) \right) dt. \quad (2.9)$$

Observemos que cuando el integrando f no depende de t , la igualdad (2.9) se escribe como

$$\int_a^b f(B(t))dB(t) = F(B(t))\Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b f'(B(t))dt.$$

2.4. Integral de Stratonovich

Definición 2.4.1. *Sean X_t y Y_t procesos de Itô. La integral de Stratonovich de X_t con respecto a Y_t está definida por*

$$\int_a^b X_t \circ Y_t = \int_a^b X_t dY_t + \frac{1}{2} \int_a^b (dX_t)(dY_t), \quad (2.10)$$

o equivalentemente en su forma diferencial estocástica

$$X_t \circ Y_t = X_t dY_t + \frac{1}{2} (dX_t)(dY_t). \quad (2.11)$$

El siguiente teorema garantiza que bajo la operación de tomar la integral de Stratonovich de dos procesos de Itô, la colección de procesos de Itô es cerrada.

Teorema 2.4.2. *Si X_t y Y_t son procesos de Itô, entonces el proceso estocástico*

$$L_t := \int_a^t X_s \circ dY_s, \quad a \leq t \leq b,$$

es un proceso de Itô.

Demostración. Sean X_t, Y_t procesos de Itô, entonces

$$X_t = X_a + \int_a^t f(s)dB(s) + \int_a^t \xi(s)ds, \quad a \leq t \leq b;$$

$$Y_t = X_a + \int_a^t g(s)dB(s) + \int_a^t \eta(s)ds, \quad a \leq t \leq b;$$

CAPÍTULO 2. FÓRMULA DE ITÔ Y ALGUNAS APLICACIONES

donde $X_a, Y_a \in \mathcal{F}_a$, $f, g \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$ y $\xi, \eta \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a, b])$. Observe que

$$\begin{aligned}
 (dX_t)(dY_t) &= (f(t)dB(t) + \xi(t)dt)(g(t)dB(t) + \eta(t)dt) \\
 &= f(t)g(t)(dB(t))^2 + (\xi(t)g(t) + \eta(t)f(t))dB(t) + \xi(t)\eta(t)(dt)^2 \\
 &= f(t)g(t)dt.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

De (2.10), usando (2.12) tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_a^b X_t \circ dY_t &= \int_a^b X_t dY_t + \frac{1}{2} \int_a^b (dX_t)(dY_t) \\
 &= \int_a^b X_t (g(t)dB(t) + \eta(t)dt) + \frac{1}{2} \int_a^b f(t)g(t)dt \\
 &= \int_a^b X_t g(t)dB(t) + \int_a^b \left(X_t \eta(t) + \frac{1}{2} f(t)g(t) \right) dt.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por el Teorema 1.5.4, X_t es un proceso estocástico continuo, de manera que sus trayectorias son continuas, \mathbb{P} -c.s. Por lo tanto,

$$\int_a^b |X_t g(t)|^2 dt \leq \int_a^b \sup_{a \leq s \leq b} \{|X_s|^2\} |g(t)|^2 dt = \sup_{a \leq s \leq b} \{|X_s|^2\} \int_a^b |g(t)|^2 dt < \infty, \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

De lo anterior es claro que $Xg \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a, b])$.

Además,

$$\int_a^b |X_t \eta(t)|^2 dt \leq \int_a^b \sup_{a \leq s \leq b} \{|X_s|\} |\eta(t)| dt = \sup_{a \leq s \leq b} \{|X_s|\} \int_a^b |\eta(t)| dt < \infty, \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

En consecuencia, $X\eta \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a, b])$.

Finalmente, $f(t)g(t)$ es adaptado y por la desigualdad de *Schwarz*

$$\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \left[\int_a^b |f(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |g(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} < \infty, \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Lo cual implica que $fg \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a, b])$.

De la igualdad (2.13), tomando $b = t$ concluimos que L_t es un proceso de Itô. \square

Considere una función $F(t, x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, por (2.11) y la fórmula de Itô del

Teorema 2.1.2 se consigue que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial x}(t, B(t)) \circ dB(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(t, B(t)) dB(t) + \frac{1}{2} \left(d \frac{\partial F}{\partial x}(t, B(t)) \right) (dB(t)) \\
 &= \frac{\partial F}{\partial x} dB(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} dt + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dB(t) + \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} dt \right) dB(t) \\
 &= \frac{\partial F}{\partial x}(t, B(t)) dB(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, B(t)) dt.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Por otro lado, por la fórmula de Itô dada en el Teorema 2.1.2, tenemos que

$$dF(t, B(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, B(t))dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, B(t))dB(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, B(t))dt. \tag{2.15}$$

De (2.14) y (2.15), obtenemos la siguiente igualdad

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, B(t)) \circ dB(t) = dF(t, B(t)) - \frac{\partial F}{\partial t}(t, B(t)) dt. \tag{2.16}$$

La igualdad (2.16) se considera en su forma integral en el siguiente teorema.

Teorema 2.4.3. *Sea $f(t, x)$ una función continua y suponga que $F(t, x)$ es una antiderivada en x de f . Además suponga que $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ son continuas. Entonces,*

$$\int_a^b f(t, B(t)) \circ dB(t) = F(t, B(t)) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(t, B(t)) dt.$$

Del Teorema 2.4.3, tenemos las siguientes observaciones.

Observación 2.4.4. 1. *Un caso particular del Teorema 2.4.3 es cuando la función f no depende t , de lo que se obtiene*

$$\int_a^b f(B(t)) \circ dB(t) = F(t, B(t)) \Big|_a^b.$$

De esta manera la integral de Stratonovich se comporta como la integral del cálculo ordinario.

2. *Si en la igualdad (2.10) conocemos el valor de la integral de Itô, entonces podemos evaluar la correspondiente integral de Stratonovich.*

3. *Es posible usar el Teorema 2.4.3 para evaluar la integral de Stratonovich y usando la expresión (2.14) con $F'(x) = f(x)$ es posible obtener el valor de la correspondiente integral de Itô, es decir,*

$$\int_a^b f(B(t)) dB(t) = \int_a^b f(B(t)) \circ dB(t) - \frac{1}{2} \int_a^b f'(B(t)) dt. \tag{2.17}$$

Recordemos que en la definición de integral estocástica los puntos de evaluación para el integrando son los puntos izquierdos de los intervalos generados sobre la partición dada, veremos que en la integral de Stratonovich se toman los puntos medios de cada subintervalo. Hasta ahora se ha definido la integral de Stratonovich en términos de la integral de Itô en la colección de procesos de Itô. Sin embargo, podemos definir esta integral directamente como una suma de Riemann, lo cual se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.4.5. *Sea $f(t, x)$ una función continua con derivadas parciales continuas $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Entonces*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t, B(t)) \circ dB(t) &= \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f\left(t_i^*, \frac{1}{2}(B(t_{i-1}) + B(t_i))\right) (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f\left(t_i^*, B\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)\right) (B(t_i) - B(t_{i-1})), \end{aligned} \tag{2.18}$$

en probabilidad, donde $t_{i-1} \leq t_i^* \leq t_i$, $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ es una partición finita del intervalo $[a, b]$.

Demostración. Los argumentos para la demostración rigurosa son los mismos que en la Sección 2.1. Por simplicidad, suponga que la función f no depende de t .

Para el primer límite en (2.18), observe que para cada $i = 1, 2, \dots, n$, se consigue que

$$\begin{aligned} &\left[f\left(\frac{B(t_{i-1}) + B(t_i)}{2}\right) - f(B(t_{i-1})) \right] (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &\approx \frac{1}{2} f'(B(t_{i-1})) (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \\ &\approx \frac{1}{2} f'(B(t_{i-1})) (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \left[f\left(\frac{B(t_{i-1}) + B(t_i)}{2}\right) - f(B(t_{i-1})) \right] (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f'(B(t_{i-1})) (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n f\left(\frac{B(t_{i-1}) + B(t_i)}{2}\right) (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ & \approx \sum_{i=1}^n f(B(t_{i-1})) (B(t_i) - B(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f'(B(t_{i-1})) (t_i - t_{i-1}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Tomando el límite en probabilidad, cuando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$, el lado derecho de (2.19) converge a

$$\int_a^b f(B(t)) dB(t) + \frac{1}{2} \int_a^b f'(B(t)) dt. \quad (2.20)$$

Por la relación (2.17), (2.20) es igual a la integral de Stratonovich.

Para el segundo límite, para cada $i = 1, 2, \dots, n$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \left[f\left(B\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)\right) - f(B(t_{i-1})) \right] (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ & \approx f'(B(t_{i-1})) \left[B\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) - B(t_{i-1}) \right] (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ & = f'(B(t_{i-1})) \left[B\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) - B(t_{i-1}) \right]^2 \\ & + f'(B(t_{i-1})) \left[B\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) - B(t_{i-1}) \right] \left[B(t_i) - B\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) \right] \\ & \approx \frac{1}{2} f'(B(t_{i-1})) (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[f\left(B\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)\right) - f(B(t_{i-1})) \right] (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ & \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f'(B(t_{i-1})) (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n f\left(B\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)\right) (B(t_i) - B(t_{i-1})) - \sum_{i=1}^n f(B(t_{i-1})) (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ & \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f'(B(t_{i-1})) (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n f\left(B\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)\right) (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ & \approx \sum_{i=1}^n f(B(t_{i-1})) (B(t_i) - B(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f'(B(t_{i-1})) (t_i - t_{i-1}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Tomando el límite en probabilidad cuando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$, el lado derecho de (2.21) converge a

$$\int_a^b f(B(t)) dB(t) + \frac{1}{2} \int_a^b f'(B(t)) dt. \quad (2.22)$$

Por la relación (2.17), (2.22) es igual a la integral de Stratonovich. Por lo tanto, se cumple la convergencia en (2.18). \square

2.5. Teorema de caracterización de Lévy

En la definición de movimiento browniano, la medida de probabilidad \mathbb{P} juega un rol crucial. Para enfatizar este hecho, si es necesario, diremos que $B(t)$ es un movimiento browniano con respecto a \mathbb{P} . Iniciaremos esta sección con el siguiente ejemplo.

Sea $B(t)$ un movimiento browniano, para $0 \leq t \leq 1$, con respecto a \mathbb{P} . Considérese la función

$$\mathbb{S} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty),$$

definida para cada $A \in \mathcal{F}$ como $\mathbb{S}(A) := \int_A e^{B(1) - \frac{1}{2}} d\mathbb{P}$.

Denotemos la esperanza respecto de \mathbb{P} por $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$. Entonces tenemos que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{B(1) - \frac{1}{2}} \right] = \int_{\Omega} e^{B(1) - \frac{1}{2}} d\mathbb{P} = e^{-\frac{1}{2}} \int_{\Omega} e^{B(1)} d\mathbb{P} = e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Lo cual implica que

$$\mathbb{S}(\Omega) = 1.$$

Entonces \mathbb{S} es una medida de probabilidad.

Mostraremos que el proceso estocástico $\{M_t := B(t) - t; 0 \leq t \leq 1\}$ es un movimiento browniano respecto a \mathbb{S} .

Es fácil ver que $\mathbb{S}(A) = 0$ si y sólo si $\mathbb{P}(A) = 0$ con lo cual diremos que \mathbb{S} y \mathbb{P} son equivalentes. De esto, se sigue que $\mathbb{S}[\{\omega : M_0(\omega) = 0\}] = \mathbb{P}[\{\omega : B(0, \omega) = 0\}] = 1$ y $\mathbb{S}[\{\omega : M_t(\omega) \text{ es continuo en } t\}] = \mathbb{P}[\{\omega : B(t, \omega) \text{ es continuo en } t\}] = 1$. De

CAPÍTULO 2. FÓRMULA DE ITÔ Y ALGUNAS APLICACIONES

manera que las condiciones (1) y (4) de la Definición 1.1.1 se satisfacen para M_t con respecto a la medida de probabilidad \mathbb{S} .

Denotemos por $\mathbb{E}_{\mathbb{S}}$ a la esperanza con respecto a \mathbb{S} . Sean $0 \leq s \leq 1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda(M_t - M_s)} \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda(B(t) - t - (B(s) - s))} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{-i\lambda(t-s)} e^{i\lambda(B(t) - B(s))} \right] \\ &= e^{-i\lambda(t-s)} \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda(B(t) - B(s))} \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

De la definición de \mathbb{S} se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda(B(t) - B(s))} \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{i\lambda(B(t) - B(s))} e^{B(1) - \frac{1}{2}} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{i\lambda(B(t) - B(s))} e^{B(1) - \frac{1}{2}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{i\lambda(B(t) - B(s))} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{B(1) - \frac{1}{2}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Para calcular la esperanza en la última igualdad de (2.24), requerimos del siguiente resultado.

Sea $M(t) = e^{cB(t) - \frac{1}{2}c^2t}$, entonces el proceso estocástico $M(t)$ es una martingala para cualquier constante $c > 0$.

En efecto, sea $f(t, x) = e^{cx - \frac{1}{2}c^2t}$ para $c \in \mathbb{R}$ fijo, calculando las derivadas parciales se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}c^2 f(t, x), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = cf(t, x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 f(t, x).$$

Por la fórmula de Itô dada en (2.1), se obtiene que

$$e^{cB(t) - \frac{1}{2}c^2t} = 1 + c \int_0^t e^{cB(s) - \frac{1}{2}c^2s} dB(s).$$

Sea $u < t$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{cB(t) - \frac{1}{2}c^2t} \middle| \mathcal{F}_u \right] &= 1 + \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[c \int_0^t e^{cB(s) - \frac{1}{2}c^2s} dB(s) \middle| \mathcal{F}_u \right] \\ &= 1 + c \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^u e^{cB(s) - \frac{1}{2}c^2s} dB(s) + \int_u^t e^{cB(s) - \frac{1}{2}c^2s} dB(s) \middle| \mathcal{F}_u \right] \\ &= 1 + c \int_0^u e^{cB(s) - \frac{1}{2}c^2s} dB(s) + c \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_u^t e^{cB(s) - \frac{1}{2}c^2s} dB(s) \middle| \mathcal{F}_u \right] \\ &= 1 + c \int_0^u e^{cB(s) - \frac{1}{2}c^2s} dB(s) \\ &= e^{cB(u) - \frac{1}{2}c^2u}. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 2. FÓRMULA DE ITÔ Y ALGUNAS APLICACIONES

Por lo tanto, $M(t) = e^{cB(t) - \frac{1}{2}c^2t}$ es una martingala para cualquier $c \in \mathbb{R}$. De manera que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{B(1) - \frac{1}{2}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = e^{B(t) - \frac{1}{2}t}. \quad (2.25)$$

Sustituyendo en (2.24) la esperanza dada por (2.25) se tiene que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda(B(t) - B(s))} \right] = e^{-\frac{1}{2}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{(i\lambda+1)(B(t) - B(s))} e^{B(s)} \right]. \quad (2.26)$$

Usando el hecho

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{c(B(t) - B(s))} \right] = e^{\frac{1}{2}c^2(t-s)},$$

para $s \leq t$ y dado que $e^{(i\lambda+1)(B(t) - B(s))}$ y $e^{B(s)}$ son independientes, de (2.26) obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda(B(t) - B(s))} \right] &= e^{-\frac{1}{2}t} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{(i\lambda+1)(B(t) - B(s))} \right] \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{B(s)} \right] \\ &= e^{-\frac{1}{2}t} e^{\frac{1}{2}(i\lambda+1)^2(t-s)} e^{\frac{1}{2}s} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\lambda^2 + i\lambda)(t-s)}. \end{aligned}$$

De (2.23) y (2.26) se consigue

$$\mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda(M_t - M_s)} \right] = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)}.$$

Por lo tanto, $M_t - M_s$ tiene distribución normal con media 0 y varianza $t - s$ con respecto a \mathbb{S} . De manera que se verifica que los incrementos tienen distribución normal con media 0 y varianza $t - s$.

Sean $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$. Entonces para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda_1 M_{t_1} + i\lambda_2 (M_{t_2} - M_{t_1})} \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda_1 (B(t_1) - t_1) + i\lambda_2 ((B(t_2) - t_2) - (B(t_1) - t_1))} \right] \\ &= e^{-i\lambda_1 t_1 - i\lambda_2 (t_2 - t_1)} \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda_1 B(t_1) + i\lambda_2 (B(t_2) - B(t_1))} \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Usando los argumentos para obtener (2.24), (2.25) y (2.26) se verifica lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda_1 B(t_1) + i\lambda_2 (B(t_2) - B(t_1))} \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{i\lambda_1 B(t_1) + i\lambda_2 (B(t_2) - B(t_1))} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{B(1) - \frac{1}{2}} \middle| \mathcal{F}_{t_2} \right] \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{i\lambda_1 B(t_1) + i\lambda_2 (B(t_2) - B(t_1))} e^{B(t_2) - \frac{1}{2}t_2} \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{i\lambda_1 B(t_1) + i\lambda_2 (B(t_2) - B(t_1))} e^{B(t_2) - B(t_1) + B(t_1) - \frac{1}{2}t_2} \right] \\
 &= e^{-\frac{1}{2}t_2} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{(i\lambda_2 + 1)(B(t_2) - B(t_1))} e^{(i\lambda_1 + 1)B(t_1)} \right] \\
 &= e^{-\frac{1}{2}t_2} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{(i\lambda_2 + 1)(B(t_2) - B(t_1))} \right] \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{(i\lambda_1 + 1)B(t_1)} \right] \\
 &= e^{-\frac{1}{2}t_2} e^{\frac{1}{2}(i\lambda_2 + 1)^2(t_2 - t_1)} e^{\frac{1}{2}(i\lambda_1 + 1)^2 t_1} \\
 &= e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2 t_1 - \frac{1}{2}\lambda_2^2(t_2 - t_1) + i\lambda_1 t_1 + i\lambda_2(t_2 - t_1)}.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

En general, podemos repetir los argumentos anteriores inductivamente para mostrar que para cualesquiera $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$, se cumple que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda_1 M_{t_1} + i\lambda_2 (M_{t_2} - M_{t_1}) + \dots + i\lambda_n (M_{t_n} - M_{t_{n-1}})} \right] = e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2 t_1 - \frac{1}{2}\lambda_2^2(t_2 - t_1) - \dots - \frac{1}{2}\lambda_n^2(t_n - t_{n-1})},$$

para todo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ que pertenecen a \mathbb{R} .

Lo cual implica que $M_{t_1}, M_{t_2} - M_{t_1}, \dots, M_{t_n} - M_{t_{n-1}}$ son independientes y con distribución normal bajo \mathbb{S} .

Lo anterior completa la prueba de que $\{M_t = B(t) - t : 0 \leq t \leq 1\}$ es un movimiento browniano con respecto a la medida de probabilidad \mathbb{S} .

Observe que el proceso estocástico $\{M_t = B(t) - t : 0 \leq t \leq 1\}$ no es un movimiento browniano con respecto a la medida de probabilidad \mathbb{P} , ya que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B(t) - t] = -t \neq 0$.

Teorema 2.5.1. *Teorema de caracterización de Lévy.*

Un proceso estocástico $\{M_t\}$ es un movimiento browniano si y sólo si existe una medida de probabilidad \mathbb{S} y una filtración \mathcal{F}_t bajo \mathbb{S} tal que $\mathbb{S}[\{M_0 = 0\}] = 1$ y el compensador de M_t es $\langle M \rangle_t = t$ (Ver Apéndice, Teorema A.2.3), \mathbb{S} -c.s. para cada t .

Demostración. El espacio de probabilidad en cuestión es $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$. Por hipótesis $\{M_t\}$ satisface las condiciones (1) y (4) de la Definición 1.1.1, resta ver que se verifican las condiciones (2) y (3).

CAPÍTULO 2. FÓRMULA DE ITÔ Y ALGUNAS APLICACIONES

Aplicando la fórmula de Itô para martingalas (Ver Apéndice, Teorema A.2.4) a $\{M_t\}$ con la función $F(t, x) = e^{i\lambda x + \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ se consigue que

$$dF(t, M_t) = \frac{1}{2}\lambda^2 F(t, M_t)dt + i\lambda F(t, M_t)dM_t - \frac{1}{2}\lambda^2 F(t, M_t)d \langle M \rangle_t.$$

Por hipótesis $d \langle M \rangle_t = dt$, de manera que

$$dF(t, M_t) = i\lambda F(t, M_t)dM_t,$$

o bien en forma integral

$$e^{i\lambda M_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t} = 1 + i\lambda \int_0^t e^{i\lambda M_s + \frac{1}{2}\lambda^2 s} dM_s.$$

Por el Teorema 1.5.2, el proceso estocástico $e^{i\lambda M_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ es una martingala con respecto a \mathbb{S} y $\{\mathcal{F}_t\}$, entonces para cualquier $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda M_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t} \middle| \mathcal{F}_s \right] = e^{i\lambda M_s + \frac{1}{2}\lambda^2 s}, \quad \mathbb{S}\text{-c.s.} \quad (2.29)$$

Además, observemos que

$$\begin{aligned} e^{i\lambda M_s + \frac{1}{2}\lambda^2 s} &= \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda M_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda M_t - i\lambda M_s + i\lambda M_s + \frac{1}{2}\lambda^2 t - \frac{1}{2}\lambda^2 s + \frac{1}{2}\lambda^2 s} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda(M_t - M_s)} e^{i\lambda M_s + \frac{1}{2}\lambda^2 s} e^{\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= e^{i\lambda M_s + \frac{1}{2}\lambda^2 s} e^{\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)} \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda(M_t - M_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{i\lambda(M_t - M_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.30)$$

Luego, aplicando esperanza en ambos lados de (2.30) se tiene que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[e^{i\lambda(M_t - M_s)} \right] = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.31)$$

Esto muestra que bajo \mathbb{S} , $M_t - M_s$ tiene distribución normal con media 0 y varianza $t - s$.

CAPÍTULO 2. FÓRMULA DE ITÔ Y ALGUNAS APLICACIONES

Finalmente, supongamos que $0 \leq t_1 \leq t_2$, para cualesquiera λ_1, λ_2 que pertenecen a \mathbb{R} , se tiene que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda_1 M_{t_1} + i\lambda_2 (M_{t_2} - M_{t_1})} \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda_1 M_{t_1} + i\lambda_2 (M_{t_2} - M_{t_1})} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i(\lambda_1 - \lambda_2) M_{t_1}} e^{i\lambda_2 M_{t_2}} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i(\lambda_1 - \lambda_2) M_{t_1}} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{S}} e^{i\lambda_2 M_{t_2}} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \right].
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Por (2.30) se tiene que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda_2 M_{t_2}} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] &= e^{i\lambda_2 M_{t_1} + \frac{1}{2} \lambda_2^2 t_1} e^{-\frac{1}{2} \lambda_2^2 t_2} \\
 &= e^{i\lambda_2 M_{t_1} - \frac{1}{2} \lambda_2^2 (t_2 - t_1)}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

De (2.32) por (2.33) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda_1 M_{t_1} + i\lambda_2 (M_{t_2} - M_{t_1})} \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i(\lambda_1 - \lambda_2) M_{t_1}} e^{i\lambda_2 M_{t_1} - \frac{1}{2} \lambda_2^2 (t_2 - t_1)} \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda_1 M_{t_1}} e^{-\frac{1}{2} \lambda_2^2 (t_2 - t_1)} \right] \\
 &= e^{-\frac{1}{2} \lambda_2^2 (t_2 - t_1)} \mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda_1 M_{t_1}} \right].
 \end{aligned}$$

De (2.31), $\mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda_1 M_{t_1}} \right] = e^{-\frac{1}{2} \lambda_1^2 t_1}$. Por lo tanto, para todo λ_1, λ_2 que pertenecen a \mathbb{R} se verifica que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda_1 M_{t_1} + i\lambda_2 (M_{t_2} - M_{t_1})} \right] = e^{-\frac{1}{2} \lambda_2^2 (t_2 - t_1) - \frac{1}{2} \lambda_1^2 t_1}.$$

En general, podemos aplicar los mismos argumentos inductivamente para mostrar que para cualesquiera $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$, se cumple que 5

$$\mathbb{E}_{\mathbb{S}} \left[e^{i\lambda_1 M_{t_1} + i\lambda_2 (M_{t_2} - M_{t_1}) + \dots + i\lambda_n (M_{t_n} - M_{t_{n-1}})} \right] = e^{-\frac{1}{2} \lambda_1^2 t_1 - \frac{1}{2} \lambda_2^2 (t_2 - t_1) - \dots - \frac{1}{2} \lambda_n^2 (t_n - t_{n-1})},$$

para cualesquiera $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ que pertenecen a \mathbb{R} .

De lo cual se sigue que las variables aleatorias $M_{t_1}, M_{t_2} - M_{t_1}, \dots, M_{t_n} - M_{t_{n-1}}$ son independientes y se distribuyen normalmente. En particular $\{M_t\}$ satisface la condición (3) de la Definición 1.1.1 con respecto a \mathbb{S} . Por lo tanto, $\{M_t\}$ es un movimiento browniano respecto a \mathbb{S} .

Suponga que $\{M_t\}$ es un movimiento browniano respecto a \mathbb{P} . Bajo \mathbb{P} existe la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$, tal que $\{M_t\}$ es continuo bajo esta filtración. Por definición se cumple que $\mathbb{P}[\{M_0 = 0\}] = 1$ y $\langle M \rangle_t = t$, \mathbb{P} -c.s. \square

2.6. Movimiento browniano multidimensional

Un proceso estocástico $\{B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_n(t))\}$ es un movimiento browniano sobre \mathbb{R}^n , donde $B_1(\cdot), B_2(\cdot), \dots, B_n(\cdot)$ son n movimientos brownianos independientes sobre \mathbb{R} . Este movimiento browniano inicia en $x \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 . Entonces por la fórmula de Itô se tiene que

$$\begin{aligned} df(B(t)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(B(t))dB_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(B(t))dB_i(t)dB_j(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(B(t))dB_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(B(t))dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f(B(t)) = f(x) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(B(s))dB_i(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(B(s))ds, \quad (2.34)$$

donde $\Delta f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, denominado en la literatura como el Laplaciano de f .

En esta sección necesitaremos el siguiente hecho acerca de la transitoriedad de un movimiento browniano $B(\cdot)$ sobre \mathbb{R}^n . Sea $n \geq 2$, entonces

$$\mathbb{P}[\{B(t) = 0 \text{ para algún } t > 0 \mid B(0) = x\}] = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.6.1. *Sea $\{B(t); 0 \leq t \leq T\}$ un movimiento browniano sobre \mathbb{R}^3 que inicia en el punto $a \neq 0$. Entonces el proceso estocástico $\frac{1}{\|B(t)\|}$ para $t \geq 0$, es una martingala local.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{\|x\|} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}}$ para cada $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Entonces la función $f(x)$ es una función de clase C^2 sobre el dominio $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Además, sus derivadas parciales están dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{\|x\|^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{\|x\|^3} + 3\frac{x_i^2}{\|x\|^5}, \quad i = 1, 2, 3.$$

CAPÍTULO 2. FÓRMULA DE ITÔ Y ALGUNAS APLICACIONES

Por lo tanto,

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{1}{\|x\|^3} + 3\frac{x_i^2}{\|x\|^5} \right) = -3\frac{1}{\|x\|^3} + 3\frac{\|x\|^2}{\|x\|^5} = 0.$$

De la ecuación (2.34) se consigue que

$$\frac{1}{\|B(t)\|} = \frac{1}{\|a\|} - \sum_{i=1}^3 \int_0^t \frac{B_i(s)}{\|B(s)\|^3} dB_i(s).$$

Por el hecho anterior, el integrando $\frac{B_i(s)}{\|B(s)\|^3}$ es una función continua de s , \mathbb{P} -c.s.

Entonces el integrando $\frac{B_i(s)}{\|B(s)\|^3} \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0, t])$ para $i = 1, 2, 3$ y cualquier $t > 0$.

Por Teorema 1.5.2, el proceso estocástico $\frac{1}{\|B(t)\|}$ es una martingala local. \square

Considere $n \geq 2$ y sea $B(t)$ un movimiento browniano sobre \mathbb{R}^n que inicia en el punto $a \neq 0$. La función $f(x) = \frac{1}{\|x\|} = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}}$ es una función de clase C^2 sobre el dominio $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que tiene derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\|x\|^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\|x\|} - \frac{x_i^2}{\|x\|^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Entonces

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{x_i^2}{\|x\|^3} \right) = \frac{n}{\|x\|} - \frac{\|x\|^2}{\|x\|^3} = (n-1) \frac{1}{\|x\|}.$$

Aplicando (2.34) a la función $f(x)$ conseguimos

$$\|B(t)\| = \|a\| + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{B_i(s)}{\|B(s)\|^3} dB_i(s) + \frac{n-1}{2} \int_0^t \frac{1}{\|B(s)\|} ds. \quad (2.35)$$

En la igualdad (2.35) podemos tomar el límite cuando $a \rightarrow 0$, para el término de la suma se puede tomar el límite ya que cada integrando está acotado por 1. Para el último término de (2.35) la justificación se presenta a continuación en el caso cuando $B(t)$ inicia en 0.

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{\|B(t)\|} \right] = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right)^n e^{-\frac{1}{2t}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)} dx.$$

Usando coordenadas polares, $x = ru$ con $r \geq 0$ y $|u| = 1$, la medida de Lebesgue $dx = r^{n-1} dr d\sigma$, donde σ es la medida de superficie sobre la esfera unitaria $S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = 1\}$. Por lo tanto, conseguimos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\|B(t)\|} \right] &= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right)^n e^{-\frac{r^2}{2t}} r^{n-1} dr d\sigma \\ &= \sigma(S^{n-1}) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right)^n \int_0^\infty r^{n-2} e^{-\frac{r^2}{2t}} dr. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Haciendo cambio de variables $r = \sqrt{2ty}$, la integral en (2.36) se reescribe como

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{n-2} e^{-\frac{r^2}{2t}} dr &= \int_0^\infty (\sqrt{2ty})^{n-2} e^{-y} \frac{t}{\sqrt{2ty}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (\sqrt{2ty})^{n-3} e^{-y} 2t dy \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2t})^{n-1} \int_0^\infty (\sqrt{y})^{n-3} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2t})^{n-1} \int_0^\infty \frac{(\sqrt{y})^{n-1}}{y} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2t})^{n-1} \int_0^\infty y^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2t})^{n-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde Γ es la función gamma definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0. \quad (2.38)$$

Por otro lado, la medida de superficie total $\sigma(S^{n-1})$ se sabe que es

$$\sigma(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \quad (2.39)$$

De (2.36) utilizando (2.37) y (2.39) obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\|B(t)\|} \right] &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n} \frac{1}{2} (\sqrt{2t})^{n-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2t}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde $\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)$ para un entero positivo m tiene valor

$$\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) = \begin{cases} \left(\frac{m}{2} - 1\right)!, & \text{si } m \text{ es par;} \\ \left(\frac{m}{2} - 1\right) \left(\frac{m}{2} - 2\right) \cdots \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$$

De la igualdad (2.40) es clara la dependencia de $\mathbb{E}\left[\frac{1}{\|B(t)\|}\right]$ sobre t en el término $\frac{1}{\sqrt{2t}}$, para cualquier dimensión $n \geq 2$.

Observe que $\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2s}} ds = \sqrt{2s}|_0^t = \sqrt{2t} < \infty$ para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$. De modo que (2.40) implica que $\int_0^t \mathbb{E}\left[\frac{1}{\|B(s)\|}\right] ds < \infty$. Esto muestra que la última integral de (2.36) se define casi con seguridad para un movimiento browniano $B(t)$ que inicia en 0. Por lo tanto, tomamos $a = 0$ en (2.36) para conseguir

$$\|B(t)\| = \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{B_i(s)}{\|B(s)\|} dB_i(s) + \frac{n-1}{2} \int_0^t \frac{1}{\|B(s)\|} ds, \quad (2.41)$$

donde $B(t)$ es un movimiento browniano que inicia en 0, sobre \mathbb{R}^n , $n \geq 2$.

En el siguiente lema mostraremos que el término de la suma en (2.41) es en efecto un movimiento browniano.

Lema 2.6.2. *Sea $B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_n(t))$ un movimiento browniano que inicia en 0 en \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Entonces el proceso estocástico*

$$W(t) := \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{B_i(s)}{\|B(s)\|} dB_i(s), \quad (2.42)$$

es un movimiento browniano.

Demostración. Se utilizará el Teorema 2.5.1 (Teorema de caracterización de Lévy) para demostrar que $W(t)$ es un movimiento browniano.

Tómese \mathbb{S} la misma medida de probabilidad \mathbb{P} , con respecto a la cual $B_i(t)$ son movimientos brownianos para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y sea $\{\mathcal{F}_t\}$ la filtración $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_i(s) : s \leq t, 1 \leq i \leq n\}$.

Nótese que cada integrando de (2.42) tiene valor absoluto menor o igual a 1, \mathbb{P} -c.s. Entonces por Teorema 1.3.1 y Teorema 1.3.2, el proceso estocástico $W(t)$ es una

martingala continua con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$.

Es claro que $\mathbb{P}\{W(0) = 0\} = 1$. Además, el compensador de $W^2(t)$ está dado por

$$\langle W \rangle_t = \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{B_i(s)^2}{\|B(s)\|^2} ds = \int_0^t \frac{1}{\|B(s)\|^2} \sum_{i=1}^n B_i(s)^2 ds = \int_0^t 1 ds = t.$$

Entonces por Teorema 2.5.1, $W(t)$ es un movimiento browniano. □

Escribiendo (2.41) en términos del movimiento browniano dado en (2.42) se consigue que

$$\|B(t)\| = W(t) + \frac{n-1}{2} \int_0^t \frac{1}{\|B(s)\|} ds.$$

Definición 2.6.3. Sea $B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_n(t))$ un movimiento browniano en \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, que inicia en 0. El proceso estocástico

$$L_{n-1}(t) = \|B(t)\| = \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + \dots + B_n(t)^2},$$

es llamado un proceso de Bessel con índice $n-1$.

Teorema 2.6.4. El proceso de Bessel $L_{n-1}(t)$ con índice $n-1$ es una solución de la ecuación integral estocástica

$$X(t) = W(t) + \frac{n-1}{2} \int_0^t \frac{1}{X(s)} ds,$$

donde $W(t)$ está dado por $W(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{B_i(s)}{\|B(s)\|} dB_i(s)$.

Teorema 2.6.5. Para cada $t > 0$, la función de densidad de L_{n-1} está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(2t)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2t}}, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

donde Γ es la función gamma definida en (2.38).

Demostración. Para cada $t > 0$ y $u \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{L_{n-1}(t) \leq u\} &= \mathbb{P}\{B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + \dots + B_n(t)^2 \leq u^2\} \\ &= \int_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq u^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^n e^{-\frac{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}{2t}} du. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares como en la derivación de (2.37), se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\{L_{n-1}(t) \leq u\}] &= \sigma(S^{n-1}) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^n \int_0^u r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2t}} dr \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^n \int_0^u r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2t}} dr \\ &= \int_0^u \frac{2}{(2t)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2t}} dr.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_{L_{n-1}(t)}(u) = \frac{2}{(2t)^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} u^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2t}}$. □

2.7. Procesos exponenciales

Sea h una función determinada en $L^2[0, T]$. Entonces para cualquier $t \in [0, T]$, la integral de Wiener $\int_0^t h(s)dB(s)$ tiene una distribución normal con media 0 y varianza $\sigma^2 = \int_0^t h^2(s)ds$. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}\left[e^{\int_0^t h(s)dB(s)}\right] = e^{\frac{\sigma^2}{2}} = e^{\frac{1}{2} \int_0^t h(s)^2 dB(s)}. \quad (2.43)$$

La renormalización multiplicativa de $e^{\int_0^t h(s)dB(s)}$ es definida por

$$Y_t := \frac{e^{\frac{1}{2} \int_0^t h(s)dB(s)}}{\mathbb{E}\left[e^{\int_0^t h(s)dB(s)}\right]} = e^{\frac{1}{2} \int_0^t h(s)dB(s) - \frac{1}{2} \int_0^t h(s)^2 ds}.$$

Por el Ejemplo 2.1.5, Y_t tiene la representación

$$Y_t = 1 + \int_0^t h(s)e^{\int_0^s h(u)dB(u) - \frac{1}{2} \int_0^s h(u)^2 dB(u)}. \quad (2.44)$$

Observe que el integrando de la integral de Itô en (2.44) pertenece a $L^2_{ad}([0, T] \times \Omega)$, entonces por Teorema 1.3.1, el proceso $\{Y_t; 0 \leq t \leq T\}$, es una martingala.

Definición 2.7.1. *El proceso exponencial dado por $h \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0, T])$ se define como el proceso estocástico*

$$\varepsilon_h(t) = \exp \left(\int_0^t h(s) dB(s) - \frac{1}{2} \int_0^t h(s)^2 ds \right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Aplicando la fórmula de Itô, vemos que $d\varepsilon_h(t) = h(t)\varepsilon_h(t)dB(t)$. Por lo tanto,

$$\varepsilon_h(t) = 1 + \int_0^t h(s)\varepsilon_h(s)dB(s), \quad 0 \leq t \leq T,$$

lo cual muestra que $\varepsilon_h(t)$ es una martingala local por el Teorema 1.5.2.

Teorema 2.7.2. *Sea $h \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0, T])$ tal que satisface la siguiente condición*

$$\mathbb{E}[\varepsilon_h(t)] = 1, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.45)$$

Entonces, el proceso exponencial $\varepsilon_h(t)$, $0 \leq t \leq T$, dado por h es una martingala.

Demostración. Si h es una función determinista en $L^2[0, T]$, entonces por (2.43)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varepsilon_h(t)] &= \mathbb{E} \left[\exp \left(\int_0^t h(s) dB(s) - \frac{1}{2} \int_0^t h(s)^2 ds \right) \right] \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t h(s)^2 ds \right) \mathbb{E} \left[\exp \left(\int_0^t h(s) dB(s) \right) \right] \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t h(s)^2 ds \right) \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t h(s)^2 ds \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

En este caso, hemos demostrado que $\varepsilon_h(t)$ es una martingala.

Por suposición, $d\mathbb{S} = \varepsilon_h(T)d\mathbb{P}$ define una medida de probabilidad. Sea \mathbb{S}_t la restricción de \mathbb{S} a \mathcal{F}_t . La condición (2.45) implica que

$$d\mathbb{S}_t = \varepsilon_h(t)d\mathbb{P}.$$

Sea $s \leq t$, para cualquier $A \in \mathcal{F}_s$ tenemos que

$$\int_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\varepsilon_h(t) | \mathcal{F}_t] d\mathbb{P} = \int_A \varepsilon_h(t) d\mathbb{P} = \int_A d\mathbb{S}_t = \mathbb{S}(A). \quad (2.46)$$

Por otra parte, tenemos que

$$\int_A \varepsilon_h(s) d\mathbb{P} = \int_A d\mathbb{S}(A). \quad (2.47)$$

De (2.46) y (2.47) se consigue que

$$\int_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\varepsilon_h(s) | \mathcal{F}_s] d\mathbb{P} = \int_A \varepsilon_h(s) d\mathbb{P}.$$

De manera que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\varepsilon_h(s) | \mathcal{F}_s] = \varepsilon_h(s)$. Por lo tanto, $\varepsilon_h(t)$, $0 \leq t \leq T$, es una martingala. \square

2.8. Transformación de medidas de probabilidad

Sea $B(t)$ un movimiento browniano y considere el problema de calcular la esperanza $\mathbb{E} [B(t)^3 e^{B(1)-\frac{1}{2}}]$ para $0 < t \leq 1$. Tenemos dos métodos para resolver este problema. Para el primer método es necesario expresar la variable aleatoria como un producto de dos variables aleatorias independientes

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [B(t)^3 e^{B(1)-\frac{1}{2}}] &= e^{-\frac{1}{2}} \mathbb{E} \left[\left(B(t)^3 e^{B(t)} \right) \left(e^{B(1)-B(t)} \right) \right] \\ &= e^{-\frac{1}{2}} \mathbb{E} \left[\left(B(t)^3 e^{B(t)} \right) \right] \mathbb{E} \left[\left(e^{B(1)-B(t)} \right) \right], \end{aligned}$$

Finalmente, calcular las esperanzas por separado.

Para el segundo método se usa la medida de probabilidad \mathbb{S} donde

$$\mathbb{S}(A) = \int_A e^{B(1)-\frac{1}{2}} d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Observemos que se verifica la siguiente igualdad

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [B(t)^3 e^{B(1)-\frac{1}{2}}] = \int_{\Omega} B(t)^3 e^{B(1)-\frac{1}{2}} d\mathbb{P} = \int_{\Omega} B(t)^3 d\mathbb{S} = \mathbb{E}_{\mathbb{S}} [B(t)^3].$$

En la Sección 2.7, se ha probado que $M_t = B(t) - t$, $0 \leq t \leq 1$, es un movimiento browniano con respecto a la medida de probabilidad \mathbb{S} . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [B(t)^3 e^{B(1)-\frac{1}{2}}] &= \mathbb{E}_{\mathbb{S}} [B(t)^3] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{S}} [(M_t - t)^3] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{S}} [M_t^3 + 3tM_t + 3t^3M_t + t^3] \\ &= 3t^2 + t^3. \end{aligned}$$

De lo cual es posible ver que al tomar un cambio en la medida de probabilidad, el cálculo de la esperanza se facilita.

Teorema 2.8.1. *Sea $\{B(t); 0 \leq t \leq 1\}$, un movimiento browniano con respecto a la medida de probabilidad \mathbb{P} . Sea \mathbb{S} la medida de probabilidad $d\mathbb{S} = e^{B(1)-\frac{1}{2}}d\mathbb{P}$. Entonces para cualquier función f tal que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [|f(B(t))|] < \infty$, tenemos que*

$$\int_{\Omega} f(B(t) - t) d\mathbb{S} = \int_{\Omega} f(B(t)) d\mathbb{P}, \quad (2.48)$$

equivalentemente, $\mathbb{E}_{\mathbb{S}} [f(B(t) - t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{S}} [f(B(t))]$.

Demostración. El proceso estocástico $\{e^{B(t)-\frac{1}{2}t}; 0 \leq t \leq 1\}$ es una martingala. Supongamos que $\alpha(t)$ es una función determinista. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(B(t) - \alpha(t)) e^{B(1)-\frac{1}{2}} d\mathbb{P} &= \mathbb{E} \left[f(B(t) - \alpha(t)) e^{B(1)-\frac{1}{2}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[f(B(t) - \alpha(t)) e^{B(1)-\frac{1}{2}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[f(B(t) - \alpha(t)) \mathbb{E} \left[e^{B(1)-\frac{1}{2}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[f(B(t) - \alpha(t)) e^{B(t)-\frac{1}{2}t} \right] \\ &= \int_{\Omega} f(B(t) - \alpha(t)) e^{B(t)-\frac{1}{2}t} d\mathbb{P}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Tomando el cambio de variable $y = x - \alpha(t)$, es posible evaluar la última integral como sigue

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(B(t) - \alpha(t)) e^{B(t)-\frac{1}{2}t} d\mathbb{P} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \alpha(t)) e^{x-\frac{1}{2}t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{y+\alpha(t)-\frac{1}{2}t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(y+\alpha(t))^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{y+\alpha(t)-\frac{1}{2}t(2y\alpha(t)+\alpha(t)^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{\frac{1}{t}(t-\alpha(t))y - \frac{1}{2t}(t-\alpha(t)^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}y^2} dy \\ &= \int_{\Omega} f(B(t)) e^{\frac{1}{t}(t-\alpha(t))B(t) - \frac{1}{2t}(t-\alpha(t)^2)} d\mathbb{P}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

De (2.49) y (2.50)

$$\int_{\Omega} f(B(t) - \alpha(t)) e^{B(1)-\frac{1}{2}} d\mathbb{P} = \int_{\Omega} f(B(t)) e^{\frac{1}{t}(t-\alpha(t))B(t) - \frac{1}{2t}(t-\alpha(t)^2)} d\mathbb{P}. \quad (2.51)$$

En particular, tomando $\alpha(t) = t$ en (2.51) obtenemos que

$$\int_{\Omega} f(B(t) - t) d\mathbb{S} = \int_{\Omega} f(B(t)) d\mathbb{P}.$$

□

La fórmula en (2.48) involucra el cambio de media de probabilidad de \mathbb{P} a \mathbb{S} . Considerando la función $f(x) = e^{i\lambda x}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, conseguimos que

$$\int_{\Omega} e^{i\lambda(B(t)-t)} d\mathbb{S} = \int_{\Omega} e^{i\lambda B(t)} d\mathbb{P} = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

esto implica que $B(t) - t$ tiene distribución normal con media 0 y varianza t con respecto a la medida de probabilidad \mathbb{S} .

2.9. Teorema de Girsanov

En secciones previas se ha visto que $\{B(t) - t; 0 \leq t \leq 1\}$, es un movimiento browniano con respecto a la medida de probabilidad dada por $d\mathbb{S} = e^{B(1) - \frac{1}{2}} d\mathbb{P}$. En la presente sección mostraremos que si $\{\varphi(t) = \int_0^t h(s) ds; 0 \leq t \leq T\}$, con $h \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0, T])$ satisface (2.45), entonces $W(t) = B(t) - \varphi(t)$ es un movimiento browniano con respecto a la medida de probabilidad $d\mathbb{S} = \varepsilon_h(T) d\mathbb{P}$.

Lema 2.9.1. *Sea $\theta \in L^1(\mathbb{P})$ no negativa tal que $d\mu = \theta d\mathbb{P}$ define una medida de probabilidad. Entonces, para cualquier σ -álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ y $X \in L^1(\mu)$ se verifica que*

$$\mathbb{E}_{\mu} [X | \mathcal{G}] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [X\theta | \mathcal{G}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\theta | \mathcal{G}]}, \quad \mu\text{-c.s.}$$

Demostración. Nótese que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [|X\theta|] = \int_{\Omega} |X\theta| d\mathbb{P} = \int_{\Omega} |X| d\mu < \infty$, de manera que la esperanza condicional $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [X\theta | \mathcal{G}]$ está definida.

Para cada $G \in \mathcal{G}$, de la definición de μ se tiene que

$$\int_G \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [X\theta | \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_G X\theta d\mathbb{P} = \int_G X d\mu = \int_G \mathbb{E}_{\mu} [X | \mathcal{G}] d\mu. \quad (2.52)$$

Además, escribimos $d\mu = \theta d\mathbb{P}$ y por la condición (2) de la Definición A.1.1 y la

propiedad (4) de la esperanza condicional del Apéndice A, se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \int_G \mathbb{E}_\mu [X|\mathcal{G}] d\mu &= \int_G \mathbb{E}_\mu [X|\mathcal{G}] \theta d\mathbb{P} \\
 &= \int_G \mathbb{E}_\mathbb{P} [\mathbb{E}_\mu [X|\mathcal{G}] \theta | \mathcal{G}] d\mathbb{P} \\
 &= \int_G \mathbb{E}_\mu [X|\mathcal{G}] \mathbb{E}_\mathbb{P} [\theta | \mathcal{G}] d\mathbb{P}.
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Luego, (2.52) y (2.53) implican que

$$\int_G \mathbb{E}_\mathbb{P} [X\theta | \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_G \mathbb{E}_\mu [X|\mathcal{G}] \mathbb{E}_\mathbb{P} [\theta | \mathcal{G}] d\mathbb{P}.$$

De manera que $\mathbb{E}_\mu [X|\mathcal{G}] = \frac{\mathbb{E}_\mathbb{P} [X\theta | \mathcal{G}]}{\mathbb{E}_\mathbb{P} [\theta | \mathcal{G}]}$. □

Suponga que $h(t)$ es un proceso estocástico en $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0, T])$ que satisface la condición (2.45), entonces el proceso exponencial $\varepsilon_h(t)$ es una \mathbb{P} -martingala. Sea \mathbb{S} la medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) dada por $d\mathbb{S} = \varepsilon_h(T)d\mathbb{P}$, es decir,

$$\mathbb{S}(A) = \int_A \varepsilon_h(T) d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Lema 2.9.2. *Sea $h \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0, T])$ que verifica la condición (2.45). Entonces un proceso estocástico $\{X(t); 0 \leq t \leq T\}$, $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptado, es una \mathbb{S} -martingala si y sólo si $X(t)\varepsilon_h(t)$ es una \mathbb{P} -martingala.*

Demostración. La restricción de \mathbb{S} a \mathcal{F}_t es la medida de probabilidad $\varepsilon_h(t)d\mathbb{P}$. Esto implica que $X(t)\varepsilon_h(T)$ es \mathbb{P} -integrable si y sólo si $X(t)\varepsilon_h(t)$ es \mathbb{P} -integrable. Dado que $d\mathbb{S} = \varepsilon_h(T)d\mathbb{P}$, $X(t)$ es \mathbb{S} -integrable si y sólo si $X(t)\varepsilon_h(t)$ es \mathbb{P} -integrable. Esto proporciona la integrabilidad de lo que sigue, por tomar esperanza condicional. Suponga que $X(t)\varepsilon_h(t)$ es una \mathbb{P} -martingala y sea $s \leq t$, aplicando el Lema 2.9.1, con $\mu = \mathbb{S}$ y $\theta = \varepsilon_h(T)$ se obtiene que

$$\mathbb{E}_\mathbb{S} [X(t) | \mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}_\mathbb{P} [X(t)\varepsilon_h(T) | \mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}_\mathbb{S} [\varepsilon_h(T) | \mathcal{F}_s]}. \tag{2.54}$$

Por el Teorema 2.7.2, $\varepsilon_h(t)$ es una \mathbb{P} -martingala, así que $\mathbb{E}_\mathbb{P} [\varepsilon_h(T) | \mathcal{F}_s] = \varepsilon_h(s)$.

Por otro lado, usando las propiedades de esperanza condicional se verifica que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_\mathbb{P} [X(t)\varepsilon_h(T) | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_\mathbb{P} [\mathbb{E}_\mathbb{P} [X(t)\varepsilon_h(T) | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E}_\mathbb{P} [X(t)\mathbb{E}_\mathbb{P} [\varepsilon_h(T) | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E}_\mathbb{P} [X(t)\varepsilon_h(t) | \mathcal{F}_s] \\
 &= X(s)\varepsilon_h(s), \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

CAPÍTULO 2. FÓRMULA DE ITÔ Y ALGUNAS APLICACIONES

De (2.54) y (2.55) se concluye que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{S}} [X(t)|\mathcal{F}_s] = \frac{X(s)\varepsilon_h(s)}{\varepsilon_h(s)} = X(s).$$

Por lo tanto, $X(t)$ es una \mathbb{S} -martingala.

Suponga ahora que $X(t)$ es una \mathbb{S} -martingala y sea $s \leq t$. Entonces, de (2.55) se consigue que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [X(t)\varepsilon_h(T)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [X(t)\varepsilon_h(t)|\mathcal{F}_s]. \quad (2.56)$$

Además, por el Lema 2.9.1 se tiene que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [X(t)\varepsilon_h(T)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{\mathbb{S}} [X(t)|\mathcal{F}_s] \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\varepsilon_h(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)\varepsilon_h(s). \quad (2.57)$$

De (2.56) y (2.57),

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [X(t)\varepsilon_h(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)\varepsilon_h(s).$$

Por lo tanto, $X(t)\varepsilon_h(t)$ es una \mathbb{P} -martingala. □

Para un proceso estocástico $h(t)$ en el espacio $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0, t])$, considérese la siguiente traslación de un movimiento browniano

$$W(t) = B(t) - \int_0^t h(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Teorema 2.9.3. *Teorema de Girsanov.*

Sea $h \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2([0, T]))$ y suponga que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\varepsilon_h(t)] = 1, \forall t \in [0, T]$. Entonces el proceso estocástico

$$W(t) = B(t) - \int_0^t h(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

es un movimiento browniano con respecto a la medida de probabilidad $d\mathbb{S} = \varepsilon_h(T)d\mathbb{P}$.

Demostración. Note que las medidas de probabilidad \mathbb{P} y \mathbb{S} son equivalentes, entonces $\mathbb{S}[\{W(0) = 0\}] = 1$ y $W(t)$ es un proceso estocástico continuo. Aplicando la fórmula de Itô a $\varepsilon_h(t)$ se obtiene que

$$d\varepsilon_h(t) = h(t)\varepsilon_h(t)dB(t).$$

Luego, aplicando la fórmula de Itô del producto (2.8), se consigue que

$$\begin{aligned} d\{W(t)\varepsilon_h(t)\} &= \{dW(t)\}\varepsilon_h(t) + W(t)\{d\varepsilon_h(t)\} + \{dW(t)\}\{d\varepsilon_h(t)\} \\ &= \{dB(t) - h(t)dt\}\varepsilon_h(t) + W(t)h(t)\varepsilon_h(t)dB(t) + h(t)\varepsilon_h(t)dt \\ &= \{1 + h(t)W(t)\}\varepsilon_h(t)dB(t), \end{aligned}$$

equivalentemente

$$W(t)\varepsilon_h(t) = \int_0^t \{1 + h(s)W(s)\}\varepsilon_h(s)dB(s). \quad (2.58)$$

Por el Teorema 1.5.2, el proceso estocástico $W(t)\varepsilon_h(t)$, $0 \leq t \leq T$, es una martingala local. Además, $W(t)\varepsilon_h(t)$ es una \mathbb{P} -martingala.

Por el Lema 2.9.2, $W(t)$ es una \mathbb{S} -martingala. En la derivación de (2.58), reemplazando $W(t)$ por $W(t)^2 - t$ se consigue que

$$(W(t)^2 - t)\varepsilon_h(t) = \int_0^t (2W(s) + (W(s)^2 - s))\varepsilon_h(s)dB(s).$$

Por lo tanto, $(W(t)^2 - t)\varepsilon_h(t)$ es una \mathbb{P} -martingala por la misma razón que el proceso estocástico $W(t)\varepsilon_h(t)$ lo es. Por el Lema 2.9.2, $W(t)^2 - t$ es una \mathbb{S} -martingala. Más aún, la descomposición de Doob-Meyer de $W(t)^2$ está dada por

$$W(t)^2 = (W(t)^2 - t) + t.$$

Lo cual implica que $\langle W \rangle_t = t$, para cada t , \mathbb{S} -c.s. Por el Teorema 2.5.1, $W(t)$ es un movimiento browniano con respecto a \mathbb{S} . □

Corolario 2.9.4. *Sea f cualquier función medible tal que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} [|f(B(t))|] < \infty$. Supongamos que se verifican las condiciones del Teorema 2.9.3 (Teorema de Girsanov), entonces*

$$\int_{\Omega} f \left(B(t) - \int_0^t h(s)ds \right) d\mathbb{S} = \int_{\Omega} f(B(t))d\mathbb{P}.$$

Capítulo 3

Integrales múltiples Wiener-Itô

Recordemos que dado $B(t)$ un movimiento browniano, la integral de Wiener $I(f) = \int_a^b f(t)dB(t)$ está definida para funciones deterministas $f \in L^2[a, b]$. Además, la variable aleatoria $I(f)$ tiene distribución normal con media 0 y varianza $\int_a^b f(t)^2 dt$. En el cálculo ordinario, después de estudiar la integral unidimensional se estudian integrales dobles, lo que nos induce a buscar una forma de dar sentido a la integral doble

$$\int_a^b \int_a^b f(t, s)dB(t)dB(s), \quad (3.1)$$

para una función determinista $f(t, s) \in L^2([a, b] \times [a, b])$. Para conseguir lo anterior se consideran las ideas propuestas por Wiener e Itô.

Propuesta de Wiener

El proceso para definir la integral (3.1) consta de dos pasos, primero definir la integral para funciones escalonadas, después definir la integral para funciones en $L^2([a, b] \times [a, b])$ por aproximación de funciones escalonadas.

Suponga que f es una función escalonada dada por

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} 1_{[t_{i-1}, t_i) \times [s_{j-1}, s_j)},$$

donde $\{a = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$ y $\{a = s_0, s_1, \dots, s_{m-1}, s_m = b\}$ son particiones de $[a, b]$. Entonces la integral doble de Wiener de f se define por

$$(W) \int_a^b \int_a^b f(t, s)dB(t)dB(s) := \sum_{i,j} a_{ij} (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(s_j) - B(s_{j-1})).$$

Considere $f = 1_{[0,1] \times [0,1]}$, de modo que

$$(W) \int_a^b \int_a^b f(t,s) dB(t) dB(s) = (W) \int_0^1 \int_0^1 1 dB(t) dB(s) = B(1)^2. \quad (3.2)$$

La integral doble de Wiener tiene la propiedad de separación, es decir,

$$(W) \int_a^b \int_a^b f(t)g(s) dB(t) dB(s) = (W) \int_a^b f(t) dB(t) \int_a^b g(s) dB(s),$$

donde las integrales de la derecha de la igualdad son integrales de Wiener. En general, la esperanza de una integral doble Wiener es distinta de cero, por ejemplo en (3.2), tomando esperanza observamos que $\mathbb{E}[B(1)^2] = 1$. De modo que la construcción de la integral doble en la idea de Wiener presenta el inconveniente de que podría ser no ortogonal a las funciones constantes.

Propuesta de Itô

Al igual que en la propuesta de Wiener, se consideran dos pasos para definir una integral doble Wiener-Itô, el primer paso es definir la integral para funciones escalonadas off-diagonal y el segundo paso es aproximar una función en $L^2([a, b] \times [a, b])$ por funciones escalonadas off-diagonal y tomar el límite de la correspondiente integral.

Para motivar la noción de una función escalonada off-diagonal, considere la situación de definir la integral doble $\int_0^1 \int_0^1 1 dB(t) dB(s)$. Sea $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0, 1]$. Tome la partición del cuadrado unitario $[0, 1]^2$, dada por

$$[0, 1] \times [0, 1] = \bigcup_{i,j=1}^n [t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j]. \quad (3.3)$$

Entonces, se consigue la siguiente suma de Riemann para el integrando $f = 1$

$$\sum_{i,j=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1})) = \left[\sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1})) \right]^2 = B(1)^2,$$

que coincide con el valor de la integral doble de Wiener (3.2).

La idea clave de Itô es remover los cuadrados diagonales de $[0, 1] \times [0, 1]$ en (3.3),

$$[0, 1] \times [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^n [t_{i-1}, t_i] \times [t_{i-1}, t_i] = \bigcup_{i \neq j}^n [t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j]. \quad (3.4)$$

Luego, utilizando los cuadrados restantes, obtenidos en (3.4) para formar la suma de incrementos del movimiento browniano,

$$S_n = \sum_{i \neq j} (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1})). \quad (3.5)$$

Además,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i,j=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1})) - \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \\ &= B(1)^2 - \sum_{i=1}^n (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Recordemos que el límite cuando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ de la última suma en (3.6) es la variación cuadrática de $B(t)$ en el intervalo $[0, 1]$ y es igual a 1. Por lo tanto,

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} S_n = B(1)^2 - 1, \text{ en } L^2(\Omega).$$

El límite anterior se define como la integral doble Wiener-Itô de $f = 1$,

$$\int_0^1 \int_0^1 1 dB(t) dB(s) = B(1)^2 - 1, \quad (3.7)$$

que es distinto del valor de (3.2).

Por otra parte, escribiendo la doble integral como una integral iterada se consigue

$$\int_0^1 \int_0^1 1 dB(t) dB(s) = \int_0^1 \left[\int_0^1 1 dB(s) \right] dB(t) = \int_0^1 B(1) dB(t). \quad (3.8)$$

Sin embargo, la última integral de (3.8) no está definida como una integral de Itô, ya que $B(1)$ no es adaptada con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$.

Otra manera de escribir la integral doble es expresarla como integrales iteradas

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 1 dB(t) dB(s) &= 2 \iint_{0 \leq s \leq t \leq 1} 1 dB(t) dB(s) \\ &= 2 \int_0^1 \left[\int_0^t 1 dB(s) \right] dB(t) \\ &= 2 \int_0^1 B(t) dB(t) \\ &= B(1)^2 - 1, \end{aligned} \quad (3.9)$$

la cual es la integral doble en (3.7).

Para saber cómo definir la integral doble Wiener-Itô, nos enfocaremos en la suma (3.5). Esta es la integral doble de la siguiente función escalonada off-diagonal

$$f_n = \sum_{i \neq j} 1_{[t_{i-1}, t_i) \times [t_{j-1}, t_j)}.$$

Observe que cuando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$,

$$\int_0^1 \int_0^1 |1 - f_n(t, s)|^2 dt ds = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \leq \|\Delta_n\| (1 - 0) \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, la función $f = 1$ es aproximada por la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones escalonadas off-diagonal que son compatibles con cuadrados fuera de la línea diagonal.

En la siguiente sección se presentará la construcción de la integral doble de manera formal, que está basada en las ideas de Wiener e Itô. En secciones posteriores, generalizaremos a integrales múltiples con ayuda de los Polinomios de Hermite y del caos homogéneo.

3.1. Integrales dobles Wiener-Itô

El objetivo de la presente sección es definir la integral doble Wiener-Itô

$$\int_a^b \int_a^b f(t, s) dB(t) dB(s), \text{ para } f \in L^2([a, b] \times [a, b]).$$

Sea $D := \{(t, s) \in [a, b] \times [a, b]; t = s\}$ que denota la diagonal del cuadrado $[a, b] \times [a, b]$. Por un rectángulo en esta sección, nos referimos a un subconjunto de $[a, b] \times [a, b]$ de la forma $[t_1, t_2) \times [s_1, s_2)$.

Definición 3.1.1. Una función escalonada off-diagonal sobre el cuadrado $[a, b] \times [a, b]$ se define como una función de la forma

$$f = \sum_{i \neq j} a_{ij} 1_{[t_{i-1}, t_i) \times [t_{j-1}, t_j)}, \tag{3.10}$$

donde $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$

Note que una función escalonada off-diagonal desaparece en la diagonal D . Por lo tanto, la función $f = 1$ en $[a, b] \times [a, b]$ no es una función escalonada off-diagonal. Si $A = [t_1, t_2) \times [s_1, s_2)$ es un rectángulo disjunto de la diagonal D , entonces 1_A

puede ser escrita en forma de la ecuación (3.10), tomando el conjunto $\{t_1, t_2, s_1, s_2\}$ como los puntos de una partición de $[a, b]$. De manera que 1_A es una función escalonada off-diagonal.

Más generalmente, suponga que A_1, A_2, \dots, A_n son rectángulos disjuntos de la diagonal D , entonces la función $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ es una función escalonada off-diagonal para cualesquiera $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Este hecho implica que si f y g son funciones escalonadas off-diagonal, entonces $af + bg$ es una función escalonada off-diagonal para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, el conjunto de funciones escalonadas off-diagonal es un espacio vectorial.

Para una función escalonada off-diagonal f dada por (3.10), se define la integral doble Wiener-Itô, que denotamos por $I_2(\cdot)$, como sigue

$$I_2(f) := \sum_{i \neq j} a_{ij} (B(t_i) - B(t_{i-1})). \quad (3.11)$$

Note que la representación de una función escalonada off-diagonal f en (3.10) no es única, pero es fácil ver que $I_2(f)$ está definida de manera única.

Además, para cualesquiera f y g funciones escalonadas off-diagonal y $a, b \in \mathbb{R}$,

$$I_2(af + bg) = aI_2(f) + bI_2(g),$$

es decir, I_2 es lineal.

Definición 3.1.2. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función, la simetrización de f , denotada por \hat{f} , se define como

$$\hat{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}),$$

donde la suma es sobre todas las permutaciones σ del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

En particular, la simetrización $\hat{f}(t, s)$ de una función $f(t, s)$ está definida por

$$\hat{f}(t, s) = \frac{1}{2} (f(t, s) + f(s, t)).$$

Observación 3.1.3. 1. \hat{f} es una función simétrica, además si f es una función simétrica entonces $\hat{f} = f$.

2. En general, $\|\hat{f}\| \leq \|f\|$, la desigualdad estricta puede ocurrir, por ejemplo considérese la función $f(t, s) = t$ en $[0, 1] \times [0, 1]$, la simetrización de f es

$$\hat{f}(t, s) = \frac{1}{2}(t + s) \text{ y } \|\hat{f}\|^2 = \int_0^1 \int_0^1 \hat{f}(t, s)^2 dt ds = \frac{7}{24}.$$

Por otra parte, $\|f\|^2 = \int_0^1 \int_0^1 f(t, s)^2 dt ds = \frac{1}{3}$, entonces ocurre que $\|\hat{f}\| < \|f\|$.

3. La operación de simetrización es lineal, esto es,

$$\widehat{(af + bg)} = a\hat{f} + b\hat{g},$$

para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Si f es una función escalonada off-diagonal, entonces \hat{f} es una función escalonada off-diagonal.

Lema 3.1.4. Sea f una función escalonada off-diagonal. Entonces $I_2(f) = I_2(\hat{f})$.

Demostración. Se sabe que I_2 y la operación de simetrización son lineales, de modo que es suficiente probar el lema para el caso en que $f = 1_{[t_1, t_2] \times [s_1, s_2]}$ con $[t_1, t_2] \cap [s_1, s_2] = \emptyset$. La simetrización de f está dada por

$$\hat{f} = \frac{1}{2} (1_{[t_1, t_2] \times [s_1, s_2]} + 1_{[s_1, s_2] \times [t_1, t_2]}).$$

Por la definición de I_2 en (3.11) se tiene que

$$\begin{aligned} I_2(f) &= (B(t_2) - B(t_1))(B(s_2) - B(s_1)); \\ I_2(\hat{f}) &= \frac{1}{2} [(B(t_2) - B(t_1))(B(s_2) - B(s_1)) + (B(s_2) - B(s_1))(B(t_2) - B(t_1))] \\ &= (B(t_2) - B(t_1))(B(s_2) - B(s_1)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $I_2(f) = I_2(\hat{f})$. □

Lema 3.1.5. Sea f una función escalonada off-diagonal, entonces $\mathbb{E}[I_2(f)] = 0$ y

$$\mathbb{E}[I_2(f)^2] = 2 \int_a^b \int_a^b \hat{f}(t, s)^2 dt ds. \quad (3.12)$$

Demostración. Sea f una función escalonada off-diagonal, entonces $I_2(f)$ está dada por (3.11). Observe que los intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ y $[t_{j-1}, t_j]$ son disjuntos cuando $i \neq j$, de modo que tomando la esperanza en (3.11) se concluye que $\mathbb{E}[I_2(f)] = 0$. Para probar (3.12), supongamos que f es simétrica, para este caso, $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i \neq j$. Escribimos $\xi_i = B(t_i) - B(t_{i-1})$, entonces

$$I_2(f) = \sum_{i \neq j} a_{ij} \xi_i \xi_j = 2 \sum_{i < j} a_{ij} \xi_i \xi_j.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\mathbb{E} [I_2(f)^2] = 4 \sum_{i < j} \sum_{p < q} a_{ij} a_{pq} \mathbb{E} [\xi_i \xi_j \xi_p \xi_q]. \quad (3.13)$$

Sea $i < j$ fijo, observando la posición de los intervalos podemos ver fácilmente que si $p \neq i$ entonces $\mathbb{E} [\xi_i \xi_j \xi_p \xi_q] = 0$ para todo $q > p$ y si $p \neq j$, entonces $\mathbb{E} [\xi_i \xi_j \xi_p \xi_q] = 0$ para todo $p < q$.

Por lo tanto, para $i < j$ fijo, la suma sobre $p < q$ en (3.13) se reduce únicamente a un término dado por $p = i$ y $q = j$, de manera que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [I_2(f)^2] &= 4 \sum_{i < j} a_{ij}^2 \mathbb{E} [\xi_i^2 \xi_j^2] \\ &= 4 \sum_{i < j} a_{ij} (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) \\ &= 2 \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) \\ &= 2 \int_a^b \int_a^b f(t, s)^2 dt ds. \end{aligned}$$

Finalmente, para cualquier función escalonada off-diagonal f , por el Lema 3.1.4 se tiene que $I_2(f) = I_2(\hat{f})$. Por lo tanto,

$$\mathbb{E} [I_2(f)^2] = \mathbb{E} [I_2(\hat{f})^2] = 2 \int_a^b \int_a^b f(t, s)^2 dt ds.$$

□

Veamos la aproximación por funciones escalonadas off-diagonal dada por el siguiente lema.

Lema 3.1.6. *Sea f una función en $L^2([a, b] \times [a, b])$. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones escalonadas off-diagonal tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \int_a^b |f(t, s) - f_n(t, s)|^2 dt ds = 0. \quad (3.14)$$

Demostración. Por el Lema 3.1.5, $\mathbb{E} [I_2(f)^2] = 2\|\hat{f}\|^2$ para cualquier función escalonada off-diagonal f y como $\|\hat{f}\| \leq \|f\|$ se verifica que $\mathbb{E} [I_2(f)^2] \leq 2\|f\|^2$. La desigualdad anterior muestra que podemos extender el mapeo I_2 a $L^2([a, b] \times [a, b])$ siempre que cada función en $L^2([a, b] \times [a, b])$ pueda ser aproximada por una sucesión de funciones escalonadas off-diagonal.

Suponga que f es una función en $L^2([a, b] \times [a, b])$, denotemos por D_δ al conjunto de puntos en $[a, b] \times [a, b]$ que tienen distancia menor que δ de la diagonal D . Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\iint_{D_\delta} f(t, s)^2 dt ds < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.15)$$

Sea $D_\delta^c = ([a, b] \times [a, b]) \setminus D_\delta$ y considérese la restricción de f a D_δ^c . Entonces, existe una función ϕ de la forma $\phi = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ con rectángulos $A_i \subset D_\delta^c$ para todo $1 \leq i \leq n$ tal que

$$\iint_{D_\delta^c} |f(t, s) - \phi(t, s)|^2 dt ds < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.16)$$

Observemos que la función ϕ solo está definida en D_δ^c y desaparece en D , de manera que considerando (3.15) y (3.16) se obtiene que

$$\int_a^b \int_a^b |f(t, s) - \phi(t, s)|^2 < \varepsilon.$$

Por lo tanto, ϕ es una función escalonada off-diagonal. □

Para extender el mapeo I_2 al espacio $L^2([a, b] \times [a, b])$, sea $f \in L^2([a, b] \times [a, b])$, por el Lema 3.1.6 existe una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones escalonadas off-diagonal que convergen a f en este espacio. Entonces de la linealidad de I_2 y por el Lema 3.1.5, se tiene que

$$\mathbb{E} \left[(I_2(f_n) - I_2(f_m))^2 \right] = \mathbb{E} \left[(I_2(f_n - f_m))^2 \right] = 2 \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|^2 \leq 2 \|f_n - f_m\|^2. \quad (3.17)$$

La última desigualdad de (3.17), converge a 0 cuando $n, m \rightarrow \infty$. Por lo tanto, la sucesión $\{I_2(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2(\Omega)$.

Entonces, defina

$$I_2(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} I_2(f_n), \text{ en } L^2(\Omega). \quad (3.18)$$

Es fácil ver que $I_2(f)$ está bien definida, es decir, que no depende de la selección de la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Definición 3.1.7. Sea $f \in L^2([a, b] \times [a, b])$. El límite $I_2(f)$ en (3.18) es llamada la integral doble Wiener-Itô de f .

Usaremos $\int_a^b \int_a^b f(t, s) dB(t) dB(s)$ para denotar la integral doble Wiener-Itô $I_2(f)$ de f .

Los Lemas 3.1.4 y 3.1.5 pueden ser extendidos para funciones en $L^2([a, b] \times [a, b])$, de manera que, usando la aproximación en el Lema 3.1.6 y la Definición 3.1.7 se establece la extensión en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.8. Sea $f(t, s) \in L^2([a, b] \times [a, b])$. Entonces

1. $I_2(f) = I_2(\hat{f})$, donde \hat{f} es la simetrización de f .
2. $\mathbb{E}[I_2(f)] = 0$.
3. $\mathbb{E}[I_2(f)^2] = 2\|\hat{f}\|^2$, donde $\|\cdot\|$ es la norma sobre $L^2([a, b] \times [a, b])$.

Existe una relación importante entre las integrales dobles Wiener-Itô y las integrales Iteradas Itô, que está dada por el siguiente teorema.

Teorema 3.1.9. Sea $f(t, s) \in L^2([a, b] \times [a, b])$. Entonces

$$\int_a^b \int_a^b f(t, s) dB(t) dB(s) = 2 \int_a^b \left[\int_a^t \hat{f}(t, s) dB(s) \right] dB(t), \quad (3.19)$$

donde \hat{f} es la simetrización de f .

Antes de abordar la demostración, observemos que la integral interior $X_t = \int_a^t \hat{f}(t, s) dB(s)$ es una integral de Wiener con $\mathbb{E}[X_t^2] = \int_a^t \hat{f}(t, s)^2 ds$, de manera que

$$\int_a^b \mathbb{E}[X_t^2] dt = \int_a^b \left[\int_a^t \hat{f}(t, s)^2 ds \right] dt = \frac{1}{2} \|\hat{f}\|^2 \leq \frac{1}{2} \|f\|^2 < \infty,$$

lo cual muestra que el proceso estocástico X_t pertenece a $L_{ad}([a, b] \times \Omega)$ y la integral $\int_a^b X_t dB(t)$ es una integral de Itô.

Demostración. Considérese el caso en que $f = 1_{[t_1, t_2] \times [s_1, s_2]}$ con $[t_1, t_2] \cap [s_1, s_2] = \emptyset$. La simetrización de f está dada por

$$\hat{f} = \frac{1}{2} (1_{[t_1, t_2] \times [s_1, s_2]} + 1_{[s_1, s_2] \times [t_1, t_2]}).$$

Sin pérdida de generalidad suponga que $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ (para el otro caso $t_1 < t_1 < s_1 < s_2$, solo intercambiamos $[s_1, s_2]$ con $[t_1, t_2]$, por definición de $I_2(f)$)

$$\int_a^b \int_a^b f(t, s) dB(t) dB(s) = (B(t_2) - B(t_1)) (B(s_2) - B(s_1)). \quad (3.20)$$

Por otro lado, se consigue

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[\int_a^t \hat{f}(t, s) dB(s) \right] dB(t) &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{s_1}^{s_2} 1 dB(s) \right] dB(t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (B(s_2) - B(s_1)) dB(t) \\ &= \frac{1}{2} (B(s_2) - B(s_1)) (B(t_2) - B(t_1)). \end{aligned} \quad (3.21)$$

De manera que de (3.20) y (3.21) se obtiene (3.18).

Luego por la linealidad de I_2 y de la operación de simetrización, (3.18) se cumple para cualquier función escalonada off-diagonal. Finalmente, el teorema se sigue del Lema 3.1.6. \square

La generalización de la integral doble Wiener-Itô se realizará más adelante, después de estudiar el caos homogéneo.

3.2. Polinomios de Hermite

Sea ν la medida Gaussiana con media 0 y varianza ρ , esto es,

$$d\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-\frac{1}{2\rho}x^2} dx.$$

Considere la sucesión $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ de monomios en el espacio de Hilbert real $L^2(\Omega)$. Aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a esta sucesión, en orden de incremento de potencias, se obtienen los polinomios ortogonales $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$ en el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$, donde $P_0(x) = 1$ y $P_n(x)$ es un polinomio de grado n , $n \geq 1$, con coeficiente principal 1.

Para la función $\theta(t, x) = e^{tx}$, la esperanza de $\theta(t, \cdot)$ con respecto a la medida ν está dada por

$$\mathbb{E}_\nu [\theta(t, x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-\frac{1}{2\rho}x^2} dx = e^{\frac{1}{2}\rho t^2}. \quad (3.22)$$

La renormalización multiplicativa $\psi(t, x)$ de $\theta(t, x)$ está definida por

$$\psi(t, x) = \frac{\theta(t, x)}{\mathbb{E}_\nu [\theta(t, x)]} = e^{tx - \frac{1}{2}\rho t^2}.$$

Es posible expandir la función $\psi(t, x)$ como una serie de potencias en t . Note que los coeficientes de t^n en la expansión en serie depende de n , x y ρ , denotemos por $\frac{H_n(x; \rho)}{n!}$ a tales coeficientes. Entonces, tenemos la identidad

$$e^{tx - \frac{1}{2}\rho t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x; \rho)}{n!} t^n. \quad (3.23)$$

Por otro lado, usando la serie de potencias $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ es posible encontrar los

CAPÍTULO 3. INTEGRALES MÚLTIPLES WIENER-ITÔ

coeficientes de t^n , de manera que escribimos

$$\begin{aligned} e^{tx - \frac{1}{2}\rho t^2} &= e^{tx} e^{-\frac{1}{2}\rho t^2} \\ &= \left[1 + xt + \cdots + \frac{x^2}{n!} t^n + o(h) \right] \left[1 + \frac{-\rho}{2} t^2 + \cdots + \frac{(-\rho)^m}{m! 2^m} t^{2m} + o(h) \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Realizando el producto de la última igualdad en (3.24), se obtiene que el coeficiente de t^n está dado por

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \frac{(-\rho)}{2} + \cdots + \frac{x^{n-2k}}{(n-2k)!} \frac{(-\rho)^k}{k! 2^k} + \pi(n, x), \quad (3.25)$$

donde

$$\pi(n, x) = \begin{cases} \frac{x}{\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)!} \frac{(-\rho)^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)! 2^{\frac{n-1}{2}}}, & \text{n es impar;} \\ \frac{(-\rho)^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}! 2^{\frac{n}{2}}}, & \text{n es par.} \end{cases} \quad (3.26)$$

Observe que si n es impar $\pi(n, x)$ está en términos de x , mientras que si n es par $\pi(n, x)$ es constante en x .

Por (3.23) el coeficiente de t^n está dado por $\frac{H_n(x; \rho)}{n!}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} H_n(x; \rho) &= n! \left[\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \frac{(-\rho)}{2} + \cdots + \frac{x^{n-2k}}{(n-2k)!} \frac{(-\rho)^k}{k! 2^k} + \pi(n, x) \right] \\ &= x^n + \frac{n!}{(n-2)! 2} (-\rho) x^{n-2} + \cdots + \frac{n!}{(n-2k)! k! 2^k} (-\rho)^k x^{n-2k} + \pi(n, x). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Además,

$$\frac{n!}{(n-2k)! k! 2^k} = \binom{n}{2k} (2k-1)!!, \quad (3.28)$$

donde $(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3) \cdots 3 \cdot 1$ y por convención $(-1)!! = 1$. La expresión en (3.28) representa el número de maneras de escoger k pares de un conjunto de n distintos objetos.

Ahora, usando (3.28) es posible expresar $H_n(x; \rho)$ como sigue

$$H_n(x; \rho) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (2k-1)!! (-\rho)^k x^{n-2k}. \quad (3.29)$$

Note que $H_n(x; \rho)$ es un polinomio en x de grado n con coeficiente principal 1.

Definición 3.2.1. El polinomio $H_n(x; \rho)$ en (3.29) es llamado el polinomio de Hermite de grado n con parámetro ρ .

Teorema 3.2.2. Sea $H_n(x; \rho)$ el polinomio de Hermite de grado n . Entonces

$$H_n(x; \rho) = (-\rho)^n e^{\frac{x^2}{2\rho}} D_x^{(n)} e^{-\frac{x^2}{2\rho}},$$

donde D_x es el operador diferenciación en la variable x .

Demostración. Sea $H_n(x; \rho)$ el polinomio de Hermite de grado n , observe que el exponente del lado izquierdo de (3.23), se puede escribir como

$$tx - \frac{1}{2}\rho t^2 = -\frac{1}{2}\rho \left(t - \frac{x}{\rho}\right)^2 + \frac{x^2}{2\rho}.$$

De (3.23) se obtiene

$$e^{\frac{x^2}{2\rho}} e^{-\frac{1}{2}\rho \left(t - \frac{x}{\rho}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x; \rho)}{n!} t^n. \quad (3.30)$$

Diferenciando n veces ambos lados de (3.30) en la variable t y haciendo $t = 0$, se consigue

$$H_n(x; \rho) = e^{\frac{x^2}{2\rho}} \left(D_t^{(n)} e^{-\frac{1}{2}\rho \left(t - \frac{x}{\rho}\right)^2} \right) \Big|_{t=0}. \quad (3.31)$$

Note que $D_t^{(n)} e^{-\frac{1}{2}\rho \left(t - \frac{x}{\rho}\right)^2} = (-\rho)^n D_x^{(n)} e^{-\frac{1}{2}\rho \left(t - \frac{x}{\rho}\right)^2}$. Por lo tanto, de (3.31)

$$\begin{aligned} H_n(x; \rho) &= e^{\frac{x^2}{2\rho}} \left((-\rho)^n D_x^{(n)} e^{-\frac{1}{2}\rho \left(t - \frac{x}{\rho}\right)^2} \right) \Big|_{t=0} \\ &= (-\rho)^n e^{\frac{x^2}{2\rho}} D_x^{(n)} e^{-\frac{x^2}{2\rho}}. \end{aligned}$$

□

Observación 3.2.3. Si se verifica que los polinomios $H_n(x; \rho)$, $n = 0, 1, \dots$ son ortogonales, entonces podemos concluir que $H_n(x; \rho) = P_n(x)$.

Teorema 3.2.4. Sea ν la medida Gaussiana con media 0 y varianza ρ . Entonces los polinomios de Hermite $H_n(x; \rho)$, para $n \geq 0$, son ortogonales en $L^2(\Omega)$. Además, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x; \rho)^2 d\nu(x) = n! \rho^n, \quad n \geq 0. \quad (3.32)$$

Demostración. Sean $s, t \in \mathbb{R}$, por (3.23) $e^{tx - \frac{1}{2}\rho t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x; \rho)}{n!} t^n$ y $e^{sx - \frac{1}{2}\rho s^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(x; \rho)}{m!} s^m$. Entonces

$$e^{(t+s)x - \frac{1}{2}\rho(t^2+s^2)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{t^n s^m}{m!n!} H_n(x; \rho) H_m(x; \rho). \quad (3.33)$$

Por (3.22)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t+s)x - \frac{1}{2}\rho(t^2+s^2)} d\nu(x) &= e^{-\frac{1}{2}\rho(t^2+s^2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t+s)x} d\nu(x) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\rho(t^2+s^2)} e^{\frac{1}{2}\rho(t+s)^2} \\ &= e^{\rho ts}. \end{aligned}$$

Integrando en ambos lado de (3.33) se obtiene

$$e^{\rho ts} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{s^m t^n}{m!n!} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x; \rho) H_n(x; \rho) d\nu(x). \quad (3.34)$$

Como el lado izquierdo de (3.34) es una función del producto de st , el coeficiente de $s^m t^n$ del lado derecho de (3.34) debe ser cero para cualesquiera m, n distintos, esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x; \rho) H_n(x; \rho) = 0, \quad \forall m \neq n. \quad (3.35)$$

Por lo tanto, los polinomios Hermite son ortogonales en $L^2(\Omega)$.

Además, de (3.34) se deduce que

$$e^{\rho st} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(st)^n}{(n!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x; \rho)^2 d\nu(x).$$

Expresando a $e^{\rho st}$ en su expansión en serie de potencias tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} (st)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(st)^n}{(n!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x; \rho)^2 d\nu(x).$$

Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} (st)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(st)^n}{(n!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x; \rho)^2 d\nu(x) = 0.$$

Luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(st)^2}{n!} \left(\rho^n - \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x; \rho)^2 d\nu(x) \right) \right] = 0,$$

De manera que

$$\rho^n - \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x; \rho)^2 d\nu(x) = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x; \rho)^2 d\nu(x) = \rho^n n!, \quad \forall n \geq 0.$$

□

Por el Teorema 3.2.4, la colección $\left\{ \frac{H_n(x; \rho)}{\sqrt{n! \rho^n}}; n = 0, 1, 2, \dots \right\}$ es un sistema ortonormal. Además, es posible mostrar que su complemento ortogonal es $\{0\}$, de modo que esta colección forma una base ortonormal para $L^2(\Omega)$. Entonces obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.5. *Sea ν la medida Gaussiana con media 0 y varianza ρ . Entonces cualquier función f en $L^2(\Omega)$ tiene una única expansión en serie*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{H_n(x; \rho)}{\sqrt{n! \rho^n}}, \quad (3.36)$$

donde los coeficientes a_n están dados por $a_n = \frac{1}{\sqrt{n! \rho^n}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x; \rho) d\nu(x)$, $n \geq 0$. Además, $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$.

A continuación, se enlistan algunas identidades de los polinomios Hermite.

1. Función generadora: $e^{tx - \frac{1}{2}\rho t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x; \rho)$.
2. Monomios: $x^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (2k-1)!! \rho^k H_{n-2k}(x; \rho)$.
3. Fórmula de recursión: $H_{n+1}(x; \rho) = xH_n(x; \rho) - \rho n H_{n-1}(x; \rho)$.
4. Derivada: $D_x H_n(x; \rho) = n H_{n-1}(x; \rho)$.
5. Eigenfunciones: $(-\rho D_x^{(2)} + x D_x) H_n(x; \rho) = n H_n(x; \rho)$.
6. Producto: $H_n(x; \rho) H_m(x; \rho) = \sum_{k=0}^{n \wedge m} k! \binom{n}{k} \binom{m}{k} \rho^k H_{n+m-2k}(x; \rho)$.
7. Derivadas parciales: $\frac{\partial}{\partial \rho} H_n(x; \rho) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n(x; \rho)$.

3.3. Caos homogéneo

Sea ν la medida Gaussiana sobre \mathbb{R} con media 0 y varianza ρ . Por el Teorema 3.2.5, cada función en el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ tiene una única expansión en serie por los polinomios Hermite $H_n(x; \rho)$, $n \geq 0$. Sea \mathcal{C} el espacio de Banach de funciones continuas f con valores reales sobre $[0, 1]$, tales que $f(0) = 0$ y sea $\hat{\mu}$ la medida de Wiener sobre \mathcal{C} . El espacio de Wiener $(\mathcal{C}, \hat{\mu})$ es infinito-dimensional, análogo al espacio unidimensional (\mathbb{R}, ν) . Entonces, surge la pregunta ¿Cuál es la ecuación análoga a (3.36) para el espacio de Hilbert $L^2(\hat{\mu})$ de funciones cuadrado integrables sobre el espacio de Wiener $(\mathcal{C}, \hat{\mu})$?

Por el Teorema A.2.7 (Ver Apéndice), el proceso estocástico $\{B(t, \omega) = \omega(t); 0 \leq t \leq 1, \omega \in \mathcal{C}\}$, es un movimiento browniano. Para evitar que se restrinja al intervalo $[0, 1]$, será considerada una situación un poco más general que la pregunta anterior.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad fijo y sea $B(t)$ un movimiento browniano con respecto a \mathbb{P} . Fijando un intervalo $[a, b]$ y recordando que para una función $f \in L^2[a, b]$, la integral de Wiener $\int_a^b f(t)dB(t)$ es medible con respecto a la σ -álgebra $\mathcal{F}^B = \sigma\{B(t); a \leq t \leq b\}$ que es más pequeña que \mathcal{F} . En general, ocurre que $\mathcal{F}^B \neq \mathcal{F}$. Una función \mathcal{F}^B -medible en Ω , puede ser referida como una función browniana. Denotemos por $L_B^2(\Omega)$ al espacio de Hilbert de funciones \mathbb{P} -cuadrado integrables sobre Ω que son medibles con respecto a \mathcal{F}^B . Note que $L_B^2(\Omega)$ es un subespacio de $L^2(\Omega)$. Ahora, la pregunta es ¿Cuál es la ecuación análoga a (3.36) para el espacio $L_B^2(\Omega)$ de funciones cuadrado integrables sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$?

Note que cuando $\Omega = \mathcal{C}$ y $\mathbb{P} = \hat{\mu}$, se tiene $\mathcal{F} = \mathcal{F}^B = \mathcal{B}(\mathcal{C})$, donde $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ es la σ -álgebra de Borel de \mathcal{C} , por lo tanto, la pregunta anterior se reduce a la pregunta inicial.

Probaremos un lema que será utilizado más adelante.

Lema 3.3.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $\{\mathcal{G}_n\}$ una filtración tal que $\sigma\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n\} = \mathcal{G}$. Suponga que $X \in L^1(\Omega)$, entonces $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n]$ converge a X en $L^1(\Omega)$, cuando $n \rightarrow \infty$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, dado que $\sigma\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n\} = \mathcal{G}$, entonces existen $a_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$ con $S_\varepsilon = \sum_{i=1}^k a_i 1_{A_i}$, tal que

$$\|X - S_\varepsilon\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.37)$$

donde $\|\cdot\|_1$ es la norma en $L^1(\Omega)$.

Observe que

$$\begin{aligned} \|X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n]\|_1 &= \|X + (-S_\varepsilon + S_\varepsilon) + (-\mathbb{E}[S_\varepsilon|\mathcal{G}_n] + \mathbb{E}[S_\varepsilon|\mathcal{G}_n]) - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n]\|_1 \\ &= \|(X - S_\varepsilon) + (S_\varepsilon - \mathbb{E}[S_\varepsilon|\mathcal{G}_n]) + \mathbb{E}[S_\varepsilon - X|\mathcal{G}_n]\|_1 \\ &\leq \|X - S_\varepsilon\|_1 + \|S_\varepsilon - \mathbb{E}[S_\varepsilon|\mathcal{G}_n]\|_1 + \|\mathbb{E}[S_\varepsilon - X|\mathcal{G}_n]\|_1. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Además, por la desigualdad de Jensen $|\mathbb{E}[S_\varepsilon - X|\mathcal{G}_n]| \leq \mathbb{E}[|S_\varepsilon - X|\mathcal{G}_n]$. Tomando esperanza en la desigualdad anterior, se consigue

$$\|\mathbb{E}[S_\varepsilon|\mathcal{G}_n]\| \leq \mathbb{E}[|S_\varepsilon - X|] = \|S_\varepsilon - X\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.39)$$

Si $A_i \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$, con $i = 1, \dots, k$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \in \mathcal{G}_N$ para todo $i = 1, \dots, k$, de modo que

$$\mathbb{E}[S_\varepsilon|\mathcal{G}_n] = S_\varepsilon, \quad \forall n \geq N. \quad (3.40)$$

Utilizando (3.37), (3.39) y (3.40) en (3.38), se concluye que

$$\|X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_n]\|_1 \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Por lo tanto, X_n converge a X en $L^1(\Omega)$, cuando $n \rightarrow \infty$. □

Regresando al movimiento browniano $B(t)$ en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}^B, \mathbb{P})$, sea $I(f) = \int_a^b f(t)dB(t)$ la integral de Wiener de $f \in L^2[a, b]$. Un producto

$$I(f_1)I(f_2) \cdots I(f_k),$$

con $f_1, f_2, \dots, f_k \in L^2[a, b]$ es llamado caos polinómico de orden k .

Sea $J_0 = \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, defina J_n como la $L^2_B(\Omega)$ -cerradura del espacio lineal generado por funciones constantes y polinomios de caos de grado menor o igual a n . Entonces

$$J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_n \subset \cdots \subset L^2_B(\Omega).$$

Teorema 3.3.2. *La unión $\bigcup_{n=0}^\infty J_n$ es denso en $L^2_B(\Omega)$.*

Demostración. Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal para $L^2[a, b]$ y sea \mathcal{G}_n la σ -álgebra generada por $I(e_1), I(e_2), \dots, I(e_n)$. Entonces $\{\mathcal{G}_n\}$ es una filtración y tenemos que

CAPÍTULO 3. INTEGRALES MÚLTIPLES WIENER-ITÔ

$\sigma\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n\} = \mathcal{F}^B$. Sea $\phi \in L_B^2(\Omega)$ ortogonal a $\bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$. Entonces para cualquier n fijo

$$\mathbb{E} \left[\phi I(e_1)^{k_1} I(e_2)^{k_2} \cdots I(e_n)^{k_n} \right] = 0, \quad \forall k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0.$$

Como $I(e_1)^{k_1} I(e_2)^{k_2} \cdots I(e_n)^{k_n}$ es \mathcal{G}_n -medible, se tiene la siguiente igualdad

$$\mathbb{E} \left[\phi I(e_1)^{k_1} I(e_2)^{k_2} \cdots I(e_n)^{k_n} \right] = \mathbb{E} \left[I(e_1)^{k_1} I(e_2)^{k_2} \cdots I(e_n)^{k_n} \mathbb{E}[\phi | \mathcal{G}_n] \right].$$

Por lo que $\mathbb{E} \left[I(e_1)^{k_1} I(e_2)^{k_2} \cdots I(e_n)^{k_n} \mathbb{E}[\phi | \mathcal{G}_n] \right] = 0$.

Note que las variables aleatorias $I(e_1), I(e_2), \dots, \dots, I(e_n)$ son independientes con la misma distribución normal estándar. Además,

$$\mathbb{E}[\phi | \mathcal{G}_n] = \theta_n(I(e_1, e_2, \dots, e_n)), \quad (3.41)$$

para alguna función medible θ_n sobre \mathbb{R}^n .

Entonces para todo $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \theta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) d\mu(x) = 0,$$

donde μ es la medida Gaussiana estándar sobre \mathbb{R}^n .

Por (3.30), la igualdad anterior implica que para cualesquiera enteros $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} H_{k_1}(x_1; 1) H_{k_2}(x_2; 1) \cdots H_{k_n}(x_n; 1) d\mu(x) = 0.$$

Por el Teorema 3.2.5, $\{H_{k_1}(x_1; 1), H_{k_2}(x_2; 1), \dots, H_{k_n}(x_n; 1); k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0\}$ es una base ortogonal para $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, entonces $\theta_n = 0$, μ -c.s. Entonces de (3.41) se tiene que

$$\mathbb{E}[\phi | \mathcal{G}_n] = 0, \quad \mu\text{-c.s. para cualquier } n \geq 1.$$

Por otro lado, por el Lema 3.3.1, $\mathbb{E}[\phi | \mathcal{G}_n]$ converge a ϕ en $L_B^2(\Omega)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, $\phi = 0$ \mathbb{P} -c.s. lo cual prueba que $\bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$ es denso en $L_B^2(\Omega)$. \square

Sea $K_0 = \mathbb{R}$, para cada $n \geq 1$, definimos K_n como el complemento ortogonal de J_{n-1} en J_n , es decir,

$$J_n = J_{n-1} \oplus K_n.$$

Entonces tenemos la siguiente sucesión de subespacios ortogonales del espacio de Hilbert $L_B^2(\Omega)$

$$K_0, K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$$

Definición 3.3.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el elemento del espacio de Hilbert K_n es llamado caos homogéneo de orden n .

Los espacios K_n , $n \geq 1$ son infinito-dimensionales. El caos homogéneo de grado 1, es decir K_1 , son las variables aleatorias Gaussianas. El siguiente teorema se sigue del Teorema 3.3.2 y la construcción de caos homogéneo.

Teorema 3.3.4. El espacio $L_B^2(\Omega)$ es la suma directa ortogonal de los espacios K_n de caos homogéneo de orden $n \geq 0$, es decir,

$$L_B^2(\Omega) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} K_i.$$

Cada función $\phi \in L_B^2(\Omega)$ tiene una única expansión de caos homogéneo

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n. \quad (3.42)$$

Además, $\|\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\phi_n\|^2$, donde $\|\cdot\|$ es la norma en $L_B^2(\Omega)$.

Ejemplo 3.3.5. Sea $f \in L^2[a, b]$ y $I(f) = \int_a^b f(t)dB(t)$. Observe que

$$I(f)^2 = \|f\|^2 + (I(f)^2 - \|f\|^2).$$

Un cálculo directo muestra que $I(f)^2 - \|f\|^2$ es ortogonal a K_0 y K_1 , de modo que $I(f)^2 - \|f\|^2$ pertenece a K_2 . Por otra parte, considere la integral doble Wiener-Itô

$\int_a^b \int_a^b f(t)f(s)dB(t)dB(s)$. Por el Teorema 3.1.9

$$\int_a^b \int_a^b f(t)f(s)dB(t)dB(s) = 2 \int_a^b f(t) \left[\int_a^t f(s)dB(s) \right] dB(t) = 2 \int_a^b f(t)X_t dB(t),$$

donde $X_t = \int_a^t f(s)dB(s)$.

Luego $dX_t = f(t)dB(t)$, usando la fórmula producto de Itô (2.8) se consigue

$$d(X_t^2) = 2X_t dY_t + (dX_t)^2 = 2f(t)X_t dB(t) + f(t)^2 dt,$$

lo cual nos da la integral estocástica

$$\begin{aligned} 2 \int_a^b f(t) X_t dB(t) &= X_b^2 - X_a^2 - \int_a^b f(t)^2 dt \\ &= \left(\int_a^b f(s) dB(s) \right)^2 - \int_a^b f(t)^2 dt \\ &= I(f)^2 - \|f\|^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

De (3.42) y (3.43) se obtiene que

$$\int_a^b \int_a^b f(t) f(s) dB(t) dB(s) = I(f)^2 - \|f\|^2. \quad (3.44)$$

Esta igualdad muestra que el caos homogéneo $I(f)^2 - \|f\|^2$ es una integral doble Wiener-Itô.

Teorema 3.3.6. Sea P_n la proyección ortogonal de $L_B^2(\Omega)$ sobre K_n . Si f_1, \dots, f_k son funciones ortogonales distintas de cero en $L^2[a, b]$ y n_1, n_2, \dots, n_k son enteros no negativos, entonces

$$P_n(I(f_1)^{n_1} \cdots I(f_k)^{n_k}) = H_{n_1}(I(f_1); \|f_1\|^2) \cdots H_{n_k}(I(f_k); \|f_k\|^2), \quad (3.45)$$

donde $n = \sum_{i=1}^k n_i$. En particular, se tiene

$$P_n(I(f)^n) = H_n(I(f); \|f\|^2), \quad (3.46)$$

para cualquier $f \neq 0$ en $L^2[a, b]$.

Demostración. Únicamente se probará la ecuación (3.46).

De la identidad (2) de los polinomios de Hermite se consigue

$$I(f)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (2k-1)!! (\|f\|^2)^k H_{n-2k}(I(f); \|f\|^2). \quad (3.47)$$

Todos los términos, excepto el primero del lado derecho de (3.47) son ortogonales a K_n , ya que tienen grado menor o igual que n . De manera que es suficiente probar

$$H_n(I(f), \|f\|^2) \perp J_{n-1},$$

o equivalentemente, para cualesquiera $g_1, \dots, g_m \in L^2[a, b]$ distintos de cero y $0 \leq m \leq n-1$,

$$\mathbb{E} \left[H_n(I(f); \|f\|^2) \prod_{i=1}^m I(g_i) I(g_1) \right] = 0. \quad (3.48)$$

Es posible asumir que g_1, \dots, g_m son ortogonales. Además, cada g_i para $i = 1, 2, \dots, m$ se puede escribir como $g_i = c_i f + h_i$, $c_i \in \mathbb{R}$ y $h_i \perp f$. Para demostrar (3.48), es suficiente ver que para cualesquiera h_1, \dots, h_m funciones distintas de cero y ortogonales a f con $p + q_1 + \dots + q_m \leq n - 1$,

$$\mathbb{E} [H_n(I(f); \|f\|^2) I(f)^p I(h_1)^{q_1} \dots I(h_m)^{q_m}] = 0.$$

Finalmente, usando (3.47), se observa que es suficiente probar que, para cualesquiera $0 \leq r + r_1 + \dots + r_m \leq n - 1$, se cumple que

$$\mathbb{E} \left[H_n(I(f); \|f\|^2) H_r(I(f); \|f\|^2) \prod_{i=1}^m H_{r_i}(I(h_i); \|h_i\|^2) \right] = 0.$$

Dado que las variables aleatorias $I(f), I(h_1), \dots, I(h_m)$ son independientes, es suficiente verificar que para cualesquiera $r \leq n - 1$,

$$\mathbb{E} [H_n(I(f); \|f\|^2) H_r(I(f); \|f\|^2)] = 0.$$

Lo cual se sigue del Teorema 3.2.5. □

Ejemplo 3.3.7. Sea $f \in L^2[a, b]$ una función distinta de cero. Tomando $x = I(f)$ y $\rho = \|f\|^2$ en (3.23) se tiene que

$$e^{tI(f) - \frac{1}{2}\|f\|^2 t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(I(f); \|f\|^2). \quad (3.49)$$

Por el Teorema 3.3.6, $H_n(I(f); \|f\|^2) \in K_n$ para cada $n \geq 0$, de manera que (3.49) da la expansión de caos homogéneo en la ecuación (3.42) para la función $\phi = e^{tI(f) - \frac{1}{2}\|f\|^2 t^2}$.

3.4. Base ortonormal para caos homogéneo

Por el Teorema 3.3.4, $L_B^2(\Omega)$ es la suma directa ortogonal de caos homogéneos, es decir, $L_B^2(\Omega) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} K_i$. ¿Cuál es la análoga suma directa ortogonal para la medida Gaussiana estándar sobre \mathbb{R} ? Observe que por (3.36), el correspondiente espacio para cada K_n es el espacio unidimensional generado por polinomios de Hermite $H_n(x, 1)$. Lo cual nos da una pista para encontrar una base ortonormal para $L_B^2(\Omega)$ que puede ser usado para expansión en series de funciones en $L_B^2(\Omega)$. Entonces, hemos respondido a la segunda pregunta del inicio de la sección anterior. Sin embargo, en el caso de $L_B^2(\Omega)$ cada espacio K_n , $n \in \mathbb{N}$, es un espacio de Hilbert infinito-dimensional.

CAPÍTULO 3. INTEGRALES MÚLTIPLES WIENER-ITÔ

Sea $f \in L^2[a, b]$, denotemos por \bar{f} a la integral de Wiener, es decir, $\bar{f} = I(f) = \int_a^b f(t)dB(t)$. Para esta sección, fijemos $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal para $L^2[a, b]$.

Para una sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de enteros no negativos con suma finita, defina

$$\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} = \prod_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n_k!}} H_{n_k}(\bar{e}_k; 1) = \frac{1}{\sqrt{n_1!}} H_{n_1}(\bar{e}_1; 1) \frac{1}{\sqrt{n_2!}} H_{n_2}(\bar{e}_2; 1) \cdots \quad (3.50)$$

Observe que $H_0(x; 1) = 1$ y solo existe un número finito de n_k 's, de manera que el producto en (3.50) es un producto de factores finitos.

Ejemplo 3.4.1. *Suponga que $\sum_{i=1}^{\infty} n_i = 1$, tal ecuación tiene infinitas soluciones dadas por $1, 0, 0, \dots; 0, 1, 0, \dots; 0, 0, 1, \dots; \dots$. Por lo tanto, conseguimos las correspondientes funciones $\bar{e}_n, n = 1, 2, 3, \dots$, los cuales están en el espacio K_1 de caos homogéneo de orden 1.*

Ejemplo 3.4.2. *Considere $\sum_{i=1}^{\infty} n_i = 2$, las soluciones de la ecuación anterior están dadas para $n_k = 2$, para algún $k \in \mathbb{N}$ y cero para los restantes índices o $n_i = n_j = 1$ para dos índices distintos $i, j \in \mathbb{N}$ y cero para los índices restantes. Entonces conseguimos las funciones*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (I(e_k)^2 - 1), k \in \mathbb{N}; I(e_i)I(e_j), i \neq j, i, j \in \mathbb{N}.$$

Los cuales pertenecen al espacio K_2 de caos homogéneo de orden 2.

Lema 3.4.3. *La colección de funciones $\{\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}; \sum_{i=1}^{\infty} n_i = n\}$ es un subconjunto de K_n , para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, el espacio lineal generado por esta colección de funciones es denso en K_n .*

Demostración. La primera afirmación, se sigue de Teorema 3.3.2. Para la segunda, argumentos similares a los utilizados en la demostración de Teorema 3.3.2 muestran que

$$\mathbb{E}[\phi \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}] = 0, \forall n_1, n_2, \dots \geq 0, \text{ implica que } \phi = 0. \quad (3.51)$$

Supongamos que $\phi \in K_n$ es ortonormal a $\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}$ para todo n_1, n_2, \dots tales que $\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n$. Entonces $P_n \phi = \phi$ y $\mathbb{E}[\phi \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}] = 0$ para todos los n_k 's, donde P_n es

la proyección ortogonal de $L_B^2(\Omega)$ sobre K_n . Además, para cualesquiera n_1, n_2, \dots se observa que

$$P_n = \begin{cases} \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}, & \text{si } \sum_{i=1}^{\infty} n_i = n; \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3.52)$$

Entonces, para cualesquiera $n_1, n_2, \dots \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}] &= \langle \phi, \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} \rangle \\ &= \langle P_n \phi, \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} \rangle \\ &= \langle \phi, P_n \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} \rangle \\ &= \mathbb{E}[\phi (P_n \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots})] \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior en el espacio de Hilbert $L_B^2(\Omega)$. Por la implicación (3.51), concluimos que $\phi = 0$. Por lo tanto, el espacio lineal generado por $\{\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}; \sum_{i=1}^{\infty} n_i = n\}$ es denso en K_n . \square

Teorema 3.4.4. *La colección de funciones*

$$\{\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}; \sum_{i=1}^{\infty} n_i = n\}, \quad (3.53)$$

es una base ortonormal para el espacio K_n de caos homogéneo de orden n , $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por el Lema 3.4.3, solo se necesita probar que la colección (3.53) es un sistema ortonormal.

Para cada k , usamos (3.32) para demostrar que

$$\begin{aligned} \|H_{n_k}(\bar{e}_k; 1)\|^2 &= \int_{\Omega} H_{n_k}(\bar{e}_k; 1)^2 d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_{n_k}(\bar{e}_k; 1)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \\ &= n!. \end{aligned}$$

Note que las variables aleatorias $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots$, son independientes, de modo que de (3.50) se tiene que $\|\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}\|^2 = 1$, entonces todas las funciones en (3.53) tienen norma 1.

Veamos que las funciones en (3.53) son ortogonales, para ello, sea $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y

$\{j_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones distintas de enteros no negativos, sin importar si sus elementos tienen la misma suma. Entonces existe algún $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} \neq j_{k_0}$. Por simplicidad, sea

$$\phi_k = \frac{1}{\sqrt{n_k!}} H_{n_k}(\bar{e}_k; 1), \quad \theta_k = \frac{1}{\sqrt{j_k!}} H_{j_k}(\bar{e}_k; 1).$$

De la independencias de $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots$ y (3.35) se verifica que

$$\mathbb{E} [\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} \mathcal{H}_{j_1, j_2, \dots}] = \mathbb{E} \left[\phi_{k_0} \theta_{k_0} \prod_{k \neq k_0} \phi_k \theta_k \right] = \mathbb{E} [\phi_{k_0} \theta_{k_0}] \mathbb{E} \left[\prod_{k \neq k_0} \phi_k \theta_k \right] = 0.$$

Por lo tanto, $\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}$ y $\mathcal{H}_{j_1, j_2, \dots}$ son ortogonales. \square

Ejemplo 3.4.5. Suponga que $f \in L^2[a, b]$ tiene expansión $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, donde $a_n = \langle f, e_n \rangle$. Entonces la expansión de $I(f) \in K_1$ en $L_B^2(\Omega)$ está dada por

$$I(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I(e_n).$$

La expansión anterior, es un caso especial del Teorema 3.4.4 cuando $n = 1$, pero también se sigue del hecho de que el mapeo $I : L^2[a, b] \rightarrow L_B^2(\Omega)$ es una isometría.

Ejemplo 3.4.6. Sea $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in L^2[a, b]$ como en el Ejemplo 3.4.5. La base ortonormal en el Teorema 3.4.4 para el caso $n = 2$ está dado por

$$\xi_k = \frac{1}{2} (\bar{e}_k - 1), \quad k \in \mathbb{N}; \quad \eta_{ij} = \bar{e}_i \bar{e}_j, \quad i \neq j, i, j \in \mathbb{N}.$$

Por Teorema 3.3.6, $P_2(I(f)^2) = I(f)^2 - \|f\|^2$ pertenece al espacio K_2 . Nótese que

$$\langle P_2(I(f)^2), \xi_k \rangle = \langle I(f)^2, P_2 \xi_k \rangle = \langle I(f)^2, \xi_k \rangle.$$

De manera que para cada $k \geq 1$,

$$\langle P_2(I(f)^2), \xi_k \rangle = \mathbb{E} [I(f)^2 \xi_k] = \mathbb{E} \left[\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i a_j \bar{e}_i \bar{e}_j \frac{1}{2} (\bar{e}_k - 1) \right].$$

Observe que la esperanza es cero, excepto posiblemente cuando $i = j = k$. Así,

$$\langle P_2(I(f)^2), \xi_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a_k^2 \mathbb{E} [\bar{e}_k^2 (\bar{e}_k - 1)] = \sqrt{2} a_k^2.$$

Similarmenle, es posible verificar que para cualesquiera $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$

$$\langle P_2(I(f)^2), \eta_{ij} \rangle = 2a_i a_j.$$

Por lo tanto, la expansión de $P_2(I(f)^2)$ está dada por

$$P_2(I(f)^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} a_k^2 \frac{1}{\sqrt{2}} (I(e_k)^2 - 1) + \sum_{i < j} 2a_i a_j I(e_i) I(e_j).$$

Posteriormente se da un ejemplo concreto de la expansión de funciones f y $P_2(I(f)^2)$ en los espacios $L^2[a, b]$ y K_2 , respectivamente.

Una base ortonormal para $L^2[0, 1]$ está dada por

$$e_n(t) = \sqrt{2} \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi t\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Considere $f(t) = t$, usando integración por partes se consigue

$$a_n = \int_0^1 t \sqrt{2} \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi t\right) dt = (-1)^n \sqrt{2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^{-2}.$$

De esta manera, $f(t)$ tiene expansión

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^{-2} \sqrt{2} \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi t\right).$$

Además, la expansión de la proyección está dada por

$$P_2(I(f)^2) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi\right)^{-4} (\bar{e}_k - 1) + 4 \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \left(\left(i - \frac{1}{2}\right)\pi\right)^{-2} \left(\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi\right)^{-2} \bar{e}_i \bar{e}_j.$$

Finalmente, por el Teorema 3.4.4 podemos responder a la pregunta planteada en el inicio de la Sección 3.3 con el siguiente teorema.

Teorema 3.4.7. *La colección de funciones $\{\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}; \sum_{i=1}^{\infty} n_i = n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ es una base ortonormal para el espacio de Hilbert $L_B^2(\Omega)$. Cada $\phi \in L_B^2(\Omega)$ tiene una única expansión en serie dada por*

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n} a_{n_1, n_2, \dots} \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots},$$

donde $a_{n_1, n_2, \dots} = \mathbb{E}_{\nu} [\phi \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}] = \int_{\Omega} \phi \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} d\nu$.

3.5. Integrales múltiples Wiener-Itô

Recordando que $B(t)$ es un movimiento browniano fijo y $L_B^2(\Omega)$ es el espacio de Hilbert de variables aleatorias cuadrado integrables en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}^B, \mathbb{P})$. Por el Teorema 3.3.4, el espacio $L_B^2(\Omega)$ es la suma directa de espacios ortogonales K_n , $n \in \mathbb{N}$. En el Ejemplo 3.3.5 se muestra que $I(f)^2 - \|f\|^2$ para $f \in L^2[a, b]$, es la integral doble Wiener-Itô. Es razonable esperar que exista una correspondencia uno a uno entre el caos homogéneo de orden 2 y la integral doble Wiener-Itô, lo que nos induce a preguntar: ¿Todos los caos homogéneos de orden $n \geq 2$ están dados por algún tipo de integral?. En la siguiente sección se demostrará que existe una correspondencia uno a uno entre el caos homogéneo y las integrales múltiples Wiener-Itô.

Como primer objetivo en esta sección, deseamos definir la integral múltiple Wiener-Itô. Denotemos por $[a, b]^n$, al n -producto cartesiano $[a, b] \times [a, b] \times \cdots \times [a, b]$. Sea $f \in L^2([a, b]^n)$, deseamos definir

$$\int_{[a, b]^n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dB(t_1) dB(t_2) \cdots dB(t_n).$$

Sea $D = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in [a, b]^n; \exists i \neq j \text{ tal que } t_i = t_j\}$ el *conjunto diagonal* de $[a, b]^n$. Un subconjunto de $[a, b]^n$ de la forma $[t_1^{(1)}, t_1^{(2)}] \times [t_2^{(1)}, t_2^{(2)}] \times \cdots \times [t_n^{(1)}, t_n^{(2)})$ es llamado rectángulo.

Primero se abordará el caso para funciones escalonadas off-diagonal.

Una función escalonada en $[a, b]^n$ es una función de la forma

$$f = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq k} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathbf{1}_{[\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}] \times [\tau_{i_2-1}, \tau_{i_2}] \times \cdots \times [\tau_{i_n-1}, \tau_{i_n}]},$$

donde $a = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k = b$. Una función escalonada off-diagonal es una función escalonada con coeficientes que satisfacen la condición

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_n} = 0, \text{ si } i_p = i_q \text{ para algún } p \neq q. \quad (3.54)$$

La condición en (3.54) significa que la función f desaparece sobre el conjunto D . La colección de funciones escalonadas off-diagonal es un espacio vectorial.

Para una función escalonada off-diagonal, la integral múltiple Wiener-Itô, denotada por $I_n(f)$ se define como

$$I_n(f) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq k} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_n}, \quad (3.55)$$

donde $\xi_{i_p} = B(\tau_{i_p}) - B(\tau_{i_p-1})$, $1 \leq p \leq n$.

$I_n(f)$ está bien definida, es decir, no depende de la representación de f . Además, $I_n(f)$ es lineal sobre el espacio vectorial de funciones escalonadas off-diagonal. Recordando la Definición 3.1.2 y dado que la medida de Lebesgue es simétrica se tiene que

$$\int_{[a,b]^n} |f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})|^2 dt_1 \cdots dt_n = \int_{[a,b]^n} |f(t_1, \dots, t_n)|^2 dt_1 \cdots dt_n,$$

para cualquier permutación σ . Por la desigualdad del triángulo

$$\|\hat{f}\| \leq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \|f\| = \frac{1}{n!} n! \|f\| = \|f\|.$$

Entonces $\|\hat{f}\| \leq \|f\|$.

Lema 3.5.1. *Si f es una función escalonada off-diagonal, entonces $I_n(f) = I_n(\hat{f})$.*

Demostración. Como I_n y el operador simetrización son operadores lineales, es suficiente demostrar el lema para el caso

$$f = 1_{[t_1^{(1)}, t_1^{(2)}] \times [t_2^{(1)}, t_2^{(2)}] \times \cdots \times [t_n^{(1)}, t_n^{(2)}]},$$

donde los intervalos $[t_i^{(1)}, t_i^{(2)}]$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ son disjuntos. Entonces

$$I_n(f) = \prod_{i=1}^n \left(B(t_i^{(2)}) - B(t_i^{(1)}) \right). \quad (3.56)$$

Por otro lado, la simetrización \hat{f} de f está dada por

$$\hat{f} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} 1_{[t_{\sigma(1)}^{(1)}, t_{\sigma(1)}^{(2)}] \times \cdots \times [t_{\sigma(n)}^{(1)}, t_{\sigma(n)}^{(2)}]}.$$

De manera que

$$I_n(\hat{f}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^n \left(B(t_{\sigma(i)}^{(2)}) - B(t_{\sigma(i)}^{(1)}) \right).$$

Observe que $\prod_{i=1}^n \left(B(t_{\sigma(i)}^{(2)}) - B(t_{\sigma(i)}^{(1)}) \right) = \prod_{i=1}^n \left(B(t_i^{(2)}) - B(t_i^{(1)}) \right)$ para cualquier permutación σ .

Además, se tienen $n!$ permutaciones para el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, entonces

$$I_n(\hat{f}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^n \left(B(t_{\sigma(i)}^{(2)}) - B(t_{\sigma(i)}^{(1)}) \right) = \prod_{i=1}^n \left(B(t_i^{(2)}) - B(t_i^{(1)}) \right). \quad (3.57)$$

En consecuencia, de (3.56) y (3.57) concluimos que $I_n(f) = I_n(\hat{f})$. □

Lema 3.5.2. *Sea f una función escalonada off-diagonal, entonces $\mathbb{E}[I_n(f)] = 0$ y*

$$\mathbb{E}[I_n(f)^2] = n! \int_{[a,b]^n} |\hat{f}(t_1, t_2, \dots, t_n)|^2 dt_1 dt_2 \cdots dt_n. \quad (3.58)$$

Demostración. Sea f una función escalonada off-diagonal, entonces $I_n(f)$ está dada por (3.55). Dado que la función f satisface la condición (3.54), los coeficientes a_{i_1, i_2, \dots, i_n} deben ser cero cuando los intervalos $[\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}), [\tau_{i_2-1}, \tau_{i_2}), \dots, [\tau_{i_n-1}, \tau_{i_n})$ no son disjuntos. Cuando los intervalos son disjuntos, el correspondiente producto $\xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_n}$ tiene esperanza cero. Por lo tanto, $\mathbb{E}[I_n(f)] = 0$.

Por Lema 3.5.1, $I_n(f) = I_n(\hat{f})$, de modo que es posible asumir que f es simetrizable. En este caso

$$a_{i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \dots, i_{\sigma(n)}} = a_{i_1, i_2, \dots, i_n},$$

para cualquier permutación σ . Entonces $I_n(f)$ en (3.55) puede ser escrita como

$$I_n(f) = n! \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_n}.$$

Por lo que

$$\mathbb{E}[I_n(f)^2] = (n!)^2 \sum_{i_1 < \dots < i_n} \sum_{j_1 < \dots < j_n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} a_{j_1, \dots, j_n} \mathbb{E}[\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_n} \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_n}].$$

Observe que para un conjunto fijo de índices $i_1 < i_2, \dots < i_n$, se tiene que

$$\mathbb{E}[\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_n} \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_n}] = \begin{cases} \prod_{p=1}^n (\tau_{i_p} - \tau_{i_{p-1}}), & \text{si } j_1 = i_1, \dots, j_n = i_n; \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_n(f)^2] &= (n!)^2 \sum_{i_1 < \dots < i_n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n}^2 \prod_{p=1}^n (\tau_{i_p} - \tau_{i_{p-1}}) \\ &= n! \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n}^2 \prod_{p=1}^n (\tau_{i_p} - \tau_{i_{p-1}}) \\ &= n! \int_{[a,b]^n} f(t_1, t_2, \dots, t_n)^2 dt_1 dt_2 \cdots dt_n. \end{aligned}$$

□

A continuación, aproximaremos cualquier función en $L^2[a, b]$ por funciones escalonadas off-diagonal para definir la integral múltiple Wiener-Itô.

El conjunto D se puede reescribir como $\hat{D} = \bigcup_{i \neq j} [\{t_i = t_j\} \cap D]$, lo que significa que $\hat{D} = D$ es una unión finita de intersecciones de hiperplanos $(n - 1)$ -dimensionales con D . Por lo tanto, la medida de Lebesgue es cero para D .

Usando el hecho anterior y adoptando argumentos similares a los realizados en la derivación de (3.14) y complementando con (3.15) y (3.16) se obtiene la demostración del siguiente lema.

Lema 3.5.3. *Sea $f \in L^2([a, b]^n)$, entonces existe una sucesión $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de funciones escalonadas off-diagonal tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a, b]^n} |f(t_1, t_2, \dots, t_n) - f_k(t_1, t_2, \dots, t_n)|^2 dt_1 dt_2 \cdots dt_n = 0. \quad (3.59)$$

Ahora, suponga que $f \in L^2([a, b]^n)$. Seleccione una sucesión $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de funciones escalonadas off-diagonal que convergen a f en $L^2([a, b]^n)$, cuya existencia está garantizada por el Lema 3.5.3. Entonces por la linealidad de I_n y del Lema 3.5.2 se sigue que

$$\mathbb{E} \left[(I_n(f_k) - I_n(f_l))^2 \right] = n! \|\hat{f}_k - \hat{f}_l\|^2 \leq n! \|f_k - f_l\|^2. \quad (3.60)$$

Cuando $k, l \rightarrow \infty$, el lado derecho de (3.60) converge a cero. Por lo tanto, la sucesión $\{I_n(f_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2(\Omega)$. Sea

$$I_n(f) := \lim_{k \rightarrow \infty} I_n(f_k), \text{ en } L^2(\Omega), \quad (3.61)$$

el cual está bien definido, es decir, no depende de la selección de la sucesión $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Definición 3.5.4. *Sea $f \in L^2[a, b]^n$, el límite $I_n(f)$ en (3.61) es llamado la integral múltiple Wiener-Itô de f , denotada por*

$$\int_{[a, b]^n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dB(t_1) dB(t_2) \cdots dB(t_n).$$

Los Lemas 3.5.1 y 3.5.2 pueden ser extendidos a funciones en $L^2([a, b]^n)$ usando el Lema 3.5.3 y la definición de la integral múltiple Wiener-Itô. Se establece este hecho en el siguiente teorema.

Teorema 3.5.5. *Sean $f \in L^2([a, b]^n)$, $n \geq 1$, se verifican*

1. $I_n(f) = I_n(\hat{f})$, donde \hat{f} es la simetrización de f .

2. $\mathbb{E}[I_n(f)] = 0.$

3. $\mathbb{E}[I_n(f)^2] = n! \|\hat{f}\|^2,$ donde $\|\cdot\|$ es la norma en $L^2(\Omega).$

El siguiente teorema nos proporciona una expresión para escribir una integral múltiple Wiener-Itô como una integral iterada, lo cual facilita su cálculo.

Teorema 3.5.6. Sea $f \in L^2([a, b]^n), n \geq 2.$ Entonces

$$\begin{aligned} & \int_{[a,b]^n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dB(t_1) dB(t_2) \cdots dB(t_n) \\ &= n! \int_a^b \cdots \int_a^{t_{n-2}} \left[\int_a^{t_{n-1}} \hat{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) dB(t_n) \right] dB(t_{n-1}) \cdots dB(t_1), \end{aligned}$$

donde \hat{f} es la simetrización de $f.$

Demostración. Es suficiente demostrar el teorema para el caso en que f es la función característica de un rectángulo que es disjunto del conjunto $D.$ Por el Lema 3.5.1, asumimos que f es de la forma

$$f = 1_{[t_1^{(1)}, t_1^{(2)}] \times [t_2^{(1)}, t_2^{(2)}] \times \cdots \times [t_n^{(1)}, t_n^{(2)}]},$$

donde $t_n^{(1)} < t_n^{(2)} \leq t_{n-1}^{(1)} < t_{n-1}^{(2)} \leq \cdots \leq t_2^{(1)} < t_2^{(2)} \leq t_1^{(1)} < t_1^{(2)}.$ Entonces la integral múltiple Wiener-Itô de f está dada por

$$\int_{[a,b]^n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dB(t_1) dB(t_2) \cdots dB(t_n) = \prod_{i=1}^n \left(B(t_i^{(2)}) - B(t_i^{(1)}) \right). \quad (3.62)$$

Por otra parte, note que $\hat{f} = \frac{1}{n!} f$ sobre la región $t_n < t_{n-1} < \cdots < t_1,$ de modo que

$$\int_a^{t_{n-1}} \hat{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) dB(t_n) = \frac{1}{n!} 1_{[t_1^{(1)}, t_1^{(2)}] \times [t_2^{(1)}, t_2^{(2)}] \times \cdots \times [t_{n-1}^{(1)}, t_{n-1}^{(2)}]} \left(B(t_n^{(2)}) - B(t_n^{(1)}) \right),$$

el cual es $\mathcal{F}_{t_{n-1}^{(1)}}-$ medible y puede ser considerado como un proceso estocástico constante para la integración sobre el intervalo $[t_{n-1}^{(1)}, t_{n-1}^{(2)}]$ con respecto a $dB(t_{n-1}).$ Repitiendo los argumentos anteriores se obtiene que

$$\begin{aligned} & \int_a^b \cdots \int_a^{t_{n-2}} \left[\int_a^{t_{n-1}} \hat{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) dB(t_n) \right] dB(t_{n-1}) \cdots dB(t_1) \\ &= \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \left(B(t_i^{(2)}) - B(t_i^{(1)}) \right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

De (3.62) y (3.63) se obtiene la conclusión del teorema. □

Definición 3.5.7. Sean $g_1, g_2, \dots, g_n \in L^2[a, b]$. El producto tensor $g_1 \otimes \dots \otimes g_n$ está definido como la función

$$g_1 \otimes \dots \otimes g_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = g_1(t_1) \dots g_n(t_n).$$

El producto tensor $f_1^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes f_k^{\otimes n_k}$ significa que f_j se repite n_j veces, $1 \leq j \leq k$.

Teorema 3.5.8. Sean f_1, f_2, \dots, f_k funciones ortogonales distintas de cero en $L^2[a, b]$ y sean n_1, \dots, n_k enteros positivos. Entonces

$$I_n(f_1^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes f_k^{\otimes n_k}) = \prod_{j=1}^k H_{n_j}(I(f_j); \|f_j\|^2), \quad (3.64)$$

donde $\sum_{i=1}^k n_i = n$. En particular, para cualquier $f \in L^2[a, b]$ distinta de cero,

$$I_n(f^{\otimes n}) = H_n(I(f); \|f\|^2). \quad (3.65)$$

Demostración. Primero se demostrará (3.65). El caso $n = 1$ se sigue de manera inmediata. Cuando $n = 2$, se ha verificado por (3.44). En general para $n \in \mathbb{N}$, se usará inducción matemática. Suponga que (3.65) es válida para n . Por el Teorema 3.5.5 se tiene que

$$\int_{[a, b]^{n+1}} f(t_1) \dots f(t_{n+1}) dB(t_1) \dots dB(t_{n+1}) = (n+1)! \int_a^b f(t_1) X_{t_1} dB(t_1),$$

donde

$$X_t = \int_a^t \dots \left[\int_a^{t_n} f(t_2) \dots f(t_{n+1}) dB(t_{n+1}) \right] \dots dB(t_2).$$

Por el Teorema 3.5.5 y la inducción sobre n se llega a

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{1}{n!} \int_{[a, b]^n} f(t_2) \dots f(t_{n+1}) dB(t_2) \dots dB(t_{n+1}) \\ &= \frac{1}{n!} H_n \left(\int_a^t f(s) dB(s); \int_a^t f(s)^2 ds \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene la igualdad

$$\begin{aligned} &\int_{[a, b]^{n+1}} f(t_1) \dots f(t_{n+1}) dB(t_1) \dots dB(t_{n+1}) \\ &= (n+1) \int_a^b f(t_1) H_n \left(\int_a^t f(s) dB(s); \int_a^t f(s)^2 ds \right) dB(t_1). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Aplicando la fórmula de Itô dada en el Teorema 2.1.2 a $H_{n+1}(x; \rho)$ se consigue

$$\begin{aligned} dH_{n+1} \left(\int_a^t f(s)dB(s); \int_a^t f(s)^2 ds \right) \\ = \left(\frac{\partial}{\partial x} H_{n+1} \right) f(t)dB(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(t)^2 dt + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} H_{n+1} \right) f(t)^2 dt. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Recordando las identidades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} H_{n+1}(x; \rho) &= (n+1)H_n(x; \rho), \\ \frac{\partial}{\partial \rho} H_{n+1}(x; \rho) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_{n+1}(x; \rho). \end{aligned} \quad (3.68)$$

De (3.67) y (3.68) se obtiene que

$$\begin{aligned} dH_{n+1} \left(\int_a^t f(s)dB(s); \int_a^t f(s)^2 ds \right) \\ = (n+1)f(t)H_n \left(\int_a^t f(s)dB(s); \int_a^t f(s)^2 ds \right) dB(t), \end{aligned} \quad (3.69)$$

Integrando sobre $[a, b]$ en (3.69), se consigue la igualdad

$$\begin{aligned} H_{n+1} \left(\int_a^t f(s)dB(s); \int_a^t f(s)^2 ds \right) \\ = (n+1) \int_a^b f(t)H_n \left(\int_a^t f(s)dB(s); \int_a^t f(s)^2 ds \right) dB(t). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Por (3.66) y (3.70) se ha demostrado que (3.65) es válida para $n+1$. Por lo tanto, (3.65) es válida para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Para demostrar (3.64), sea $\bar{f} = I(f)$, para cualesquiera $r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{R}$, por (3.49) se consigue

$$\begin{aligned} \exp \left[\sum_{i=1}^k r_i \bar{f}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k r_i^2 \|f_i\|^2 \right] &= \prod_{i=1}^k e^{r_i \bar{f}_i - \frac{1}{2} r_i^2 \|f_i\|^2} \\ &= \prod_{i=1}^k \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{r_i^{n_i}}{n_i!} H_{n_i}(\bar{f}_i; \|f_i\|^2). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Además, por (3.49) tomando $t = 1$ y $f = \sum_{i=1}^k r_i \bar{f}_i$,

$$\begin{aligned} \exp \left[\sum_{i=1}^k r_i \bar{f}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k r_i^2 \|f_i\|^2 \right] &= \prod_{i=1}^k e^{r_i \bar{f}_i - \frac{1}{2} r_i^2 \|f_i\|^2} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} H_m \left(\sum_{i=1}^k r_i \bar{f}_i; \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k r_i^2 \|f_i\|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Aplicando la ecuación (3.65) a H_m en la última igualdad del lado derecho de (3.72) se obtiene

$$\exp \left[\sum_{i=1}^k r_i \bar{f}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k r_i^2 \|f_i\|^2 \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{[a,b]^m} \prod_{j=1}^m \left[\sum_{i=1}^k r_i f_i(t_j) \right] dB(t_1) \cdots dB(t_m). \quad (3.73)$$

Finalmente, comparando los coeficientes de $r_1^{n_1}, r_2^{n_2}, \dots, r_k^{n_k}$ en las partes derechas de (3.71) y (3.73), se sigue (3.64). \square

Para finalizar esta sección se demostrará un teorema sobre la ortogonalidad de $I_n(f)$ e $I_m(g)$ en el espacio de Hilbert $L_B^2(\Omega)$ cuando $n \neq m$.

Teorema 3.5.9. *Sean $f \in L^2([a, b]^n)$ y $g \in L^2([a, b]^m)$ con $n \neq m$. Entonces $\mathbb{E}[I_n(f)I_m(g)] = 0$.*

Demostración. Es suficiente demostrar el teorema para f y g de la siguiente forma

$$f = 1_{[t_1^{(1)}, t_1^{(2)}] \times [t_2^{(1)}, t_2^{(2)}] \times \cdots \times [t_n^{(1)}, t_n^{(2)}]}, \quad g = 1_{[s_1^{(1)}, s_1^{(2)}] \times [s_2^{(1)}, s_2^{(2)}] \times \cdots \times [s_m^{(1)}, s_m^{(2)}]},$$

donde los intervalos satisfacen la condición

$$\begin{aligned} t_n^{(1)} < t_n^{(2)} \leq t_{n-1}^{(1)} < t_{n-1}^{(2)} \leq \cdots \leq t_2^{(1)} < t_2^{(2)} \leq t_1^{(1)} < t_1^{(2)}, \\ s_m^{(1)} < s_m^{(2)} \leq s_{m-1}^{(1)} < s_{m-1}^{(2)} \leq \cdots \leq s_2^{(1)} < s_2^{(2)} \leq s_1^{(1)} < s_1^{(2)}. \end{aligned}$$

Entonces $I_n(f)I_m(g)$ está dada por

$$I_n(f)I_m(g) = \left[\prod_{i=1}^n \left(B(t_i^{(2)}) - B(t_i^{(1)}) \right) \right] \left[\prod_{j=1}^m \left(B(s_j^{(2)}) - B(s_j^{(1)}) \right) \right]. \quad (3.74)$$

Ordenando los puntos $t_i^{(k)}, t_j^{(l)}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ y $k, l \in \{1, 2\}$, formamos un conjunto de puntos creciente $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_r$ con $r \leq n + m$. Entonces cada factor del primer producto en (3.74) se puede escribir como una suma de

incrementos de $B(t)$ en los τ -intervalos. Por lo tanto, al multiplicar los n factores, cada término en el primer producto del lado derecho de (3.74) debe ser de la forma

$$(B(\tau_{i_1}) - B(\tau_{i_1-1})) \cdots (B(\tau_{i_n}) - B(\tau_{i_n-1})), \quad (3.75)$$

donde $\tau_{i_1} < \cdots < \tau_{i_n}$. Similarmente, cada término en el segundo producto del lado derecho de (3.74) debe ser de la forma

$$(B(\tau_{j_1}) - B(\tau_{j_1-1})) \cdots (B(\tau_{j_m}) - B(\tau_{j_m-1})), \quad (3.76)$$

donde $\tau_{j_1} < \cdots < \tau_{j_m}$. Es fácil ver que el producto de ecuaciones (3.75) y (3.76) tienen esperanza cero, ya que $n \neq m$. Entonces por (3.73), $\mathbb{E}[I_n(f)I_m(g)] = 0$. \square

3.6. Teorema de Wiener-Itô

Sea $L_{sim}^2([a, b]^n)$ el espacio real de Hilbert de funciones simetrizables cuadrado integrables sobre $[a, b]^n$. Recuerde los siguientes hechos:

1. Por el Teorema 3.3.4, se tiene una descomposición de $L_B^2(\Omega)$ como una suma directa ortogonal $L_B^2(\Omega) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} K_i$.
2. La colección $\{\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}; \sum_{i=1}^{\infty} n_i = n\}$ es una base ortonormal para K_n , por el Teorema 3.4.4.
3. Por el Teorema 3.5.5, $\mathbb{E}[I_n(f)^2] = n! \|f\|^2$ para cualquier $f \in L_{sim}^2([a, b]^n)$. Por lo tanto, el mapeo $\frac{1}{\sqrt{n!}} I_n : L_{sim}^2([a, b]^n) \rightarrow L_B^2(\Omega)$ es una isometría.
4. Las integrales múltiples Wiener-Itô están relacionadas con polinomios de Hermite de integrales Wiener, por el Teorema 3.5.8.

De los hechos (2) y (4) el caos homogéneo debe estar relacionado a las integrales múltiples Wiener-Itô. En efecto, el caos homogéneo de orden n son exactamente las integrales múltiples Wiener-Itô de orden n .

Teorema 3.6.1. *Sea $n \geq 1$, si $f \in L^2([a, b]^n)$, entonces $I_n(f) \in K_n$. Inversamente, si $\phi \in K_n$, entonces existe una única función $f \in L_{sim}^2([a, b]^n)$ tal que $\phi = I_n(f)$.*

Demostración. Sean $f_1^{\otimes n_1} \hat{\otimes} f_2^{\otimes n_2} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} f_k^{\otimes n_k}$ la simetrización de la función $f_1^{\otimes n_1} \otimes f_2^{\otimes n_2} \otimes \cdots \otimes f_k^{\otimes n_k}$ y $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal para $L^2[a, b]$.

Sabemos que la colección de funciones

$$\left\{ \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n_1! n_2! \cdots}} e_1^{\otimes n_1} \hat{\otimes} e_2^{\otimes n_2} \hat{\otimes} \cdots; \sum_{i=1}^{\infty} n_i = n \right\},$$

forma una base ortonormal para $L^2_{sim}([a, b])$.

Supongamos que $f \in L^2([a, b]^n)$ es una función simetrizable, ya que $I_n(f) = I_n(\hat{f})$ por el Teorema 3.5.5. Entonces f puede ser escrito como

$$f = \sum_{\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n} a_{n_1, n_2, \dots} \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} e_1^{\otimes n_1} \hat{\otimes} e_1^{\otimes n_2} \hat{\otimes} \dots,$$

donde los coeficientes satisfacen la condición

$$\|f\|^2 = \sum_{\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n} a_{n_1, n_2, \dots}^2 < \infty.$$

Usando (3.50) y (3.64) se consigue

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \sum_{\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n} a_{n_1, n_2, \dots} \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} \prod_{j \in \mathbb{N}} H_{n_j}(\bar{e}_j; 1) \\ &= \sqrt{n!} \sum_{\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n} a_{n_1, n_2, \dots} \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} \end{aligned}$$

Por Teorema 3.4.4, se tiene que

$$\|I_n(f)\|^2 = n! \sum_{\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n} a_{n_1, n_2, \dots}^2 = n! \|f\|^2 < \infty.$$

De manera que $I_n(f) \in K_n$.

Inversamente, suponga que $\phi \in K_n$. Por el Teorema 3.4.4, ϕ puede ser expresado como

$$\phi = \sum_{\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n} b_{n_1, n_2, \dots} \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}$$

Defina f en $[a, b]^n$ por

$$f = \sum_{\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n} b_{n_1, n_2, \dots} \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} e_1^{\otimes n_1} \hat{\otimes} e_2^{\otimes n_2} \hat{\otimes} \dots.$$

Entonces, por argumentos anteriores, se tiene que

$$\|f\|^2 = \frac{1}{n!} \sum_{\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n} b_{n_1, n_2, \dots}^2 = \frac{1}{n!} \|\phi\|^2 < \infty.$$

Esto muestra que $f \in L^2_{sim}([a, b])$. Además, de forma análoga se demuestra que $I_n(f) = \phi$.

Para demostrar la unicidad, suponga que existe $g \in L^2_{sim}([a, b]^n)$ tal que $I_n(g) = \phi$, entonces

$$\|f - g\| = \frac{1}{\sqrt{n!}} \|I_n(f - g)\| = \frac{1}{\sqrt{n!}} \|I_n(f) - I_n(g)\| = 0,$$

lo cual implica que $f = g$. □

Observación 3.6.2. *Del Teorema 3.6.1 se sigue que $K_n = \{I_n(f); f \in L^2_{sim}([a, b]^n)\}$. Además, por el Teorema 3.5.5 se tiene que $\|I_n(f)\| = \sqrt{n!}\|f\|$ para toda $f \in L^2_{sim}([a, b]^n)$.*

El siguiente teorema se sigue del Teorema 3.3.4 y del Teorema 3.6.1.

Teorema 3.6.3. *Teorema de Wiener-Itô.*

El espacio $L^2_B(\Omega)$ puede ser descompuesto en suma directa ortogonal

$$L^2_B(\Omega) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} K_i,$$

donde K_i consiste de integrales múltiples Wiener-Itô de orden i . Cada función $\phi \in L^2_B(\Omega)$ puede ser representado únicamente por

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \quad f_n \in L^2_{sim}([a, b]^n), \quad (3.77)$$

además, se tiene la siguiente identidad

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|^2.$$

Dada una función $\phi \in L^2_B(\Omega)$, ¿Cómo podemos obtener las funciones f_n , $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, en (3.77)? Se dará respuesta a la pregunta anterior usando el concepto de derivada de la teoría de ruido blanco.

Definición 3.6.4. *Sea $\phi = I_n(f)$, $f \in L^2_{sim}([a, b])$. La derivada variacional de ϕ está definida por*

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = n I_{n-1}(f_n(t, \cdot)), \quad (3.78)$$

donde el lado derecho de (3.78) es 0 cuando $n = 0$. En particular, se verifica que $\frac{\partial}{\partial t} I(f) = f(t)$.

Teorema 3.6.5. *Suponga $\phi \in L_B^2(\Omega)$ y que todas las derivadas variacionales existen y tienen esperanza dada por*

$$f_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} \phi \right].$$

Entonces, la expansión Wiener-Itô de ϕ está dada por

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n).$$

Demostración. Supongamos que $\phi \in L_B^2(\Omega)$ está representado por (3.77). Aplicando el operador $\frac{\partial}{\partial t}$ n veces, se consigue

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} \phi = n! f_n(t_1, t_2, \dots, t_n) + \sum_{i=1}^{\infty} [(n+i)! I_i(f_{n+i}(t_1, t_2, \dots, t_n, \cdot))]. \quad (3.79)$$

Como $\mathbb{E}[I_n(f)] = 0$ para todo $n \geq 1$, tomando esperanza en ambos lados de (3.79) se consigue

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} \phi \right] &= n! \mathbb{E}[f_n(t_1, t_2, \dots, t_n)] \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} (n+i)! \mathbb{E}[I_i(f_{n+i}(t_1, t_2, \dots, t_n, \cdot))]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

De lo que se obtiene

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} \phi \right] = n! \mathbb{E}[f_n(t_1, t_2, \dots, t_n)].$$

Por lo tanto,

$$f_n(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} \phi \right].$$

□

Sea $\phi = e^{-B(1)^2}$, note que $\phi \in L_B^2(\Omega)$. En base en el Teorema 3.6.5 encontraremos los tres primeros términos distintos de cero en la expansión Wiener-Itô de ϕ . Se verifica que

$$\mathbb{E} \left[e^{-B(1)^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Reescribiendo ϕ como $\phi = \exp \left[- \left(\int_0^1 dB(s) \right)^2 \right]$ y usando (3.78) se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \phi = \phi \left\{ -2 \int_0^1 1 dB(s) \right\} = -2B(1)e^{-B(1)^2}.$$

De modo que

$$f_1(t_1) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \phi \right] = 0, \quad \forall 0 \leq t_1 \leq 1.$$

Derivando una vez más, se consigue

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \phi = -2(1 - 2B(1)^2) e^{-B(1)^2},$$

tomando esperanza se llega a

$$f_2(t_1, t_2) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \phi \right] = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Las siguientes dos derivadas variacionales de ϕ están dadas por

$$\frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3} \phi = 4(3B(1) - 2B(1)^3) e^{-B(1)^2},$$

$$\frac{\partial^4}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3 \partial t_4} \phi = 4(3 - 12B(1)^2 + 4B(1)^4) e^{-B(1)^2}.$$

Aplicando esperanza en las expresiones anteriores, se obtiene que

$$f(t_1, t_2, t_3) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3} \phi \right] = 0,$$

$$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial^4}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3 \partial t_4} \phi \right] = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

Finalmente, se escriben los primeros tres términos distintos de cero en la expansión Wiener-Itô

$$e^{-B(1)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} I_2(1) + \frac{4}{3\sqrt{3}} I_4(1) + \dots.$$

3.7. Representación de martingalas brownianas

Sea $f(t)$ un proceso estocástico en $L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$, entonces por el Teorema 1.3.1 y el Teorema 1.3.2, el proceso estocástico $\{X_t = \int_a^t f(s)dB(s); a \leq t \leq b\}$, es una martingala continua con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t^B\}$. Además, por el Teorema 1.2.6 se tiene que $\mathbb{E}[X_t^2] = \int_a^t \mathbb{E}[f(s)^2] dt < \infty$ para todo $t \in [a, b]$. En esta sección, mostraremos que cada $\{\mathcal{F}_t^B\}$ -martingala cuadrado integrable tiene la propiedad anterior, tal hecho es una simple aplicación del Teorema 3.6.3.

Teorema 3.7.1. *Sea $X \in L^2_B(\Omega)$ tal que $\mathbb{E}[X] = 0$. Entonces existe un proceso estocástico $\theta \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ tal que*

$$X = \int_a^b \theta(t)dB(t).$$

Demostración. Sea $n \geq 1$ y considere una integral múltiple Wiener-Itô.

$$X = \int_{[a,b]^n} f(t_1, t_2, \dots, t_n)dB(t_1)dB(t_2) \cdots dB(t_n),$$

donde $f \in L^2_{sim}([a, b]^n)$. Por el Teorema 3.5.6, X se reescribe como

$$X = n! \int_a^b \int_a^{t_1} \cdots \left[\int_a^{t_{n-1}} f(t_1, t_2, \dots, t_n)dB(t_n) \right] \cdots dB(t_2)dB(t_1).$$

Defina el proceso estocástico $\theta(t)$ por

$$\theta(t) = n! \int_a^t \cdots \left[\int_a^{t_{n-1}} f(t_1, t_2, \dots, t_n)dB(t_n) \right] \cdots dB(t_2), \quad a \leq t \leq b.$$

Entonces, escribimos X como la integral estocástica

$$X = \int_a^b \theta(t)dB(t). \tag{3.81}$$

Observe que el proceso estocástico $\theta(t)$ es adaptado con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t^B\}$. Usando nuevamente el Teorema 3.5.6 para reescribir $\theta(t)$ como una integral múltiple Wiener-Itô, como sigue

$$\begin{aligned} \theta(t) &= n(n-1)! \int_a^t \cdots \left[\int_a^{t_{n-1}} f(t_1, t_2, \dots, t_n)dB(t_n) \right] \cdots dB(t_2) \\ &= n \int_{[a,t]^{n-1}} f(t_1, t_2, \dots, t_n)dB(t_2) \cdots dB(t_n). \end{aligned} \tag{3.82}$$

Aplicando el Teorema 3.5.5 encontramos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\theta(t)^2] &= n^2(n-1)! \int_{[a,b]^{n-1}} f(t, t_2, \dots, t_n)^2 dt_2 \cdots dt_n \\ &\leq n \cdot n! \int_{[a,b]^{n-1}} f(t, t_2, \dots, t_n)^2 dt_2 \cdots dt_n.\end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$\int_a^b \mathbb{E} [\theta(t)^2] dt \leq n \cdot n! \int_{[a,b]^n} f(t, t_2, \dots, t_n)^2 dt_2 \cdots dt_n = n \mathbb{E} [X^2] < \infty.$$

Entonces $\theta \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ y la integral estocástica en (3.81) es una integral de Itô.

Para finalizar la prueba, suponga que X tiene derivada variacional $\frac{\partial}{\partial t}$, entonces se demostrará que

$$\theta(t) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial t} X \mid \mathcal{F}_t^B \right].$$

Por el Teorema 3.6.3, X tiene la expansión $X = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ con $f_n \in L^2_{sim}([a, b]^n)$. Además, $\mathbb{E} [X] = 0$ y $f_0 = \mathbb{E} [X]$ de modo que

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n), \quad \|X\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n! \|f_n\|^2. \quad (3.83)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina el proceso estocástico

$$\theta_n(t) = n! \int_0^t \cdots \left[\int_a^{t_{n-1}} f_n(t_1, t_2, \dots, t_n) dB(t_n) \right] \cdots dB(t_2).$$

Entonces, por (3.81) conseguimos la igualdad

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \theta_n(t) dB(t). \quad (3.84)$$

Por (3.82) podemos escribir $\theta_n(t)$ como una integral múltiple Wiener-Itô

$$\theta_n(t) = n \int_{[a,t]^{n-1}} f_n(t, t_2, \dots, t_n) dB(t_2) \cdots dB(t_n).$$

Por lo tanto, del Teorema 3.5.9 los θ_n 's son ortogonales. Defina

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^n \theta_k(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Note que $I_n(f_n) = \int_a^b \theta_n(t) dB(t)$, de modo que $\mathbb{E} [I_n(f_n)^2] = \int_a^b \mathbb{E} [\theta_n(t)^2] dt$. Entonces para cualquier $n > m$,

$$\int_a^b \mathbb{E} [|S_n(t) - S_m(t)|^2] dt = \sum_{k=m+1}^n \int_a^b \mathbb{E} [\theta_k(t)^2] dt = \sum_{k=m+1}^n \mathbb{E} [I_k(f_k)^2]. \quad (3.85)$$

Observe que la última igualdad de (3.85) converge a cero cuando $n, m \rightarrow \infty$. Esto muestra que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe y es igual a θ en el espacio $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Entonces por (3.84) se tiene que

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b \theta_k(t) dB(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(t) dB(t) = \int_a^b \theta(t) dB(t).$$

Lo cual completa la prueba del teorema. □

Definición 3.7.2. *Un proceso estocástico \hat{X}_t es llamado una versión de X_t si $\mathbb{P} [\{\hat{X}_t = X_t\}] = 1$, para cada $t \in [a, b]$.*

Teorema 3.7.3. *Teorema de representación martingala.*

Sea $\{M_t; a \leq t \leq b\}$, una martingala cuadrado integrable con respecto a $\{\mathcal{F}_t^B; a \leq t \leq b\}$ y $M_a = 0$. Entonces M_t tiene una versión continua \hat{M}_t dada por

$$\hat{M}_t = \int_a^t \theta(s) dB(s), \quad a \leq t \leq b,$$

donde $\theta \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$.

Demostración. Por suposición, $M_b \in L_B^2(\Omega)$ y $\mathbb{E} [M_b] = \mathbb{E} [M_a] = 0$, por lo que es posible aplicar el Teorema 3.7.1 a la variable aleatoria M_b para conseguir un proceso estocástico $\theta(t)$ en $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ tal que

$$M_b = \int_a^b \theta(s) dB(S).$$

Defina un proceso estocástico \hat{M}_t por

$$\hat{M}_t = \int_a^t \theta(s) dB(s), \quad a \leq t \leq b.$$

Por los Teoremas 1.3.1 y 1.3.2, \hat{M}_t es una martingala continua con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t^B\}$. Además, para cada $t \in [a, b]$,

$$M_t = \mathbb{E} [M_b | \mathcal{F}_t^B] = \mathbb{E} [\hat{M}_b | \mathcal{F}_t^B] = \hat{M}_t, \quad \mathbb{P} - c.s.$$

Por lo tanto, \hat{M}_t es una versión de M_t . □

Capítulo 4

Aplicaciones

En el presente capítulo se consideran modelos deterministas de ecuaciones diferenciales en los que se tomarán los parámetros como variables aleatorias, convirtiendo la solución en un proceso estocástico $X(t, \xi(\omega))$. Además, utilizaremos la expansión del caos polinomial truncada para describir la solución $X(t, \xi(\omega))$ gráficamente. Para realizar esto último, haremos uso del llamado método de proyección espectral no intrusivo. Los llamados métodos no intrusivos se basan en un conjunto de resoluciones de modelos deterministas, que corresponden a algunos valores específicos o realizaciones de ξ , con la finalidad de construir aproximación para $X(t, \xi(\omega))$. Los métodos intrusivos por su parte requieren de una reformulación del sistema original en un sistema de ecuaciones diferenciales que es mucho más largo y complejo que el original. Como los métodos no intrusivos no requieren de una reformulación del problema original son muy atractivos para la propagación de la incertidumbre paramétrica en modelos complejos. Sin embargo, en los métodos no intrusivos el número de resoluciones del modelo aumenta exponencialmente con el número de variables aleatorias independientes en la parametrización. Este inconveniente hace que los métodos no intrusivos sean computacionalmente costosos si el modelo determinista subyacente es costoso de resolver.

4.1. Expansión de caos homogéneo truncado

Por el Teorema 3.4.7, cada $\phi \in L_B^2(\Omega)$ tiene una única expansión en serie dada por

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n} a_{n_1, n_2, \dots} \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots},$$

donde $a_{n_1, n_2, \dots} = \mathbb{E}_\nu [\phi \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}] = \int_\Omega \phi \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} d\nu$.

Para cada $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea

$$\phi_p = \sum_{n=0}^p \sum_{\sum_{i=1}^{\infty} n_i = n} a_{n_1, n_2, \dots} \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} \quad (4.1)$$

Observe que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \phi_p = \phi.$$

En la práctica p no va a infinito, por lo que trabajaremos con la expansión truncada de caos dada en (4.1). Llamaremos a ϕ_p una expansión de orden p . El número de términos en la expansión truncada (4.1) está dada por

$$\sum_{i=0}^p \text{card}\{(z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m; \sum_{j=1}^m z_j = i\}.$$

El siguiente lema nos da el número de elementos en la expresión anterior.

Lema 4.1.1. *Sea p un entero positivo, entonces*

$$\sum_{i=0}^p \text{card}\{(z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m; \sum_{j=1}^m z_j = i\} = \frac{(m+p)!}{m!p!}.$$

La demostración del Lema 4.1.1 se encuentra en [1].

En el desarrollo posterior con ayuda del Lema 4.1.1, resulta conveniente reescribir (4.1) como

$$\phi_p = \sum_{k=0}^P a_k \Psi_k(\xi), \quad (4.2)$$

siendo $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, donde ξ_i son variables aleatorias normales independientes idénticamente distribuidas, para $i = 1, 2, \dots, m$. Además, existe un correspondencia uno a uno entre los coeficientes a_k y $a_{n_1, n_2, \dots}$ y P satisface

$$P = \frac{(m+p)!}{m!p!} - 1.$$

Es posible hacer el cambio de $\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}$ por $\Psi(\xi)$ ya que $\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}$ es un producto de factores finitos, es decir,

$$\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} = \frac{1}{\sqrt{n_1}} H_{n_1}(\bar{e}_1; 1) \frac{1}{\sqrt{n_2}} H_{n_2}(\bar{e}_2; 1) \cdots \frac{1}{\sqrt{n_m}} H_{n_m}(\bar{e}_m; 1),$$

para $n_k \in \mathbb{N}$ con $k = 1, 2, \dots, m$, basta identificar a $\psi_{n_k}(\xi_k) = \frac{1}{\sqrt{n_k}} H_{n_k}(\bar{e}_k; 1)$ y recordar que \bar{e}_k es la integral de Itô para e_k un elemento básico de $L^2[a, b]$ de modo que \bar{e}_k sigue una distribución normal con media cero y varianza 1 de lo que se obtiene

$$\Psi_k(\xi) = \prod_{k=1}^m \psi_{n_k}(\xi_k).$$

Por ejemplo, para una expansión de primer grado, los primeros polinomios de Hermite están dados por

$$\begin{aligned} \Psi_0(\xi) &= \psi_0(\xi) = 1, \\ \Psi_1(\xi) &= \psi_1(\xi) = \xi, \\ \Psi_2(\xi) &= \psi_2(\xi) = \xi^2 - 1, \\ \Psi_3(\xi) &= \psi_3(\xi) = \xi^3 - 3\xi, \\ \Psi_4(\xi) &= \psi_4(\xi) = \xi^4 - 6\xi^2 + 3, \\ \Psi_5(\xi) &= \psi_5(\xi) = \xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi. \end{aligned}$$

Si se requiere una expansión de segundo grado, los primeros polinomios de Hermite en dos dimensiones están dados por

$$\begin{aligned} \Psi_0(\xi) &= \psi_0(\xi_1)\psi_0(\xi_2) = 1, \\ \Psi_1(\xi) &= \psi_1(\xi_1)\psi_0(\xi_2) = \xi_1, \\ \Psi_2(\xi) &= \psi_0(\xi_1)\psi_1(\xi_2) = \xi_2, \\ \Psi_3(\xi) &= \psi_2(\xi_1)\psi_0(\xi_2) = \xi_1^2 - 1, \\ \Psi_4(\xi) &= \psi_1(\xi_1)\psi_1(\xi_2) = \xi_1\xi_2, \\ \Psi_5(\xi) &= \psi_2(\xi_1)\psi_0(\xi_2) = \xi_2^2 - 1. \end{aligned}$$

Más aún, como $\Psi_0 \equiv 1$ es posible escribir la expansión (4.2) como

$$\phi_p = a_0 + \sum_{k=1}^P a_k \Psi_k(\xi).$$

Note que la solución de un sistema dinámico con m parámetros aleatorios es el proceso estocástico $X(t, \xi(\omega))$ el cual aproximaremos con su expansión truncada de caos

$$X(t, \xi) \approx a_0(t) + \sum_{k=1}^P a_k(t) \Psi_k(\xi).$$

Se verifica que $\mathbb{E}[X(t, \xi)] \approx \mathbb{E}\left[a_0(t) + \sum_{k=1}^P a_k(t)\Psi_k(\xi)\right] = a_0(t)$ y

$$\begin{aligned} \text{Var}[X(t, \xi)] &\approx \mathbb{E}\left[\left[a_0(t) + \sum_{k=1}^P a_k(t)\Psi_k(\xi)\right]^2\right] - \mathbb{E}\left[a_0(t) + \sum_{k=1}^P a_k(t)\Psi_k(\xi)\right]^2 \\ &= a_0^2(t) + \sum_{k=1}^P a_k^2(t)\mathbb{E}[\Psi_k^2(\xi)] - a_0^2(t) \\ &= \sum_{k=1}^P a_k^2(t)\mathbb{E}[\Psi_k^2(\xi)]. \end{aligned}$$

Si tenemos las expansiones $X(t, \xi) \approx x_0(t) + \sum_{k=1}^P x_k(t)\Psi_k(\xi)$ y $Y(t, \xi) \approx y_0(t) + \sum_{k=1}^P y_k(t)\Psi_k(\xi)$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y)(t) &\approx \mathbb{E}[(X(t, \xi) - \mathbb{E}[X(t, \xi)])(Y(t, \xi) - \mathbb{E}[Y(t, \xi)])] \\ &= \sum_{k=1}^P x_k(t)y_k(t)\mathbb{E}[\Psi_k^2(\xi)]. \end{aligned}$$

4.2. Sistemas dinámicos aleatorios

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X &= F(X), \\ X(0) &= x_0, \end{cases} \quad (4.3)$$

donde $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. La solución al sistema (4.3) es una función $X: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida sobre algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ de la forma $X(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)]^T$, para cada $t \in I$.

Además, asumiendo $F \in C^1$ se garantiza la existencia y unicidad de X .

Abordaremos el caso en que tenemos parámetros aleatorios para la función F , esto es, $F = F(X, \xi)$ con $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ donde ξ_i son variables aleatorias normales independientes idénticamente distribuidas para $i = 1, 2, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, reescribiendo (4.3) con parámetros aleatorios tenemos

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t, \xi) &= F(X(t, \xi), \xi), \\ X(0, \xi) &= x_0, \mathbb{P}\text{-c.s.} \end{cases} \quad (4.4)$$

De manera que la solución para (4.4) es el proceso estocástico:

$$X : I \times (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

que tiene la forma $X(t, \xi) = [X_1(t, \xi), X_2(t, \xi), \dots, X_n(t, \xi)]^T$. Para encontrar $X_i(t, \xi)$ dado el tiempo t , consideraremos la expansión de caos homogéneo con $i = 1, 2, \dots, n$ dada por

$$X_i(t, \xi) = \sum_{k=0}^P a_k^i(t) \Psi_k(\xi).$$

Para ejemplificar lo anterior, en la siguiente sección, se discutirá la ecuación logística con un parámetro aleatorio y un tipo de ecuación Riccati con un parámetro aleatorio.

4.2.1. Modelo logístico

Tomemos en cuenta el modelo determinista

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) &= rX(t) \left(1 - \frac{X(t)}{K}\right), \\ X(0) &= x_0, \end{cases} \quad (4.5)$$

conocido como modelo logístico, $X(t)$ denota la población al tiempo t , r la tasa de crecimiento de la población X y K la capacidad de carga del sistema. Asumimos que la tasa de crecimiento de la población depende únicamente del tamaño de la población. Tal suposición parece ser razonable para organismos simples como los microorganismos pues para organismos complejos intervienen diferentes factores que la ecuación logística no toma en cuenta [5].

Dejamos entrar la aleatoriedad a través del parámetro r ya que la tasa de crecimiento poblacional se podría ver afectada por agentes externos al sistema, por ejemplo, migraciones, invasión de bacterias o virus. Entonces, sea

$$r(\xi) = a + b\xi,$$

donde ξ es una variable aleatoria que sigue una distribución normal estándar, en este caso se toma como condición inicial determinista $X(0) = x_0$. Por lo tanto, obtenemos el sistema con coeficiente aleatorio

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t, \xi) &= r(\xi)X(t, \xi) \left(1 - \frac{X(t, \xi)}{K}\right), \\ X(0, \xi) &= x_0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Consideremos la expansión truncada de caos polinomial de X dada por

$$X(t, \xi) \approx \sum_{k=0}^P x_k(t) \Psi_k(\xi),$$

donde ξ es variable aleatoria normal estándar. Notemos que en este caso $\Psi_k = \psi_k$ ya que solo tenemos un parámetro aleatorio, es decir, tenemos la expansión de X en caos de una dimensión. Tomando el producto interior entre $X(t, \xi)$ y $\Psi_k(\xi)$, ayudándose de la ortogonalidad de Ψ_k se tiene

$$\begin{aligned} \langle X(t, \xi), \Psi_k(\xi) \rangle &\approx \left\langle \sum_{k=0}^P x_k(t) \Psi_k(\xi), \Psi_k(\xi) \right\rangle \\ &= \langle x_k(t) \Psi_k(\xi), \Psi_k(\xi) \rangle \\ &= x_k(t) \langle \Psi_k(\xi), \Psi_k(\xi) \rangle. \end{aligned}$$

Entonces

$$x_k(t) \approx \frac{\langle X(t, \xi), \Psi_k(\xi) \rangle}{\langle \Psi_k(\xi), \Psi_k(\xi) \rangle} = \frac{\mathbb{E}_\nu [X(t, \xi) \Psi_k(\xi)]}{\mathbb{E}_\nu [\Psi_k^2(\xi)]}, \quad (4.7)$$

para cada $k = 1, \dots, P$.

En (4.7), el momento $\mathbb{E}_\nu [\Psi_k^2(\xi)]$ es encontrado analíticamente, ya que Ψ_k es un polinomio de Hermite. Más aún, por el Teorema 3.2.4 tenemos que $\mathbb{E}_\nu [\Psi_k^2(\xi)] = k!$. El único inconveniente es calcular el numerador, el problema recae en que el término $X(t, \xi)$ es desconocido. Sin embargo, notemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu [X(t, \xi) \Psi_k(\xi)] &= \int_{\Omega} X(t, \xi(\omega)) \Psi_k(\xi(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} X(t, x) \Psi_k(x) f_{\xi}(x) dx, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde $f_{\xi}(x)$ es la función de densidad de probabilidad de ξ . De modo que podemos obtener $\mathbb{E}_\nu [X(t, \xi) \Psi_k(\xi)]$ calculando la última integral en (4.8). El valor de tal integral será calculada numéricamente usando la cuadratura de Gauss-Hermite, de lo que obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} X(t, x) \Psi_k(x) f_{\xi}(x) dx \approx \sum_{j=1}^N w_j X(t, x_j) \Psi_k(x_j).$$

Bajo el esquema de la cuadratura de Gauss-Hermite, x_j son los nodos y w_j los pesos. (Ver Apéndice, Sección A.3).

Para finalizar con los cálculos es necesario encontrar $X(t, x_j)$ lo que se obtiene resolviendo el sistema (4.6) para $\xi = x_j$, $j = 1, 2, \dots, N$, es decir, resolver

$$\frac{d}{dt}X(t, x_j) = (a_1 + b_1 x_j)X \left(1 - \frac{X}{K}\right),$$

sujeto a $X(0, x_j) = x_0$, para $j = 1, 2, \dots, N$.

Por (4.7) obtenemos una aproximación de $x_k(t)$ de la siguiente forma

$$x_k(t) \approx \frac{\sum_{j=1}^N w_j X(t, x_j) \Psi_k(x_j)}{k!}. \quad (4.9)$$

Por lo tanto, la aproximación de $X(t, \xi)$ está dada por

$$X(t, \xi) \approx \sum_{k=0}^P \frac{\sum_{j=1}^N w_j X(t, x_j) \Psi_k(x_j)}{k!} \Psi_k(\xi). \quad (4.10)$$

Se sabe que la solución determinista para (4.5) es

$$X(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0) e^{rt}}.$$

De modo que para $j = 1, 2, \dots, N$ encontramos que

$$X(t, x_j) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0) e^{(a_1 + b_1 x_j)t}}.$$

De tal modo que la aproximación para el modelo logístico con coeficiente aleatorio está dado por

$$\begin{aligned} X(t, \xi) &\approx \sum_{k=0}^P \frac{\sum_{j=1}^N w_j \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0) e^{(a_1 + b_1 x_j)t}} \Psi_k(x_j)}{k!} \Psi_k(\xi) \\ &= \sum_{k=0}^P \frac{x_0 K}{k!} \left(\sum_{j=1}^N w_j \frac{1}{x_0 + (K - x_0) e^{(a_1 + b_1 x_j)t}} \Psi_k(x_j) \right) \Psi_k(\xi). \end{aligned} \quad (4.11)$$

La relación dada por (4.11) nos da la pauta para realizar simulaciones donde se compara la solución del sistema determinístico y las realizaciones del proceso estocástico aproximado. Para este propósito haremos uso del paquete R .

Inicialmente, requerimos de una función que obtenga los coeficientes de los polinomios de Hermite de grado n para cada $n \in \mathbb{N}$, los cuales se obtienen fácilmente de (3.29), los argumentos que requiere esta función son el grado del polinomio y

el parámetro ρ que para nuestro estudio toma el valor 1. Tales coeficientes son guardados en un arreglo de $n + 1$ entradas. Además, es necesario implementar otra función que a partir de los coeficientes, regrese la evaluación del polinomio de Hermite normalizado de grado n en un punto. Los argumentos involucrados para esta función son el grado del polinomio y el punto de evaluación.

Creamos una función con argumentos: incremento en el tiempo (Δt), longitud de intervalo iniciando en 0 (H), capacidad del sistema (K), tasa de crecimiento poblacional (r), el número de elementos de la expansión truncada de orden p (P) y condición inicial (x_0). Dentro de esta función abrimos un archivo que contiene los nodos y pesos de la cuadratura de Gauss-Hermite y se guardan en una matriz A .

Luego se define un vector B de tamaño $\frac{H}{\Delta t}$ con entradas 0. En este vector B se guardan los diferentes valores correspondientes al tiempo ($0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, H$), las evaluaciones con nodos de la solución al sistema determinista y tomar realizaciones de una variable aleatoria normal para obtener el valor de $\Psi_k(\xi)$. Se tomarán P iteraciones, en cada una de ellas B debe inicializarse como $\mathbf{0}$. Posteriormente, inicializamos un vector C de tamaño $\frac{H}{\Delta t}$, en $\mathbf{0}$. Al término de cada iteración, asignaremos $C \leftarrow C + B$ que tendrá como resultado los valores que nos permitirán graficar la solución al modelo aleatorio dinámico. Finalmente, para equilibrar la solución obtenida en el vector C realizamos este proceso M veces y tomamos la media de los valores obtenidos. Lo anterior se ha implementado para el sistema logístico, lo cual se presenta a continuación.

Asuma $r(\xi) = 2.08 + 0.1\xi$ y considere los valores de la Tabla 4.1.

Δt	0.05
K	5.0
x_0	1.0
M	10
N	10
P	15

Tabla 4.1: Valores para simulación.

Donde Δt es el incremento a través del intervalo $[0, 7]$, K la capacidad de carga del sistema, x_0 condición inicial, M es el número de simulaciones realizadas para obtener la solución en promedio, N el número de nodos en la cuadratura de Gauss-Hermite y P el número de elementos de la expansión truncada de orden p . Utilizando el paquete R y los datos anteriores se obtiene la gráfica en Figura 4.1.

Solución a ecuación logística con caos polinomial

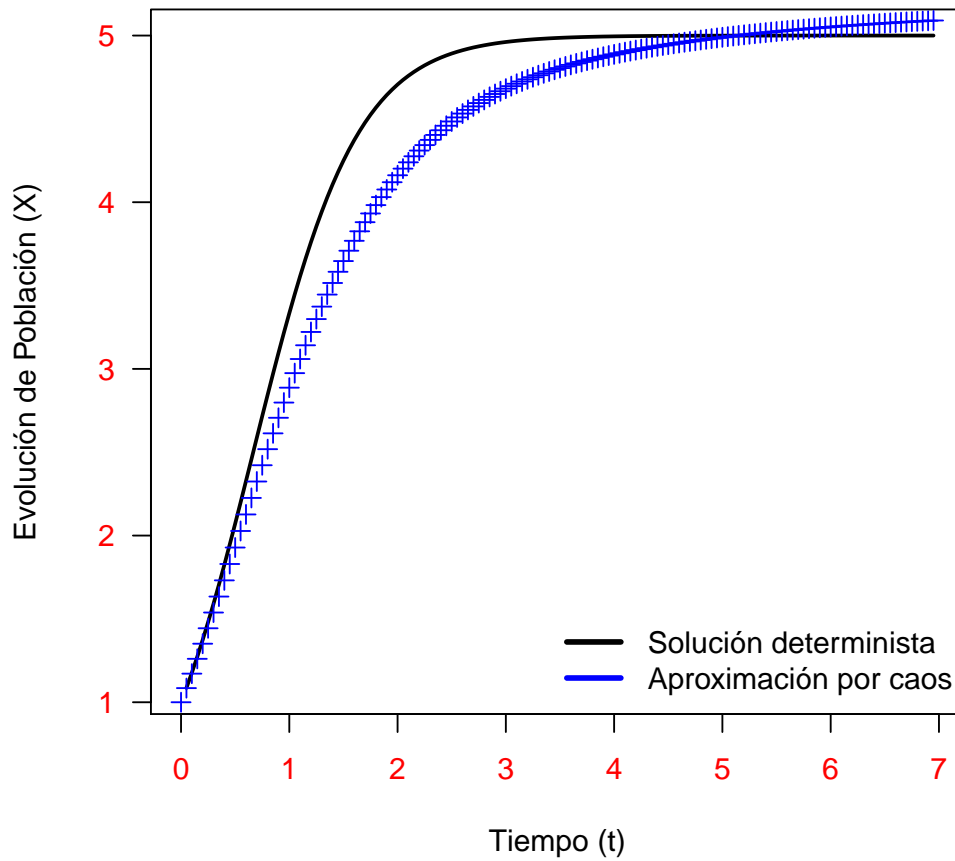
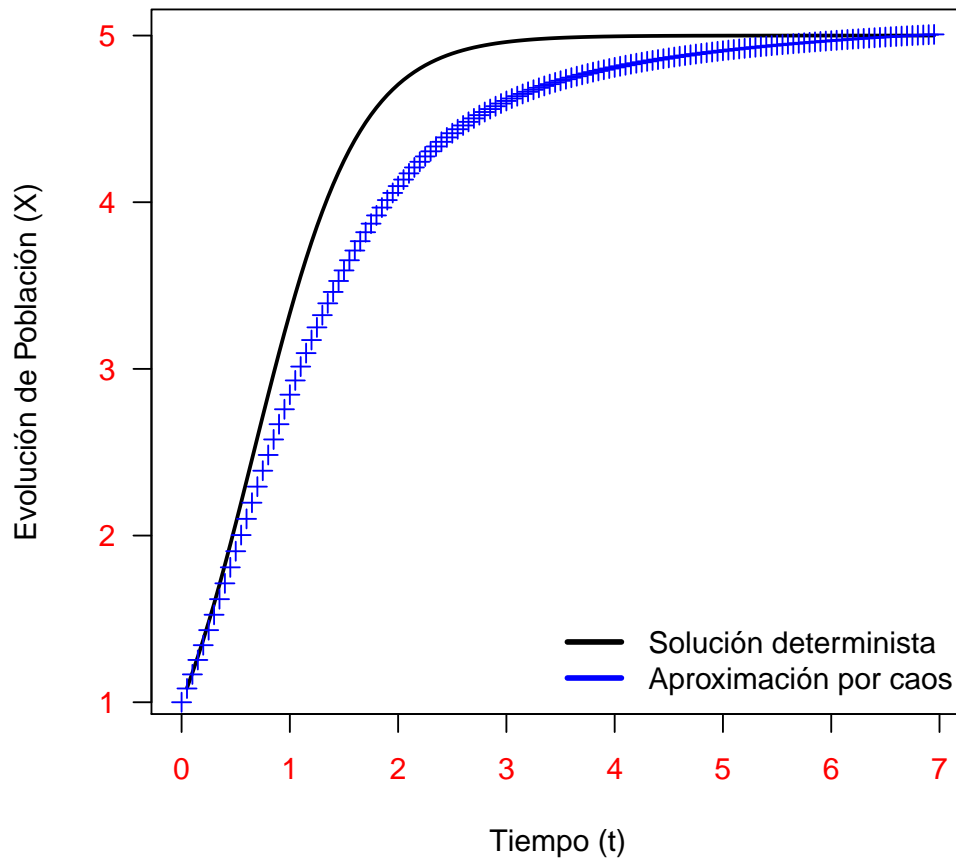


Figura 4.1: Crecimiento de población $M = 10$.

Con los mismos datos que en la realización anterior excepto que M toma el valor 20 se obtiene la solución mostrada en Figura 4.2.

Solución a ecuación logística con caos polinomialFigura 4.2: Crecimiento de población $M = 20$.

Observemos que la aleatoriedad del parámetro r , se presentan diferencias en cada realización de la solución al sistema, por ejemplo, las realizaciones en Figura 4.1 y 4.2, resultando distintos valores de los puntos de equilibrio del modelo logístico y para cada uno de estos puntos una conclusión distinta.

4.2.2. Ecuación diferencial de Riccati

Una ecuación diferencial no lineal de primer orden dada por

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} &= p(t) + q(t)X(t) + r(t)X^2(t), \\ X(0) &= x_0, \end{cases}$$

es llamada ecuación Riccati. La ecuación diferencial de Riccati es de gran importancia ya que aparece en aplicaciones de Física Matemática, Teoría de Control y Biología Matemática (Ver [9], [22]). Además, de la ecuación Riccati se derivan diferentes ecuaciones que tienen gran relevancia como la ecuación Bernoulli.

En particular, abordaremos el caso en que $p(t) = 1$, $q(t) = b$ y $r(t) = -c$, entonces obtenemos la siguiente ecuación Riccati

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) &= 1 + bX(t) - cX^2(t), \\ X(0) &= x_0. \end{cases} \quad (4.12)$$

La solución al sistema determinista (4.12) está dada por

$$X(t) = \frac{1}{2c} \left(b + \tanh \left(\frac{1}{2}t\sqrt{b^2 + 4c} - \arctan \left(\frac{-2x_0c + b}{\sqrt{b^2 + 4c}} \right) \right) \sqrt{b^2 + 4c} \right).$$

Si se considera únicamente el parámetro b como aleatorio en (4.12) se consigue

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t, \xi) &= 1 + b(\xi)X(t, \xi) - cX^2(t, \xi), \\ X(0, \xi) &= x_0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Entonces la aproximación truncada de caos homogéneo de primer orden al proceso estocástico que es solución de (4.13) está dada por

$$X(t, \xi) \approx \sum_{k=0}^P \frac{\sum_{j=1}^N w_j X(t, x_j) \Psi_k(x_j)}{k!} \Psi_k(\xi), \quad (4.14)$$

donde

$$X(t, x_j) = \frac{1}{2c} \left(b(x_j) + \tanh \left(\frac{1}{2}t\sqrt{b^2(x_j) + 4c} - \arctan \left(\frac{-2x_0c + b(x_j)}{\sqrt{b^2(x_j) + 4c}} \right) \right) \sqrt{b^2(x_j) + 4c} \right),$$

con $b(x_j) = a_2 + b_2x_j$.

De la misma manera que en el modelo logístico se ha implementado funciones en el paquete R para obtener simulaciones para la solución del sistema dinámico. Ayudándonos de la expresión obtenida en (4.14), asumiendo $b(\xi) = 17.5 + 0.1\xi$ y tomando en cuenta los valores de la Tabla 4.2, donde Δt es el incremento a través del intervalo $[0, 5]$, x_0 condición inicial, M el número de simulaciones realizadas para obtener la solución en promedio, N el número de nodos en la cuadratura de Gauss-Hermite y P el número de elementos de la expansión truncada de orden p . Utilizando el paquete R y los datos anteriores se obtiene la solución en Figura 4.3.

Δt	0.05
c	1.0
x_0	1.0
M	10
N	10
P	15

Tabla 4.2: Valores para simulación.

Solución a ecuación Riccati con caos polinomial

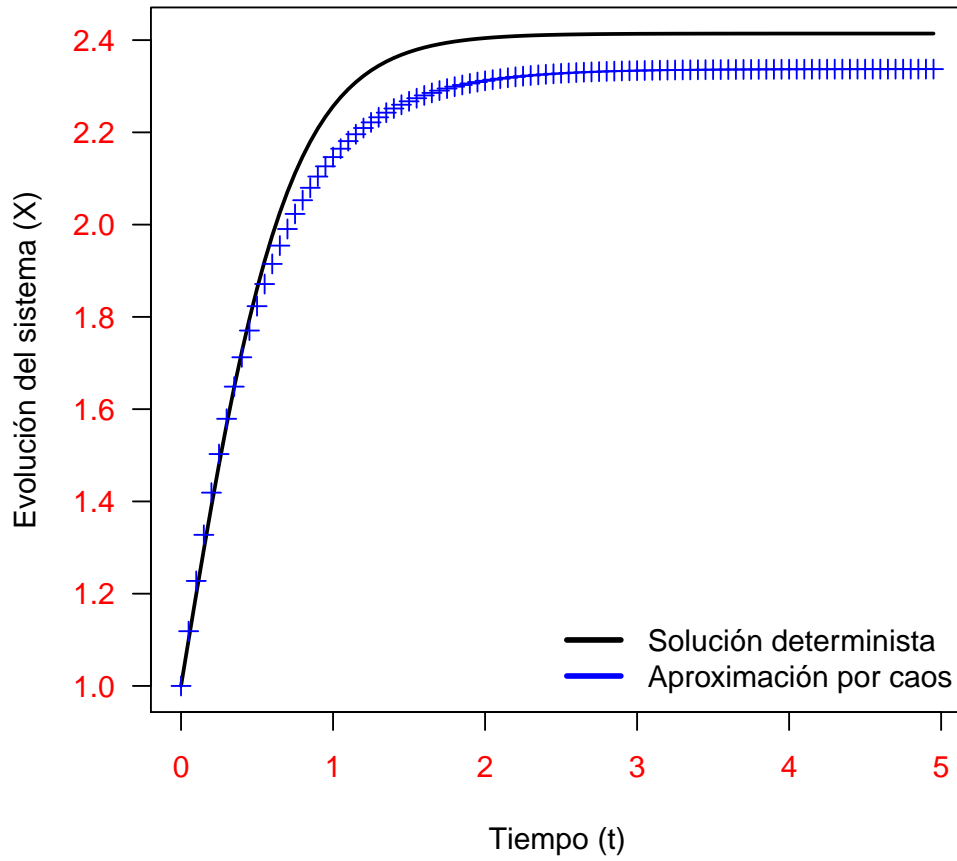
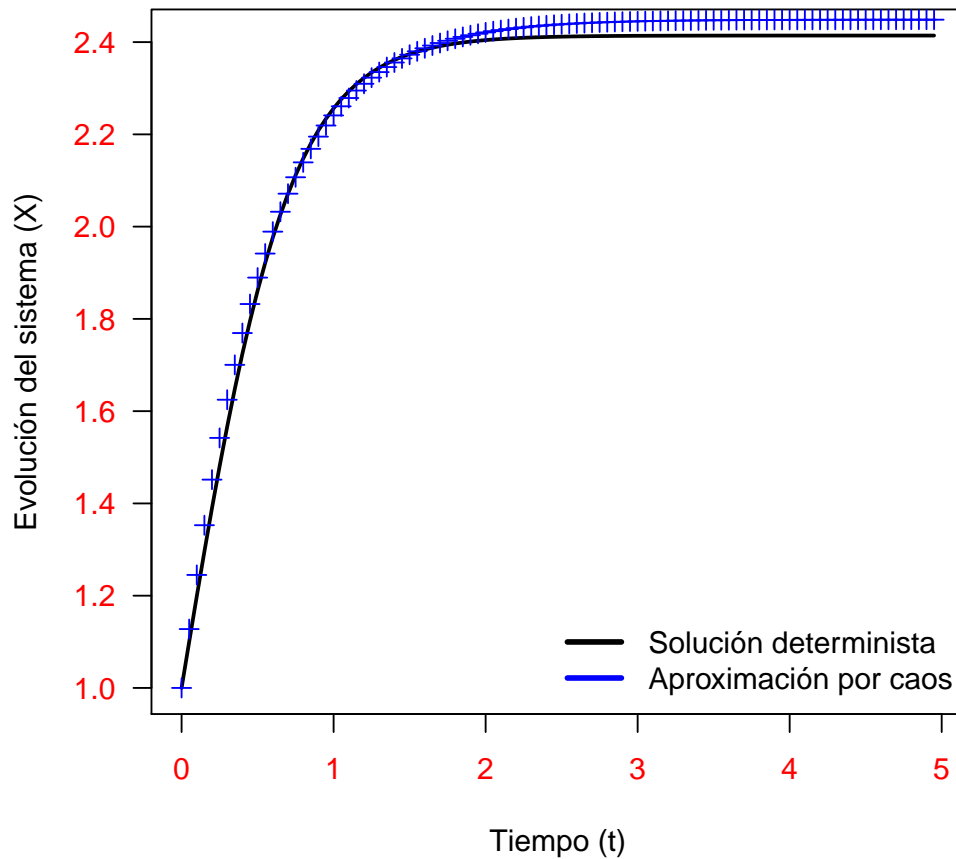


Figura 4.3: Solución ecuación Riccati $M = 10$.

Otra realización al proceso estocástico se presenta en Figura 4.4 con $M = 20$.

Solución a ecuación Riccati con caos polinomialFigura 4.4: Solución ecuación Riccati $M = 20$.

Algunas soluciones de la ecuación diferencial aleatoria de Riccati presentada en (4.13) se pueden observar en Figuras 4.3 y 4.4. Además, en Figura 4.3 se tomó la media entre 10 simulaciones del sistema mientras que en Figura 4.4 la media se tomó respecto a 20 simulaciones.

Con la información obtenida en cada realización del procesos estocástico que es solución al sistema dinámico aleatorio se obtienen diferentes valores para los puntos de equilibrio resultando así en diversas conclusiones del modelo. Para equilibrar los resultados se han promediado los valores obtenidos en diferentes simulaciones.

CAPÍTULO 4. APLICACIONES

Además, es posible hacer el análisis cualitativo de los modelos para obtener las conclusiones correspondientes a cada modelo.

Conclusiones y trabajo futuro

En Capítulo 1 se presentó la construcción de la integral estocástica así como algunas propiedades al considerar tal integral como proceso estocástico. La revisión de lo anterior fue con el propósito de presentar la fórmula de Itô y resaltar algunas aplicaciones teóricas importantes como el Teorema de caracterización de Lévy y el Teorema de Girsanov. Posteriormente, se revisó el tema en que nos hemos centrado: el caos homogéneo. A partir de la base ortonormal de caos homogéneo obtenida con productos finitos de polinomios normalizados de Hermite, es posible escribir cualquier función en $L_B(\Omega)$ de manera única. Además, la relación entre el caos homogéneo y las integrales múltiples Wiener-Itô está dada por el Teorema Wiener-Itô.

Para la sección de aplicaciones se consideraron dos ecuaciones diferenciales deterministas: la ecuación logística y una ecuación Riccati, las cuales surgen en muchos modelos matemáticos. A cada ecuación se le modificó un parámetro que se asumió como una función lineal de una variable normal estándar volviéndolo aleatorio y en consecuencia, la solución de la ecuación diferencial se convierte en un proceso estocástico. Nuestro propósito ha sido estudiar los distintos escenarios bajo tal incertidumbre y en consecuencia obtener diversas conclusiones de cada una de las soluciones encontradas. Se realizaron simulaciones en el paquete *R*, que fueron obtenidas por medio del caos polinomial de orden 1. Para la simulación en cada modelo, fue necesario aproximar el proceso estocástico solución por medio de una expansión truncada de caos polinomial en la cual los coeficientes son desconocidos. Para hallar tales coeficientes se aplicó el método de proyección espectral no intrusivo. Tal método es de gran ayuda en cuanto al costo computacional. Finalmente, se obtuvieron las gráficas entre las realizaciones del proceso estocástico aproximado y la solución al sistema determinista. A pesar de tener únicamente la expansión truncada con polinomios de Hermite normalizados de orden 1, se tiene una buena aproximación a la solución del sistema determinista. Sin embargo, el modelo aleatorio tiene la ventaja de ser más adaptado a la naturaleza aleatoria del mundo real.

Es importante mencionar que la simulación para ordenes más altos de caos polinomial, presenta algunos inconvenientes. Por ejemplo, el costo computacional crece exponencialmente y el cálculo de integrales que aparecen implícitamente en el método son difíciles de calcular. Además, en las aproximaciones truncadas de orden p se tiene problemas para calcular el valor de $P = \frac{(m+p)!}{m!p!}$ para valores $m > 12$ y $p > 12$. Trabajos futuros, involucran aplicar el caos homogéneo a sistemas dinámicos más complejos, para lograrlo será necesario mitigar los gastos computacionales consecuencia de la expansión truncada de orden p , cuyo gasto recae en el número de elementos básicos de los espacios K_n , así como la aproximación de integrales que implícitamente aparecen en el método utilizado. Para contrarrestar el gasto, será de utilidad aplicar métodos numéricos más eficientes para aproximar integrales múltiples sobre \mathbb{R}^n .

Apéndice A

Apéndice

A.1. Esperanza condicional y propiedades

Definición A.1.1. Sea $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F})$. Suponga \mathcal{G} es una σ -álgebra y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. La esperanza condicional de X dado \mathcal{G} está definida como la única variable aleatoria Y que satisface las siguientes condiciones

1. Y es \mathcal{G} -medible;
2. $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}$ para todo $A \in \mathcal{G}$.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio fijo de probabilidad. Suponga que $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F})$ y \mathcal{G} una σ -álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Entonces las siguientes aseveraciones son válidas \mathbb{P} -c.s.

1. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.
2. Si X es \mathcal{G} -medible, entonces $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$.
3. Si X y \mathcal{G} son independientes, entonces $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.
4. Si Y es \mathcal{G} -medible y $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.
5. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, entonces $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}]$.
6. Si $X, Y \in L^2(\Omega)$ y $X \leq Y$, entonces $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.
7. $|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[|X||\mathcal{G}]$.
8. $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ y $X, Y \in L^1(\Omega)$.

Teorema A.1.2. *Desigualdad de Doob.*

Sea $Y(t)$, $a \leq t \leq b$ una submartingala continua por la derecha. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$P \left[\left\{ \sup_{a \leq t \leq b} \{Y(t) \geq \varepsilon\} \right\} \right] \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} [\text{máx}\{Y(b), 0\}].$$

En particular, si X_t es una martingala continua, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$P \left[\left\{ \sup_{a \leq t \leq b} \{|X_t| \geq \varepsilon\} \right\} \right] \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} [|X_b|].$$

A.2. Otros resultados

Teorema A.2.1. *Teorema de continuidad de Kolmogorov.*

Sea $X(t)$, $0 \leq t \leq 1$, un proceso estocástico separable. Supongamos que existen constantes $\alpha, \beta, K > 0$ que satisfacen la desigualdad

$$\mathbb{E} [|X(t) - X(s)|^\alpha] \leq K^{1+\beta}, \forall 0 \leq t, s \leq 1.$$

Entonces $X(t)$ tiene una realización continua, es decir, existe Ω_0 tal que $\mathbb{P}[\Omega_0] = 1$ y para cada $\omega \in \Omega_0$, $X(t, \omega)$ es una función continua de t .

Teorema A.2.2. *Lema de Borel Cantelli.*

Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de eventos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] < \infty$. Entonces

$$\mathbb{P} \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right] = 0.$$

Teorema A.2.3. *Sea $M(t)$, $a \leq t \leq b$, una martingala continua derecha, cuadrado integrable con límite izquierdo. Entonces existe una única descomposición*

$$M^2(t) = L(t) + A(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (\text{A.1})$$

donde $L(t)$ es una martingala derecha continua con límite izquierdo y $A(t)$ es un proceso creciente, previsible, continuo derecho tal que $A(a) = 0$ y $\mathbb{E}[A(t)] < \infty$ para todo $t \in [a, b]$.

Por conveniencia, usaremos $\langle M \rangle_t$ para denotar el compensador $A(t)$ de $M^2(t)$ en (A.1).

Teorema A.2.4. Sean M_t una martingala continua, cuadrado integrable y $F(t, x)$ una función con derivadas parciales continuas $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$. Entonces

$$F(t, M_t) = F(a, M_a) + \int_a^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, M_s) ds + \int_a^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, M_s) dM_s + \frac{1}{2} \int_a^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, M_s) d \langle M \rangle_s .$$

Teorema A.2.5. Teorema de convergencia dominada.

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles sobre E . Suponga que existe una función g que es integrable sobre E y dominante sobre $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, en el sentido que $\|f_n\| \leq g$ en E para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f$ puntualmente casi en cualquier parte en E , entonces f es integrable sobre E y $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f$.

Espacio de Wiener

Sea \mathcal{C} el espacio de Banach de funciones continuas ω de valores reales sobre $[0, 1]$ con $\omega(0) = 0$. La norma sobre \mathcal{C} es $\|\omega\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |\omega(t)|$. Un subconjunto cilíndrico

A de \mathcal{C} es un conjunto de la forma

$$A = \{\omega \in \mathcal{C}; (\omega(t_1), \omega(t_2), \dots, \omega(t_n)) \in U\}, \quad (\text{A.2})$$

donde $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$ y $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, la sigma álgebra de Borel de \mathbb{R}^n . Sea \mathcal{R} la colección de todos los subconjuntos cilíndricos de \mathcal{C} . Note que \mathcal{R} no es un σ -álgebra.

Suponga que $A \in \mathcal{R}$ está dado por (A.2). Defínase $\mu(A)$ por

$$\mu(A) := \int_U \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp \left(-\frac{(u_i - u_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right) \right] du_1 \cdots du_n, \quad (\text{A.3})$$

donde $t_0 = u_0 = 0$. Observe que $\mu(A)$ definido en (A.3) es independiente de las diferentes expresiones del lado derecho de (A.2), lo cual significa que $\mu(A)$ está bien definida. Por lo tanto, el mapeo μ es un mapeo de \mathcal{R} a $[0, 1]$. Podemos verificar fácilmente que $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ es finitamente aditivo, es decir, para cualesquiera $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{R}$ disjuntos dos a dos, se verifica

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i).$$

Teorema A.2.6. *El mapeo μ sobre \mathcal{R} es σ -aditivo, es decir, para cualesquiera $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{R}$ disjuntos dos a dos tales que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$, la siguiente igualdad es válida*

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Entonces μ tiene una única σ -aditiva extensión a $\sigma(\mathcal{R})$, la sigma álgebra generada por \mathcal{R} . La sigma álgebra $\sigma(\mathcal{R})$ resulta ser la misma que la sigma álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} . Para verificar este hecho es necesario probar que la bola unitaria cerrada $\{\omega \in \mathcal{C}; \|\omega\|_{\infty} \leq 1\}$ pertenece a $\sigma(\mathcal{R})$, pero esto se sigue de la siguiente igualdad:

$$\{\omega \in \mathcal{C}; \|\omega\|_{\infty} \leq 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \omega \in \mathcal{C}; \left| \omega \left(\frac{k}{n} \right) \right| \leq 1, \forall k = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Denotamos a $\hat{\mu}$ como la extensión de μ a $\mathcal{B}(\mathcal{C})$. Por lo tanto, $(\mathcal{C}, \hat{\mu})$ es un espacio de probabilidad, este es llamado espacio de Wiener. La medida $\hat{\mu}$ es llamada la medida de Wiener.

Teorema A.2.7. *El proceso estocástico $B(t, \omega) = \omega(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\omega \in \mathcal{C}$, es un movimiento browniano.*

Demostración. Sea $\omega \in \mathcal{C}$, entonces $0 = \omega(0) = B(0, \omega)$ y $B(t, \omega)$ es continua para $t \in [0, 1]$. De manera que se satisfacen las condiciones (1) y (4) de la Definición 1.1.1.

Sean $0 < s < t \leq 1$, entonces

$$\hat{\mu}\{B(t) - B(s) \leq a\} = \hat{\mu}\{\omega(t) - \omega(s) \leq a\} = \hat{\mu}\{\omega \in \mathcal{C}; (\omega(s), \omega(t)) \in U\},$$

donde $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; u_2 - u_1 \leq a\}$.

Por definición de medida de Wiener $\hat{\mu}$ se tiene

$$\hat{\mu}\{B(t) - B(s) \leq a\} = \int_U \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 s(t-s)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u_1^2}{s} + \frac{(u_2 - u_1)^2}{t-s} \right) \right] du_1 du_2.$$

Haciendo el cambio de variables $u_1 = x, u_2 - u_1 = y$ se consigue:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}\{B(t) - B(s) \leq a\} &= \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 s(t-s)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{s} + \frac{y^2}{t-s} \right) \right] dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp \left(-\frac{y^2}{2(t-s)} \right) dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp \left(-\frac{x^2}{2s} \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp \left(-\frac{y^2}{2(t-s)} \right) dy. \end{aligned}$$

Entonces, $B(t) - B(s)$ tiene distribución normal con media cero y varianza $t - s$, así la condición (2) de la Definición 1.1.1 se satisface.

Para verificar la condición (3), sean $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Por argumentos similares a los anteriores, se puede mostrar que

$$\begin{aligned} & \hat{\mu}\{B(t_1) \leq a_1, B(t_2) - B(t_1) \leq a_2, \dots, B(t_n) - B(t_{n-1}) \leq a_n\} \\ &= \hat{\mu}\{B(t_1) \leq a_1, \}, \hat{\mu}\{B(t_2) - B(t_1) \leq a_2, \}, \dots, \hat{\mu}\{B(t_n) - B(t_{n-1}) \leq a_n, \}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Esto implica que las variables aleatorias $B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ son independientes. \square

A.3. Cuadratura Gauss-Hermite

El polinomio de Hermite de grado n está dado por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right). \quad (\text{A.5})$$

Algunas literaturas definen los polinomios de Hermite por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right). \quad (\text{A.6})$$

La cuadratura de Gauss-Hermite tomando los polinomios de Hermite como en (A.6), nos dice que podemos aproximar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx,$$

por la suma

$$\sum_{i=1}^n w_i f(x_i).$$

De tal modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + R_n, \quad (\text{A.7})$$

donde R_n es el error de aproximación y está dado por

$$R_n = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\varepsilon),$$

para algún ε finito. Además, x_i son las raíces del polinomio $H_n(x)$ dado en (A.6) y w_i se calculan por

$$w_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 [H_{n-1}(x_i)]^2}.$$

Sin embargo, en la expansión de caos homogéneo se requiere calcular la integral, respecto a la medida Gaussiana, entonces deseamos calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) dx.$$

Para obtener los nodos y pesos hacemos el cambio de variable

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-x^2} dx,$$

donde $g(x) = f(\sqrt{2}x)$. La aproximación obtenida de (A.7) es

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) dx &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^n w_i g(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{w}_i f(\hat{x}_i), \end{aligned}$$

con $\hat{x}_i = \sqrt{2}x_i$ y $\hat{w}_i = \frac{w_i}{\sqrt{\pi}}$. Además, \hat{x}_i coinciden con las raíces de los polinomios de Hermite de grado n propuestos en (A.5). Una tabla con nodos y pesos de hasta grado 20 se pueden encontrar en [17].

Bibliografía

- [1] ALLEN ALEXANDERIAN. Gaussian Hilbert Spaces and Homogeneous Chaos: From theory to applications, págs. 5–10, (2010).
- [2] BERT J. DEBUSSCHERE, HABIB N. NAJM, PHILIPPE P. PÉBAY, OMAR M. KNIO, ROGER G. GHANEM AND OLIVIER P. LE MAÎTRE. Numerical Challenges in the use of polynomial chaos representations for stochastic processes. SIAM J. SCI. COMPUT. Vol. 26, págs. 698–719, (2004).
- [3] BERNT OKSENDAL. *Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications*, Springer, Sixth edition, (2003).
- [4] CLAUDE DELLACHERIE AND PAUL-ANDRÉ MEYER. *Probabilities and Potentials B. Theory of Martingales*, North Holland, (1982).
- [5] FRED BRAUER AND CARLOS CASTILLO-CHAVEZ. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer, Second edition, (2012).
- [6] HALSEY L. ROYDEN AND P. M. FITZPATRICK. *Real Analysis*, Pearson, 4th edition, (2010).
- [7] HUI-HSIUNG KUO. *Introduction to Stochastic Integration*, Springer, USA, (2006).
- [8] IOANNIS KARATZAS AND STEVEN E. SHREVE. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, Second edition, (1991).
- [9] JAMES DICKSON MURRAY. *Mathematical Biology I. An Introduction*, Springer, Third edition, (2002).
- [10] JOHN MICHAEL STEELE. *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer-Verlag, New York, (2001).
- [11] JORGE CAYAMA Y GILBERTO GONZÁLEZ-PARRA. Aplicación del caos polinomial a ecuaciones diferenciales parciales aleatorias. *Revista Ciencia e Ingeniería*, vol. 34: págs. 101–110, (2013).

- [12] JORGE CAYAMA Y GILBERTO GONZÁLEZ-PARRA. Comparación de caos polinomial y Monte Carlo para ecuaciones diferenciales ordinarias aleatorias. *Revista Ciencia e Ingeniería*, vol. 33: págs. 9–20, (2012).
- [13] JUAN ANTONIO LICEA SALAZAR. *The polynomial chaos method with applications to random differential equations*. PhD thesis, The University of Texas at Arlington, (2013).
- [14] KAI LAI CHUNG AND RUTH J. WILLIAMS. *Introduction to Stochastic Integration*, Birkhäuser, Second edition, (1990).
- [15] LUIS RINCÓN. *Curso intermedio de probabilidad*, México, (2006).
- [16] LUIS RINCÓN. *Introducción a los procesos estocásticos*, México, (2012).
- [17] MILTON ABRAMOWITZ AND IRENE A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, (1970).
- [18] MORRIS W. HIRSCH, STEPHEN SMALE AND ROBERT L. DEVANEY. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Elsevier, Third edition, (2012).
- [19] OLIVIER LE MAÎTRE, OMAR M KNIO. *Spectral Methods for Uncertainty Quantification With Applications to Computational Fluid Dynamics*, Springer, (2010).
- [20] PÉTER MEDVEGYEV. *Stochastic Integration Theory*, Oxford University Press Inc., New York, (2007).
- [21] PHILIP E. PROTTER. *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, Second edition, (2004).
- [22] RICHARD BELLMAN. *Introduction to the mathematical theory of control processes*, Academic Press, New York, (1967).
- [23] RICHARD DURRETT. *Stochastic Calculus*, Dover, New York, (1996).
- [24] ROGER G. GHANEM AND POL D. SPANOS. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Dover, New York, Second edition, (2002).
- [25] SVANTE JANSON. *Gaussian Hilbert Spaces*, Cambridge University Press, (1997).
- [26] ZDZISLAW BRZEŹNIAK AND TOMASZ ZASTAWNIAK. *Basic Stochastic Processes*, Springer, (1999).