



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD  
AUTÓNOMA DE PUEBLA

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA  
ELECTRÓNICA

SIMULACIÓN DE CONTROL DE  
ATTITUDE BASADO EN  
MAGNETO-TORQUES PARA UN  
CUBESAT

TESIS

PARA OBTENER EL TITULO DE:  
LICENCIADO EN ELECTRÓNICA

PRESENTA:  
C. HILARIO PÁJARO ADRIÁN

ASESOR:  
DR. GUSTAVO MENDOZA TORRES

PUEBLA, PUE MARZO 2022



# Índice

<b>1. Resumen</b>	<b>4</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>5</b>
2.1. Tipos de magneto-torques . . . . .	6
2.2. Tipos de control de attitude . . . . .	8
2.3. Trabajos Realizados . . . . .	10
<b>3. Electromagnetismo</b>	<b>11</b>
<b>4. Funcionamiento de los magneto-torques</b>	<b>17</b>
4.1. Conceptos . . . . .	17
4.2. Funcionamiento . . . . .	21
<b>5. Valores de los Parámetros a Controlar</b>	<b>26</b>
5.1. Orientación . . . . .	26
5.2. Sistemas de Referencia . . . . .	26
5.2.1. Rotaciones . . . . .	29
5.3. Campo Geomagnético . . . . .	32
5.4. Condiciones Atmosféricas . . . . .	33
5.5. Especificaciones de un Cubesat . . . . .	35
<b>6. Simulador</b>	<b>40</b>
6.1. Descripción . . . . .	40
6.2. Simulación . . . . .	45
6.2.1. Orientación de la cara x del satélite hacia la tierra . . .	50
<b>7. Control</b>	<b>54</b>
7.1. Control PD . . . . .	55
7.1.1. Estabilidad . . . . .	57
7.1.2. Simulación . . . . .	60
7.1.3. Resultados . . . . .	61
7.2. Control PI . . . . .	63
7.2.1. Estabilidad . . . . .	64
7.2.2. Simulación . . . . .	65
7.2.3. Resultados . . . . .	66
<b>8. Conclusiones</b>	<b>68</b>

## Índice de figuras

1.	Interacción entre las cargas $q_1$ y $q_2$ . . . . .	14
2.	Interacción entre las cargas con signos contrarios e iguales . . .	15
3.	(a) Líneas de campo eléctrico asociados a una carga puntual positiva (b) dirección de las líneas de campo electrostático de una carga puntual que va desde $r'$ de la carga hasta $r$ . . . . .	16
4.	Representación de un solenoide y una bobina por las que cir- cula una corriente, con sus líneas de fuerza [15] . . . . .	17
5.	Comparación de bobinas con núcleo ferromagnético y sin núcleo [15] . . . . .	18
6.	Regla de la mano derecha para determinar la orientación de $\hat{n}$	19
7.	Momento dipolar de una espira . . . . .	20
8.	Sistemas Coordenados . . . . .	26
9.	Sistemas coordenados inerciales con centro en la tierra . . . . .	28
10.	Sistema coordenado orbital $s_0$ . . . . .	28
11.	Sistema coordenado centrado en el cuerpo del satélite $s_B$ . . . . .	29
12.	Sistema coordenado centrado [26] . . . . .	36
13.	Especificaciones Cubesat [26] . . . . .	38
14.	Modelo de el Cubesat seleccionado. . . . .	46
15.	Sistemas Coordenados . . . . .	52
16.	Espacio de estados . . . . .	59
17.	Error de Posición . . . . .	61
18.	Velocidad Angular . . . . .	62
19.	Corriente suministrada al magneto-torque . . . . .	62
20.	Error de Posición . . . . .	66
21.	Velocidad Angular . . . . .	67
22.	Corriente suministrada al magneto-torque . . . . .	67

## Índice de tablas

1.	Varilla Magnetorquer NCTR-M002 [2]	6
2.	Varilla Magnetorquer NCTR-M012 [3]	6
3.	ISIS Magnetorquer board (iMTQ) [4]	7
4.	Magnetorquers MTQ3X [5]	7
5.	Varilla Magnetorquer MQ10 [6]	7
6.	Varilla Magnetorquer MQ200 [7]	7
7.	Características del Campo Geomagnético [25]	32
8.	Características de la Atmósfera [25]	33
9.	Composición atmosférica (por volumen, aire seco) [25]	33
10.	Varilla Magnetorquer NCTR-M002 [2]	45
11.	Parámetros de Simulación	45

# 1. Resumen

Los satélites artificiales han demostrado ser de gran utilidad en diferentes campos y esto se puede ver en las tecnologías que se emplean de manera cotidiana como lo es el GPS, las telecomunicaciones, redes de telefonía, así como diversos temas de investigación científica, entre otros. Actualmente los cubesats son ampliamente utilizados tanto por centros educativos como por empresas privadas, por sus múltiples ventajas como su bajo costo, fácil diseño y manufactura, en contraste con los satélites convencionales.

En este trabajo de tesis se simularán 2 controles de attitude para un cubesat basado en magneto-torques, con el objetivo de analizar su funcionalidad y comparar los sistemas. Los controles a implementar serán un control PD y un control PI.

Debido a que no será posible la construcción de dichos sistemas se buscará un simulador que cumpla con los requerimientos necesarios, de tal manera que las simulaciones sean las más precisas posible.

Para las simulaciones de los controles se tomará en cuenta que el radio de la tierra es de 6,371,000 metros para este caso en particular se propone realizar las simulaciones con una altitud de órbita igual a 300,000 metros y una excentricidad igual a 0.0002, sobre una órbita polar, utilizando un conjunto de 3 bobinas de torsión magnéticas ortogonales para el control de attitude, montados sobre un Cubesat **1U**.

## 2. Introducción

En la actualidad se a facilitado el desarrollo de proyectos espaciales ya que los costos de una misión espacial se han reducido así como se a facilitado el proceso de diseño y manufactura, esto gracias al desarrollo tecnológico ahora es más sencilla la adquisición de los componentes y software de diseño necesarios para su desarrollo permitiendo que cada vez más instituciones públicas como privadas sean capaces de desarrollar proyectos propios, ya sea para fines de lucro como lo son las telecomunicaciones o para fines de investigación científica, este último generalmente financiado por instituciones gubernamentales, de investigación o militar.

En comparación a hace algunos años el desarrollo de un proyecto de esta magnitud estaba ampliamente limitado por el costo excesivo, en cuanto a materiales, construcción, etc. limitando el desarrollo de esta clase de proyectos a instituciones con las capacidades adquisitivas para poder financiarlos.

Actualmente gracias a los cubesats se a podido fomentar el desarrollo de proyectos aeroespaciales, ya que estos requieren de especificaciones que facilitan su diseño y manufactura disminuyendo su costo. debido a que parte del estándar que debe cumplir es su tamaño reducido, pues debe estar compuesto por módulos de  $10 \times 10 \times 10 \text{ Cm.}$  y con un peso no mayor a  $1,33 \text{ Kg.}$ , estos satélites son clasificados según su configuración pues estas pueden variar según el número de cubos o unidades que lo componen, normalmente siendo configuraciones de  $(1U, 2U, 3U...)$  [1]. Este estándar permite realizar proyectos de bajo costo y con relativa facilidad.

Sin embargo, los cubesats no pueden compararse en términos de rendimiento o comportamiento a un satélite convencional, ya que los cubesats surgieron de la necesidad de diseñar, construir y operar satélites cada vez más pequeños, permitiendo a universidades y países en vías de desarrollo incursionar en el campo espacial, siendo comúnmente empleados en transmisión de información o medición de propiedades físicas hasta el monitoreo de recursos naturales.

Un sistema fundamental en los satélites es el sistema de control de attitude, existen distintos sistemas de control de attitude, uno de estos es el sistema basado en ruedas inerciales, otro sistema se basa en magneto-torques, este

es un sistema de control construido a partir de bobinas electromagnéticas, que al hacer circular corriente eléctrica crea un dipolo magnético alrededor del satélite cuyo propósito es interactuar con el campo magnético ambiental, de tal modo que las fuerzas contrarias producidas proporcionen un par útil y en conjunto con un algoritmo de control sea posible controlar attitude del mismo.

## 2.1. Tipos de magneto-torques

Existen diversos tipos de magneto-torques en el mercado, así como los componentes necesarios para su construcción. En esta sección se analizan algunos de los magneto-torques que se pueden encontrar actualmente en el mercado, con el fin de comparar las diferentes prestaciones que ofrece cada uno.

momento magnético	$> 0,2Am^2$
rango de funcionamiento	$-35^{\circ}C a 75^{\circ}C$
tensión de alimentación	5V
masa	$< 30g$

Tabla 1: Varilla Magnetorquer NCTR-M002 [2]

momento magnético	$1,19Am^2$
rango de funcionamiento	$-20^{\circ}C a 60^{\circ}C$
tensión de alimentación	5V
masa	$< 50g$

Tabla 2: Varilla Magnetorquer NCTR-M012 [3]

momento magnético	$< 3\mu T$
rango de funcionamiento	$-40^{\circ}C a 70^{\circ}C$
tensión de alimentación	5V
masa	$\sim 196g$

Tabla 3: ISIS Magnetorquer board (iMTQ) [4]

momento magnético en X Y	$0,30Am^2$
momento magnético en Z	$0,34Am^2$
rango de funcionamiento	$-40^{\circ}C a 85^{\circ}C$
tensión de alimentación	3.3V a 5V
masa	205g

Tabla 4: Magnetorquers MTQ3X [5]

momento magnético en	$10Am^2$
rango de funcionamiento	$-25^{\circ}C a 60^{\circ}C$
tensión de alimentación	10V
masa	$0,45g \pm 0,05g$

Tabla 5: Varilla Magnetorquer MQ10 [6]

momento magnético en	$200Am^2$
rango de funcionamiento	$-25^{\circ}C a 60^{\circ}C$
tensión de alimentación	40V
masa	$4,1kg \pm 0,1kg$

Tabla 6: Varilla Magnetorquer MQ200 [7]

Como se puede observar cada modelo tiene diferentes características que le permiten en mayor o menor medida crear un momento magnético, así como diferentes arreglos de magneto-torques en diferentes ejes.



## 2.2. Tipos de control de attitude

Para el control de attitude, estabilización de un satélite y para este caso en particular se puede realizar mediante rotación. Este método de control se basa en mantener la rotación de tal forma que el vector de movimiento cinético se mantenga en una dirección fija respecto a un sistema de referencia inercial, de esta forma la estabilidad giroscópica otorgada por la rotación ayuda a resistir las perturbaciones causadas por el entorno que rodea al satélite.

Existen tres principales sistemas de control de attitude, de Propulsión química y eléctrica, Ruedas inerciales y magneto-torques.

- **Control a reacción:** Este sistema de control se basa en el uso de propulsores distribuidos en el satélite, estos propulsores generan pares de fuerza que permiten modificar la attitude del vehículo, de entre estos métodos de control destacan los de propulsión química y eléctrica ya que son sistemas fiables y precisos, pero son muy pesados, caros y ya que tienden a depender de combustible para su funcionamiento también dependen de la capacidad de carga del vehículo, es por lo anterior que no son métodos de control muy utilizados pues debido a las características que deben cumplir afectan la carga útil de los vehículos en los que son montados, pudiendo afectar en gran medida la misión a la que estén destinados.
- **Ruedas inerciales:** Este método de control se basa en un motor eléctrico que hace girar una rueda modificando el momento angular del satélite y debido a la ley de conservación del momento angular el satélite rota de manera proporcional y en dirección opuesta a la rotación del motor cambiando la attitude, este método de control es muy útil cuando es necesario rotar el satélite en pequeñas cantidades como por ejemplo posicionar un telescopio ya que no sería viable emplear otro sistema de control como la propulsión química sin embargo con el tiempo las ruedas inerciales pueden acumular impulso que necesita ser cancelado por este motivo deben ser complementados con otro sistema de control de attitude, otra desventaja es que al contar con múltiples partes es más propenso a fallar además de que en estos casos no es posible corregir la falla, en el caso de producirse una falla en una rueda de inercia puede ocasionar que el satélite pierda la capacidad de con-

trolar su attitude teniendo que recurrir a otros sistemas de control u ocasionar al fallo de la misión.

- **magneto-torques:** Estos son diseñados con el fin de proporcionar un momento dipolar controlable, y ya que no necesitan de combustible para funcionar, se reduce el peso del vehículo y además reduce el costo de operación reduciendo el costo del proyecto en general.

Este es un método de control de attitude económico, simple y duradero aunque una de sus desventajas es que requiere de una gran cantidad de energía, pues la eficacia del control depende de las interacciones entre el campo magnético creado por el sistema y el campo magnético ambiental, sabiendo que la capacidad del magneto-torque de crear un campo magnético esta limitado por las características de este y la corriente eléctrica suministrada, no es capaz de proporcionar un momento magnético muy grande, es por esto que en comparación ha otros sistemas de control toma mucho tiempo realizar una maniobra para cambiar la attitude [8].

El principio de funcionamiento de un magneto-torque consiste en aplicar corriente eléctrica a una bobina para que se genere un par magnético que en conjunto con la interacción del campo magnético ambiental se produzca un par capaz de hacer rotar el cubesat.

Sin embargo, debido al decrecimiento de la magnitud del campo magnético terrestre, conforme aumenta la distancia al centro del planeta, el par producido por las interacciones entre los campos magnéticos producidos por el magneto-torque y el campo magnético ambiental no es excesivamente elevado, es por esto que en cuanto sea una órbita baja y mayor sea la inclinación de la órbita por la que viaje el cubesat mayor será el campo magnético externo, y por lo tanto mayor será el par producido que se podrá aprovechar para cambiar la attitude.

### 2.3. Trabajos Realizados

Desde la creación de los cubesats los sistemas de control de attitude más utilizados en estos son magneto-torques y ruedas de reacción con un tamaño reducido. En el caso de [9] el tamaño del sistema fue reducido de tamaño a un cubo de  $5\text{cm}$ . de cada lado para poder integrarlo en un cubesat, integrando tres micro magneto-torques, tres micro ruedas de reacción y tres magnetómetros dando como resultado un control de attitude de bajo costo elaborado con componentes comerciales del tipo (*comercial y listo para usar*), logrando un sistema de control con un consumo de  $4W$ , que en conjunto con una ley de control proporcional, se logra maniobrar el satélite en los tres ejes mediante la combinación de ambos actuadores.

En [10] además de utilizar torques magnéticos en los tres ejes se usa una pluma de extensión de gradiente de gravedad para mejorar la estabilización, en este caso se hace uso de tres métodos para calcular las ganancias que denominan los pares de control (ganancias de control), utilizando los siguientes métodos, ecuación dinámica linealizada, regulador cuadrático lineal (LQR) y por el método de productos cruzados, finalmente se simularon y evaluaron su rendimiento.

- **Método simplificado de ecuación dinámica linealizada** en donde se consideran las perturbaciones causadas por la extensión del gradiente de gravedad, además se suponen intervalos de tiempo cortos, ángulos de attitude pequeños y despreciando los términos de acoplamiento.
- **Regulador cuadrático lineal (LQR):** Este método es capaz de operar un sistema a un costo mínimo, en donde el sistema dinámico esta descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales y una función cuadrática llamada problema LQ.
- **Método de productos cruzados:** Este método solo ocupa el magnetómetro y los giroscopios. y ya que el control depende de la medida del vector geomagnético relativo al vector geomagnético de referencia, este método no garantiza que el vector de attitude converja a cero, pues le vector del error de attitude a lo largo del campo geomagnético no se puede controlar.

### 3. Electromagnetismo

El electromagnetismo es una rama de la física que se encarga de estudiar los fenómenos relacionados con la electricidad y el magnetismo, sin embargo el electromagnetismo se divide en diferentes ramas que se encargan de estudiar diferentes fenómenos causados por estas interacciones, estas ramas y sus campos de estudio son las siguientes:

- **Electrostática:** Esta rama se encarga de estudiar los sistemas de cargas eléctricas en equilibrio.
- **Magnetostática:** Estudia los fenómenos creados por una corriente eléctrica estacionaria.
- **Inducción magnética:** Estudia los fenómenos magnéticos causados por una corriente eléctrica que varía en el tiempo.
- **Radio electricidad:** Estudia las transmisiones de energía por ondas electromagnéticas.
- **Electrodinámica:** Estudia las interacciones dinámicas entre corrientes eléctricas.
- **Electrónica:** Se enfoca en el uso del voltaje, corrientes (normalmente bajas) y fenómenos cuánticos, esta rama es especialmente útil para la transferencia, control y procesamiento de información.

A pesar de todas las ramas del electromagnetismo en esta sección solo abordaremos aquellas en las que se basa el funcionamiento del magneto-torque o hacen posible su funcionamiento, comenzando con la definición e historia desde sus inicios así como los experimentos y descubrimientos que contribuyeron en su desarrollo.

Según [11, 12, 13, 14], el electromagnetismo se define como el estudio de los fenómenos eléctricos y magnéticos causados por cargas eléctricas en reposo o en movimiento, el descubrimiento del electromagnetismo es particularmente notable, por el hecho de que una vez llevados a cabo los descubrimientos científicos, estos tuvieron de forma inmediata una aplicación en la práctica, gracias a esto se fomentó la investigación científica para resolver diferentes problemas.

La existencia de cargas eléctricas fue descubierta hace más de 2500 años por el astrónomo y filósofo griego Tales de Mileto, que observó que después de frotar una barra de ámbar con seda o lana, esta atraía paja y pequeños pedazos de tela [11].

Entre las teorías de la física del siglo XIX la electrodinámica Maxwelliana no solo amplía la variedad de fenómenos que describen desde un pequeño conjunto de ecuaciones básicas. La electrodinámica no establece diferencias entre los fenómenos eléctricos, magnéticos y luminosos. Esta ciencia tuvo su origen con la síntesis de Gilbert en 1600 publicó un tratado, de *magnete* en el que reunió el conocimiento que se tenía en su época sobre los fenómenos magnéticos que lo condujo a proponer que la tierra es un gran imán, de esta forma pudo explicar la atracción que ejerce el polo norte sobre el extremo de una aguja imantada, así mismo se dio cuenta que cada imán posee dos polos el Norte (N) y el Sur (S), también descubrió que los polos iguales se repelen mientras que los polos distintos se atraen y que si un imán se calienta pierde sus propiedades magnéticas, las cuales vuelve a recuperar cuando se enfría a temperatura ambiente [12, 13].

Así mismo en las mediciones sobre la fuerza entre cargas eléctricas dieron origen a la ley de Coulomb en 1785, descubrió que la magnitud de esta fuerza varía con la distancia entre los polos, ya que mientras mayor sea la distancia que los separa es menor la fuerza de atracción o repulsión según sea el caso, si la distancia aumenta al doble, la fuerza disminuye a una cuarta parte, si la distancia aumenta al triple, la fuerza disminuye a la novena parte y así sucesivamente [12, 13].

En 1820 el descubrimiento de Oersted sobre las interacciones entre las brújulas y las corrientes fue el inicio del estudio de la relación entre la electricidad y el magnetismo, basada en los experimentos de Ampere, realizados unos meses después del descubrimiento de Oersted que revelaron una relación oculta, debido a que observó que las corrientes eléctricas están constituidas por cargas en movimiento y por lo tanto son fuente de acciones eléctricas y a la vez fuentes de efectos magnéticos. A partir de estos experimentos se hizo posible el diseño de imanes artificiales conocidos como electroimanes y solenoides, de esta forma se comprendió que toda forma de magnetismo se debe a corrientes eléctricas macroscópicas como en los solenoides y electroimanes o microscópicas como en los imanes naturales y brújulas [12].

En 1831 Faraday demostró la imposibilidad de separar los fenómenos eléctricos de los magnéticos, Faraday descubrió que los solenoides en movimiento con corriente constante, o solenoides en reposo con corrientes variables en el tiempo generan corrientes en circuitos cercanos, este efecto se conoce como efecto Faraday o inducción electromagnética, esto dio inicio a la idea de campo electromagnético [12].

En 1864 Maxwell realizó una síntesis teórica de los trabajos de Ampere y Faraday sobre la electricidad y el magnetismo, además de demostrar la unicidad de los fenómenos eléctricos y magnéticos lo condujo al descubrimiento de que la luz era de origen eléctrico y magnético, además como consecuencia de la teoría que desarrolló predijo la existencia de ondas electromagnéticas, esta teoría aseguraba que el amplio espectro de oscilaciones electromagnéticas posibles (lo que comúnmente llamamos luz) solo es una estrecha franja cuya peculiaridad es que corresponde a las ondas electromagnéticas detectables por el ojo [12, 13].

A partir de la física elemental sabemos que existen dos tipos de cargas (positivas y negativas), ambos tipos de cargas son fuentes de un campo eléctrico. Las cargas en movimiento producen una corriente la cual origina un campo magnético. Un campo eléctrico que varía con el tiempo está acompañado por un campo magnético y viceversa, por lo tanto, los campos eléctricos y magnéticos variantes con el tiempo están relacionados uno con otro produciendo un campo electromagnético [11].

El concepto fundamental de la electrostática es el de la carga eléctrica, el concepto de carga eléctrica aparece por primera vez en la ley de Coulomb. Tanto la teoría de la electrostática como la ley de la gravitación básica, conducen a la idea de campo como unidad de fuerza por unidad de carga o por unidad de masa [12].

En ambos casos es posible definir el potencial eléctrico o gravitacional, ya que su comportamiento matemático es expresado con la ecuación de Poisson, además la forma del potencial eléctrico en ambas teorías conduce a la ley de la conservación de la energía, con lo que se puede deducir que la electrostática y la gravitación tienen una estructura matemática semejante, aun si el contexto de carga y masa es diferente[12].

Los experimentos que Coulomb realizó en 1785 permitieron concluir que la fuerza entre dos cuerpos cargados eléctricamente y separados una distancia grande en comparación con sus dimensiones, es proporcional al producto de las cargas  $q_1 q_2$ , esta fuerza actúa a lo largo de la línea que une a las cargas y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa las cargas[12, 14].

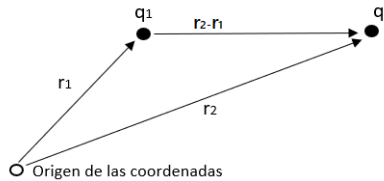


Figura 1: Interacción entre las cargas  $q_1$  y  $q_2$

Entonces la ley de Coulomb es[12, 14].

$$\begin{aligned}
 F_{q_1 \rightarrow q_2} &= \text{Fuerza que } q_1 \text{ ejerce sobre } q_2 \\
 &= k \frac{q_1 q_2 (r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} \\
 F &= \frac{k |q_1 q_2|}{r^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Donde  $k$  es una constante llamada **constante de Coulomb**

$$k = 8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$$

Además la fuerza es atractiva cuando las cargas eléctricas son de signo opuesto y es repulsiva cuando las cargas son del mismo signo.

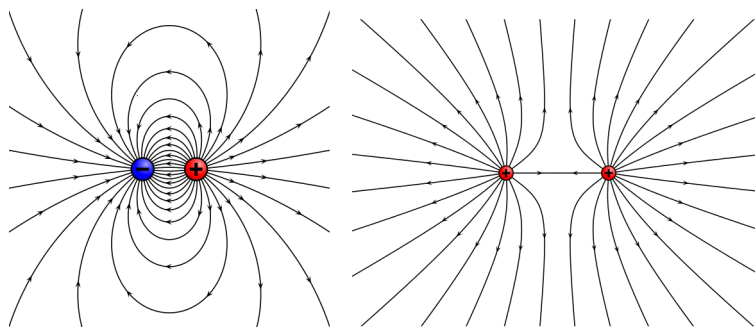


Figura 2: Interacción entre las cargas con signos contrarios e iguales

Como se puede observar en las imágenes anteriores el campo eléctrico puede ser representado dibujando las líneas que indican su dirección. Además el vector del campo magnético es tangente a las líneas del campo eléctrico, estas líneas se llaman líneas de fuerza ya que muestran la dirección de la fuerza ejercida sobre una carga positiva que se podría decir es el punto de observación.

Los experimentos realizados empezando con los de Millikan en 1907 demostraron que la carga eléctrica esta cuantizada. Ya que las cargas eléctricas del protón y del electrón son iguales en magnitud, pero son opuestas en signo, siendo el electrón negativo y el protón positivo[12].

La ley de Coulomb, describe las interacciones entre cargas, o también puede interpretarse como una interacción entre  $q_2$  y el campo eléctrico generado por  $q_1$ .

En este caso el campo eléctrico depende solo de carga que lo genera (fuente), de tal modo que es independiente a la carga de prueba. El campo eléctrico es un vector que satisface el principio de superposición: *El campo debido a una distribución de cargas es igual a la suma de los campos generados por cada elemento de la distribución.* Al igual que  $r$  y  $F$ , el campo  $E$  es un vector polar[12].



Entonces el campo eléctrico en el punto  $r'$  generado por una carga puntual  $q$  que esta localizada en el punto  $r'$  se expresa[12]

$$E = \frac{q(r - r')}{|r - r'|^3}. \quad (3.2)$$

O bien el campo eléctrico también puede ser expresado como[14]

$$E_i = \frac{kq_1}{r_{ip}^2} \hat{r}_{ip}, \quad (3.3)$$

donde  $\hat{r}_{ip}$  es el vector unitario que apunta desde el punto de la fuente al punto de observación del campo(E).

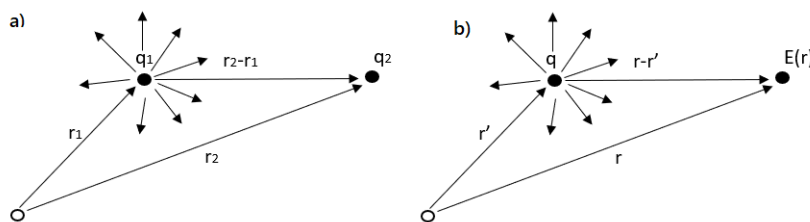


Figura 3: (a) Líneas de campo eléctrico asociados a una carga puntual positiva (b) dirección de las líneas de campo electrostático de una carga puntual que va desde  $r'$  de la carga hasta  $r$ .

## 4. Funcionamiento de los magneto-torques

### 4.1. Conceptos

Como ya sabemos un magneto-torque es básicamente una bobina y esta es básicamente un enrollado de hilo conductor (normalmente de cobre) sobre algún tipo de soporte, para que no se produzcan cortocircuitos entre espiras, el hilo se somete a un baño de barniz que le proporciona aislamiento eléctrico, la forma mas elemental de una bobina se denomina solenoide, este es construido con un alambre de cobre enrollado de forma helicoidal [15].

Partiendo del principio, cuando se hace circular una corriente eléctrica a través de un conductor alrededor de este se genera un campo magnético, si se dobla un trozo de hilo conductor en forma de espira, las líneas de fuerza que rodean al conductor saldrán por un lado y entraran por el otro formando dos polos magnéticos, así al hacer circular una corriente eléctrica por una espira esta se comporta como un pequeño imán, debido a que una bobina se trata de un conjunto de espiras, se produce la suma de los efectos magnéticos de cada espira y de esta forma se logra la concentración del campo magnético de todo el hilo conductor en un espacio reducido teniendo un polo magnético en cada extremo de la bobina[15].

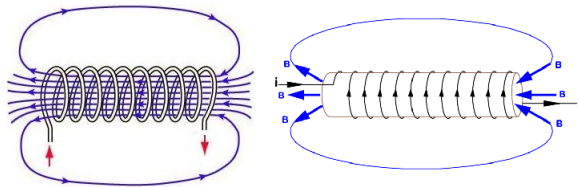


Figura 4: Representación de un solenoide y una bobina por las que circula una corriente, con sus líneas de fuerza [15]

Hasta ahora sabemos que al hacer circular una corriente eléctrica por una bobina se genera un campo magnético a su alrededor y se comporta como un imán. A esta forma de generar un campo magnético se le denomina electroimán y la densidad del campo magnético que se genera, varia de forma proporcional a el numero de espiras que tenga la bobina y de la cantidad de corriente que circule a través de ella.

Otra forma de incrementar la intensidad del campo magnético sin aumentar el número de espiras ni la corriente eléctrica se le hace circular, es utilizando lo que se denomina núcleo, este es de un material ferromagnético (normalmente hierro dulce) el material de los núcleos debe de ser del tipo que se magnetiza y desmagnetiza fácilmente, de esta manera cuando no circula una corriente eléctrica a través de ella el núcleo está parcialmente desmagnetizado y el electroimán no produce fuerza magnética. El núcleo se introduce en el solenoide para así formar una bobina. Puesto que el hierro tiene una mayor permeabilidad que el aire, las líneas de fuerza pueden circular con más facilidad, las líneas de campo magnético que genera la bobina se concentran en el núcleo, esto hace que se produzca un aumento de la densidad de flujo en el interior de la bobina [15].

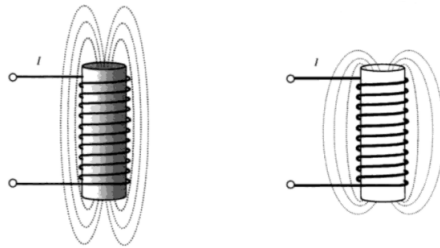


Figura 5: Comparación de bobinas con núcleo ferromagnético y sin núcleo [15]

De esta forma con el campo magnético concentrado se consigue un aumento en su intensidad, particularmente se logra un gran aumento de densidad en los extremos de la bobina.

Una espira portadora de corriente no experimenta ninguna fuerza cuando se encuentra en un campo magnético uniforme, pero sobre ella se ejerce un par que tiende a girar la orientación de la espira, esta rotación puede describirse como un vector unitario que es perpendicular al plano de la espira, esto puede ser explicado con la regla de la mano derecha, si los dedos se curvan en el mismo sentido en la que circula la corriente de la espira el dedo pulgar apuntará en la dirección del vector unitario  $\hat{n}$  [14]

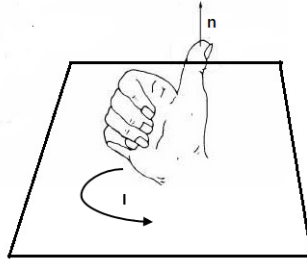


Figura 6: Regla de la mano derecha para determinar la orientación de  $\hat{n}$

Las fuerzas ejercidas por un campo magnético uniforme sobre una espira por la que circula una corriente  $I$ , y cuyo vector unitario  $\hat{n}$  forma un ángulo  $\theta$  con el campo magnético  $B$  [14]

$$F_1 = F_2 = I \cdot B. \quad (4.1)$$

Estas fuerzas forman un par, de modo que el momento es el mismo respecto a cualquier punto [14].

La magnitud del momento es

$$\tau = I \cdot A \cdot B \cdot \text{sen}(\theta), \quad (4.2)$$

si la espira tiene  $N$  vueltas y además se trata de una espira circular entonces el momento es [14]

$$\tau = N \cdot I \cdot \pi R^2 \cdot B \cdot \text{sen}(\theta) = N \cdot I \cdot A \cdot B \cdot \text{sen}(\theta). \quad (4.3)$$

Donde:

$A$  es la sección transversal de la espira.

$N$  es el número de vueltas de la espira.

El momento puede describirse en función del momento dipolar magnético  $\mu$  [14].

$$\mu = N \cdot I \cdot A \cdot \hat{n}. \quad (4.4)$$

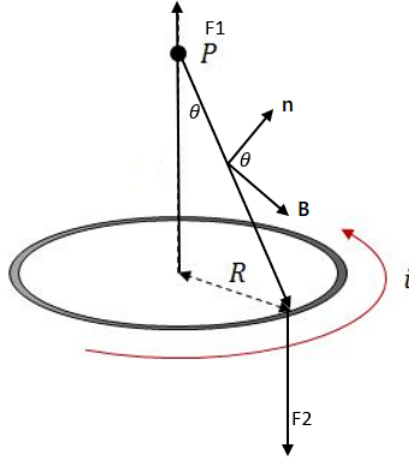


Figura 7: Momento dipolar de una espira

La unidad de medida del momento magnético es el *Amperio–metro*<sup>2</sup> ( $Am^2$ ). Ahora sabemos que el momento dipolar sobre cualquier espira es igual al producto vectorial del momento magnético  $\mu$  de la espira y el campo magnético  $B$  [14, 15].

$$\tau = \mu \times B. \quad (4.5)$$

Con lo anterior podemos definir el momento del campo magnético como un vector perpendicular al área de la espira cuyo modulo es igual a  $N \cdot A \cdot I$  y que tiene el mismo sentido que el vector unitario  $\hat{n}$

Como se sabe la fuerza magnética de una bobina depende de la sección transversal ( $A$ ), además de que cuanto mayor sea la intensidad de la corriente que circula a través de ella y mayor sea el número de espiras que la conforman será mayor la fuerza magnética. Por lo tanto el producto de el numero de espiras ( $N$ ) por la corriente ( $I$ ) y la sección transversal ( $A$ ) nos permite calcular el momento dipolar de la bobina [14, 15].

$$\mu = N \cdot A \cdot I, \quad (4.6)$$

donde  $\mu$  es el momento dipolar magnético creado por un solenoide de  $N$  espiras y sección transversal  $A$  por la que circula una corriente  $I$ .

## 4.2. Funcionamiento

Ahora se analizaran las variables físicas que hacen posible que el magnetotorque funcione.

Primero se calcula el par o momento de fuerza que hará posible que el satélite gire.[16]

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4.2.1)$$

Donde:

$\vec{\tau}$  es el par aplicado por la fuerza  $\vec{F}$ .

$\vec{r}$  representa el vector de posición desde el origen de coordenadas respecto a un origen cualquiera del eje de rotación, hasta el punto de aplicación de la fuerza.

La ecuación (4.2.1) puede ser expresada en términos del momento angular, como el momento externo neto respecto a un punto fijo que actúa sobre un sistema, que es igual a la tasa de cambio del momento angular del sistema respecto al mismo punto [16, 17]

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\theta}. \quad (4.2.2)$$

Este momento angular puede ser interpretado como la cantidad de movimiento, además la cantidad de movimiento de una partícula se define como el producto de la masa por la velocidad [16]

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (4.2.3)$$

de esta manera el momento angular se puede expresar como [16]

$$L = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{P}. \quad (4.2.4)$$

Sin embargo en esta ocasión no se trata con una partícula, sino de un sólido rígido, de tal manera que es necesario integrar la ecuación (4.2.4) para todo el sólido [19]

$$I = \int r^2 dm, \quad (4.2.5)$$

para ello se utiliza el concepto de inercia  $I$  ya que es mas fácil que trabajar con las distribuciones de masa. Además se utiliza la velocidad angular en lugar de utilizar la velocidad lineal, ya que el objetivo es que el sólido realice una rotación.

### Nota: Momento de inercia de un Sólido

---

El momento de inercia de un sólido es la magnitud escalar definida como [19]

$$I = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2$$

De esta forma, partiendo de la definición se puede deducir que el momento de inercia de un sólido depende del eje de rotación y como se menciono anteriormente al tratarse de un sólido la sumatoria de la ecuación anterior puede ser sustituida por la siguiente integral

$$I = \int dm R^2$$

Donde:

$dm$  representa el elemento de masa del sólido

$R^2$  es la distancia al eje de rotación

Dado que el elemento de masa del sólido  $dm$  está directamente relacionado con la densidad  $p$  del sólido, y además si este es homogéneo, al sustituir  $dm$  en la ecuación anterior es posible sacar la densidad de la integral

$$\begin{aligned} dm &= p dV \\ I &= p \int R^2 dV \end{aligned}$$

Donde:

$dV$  representa el volumen del sólido, y para calcular el momento de inercia de un sólido homogéneo es necesario resolver la integral anterior.

---

Tomando en cuenta lo anterior, la variación por unidad de tiempo es el factor de velocidad lineal  $\dot{r} = v$ , y en el caso de que el movimiento tenga lugar sobre una circunferencia de radio  $r$  el módulo de la velocidad lineal es la siguiente [17]

$$v = r \frac{d\theta}{dt} = rw. \quad (4.2.6)$$

Donde:

$v$  es la velocidad lineal.

$w$  es la velocidad angular.

De esta manera se obtiene la expresión del momento angular  $L$  aplicado a un sólido rígido

$$L = \int r \cdot mwr dm = \int w \cdot r^2 dm = I \cdot w, \quad (4.2.7)$$

sabemos que el funcionamiento de un Magneto-torque se basa en la capacidad de crear un dipolo magnético, al hacer circular una corriente a través de una bobina.

Así al relacionar las ecuaciones (4.2.2) y (4.2.7) se obtiene la ecuación del momento angular [16]

$$L = I \cdot \dot{\psi} \quad (4.2.8)$$

Recordando que el par magnético  $\vec{\tau}$  aplicado a una bobina expuesta a un campo magnético externo se puede expresar como, el producto vectorial del momento dipolar y el campo magnético externo [15, 14]

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (4.2.9)$$

Donde:

$\vec{\mu}$  es el momento dipolar producido por el Magneto-torque.

$\vec{B}$  es el campo magnético externo

De tal forma que el módulo del par magnético se puede expresar como [14]

$$\tau = \mu \cdot B \cdot \text{sen}(\theta), \quad (4.2.10)$$



donde  $\theta$  es el ángulo que forma el eje de acción de la fuerza magnética producida por el Magneto-torque y el ángulo deseado.

Con lo anterior es posible encontrar la **ecuación de movimiento del sistema**. Para ello es necesario aplicar el teorema de conservación del momento angular.

El principio de conservación del momento angular afirma que si el momento de las fuerzas exteriores es cero (lo que no implica que las fuerzas exteriores sean cero, si no que se trate de un sistema aislado), el momento angular total se conserva, es decir, permanece constante[19].

$$\sum T = I \cdot \dot{\omega}. \quad (4.2.11)$$

Donde  $T$  es el par aplicado sobre el sistema.

Sin embargo el par magnético producido por el Magneto-torque (ecuación (4.2.10)), no es el único que interactúa con el sistema sino que también hay un par resistivo producido por diversas causas.

De la ecuación (4.2.11) se puede deducir que al aplicar un par sobre un sólido, se crea una aceleración angular sobre el mismo, en la dirección del eje entorno al que el objeto rota. De esta forma se llega a la ecuación de movimiento del magneto-torque

$$\tau - T_r = I \cdot \dot{\omega}. \quad (4.2.12)$$

Donde  $T_r$  representa el par resistivo que se opone al movimiento.

Además como el principio de funcionamiento de un Magneto-torque se basa en el par producido por el momento dipolar magnético, de esta manera se puede relacionar la intensidad de corriente que circula por las bobinas con el movimiento del satélite.

Así relacionando las ecuaciones (4.2.10) y (4.2.12) se tiene

$$\mu \cdot B \cdot \text{sen}(\theta) - T_r = I \cdot \dot{\omega}. \quad (4.2.13)$$

Recordando que el momento dipolar producido por una bobina se calcula como en la ecuación (4.6).

Finalmente se obtiene la función de la velocidad angular  $\dot{\omega}$

$$\dot{\omega} = \frac{\mu \cdot B}{I} \cdot \text{sen}(\theta) - \frac{T_r}{I}. \quad (4.2.14)$$

Donde:

$I$  representa el momento de inercia.

$\mu$  es el momento dipolar.

$B$  es el campo magnético externo.

$T_r$  es un par resistivo.

$\theta$  es el angulo que forma el eje de acción de la fuerza magnética producida por el magneto-torque y el angulo de referencia

## 5. Valores de los Parámetros a Controlar

### 5.1. Orientación

Dado que los cubesats son normalmente designados para misiones de órbita baja y como define [20] los satélites de órbita baja (*Low Earth Orbiters, LEO*), son vehículos ubicados en órbitas casi circulares, y con altitudes conformadas entre  $300km$  y  $1500km$ , esto supone una ventaja ya que gracias a su baja altitud se requiere de una potencia mas baja para llevarlos a su órbita, en comparación con los satélites convencionales.

Sin embargo a causa de su órbita estos satélites son afectados por diversas perturbaciones ya que las condiciones atmosféricas están en constante cambio, estas perturbaciones suelen afectar a la orientación y a su órbita, es por eso que en el control de attitude se deben considerar estas perturbaciones.

Para poder actuar y determinar la orientación de un satélite es necesario definir un sistema de referencia, esto implica la elección de una referencia de posición absoluta para el vehículo y la ubicación del origen del sistema de referencia.

### 5.2. Sistemas de Referencia

La orientación puede ser expresada como la relación que existe entre 2 sistemas coordenados [21]

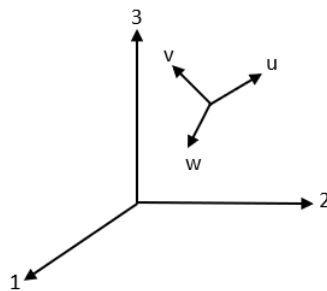


Figura 8: Sistemas Coordenados

En la figura (8) se puede observar dos sistemas coordenados, en donde el sistema 1 esta definido por los ejes  $u$ ,  $v$ , y  $w$  mientras que el sistema 2 esta definido por 1, 2, y 3, por lo tanto la parametrización de la orientación consiste en representar al sistema 1 en función del sistema 2.

Existen distintos tipos de sistemas de referencia [20, 21, 22, 23].

- **Sistema de Referencia Inercial  $S_i$**

El sistema de referencia inercial, (*Inertial Reference Frame, IRF*), es utilizado para definir la posición absoluta del satélite, este sistema toma como origen el centro de la tierra (*sistema geocéntrico*), y es fijo con respecto a las estrellas, se usa  $(\hat{I}, \hat{J}, \hat{K})$  para denotar los vectores unitarios y el subíndice  $I$  para indicar la posición de un punto  $P(x_I, y_I, z_I)$ , en este sistema de referencia el vector unitario  $i_i$  apunta en dirección al equinoccio vernal (*punto por donde sale el sol el día del equinoccio*) en la fecha del 1/01/2000, el vector unitario  $\hat{K}$  coincide con el polo norte geográfico, mientras que el vector unitario  $j_i$  es ortogonal a los otros dos completando la regla de la mano derecha, en este sistema se cumplen las leyes de movimiento de Newton.

- **Sistema de Referencia fijo a la Tierra con centro en la Tierra  $S_E$ :**

Al igual que el sistema  $S_i$  este sistema tiene origen en centro de la tierra, donde sus ejes apuntan hacia diferentes puntos del espacio. El eje llamado  $x_E$  apunta hacia la intersección del meridiano de Greenwich con el Ecuador, el eje  $z_E$  apunta hacia el polo norte y el eje  $y_E$  es ortogonal a ambos ejes cumpliendo con la regla de la mano derecha. Este sistema presenta una rotación relativa al sistema  $S_I$  con una tasa de  $e_E = 7,2921 \times 10^{-5} \frac{m}{s}$ . donde  $w_E$  es la velocidad de rotación de la tierra sobre su propio eje.

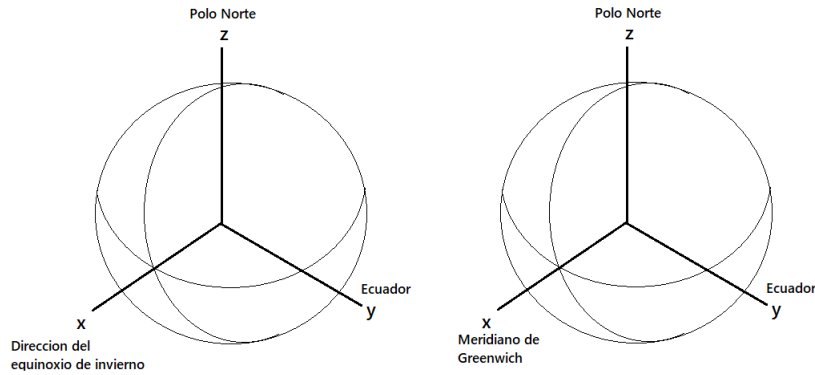


Figura 9: Sistemas coordenados inerciales con centro en la tierra

- **Sistema coordenado orbital  $S_0$ :**

Este sistema tiene como origen el centro de masa del satélite, donde  $z_0$  apunta hacia la tierra y es paralelo a la línea que va desde el centro de la tierra hacia el nodo ascendente de la órbita del satélite (cuando se pasa al plano ecuatorial),  $x_0$  es tangencial a la órbita y va en dirección en la que viaja el satélite, mientras que  $y_0$  completa la regla de la mano derecha

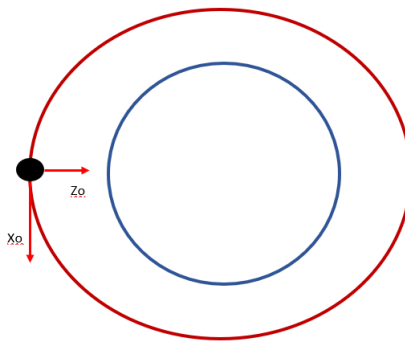


Figura 10: Sistema coordenado orbital  $s_0$

- **Sistema coordenado orbital con centro en la Tierra  $S_{0E}$ :**

Este sistema describe la órbita del satélite en donde  $x_{0E}$  apunta la perigeo,  $y_{0E}$  apunta semimenor y  $z_{0E}$  es perpendicular al plano de la

órbita. existe una velocidad angular  $w_0$ , que posee el satélite al recorrer su órbita en términos de del sistema  $S_{0E}$  relativo al sistema inercial  $S_I$ .

- **Sistema coordenado fijo al cuerpo del satélite  $S_B$ :**

Su origen se encuentra en el centro de masa de la nave, y esta fijo al cuerpo del satélite provocando que se mueva y rote con el mismo. posee tres ejes que idealmente coinciden con los ejes de inercia del satélite, el objetivo de este sistema de control es el de hacer coincidir el sistema  $S_B$  con el sistema  $S_0$ .

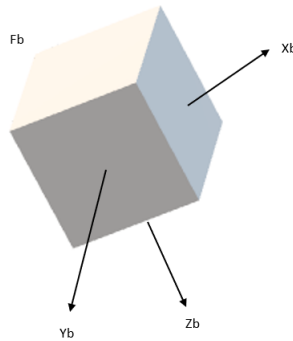


Figura 11: Sistema coordenado centrado en el cuerpo del satélite  $s_B$

### 5.2.1. Rotaciones

Para realizar la orientación de un cuerpo rígido con respecto a un sistema de referencia se requieren de tres ángulos, siendo las mas comúnmente usadas los ángulos de Euler y los ángulos yaw, pitch y roll [22].

las rotaciones al rededor de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  se conocen como ángulos de rotación, y son representados por los ángulos  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$  respectivamente.

Los ángulos de Euler son expresados como un vector de la siguiente forma.

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Las rotaciones simples son aquellas que se realizan alrededor de un único eje.

Con los ángulos de Euler existen tres rotaciones simples, que son una rotación alrededor de cada uno de los ejes.

$$R_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \\ 0 & -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$R_{z,\psi} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) & 0 \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Con estas expresiones y escogiendo el orden de transformación como  $\psi$ ,  $\theta$ , y  $\phi$  ( $x$ ,  $y$  y  $z$ ), es posible encontrar la matriz de transformación o matriz de cosenos directores, con esta matriz es posible obtener la relación entre los vectores expresados en diferentes sistemas de referencia [22].

Esto nos es de gran utilidad pues nos permite calcular los ángulos de Euler a partir de la velocidad angular del satélite.

$$A_{\psi\theta\phi} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) & \cos(\theta)\text{sen}(\psi) & -\text{sen}(\theta) \\ -\cos(\phi)\text{sen}(\psi) + \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\cos(\psi) & \cos(\phi)\cos(\psi) + \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\text{sen}(\psi) & \text{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ \text{sen}(\phi)\text{sen}(\psi) + \cos(\phi)\text{sen}(\theta)\cos(\psi) & -\text{sen}(\phi)\cos(\psi) + \cos(\phi)\text{sen}(\theta)\text{sen}(\psi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

La mayor ventaja de la representación de rotaciones mediante ángulos de Euler es una clara interpretación física, sin embargo como los ángulos de Euler se expresan mediante tres matrices de rotación, una por cada eje y dependiendo de la representación escogida la matriz de transformación se vuelve singular para determinados ángulos, causando un problema llamado *gimbal lock* que es cuando dos ejes de rotación se colocan en paralelo.

Esto sucede ya que para representar una combinación de rotaciones es necesario multiplicar cada matriz de rotación de cada eje en el que se efectúa la rotación y como la multiplicación de matrices es no conmutativa lo que significa que el orden de los factores si altera el producto, por lo que en ángulos de Euler no es lo mismo realizar primero una rotación en el eje  $x$  luego

en el eje  $y$  y por ultimo en el eje  $z$ , a realizar primero la rotación en el eje  $z$ ,  $y$ ,  $x$  pues dará como resultado una posición diferente para cada caso a pesar de que cada matriz de rotación exprese los mismos ángulos, lo que afecta el algoritmo de control.

Esto nos lleva a una tercera representación mediante los denominados cuaterniones.

En esta representación la matriz de transformación queda determinada por un conjunto de cuatro números  $q^{\rightarrow} = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (q_3^{\rightarrow}, q_4)$ , donde  $q_3^{\rightarrow}$ , es la parte vectorial mientras que  $q_4$  es la parte escalar, de este modo la matriz de transformación queda como [22, 24].

$$A(q) = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_3 + q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

### Nota: Cuaterniones

---

Los cuaterniones fueron ideados por primera vez en el siglo XIX por el matemático irlandés William Roman Hamilton, que buscaba extender el concepto de numero complejo a mas de dos dimensiones [24].

Un cuaternion es un conjunto de cuatro números reales , lo que corresponde a un elemento de  $\mathbb{R}^4$  con  $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$  representados como  $q \in \mathbb{H}$  que puede ser representado como un vector [24].

$$q = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_{1,3} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$


---



### 5.3. Campo Geomagnético

El campo geomagnético es el campo magnético que se extiende desde el núcleo de la tierra. El campo magnético terrestre se puede aproximar a un campo magnético creado por un dipolo inclinado un ángulo de 15 grados con respecto al eje de rotación terrestre, su magnitud en la superficie de la Tierra varía de 25 a 65  $\mu\text{T}$  (microteslas) o (0,24-0,66 G) siendo mayor en los polos y menor en el ecuador magnético.

A continuación se enuncian las características del campo geomagnético terrestre segun [25].

Intensidad de campo dipolo	0.306 Gauss- $Re^3$
Desplazamiento de 3 dipolos	0.076 Re
Intensidad de campo superficial (1 Re)	0.24 - 0.66 Gauss
Polos geomagnéticos	Modelo WMM2020
Dipolo geocéntrico	80.65 N, 72.68 W
Polo norte magnético	86.50 N, 164.04 E

Tabla 7: Características del Campo Geomagnético [25]

Donde  $Re$  denota el radio del modelo de la Tierra, aquí definido como 6.378 km

**Nota:**

Intensidad del dipolo: la intensidad de la porción dipolar del campo magnético planetario fuera del planeta en Gauss- $R^3$ , donde  $R$  está en unidades de radio del planeta. (Dividiendo por la distancia  $R^3$  da el campo en Gauss)

Inclinación del dipolo al eje de rotación: Inclinación del eje del dipolo al eje de rotación en grados.

Desplazamiento del dipolo: la distancia de desplazamiento del centro del dipolo al centro del planeta en unidades de radio del planeta.

Intensidad de campo superficial: rango de intensidad de campo total en el radio del planeta en Gauss.

## 5.4. Condiciones Atmosféricas

La atmósfera terrestre es la parte gaseosa de la Tierra, siendo por esto la capa más externa y menos densa del planeta. Esta capa está constituida por varios gases que varían en cantidad según la presión a diversas alturas. Esta mezcla de gases que forma la atmósfera recibe genéricamente el nombre de aire. El 75 % de masa atmosférica se encuentra en los primeros 11 km de altura, desde la superficie del mar. Los principales gases que la componen son: el oxígeno (21 %) y el nitrógeno (78 %), seguidos del argón, el dióxido de carbono y el vapor de agua.

A continuación se enuncian las características y composición de la atmósfera terrestre según [25].

Presión superficial	1014 mb
densidad superficial	1.217 Kg/ $m^3$
altura de escala	8.5Km
masa total de la atmosfera 6 $1.4 \times 10^{21}$ Kg	
temperatura promedio	288°k (15°C)
Rango de temperatura diurna	283°k a 293°k (10°C a 20°)
Velocidades del viento	0 a 100m/s
Peso molecular medio	28.97

Tabla 8: Características de la Atmósfera [25]

mayor	78.08 % nitrógeno ( $N_2$ ), 20.9 % oxígeno ( $O_2$ )
menor (ppm)	argón (Ar) 9340, dióxido de carbono ( $CO_2$ ) 410, neón (Ne) 18.18, helio (He) 5.24, cloruro de hidrógeno ( $HCV_4$ ) 1.7, criptón (Kr) 1.14, hidrógeno ( $H_2$ ) 0.55

Tabla 9: Composición atmosférica (por volumen, aire seco) [25]

**Nota:**

Los números no suman exactamente el 100 % debido al redondeo y la incertidumbre. El agua es muy variable, por lo general representa alrededor del 1 %

Presión superficial: presión atmosférica en la superficie, en bares,  $mb = 10^{-3}bar$  o  $pb = 10^{-10}bar$ .

Densidad superficial: densidad atmosférica en la superficie en  $kg/m^3$ .

Altura de escala: el intervalo de altura en el que la presión atmosférica cambia en un factor de  $e = 2,7183$

Temperatura media: temperatura media del cuerpo en toda la superficie en Kelvin.

Rango de temperatura diurna: rango de temperatura durante un día promedio en Kelvin.

Velocidades del viento: velocidades del viento cerca de la superficie en  $m/seg$ .

Composición atmosférica: Composición relativa por volumen de gases en la atmósfera.

Peso molecular medio: Masa molecular relativa media de los constituyentes atmosféricos en *dalton* (= unidades de masa atómica unificadas), equivalente a *gramos/mol*.

Composición atmosférica (en volumen): volumen relativo de constituyentes en la atmósfera, por porcentaje o *ppm* (partes por millón).

## 5.5. Especificaciones de un Cubesat

A continuación se enlistan algunos de los requisitos y especificaciones que deben de cumplir los Cubesats para poder ser lanzados según [26].

### Especificaciones Generales

- **1** Todas las piezas deben permanecer unidas a los CubeSats durante el lanzamiento, la expulsión y el funcionamiento. (De esta manera No Se crearán desechos espaciales adicionales.)
- **2** Todos los sistemas de propulsión se diseñarán, integrarán y probarán de acuerdo con AFSPCMAN (Air Force Space Command Manual) 91-710 Volumen 3.
- **3** Los sistemas de propulsión deberán tener al menos 3 inhibidores de activación.
- **4** La energía química total almacenada no deberá superar los 100 Wats-hora.
- **5** Los materiales del CubeSat que representen un peligro deben cumplir con AFSPCMAN (Air Force Space Command Manual) 91-710, Volumen 3.
- **6** Los materiales del CubeSats deben tener una pérdida de masa total (Total Mass Loss, TML)  $< 1,0\%$
- **7** Algunos vehículos de lanzamiento tienen requisitos sobre la intensidad del campo magnético. Adicionalmente, Los imanes fuertes pueden interferir con la separación entre las naves espaciales CubeSat en el mismo P-POD (Poly Picosatellite Orbital Deployer). Como pauta general, se recomienda limitar el campo magnético fuera del CubeSat. envolvente estática a 0,5 Gauss por encima del campo magnético de la Tierra.

## Requerimientos Mecánicos

Los CubeSats son satélites en forma de cubo con las siguientes especificaciones

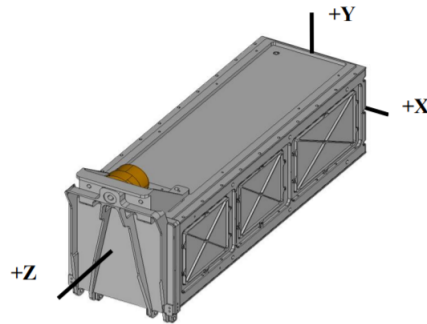


Figura 12: Sistema coordinado centrado [26]

- **1** El sistema de coordenadas del CubeSat deberá coincidir con la coordenada P-POD (Poly Picosatellite Orbital Deployer) del sistema, mientras este este integrado en el P-POD. El origen del sistema de coordenadas del CubeSat es ubicado en el centro geométrico del CubeSat (figura 12).
- **2** La masa máxima de un CubeSat 1U será de  $1,33Kg$ .
- **3** La masa máxima de un CubeSat 1.5U será de  $2,00Kg$ .
- **4** La masa máxima de un CubeSat 2U será de  $2,66Kg$ .
- **5** La masa máxima de un CubeSat 3U será de  $4,00Kg$ .
- **6** El centro de gravedad debe estar ubicado a menos de  $2Cm$  del origen geométrico del CubeSat en dirección  $X$  y  $Y$
- **7** El centro de gravedad para un CubeSat 1U debe estar localizado a menos de  $2Cm$  del centro geométrico en dirección de  $Z$
- **8** El centro de gravedad para un CubeSat 1.5U debe estar localizado a menos de  $3Cm$  del centro geométrico en dirección de  $Z$

- **9** El centro de gravedad para un CubeSat 2U debe estar localizado a menos de  $4,5Cm$  del centro geométrico en dirección de  $Z$
- **10** El centro de gravedad para los CubeSats 3U y +3U debe estar localizado a menos de  $7Cm$  del centro geométrico en dirección de  $Z$
- **11** Para los CubeSats 1U, 1.5U y 2U utilizaran un muelle de separación entre ellos.
- **12** Ningún componente sombreado por amarillo y verde deberá de exceder los  $6,5mm$  de superficie (figura 13).
- **13** Los rieles deberán tener un ancho mínimo de  $8,5mm$  (figura 13).
- **14** Los riles deberán tener una rugosidad superficial menor a  $1.6\mu m$  (figura 13).
- **15** El radio de los rieles se deberán redondear a un radio mínimo de  $1mm$  (figura 13).
- **16** los extremos de los rieles de la cara +/-  $Z$  deberán tener una superficie mínima de  $6,5mm$  x  $6,5mm$ , de área de contacto para los rieles de los CubeSats vecinos (figura 13).

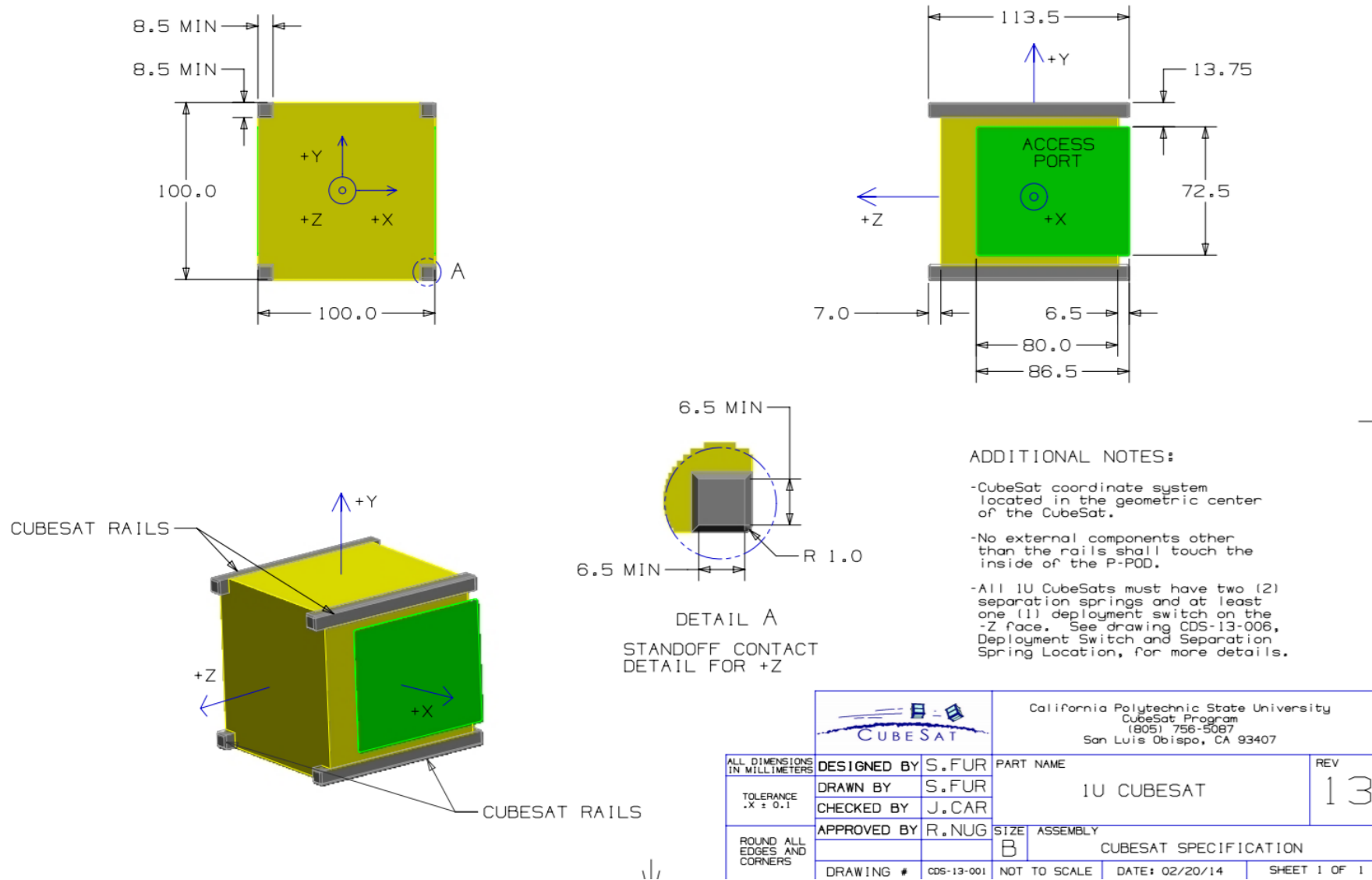


Figura 13: Especificaciones Cubesat [26]

## Requerimientos Eléctricos

- **1** El interruptor de despliegue debe estar accionado en todo momento, mientras este integrado en el P-POD (Poly Picosatellite Orbital Deployer)
- **2** El CubeSat debe incluir un pin RBF (Remove Before Flight)
- **3** Los CubeSats incorporarán protección en el circuito de la batería para cargar y descargar, y así evitar condiciones de celda desequilibradas.
- **4** El CubeSat se diseñará para cumplir al menos uno de los siguientes requisitos, para prohibir la transmisión inadvertida de radiofrecuencia (RF). Se recomienda encarecidamente el uso de tres inhibiciones independientes. Un inhibidor es un dispositivo físico entre una fuente de energía y un peligro. Un temporizador no sera considerado como un inhibidor independiente.



## 6. Simulador

El simulador seleccionado es *propat*, este simulador es un toolbox desarrollado en matlab por el Dr. Valdemir Carrara, además este simulador es ampliamente utilizado en el posgrado en Mecánica Espacial y Control del INPE (Instituto Nacional de Investigaciones Espaciales) de Brasil, con diversos usos pues cuenta con las funciones necesarias para simular propagación de órbita y attitude, este ultimo pudiendo hacer uso de magneto-torques o ruedas de reacción y poder proporcionar datos de manera precisa.

### 6.1. Descripción

Las funciones con las que cuenta *propat* pueden ser agrupadas en transformaciones de coordenadas, tiempo y efemérides, transformaciones de attitude y propagación de attitude así como conversiones de propiedades del entorno espacial y propagación de la órbita, Los sensores en los que se basa *propat* son un magnetómetro de 3 ejes y sensores solares gruesos aliados con un conjunto de 3 bobinas de torsión magnéticas ortogonales para control de attitude [27].

Los principales sistemas coordenados utilizados por *propat* son el sistema geocéntrico inercial, el sistema terrestre geocéntrico y el sistema orbital.

Como los satélites emplean sensores para determinar su ubicación en el espacio así como su orientación, el funcionamiento de estos sensores se basa en las propiedades del entorno espacial como la dirección de la Tierra, el Sol, la Luna, las estrellas y el campo geomagnético, entre otros.

Es por eso que es importante simular estos sensores, la biblioteca *propat* tiene 3 modelos, en la versión actual: la posición del Sol en el sistema geocéntrico inercial, la orientación de la Tierra en un momento dado y el campo magnético de la Tierra. Además, también hay una función para comprobar si el satélite está en la sombra de la Tierra.

**A continuación se enuncian las funciones con las que cuenta *propat*:**

### Transformación de matrices

[exyzquat](#) transforma una matriz de rotación [x y z] dada en ángulos de euler a cuaterniones.

[ezxzquat](#) transforma una matriz de rotación [z x z] dada en ángulos de euler a cuaterniones.

[exyzrmx](#) transforma una matriz de rotación [x y z] dada en ángulos de euler a una matriz de attitude.

[ezxzrmx](#) transforma una matriz de rotación [z x z] dada en ángulos de euler a una matriz de attitude.

[ezxyrmx](#) transforma una matriz de rotación [z x y] dada en ángulos de euler a una matriz de attitude.

[ezyxrmx](#) transforma una matriz de rotación [z y x] dada en ángulos de euler a una matriz de attitude.

[eulermx](#) transforma el ángulo y vector de euler a una matriz de rotación.

[quatexyz](#) transforma cuaterniones a ángulos de euler en [x y z].

[quatezzz](#) transforma cuaterniones a ángulos de euler en [z x z].

[quatrmx](#) transforma los cuaterniones a una matriz de attitude.

[rmxexyz](#) transforma la matriz de attitude a una matriz de rotación [x y z] en ángulos de euler.

[rmxezzz](#) transforma la matriz de attitude a una matriz de rotación [z x z] en ángulos de euler.

[rmxezxy](#) transforma la matriz de attitude a una matriz de rotación [z x y] en ángulos de euler.

[rmxezyx](#) transforma la matriz de attitude a una matriz de rotación [z y x] en ángulos de euler.

[rmxeuler](#) transforma una matriz de rotación a un ángulo y vector de euler.

[rmxquat](#) transforma la matriz de attitude a cuaterniones.

[rotmax](#) obtiene la matriz de rotación sobre el eje x dado el ángulo de rotación.

[rotmay](#) obtiene la matriz de rotación sobre el eje y dado el ángulo de rotación.

[rotmaz](#) obtiene la matriz de rotación sobre el eje z dado el ángulo de rotación.

[sangvel](#) obtiene la matriz diagonal de la velocidad angular del satélite.

`quat_prod` obtiene el producto de dos cuaterniones.

`quat_unity` normaliza un cuaternión a partir de un cuaternión no unitario utilizando la norma euclidiana 4D.

`quat_norm` normaliza el cuaternión a partir de un cuaternión no unitario utilizando la norma vectorial 3D (el componente escalar el componente escalar 4q permanece sin cambios).

`quat_matrix` obtiene la matriz del producto del cuaternión.

`quat_inv` obtiene el inverso conjugado de un cuaternión.

`proximus` obtiene el ángulo más cercano al ángulo dado.

## Fecha, hora y efemérides

`djm` proporciona la fecha juliana modificada con referencia al día, mes y año a las cero horas del día.

`djm_inv` proporciona la fecha correspondiente a una fecha juliana modificada dada.

`dayf_to_time` convierte el tiempo transcurrido del día en horas, minutos y segundos.

`gst` proporciona el tiempo sideral aparente de Greenwich referido al ecuador y al equinoccio.

`sun` calcula el vector posición del sol en el sistema inercial geocéntrico referido al ecuador y al equinoccio.

`sun_dir` calcula el vector unitario de la posición del sol en el sistema inercial geocéntrico.

`igrf_field` campo magnético de la tierra según la latitud y longitud utilizando la serie de modelos del campo internacional de referencia geomagnética según lo acordado en diciembre de 2004 por el Grupo de Trabajo V-MOD de la IAGA.

`mag_field` calcula el campo magnético de la tierra desde la posición del satélite.

## Análisis de la propagación de órbita

[kepler](#) resuelve las ecuaciones de kepler.

[delkep](#) calcula la variación de los elementos angulares keplerianos.

[kepel\\_statvec](#) transforma los elementos keplerianos en el vector de estado correspondiente en el mismo sistema de de referencia.

[statvec\\_kepel](#) transforma el vector de estado inercial a elementos keplerianos.

[inertial\\_to\\_terrestrial](#) transforma el vector de estado inercial geocéntrico a coordenadas geocéntricas referidas al meridiano de Greenwich.

[terrestrial\\_to\\_inertial](#) transform las coordenadas terrestres geocéntricas referidas al meridiano de Greenwich a coordenadas inerciales geocéntricas.

[sph\\_geodetic\\_to\\_geocentric](#) transforma coordenadas geodésicas esféricas (longitud, latitud y altitud) en coordenadas geocéntricas terrestres rectangulares.

[rectangular\\_to\\_spherical](#) transforma coordenadas geocéntricas terrestres rectangulares en coordenadas esféricas (longitud, latitud geocéntrica y distancia).

[spherical\\_to\\_rectangular](#) transforma coordenadas geocéntricas terrestres rectangulares en coordenadas esféricas (longitud, latitud geocéntrica y distancia).

[orbital\\_to\\_inertial\\_matrix](#) calcula la matriz de rotación desde el marco orbital al marco inercial.

[earth\\_shadow](#) verifica si una posición determinada está o no en la sombra de la tierra.

## propagación numérica de la órbita

[egm\\_read\\_data](#) lee un archivo de modelo de gravedad terrestre.

[egm\\_acc](#) calcula la gravedad local.

[egm\\_difeq](#) devuelve la ecuación diferencial de órbita para integración numérica.

## Órbita síncrona solar

[sunsync\\_inc](#) calcula la inclinación sincrónica del sol o una órbita determinada.

`sunsync_raan` obtiene la ascensión recta orbital del nodo ascendente, dada la hora de cruce del ecuador.

`sunsync_sma` obtiene el semieje mayor orbital de una órbita terrestre baja dado el factor de recuperación orbital.

## Determinación de la attitude

`triad` calcula la matriz de attitude a partir de un cuadro en el que se conocen un par de vectores  $v$  y  $w$  no alineados, al sistema de referencia de modo que el eje  $x$  esté alineado a  $v$ , el eje  $y$  esté en el plano  $v w$  y  $z$  sea ortogonal al plano  $v w$ .

`triad2` calcula la matriz de attitude a partir de dos pares de vectores dados, conocidos en dos marcos de referencia diferentes, utilizando el algoritmo *triad*.

## Ecuaciones dinámicas

`rigbody` devuelve la derivada con respecto al tiempo de un cuerpo rígido (ecuaciones dinámicas).

`rb_nutation_damper` devuelve la derivada con respecto al tiempo de un cuerpo rígido con momento angular integrado y amortiguador de nutación pasivo.

`rb_reaction_wheel` devuelve la derivada con respecto al tiempo de las ecuaciones dinámicas de un cuerpo rígido unido a 3 ruedas de reacción.

`rb_reaction_wheel_n` devuelve la derivada con respecto al tiempo de las ecuaciones dinámicas de un cuerpo rígido unido a  $n$  ruedas de reacción en cualquier dirección.

`rw_speed` obtiene la velocidad angular de las ruedas de reacción dada por su momento angular.

`rw_speed_n` obtiene la velocidad angular de las ruedas de reacción dado su momento angular y eje de rotación.

## Torques de perturbación

`gg_torque` evalúa las entradas de par del gradiente de gravedad.

`gravity_torque` evalúa el par del gradiente de gravedad a partir de la attitude del satélite.

## 6.2. Simulación

Para este caso en particular se orienta la cara X del satélite, calculando la matriz de attitude entre el marco del satélite y el sistema orbital en función de los vectores de attitude del sol y del campo geomagnético, medido por los sensores, además se eligió una órbita específica sobre el estado de Puebla.

Para el control de attitude se utiliza un conjunto de 3 bobinas de torsión magnética ortogonales, para este caso se utiliza el magneto-toque NCTR-M002 cuyas características lo hacen particularmente útil para ser implementado en los cubesats, pues cuenta con un bajo consumo energético además de ser liviano.

momento magnético	$> 0,2Am^2$
rango de funcionamiento	$-35^{\circ}C a 75^{\circ}C$
tensión de alimentación	5V
masa	$< 30g$

Tabla 10: Varilla Magnetorquer NCTR-M002 [2]

Ángulos de Euler iniciales	[30 50 10]
Velocidad Angular inicial	[0.1 0 0.5] rad/seg
Órbita	Polar ( $90^{\circ}$ )
Excentricidad	0.0002
Altitud	300 km
Argumento del Perigeo	111,196°
Anomalía Media	248,196°
Longitud de nodo Ascendente	6.524 hrs

Tabla 11: Parámetros de Simulación

Se eligió el un modelo 1U de un Cubesat.

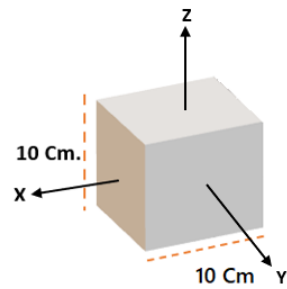


Figura 14: Modelo de el Cubesat seleccionado.

Con una masa igual a  $M = 1,2kg$  y una matriz de inercia

$$I = \begin{bmatrix} 2,166e - 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2,166e - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2,166e - 3 \end{bmatrix} Kg m^2 \quad (6.2.1)$$

Para la simulación se tomaron en cuenta los siguientes elementos Keplerianos, como el radio de la tierra mas la órbita, la excentricidad, la inclinación de la órbita en este caso se eligió una órbita polar y los demás elementos como el argumento del perigeo, anomalía media y longitud de nodo ascendente.

```
kepel = [6371000 + 300000, 0.0002, 90, 111.196, 248.982, 6.524];
```

Vector del estado de órbita.

```
stat = kepel_statvec(kepel);
```

Se calculan las variaciones de los elementos keplerianos debido a la forma de la tierra.

```
delk = delkep(kepel);
```

Se propone una attitude inicial (posición inicial) para el Cubesat en radianes, al igual que una velocidad angular esta ultima dada en radianes sobre segundo.

```
eulxyz = [30, 50, 10]'*pi/180;  
w_ang = [0.1, 0, 0.5]';
```

La matriz de inercia es simétrica pues como ocurre en la mayoría de los satélites los ejes del sistema coordenado del cuerpo coinciden con los ejes principales de inercia, los valores de la matriz deben de estar dados en  $Kg$

```
iner = [2.166e-3 0 0; 0 2.166e-3 0; 0 0 2.166e-3];  
invin = inv(iner);
```

Para el control de attitude se están utilizando 3 bobinas de torsión magnética una para cada eje, con un momento magnético =  $0,2Am^2$

```
mag_mom = [0.2; 0.2; 0.2];
```

Como se menciona anteriormente para evitar el problema del Gimbal Lock es necesario transformar la attitude inicial en cuaterniones lo cual se logra mediante.

```
quat = exyzquat(eulxyz);
```



Los satélites suelen emplear sensores para determinar en órbita, su ubicación en el espacio y su orientación (attitude), estos sensores se basan en la dirección de la tierra, el sol, la luna las estrellas y el campo geomagnético, entre otros, es por esto que es importante simular estos sensores. *Propat* ofrece varios modelos que permiten simular la posición del Sol en el sistema geocéntrico inercial, la orientación de la Tierra en un momento dado (tiempo sidéreo de Greenwich) y el campo magnético de la Tierra. El siguiente código ilustra el modelo utilizado para simular estos sensores en un tiempo determinado.

```
% Ephemerides date in Modified Julian date:
year = 2009;
mjd = djm(13, 4, year);
mjdo = djm(1, 1, year);
mjd1 = djm(1, 1, year+1);
year_frac = year + (mjd - mjdo)/(mjd1 - mjdo);

dfra = time_to_dayf (10, 20, 0);
```

Propagación del tiempo de la simulación en segundos.

```
tstart = 0;
tstep = 0.5;
tend = 200;
```

Se inicializan los vectores de tiempo, ángulos, velocidad angular y de órbita.

```
time = tstart;
euler = eulxyz*180/pi;
omeg = w_ang;
keorb = kepel';
```

Se inicializa el torque de control y la corriente en los magneto-torques.

```
cont_torq = [0 0 0]';
corx = [0];
cory = [0];
corz = [0];
```

Como se realiza una integración numérica se define su precisión.

```
options = odeset('abstol', 1e-4, 'reltol', 1e-4);
```

Con lo anterior es posible calcular la propagación de la órbita y attitude.

Propagación de la órbita y conversión de los elementos Keplerianos a un vector de estado.

```
for t = tstart:tstep:tend

    kep2 = kepel + delk*t;
    stat = kepel_statvec(kep2);
```

Para este caso no se consideran perturbaciones por lo tanto.

```
ambt = [0 0 0]';
ext_torq = ambt + cont_torq;
```

Se define e inicializa el vector de attitude.

```
att_vec = [quat; w_ang]';
```

Parámetros de solución del integrador ODE.

```
tspan = [t, t+tstep/2, t+tstep];
```

### 6.2.1. Orientación de la cara x del satélite hacia la tierra

Para poder orientar una cara del satélite hacia la tierra es necesario conocer la dirección e intensidad del campo geomagnético. A continuación se ilustra el código necesario para poder simularlo.

```
geoc = inertial_to_terrestrial(gst(mjd, dfra+t), stat);
sphe = rectangular_to_spherical(geoc);
alt = sphe(3)/1000;
elong = sphe(1);
colat = pi/2 - sphe(2);

earth_field = 1.e-9*igrf_field (year_frac, alt, colat, elong);
%campo magnetico inercial coordenadas de campo magnetico
cmt_i = terrestrial_to_inertial(gst(mjd, dfra+t),[earth_field, 0, 0, 0]);
```

Para la propagación de la attitude se recomienda emplear el integrador numérico ODE45 pues este integrador puede manejar discontinuidades en el torque causados por el control.

```
[T, Y] = ode45('rigbody', tspan, att_vec, options, ext_torq, iner, invin,...
mag_mom, earth_field);

att_vec = Y(3, :)';
quat = quat_unity(att_vec(1:4));
w_ang = att_vec(5:7);
```

A demás del vector posición del campo geomagnético también es necesario conocer el vector posición del sol en el marco del satélite.

```
sun_i = sun_dir(mjd, dfra+t);
cmt_i = cmt_i(1:3)';
%quat es la attitude real
cs_b_i=quaternion(quat);%computado (simulado)
% vector del sol en el marco del satellite
sun_b = cs_b_i*sun_i;
%vector del campo magnetico en el marco del satellite
cmt_b = cs_b_i*cmt_i;
```

A los sensores de vector posición del sol y campo geomagnético se les sumo ruido Gaussiano ya que en la realidad los datos de los sensores son corrompidos por el ruido de línea antes de poder ser procesados, limitando la distancia de transmisión.

```
sun_sens = sun_b + 0.05*randn(3,1);  
magnet   = cmt_b + 5e-7*randn(3,1);
```

Se acomodan los ejes, de tal manera que el eje x apunte hacia la tierra, el eje y es ortogonal al eje x en el plano orbital mientras que el eje z es normal al plano orbital.

Dado que se trata de dos sistemas de referencia, uno perteneciente a la tierra y otro al satélite, se calcula la matriz de attitude para dos pares de vectores conocidos en dos sistemas de referencia diferentes, si los dos sistemas coordenados son iguales se devuelve la matriz identidad.

```
c_i_o = orbital_to_inertial_matrix(kep2);  
c_b_i = triad2(sun_sens, magnet, sun_i, cmt_i);
```

```
%cuando se alinean los sistemas esto se acerca bastante a la matriz identidad  
c_b_o = c_b_i * c_i_o;  
teta  = rmxexyz(c_b_o);
```

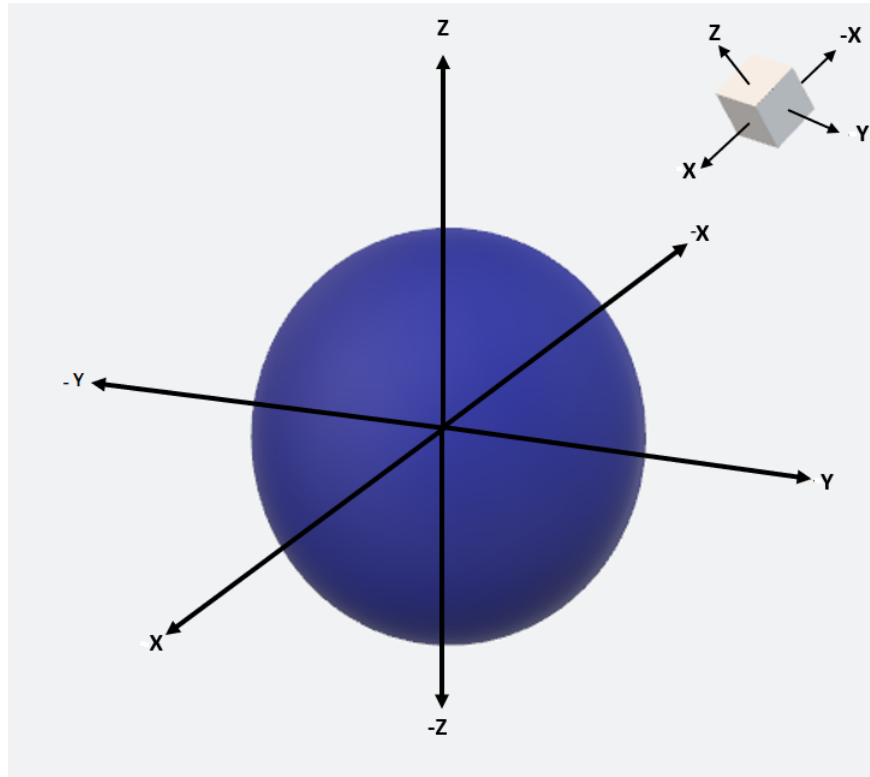


Figura 15: Sistemas Coordinados

Finalmente se calcula la velocidad angular orbital pues como se menciono anteriormente el control solo es válido si la velocidad angular del satélite es al menos cuatro veces las revoluciones por órbita.

```
wo_o = [0;0; delk(6)];
wo_b = c_b_o * wo_o;
```

### INSERTAR EL CÓDIGO DE CONTROL A UTILIZAR

Se calcula la corriente suministrada a los magneto-torques considerando el numero de vueltas y la corriente máxima que pueden soportar.

```
% corriente en las bobinas
EB=teta'.*earth_field;
k=1e5;
MI=-k*(cross(EB,(w_ang-wo_b)));
```

```
%           N      I max
xyzC=MI/(710*0.04);
xcurrent = xyzC(1);
ycurrent = xyzC(2);
zcurrent = xyzC(3);
```

Finalmente se almacenan los datos para graficarlos.

```
time = cat(2, time, t);
omeg = cat(2, omeg, w_ang);
euler = cat(2, euler, teta*180/pi);
corx = cat(2, corx, xcurrent);
cory = cat(2, cory, ycurrent);
corz = cat(2, corz, zcurrent);

end
```

## 7. Control

La matriz de inercia se define como una matriz simétrica cuyos elementos se forman a partir de los momentos de inercia de tres ejes perpendiculares y tres productos de inercia. si  $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  con respecto a un origen  $O$  se tiene [22, 28].

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

donde  $I = I^T$

Ahora si los ejes del sistema coordenado del cuerpo coinciden con los ejes principales de inercia, es decir que se elige el marco principal del satélite donde el momento de la matriz de inercia  $I$  es diagonal, como sucede en la mayoría de los satélites entonces la matriz se reduce a [22, 28].

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Por lo tanto la dinámica de attitude del satélite se expresa utilizando las ecuaciones de Euler

$$I_x \dot{w}_x = -(I_z - I_y)w_y w_z + \tau_x, \quad (7.3)$$

$$I_y \dot{w}_y = -(I_x - I_z)w_x w_z + \tau_y, \quad (7.4)$$

$$I_z \dot{w}_z = -(I_y - I_x)w_y w_x + \tau_z, \quad (7.5)$$

donde  $w = [w_x \ w_y \ w_z] \in \mathbb{R}^3$  es el vector de velocidad angular del satélite, mientras que  $\tau = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z] \in \mathbb{R}^3$  es el vector de pares que actúan sobre el sistema.

## 7.1. Control PD

En esta sección se implementara un control PD, basado en el error de posición y velocidad angular.

Partiendo de:

$$u = k_p \theta a + k_d (w_{orb} - w_{ob}), \quad (7.1.1)$$

donde  $\theta$  y  $a$  son los ángulos de Euler causados por una rotación dada la matriz de attitudes y el eje de Euler,  $w_{orb}$  es la velocidad angular orbital con respecto al sistema orbital (velocidad angular del satélite) y  $w_{ob}$  es la velocidad angular orbital.

El control PD que se obtiene se describe por la ecuación

$$u = k_p \theta a + k_d w_{orb}. \quad (7.1.2)$$

donde:  $\theta$  y  $a$  son el ángulo de Euler y el eje de Euler respectivamente.

Esta ley de control esta basada en el algoritmo de Reijneveld y Choukroun, pero este algoritmo solo es valido si la velocidad angular del satélite es superior a 4 veces las revoluciones por órbita de lo contrario no abra control en lo absoluto [27].

Partiendo de:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} = \tau, \quad (7.1.3)$$

donde  $q \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz inercia,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de velocidad angular,  $\tau \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares que actúan sobre el sistema.



Se usará la estructura de un **PD** definida como

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q}, \quad (7.1.4)$$

donde  $\tilde{q} = q - q_d \in \mathbb{R}^n$  es el error de posición;  $q_d \in \mathbb{R}^n$  es la posición deseada;  $K_{p,v} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son las ganancias proporcional y derivativa.

Las variables de estado (forma canónica del controlador) que se obtienen al sustituir en el modelo dinámico el control PD son:

Error de posición:

$$x_1 = \tilde{q} = q - q_d. \quad (7.1.5)$$

*Observación:* Al realizar el control de posición (con regulación) se considera que la posición deseada  $q_d \in \mathbb{R}^n$  es constante.

Error de velocidad:

$$\dot{x}_1 = \dot{q} = x_2. \quad (7.1.6)$$

Error de aceleración:

$$\dot{x}_2 = \ddot{q} = M(q)^{-1}[K_p x_1 - K_v x_2 - C(q, \dot{q})x_2]. \quad (7.1.7)$$

Se prosigue a obtener la **ecuación en lazo cerrado**

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ M(q)^{-1}[K_p x_1 - K_v x_2 - C(q, \dot{q})x_2] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ M(q)^{-1}K_p & -M(q)^{-1}[K_v + C(q, \dot{q})] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

Al hacer homogénea la ecuación en lazo cerrado, es decir  $\dot{x}_1 = x_2 = 0$ , se determina la existencia, unicidad y ubicación del punto de equilibrio, tal que  $x_1 = x_2 = 0$  lo que implica que el punto de equilibrio  $x^* = (x_1, x_2) = (0, 0)$ .

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ M(q)^{-1}K_p x_1 - M(q)^{-1}[K_v + C(q, \dot{q})]x_2 \end{bmatrix}. \quad (7.1.9)$$

### 7.1.1. Estabilidad

Para comprobar estabilidad se usa el criterio de función de Lyapunov [29].

Considerando la siguiente función positiva definida (Función candidata de Lyapunov)

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^T K_p x_1 + \frac{1}{2}x_2^T M(q)x_2. \quad (7.1.10)$$

Sustituyendo las variables de estado en (7.1.10) se obtiene la representación de (7.1.10) en términos del error de posición y velocidad, siendo que (7.1.11) también es una ecuación definida positiva

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}, \quad (7.1.11)$$

derivando (7.1.11) se tiene

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}} + \tilde{q}^T M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q}. \quad (7.1.12)$$

De la variable de estado  $x_2$ , descrita en (7.1.7), se obtiene  $M(q)\ddot{q}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = \ddot{q} &= M(q)^{-1}[K_p x_1 - K_v x_2 - C(q, \dot{q})x_2] \\ M(q)\ddot{q} &= K_p x_1 - K_v x_2 - C(q, \dot{q})x_2 \\ M(q)\ddot{q} &= K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q}, \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

sustituyendo (7.1.13) en (7.1.12) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}} + \dot{q}^T [K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q}] + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} \\ &= \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}} + \dot{q}^T K_p \tilde{q} - \dot{q}^T K_v \dot{q} - \dot{q}^T C(q, \dot{q})\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q}, \end{aligned} \quad (7.1.14)$$

agrupando términos se tiene

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}} + \dot{q}^T K_p \tilde{q} - \dot{q}^T K_v \dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})]\dot{q}. \quad (7.1.15)$$

## Nota

Se puede llegar a esta representación de (7.1.15) debido a que se puede usar la **propiedad (1) de antisimetría**:

Con la definición adecuada de  $C(q, \dot{q})$ , la matriz  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  es antisimétrica lo que implica que  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \equiv 0$

$$\frac{1}{2}\dot{q}^T [\underline{\dot{M} - 2C}] \dot{q} \equiv 0$$

$$\begin{aligned} & \dot{M} - 2C \\ & \Downarrow \\ & \dot{C}^T + C - 2C \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\dot{q}^T [C^T - C] \dot{q} \equiv 0$$

$$\frac{1}{2}\dot{q}^T C^T \dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}^T C \dot{q} \equiv 0$$

$$\frac{1}{2}\dot{q}^T C^T \dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}^T C^T \dot{q} \equiv 0$$

Sustituyendo la **propiedad (1)** en (7.1.15)

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}} + \dot{q}^T K_p \tilde{q} - \dot{q}^T K_v \dot{q} + \cancel{\frac{1}{2}\dot{q}^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q}} \\ &= \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}} + \dot{q}^T K_p \tilde{q} - \dot{q}^T K_v \dot{q}. \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

Usando la variable de estado  $\dot{x}_1$ , descrita en (7.1.6) se tiene

$$\dot{x}_1 = \dot{\tilde{q}} = \begin{cases} \dot{q} - \dot{q}_d = \dot{q} \\ \dot{q}_d - \dot{q} = -\dot{q}, \end{cases} \quad (7.1.17)$$

sustituyendo (7.1.17) en (7.1.16) se tiene

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = -\tilde{q}^T K_p \dot{q} + \dot{q}^T K_p \tilde{q} - \dot{q}^T K_v \dot{q}. \quad (7.1.18)$$

Considerando las propiedades de la traspuesta

$$(xyz)^T = x^T y^T z^T, \quad (7.1.19)$$

$$(x^T)^T = x. \quad (7.1.20)$$

Considerando que  $K_p$  es simétrica, es decir  $K_p = K_p^T$  y con las propiedades descritas en (7.1.19) y (7.1.20) se puede modificar (7.1.18) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= -\tilde{q}^T K_p \dot{q} + \dot{q}^T K_p \tilde{q} - \dot{q}^T K_v \dot{q} \\ &= -\dot{q}^T K_p^T (\tilde{q}^T)^T + \dot{q}^T K_p \tilde{q} - \dot{q}^T K_v \dot{q} \\ &= -\dot{q}^T K_p^T \tilde{q} + \dot{q}^T K_p \tilde{q} - \dot{q}^T K_v \dot{q} \\ &= \cancel{-\dot{q}^T K_p^T \tilde{q}} + \cancel{\dot{q}^T K_p \tilde{q}} - \dot{q}^T K_v \dot{q} \end{aligned} \quad (7.1.21)$$

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = -\dot{q}^T K_v \dot{q}.$$

Finalmente se tiene que la derivada de la función de Lyapunov es menor o igual que cero, debido a que cuando el error de posición es cero y la velocidad es cero, este término  $-\dot{q}^T K_v \dot{q}$  se hace cero, por consiguiente esto  $-\dot{q}^T K_v \dot{q}$  es menor o igual que cero.

Por lo que se puede concluir que el punto de equilibrio  $x_1 = x_2 = 0 = x^* = (0, 0)$  que se encuentra en el origen del espacio de estados es estable.

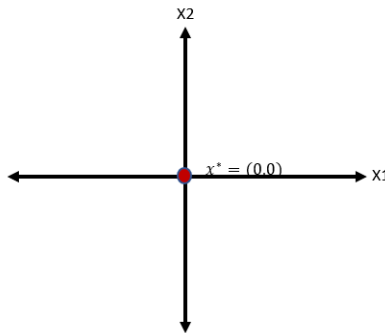


Figura 16: Espacio de estados

### 7.1.2. Simulación

Tomando la siguiente expresión del control PD.

$$u = k_p \theta a + k_d (w_{orb} - w_{ob}), \quad (7.1.22)$$

donde  $\theta$  y  $a$  son el ángulo de Euler y el eje de Euler, mientras que  $w_{orb}$  es la velocidad angular orbital con respecto al sistema orbital y  $w_{ob}$  es la velocidad angular orbital, mientras que la selección de las ganancias  $k_p = -0,00025$  y  $k_d = -0,002$  se hizo con el criterio de  $k_p < k_d$  pues de esta forma se prioriza alcanzar el punto de equilibrio, sin embargo si el valor de las ganancias se invierte el sistema reduce la velocidad angular ocasionando que tome más tiempo que el sistema alcance su punto de equilibrio pues en la simulación el control depende del cuaternión unitario.

```
                                % Vangular-Vorbital
cont_torq = -0.00025*teta-0.002*(w_ang - wo_b);
```

### 7.1.3. Resultados

Considerando las ganancias  $k_p$  y  $k_d$  y las características del satélite se obtienen los siguientes resultados, que representan la orientación medida en ángulos de Euler, la velocidad angular medida en  $rad/s$  y finalmente la variación de la corriente suministrada a los magneto-torques.

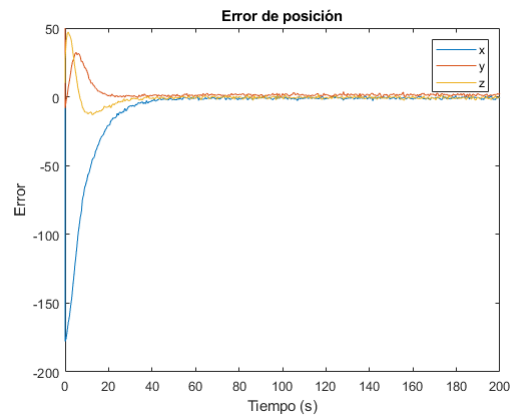


Figura 17: Error de Posición

Como se puede observar en la figura (17) el satélite alcanza la posición deseada a pesar del ruido de línea, ya que el error de posición se hace cero.

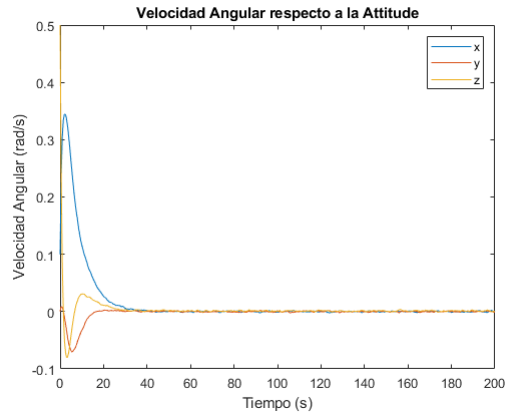


Figura 18: Velocidad Angular

En la figura (18) se puede apreciar como mientras el satélite alcanza la posición deseada la velocidad angular tiende a cero.

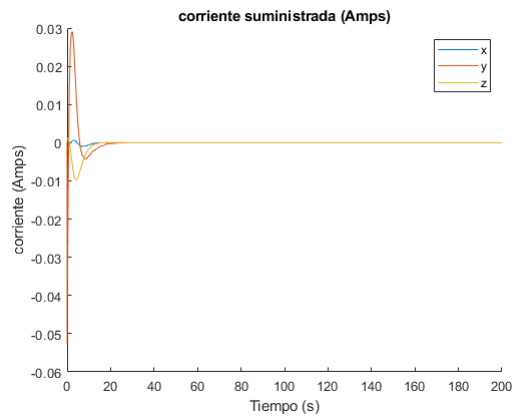


Figura 19: Corriente suministrada al magneto-torque

Como se observa en la figura (19) la corriente suministrada no supera los 0,03A pues la corriente máxima que soporta el magneto-torque es de 0,04A.

## 7.2. Control PI

En esta sección se implementara un controlados PI, basado en el error de posición para la parte proporcional, mientras que la parte integral de 0 a  $t$  es el área bajo el error  $e(t)$  entre 0 y  $t$ .

Se usará la estructura de un controlador **PI** definida como [29, 30].

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(t) dt \quad (7.2.1)$$

$$= k_p \left[ e(t) + \frac{k_i}{k_p} \int_0^t e(t) dt \right] \quad (7.2.2)$$

$$= k_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt \right] \quad (7.2.3)$$

$$u(t) = -k_p y - k_i \int_0^t y(\tau) d\tau \quad (7.2.4)$$

Donde  $T_i$  se denomina como tiempo integral  $K_p$  es la ganancia proporcional,  $K_i$  es la ganancia integral,  $e(t)$  es el error de posición, mientras que la parte integral de 0 a  $t$  es el área bajo el error  $e(t)$  entre 0 y  $t$  [29].

Por lo tanto la salida del controlador es proporcional a la acumulación de los efectos de los errores pasados.

Se prosigue a obtener la **ecuación en lazo cerrado** suponiendo  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$

$$s^2 Y(s) + s k_1 Y(s) + k_2 Y(s) = -k_p Y(s) - k_i \frac{1}{s} Y(s) + \frac{d}{s} \quad (7.2.5)$$

$$Y(s)(s^2 + s k_1 + k_2) = \left( -k_p - k_i \frac{1}{s} \right) Y(s) + \frac{d}{s} \quad (7.2.6)$$



Entonces

$$Y(s) = \frac{d}{s^3 + k_1 s^2 + (k_2 + k_p)s + k_i} \quad (7.2.7)$$

por lo tanto la ecuación característica en lazo cerrado es la siguiente

$$\lambda^3 + k_1 \lambda^2 + (k_2 + k_p)\lambda + k_i = 0 \quad (7.2.8)$$

### 7.2.1. Estabilidad

Considerando la ecuación característica, para que el sistema sea estable es necesario que cumpla con  $k_1 > 0$ ,  $k_2 + k_p > 0$ ,  $k_i > 0$ .

Por lo anterior es posible saber que se aumenta el orden del sistema, por lo tanto es más difícil analizar su estabilidad pues solo se puede modificar dos de los tres coeficientes del polinomio característico, por lo que no se puede garantizar estabilidad.

Con lo anterior es evidente que no sirven parámetros  $K_p$  y  $T_i$  cualquiera, pues estos valores dependen de las características de la planta.

### 7.2.2. Simulación

Tomando la siguiente expresión del control PI.

$$k_p \left[ e(t) + \frac{k_i}{k_p} \int_0^t e(t) dt \right] \quad (7.2.9)$$

donde  $e(t)$  es el error de posición, mientras que la parte integral de 0 a  $t$  es el área bajo el error  $e(t)$  entre 0 y  $t$ ,  $K_p$  es la ganancia proporcional y  $K_i$  es la ganancia integral.

```
ki=0.0062;
```

```
kp=0.0045;
```

```
d=@(teta) teta;
```

```
in=integral(d, 0, tstep);
```

```
cont_torq = kp*(teta + (ki/kp)*in);
```

### 7.2.3. Resultados

Considerando las ganancias  $k_p$  y  $k_i$  y las características del satélite se obtienen los siguientes resultados, que representan la orientación medida en ángulos de Euler, la velocidad angular medida en  $rad/s$  y finalmente la variación de la corriente suministrada a los magneto-torques.

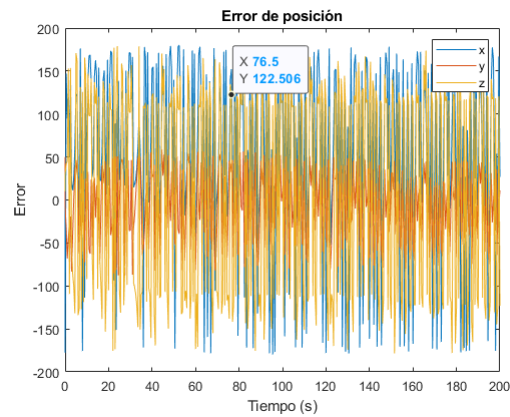


Figura 20: Error de Posición

Como se observa en la figura (20) el control PI no es capaz de posicionar el satélite en la forma deseada, pues no es capaz de reducir el error de posición a cero.

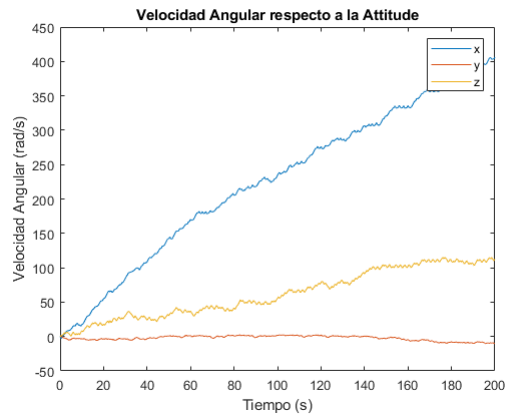


Figura 21: Velocidad Angular

Ademas de que el satélite llega a una velocidad angular extremadamente alta, que no seria capaz de tener con el magneto-torque seleccionado.

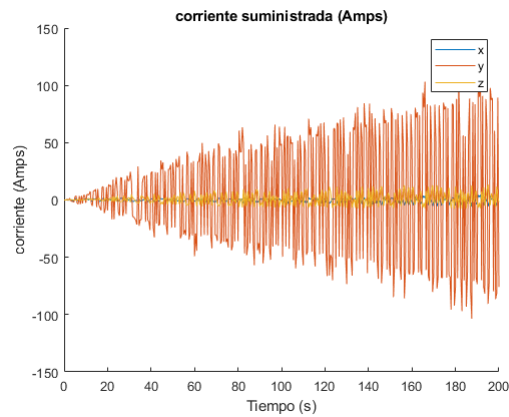


Figura 22: Corriente suministrada al magneto-torque

Mientras que la demanda de corriente que se debe suministrar aumenta de forma exponencial, rebasando por mucho la corriente máxima permitida por el magneto-torque.

## 8. Conclusiones

- El sistema de control de attitude es un sistema que debe de ser implementado de manera cuidadosa, las simulaciones permiten comprobar su funcionamiento antes de ser montados en los satélites permitiendo ahorrar tiempo y recursos.
- Respecto a los métodos de control que se simularon solo el control PD tubo resultados exitosos, logrando orientar la cara de un cubesat 1U seleccionada hacia la tierra, usando únicamente magneto-torques.
- Ya que el control de attitude forma parte de un conjunto de sistemas que deben de ser implementados en un cubesat, por lo tanto se debe de optimizar el espacio y energía utilizados, la selección del magneto-torque no solo se hizo pensando en el momento magnético que podía generar, a demás se considero que el espacio , peso y consumo energético sean viables para poder ser implementado en un cubesat.
- Por ultimo se puede concluir que a pesar de tratarse de una simulación se obtuvieron resultados confiables, considerando el cubesat y magneto-torque seleccionados sin la necesidad de adquirirlos o construirlos, lo que se traduce a que este trabajo no requirió de un gasto económico excesivo.

## 9. Referencias

### Referencias

- [1] André Bittencourt Do Valle, Bernardino Coelho Da Silva, Carlos Alberto Pereira Soares. (2017). Gerenciamento de projetos espaciais: do Sputnik aos dias atuais. Rio de Janeiro, RJ Brasil: FGV.
- [2] NewSpace. (2016). Varilla Magnetorquer NCTR-M002. 12/01/2021, de CubeSatShop Sitio web: <https://www.cubesatshop.com/product/nctr-m002-magnetorquer-rod/>
- [3] NewSpace. (2016). Varilla Magnetorquer NCTR-M012. 12/01/2021, de CubeSatShop Sitio web: <https://www.cubesatshop.com/product/nctr-m012-magnetorquer-rod/>
- [4] ISIS. (2013). Magnetorquer Board (iMTQ). 12/01/2021, de CubeSatShop Sitio web: <https://www.cubesatshop.com/product/isis-magnetorquer-board/>
- [5] nanoavionics. (2019-04-08). Magnetorquers MTQ3X. 12/01/2021, de satsearch Sitio web: <https://satsearch.co/products/nanoavionics-magnetorquers-mtq3x>
- [6] oceTechnology. MQ Series Magnetorquers. 12/01/2021, de SatCatalog Sitio web: <https://satcatalog.com/component/mq10/1595033511418-8b255408-bebbcbd4-9b78d9d4-03ad>
- [7] oceTechnology. MQ Series Magnetorquers. 12/01/2021, de SatCatalog Sitio web: <https://satcatalog.com/component/mq200/1595033511418-8b255408-bebbcbd4-9b78d9d4-03ad>
- [8] T. Neilsen et al. C. Fish, C. Weston. (2014). Dice: Challenges of spinning cubesats. Technical Report 97, Utah State University.
- [9] G. P. Candini, F. Piergentili, and F. Santoni. (2005). Miniaturized attitude control system for nanosatellites. Acta Astronautica, vol.81

- [10] Kikuko MIYATA, Tomohiro NARUMI, Jozef C. van der HA. (2008). Comparison of Different Magnetorquer Control Laws for QSAT. Department of Aeronautics and Astronautics, Kyushu University, Fukuoka, Japan. Department of Aeronautics and Astronautics, Tohoku University, Sendai, Japan
- [11] David K. Cheng, José Luis Sebastián Franco. (1997). Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería. México: Pearson Educación.
- [12] Alonso Sepúlveda Soto. (2009). Electromagnetismo. Colombia: Universidad de Antioquia .
- [13] Eliezer Braun. (2011). Electromagnetismo. De la ciencia a la tecnología. México: Fondo de Cultura Económica.
- [14] Paul Allen Tipler, Gene Mosca. (2004). Física para la ciencia y la tecnología. II Volumen 2 de Electricidad y magnetismo. Luz. Física moderna. España: Reverte.
- [15] Antonio Hermosa Donate. (1999). Principios de Electricidad y Electrónica II. España: Marcombo.
- [16] Paul Allen Tipler, Gene Mosca. (2012). Física para la ciencia y la tecnología. Volumen 1A Mecánica. Barcelona: Reverte.
- [17] Jerry B. Marion. (2014). Dinámica clásica de las partículas y sistemas. Barcelona: Reverte.
- [18] Santiago Burbano. (2003). Física General. Madrid: Tebar.
- [19] Lev Davidovich Landau, E. M. Lifshitz. (1970). Física teórica. Mecánica. Barcelona: Reverte.
- [20] L. D. Prieto. (2005). Drag Free and Attitude Control for a Low Earth Orbiter: a LMI Approach. Turín, Italia: Politecnico di Torino.
- [21] J.R. Wertz. (2012). Spacecraft Attitude Determination and Control. Londres: kluwer academic publishers.
- [22] Marcel J. Sidi. (1997). Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach. United States of America: Cambridge University Press.

- [23] José Rodrigo Córdoba Alarcón. (2008). Control de Estabilización para Picosatélite Universitario. Tesis de Licenciatura. México: UNAM.
- [24] James Diebel. (2006). Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation Vectors. California: Stanford University.
- [25] Dr. David R. Williams. (25/11/2020). Earth Fact Sheet. 15/03/2021, de NASA Goddard Space Flight Center Sitio web: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>
- [26] Riki Munakata, Justin Carnahan, David Pignatelli. (2014). CubeSat Design Specification. California: California polytechnic State University.
- [27] V. Steffen Jr, D.A. Rade, W.M. Bessa . (2015). An Open Source Satellite Attitude and Orbit Simulator Toolbox for Matlab. Brazil: ABCM.
- [28] M. A. A. Desouky, Kaushik Prabhu, Ossama Abdelkhalik. (2018). On Spacecraft Magnetic Attitude Control. Michigan USA: Houghton, MI.
- [29] katsuhiko Ogata. (2010). Ingeniería de control moderna. Madrid: PEARSON.
- [30] W. Bolton. (2001). Ingeniería de control. México: Alfaomega.

---

**Vo.Bo.**

Asesor de tesis:

Dr. Gustavo Mendoza Torres

Profesor Investigador de la Facultad de Ciencias de la Electrónica

---

Tesista:

Hilario Pájaro Adrián

Pasante de la Licenciatura en Electrónica